schließen läßt. Man hat auf diese Art gefunden, daß die Masse des Mondes ohngefähr dem 80sten Theile von der Masse der Erde gleich ist.

§. 22. Perturbationen der elliptischen Bahnen der Planeten.

So wie die Sonne, die Erde und der Mond sich gegenseitig anziehen, so ziehen auch die Planeten einander an. Diese gegenseitigen Anziehungen bewirken, daß die Planeten keine vollkommenen Ellipsen um die Sonne beschreiben, und da sie bei jedem Umlaufe ihre gegenseitigen Stellungen verändern, also auch verschieden auf einander einwirken, nie wieder genau denselben Weg durchlaufen, sondern immer abweichende Bahnen beschreiben, welche gleichsam in kleinen Schwankungen um eine vollkommene Ellipse oscilliren.

Diese Perturbationen sind jedoch, verglichen mit der eigentlichen elliptischen Bewegung, welche durch die anziehende Kraft der Sonne bewirkt wird, nur sehr klein, da die ungeheure Masse der Sonne die Masse aller Planeten zusammen um mehr, als 800mal übertrifft. Irrig dagegen ist die Ansicht, daß die Planeten in festen, durchaus unveränderlichen Bahnen die Sonne umkreisen. In der Natur findet sich überhaupt nichts Bleibendes, Ruhendes; ewig unveränderlich ist nur die Macht und Liebe des Schöpfers.

Aus den Perturbationen des Uranus hat der Pariser Astronom le Verrier das Vorhandensein und selbst den Ort eines jenseits des Uranus sich um die Sonne bewegenden, aber bis dahin noch unbekannten Planeten, des Neptun hergeleitet, welcher wirklich nahe an der vorher verkündigten Stelle am 23. September 1846 aufgefunden worden ist.

So wie nach dem Newton'schen Gesetze die Kräfte, mit denen die Körper sich gegenseitig anziehen, mit der Entfernung rasch abnehmen, eben so müssen diese Kräfte nach demselben Gesetze mit der Annäherung stark wachsen, und sie müssen bei der unmittelbaren Berührung unvergleichlich am stärksten sein; und wirklich haben wir oben in §. 13 gesehen, daß die Theile der Körper bei der Berührung starke Anziehungen äußern, welche dagegen schon bei dem kleinsten wahrnehmbaren Abstande unmerklich werden. Wir können hiernach vermuthen, daß die Cohäsion, Adhäsion und Schwere nicht verschiedene Kräfte, sondern nur Modifikationen ein und derselben Grundkraft sind.

Zweiter Abschnitt.

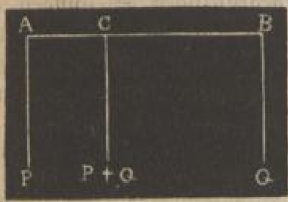
Von den mechanischen Erscheinungen fester Körper.

§. 23. Zusammensetzung und Zerlegung paralleler Kräfte.

Wenn auf einen Punkt eines Körpers mehrere Kräfte wirken, so können sich dieselben entweder gegenseitig aufheben, z. B. zwei gleiche, nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte, oder sie bringen eine Bewegung hervor. Im letzteren Falle ist es immer möglich, sich eine Kraft zu denken, welche allein im Stande ist, die nämliche Bewegung hervorzubringen. Ein Beispiel, wo mehrere Kräfte zusammen eine Bewegung hervorbringen, ist ein Rammklotz, wie man sie zum Einrammen der Pfähle gebraucht. Dasselbe wird durch eine Menge Seile, die sich in einem Punkte vereinigen und an ihren Enden von einer großen Zahl Menschen angezogen werden, in die Höhe gehoben. Es ist klar, daß eine hinreichend große Kraft diese Bewegung allein hervorbringen würde. — Eine Kraft, welche allein das nämliche wirkt als mehrere gegebene Kräfte zusammen, wird die Resultirende, auch Mittelkraft, und die gegebenen Kräfte werden Seitenkräfte oder Componenten genannt.

Wenn zwei Kräfte auf den nämlichen Punkt eines Körpers nach derselben Richtung wirken, so ist die Resultirende offenbar der Summe der beiden Kräfte gleich; wirken aber die Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen, so ist die Resultirende dem Unterschiede der gegebenen Kräfte gleich.

(Fig. 14.)



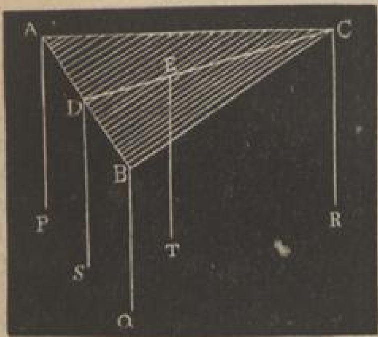
Wenn ferner auf verschiedene Punkte eines festen Körpers zwei parallele Kräfte P und Q (Fig. 14) nach derselben Seite wirken, so ist die Resultirende gleich der Summe der beiden gegebenen Kräfte $P + Q$. Sind diese einander gleich, so liegt der Angriffspunkt C der Resultirenden in der Mitte zwischen A und B. Sind die gegebenen Kräfte ungleich, so theilt der Angriffspunkt C der Resultirenden die Entfernung AB der Angriffspunkte der beiden gegebenen Kräfte in zwei Stücke AC und BC, welche sich umgekehrt wie die gegebenen Kräfte verhalten, also

$$AC : BC = Q : P.$$

Der Punkt C liegt folglich näher bei der größeren Kraft, also näher bei P, wenn P größer als Q ist. — Man nennt diesen Punkt C, in welchem die Richtung der Resultirenden die Verbindungslinie AB der Angriffspunkte A und B der gegebenen Kräfte durchschneidet, den Mittelpunkt der beiden parallelen Kräfte.

Umgekehrt läßt sich die Mittelkraft $P + Q$ durch die beiden parallelen Seitenkräfte P und Q ersetzen. Diese sind einander gleich, wenn $AC = BC$ ist; ist aber AC kleiner als BC, so ist P in dem Verhältnisse größer als Q, in welchem AC kleiner als BC ist. — Wenn z. B. zwei Menschen an den Enden einer Stange AB, (von deren Gewicht wir hier abstrahiren), eine in C aufgehängte Last tragen, so hat derjenige den größeren Theil zu tragen, welchem die Last am nächsten ist.

(Fig. 15.)



Wirken auf einen festen Körper drei parallele Kräfte, z. B. in den Punkten A, B und C (Fig. 15) die Kräfte $P = 3$, $Q = 4$ und $R = 5$, so lassen sich zunächst zwei derselben, P und Q in eine Resultirende $S = P + Q = 7$ vereinigen; und man findet den Mittelpunkt D dieser Kraft, wenn man die Linie AB in D so theilt, daß sich $AD : BD = Q : P = 4 : 3$ verhält. — Wenn man nun die Kraft S mit der Kraft R zu einer Resultirenden $T = S + R = 12$ verbindet und, um den Angriffspunkt E derselben zu finden, die Linie CD in E so theilt, daß sich $CE : DE = S : R = 7 : 5$ verhält, so wird die in E angebrachte Kraft $T = 12$ das nämliche bewirken wie die drei parallelen Kräfte P, Q und R zusammen. — Der Punkt E heißt der Mittelpunkt dieser Kräfte.

Man sieht hiernach leicht, wie man zu verfahren hätte, wenn die Resultirende und der Mittelpunkt für 4 und mehr parallele Kräfte gefunden werden sollte.

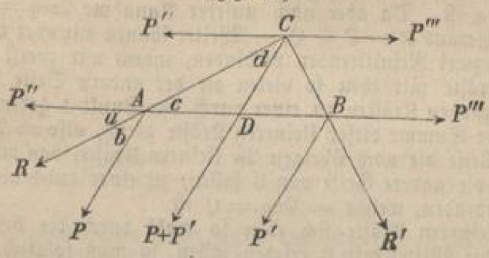
Der oben aufgeführte Satz über die Zusammensetzung paralleler Kräfte läßt sich theils auf dem Wege des Versuchs leicht bestätigen, theils durch theoretische Schlüsse ohne Schwierigkeit erweisen. Diesem letzteren Beweise haben wir die folgenden Grundsätze voranzustellen.

1) Die Wirkung einer Kraft wird nicht geändert, in welchen Punkt ihrer Richtung man auch den Angriffspunkt verlegt.

2) Wenn auf einen Punkt zwei gleiche Kräfte wirken, so halbirt die Resultirende den Winkel, welchen dieselben einschließen; denn es ist kein Grund vorhanden, warum dieselbe näher an die eine als an die andere der gegebenen Kräfte fallen sollte.

Nun läßt sich zunächst zeigen, daß die Resultirende zweier gleichen parallelen Kräfte gleich ihrer Summe, also doppelt so groß, als jede derselben ist und in die Mitte zwischen beide fällt. — Denn wenn wir zu den beiden gleichen und parallelen Kräften P und P′ (Fig. 16), deren Angriffspunkte A und B sind, zwei ihnen gleichgroße Kräfte P″ und P‴ in den Punkten A und B so hinzufügen, daß die Richtungen derselben in die Verlängerungen der Linie AB fallen, so wird hierdurch nichts geändert, da sich die beiden gleichen und entgegengesetzten Kräfte P″ und P‴ gegenseitig aufheben. Die Resultirende der vier Kräfte P, P′, P″ und P‴ kann also von der Resultirenden der beiden gegebenen Kräfte P und P′ nicht verschieden sein. Nun lassen sich aber nach dem Obigen die Kräfte P und P″ und eben so die Kräfte P′ und P‴ in eine Resultirende vereinigen, welche den von diesen Kräften eingeschlossenen Winkel halbirt. Bezeichnen wir die erstere Resultirende mit R, die letztere mit R′, und verlängern wir die Richtungen derselben, bis sie sich in C schneiden, so werden wir unbeschadet des Erfolges die Angriffspunkte der Kräfte R und R′ von A und B nach C verlegen können. So wie aber die Kraft R aus der Zusammensetzung der beiden Kräfte P und P″ in A hervorgegangen ist, so wird sich dieselbe in C auch wieder in zwei eben solche Kräfte zerlegen, durch dieselben ersetzen lassen. Da das nämliche auf gleiche Weise von der Kraft R′ gilt, so erhalten wir jetzt in C vier Kräfte, deren jede gleich P ist, und von denen zwei P″ und P‴ einander entgegengesetzt sind und sich also aufheben, die beiden andern aber P und P′ mit den ursprünglich gegebenen Kräften gleiche Richtung haben und sich folglich zu einer Kraft $= P + P' = 2P$ vereinigen. — Es erübrigt nun nur noch zu zeigen, daß diese Mittelkraft die Linie AB im Punkte D halbirt, was leicht daraus hervorgeht, daß der von den Kräften P und P″ und eben so der von P′ und P‴ eingeschlossene Winkel durch die Resultirende R und R′ halbirt wird. Denn aus der Gleichheit der Winkel a und b folgt zunächst $c = d$ und hieraus $AD = CD$. Da nun aus gleichen Gründen auch $BD = CD$ ist, so ist folglich $AD = BD$, also AB in D halbirt.

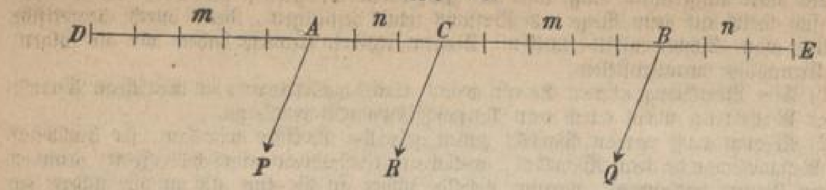
(Fig. 16.)



Dies vorausgeschickt, wenden wir uns nun zu dem Beweise des allgemeinen Satzes, daß die Resultirende zweier gleich gerichteten Kräfte allemal ihrer Summe gleich ist und die Verbindungslinie der Angriffspunkte in zwei Stücke theilt, welche sich umgekehrt wie die gegebenen Kräfte verhalten.

Sind die beiden gegebenen Kräfte P und Q (Fig. 17) und verhalten sich dieselben wie die Zahlen m und n, so theilen wir die Verbindungslinie AB ihrer Angriffspunkte in $m + n$ gleiche Theile und bezeichnen mit C denjenigen Theilungspunkt, welcher um n solcher Theile von P und um m dieser Theile von Q absteht. Hierauf verlängern wir die Linie AB über beide Endpunkte und tragen auf die Verlängerung von A bis D m und von B bis E n eben solcher Theile auf. — Da nach unserer Annahme sich $P : Q = m : n$ verhält, so ist $\frac{1}{m} P = \frac{1}{n} Q$, also auch $\frac{1}{2m} P = \frac{1}{2n} Q$. Denken wir uns nun eine diesem letztern Theile gleiche Kraft, welche wir mit q bezeichnen wollen, in der Mitte eines jeden der $2m + 2n$ gleichen Theile, aus denen die

(Fig. 17.)



ganze Linie DE besteht, angebracht, dann folgt aus dem oben über zwei gleiche Kräfte erwiesenen Satze, daß diese kleinern Kräfte, wenn man immer je zwei, welche gleich weit vom Punkte C entfernt sind, vereinigt, sich sämmtlich zu einer durch den Punkt C gehenden Resultirenden R verbinden lassen, welche der Summe aller dieser kleineren Kräfte gleich, also $= 2(m + n)q$ ist. Da aber nach unserer Annahme $2mq = P$ und $2nq = Q$ war, so ergibt sich hieraus $R = P + Q$. — Weiter können wir aber auch die $2m + 2n$ kleineren Kräfte zu zwei Resultirenden verbinden, indem wir zuerst die m zwischen A und D fallenden Kräfte mit eben so vielen an der andern Seite von A und diesem Punkte zunächst liegenden Kräften zu einer durch den Punkt A gehenden Resultirenden vereinigen, welche der Summe dieser kleineren Kräfte gleich, also $= 2mq = P$ ist, und dann auf gleiche Weise die noch übrigen 2n kleinern Kräfte, von denen eben so viele an die eine als an die andere Seite von B fallen, zu einer durch diesen Punkt gehenden Resultirenden verbinden, welche $= 2nq = Q$ ist.

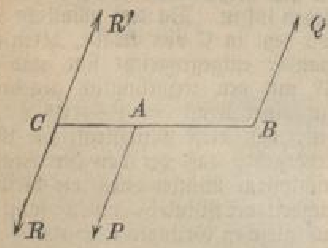
Da hiernach die $2m + 2n$ kleineren Kräfte sich eben so wohl durch die beiden Kräfte P und Q als auch durch die Mittelkraft R ersetzen lassen, so muß folglich die letztere dasselbe leisten wie jene beiden Kräfte zusammen. Die Mittelkraft R ist aber, wie wir gesehen haben, gleich der Summe der gegebenen Kräfte $P + Q$, und es verhält sich

$$AC : BC = Q : P,$$

was gezeigt werden sollte.

Wir haben bisher angenommen, daß die parallelen Kräfte nach derselben Seite hin gerichtet sind. Haben dagegen zwei parallele Kräfte P und Q (Fig. 18) eine entgegengesetzte Richtung, so ist ihre Resultirende R gleich der Differenz P—Q und durchschneidet die Verlängerung der Linie AB, welche die Angriffspunkte A und B der gegebenen Kräfte verbindet, in einem der größern Kraft P näher liegenden Punkte C so, daß sich verhält $AC : BC = Q : P$. — Denn wenn wir uns in dem Punkte C zwei nach entgegengesetzten Richtungen wirkende, mit P und Q parallele und ihrer Differenz gleiche Kräfte, welche wir mit R und R′ bezeichnen wollen, angebracht denken, so müssen die vier Kräfte P, Q, R und R′ die nämliche Resultirende haben, wie die beiden gegebenen Kräfte P und Q, da die beiden Kräfte R und R′ sich gegenseitig aufheben. Nun halten aber die drei Kräfte P, Q und R′ sich gegenseitig das Gleichgewicht. Denn die Resultirende von Q und R′ ist zufolge des Vorhergehenden gleich $Q + R' = Q + P - Q = P$. Sie geht auch durch den Punkt A, weil sich nach unserer Annahme verhält

(Fig. 18.)



$$BC : AC = P : Q,$$

also auch

$$BC - AC : AC = P - Q : Q,$$

d. h.

$$AB : AC = R' : Q.$$

Da hiernach die drei Kräfte P, Q und R′ sich gegenseitig aufheben, so ist folglich R die Resultirende der vier Kräfte P, Q, R und R′ und also auch die Resultirende der beiden gegebenen Kräfte P und Q.

Aus der oben aufgeführten Proportion

$$AB : AC = R' : Q = P - Q : Q$$

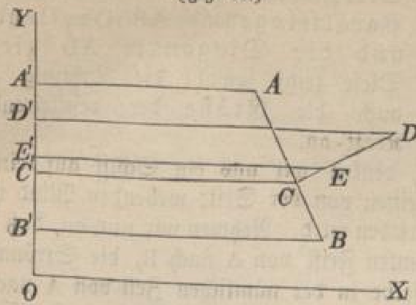
folgt

$$AC = \frac{AB \cdot Q}{P - Q} \text{ und } BC = \frac{AB \cdot P}{P - Q}.$$

Der Punkt C rückt also um so weiter hinaus, je weniger P von Q verschieden ist, und er entfernt sich ins Unendliche, wenn $P = Q$ ist. Zwei gleiche und parallele, aber nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kräfte haben überhaupt keine Resultirende, und eben so wenig läßt sich ihnen durch eine einzige Kraft das Gleichgewicht halten.

Wir beschäftigen uns nun noch ausführlicher mit der Aufgabe, den Mittelpunkt mehrerer auf einen Körper wirkenden parallelen Kräfte zu bestimmen. Um diese Aufgabe bequem zu lösen, durchschneiden wir die Richtungen der parallelen Kräfte mit einer zu denselben senkrechten Ebene und ziehen durch einen willkürlichen Punkt in dieser Ebene zwei sich senkrecht schneidende Linien, Axen, OX und OY (Fig. 19). Weiter ziehen wir aus den Angriffspunkten A und B zweier gegebenen Kräfte P und Q und aus dem Angriffspunkte C ihrer Resultirenden R mit der einen Axe OX die Parallelen AA′, BB′ und CC′, welche die andere Axe OY in den Punkten A′, B′ und C′ schneiden. Setzen wir dann noch der Kürze wegen AA′ = a, BB′ = b, CC′ = c, so verhält sich nach

(Fig. 19.)



dem Vorhergehenden $P : Q = BC : AC = b - c : c - a$,
woraus weiter folgt $b \cdot Q - c \cdot Q = c \cdot P - a \cdot P$
oder $a \cdot P + b \cdot Q = c \cdot (P + Q) = c \cdot R$.

Versteht man daher unter dem statischen Momente einer Kraft für eine Axe das Product aus der Größe der Kraft in die senkrechte Entfernung ihres Angriffspunktes von der Axe, so ergibt sich aus der vorstehenden Proportion der Satz:

Das statische Moment der Resultirenden zweier parallelen Kräfte für irgend eine Axe ist gleich der Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte für diese Axe.

Wie leicht zu zeigen, gilt jedoch dieser wichtige Satz nicht bloß für zwei, sondern für jede beliebige Anzahl von Kräften. Denn wenn wir uns z. B. zu den beiden in A und B angebrachten Kräften P und Q noch eine dritte S in irgend einem Punkte D hinzugefügt denken und den Abstand dieses Punktes von der Axe OY mit d bezeichnen, wenn ferner T die Resultirende der drei gegebenen Kräfte P, Q und S, E ihr Angriffspunkt und e der Abstand EE′ desselben von der Axe OY ist, dann läßt sich, da die beiden Kräfte P und Q zur Resultirenden R haben, T auch als die Resultirende von R und S ansehen, und es ist folglich nach dem oben für zwei Kräfte Erwiesenen
$$e \cdot T = c \cdot R + d \cdot S.$$
Nun ist aber, wie wir schon gesehen haben, $c \cdot R = a \cdot P + b \cdot Q$,
folglich
$$e \cdot T = a \cdot P + b \cdot Q + d \cdot S.$$

Weiter sieht man auch leicht, daß sich dasselbe eben so für vier und mehr parallele Kräfte darthun läßt, und daß das für die der Axe OX parallelen Abscissen Erwiesene auf gleiche Weise auch für die der Axe OY parallelen Ordinaten gilt. Die Lage eines Punktes in einer Ebene ist aber bestimmt, wenn seine Abscisse und Ordinate gegeben sind.

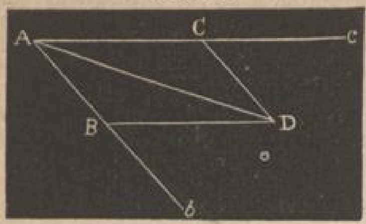
Wir haben bei der Ableitung des zuletzt erwiesenen Satzes stillschweigend angenommen, daß die parallelen Kräfte nach derselben Seite hinwirken. Dieser Satz bleibt aber auch, wie äußerst leicht zu sehen, noch richtig, wenn ein Theil der Kräfte nach der einen, der andere nach der entgegengesetzten Seite hin gerichtet ist. Man hat nämlich dann nur nöthig, die nach der einen Richtung hin wirkenden Kräfte als positiv, die nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden als negativ anzusehen.

Wenn eine Axe durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte geht, so verschwindet für dieselbe offenbar das statische Moment der Resultirenden. Es ergibt sich hieraus der für spätere Entwickelungen nicht unwichtige Satz: Für eine durch den Mittelpunkt mehrerer parallelen Kräfte gehende Axe ist die Summe der statischen Momente dieser Kräfte gleich Null.

§. 24. Zusammensetzung der Kräfte, welche auf einen Punkt wirken.

Wenn zwei auf einen Punkt wirkende Kräfte, deren Richtungen und verhältnißmäßige Größen wir durch die Lienen AB und AC (Fig. 20)

(Fig. 20.)



darstellen, einen Winkel BAC einschließen, so wird die Resultirende gefunden, wenn man aus den Seitenkräften AB und AC das Parallelogramm ABDC vollendet und die Diagonale AD zieht. Diese zeigt sowohl die Richtung als auch die Größe der resultirenden Kraft an.

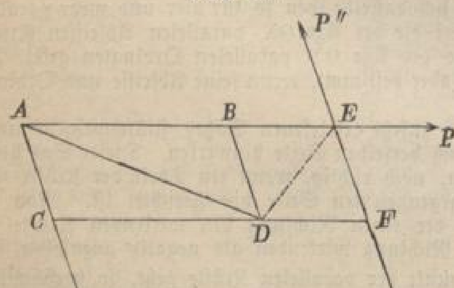
Um diesen Satz zu verdeutlichen, denken wir uns ein Schiff auf einem Flusse, welches zu gleicher Zeit durch einen von der Seite wehenden Wind und durch die Strömung des Flusses fortgetrieben wird. Nehmen wir nun an, daß der Wind allein das Schiff in einer bestimmten Frist von A nach B, die Strömung des Flusses aber ohne den Wind dasselbe in der nämlichen Zeit von A nach C führen würde, so ist die Diagonale AD der Weg, welchen das Schiff in dieser Zeit wirklich zurückgelegt, wenn es beiden Kräften zugleich unterworfen ist.

Aus dem über die Bestimmung der resultirenden Kraft angeführten Satze folgt: — Die Resultirende zweier Kräfte ist niemals größer als die Summe und niemals kleiner als die Differenz der gegebenen Kräfte. Sie wird um so größer, je kleiner der Winkel ist, welchen die gegebenen Kräfte einschließen, und sie fällt um so kleiner aus, es geht um so mehr an Kraft verloren, je größer dieser Winkel ist. Sind die beiden gegebenen Kräfte einander gleich, so halbirt die Resultirende den Winkel, welchen dieselben enschließen. Sind die gegebenen Kräfte ungleich, so fällt die Resultirende näher an die größere als an die kleinere.

Wirken auf einen Punkt mehrere Kräfte, so wird die Resultirende gefunden, wenn man zwei Kräfte zu einer Mittelkraft verbindet, diese dann mit der dritten in eine vereinigt u. s. w.

Sollen drei Kräfte, welche auf einen Punkt wirken, sich das Gleichgewicht halten, so muß die Resultirende von zweien der dritten gerade gleich und entgegengesetzt sein.

(Fig. 21.)

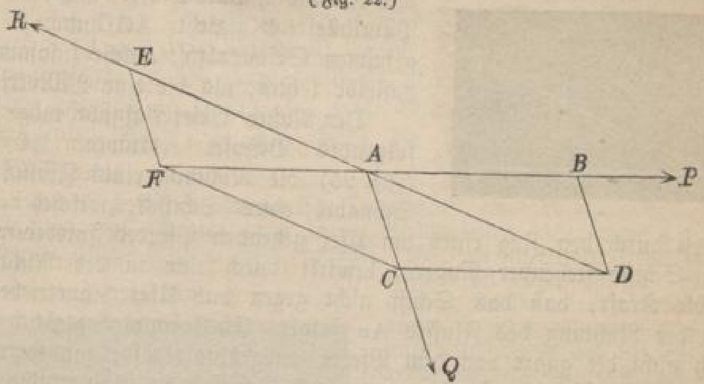


Der Beweis des oben aufgeführten wichtigen Satzes vom Parallelogramm der Kräfte ist folgender: Wenn wir aus den beiden Kräften AB = P und AC = Q (Fig. 21) das Parallelogramm ABDC vollenden, so läßt sich zunächst zeigen, daß die Diagonale AD die Richtung der Resultirenden angibt. Zu diesem Zwecke verlängern wir die Linie AB über den Punkt B, machen die Verlängerung BE = BD und denken uns den Angriffspunkt der Kraft P von A nach E verlegt. Ferner denken wir uns noch im Punkte E zwei entgegengesetzte Kräfte P′ und P″ angebracht, welche mit P gleiche Größe, mit AC und BD parallele Richtungen haben. Da die beiden Kräfte P′ und P″ sich gegenseitig aufheben, so müssen die vier Kräfte P, Q, P′ und P″ die nämliche Resultirende wie die beiden gegebenen Kräfte P und Q haben. Verbinden wir zunächst die beiden Kräfte P und P″ zu einer Resultirenden, so muß dieselbe nach dem in der Anmerkung zum vorh. §. Angeführten den Winkel halbiren, welchen die Richtungen dieser Kräfte am Punkte E einschließen und die verlängerte

Richtung derselben muß folglich durch den Punkt D gehn, da das Parallelogramm BEFD vier gleiche Seiten hat. Vereinigen wir ferner die beiden parallelen Kräfte P' und Q zu einer Resultirenden, so muß nach dem im vorhergehenden §. erwiesenen Hauptsatze die Resultirende derselben ebenfalls durch den Punkt D gehn, da sich nach unserer Annahme $P : Q = AB : AC = CD : DF$ verhält. Da hiernach der Punkt D sowohl auf der Resultirenden der beiden Kräfte P und P'' als auch auf der Resultirenden der Kräfte P' und Q liegt, so muß folglich die Resultirende der vier Kräfte P, P', P'' und Q durch den Punkt D gehn, und dasselbe muß zufolge des oben Angeführten auch von der Resultirenden der beiden gegebenen Kräfte P und Q gelten.

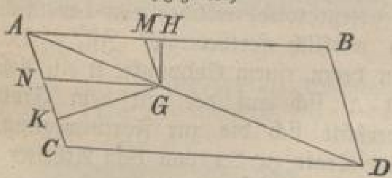
Wir haben nun weiter noch zu zeigen, daß die Diagonale AD des Parallelogramms ABDC auch die Größe der Resultirenden anzeigt. Um dieses darzuthun, verlängern wir die Diagonale AD des Paralellogramms ABCD (Fig. 22) über A und bringen in der Richtung

(Fig. 22.)



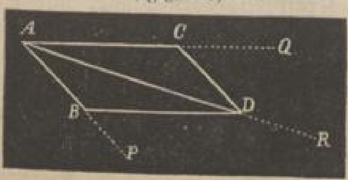
dieser Verlängerung eine Kraft $R = AE$ an, von welcher wir annehmen, daß sie mit der Resultirenden der beiden gegebenen Kräfte $P = AB$ und $Q = AC$ gleiche Größe hat. Dann ist offenbar zwischen den drei Kräften P, Q und R Gleichgewicht vorhanden. — Ziehen wir ferner $CF \parallel AE$ und $EF \parallel AC$ und verbinden den Durchschnittspunkt F der Parallelen mit A, so zeigt zufolge des oben Erwiesenen die Diagonale AF des Parallelogramms ACFE die Richtung der Resultirenden der beiden Kräfte Q und R an. Weil aber, wie schon bemerkt, zwischen den drei Kräften P, Q und R Gleichgewicht vorhanden ist, so muß die Richtung der Resultirenden von Q und R der Richtung der dritten Kraft P gerade entgegengesetzt, also FAB eine gerade Linie sein. Nun ist $\triangle ACD \cong EFA$ ($AC = EF$, W. $CAD = FEA$ und $CDA = FAE$), folglich $AD = AE = R$, was gezeigt werden sollte.

(Fig. 23.)



Wenn man aus irgend einem Punkte G der Resultirenden AD zweier Kräfte $AB = P$ und $AC = Q$ (Fig. 23) Lote auf die Richtungen derselben fällt, so verhalten sich diese Lote GH und GK umgekehrt wie die gegebenen Kräfte. Denn wenn man noch $GM \parallel AC$ und $GN \parallel AB$ zieht, so ist $\triangle GHM \sim GKN$, folglich verhält sich $GH : GK = GM : GN = AC : AB = Q : P$.
Aus dieser Proportion folgt $P \cdot GH = Q \cdot GK$,
d. h. *für jeden Punkt der Resultirenden sind die statischen Momente der beiden Seitenkräfte einander gleich*, wenn man nämlich unter dem *statischen Momente* einer Kraft für einen gegebenen Punkt das Produkt aus der Größe der Kraft in das aus dem gegebenen Punkte auf die Richtung derselben gefällte Lot versteht.

(Fig. 24.)



Für die mit der Trigonometrie vertrauten Leser fügen wir noch Folgendes hinzu: Ist α der von den Seitenkräften P und Q eingeschlossene Winkel BAC (Fig. 24) und R die Resultirende derselben, so ist in dem Dreiecke ABD

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos ABD$$
$$= AB^2 + BD^2 + 2AB \cdot BD \cos \alpha,$$

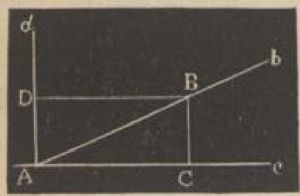
folglich, da sich die Kräfte P, Q und R wie die Linien AB, AC und AD verhalten,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}.$$

§. 25. Zerlegung der Kräfte.

Häufig ist es auch der Fall, daß für eine Mittelkraft AB (Fig. 25) zwei Seitenkräfte von vorgeschriebener Richtung Ac und Ad gesucht werden, welche das nämliche leisten wie die eine gegebene Mittelkraft. Man findet die gesuchten Größen der Seitenkräfte, wenn man durch B mit Ac die Parallele BD und mit Ad die Parallele BC zieht. AC und AD sind die gesuchten Seitenkräfte, welche zusammen eben dasselbe leisten, als die eine Mittelkraft AB.

(Fig. 25.)



Den Nutzen dieser Aufgabe möge zunächst folgendes Beispiel erläutern: Es sei Ac (Fig. 25) die Richtung eines Flusses, A der Schnabel eines Schiffes, welches an einer Leine Ab durch den Zug eines am Ufer gehenden Pferdes fortbewegt wird; ein im Schiffe stehender Ruderer bewirkt durch eine in der Richtung Ad ausgeübte Kraft, daß das Schiff nicht gegen das Ufer hingetrieben wird, sondern der Richtung des Flusses Ac folgt. Es leuchtet sogleich ein, daß hiernach nicht die ganze von dem Pferde ausgeübte Kraft, sondern nur ein Theil derselben für die Fortbewegung des Schiffes in Anwendung kommt. Um diesen Theil zu finden, drücken wir die Kraft, welche das Pferd wirklich ausübt, durch AB aus und zerfällen dieselbe in die beiden Seitenkräfte AC und AD, indem wir BD parallel zu Ac und BC parallel zu Ad ziehen. Die Linie AC gibt uns die verhältnißmäßige Größe der Kraft an, mit welcher das Schiff wirklich fortbewegt wird, und die Linie AD zeigt uns die Kraft an, welche der Ruderer anzuwenden hat, damit das Schiff nicht seitwärts gegen das Ufer getrieben wird.

So wie in dem angeführten Beispiele an Kraft verloren geht, so findet dasselbe in unzähligen anderen Fällen, überhaupt allemal dann statt, wenn ein Körper durch einen Zug in Bewegung gesetzt wird, welcher von der Richtung abweicht, in welcher der Körper sich wirklich fortbewegt. Ist z. B. AB (Fig. 25) die Deichsel einer Karre, an deren einem Endpunkte B ein Arbeiter zieht, während der andere Endpunkt A sich auf der mit dem Erdboden parallelen Linie AC fortbewegt, so verhält sich die zur Fortbewegung der Karre wirklich in Anwendung kommende Kraft zu der von dem Arbeiter ausgeübten Kraft wie AC zu AB.

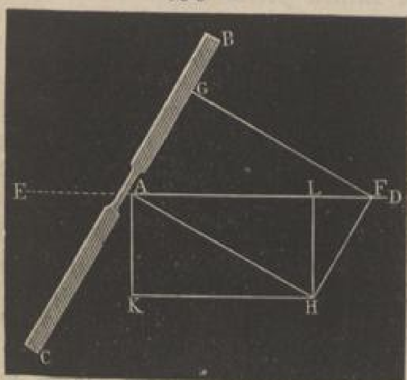
Ein anderes Beispiel von der Zerlegung der Kräfte ist folgendes: — Eine Kraft kann auf eine Fläche einen Druck niemals anders als in senkrechter Richtung hervorbringen. Der Druck, welchen eine schief wirkende Kraft ausübt, ist niemals der vollen Größe der Kraft, sondern immer nur einem Theile derselben gleich, welcher sich auf folgende Art finden läßt: Es sei Ac (Fig. 25) eine ebene Fläche, AB eine schief wirkende Kraft, (z. B. die Kraft eines Wasser- oder Luftstromes). Um den Druck zu bestimmen, welchen diese Kraft auf die Fläche Ac ausübt, zerlegen wir dieselbe in die beiden Seitenkräfte AC und AD, von denen AC der ebenen Fläche parallel und

AD auf derselben senkrecht ist. AD zeigt die Größe des wirklich ausgeübten Druckes an; (AC aber mißt die Kraft, mit welcher die Wasser- der Lufttheilchen längs der Fläche Ac fortbewegt werden). — Der Druck AD ist um so größer, je größer der Neigungswinkel BAC ist, und derselbe ist der vollen Größe der Kraft AB gleich, wenn diese auf der ebenen Fläche Ac senkrecht steht.

Auf die angegebene Art läßt sich der Druck bestimmen, welchen die Strömung des Wassers auf das schief gestellte Steuerruder eines Schiffes, der Wind auf die schief gestellten Segel eines Schiffes oder auf die Flügel einer Windmühle ausübt. Diese letztern sind an der Drehungsaxe so angebracht, daß ihre Ebenen mit derselben schiefe Winkel bilden, und da die Axe allemal so gestellt wird, daß sie in der Richtung des Windes fällt, so werden die Flügel selbst von dem Winde in schiefer Richtung getroffen. Wird nun z. B. der senkrecht in die Höhe gerichtete Flügel nach der rechten Seite hin vom Winde gedrückt, so erleidet der nach unten gerichtete Flügel einen Druck nach der linken Seite, so daß beide die Axe in demselben Sinne zu drehen streben.

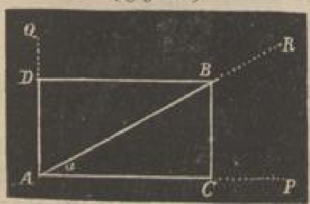
Es sei BC (Fig. 26) der wagerechte Durchschnitt eines Windmühlenflügels und AD die Richtung des Windes; dann ist die Verlängerung dieser Linie AE der Axe, an welcher die Flügel befestigt sind, parallel. Um den senkrechten Druck zu finden, welchen der Wind auf den Flügel BC ausübt, drücken wir die Kraft desselben durch die Linie AF aus und ziehen FG und AH senkrecht auf BC, FH aber parallel mit BC; dann gibt die Linie AH die Größe des vom Winde senkrecht ausgeübten Druckes an. Der Punkt A kann jedoch der Richtung dieses Druckes nicht unmittelbar folgen, sondern sich nur in einer auf der Linie DE senkrechten Richtung fortbewegen. Um nun die Größe der Kraft zu finden, mit welcher der Punkt A in dieser Richtung fortgetrieben wird, zerlegen wir AH nochmals in zwei Seitenkräfte, indem wir AK und HL senkrecht auf DE und HK parallel mit DE ziehen. Dann gibt AK die Größe der Kraft an, mit welcher der Wind den Flügel antreibt, sich um die Axe, an welcher derselbe befestigt ist, zu drehen.

(Fig. 26.)



Wenn wir uns über AF als Durchmesser einen Halbkreis beschrieben denken, so muß dieser durch den Punkt H gehen, da der Winkel AHF ein rechter ist. Es ist daher die Linie LH und also auch AK dann am größten, wenn der Punkt L in den Mittelpunkt des Halbkreises fällt und folglich LH = AL, also Winkel LAH = 45° = LAG ist. Damit die größte Wirkung erzielt werde, müssen hiernach die Flügel an der Drehungsaxe so angebracht sein, daß ihre Ebenen mit derselben Winkel von 45° bilden.

(Fig. 27.)



Ganz ähnliche Betrachtungen würden sich auch über das Steuerruder einer sogenannten fliegenden Brücke anstellen lassen.

Wenn überhaupt eine Kraft AB = R (Fig. 27) in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte AC = P und AD = Q zerfällt wird und Winkel BAC = α ist, so ist P = R cos α und Q = R sin α.

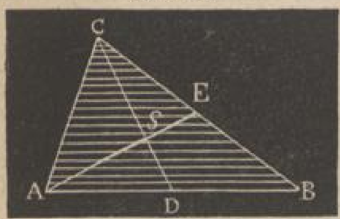
§. 26, a. Schwerpunkt.

In jedem schweren Körper gibt es einen Punkt, bei dessen Unterstützung der Körper ruht; dieser Punkt heißt der *Schwerpunkt*. Um zu einem klaren Verständniß der Richtigkeit dieses Satzes zu gelangen, dient Folgendes:

Man kann die Schwere eines Körpers als die Summe der Anziehungen ansehen, welche alle materiellen Theile desselben von der Erde erleiden. Obschon die Richtungen dieser anziehenden Kräfte gegen den Mittelpunkt der Erde hin convergiren, so kann man doch wegen der großen Entfernung des Mittelpunktes der Erde die Richtungen der Kräfte, mit welchen die verschiedenen Punkte eines Körpers auf der Erde von derselben angezogen werden, als parallel annehmen. Man kann daher die Schwere eines Körpers als die Resultirende und den Schwerpunkt als den Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte ansehen und im Schwerpunkte sich die ganze Schwere eines Körpers vereinigt denken. Es folgt hieraus, daß *ein Körper nur so lange ruhen kann, als sein Schwerpunkt unterstützt ist.*

Der Schwerpunkt einer Kugel, in welcher die Masse gleichförmig vertheilt ist, liegt offenbar im geometrischen Mittelpunkt derselben, *der Schwerpunkt eines gleichförmigen Stabes* in dessen Mitte. *Der Schwerpunkt eines materiellen Dreiecks* (eines dreieckigen Brettes) ABC (Fig. 28) wird gefunden, wenn man die Mitten zweier Seiten D und E mit den gegenüberliegenden Ecken C und A verbindet. Der Durchschnittpunkt S dieser Verbindungslinien ist der gesuchte Schwerpunkt. Denn wenn man sich das Dreieck ABC durch Linien parallel zu AB gezogen in sehr schmale Streifen getheilt denkt, so werden diese Streifen sämmtlich durch CD halbirt. In der Linie CD müssen daher die Schwerpunkte aller Streifen und folglich auch der Schwerpunkt des Dreiecks liegen. Eben so findet man, daß derselbe in der Linie AE liegt. Er muß folglich im Durchschnittspunkte S liegen. — Der Punkt S ist doppelt so weit von der Spitze, als von der Grundlinie enfernt ($DS = \frac{1}{2} CS$*).

(Fig. 28.)



Der Schwerpunkt eines beliebigen Vielecks wird gefunden, wenn man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerschneidet, die Schwerpunkte und Gewichte der einzelnen Dreiecke bestimmt, diese Gewichte als parallele Kräfte ansieht und (nach Anleitung von §. 23) den Mittelpunkt derselben sucht.

Der Schwerpunkt eines *Kreises* oder eines kreisförmigen *Ringes* liegt im Mittelpunkte desselben, der Schwerpunkt eines *Parallelogramms* im Durchschnittspunkte der beiden Diagonalen.

Der Schwerpunkt eines *Prismas* fällt in die Mitte der Linie, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindet.

Der Schwerpunkt einer *Pyramide* liegt in der Linie, welche die Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet, und ist von der Spitze dreimal so weit als von der Grundfläche entfernt. — Dieses gilt eben so vom *Kegel*.

Der Schwerpunkt eines Cylinders liegt in der Mitte seiner Axe.

*) Vergl. Planimetrie, §. 265.

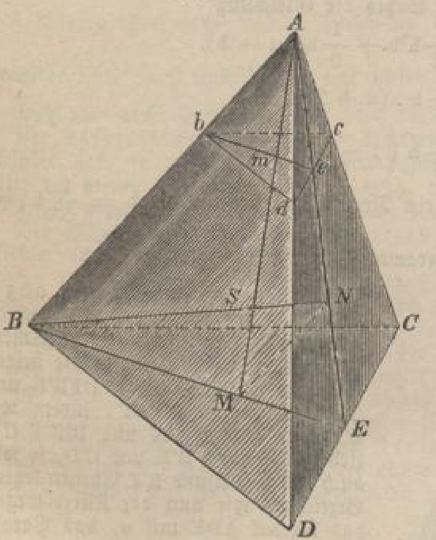
Da alle eckigen Körper sich in Pyramiden zerfällen lassen, so ist man durch das Vorhergehende in den Stand gesetzt, ihre Schwerpunkte auf theoretischem Wege zu bestimmen.

Praktisch wird der Schwerpunkt eines Körpers gefunden, wenn man denselben an zwei beliebigen Stellen an einem Faden aufhängt. Da der Schwerpunkt, wenn der Körper zur Ruhe gekommen ist, jedesmal in der verlängerten Richtung des Fadens liegt, so schneiden sich diese Verlängerungen in dem gesuchten Schwerpunkte.

Ueber die theoretischen Bestimmungen des Schwerpunktes fügen wir noch Folgendes hinzu:

Um den Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide ABCD (Fig. 29) zu finden, halbiren wir eine Seitenkante CD im Punkte E, verbinden diesen Punkt mit den gegenüberstehenden Ecken A und B, theilen die Verbindungslinien AE und BE in den Punkten M und N so, daß $ME = \frac{1}{3}$ BE, $NE = \frac{1}{3}$ AE ist, und verbinden die Theilungspunkte M und N mit A und B. Dann ist der Durchschnittspunkt S dieser Verbindungslinien der gesuchte Schwerpunkt der Pyramide ABCD. — Denn wenn wir in irgend einem Abstande von der Spitze A die Pyramide ABCD mit einer der Grundfläche BCD parallelen Ebene bcd durchschneiden, welche von den Linien AE und AM in den Punkten m und e getroffen wird, so ist, wie leicht zu sehen, $ce = de$ und $me = \frac{1}{2}\,mb$, folglich der Punkt m der Schwerpunkt des Dreiecks bcd. Denken wir uns daher die Pyramide parallel mit der Grundfläche BCD in unendlich viele, unendlich dünne Schichten zerschnitten, so fallen die Schwerpunkte dieser sämmtlichen Schichten in die Linie AM, in welcher daher auch der Schwerpunkt der ganzen Pyramide enthalten sein muß. — Da nun aus gleichen Gründen der Schwerpunkt der Pyramide auch auf der Linie BN liegen muß, so muß derselbe folglich in den Punkt S fallen, in welchem sich die Linien AM und BN durchschneiden. — Verbinden wir noch die Punkte M und N, so ist, wie leicht zu sehen, $MN \parallel AB$ und $\triangle MNS \sim ABS$; daher verhält sich $MS : AS = MN : AB = EM : EB = 1 : 3$. Demnach ist MS dem vierten Theile von AM und folglich auch der senkrechte Abstand des Schwerpunktes S von der Grundfläche BCD dem vierten Theile der Höhe der Pyramide gleich.

(Fig. 29.)



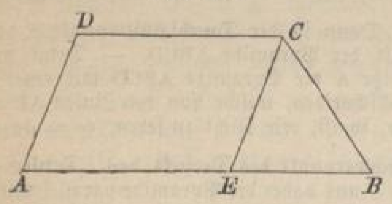
Ist die Grundfläche der Pyramide ein mehrseitiges Vieleck, so muß zunächst der Schwerpunkt derselben auf der Linie liegen, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt S der Grundfläche verbindet. Denn diese Linie durchschneidet jeden mit der Grundfläche parallelen Durchschnitt in einem Punkte S′, dessen Lage in dem der Grundfläche ähnlichen Durchschnitte ganz homolog ist der Lage des Punktes S in der Grundfläche, und der folglich, da S nach unserer Annahme der Schwerpunkt der Grundfläche sein soll, der Schwerpunkt des ähnlichen Durchschnitts sein muß. — Der Schwerpunkt der Pyramide muß ferner um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche abstehen, da, wenn wir uns die mehrseitige Pyramide durch Ebenen, welche durch die Spitze gehen, in dreiseitige zerlegt denken, die Schwerpunkte dieser dreiseitigen Pyramiden sämmtlich den angegebenen Abstand von der Grundfläche haben.

Aus dem für die Pyramiden Erwiesenen ergibt sich leicht weiter, daß der Schwerpunkt eines **Kegels** in der Axe desselben liegt und um den vierten Theil derselben von dem Mittelpunkte der Grundfläche absteht.

Ehe wir zu weiteren Ableitungen übergehen, schicken wir noch den folgenden, für dieselben wichtigen Satz voran: Da nach §. 23, Anm., das statische Moment mehrerer parallelen Kräfte für irgend eine Axe gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte für diese Axe ist, so folgt hieraus, daß, wenn ein Körper aus Theilen besteht, **das statische Moment des ganzen Körpers gleich ist der Summe der statischen Momente der einzelnen Theile.**

Der Schwerpunkt eines **Trapezes** ABCD (Fig. 30) muß aus demselben Grunde, welchen wir oben in dem Haupttexte für das Dreieck in Anwendung gebracht haben, in der Linie liegen, welche die Mitte der parallelen Seiten AB und CD verbindet. Um seinen Abstand von der größeren Parallelen AB, welchen wir mit x bezeichnen wollen, zu bestimmen, zerschneiden wir das Trapez durch die Linie CE, welche wir mit AD parallel ziehen, in das Parallelogramm AECD und das Dreieck BCE und denken uns AB als Momenten-Axe. Dann sind, wenn wir AB = a und CD = b setzen und die Höhe des Trapezes mit h bezeichnen, die Inhalte des Trapezes, des Parallelogramms und des Dreiecks

(Fig. 30.)



$$h \, . \, \frac{a+b}{2}, \; h \, . \, b, \; \frac{1}{2} h \, . \, (a-b)$$

und die Abstände ihrer Schwerpunkte von AB

$$x, \; \frac{1}{2} h \text{ und } \frac{1}{3} h.$$

Wir erhalten daher zufolge des oben über die statischen Momente angeführten Satzes die Gleichung

$$h \, . \left(\frac{a+b}{2}\right) . \, x = \frac{1}{2} h^2 b + \frac{1}{6} h^2 (a-b),$$

oder

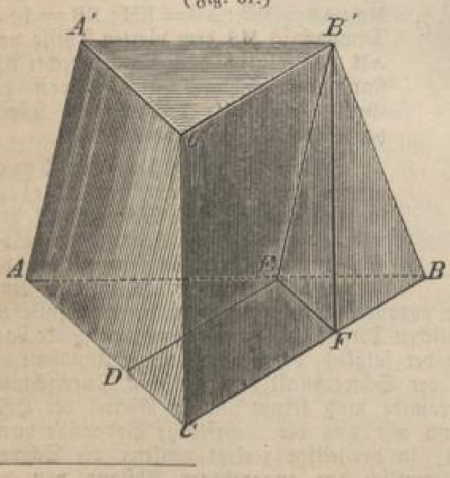
$$(a+b)\, x = \frac{1}{3} h \, . \, (a + 2b),$$

also

$$x = \frac{1}{3} h \left(1 + \frac{b}{a+b}\right).$$

Ist b = 0, so geht das Trapez in ein Dreieck über, und x wird $= \frac{1}{3} h$; ist b = a, so ist das Trapez ein Parallelogramm, und x wird dann $= \frac{1}{2} h$.

(Fig. 31.)



Um den Schwerpunkt einer **abgekürzten dreiseitigen Pyramide** ABCA'B'C' (Fig. 31) zu bestimmen, zerschneiden wir dieselbe in die beiden Prismen A'B'C'AED, CC'DFB'E und in die Pyramide B'BEF, indem wir B'E und C'D ∥ A'A und B'F ∥ C'C ziehen und durch B'E und C'D, so wie auch durch B'E und B'F Ebenen legen. Bezeichnen wir nun der Kürze wegen das Dreieck ADE mit α, das Parallelogramm CDEF mit 2β und das Dreieck BEF mit γ, ferner die Höhe der abgekürzten Pyramide mit h, dann sind die Inhalte der drei Körper A'B'C'ADE, CC'DFB'E und BB'EF gleich

$$h\alpha, \; h\beta^{*)} \text{ und } \frac{1}{3} h\gamma,$$

*) Das Prisma CC'DFB'E ist die Hälfte eines Parallelepipedums, welches CDEF zur Grundfläche und h zur Höhe hat.

und die Abstände ihrer Schwerpunkte von der Grundfläche ABC gleich

$$\frac{1}{2}\,h,\ \frac{1}{3}\,h \text{ und } \frac{1}{4}\,h.$$

Bezeichnen wir den Inhalt des ganzen Körpers mit k und den Abstand seines Schwerpunktes von der Grundfläche ABC mit x, so erhalten wir, da der ganze Körper der Summe der drei Theile und das statische Moment desselben der Summe der statischen Momente dieser Theile gleich sein muß, die Gleichungen

$$1)\ k = h\left(\alpha + \beta + \frac{1}{3}\gamma\right) = \frac{1}{3}h\,(3\alpha + 3\beta + \gamma)$$

$$2)\ k\,.\,x = h^2\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{12}\gamma\right) = \frac{1}{12}h^2\,(6\alpha + 4\beta + \gamma).$$

Setzen wir, um abzukürzen, $3\alpha + 3\beta + \gamma = g$, so ist g die Grundfläche einer Pyramide, welche mit dem gegebenen Körper k gleiche Höhe und gleichen Inhalt hat, und die vorstehenden Gleichungen gehen in die folgenden über:

$$3)\ k = \frac{1}{3}hg = \frac{1}{12}h\,.\,4g$$

$$4)\ kx = \frac{1}{12}h^2\,(2g - 2\beta - \gamma).$$

Dividiren wir diese Gleichungen in einander, so ergibt sich

$$5)\ x = h\left(\frac{1}{2} - \frac{2\beta + \gamma}{4g}\right) = \frac{1}{2}h\left(1 - \frac{2\beta + \gamma}{2g}\right).$$

Da $2\beta + \gamma$ offenbar der Differenz der beiden Grundflächen ABC und A'B'C', welche wir mit G und G' bezeichnen wollen, gleich ist, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$6)\ x = \frac{1}{2}h\left(1 - \frac{G - G'}{2g}\right).$$

Beim Prisma ist $G = G'$, und die Gleichung (6) ergibt $x = \frac{1}{2}h$; bei der vollständigen Pyramide ist $G' = 0$ und $G = g$ und unsere Gleichung liefert für x den Werth $\frac{1}{4}h$.

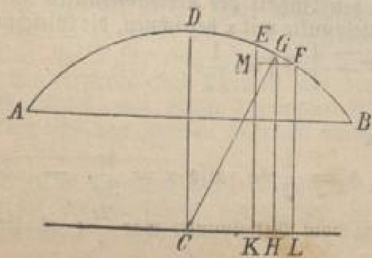
Daß aber diese Gleichung nicht bloß für die dreiseitige abgekürzte, sondern auch für jede vierseitige abgekürzte Pyramide und den abgekürzten Kegel Giltigkeit hat, so wie, daß der Schwerpunkt in der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Grundflächen liegen muß, wird nach den früher ausgeführten Entwicklungen eines besondern Beweises nicht bedürfen.

Der Schwerpunkt eines Kegelmantels muß, wie sofort einleuchtet, in der Axe desselben liegen. — Denken wir uns, um die Lage des Schwerpunktes in der Axe genauer zu bestimmen, den Kegelmantel durch Linien, von der Spitze nach dem Umfange der Grundfläche gezogen, in unendlich schmale Streifen zerschnitten, so werden wir dieselben füglich als Dreiecke ansehen können. Da nun der Schwerpunkt eines jeden dieser Dreiecke doppelt so weit von der Spitze als von der Grundfläche absteht, so muß dasselbe auch von dem Schwerpunkte des Kegelmantels gelten.

Die Lage des Schwerpunkts eines abgekürzten Kegelmantels erhalten wir nach der nämlichen Regel, welche wir oben für das Trapez entwickelt haben.

Der Schwerpunkt eines materiellen Kreisbogens ADB (Fig. 32) muß offenbar in dem Radius CD liegen, welcher die Mitte des Bogens mit dem Mittelpunkte verbindet. Nehmen wir auf dem Bogen ADB einen unendlich kleinen Theil EF an, so werden wir diesen unendlich kleinen Bogen EF ohne erheblichen Fehler mit seiner Sehne verwechseln und annehmen können, daß sein Schwerpunkt in den Halbirungspunkt G fällt. Ziehen wir nun durch den Mittelpunkt C eine zum Radius CD senkrechte Linie und fällen auf dieselbe das Lot GH, so ist das statische Moment des Bogens EF für die Linie CH als Axe gleich EF . GH.

(Fig. 32.)



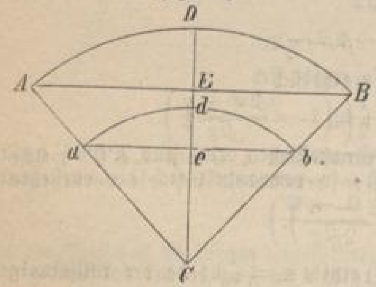
Ziehen wir ferner EK und FL || GH und FM || KL, so ist △ EMF ∾ CHG (W. CGH + HGF = 90° = HGF + GFM, also CGH = GFM und W. CHG = EMF = 90°).

Daher verhält sich $EF : FM = CG : GH$;
folglich ist das statische Moment des unendlich kleinen Bogens EF
$$EF \,.\, GH = CG \,.\, FM = r \,.\, KL,$$
wenn wir den Radius CG mit r bezeichnen.

Denken wir uns nun den Bogen ADB in unendlich viele, unendlich kleine Theile getheilt, auf welche wir die so eben angestellte Ueberlegung anwenden, so werden wir leicht zu dem Schlusse gelangen, daß das statische Moment des Bogens ADB gleich
$$r \,.\, AB = r \,.\, s$$
ist, wenn wir der Kürze wegen die Sehne $AB = s$ setzen. Bezeichnen wir dann weiter den Abstand des Schwerpunktes des Bogens ADB vom Mittelpunkte C mit x und die Länge dieses Bogens, (wenn wir uns denselben zur geraden Linie ausgestreckt denken), mit l, so erhalten wir die Gleichung $l \,.\, x = r \,.\, s$, also $x = \frac{r \,.\, s}{l}$.

Für den **Halbkreis** ist $s = 2r$ und $l = r\pi$, daher $x = \frac{2r}{\pi}$.

(Fig. 33.)



Um die Lage des Schwerpunktes eines **Kreisausschnittes** CADB (Fig. 33) zu bestimmen, denken wir uns denselben durch Linien aus dem Mittelpunkte gezogen in unendlich viele, unendlich schmale Streifen zerschnitten. Da wir diese Streifen als Dreiecke ansehen können, so stehen die Schwerpunkte derselben sämmtlich um $^2/_3$ des ganzen Radius vom Mittelpunkte C ab, und der Schwerpunkt des Kreisausschnittes muß folglich mit dem Schwerpunkte eines materiellen Kreisbogens adb zusammenfallen, welchen wir uns zwischen CA und CB mit $^2/_3$ des Radius um den Punkt C beschrieben denken. Bezeichnen nun die Buchstaben r, s, l für den Bogen ADB dasselbe wie bei der vorstehenden Ableitung, und haben die Buchstaben r', s', l' die nämliche Bedeutung für den Bogen adb, so ist der Abstand des Schwerpunktes des Bogens adb, also auch des Kreisausschnittes CADB vom Mittelpunkte C,
$$x = \frac{r' \,.\, s'}{l'},$$
oder da $r' = \frac{2}{3}r$, also auch $s' = \frac{2}{3}s$ und $l' = \frac{2}{3}l$ ist,
$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \,.\, s}{l}.$$

Der **Kreisabschnitt** ADB (Fig. 33) ist die Differenz zwischen dem Kreisausschnitte CADB und dem Dreiecke ACB. Die Inhalte dieser beiden Figuren sind
$$\frac{1}{2}rl \text{ und } \frac{1}{2}s \,.\, \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}.$$

Die Abstände ihrer Schwerpunkte vom Mittelpunkte C sind zufolge des Vorhergehenden
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{l} \text{ und } \frac{2}{3}\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}.$$

Da nun für eine durch den Punkt C zur Sehne AB parallel gezogene Axe das Moment des Abschnittes gleich der Differenz der Momente des Ausschnittes und des Dreiecks sein muß, so erhalten wir, wenn wir den Inhalt des Kreisabschnittes mit A und den Abstand seines Schwerpunktes vom Mittelpunkte mit x bezeichnen, die Gleichung
$$A \,.\, x = \frac{1}{3}r^2s - \frac{1}{3}s\left(r^2 - \frac{1}{4}s^2\right) = \frac{1}{12}s^3,$$
folglich
$$x = \frac{s^3}{12A}.$$

Bei einem **Halbkreise** ist $s = 2r$ und $A = \frac{1}{2}r^2\pi$, also $x = \frac{4r}{3\pi}$. — Der Abstand des Schwerpunktes der halben Peripherie vom Mittelpunkte war $\frac{2r}{\pi}$; es liegt daher der Schwerpunkt der halben Kreislinie anderthalbmal so weit vom Mittelpunkte entfernt als der Schwerpunkt der halben Kreisfläche.

Der Schwerpunkt einer Kugelzone liegt offenbar in der Axe derselben. Denken wir uns die Kugelzone durch unendlich viele gleich weit von einander abstehende und senkrecht zur Axe gelegte Ebenen in unendlich schmale kreisförmige Streifen zerschnitten, so haben diese Streifen, da wir ihnen gleiche Höhe gegeben haben, auch gleichen Flächeninhalt, und da überdies ihre Schwerpunkte sämmtlich auf der Axe der Zone liegen, so sieht man leicht ein, daß der Schwerpunkt der Zone selbst in die Mitte des Theiles der Axe fällt, welcher die Höhe der Zone bildet.

Um den Schwerpunkt eines kegelförmigen Kugelausschnittes zu finden, denken wir uns denselben als aus unendlich vielen Kegeln bestehend, welche sämmtlich ihre Spitzen im Mittelpunkte der Kugel haben, und deren Grundflächen zusammen die den Kugelausschnitt begrenzende Zone bilden. Da die Schwerpunkte dieser Kegel sämmtlich um drei Viertel des Radius vom Kugelmittelpunkte abstehen, so ergibt sich aus einer ähnlichen Ueberlegung, wie wir früher für den Kreisausschnitt angestellt haben, daß der Schwerpunkt des Kugelausschnittes mit dem Schwerpunkte einer Kugelzone zusammenfällt, welche wir uns um den Kugelmittelpunkt mit $\frac{3}{4}r$ innerhalb der den Ausschnitt begrenzenden Kegelfläche beschrieben denken. Der Schwerpunkt dieser Zone liegt aber, wie wir gesehen haben, in der Mitte ihrer Höhe. — Nehmen wir in Fig. 33 an, daß $aC = \frac{3}{4}AC$ ist, so liegt der gesuchte Schwerpunkt in der Mitte der Linie de, welche, wie leicht zu sehen, gleich $\frac{3}{4}DE = \frac{3}{4}h$ ist, wenn wir $DE = h$ setzen. Demnach ist der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte C

$$x = Ce + \frac{1}{2}de = \frac{3}{4}CE + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}DE = \frac{3}{4}(r-h) + \frac{3}{8}h = \frac{3}{8}(2r-h).$$

Den Kugelabschnitt können wir uns als die Differenz zwischen einem Kugelausschnitte und einem Kegel vorstellen. Die Inhalte dieser Körper sind

$$\frac{2}{3}hr^2\pi \text{ und } \frac{1}{3}h\,(r-h)\,(2r-h)\pi\,^{*)},$$

und die Abstände ihrer Schwerpunkte vom Mittelpunkte sind

$$\frac{3}{8}(2r-h) \text{ und } \frac{3}{4}(r-h).$$

Bezeichnen wir daher mit x den Abstand des Schwerpunktes des Abschnittes vom Mittelpunkte, so erhalten wir, da der Inhalt des Abschnittes gleich

$$\frac{2}{3}hr^2\pi - \frac{1}{3}h\,(r-h)\,(2r-h)\,\pi = \frac{1}{3}h^2\,(3r-h)\,\pi$$

ist, die Gleichung

$$\frac{1}{3}h\,(3r-h)\,x = \frac{1}{4}r^2\,(2r-h) - \frac{1}{4}(r-h)^2\,.\,(2r-h),$$

also

$$x = \frac{3(2r-h)^2}{4(3r-h)}.$$

Für die Halbkugel ist $h = r$, also $x = \frac{3}{8}r$; für die halbe Kugelfläche ist zufolge des Obigen $x = \frac{1}{2}r$.

Endlich führen wir über den Schwerpunkt noch den folgenden Satz an. In der Anmerkung zu §. 23 haben wir gesehen, daß die Summe der statischen Momente paralleler Kräfte für eine durch ihren Mittelpunkt gehende Axe gleich Null ist. Da nun der Schwerpunkt eines Körpers als der Mittelpunkt der parallelen Kräfte angesehen werden kann, mit denen die materiellen Theile desselben von der Erde angezogen werden und das statische Moment eines Körpers gleich der Summe der statischen Mo-

*) Der Kugelausschnitt ist einer Pyramide gleich, welche den Radius r zur Höhe und die den Ausschnitt begrenzende Zone $2r\pi h$ zur Grundfläche hat; die Höhe des Kegels aber ist $= r - h$ und der Radius seiner Grundfläche $= \sqrt{h(2r-h)}$.

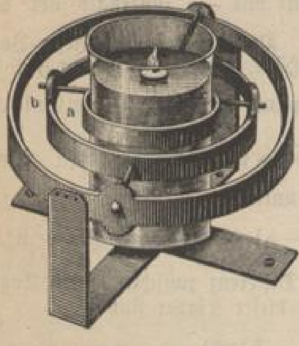
mente aller materiellen Theile desselben ist, so folgt hieraus, daß für eine durch den *Schwerpunkt eines Körpers gehende Axe das statische Moment desselben gleich Null ist.*

§. 26, b. Fortsetzung.

Wenn ein Körper in einem einzigen Punkte unterstützt ist, so müssen für den Fall des Gleichgewichts der *Schwerpunkt und der unterstützte Punkt in einer lotrechten Linie liegen.* Wir unterscheiden hierbei folgende Fälle:

1) Wenn der unterstützte Punkt lotrecht über dem Schwerpunkte liegt, wie dies bei einem aufgehängten Körper der Fall ist, so strebt dieser bei einer kleinen Verrückung von selbst in die frühere Lage zurückzukehren, und man sagt dann, der *Körper* befinde sich im *stabilen Gleichgewichte.*

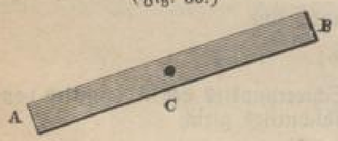
(Fig. 34.)



Dieses Princip findet unter andern bei der Schiffslampe Anwendung, welche in zwei Ringen aufgehängt ist. Der innere Ring a (Fig. 34) welcher die Lampe selbst trägt, ist um zwei Stifte drehbar, welche von dem äußeren Ringe b getragen werden, und dieser ist eben so um zwei andere Stifte beweglich, welche sich mit jenem rechtwinkelig kreuzen und von einem größeren, das Ganze umschließenden Ringe getragen werden.

2) Fällt der Unterstützungspunkt in den Schwerpunkt, so ruht der Körper in jeder Lage. Man kann dies an einem Rade sehen, welches sich um eine wagerecht liegende Axe drehen läßt. Aber auch jeder andere Körper, z. B. der längliche Körper AB (Fig. 35), welcher um eine wagerechte Axe drehbar ist, muß ruhen, wenn diese Axe gerade durch den Schwerpunkt C geht, da in diesem Falle keine der beiden Hälften AC oder BC ein Uebergewicht haben kann. Man nennt diesen Fall *indifferentes Gleichgewicht.*

(Fig. 35.)

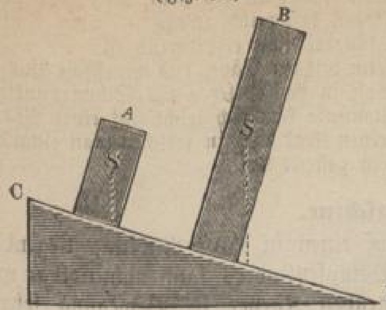


3) Wenn der Unterstützungspunkt lotrecht unter dem Schwerpunkte liegt, z. B. wenn man einen Körper auf einer feinen Spitze balancirt, so kann der Körper zwar in dieser Lage ruhen, aber er verändert dieselbe bei der kleinsten Verrückung gänzlich; man sagt daher, der Körper befinde sich im *labilen Gleichgewichte.*

Soll ein von unten unterstützter Körper mit Stabilität ruhen, so müssen im allgemeinen*) wenigstens drei Punkte desselben, welche nicht in gerader Linie liegen, unterstützt sein, und eine lotrechte Linie durch den Schwerpunkt gezogen, muß durch die Fläche des Dreiecks gehen, welches diese drei Punkte bestimmen. Eben so muß, wenn ein Körper mit einer ganzen Fläche auf einer Unterlage mit Stabilität ruhen soll, *eine durch den Schwerpunkt gezogene lotrechte Linie die unterstützte Fläche durchschneiden.* —

*) Es gibt indeß auch Fälle, wo Körper nur in einem einzigen Punkte unterstützt sind und mit Stabilität ruhen, z. B. eine Halbkugel, welche mit der nach unten gewendeten krummen Fläche auf einer horizontalen Unterlage ruht.

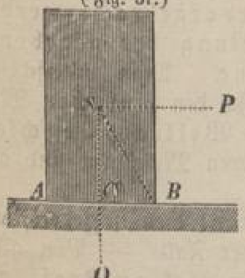
(Fig. 36.)



Der Körper A (Fig. 36), welcher von der schiefen Unterlage CD getragen wird, ruht auf derselben mit Stabilität, weil das durch den Schwerpunkt S gezogene Lot die unterstützte Fläche durchschneidet; der Körper B muß dagegen umfallen, weil für denselben diese Bedingung nicht erfüllt ist. — Ein hoch beladener Wagen, überhaupt Körper, deren Schwerpunkt hoch liegt, fallen unter übrigens gleichen Umständen leichter um, als solche, deren Schwerpunkt niedrig liegt.

Die **Stabilität** eines Körpers, welcher auf einer horizontalen Unterlage ruht, wird gemessen durch eine wagerechte Kraft, welche man sich im Schwerpunkte desselben angebracht denkt, und die eben im Stande ist, den Körper umzuwerfen.

(Fig. 37.)



Bezeichnet P die Größe dieser Kraft, Q das Gewicht des Körpers, ferner a die Höhe des Schwerpunktes S über der Grundfläche AB (Fig. 37) und b die Entfernung des Punktes C, in welchem eine durch den Schwerpunkt S lotrecht gezogene Linie die Unterstützungsfläche AB durchschneidet, von der Kante B, um welche der Körper gedreht werden soll, so ist das Moment der Kraft P für diese Kante $= a \cdot P$ und das Moment des Körpers $= b \cdot Q$. Das Gleichgewicht ist also vorhanden, d. h. die Resultirende der beiden Kräfte P und Q geht (zufolge §. 24, Anm.) durch die Umdrehungskante, wenn $a \cdot P = b \cdot Q$, folglich $P = \frac{b \cdot Q}{a}$ ist. Die Stabilität eines Körpers ist demnach um so größer, je größer sein Gewicht ist, je weiter die durch den Schwerpunkt gezogene lotrechte Linie von der Umdrehungskante absteht und je tiefer der Schwerpunkt liegt.

Bei einem aufrecht stehenden Menschen fällt der Schwerpunkt ohngefähr in die Mitte des Unterleibes; eine Linie, lotrecht durch den Schwerpunkt gezogen, muß das Trapez durchschneiden, welches die Füße bestimmen. Die Stabilität eines Menschen ist daher um so größer, je weiter die Füße aus einander stehen. Läuft ein Mensch Gefahr, nach der linken Seite hin zu fallen, so sucht er durch Aufheben des rechten Armes den Schwerpunkt wieder über jenes Trapez zu bringen. Eben so hält der Seiltänzer die Balancirstange nach der Seite, welche der entgegengesetzt ist, nach welcher er Gefahr läuft zu fallen, um den Schwerpunkt wieder über das Seil zu bringen. Trägt ein Mensch an einer Seite eine Last, so fällt der gemeinschaftliche Schwerpunkt des Menschen und der Last mehr nach dieser Seite, und er muß sich daher mehr nach der entgegengesetzten Seite neigen, um den Schwerpunkt senkrecht über die Fläche zu bringen, welche zwischen seinen Füßen liegt. — Beim Gehen wird durch Aufheben und Vorwärtsbewegen des einen Fußes und durch Vorwärtsneigen des Oberleibes das Gleichgewicht aufgehoben, und der ganze Körper fängt an, nach vorn hin zu fallen, bis er am weiteren Fallen durch das Niedersetzen des aufgehobenen Fußes verhindert wird. Indem wir dasselbe abwechselnd mit dem einen und dem andern Fuße wiederholen, ist unser Gehen ein beständiges Fallen von einem Fuße auf den andern.

Die Kunst des Balancirens besteht darin, den unterstützten Punkt beständig in lotrechter Linie unter den Schwerpunkt des balancirten Körpers zu halten oder bei einer Abweichung wieder unter denselben zu bringen. — Es ist leichter einen rotirenden als einen ruhenden Körper zu balanciren, weil bei jenem der Schwerpunkt einen Kreis beschreibt, und um das Umfallen zu verhindern, bei rascher Rotation fast nur erforderlich ist, daß der unterstützte Punkt senkrecht unter der Fläche dieses Kreises liegt, (und weil zufolge §. 19, c ein rotirender Körper die Lage der Umdrehungsaxe beizubehalten strebt). — Schwere Körper sind leichter zu balanciren als leichte, weil jene einen stärkeren Druck auf die Unterlage, z. B. die Fingerspitze, ausüben und daher eine Veränderung dieses Druckes leichter empfunden wird. — Ein Körper ist leichter zu balanciren, wenn sein Schwerpunkt hoch liegt, als wenn er niedrig liegt, weil dann beim Umfallen der Schwerpunkt einen größeren Bogen beschreibt, wozu — ganz ähnlich wie bei einem längeren Pendel — auch eine längere Zeit erforderlich ist.

Verschiedene Spielereien, wie z. B. der Mann mit der Säge, das chinesische Burzelmännchen u. a. m. finden ihre leichte Erklärung in den Gesetzen des Schwerpunktes; — ferner folgender Versuch: Eine kleine Geldmünze läßt sich leicht auf einer Nadelspitze balanciren, wenn man auf die Münze einen Kork setzt, in welchen man einander gegenüber zwei schief abwärts gerichtete Gabeln gesteckt hat.

§. 27. Maschine.

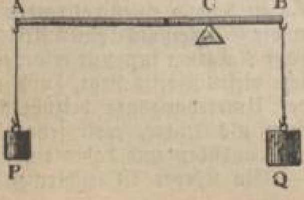
Eine Kraft kann unmittelbar nur auf einen in ihrer Richtung liegenden Punkt wirken. Die Kolbenstange eines Dampfcylinders kann unmittelbar nur einen in der Richtung der Stange liegenden Körper in Bewegung setzen. Soll durch dieselbe irgend ein Körper bewegt werden, welcher sich außerhalb dieser Richtung befindet, so bedarf es hierzu einer besonderen Vorrichtung, des Balancirers, des Schwungrades u. s. w. Eine jede Vorrichtung, vermittelst deren eine Kraft eine Wirkung ausübt, welche ohne diese Vorrichtung nur durch eine Kraft hervorgebracht werden könnte, deren Richtung nicht mit der Richtung der gegebenen Kraft zusammenfällt, heißt eine Maschine. Man unterscheidet einfache und zusammengesetzte Maschinen. Zu den einfachen Maschinen rechnet man: den Hebel, die Rolle, das Wellrad, die schiefe Ebene, den Keil und die Schraube. Alle anderen Maschinen sind aus diesen zusammengesetzt.

Bei sehr vielen Maschinen wird an Kraft gewonnen; dies ist jedoch, wie wir bald weiter sehen werden, keineswegs immer der Fall. — Von allen Maschinen ohne Ausnahme aber gilt das Gesetz: So viel an Kraft gewonnen wird, eben so viel geht am Wege verloren; d. h. so vielmal die Last größer ist, als die Kraft, welche ihr das Gleichgewicht hält, eben so vielmal ist bei entstehender Bewegung der Weg, welchen die Last beschreibt, kleiner als der Weg, welchen die Kraft durchläuft. Die folgenden Angaben über die einzelnen Maschinen werden durchgehends dieses Gesetz bestätigen. Bei der praktischen Anwendung desselben zur Berechnung des wirklichen Effectes irgend einer bestimmten Maschine hat man jedoch nicht außer Acht zu lassen, daß ein großer Theil dieses Effectes durch die Reibung verloren geht.

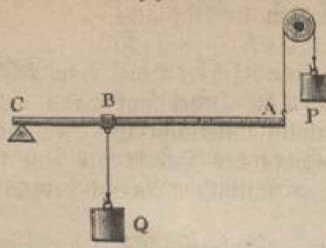
§. 28. Hebel.

Ein Hebel ist eine unbiegsame Stange, welche sich um einen festen Punkt drehen läßt, und an welcher in willkürlichen Punkten Kräfte angebracht sind, welche die Stange zu drehen streben. Um das Gesetz des Hebels in seiner größten Einfachheit vortragen zu können, wollen wir uns die Hebelstange selbst für's erste ohne Schwere denken. Man nennt einen solchen Hebel einen mathematischen zum Unterschiede von dem wirklichen oder physischen Hebel. — Weiter wollen wir zunächst annehmen, daß auf einen Hebel nur zwei Kräfte P und Q (Fig. 38) wirken. Da ferner der Hebel, wie schon sein Name sagt, häufig dazu angewendet wird, Lasten zu heben, so wollen wir die eine Kraft Q die Last, die andere P vorzugsweise die Kraft nennen. Wenn Kraft und Last an entgegengesetzten

(Fig. 38.)



(Fig. 39.)



Seiten vom Unterstützungspunkte angebracht sind, so heißt der Hebel **zweiarmig** (Fig. 38); liegen aber beide an derselben Seite vom Unterstützungspunkte (Fig. 39), so wird der Hebel **einarmig** genannt. Man unterscheidet ferner **gradlinie, Winkel- und krummlinige Hebel**, je nachdem die Hebelarme eine gerade Linie oder einen Winkel bilden oder aus krummen Linien bestehen. — Von allen Arten von Hebeln aber gilt das Gesetz: **Am Hebel ist das Gleichgewicht vorhanden, wenn sich Kraft und Last umgekehrt verhalten, wie ihre senkrechten Entfernungen vom Unterstützungspunkte**, also wenn sich verhält

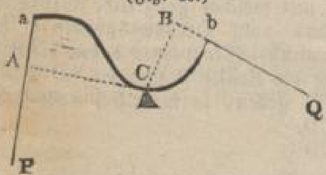
$$P : Q = BC : AC.$$

Wenn daher z. B. AC dreimal so groß ist, als BC, so wird man der Last Q mit einer dreimal kleinern Kraft P das Gleichgewicht zu halten im Stande sein. — Soll aber die Last Q durch die Kraft P wirklich gehoben werden, so wird die Kraft P einen dreimal so großen Weg zu durchlaufen haben, als die Last Q.

Das so eben ausgesprochene Gesetz ist offenbar nur eine besondere Anwendung des in §. 23 aufgestellten Gesetzes über die Zusammensetzung und Zerfällung paralleler Kräfte.

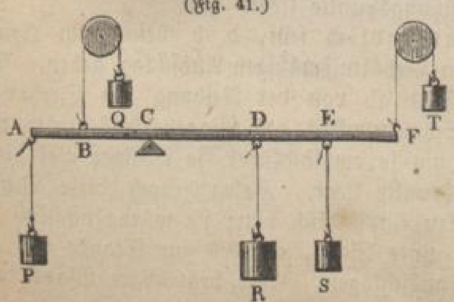
Wenn die Arme eines Hebels nicht geradlinig sind oder die Kräfte P und Q auf dieselben in schiefen Richtungen wirken, so hat man nicht die Hebelarme aC und bC (Fig. 40), sondern die aus dem Unterstützungspunkte C auf die Richtungen der Kräfte oder ihre Verlängerungen gefällten Lote AC und BC als die Entfernungen der Kräfte vom Unterstützungspunkte anzusehen. Auch hier gilt für den Fall des Gleichgewichtes die Proportion $P : Q = BC : AC$.

(Fig. 40.)



Da in jeder Proportion das Product der äußeren Glieder gleich ist dem Producte der inneren Glieder, so läßt sich die vorstehende Proportion $P : Q = BC : AC$ auch so schreiben $P . AC = Q . BC$. Man nennt das Product aus der Kraft in ihre senkrechte Entfernung vom Unterstützungspunkte das **statische Moment**. Hiernach läßt sich das Gesetz vom Hebel auch so aussprechen: — **Am Hebel ist das Gleichgewicht vorhanden, wenn die statischen Momente gleich sind.**

(Fig. 41.)



Wirken auf einen Hebel mehr als zwei Kräfte, z. B. auf den Hebel AF (Fig. 41) die Kräfte P, Q, R, S und T, von denen P und T den Hebel nach der einen Seite, Q, R und S aber nach der entgegengesetzten Seite zu drehen streben, so findet das Gleichgewicht statt, wenn die Summe der statischen Momente der Kräfte, welche den Hebel nach der einen Seite zu drehen streben, gleich ist der Summe der statischen Momente der Kräfte, welche den Hebel nach der andern Seite zu drehen streben, also

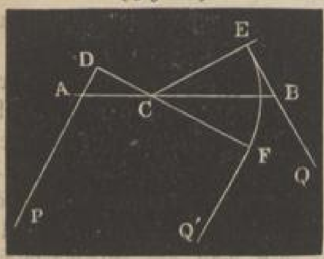
$$P \,.\, AC + T \,.\, CF = Q \,.\, BC + R \,.\, CD + S \,.\, CE.$$

Die bisher für den schwerlosen oder mathematischen Hebel entwickelten Gesetze haben für den wirklichen oder physischen Hebel nur dann volle Gültigkeit, wenn derselbe in seinem Schwerpunkte unterstützt ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so hat man das Gewicht des Hebels als eine im Schwerpunkte wirkende Kraft anzusehen und das statische Moment derselben mit in Rechnung zu bringen.

Der Hebel findet unzählige Anwendungen. Beispiele sind: die Zange, Scheere, die gemeine Wage, bei welcher Kraft und Last einander gleich sein müssen, weil die Hebelarme eine gleiche Länge haben; die Schnellwage, bei welcher die abzuwägende Last am kürzern Hebelarme hängt und durch ein bewegliches Gewicht am längern Hebelarme ins Gleichgewicht gebracht wird; der Winkelhebel beim Schellenzuge, die Thürklinke, der Schlüssel, Bohrer, der Hebebaum, die Häckselschneide u. s. w.

Das Gesetz über das Gleichgewicht am Hebel läßt sich in voller Allgemeinheit aus dem Satze über die Zusammensetzung paralleler Kräfte in folgender Art ableiten:

(Fig. 42.)



Wenn auf den in C unterstützten Hebel AB (Fig. 42) zwei Kräfte P und Q wirken, so muß für den Fall des Gleichgewichtes die Resultirende dieser Kräfte offenbar durch C gehen. Fällen wir aus C auf die verlängerten Richtungen der Kräfte P und Q die Senkrechten CD und CE, beschreiben wir ferner um C mit CE einen Kreis, welcher die verlängerte Linie CD in F schneidet, und denken wir uns dann in F senkrecht auf CF eine Q gleiche Kraft Q' angebracht, so sieht man leicht ein, daß diese Kraft am Hebel ganz die nämliche Wirkung wie die Kraft Q, mit welcher sie gleiche Größe und gleichen Abstand vom Drehungspunkte C hat, hervorbringen muß. Wir werden daher die Kraft Q durch die Kraft Q' ersetzen können. Sollen aber die Kräfte P und Q' im Gleichgewichte sein, also die Resultirende derselben durch C gehen, so muß sich nach §. 23 verhalten

$$P : Q' = CF : CD,$$

oder da $CF = CE$ und $Q' = Q$ ist: $P : Q = CE : CD.$

*§. 29. Wage.

Die Wage besteht aus dem Wagebalken, der Zunge und den Schalen. Die Erfordernisse einer guten Wage sind:

1) Bei gleicher Belastung der Wagschalen muß der Wagebalken in horizontaler Lage mit Stabilität ruhen. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn bei horizontaler Lage des Wagebalkens der Schwerpunkt desselben in lotrechter Linie unter dem Unterstützungspunkte liegt.

2) Eine gute Wage muß empfindlich sein, d. h. bei einem kleinen Uebergewichte auf einer Seite einen verhältnißmäßigen Ausschlag geben. Die Empfindlichkeit einer Wage hängt ab von der Reibung am Drehungspunkte und von der Tiefe des Schwerpunktes des Wagebalkens unter dem Drehungspunkte. Die Wage ist um so empfindlicher, je weniger tief dieser Schwerpunkt unter dem Drehungspunkte liegt. Fielen jedoch diese Punkte zusammen, so würde die Wage allzu empfindlich sein; sie würde nämlich bei dem geringsten Uebergewichte auf einer Seite, welches im Stande ist, die Reibung zu überwinden, gänzlich ausschlagen. Eine brauchbare Wage muß

der Lage des Gleichgewichts sich allmählich nähern, so wie durch Hinzufügung von Gewichten auf der einen Seite die Belastung der beiden Wagschalen allmählich einander gleich gemacht werden.

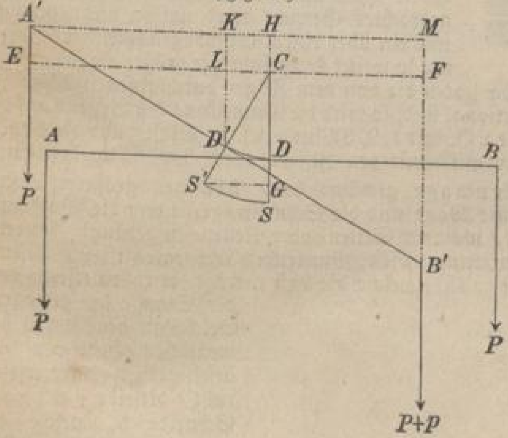
Man schätzt die Empfindlichkeit einer Wage nach demjenigen aliquoten Theile der Belastung, bei welchem die Wage noch einen Ausschlag gibt. Eine gute Wage, wie sie der Physiker gebraucht, muß noch ein 100,000tel der Belastung anzeigen, also bei 100 Gramm (= 10 Lot) Belastung noch für 1 Milligramm (s. die Anmerk.) einen Ausschlag geben. Geschickte Künstler haben Wagen mit einer Empfindlichkeit von 1 Zwölfmilliontel konstruirt.

3) Die Wage muß richtig sein. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn beide Arme des Wagebalkens gleiche Länge, gleiche statische Momente und die Wagschalen gleiches Gewicht haben. Man überzeugt sich von der Richtigkeit einer Wage, wenn dieselbe 1) ohne alle Belastung im Gleichgewichte steht, und wenn 2) eine willkürliche Last in der einen Schale, welche mit Gewichten in der andern Schale ins Gleichgewicht gebracht ist, sich mit diesem Gewichte ohne Störung des Gleichgewichts vertauschen läßt.

Man kann indeß auch mit einer Wage, welche nicht vollkommen richtig ist, wenn dieselbe nur empfindlich ist, genau Abwägungen vornehmen. Man legt nämlich den abzuwägenden Körper A in die eine Wagschale und in die andere irgend willkürliche Gewichte B, bis das Gleichgewicht hergestellt ist, nimmt dann A aus der ersten Wagschale heraus und legt in dieselbe so lange Gewichte C, bis das Gleichgewicht mit B wieder hergestellt ist. Dann ist das Gewicht von A gleich C.

Ueber die Empfindlichkeit der Wage bemerken wir noch Folgendes: Ist C (Fig. 43) der Drehungspunkt, S der Schwerpunkt eines Wagebalken, sind ferner A und B die Aufhängepunkte der Schalen einer richtigen Wage, so liegt bei gleicher Belastung der Schalen, also für den Fall des Gleichgewichts, der Punkt S mit C in einer lotrechten Linie, welche durch die Mitte D der Linie AB geht. Nehmen wir an, daß diese Bedingung nicht erfüllt, daß vielmehr die eine Schale stärker, als die andere belastet ist, dann wird die Linie AB in eine schiefe Stellung A′B′ übergehen und der Punkt S in einen seitlich von der lotrechten Linie CS liegenden Punkt S′ fortrücken. Bezeichnen wir das Gewicht des Wagebalkens mit Q, das Gewicht der einen Wagschale nebst der in derselben befindlichen Belastung mit P, das Gewicht der andern Schale mit der etwas größeren Belastung mit P + p, ferner die Linie AB = A′B′ mit 2a, CD = CD′ mit b und CS = CS′ mit c, so muß nach dem Satze von den statischen Momenten die folgende Gleichung stattfinden:

(Fig 43.)



$$P \cdot CE + Q \cdot S'G = (P + p)\ CF.$$

Da, wie leicht zu sehen, $CE = A'K + CL$ und $CF = KM - CL = A'K - CL$ ist, so ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung

$$(2P + p) \cdot CL + Q \cdot S'G = p \cdot A'K,$$

oder wenn wir den Winkel SCS', um welchen der Wagebalken eine Drehung erfahren hat, mit α bezeichnen,

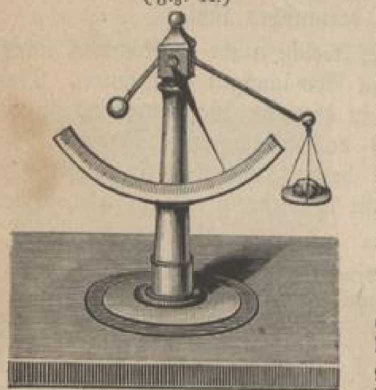
$$(2P + p) . b . \sin\alpha + Q . c . \sin\alpha = p . a . \cos\alpha,$$

folglich
$$\tan\alpha = \frac{a . p}{b . (2P + p) + c . Q}.$$

Wenn die Aufhängepunkte A und B der Wagschalen und der Drehungspunkt C des Wagebalkens in einer geraden Linie liegen, was bei guten Wagen möglichst erzielt wird, dann ist b = o, und die vorhergehende Gleichung vereinfacht sich in

$$\tan\alpha = \frac{a . p}{c . Q}.$$

Da kleine Winkel sich nahezu wie ihre trigonometrischen Tangenten verhalten, so folgt aus dieser Gleichung, daß der Ausschlagswinkel, so lange derselbe nur klein ist, der Größe des Uebergewichtes p und der Länge der Arme des Wagebalkens a direct, dem Gewichte des Wagebalkens Q aber und dem Abstande seines Schwerpunktes vom Drehungspunkte c umgekehrt proportional ist. Dagegen ist der Ausschlagswinkel, wenn die Aufhängepunkte der Wagschale A und B und der Drehungspunkt C in einer geraden Linie liegen, von der Größe der Belastung P unabhängig.



(Fig. 44.)

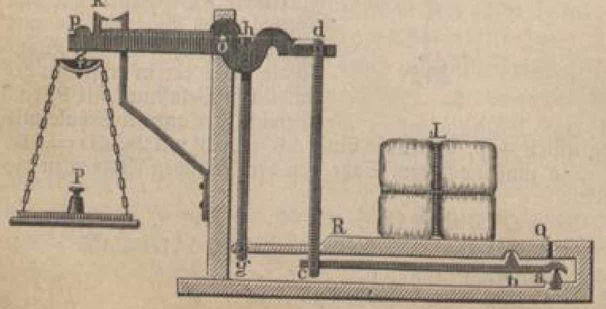
Außer der oben beschriebenen gemeinen Wage, welche der größten Genauigkeit fähig ist und daher von dem Physiker bei seinen Untersuchungen fast ausschließlich angewendet wird, bedient man sich im gemeinen Leben, wo es sich mehr um Bequemlichkeit des Gebrauches, als um große Genauigkeit handelt, noch verschiedener anderer Wagen, von denen die wichtigsten folgende sind:

Die römische oder Schnellwage, deren schon am Ende des vorhergehenden Paragraphen Erwähnung geschehen ist, ferner:

Die Zeigerwage (Fig. 44) besteht aus einem um den Scheitelpunkt drehbaren Winkelhebel. Ein an dem senkrechten Hebelarme angebrachtes Gewicht wird um so mehr gehoben und ein über einem Gradbogen spielender Zeiger um so weiter fortgeführt, je größer die am andern Hebelarme aufgehängte Last ist. Da jedoch die von dem Zeiger durchlaufenen Wege der Größe dieser Last keineswegs proportional sind, so wird die Eintheilung des Bogens auf die Art erhalten, daß man die Wagschale z. B. mit 1, 2, 3 Pfund u. s. w. belastet und die Punkte des Bogens, auf welche der Zeiger weist mit den Ziffern 1, 2, 3 u. s. w. bezeichnet.

Die Dezimal- oder Brückenwage gewährt beim Abwägen größerer Lasten mehr Bequemlichkeit, als die gemeine Wage und die Schnellwage, indem die Wagschale oder Brücke, welche die Last trägt, nicht in Seilen oder Ketten aufgehängt, sondern von unten unterstützt ist. Die Einrichtung dieses sinnreichen Apparates ist im wesentlichen folgende: Die Brücke QR (Fig. 45), welche die Last L trägt, wird einerseits von der Stange hg getragen, welche an dem um o beweglichen Hebelarm dp befestigt ist, andererseits ruht dieselbe auf der Schneide b, welche an dem um a drehbaren Hebelarme ac angebracht ist, dessen anderes Ende c durch die Stange cd ebenfalls mit dem Hebelarme dp verbunden ist, welcher an dem entgegengesetzten Ende p die zur Aufnahme der Gewichte bestimmte

(Fig. 45.)



Wagschale trägt. Eine richtige Brückenwage ist so regulirt, daß dieselbe ohne Belastung und Gewicht für sich im Gleichgewichte ist, welches dadurch angezeigt wird, daß eine bei k an dem Hebelarme dp angebrachte Spitze einer an dem Gestell befestigten Spitze gerade gegenübersteht; ferner verhält sich die Länge ab zu ac genau eben so wie oh zu od. Dies vorausgesetzt ist die von der Last L auf den Hebelarm dp ausgeübte Wirkung ganz die nämliche, als wenn die Last L unmittelbar an der Stange hg aufgehängt wäre. Bezeichnen wir nämlich den von der Last L auf die Punkte b und g ausgeübten Druck beziehlich mit B und G, so ist offenbar $B + G = L$ und das Moment der Kraft G in Beziehung auf den um o drehbaren Hebelarm dp

$$= G \cdot oh.$$

Die Kraft B drückt den um a beweglichen Hebelarm ac niederwärts; nehmen wir nun an, daß die Länge ab in ac mmal enthalten ist, so ist die Größe der Kraft, mit welcher in Folge dieses Druckes die Stange cd abwärts gezogen wird, $= \frac{1}{m} B$ und folglich ihr Moment in Beziehung auf den Hebelarm $pd = \frac{1}{m} B \cdot od$, oder da zufolge unserer oben ausgesprochenen Voraussetzung die Länge $od = m \cdot oh$ ist,

$$= B \cdot oh.$$

Demnach ist die Summe der statischen Momente der Kräfte, welche die Stangen hg und dc vermöge des von der Last L ausgeübten Druckes niederwärts ziehn

$$= G \cdot oh + B \cdot oh = (G + B) \cdot oh,$$

also da G und B zusammen = L sind,

$$= L \cdot oh,$$

d. h. diese Summe ist eben so groß, als wenn die Last L unmittelbar im Punkte h aufgehängt wäre.

Da ferner bei den Decimalwagen die Länge op 10mal so groß ist, als oh, so ist folglich das Gewicht P dem zehnten Theile der Last L gleich.

Unter den verschiedenen gebräuchlichen Gewichten führen wir zunächst an:

a. Das neuere französische Gewicht.

Die Einheit dieses Gewichtes ist das Gramm, welches gleich ist dem Gewichte eines Kubikcentimeters reinen Wassers bei seiner größten Dichtigkeit (bei der Temperatur von 4° C.) im luftleeren Raume.

Myriagramm.	Kilogramm.	Hectogramm.	Decagramm.	Gramm.
1	10	100	1000	10,000
	1	10	100	1000
		1	10	100
			1	10

Gramm.	Decigramm.	Centigramm.	Milligramm.
1	10	100	1000
	1	10	100
		1	10

Auf dieses Gewicht gründet sich

b. das preußische Gewicht,

welches in Preußen im Jahre 1858 eingeführt worden ist und auch in andern Ländern des Zollvereins gebraucht wird. Die Einheit dieses Gewichtes ist das Pfund, welches genau gleich einem halben Kilogramm oder 500 Gramm ist.

Pfund.	Lot.	Quentchen.	Cent.	Korn.
1	30	300	3000	30,000
	1	10	100	1000
		1	10	100
			1	10

100 Pfund machen einen Centner und 40 Centner eine Schiffslast.

Mit dem 1. Januar 1872 wird in Preußen und den übrigen Ländern des Zollvereins eine abermalige Veränderung des Gewichtes stattfinden, nämlich das unter (a) angegebene neuere französische Gewicht vollständig eingeführt werden. Außer den bei diesem gebräuchlichen Benennungen sollen auch noch folgende Namen zulässig sein:

1 Pfund = 500 Gramm, 1 Lot = 10 Gramm = $^1/_{50}$ Pfund, 1 Centner = 50 Kilogramm, 1 Tonne = 1000 Kilogramm = 200 Centner.

Bei dem bis zum Jahre 1858 in Preußen gebräuchlichen Gewichte war 1 Pfund = 467,711 Gramm; dasselbe wurde in 32 Lot, das Lot in 4 Quentchen getheilt.

Nach diesem älteren Gewichte geregelt war

c. das früher gebräuchliche Medicinal-Gewicht.

Pfund. ℔	Unze. ℥	Drachme. ʒ	Scrupel. ℈	Gran. Gr.	Lot. Lt.
1	12	96	288	5760	24
	1	8	24	480	2
		1	3	60	$^1/_4$
			1	20	$^1/_{12}$
				1	$^1/_{240}$

(1 Unze = 29,233 Gramm.)

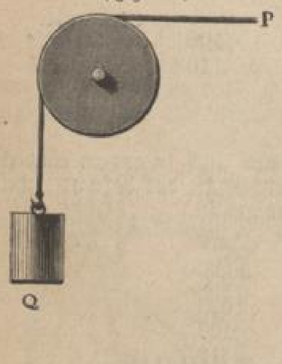
Zur Vergleichung anderer landesüblicher Gewichte kann die folgende Tabelle dienen:

1 ℔ in	Preußen, Sachsen u. s. w. Zollpfund	= 500	Gramm.
„ „ „	Oesterreich	= 560	„
„ „ „	Baiern	= 560	„
„ „ „	Frankreich (alt)	= 490	„
„ „ „	England	= 454	„
„ „ „	Rußland	= 410	„
„ „ „	Dänemark und Norwegen	= 499	„
„ „ „	Schweden	= 425	„

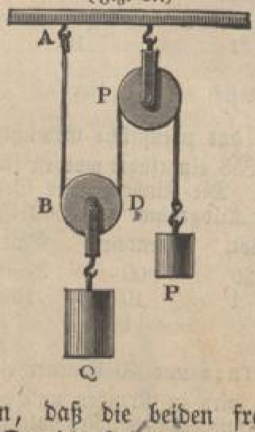
§. 30. Rolle.

Eine Rolle ist eine kreisförmige Scheibe, welche an ihrem Umfange mit einer Rinne versehen ist. Die Rolle ist entweder frei beweglich oder fest, wenn sie nur um eine durch ihren Mittelpunkt gehende feste Axe drehbar ist. Da bei der festen Rolle die Kraft P und die Last Q (Fig. 46) am Umfange der Rolle angebracht sind, also gleichen Abstand vom Unterstützungspunkte haben, so muß P = Q sein, wenn das Gleichgewicht stattfinden soll. Bei der festen Rolle sind also Kraft und Last gleich. Durch dieselbe wird an Kraft weder gewonnen noch verloren, und sie dient lediglich dazu, einer Kraft eine andere Richtung zu geben. Man benutzt dieselbe z. B. an Thüren, um durch ein senkrecht niederwärts ziehendes Gewicht der Thüre eine wagerechte Bewegung zu ertheilen.

(Fig. 46.)

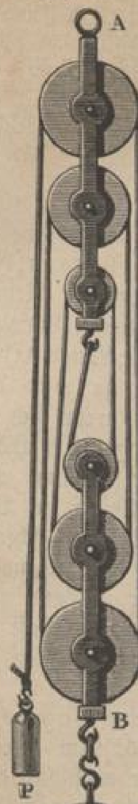


(Fig. 47.)



Bei der beweglichen Rolle ist die Last Q (Fig. 47) am Mittelpunkte der Rolle angebracht, und die Kraft P wirkt am Umfange derselben vermittelst eines Seiles, dessen anderes Ende irgend wo in A befestigt ist. Wir wollen hier nur den Fall berücksichtigen, daß die beiden freien Enden des Seiles AB und PD parallel laufen. Da die Länge des Seiles AB, auf dessen Gewicht wir keine Rücksicht nehmen, offenbar auf das Gleichgewicht ohne

(Fig. 48.)



Einfluß ist, so können wir uns auch den festen Punkt A nach B verlegt denken. Wir sehen dann um so deutlicher, daß der senkrechte Abstand der Last Q von dem festen Punkte A oder B nur halb so groß ist, als der senkrechte Abstand der Kraft P; es muß folglich beim Gleichgewichte P = $^1/_2$Q sein, d. h. bei der beweglichen Rolle ist die Kraft halb so groß, als die Last.

Aus der Verbindung mehrerer festen und beweglichen Rollen geht der Flaschenzug hervor. Die Rollen befinden sich in zwei Kloben oder Hülsen, einer festen A (Fig. 48.) und einer beweglichen B, an welcher die Last Q angebracht ist. Den Lauf des Seiles, an dessen freiem Ende die Kraft P wirkt, zeigt die Figur. Da alle einzelnen Seile mit der Kraft P gespannt sind, so wird die Last Q offenbar mit der Kraft 6 P gehoben, wenn, wie hier in der Figur, 6 Seile um die Rollen der beweglichen Hülse herumgehen (und die Seile einander parallel laufen). Ueberhaupt verhält sich beim Flaschenzuge die Kraft zur Last wie 1 zur Anzahl der Seile. — Eben so sieht man auch leicht, daß in dem verzeichneten Falle, um die Last Q 1 Fuß zu heben, die an dem freien Ende des Seiles wirkende Kraft P 6 Fuß zu durchlaufen hat.

Wir übergehen den Potenzflaschenzug, da derselbe kaum irgend Anwendung findet.

§. 31. Wellrad.

Das Wellrad besteht aus einer Walze (Welle), welche um ihre Axe drehbar ist, und einem Rade, welches mit der Walze fest verbunden ist, und dessen Ebene auf der Axe der Walze senkrecht steht. Die Kraft P (Fig. 49) wirkt am Umfange des Rades und die Last Q am Umfange der Walze. Wie aus dem Gesetze des Hebels (§. 28) folgt, ist das Gleichgewicht vorhanden, wenn sich verhält

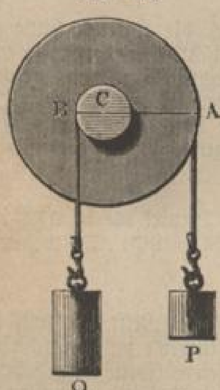
$$P : Q = BC : AC, \quad = r : R$$

$P = \frac{r}{R} Q$

d. h. am Wellrade verhält sich die Kraft zur Last, wie der Radius der Walze zum Radius des Rades.

$R = 4r$

(Fig. 49.)



Man gewinnt also um so mehr an Kraft, je kleiner der Radius der Walze und je größer der Radius des Rades ist. Das Wellrad erhält nach Verschiedenheit des Gebrauchs verschiedene Namen: Erdwinde, Haspel, Windseil u. dergl.

$P = \frac{r}{4r} Q$

$P = \frac{1}{4} Q$

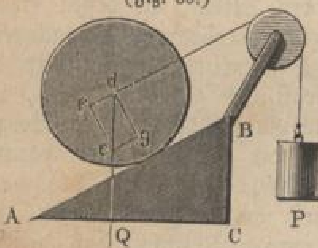
Bei einem Wagen, welcher sich auf einer ebenen und harten Straße fortbewegt, werden die Räder durch die Reibung, welche sie an ihrem Umfange an der Straße erleiden, um ihre Axe gedreht. Die Pferde an einem Wagen auf einer vollkommen ebenen und harten Straße haben also eigentlich weiter nichts zu thun, als die Umdrehung der Räder zu bewirken. (Denn die Last selbst wird von der Straße getragen, und einmal in Bewegung gesetzt, folgt sie dem Trägheitsgesetze.) Der Umdrehung der

Räder wirkt die Reibung an der Axe hindernd entgegen. Aus dem über das Wellrad Gesagten geht hervor, daß sich die Kraft zur Last, als welche wir hier die Reibung an der Axe anzusehen haben, wie der Durchmesser der Axe zum Durchmesser des Rades verhält. Es ist daher vortheilhaft, den Durchmesser der Axe möglichst klein und den des Rades möglichst groß zu machen. Eiserne Axen verdienen deshalb, da sie dünner sein dürfen, vor hölzernen den Vorzug. Die Höhe der Räder findet darin eine Beschränkung, daß sie bei größerer Höhe mehr schwanken, und wenn sie nicht allzu schwer werden sollen, zerbrechlicher werden.

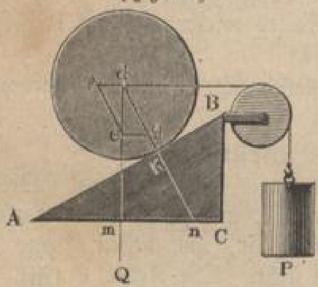
§. 32. Schiefe Ebene.

Auf der schiefen Ebene AB (Fig. 50) werde eine Last Q durch eine im Schwerpunkte d angebrachte und mit der schiefen Ebene AB parallele Kraft P im Gleichgewicht erhalten. Nennen wir AB die Länge, die lotrechte Linie BC die Höhe und die wagerechte Länge AC die Basis der schiefen Ebene, so wird das Gleichgewicht vorhanden sein, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie die Höhe BC zur Länge AB. Man gewinnt also um so mehr an Kraft, je kleiner im Verhältniß zur Länge die Höhe der schiefen Ebene ist, d. h. je kleiner der Neigungswinkel ABC ist; um so länger ist dann aber auch der Weg AB, welchen die Last zu durchlaufen hat, damit sie um die Höhe BC gehoben wird.

(Fig. 50.)



(Fig. 51.)



Soll die Last Q durch eine wagerecht wirkende Kraft P (Fig. 51) im Gleichgewichte erhalten werden, so muß sich die Kraft zur Last verhalten, wie die Höhe BC zur Basis AC. — Da die Basis allemal kleiner, als die Länge ist, so sieht man leicht, daß in diesem Falle eine größere Kraft erforderlich ist, um das Gleichgewicht herzustellen, als im vorhergehenden.

1) Wenn man das Gewicht der Last Q (Fig. 50) durch die lotrechte Linie de ausdrückt und diese Kraft in zwei Seitenkräfte dg und df zerfällt, von denen dg auf AB senkrecht und df damit parallel ist, so zeigt dg den senkrechten Druck an, welcher von der Last auf die schiefe Ebene AB ausgeübt und durch den Widerstand derselben aufgehoben wird; df aber gibt die Kraft an, mit welcher die Last längs der schiefen Ebene herabzugleiten strebt. Da nun für den Fall des Gleichgewichts diese Kraft $= P$ sein muß, so muß sich folglich verhalten

$$P : Q = df : de.$$

Nun ist aber $\triangle\, edf \sim ABC$, weil Winkel $f = C = 90^0$ und Winkel $fde = ABC$ ist, da ihre Schenkel parallel laufen. Demnach verhält sich $df : de = BC : AB$, wodurch die vorhergehende Proportion übergeht in

$$P : Q = BC : AB.$$

2) Zerfällt man in Fig. 51 die Kraft Q, welche durch de vorgestellt sein soll, in die Seitenkräfte df und dg, von denen df wagerecht und dg senkrecht auf der schiefen Ebene AB ist, so wird dg wieder durch den Widerstand der schiefene Ebene aufgehoben, und df muß für den Fall des Gleichgewichts $= P$ sein; es muß sich also verhalten

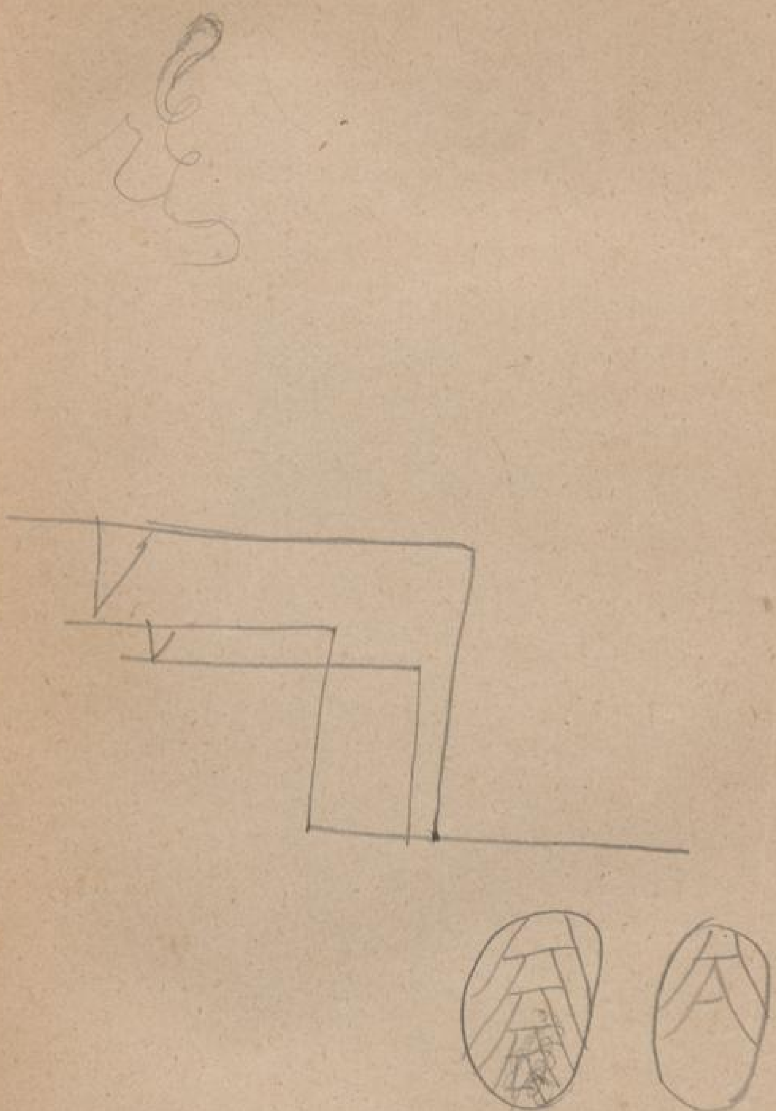
$$P : Q = df : de = eg : de.$$

Nun ist aber $\triangle\, dge \sim ABC$. Denn wenn man de und dg bis zum Einschnitte in AB und AC verlängert, so ist Winkel dmn und $Akn = 90^0$, folglich auch Winkel edg + mnk = 90° und BAC + mnk = 90°, also Winkel edg = BAC; ferner ist Winkel deg = ACB = 90°, also △ dge ∾ ABC. Demnach verhält sich eg : de = BC : AC, wodurch sich die obige Proportion verwandelt in

$$P : Q = BC : AC.$$

§. 33. Schraube.

Man unterscheidet bei jeder Schraube die Schraubenspindel und
ſiver Cy-
Geſtalt
Schrau-
an der
n Gänge
iche Vor-
Mantel
, aa'bb',



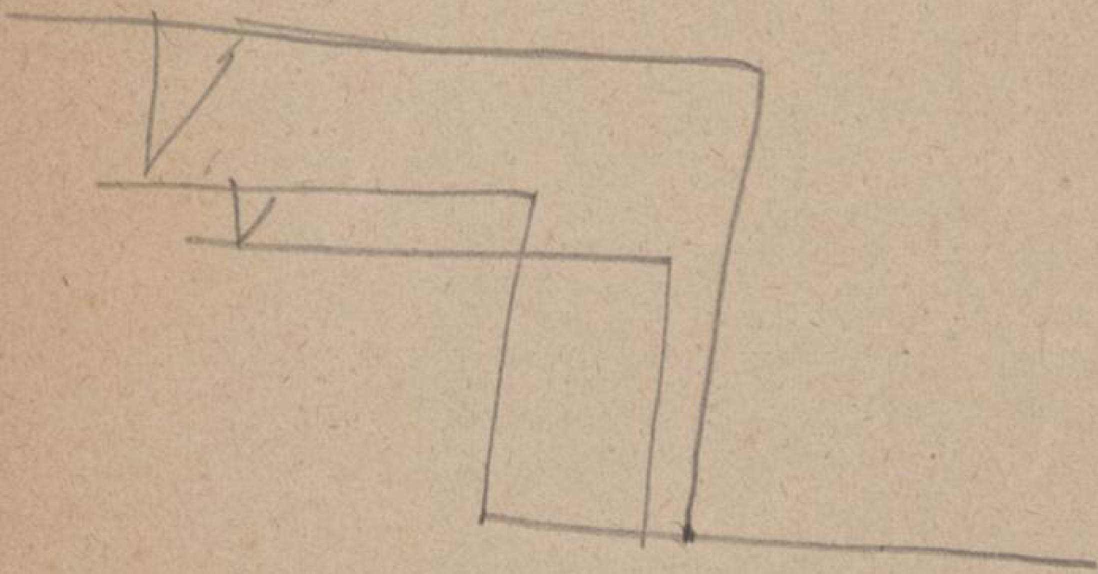
Rechtecke
Rechtecken
eder um
hängende
= d'ee'
auben-

enmutter
ern fort-
em Um-
ung der-
irkt, ſo
ie wenn
rgezogen
le Kraft
nen wir
f', d. h.
und bb',
ne. Es
verhält ſich daher bei der Schraube die Kraft zur Laſt wie der Abſtand zweier Schraubengänge zum Umfange der Schraube. Man gewinnt folglich bei einer Schraube um ſo mehr an Kraft, je näher die Schraubengänge neben einander herlaufen.

$P : Q = H : U$

$P = \frac{QH}{U}$

$P = \frac{QH}{2\pi r}$



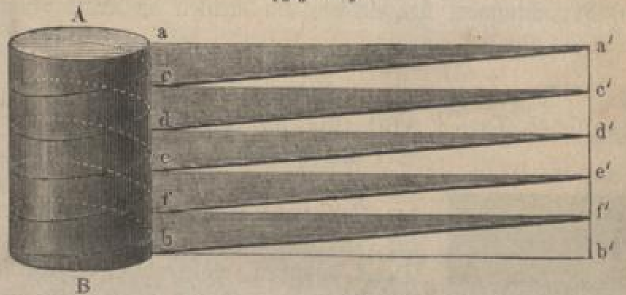
$edg + mnk = 90^0$ und $BAC + mnk = 90^0$, also Winkel $edg = BAC$; ferner ist Winkel $deg = ACB = 90^0$, also $\triangle\, dge \sim ABC$. Demnach verhält sich $eg : de = BC : AC$, wodurch sich die obige Proportion verwandelt in

$$P : Q = BC : AC.$$

§. 33. Schraube.

Man unterscheidet bei jeder Schraube die Schraubenspindel und die Schraubenmutter. Die Schraubenspindel ist ein massiver Cylinder, um welchen die Schraubenwindungen als Erhabenheiten in Gestalt einer krummen Linie, der Schraubenlinie, herumlaufen. Die Schraubenmutter ist ein hohler Cylinder, in welchem die Schraubengänge an der innern Seite als Vertiefungen so eingeschnitten sind, daß die erhabenen Gänge der Schraubenspindel genau in dieselben einpassen. — Um eine deutliche Vorstellung von der Schraubenlinie zu erhalten, denke man sich den Mantel eines geraden Cylinders AB (Fig. 52) in eine Ebene als ein Rechteck, $aa'bb'$,

(Fig. 52.)



aufgerollt, dasselbe durch Parallelen mit der Grundlinie in kleinere Rechtecke zerschnitten, welche alle eine gleiche Höhe haben, und in diesen Rechtecken parallele Diagonalen gezogen. Wird nun das Rechteck $aa'bb'$ wieder um den Cylinder gerollt, so bilden diese Diagonalen eine zusammenhängende krumme Linie, welche überall unter demselben Winkel $a'cc' = c'dd' = d'ee'$ u. s. w. gegen die Grundfläche des Cylinders geneigt ist und Schraubenlinie genannt wird.

Bei der Umdrehung der Schraubenspindel oder der Schraubenmutter werden die Erhabenheiten der einen längs den Vertiefungen der andern fortgeschoben, und wenn z. B. die Schraubenspindel durch eine an ihrem Umfange wirkende wagerechte Kraft umgedreht wird und der Fortbewegung derselben ein in der Richtung ihrer Axe ausgeübter Druck entgegenwirkt, so wird hier dasselbe Verhältniß zwischen Kraft und Last stattfinden, wie wenn eine Last auf einer schiefen Ebene durch eine wagerechte Kraft emporgezogen werden soll. Wir haben in §. 32 gesehen, daß sich in diesem Falle Kraft und Last wie Höhe und Basis der schiefen Ebene verhalten. Nehmen wir z. B. den Schraubengang bf' als die schiefe Ebene an, so ist $b'f'$, d. h. der Abstand zweier Schraubengänge von einander, gleich der Höhe und bb', d. h. der Umfang der Schraube, gleich der Basis der schiefen Ebene. Es verhält sich daher bei der Schraube die Kraft zur Last wie der Abstand zweier Schraubengänge zum Umfange der Schraube. Man gewinnt folglich bei einer Schraube um so mehr an Kraft, je näher die Schraubengänge neben einander herlaufen.

$P : Q = H : U$

$P = \frac{QH}{U}$

$P = \frac{QH}{2r\pi}$

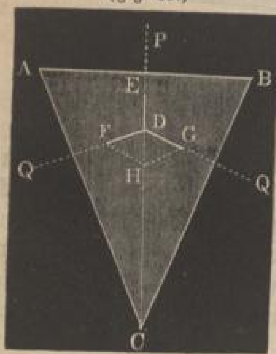
Wir haben bisher angenommen, daß die Schraube durch eine an ihrem Umfange wirkende Kraft in Bewegung gesetzt wird. In der Regel wirkt jedoch diese Kraft nicht unmittelbar am Umfange der Schraube, sondern an dem Ende eines Hebelarmes. Man gewinnt dann noch so vielmal an Kraft, als der Radius des Schraubencylinders in der Länge des Hebelarmes entfernt ist. Wäre z. B. bei einer Schraube die Höhe der Schraubengänge in dem Umfange des Schraubencylinders 30mal und der Radius desselben in der Länge des Hebelarmes 10mal enthalten, so würde man das 300fache an Kraft gewinnen. Ueberhaupt gewinnt man so vielmal an Kraft, als der Abstand zweier Schraubengänge in dem Umfange des Kreises enthalten ist, welchen derjenige Punkt des Hebelarmes, in welchem die Kraft angebracht ist, bei der Umdrehung beschreibt. Es wird also auch bei der Schraube gerade so viel an Kraft gewonnen, als am Wege verloren geht.

Obschon der berechnete Efect bei der wirklichen Anwendung durch die Reibung sehr vermindert wird, so gehört doch die Schraube zu denjenigen mechanischen Vorrichtungen, bei welchen am meisten an Kraft gewonnen wird.

§. 34. Keil.

Der Keil ist ein dreiseitiges Prisma, dessen Durchschnitt gewöhnlich ein gleichschenkliches Dreieck ABC (Fig. 53) bildet. Die gleiche Seite AC oder BC heißt die Länge und die Grundlinie AB die Breite des Keiles. Gewöhnlich wird der Keil zur Trennung zweier Flächen angewendet, welche auf die Seiten des Keiles einen Druck ausüben, während die Kraft senkrecht auf die Breite des Keiles wirkt. Nennen wir den Druck, welchen eine jede der beiden Seiten erleidet, die Last, so ist am Keile das Gleichgewicht vorhanden, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie die Breite zur Länge. Der Gewinn an Kraft ist also um so größer, je geringer die Breite des Keiles im Verhältniß zur Länge ist. Dieser Gewinn wird jedoch bei der praktischen Anwendung bedeutend durch die Reibung vermindert. — Als besondere Anwendungen des Keiles sind anzusehen: Messer, Scheeren, Beile, Aexte, Degen, Nägel, Nadeln, Meißel u. s. w.

(Fig. 53.)



Wenn wir die auf die Breite AB wirkende Kraft mit P und den auf die gleichen Seiten AC und BC ausgeübten Druck mit Q bezeichnen, ferner diese Kräfte ihrer Richtung und verhältnißmäßigen Größe nach durch die Linien DE, DF und DG darstellen, so muß für den Fall des Gleichgewichts die Resultirende aus DF und DG, welche DH sein mag, der Kraft DE gerade gleich und entgegengesetzt sein. Es muß sich also verhalten

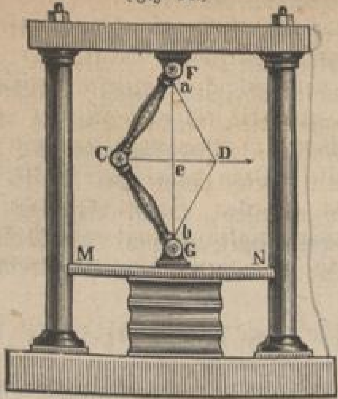
$$P : Q = DH : DF.$$

Nun ist Winkel $FDH + FDE = 180^0$, und da DF und DE auf AC und AB senkrecht sind, auch Winkel $FDE + A = 180^0$, folglich Winkel $FDH = A$; eben so findet man Winkel $FHD = HDG = B$. Demnach ist $\triangle DHF \backsim ABC$, und folglich verhält sich $DH : DF = AB : AC$. Hiernach verwandelt sich die obige Proportion in

$$P : Q = AB : AC.$$

Ein großer Theil des Effectes geht bei dem Keile durch die Reibung verloren. Dies ist in weit geringerem Maße der Fall bei der Kniepresse, welche auf ähnlichem Prinzipe, wie der Keil beruht. Dieselbe besteht aus den beiden festen Stangen CF und CG (Fig. 54), welche bei C durch ein Gelenk verbunden sind. Der Arm CF drückt bei F gegen eine feste Widerlage, der Arm CG bei G auf die zusammenzupressende Last.

(Fig. 54.)



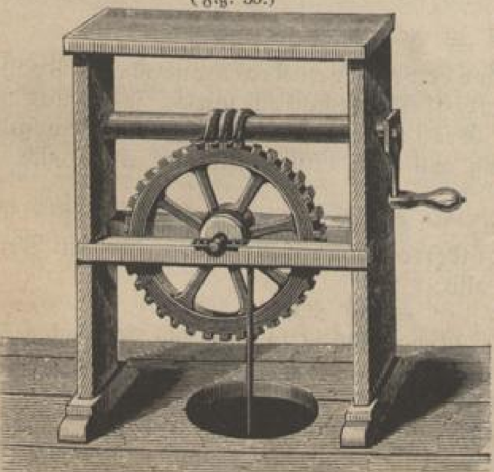
Wirkt nun auf C in wagerechter Richtung die Kraft CD so läßt sich dieselbe zunächst in die den beiden festen Armen parallelen Kräfte Ca und Cb zerlegen. Weil aber jeder Druck auf eine Unterlage nur in senkrechter Richtung wirkt, so müssen wir, um die Größe des senkrechten Druckes zu finden, welchen die in der Richtung CG wirkende Kraft Cb bei G ausübt, dieselbe noch in zwei Seitenkräfte zerlegen, von denen die eine auf MN senkrecht, die andere damit parallel ist. Da nun die Größen dieser Kräfte, wie leicht zu sehen, durch die Linien Ce und be dargestellt werden, von denen be den auf MN ausgeübten senkrechten Druck angibt, so verhält sich folglich beim Knie die Kraft zur Last wie CD zu be. So vielmal also CD in be enthalten ist, so vielmal wird an Kraft gewonnen. Der Gewinn an Kraft wird daher um so größer, je mehr der zusammengepreßte Gegenstand nachgibt und in Folge hiervon die Schenkel CF und CG einen immer größeren Winkel einschließen und sich der geraden Linie nähern. — Man benutzt das Knie als Siegelpresse, als (amerikanische) Buchdruckerpresse und beim Prägen von Münzen.

§. 35. Zusammengesetzte Maschinen.

Aus den angeführten einfachen Maschinen ist die unzählige Mannigfaltigkeit der verschiedenen Maschinen zusammengesetzt. Man findet den Effect einer zusammengesetzten Maschine, wenn man die Effecte der einzelnen in einander greifenden Theile berechnet und die erhaltenen Zahlen mit einander multiplicirt. In allen Fällen gilt die Regel, daß **eben so viel an Kraft gewonnen wird, als am Wege verloren geht.** Der bei praktischen Anwendungen wirklich zu erlangende Effect bleibt jedoch hinter dem berechneten wegen der nie ganz zu beseitigenden Hindernisse der Bewegung (Reibung, Widerstand der Luft, Steifheit der Seile; vergl. unten §. 43) um ein Beträchtliches zurück.

Als Beispiel einer zusammengesetzten Maschine führen wir die **Schraube ohne Ende** (Fig. 55) an, welche zum Emporwinden von Lasten gebraucht wird. Dieselbe besteht aus einer Schraubenspindel, deren Windungen in die Zähne eines Rades eingreifen, welches an einer Welle befestigt ist. Die Kraft P wirkt am Ende eines an der Schraubenspindel angebrachten Kurbelarmes, die emporzuhebende Last Q am Ende eines um die Welle geschlungenen Seiles. Bezeichnen wir mit K eine Kraft, welche, am Umfange des Rades wirkend, im Stande sein würde, der Last das Gleichgewicht zu halten, ferner mit d den Abstand zweier Schraubengänge, mit a die Länge des Hebelarmes und mit R und r die Radien des Rades und der Welle, so erhalten wir für den Fall des Gleichgewichts die Gleichungen

(Fig. 55.)



$$P : K = d : 2a\pi$$

und $$K : Q = r : R,$$

folglich

$$P : Q = dr : 2a\pi R.$$

*§. 36. Größe der bewegenden Kräfte.

Da die Kräfte selbst uns gänzlich unbekannt sind, so können wir die Größe derselben nur nach den hervorgebrachten Wirkungen beurtheilen; wir nennen diejenige Kraft die größere, welche unter übrigens gleichen Umständen die größere Wirkung ausübt. Nun besteht aber die einfachste Wirkung einer Kraft darin, daß sie eine vorher ruhende Masse in Bewegung setzt und derselben eine bestimmte Geschwindigkeit ertheilt. Wenn daher zwei Kräfte der nämlichen Masse ungleiche Geschwindigkeiten ertheilen, so ist diejenige als die größere anzusehen, welche die größere Geschwindigkeit erzeugt. Nach dieser Ueberlegung führen wir den folgenden Satz an, welcher ein Hauptprincip der Mechanik ausmacht:

1) Bei gleichen Massen verhalten sich die Kräfte wie die erzeugten Geschwindigkeiten.

Wenn ferner zwei Kräfte auf zwei ungleiche Massen wirken und beiden eine gleiche Geschwindigkeit ertheilen, so ist offenbar diejenige Kraft die größere, welche die größere Masse mit der gleichen Geschwindigkeit fortbewegt. Da wir uns die doppelte, dreifache Masse aus zwei, drei gleichen Massen bestehend denken können, so sehen wir leicht ein, daß die doppelte, dreifache Masse, um mit gleicher Geschwindigkeit wie die einfache Masse fortbewegt zu werden, auch die doppelte, dreifache Kraft erfordert. Wir erhalten so das folgende Princip:

2) Bei gleichen Geschindigkeiten verhalten sich die Kräfte wie die in Bewegung gesetzten Massen.

Aus der Verknüpfung dieser beiden Sätze geht weiter der folgende allgemeine Satz hervor:

Die bewegenden Kräfte verhalten sich überhaupt wie die Producte aus Masse und Geschwindigkeit.

Wenn z. B. eine Kraft einer Masse von 5 Pfund eine Geschwindigkeit von 10 Fuß und eine andere Kraft einer Masse von 3 Pfund eine Geschwindigkeit von 7 Fuß zu ertheilen vermag, so verhalten sich die Kräfte wie $5 \,.\, 10 : 3 \,.\, 7 = 50 : 21$; und wenn wir überhaupt die Kräfte mit P und P', die Massen mit M und M' und die Geschwindigkeit mit C und C' bezeichnen, so verhält sich

$$P : P' = M \,.\, C : M' \,.\, C'.$$

Da hiernach die Größe der bewegenden Kraft durch das Product aus Masse und Geschwindigkeit gemessen wird, so nennt man dieses Product auch die Größe oder Quantität der Bewegung.

Als unmittelbare Folgerung aus dem dritten Prinzipe ergibt sich folgender Satz:

Sind die Kräfte P und P' gleich, so verhalten sich die hervorgebrachten Geschwindigkeiten umgekehrt wie die in Bewegung gesetzten Massen, also:

$$C : C' = M' : M.$$

So vermag z. B. dieselbe Menge Pulver, welche eine Flintenkugel mit ungeheurer Geschwindigkeit forttreibt, einer Bombe nur eine verhältnißmäßig langsame Bewegung zu ertheilen.

Das in einem Geschütze entzündete Pulver verwandelt sich in Dämpfe, welche sich vermöge ihrer durch die Hitze außerordentlich gesteigerten Elasticität nach allen Richtungen hin auszudehnen streben; der Ausdehnung nach der Seite widerstehen die

Wände des Geschützes, und es findet daher die eigentliche Wirkung nur in der Richtung des Laufes statt. Die bewegliche Kugel wird durch die Elasticität der entwickelten Gase mit großer Geschwindigkeit in Bewegung gesetzt, das Geschütz selbst aber wird nach der entgegengesetzten Richtung fortgetrieben. Diese beiden Bewegungen sind durch die nämliche Kraft hervorgebracht und haben folglich eine gleiche Größe; aber die Kugel bewegt sich wegen ihrer geringeren Masse weit schneller als das Geschütz, dessen Bewegung überdies noch durch beträchtliche Hindernisse aufgehalten wird. — Das nämliche gilt von einer Flintenkugel und dem mit dem Schusse allemal verbundenen Rückschlage.

Wir haben oben den Satz, daß bei gleichen Massen sich die Kräfte wie die Geschwindigkeiten verhalten, ohne Beweis hingestellt. Es gründet sich derselbe auf den folgenden Satz, welcher ebenfalls ein Hauptprinzip der Mechanik bildet.

Wenn eine Kraft, welche einer ruhenden Masse eine bestimmte Geschwindigkeit C zu ertheilen vermag, auf eine bewegte Masse wirkt, so vermehrt oder vermindert sie die Geschwindigkeit dieser Masse, je nachdem sie in der Richtung der Bewegung derselben oder in der entgegengesetzten Richtung wirkt, allemal um dieselbe Größe C, welches auch immer die ursprüngliche Geschwindigkeit der bewegten Masse sein mag. — Als Erfahrungen, welche für die Richtigkeit dieses Satzes sprechen, führen wir folgende an: — Auf einem schnell segelnden Schiffe erfordert es gleichen Kraftaufwand wie auf einem ruhenden, um vom Vordertheile nach dem Hintertheile oder umgekehrt zu werfen, obschon hierbei der geworfene Körper wegen der eigenen Bewegung des Schiffes Wege von ganz verschiedener Größe durchläuft. Eben so finden wir keinen Unterschied, ob wir nach Osten oder Westen schießen, werfen u. dgl., wiewohl im einen Falle die Bewegung mit der Axendrehung der Erde übereinstimmt, im andern ihr entgegengesetzt ist und folglich der Körper sehr verschiedene Wege zurücklegt.

Wenn nun zwei Kräfte auf zwei gleiche Massen wirken und die eine dieser Kräfte z. B. dreimal so groß ist, als die andere, so werden wir uns die dreifache Kraft in drei gleiche Kräfte von der einfachen Größe zerlegt denken und annehmen können, es wirkten diese drei Kräfte in untheilbaren Momenten nach einander auf die zu bewegende Masse; dann müssen sie derselben, wie wir im Vorhergehenden gesehen haben, auch eine dreifache Geschwindigkeit ertheilen. Eben so läßt sich für jedes andere Verhältniß zeigen, daß bei gleichen Massen die Geschwindigkeiten den Kräften proportionirt sind.

§. 37. Stoß fester Körper.

Der Stoß entsteht, wenn ein bewegter Körper auf einen andern ruhenden oder bewegten Körper trifft.

Wir haben bei jedem Stoße die Gestalt, die Masse, die materielle Beschaffenheit der zusammenstoßenden Körper, ferner ihre Geschwindigkeit und die Richtung der Bewegung zu berücksichtigen. Was zunächst die Gestalt anlangt, so wollen wir uns um größerer Einfachheit willen auf die Betrachtung kugelförmiger Körper beschränken. In Hinsicht der Richtung unterscheiden wir den geraden und schiefen Stoß. Der Stoß heißt gerade, wenn die Richtungen der Bewegungen beider zusammentreffenden Kugeln mit der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zusammenfallen, schief, wenn dieses nicht stattfindet. Beim geraden Stoß hängt die Stärke desselben allein von der Masse und Geschwindigkeit der bewegten Kugeln ab; ist die eine Kugel ruhend, so wird die Stärke des Stoßes durch die Größe der Bewegung, d. h. durch das Pruduct der Masse und Geschwindigkeit der andern bestimmt. Der Stoß ist also um so stärker, je größer die Masse und je größer die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers ist; eine Kanonenkugel übt bei gleicher Geschwindigkeit einen weit stärkeren Stoß aus, als eine Flintenkugel; ein fallender Körper schlägt um so härter auf, je größer die Höhe ist, von welcher er fällt, weil mit dieser Höhe auch seine Geschwindigkeit zunimmt. — Beim schiefen Stoße hängt die Stärke desselben auch noch von der Richtung der Bewegung ab; der schiefe Stoß ist um so schwächer, je kleiner der Winkel ist, welchen die Richtung der Bewegung der stoßenden Kugel mit der gestoßenen Fläche bildet.

In Hinsicht der materiellen Beschaffenheit der zusammenstoßenden Körper hat die größere oder geringere Elasticität derselben wesentlichen Einfluß auf den Erfolg des Stoßes. Wir berücksichtigen hier nur die beiden einfachsten Fälle und nehmen entweder an, daß die zusammenstoßenden Massen vollkommen elastisch oder vollkommen unelastisch sind. Da in der Natur keine dieser Annahme vollständig entsprechenden Körper angetroffen werden, so geben die sogleich anzuführenden Gesetze gleichsam die Grenze an, zwischen denen die wirklichen Erscheinungen liegen. Wir beschränken uns aber hierbei, da diese Gesetze nur wenig Anwendung finden, auf die Annahme, daß die zusammenstoßenden Körper, wenn beide beweglich sind, eine gleiche Masse haben, und daß einer derselben vor dem Stoße ruhte.

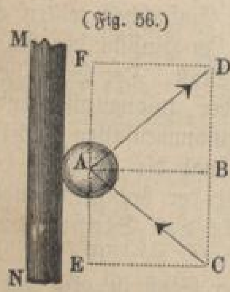
1) Stößt eine unelastische Kugel gegen eine feste Wand in einem geraden Stoße, so ruht sie nach dem Stoße.

2) Stößt eine unelastische Kugel gegen eine andere ruhende in einem geraden Stoße, so gehen beide nach dem Stoße mit der halben Geschwindigkeit der stoßenden Kugel fort.

3) Stößt eine elastische Kugel gegen eine feste Wand in einem geraden Stoße, so springt sie mit derselben Geschwindigkeit und auf demselben Wege zurück, auf welchem sie ankam. — Die elastische Kugel wird nämlich im Stoße zusammengedrückt, und da sie mit der nämlichen Kraft ihre Gestalt wieder herzustellen strebt, so erhält sie nach dem Stoße gerade die entgegengesetzte Bewegung, welche sie vor dem Stoße hatte.

4) Wenn eine elastische Kugel gegen eine feste Wand in einem schiefen Stoße trifft, so springt sie mit derselben Geschwindigkeit und unter dem nämlichen Winkel an der andern Seite zurück. — Denn wenn wir uns die Bewegung CA (Fig. 56) der stoßenden Kugel in die beiden Seitenbewegungen BA und EA zerlegt denken, von denen BA auf der festen Wand MN senkrecht, EA aber mit derselben parallel ist, so bleibt die Bewegung EA offenbar im Stoße ungeändert, und die Kugel würde sich, wenn sie nur diese Bewegung hätte, nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit AF = EA längs der Wand fortbewegen.

(Fig. 56.)



Dagegen verwandelt sich die Bewegung BA, wie wir in Nr. 3 gesehen haben, in die gerade entgegengesetzte AB. Durch Zusammensetzung dieser beiden Bewegungen, AB und AF, ergibt sich AD als die wirkliche Bewegung der mit der Bewegung CA angekommenen Kugel nach dem Stoße, wo, wie man leicht sieht, AD = AC und Winkel DAF = CAE ist.

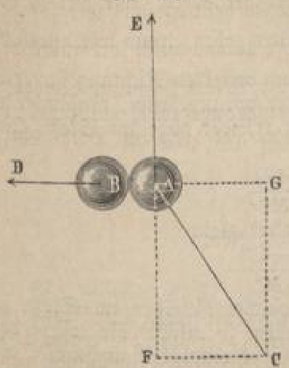
Dem so eben erwiesenen Gesetze über den schiefen Stoß elastischer Kugeln werden wir auch noch in mehreren anderen Zweigen der Physik (in der Lehre vom Schalle, Lichte u. a. m.) wieder begegnen. /

/ 5) Stößt eine elastische Kugel an eine andere ruhende in einem geraden Stoße, so bleibt sie nach dem Stoße ruhen und die vorher ruhende geht mit der Geschwindigkeit der stoßenden fort.

Versuche mit Kugeln auf dem Billard stellen dieses Gesetz darum weniger gut dar, weil sie wegen der Reibung an dem Tuche des Billards zugleich eine rollende Bewegung annehmen, welche durch den Stoß nicht aufgehoben wird. Besser eignen sich an Fäden aufgehängte elastische Kugeln für diese Versuche.

6) Stößt eine elastische Kugel A (Fig. 57) an eine andere ruhende B in einem schiefen Stoße, so gehn dieselben unter rechten Winkeln aus einander und zwar geht die gestoßene Kugel B in der verlängerten Richtung BD einer Linie, welche durch die Berührungsstelle beider Kugeln im Stoße und die Mittelpunkte derselben geht, die stoßende Kugel A aber in einer hierauf senkrechten Richtung AE fort. — Denn wenn AC die Richtung und Geschwindigkeit der stoßenden Kugel A vor dem Stoße anzeigt, und wir zerlegen diese Bewegung in die beiden Seitenbewegungen AF und AG, so bleibt die erstere im Stoße unverändert, die letztere aber wird nach Nr. 5 ganz auf die gestoßene Kugel B übertragen; es geht daher diese nach dem Stoße in der Richtung BD, die stoßende Kugel A aber in der Richtung AE fort.

(Fig. 57.)



Man muß daher beim Billard, um eine ruhende Kugel durch den Stoß einer bewegten nach einem bestimmten Punkte fortzutreiben, gerade die diesem Punkte gegenüberliegende Stelle der ruhenden Kugel zu treffen suchen.

Bei einem jeden Stoße verfließt einige Zeit, ehe sich die Bewegung der ganzen Masse des gestoßenen Körpers mittheilt. Da indeß diese Zeit in der Regel äußerst kurz ist, daß sie für unsere Wahrnehmung gänzlich verschwindet, so können wir füglich den Stoß als eine momentan wirkende Kraft ansehen. Da jedenfalls nach Beendigung des Stoßes alle weitere Wirkung aufhört, so würden die durch den Stoß in Bewegung gesetzten Körper mit vollkommen gleichförmiger Bewegung fortschreiten, wenn nicht Reibung, Widerstand der Luft u. dgl. dieses verhinderten.

Bei sehr heftigem Stoße kann es geschehen, daß der gestoßene Körper eine Trennung seiner Theile erfährt und ein Theil seiner Masse durch den stoßenden Körper mit fortgerissen und von der übrigen Masse in einer so kurzen Zeit getrennt wird, daß dieselbe nicht ausreicht, die Bewegung durch die übrige Masse des Körpers fortzupflanzen. So wird z. B. ein aufrecht stehendes Brett, welches ein mäßiger Stoß umzuwerfen vermöchte, von einer abgeschossenen Flintenkugel bloß durchbohrt; — dieselbe macht in eine Glasscheibe ein rundes Loch und läßt die übrige Scheibe unversehrt, während der schwache Wurf eines kleinen Steines die Scheibe ganz zerschmettert u. dgl. m.

An die oben aufgeführten Gesetze über den Stoß zweier Kugeln von gleicher Masse reihen wir noch die folgenden:

7) Wenn zwei unelastische Kugeln, welche sich beide nach derselben Richtung bewegen, zusammenstoßen, indem die eine die andere einholt, so gehen sie nach dem Stoße mit der halben Summe der Geschwindigkeiten fort.

8) Stoßen zwei unelastische Kugeln mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten an einander, so gehen sie nach dem Stoße mit der halben Differenz der Geschwindigkeiten fort.

9) Stoßen zwei nach derselben oder entgegengesetzten Richtung bewegte elastische Kugeln zusammen, so gehen sie nach dem Stoße mit verwechselten Geschwindigkeiten fort.

Sind überhaupt M und M′ die Massen zweier Kugeln, C und C′ ihr Geschwindigkeiten vor dem Stoße, so ist im Stoße die zu bewegende Masse $= M + M'$, die bewegende Kraft $MC \pm M'C'$, je nachdem die Kugeln vor dem Stoße hinter einander her oder einander entgegen gingen, folglich, wenn die Kugeln unelastisch sind, ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße.

$$v = \frac{MC \pm M'C'}{M + M'}.$$

Sind dagegen die Kugeln elastisch, so werden dieselben zunächst im Stoße zusammengedrückt; sie würden, wenn sie ihre Gestalt nicht wieder herstellten, wie wir so eben gesehen haben, mit der Geschwindigkeit $\frac{MC + M'C'}{M + M'}$ weiter gehen, wenn wir zuerst den Fall behandeln, daß beide Kugeln sich vor dem Stoße nach derselben Richtung bewegten. Nehmen wir ferner die Kugel mit der Masse M′ als die vorangehende, die Kugel mit der Masse M als die nachfolgende, also $C > C'$ an, so erleidet diese im Stoße einen Verlust an Geschwindigkeit gleich

$$C - \frac{MC + M'C'}{M + M'} = \frac{M'(C-C')}{M + M'},$$

die andere aber erfährt einen Zuwachs an Geschwindigkeit gleich

$$\frac{MC + M'C'}{M + M'} - C' = \frac{M(C - C')}{M + M'}.$$

Da nun aber beide Kugeln mit derselben Kraft, mit welcher dieselben im Stoße zusammengedrückt worden sind, ihre Gestalt wieder herstellen, so erfährt die erstere denselben Verlust, die andere den nämlichen Zuwachs an Geschwindigkeit nochmals, also überhaupt doppelt. Die Geschwindigkeit der nachfolgenden Kugel ist folglich nach dem Stoße.

$$v = C - \frac{2M'(C - C')}{M + M'} = \frac{2M'C' + C(M - M')}{M + M'},$$

die Geschwindigkeit der vorangehenden aber

$$v' = C' + \frac{2M(C - C')}{M + M'} = \frac{2MC + C'(M' - M)}{M + M'}.$$

Diese Formeln gelten auch noch für den Fall, daß die Kugeln vor dem Stoße sich nicht hinter einander her, sondern gegen einander bewegten, wenn wir in den vorstehenden Formeln die Geschwindigkeit der einen Kugel C als positiv, die der andern C′ als negativ annehmen.

§. 38, a. Fall der Körper.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, daß eine momentane Kraft eine gleichförmige Bewegung hervorbringt. Wirkt dagegen auf einen bewegten Körper eine continuirliche Kraft in der Richtung seiner Bewegung, so wird wegen der fortdauernden Wirkung der Kraft seine Geschwindigkeit beständig zunehmen und seine Bewegung folglich eine beschleunigte sein. Wenn aber eine continuirliche Kraft der Bewegung eines Körpers gerade entgegenwirkt, so muß seine Geschwindigkeit fortwährend abnehmen und seine Bewegung folglich eine verzögerte sein.

Von allen continuirlichen Kräften ist für uns die Schwere bei weitem die wichtigste. Wir betrachten hier zuerst diejenigen Bewegungen, welche durch die alleinige Wirkung der Schwere hervorgebracht werden.

Jeder sich selbst überlassene Körper, welcher von keiner Unterlage getragen wird, fällt, indem er durch seine Schwere nach dem Mittelpunkte der Erde hingezogen wird. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein Körper fällt, hängt jedoch nicht allein von seiner Schwere, sondern auch wesentlich von dem Widerstande ab, welchen die Luft seiner Bewegung entgegensetzt; dieser Widerstand hängt aber wieder von der Größe, der Gestalt und der Masse des fallenden Körpers, so wie auch von der mit der Zeit des Falles zunehmenden Geschwindigkeit desselben und von der Dichtigkeit der Luft, durch welche der Körper fällt, ab. Hiernach könnte ein alle diese Umstände zugleich berücksichtigendes Gesetz, wenn es möglich wäre ein solches aufzustellen, nur ein äußerst verwickeltes sein, und wir werden daher darauf verzichten müssen, dieses zu ermitteln. — Zu sehr einfachen Gesetzen gelangen wir dagegen, wenn wir uns einen im gänzlich leeren Raume fallenden Körper denken und die ganze Höhe des Falles als verschwindend klein gegen die Entfernung vom Mittelpunkte der Erde annehmen, so daß wir die Zunahme, welche die Schwere des fallenden Körpers dadurch erfährt, daß er während seines Falles sich dem Mittelpunkte der Erde nähert, unberücksichtigt lassen können. Unter diesen Voraussetzungen gelten für den freien Fall folgende Gesetze:

1) Alle Körper sind gleich schwer, d. h. im gänzlich leeren Raume müssen alle Körper mit gleicher Geschwindigkeit fallen.

2) Die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers nimmt in gleichem Verhältnisse mit der Zeit des Falles zu.

3) Der von demselben durchlaufene Weg aber wächst wie das Quadrat dieser Zeit.

Ein Körper fällt im leeren Raume in der ersten Secunde ohngefähr 15 Par. Fuß, also in 2 Secunden 4 . 15 = 60, in 3 Secunden 9 . 15 = 135, in 4 Secunden 16 . 15 = 240 Fuß u. s. w.

4) Die am Ende der ersten Secunde erlangte Geschwindigkeit ist doppelt so groß, als der in der ersten Secunde zurückgelegte Weg und beträgt also 30 Par. Fuß, d. h. der Körper würde, wenn er mit der am Ende der ersten Secunde erlangten Geschwindigkeit fortginge, ohne daß die Schwere weiter auf ihn einwirkte, in der zweiten Secunde 30 Fuß zurücklegen. — Am Ende der zweiten Secunde beträgt die Geschwindigkeit des fallenden Körpers 2 . 30 = 60 Fuß, am Ende der dritten Secunde 3 . 30 = 90 Fuß u. s. w.

Die Gesetze sind zuerst von Galilei 1602 aufgefunden und durch den Fall auf der schiefen Ebene nachgewiesen worden. Da nämlich die Körper, welche auf einer schiefen Ebene fallen, ebenfalls durch eine continuirliche und unveränderliche Kraft, (welche sich, wie wir oben [§. 32] gesehen haben, zu der ganzen Schwere wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge verhält), beschleunigt werden, so müssen sie dieselben Gesetze, wie die frei fallenden Körper befolgen, nur mit dem Unterschiede, daß diese Bewegung in dem angegebenen Verhältnisse langsamer erfolgt, als beim freien Falle. Je langsamer aber ein Körper fällt, um so geringer ist der Widerstand der Luft; während derselbe für rasch bewegte Körper sehr beträchtlich ist, ist er dagegen für langsam fallende nur unbedeutend. Ein anderes Hinderniß entspringt jedoch für den Fall auf der schiefen Ebene aus der Reibung. Um diese zu vermindern, ließ Galilei glatte messingene Kugeln in Rinnen, welche mit glattem Pargament ausgefüttert waren, herabrollen.

Aus den oben angeführten Gesetzen ergibt sich weiter und zwar zunächst durch Umkehrung des dritten Gesetzes, daß

5) die Zeiten des Falles wie die Quadratwurzeln aus den Fallhöhen zunehmen, daß also z. B. ein Körper eine doppelte, drei-, viermal ... so lange Zeit braucht, um durch eine 4, 9, 16mal .. so große Höhe zu fallen, und da nach dem zweiten Gesetze sich die Endgeschwindigkeiten gerade wie die Fallzeiten verhalten, so folgt hieraus ferner, daß auch

6) die Endgeschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln aus den Fallhöhen wachsen.

Fragen wir daher, wie lange ein Körper im luftleeren Raume gebrauchen würde, um durch eine bestimmte Höhe, z. B. 100 Fuß zu fallen, so erhalten wir, da ein Körper in einer Secunde 15 Fuß fällt, zufolge des vierten Gesetzes, wenn wir die gesuchte Zeit mit t bezeichnen, die Proportion:

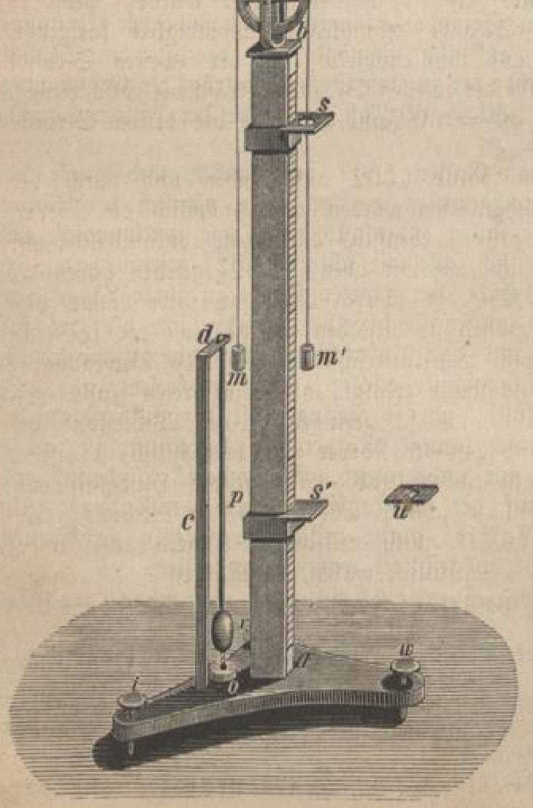
$$1 : t = \sqrt{15} : \sqrt{100},$$

also
$$t = \sqrt{\frac{100}{15}} = \sqrt{6,66\,..} = 2,58\,..$$

Ein Körper würde also im luftleeren Raume etwas mehr als $2^1/_2$ Secunde brauchen, um durch die Höhe von 100 Fuß zu fallen. — Wollen wir weiter die Geschwindigkeit wissen, welche er am Ende dieses Falles erlangt hat, so ergibt sich, da die am Ende der ersten Secunde erlangte Geschwindigkeit 30 Fuß beträgt und die Geschwindigkeit überhaupt in gleichem Verhältnisse mit der Zeit zunimmt, die gesuchte Geschwindigkeit gleich $2,58 \times 30 = 77$ Fuß.

Ueber die Begründung der obigen Gesetze führen wir Folgendes an: Das erste dieser Gesetze geht mit voller Entschiedenheit aus Pendelversuchen hervor (vergl. unten §. 40); auch läßt sich dasselbe durch Versuche unter dem Recipienten der Luftpumpe und noch einfacher durch den folgenden Versuch bestätigen. Wenn man auf einen zwischen zwei Fingern wagerecht gehaltenen Thaler ein kleines Blättchen Papier oder eine kleine Feder legt und dann den Thaler (aus mäßiger Höhe) fallen läßt, so gelangt das Blättchen oder die Feder, wenn der Thaler während des Fallens die wagerechte Lage beibehält, gleichzeitig mit demselben am Fußboden an, indem der vorangehende Thaler den Widerstand der Luft überwindet.

(Fig. 58.)



Zum empirischen Beweise des zweiten, dritten und vierten Gesetzes dient die von Atwood angegebene Fallmaschine. Dieselbe besteht aus einer in Fuße und Zolle getheilten Säule ab (Fig. 58), welche durch die drei Schrauben v, w, i des Fußgestelles in eine genau senkrechte Lage gebracht werden kann. Ueber der Säule befindet sich ein sehr leichtes und leicht drehbares Rädchen r, über welches eine Schnur läuft, die an ihrem Ende zwei gleiche Gewichte m und m' trägt; an der Säule selbst sind zwei Schieber s und s' angebracht, von denen der obere eine Oeffnung hat, durch welche die Schnur und das Gewicht m' frei hindurchgeht, während das auf dieses gelegte Uebergewicht u bei dem Durchgange des Gewichtes m' durch die Oeffnung auf dem Schieber liegen bleibt. Zur Messung der Zeit dient ein neben der Säule ab an dem senkrechten Stabe cd aufgehängtes Pendel p, welches genau Secunden schlägt. Unten ist an das Pendel ein Kügelchen angehängt, welches bei jedem Hin- und Hergange des Pendels an eine kleine metallne Glocke o schlägt. — Wenn das Uebergewicht u auf das Gewicht m' aufgelegt ist, so ist die zu bewegende Masse $= m + m' + u = 2m + u$, welche nur durch das Uebergewicht u, da m und m' sich das Gleichgewicht halten, zur Bewegung angetrieben wird. Bezeichnen wir daher die am Ende der ersten Secunde bei diesem Falle erlangte Geschwindigkeit mit g', die Geschwindigkeit aber, welche die frei fallenden Körper am Ende der ersten Secunde haben, mit g, so verhält sich

$$g' : g = u : 2m + u.$$

Ist z. B. $2m = 14u$, so ist $g' = \frac{1}{15}g$. Erheben wir das Gewicht m, bis zum obersten Theilstriche, stellen den Schieber s einen Fuß tiefer, den Schieber s' zwei Fuß unter diesen, so fällt bei aufgelegtem Uebergewichte u' das Gewicht m, in der ersten Secunde bis zu dem Schieber s und in der zweiten bis s', indem nämlich nach abgehobenem Uebergewichte u die Gewichte m und m' ihre Bewegung mit der am Ende der ersten Secunde erlangten Geschwindigkeit fortsetzen. Stellen wir bei weiter folgenden Versuchen den Schieber s 4, 9 . . . Fuß unter den Anfangspunkt der Scale und den Schieber s' 4, 6 . . . Fuß tiefer, so erreicht das bis oben an gehobene Gewicht m', nachdem es mit dem Uebergewichte u belastet und dann losgelassen worden ist, den Schieber s nach 2, 3 . . . Secunden und eine Secunde später den Schieber s'. — Die Atwood'sche Fallmaschine wird jedoch in der Genauigkeit der Resultate von dem Phonoscop übertroffen. S. die Abhandlung von W. **Rollmann** in dem Programme des Gymn. zu Stralsund, 1867.

Zur **theoretischen** Begründung der Gesetze des freien Falles führen wir Folgendes an: Da die Schwere in jedem Zeittheilchen mit gleicher Stärke auf einen fallenden Körper beschleunigend einwirkt, so muß sie auch seine Geschwindigkeit in jeder Secunde um gleichviel vermehren. Heißt daher die am Ende der ersten Secunde erlangte Geschwindigkeit g, so wird sie am Ende der zweiten Secunde $= 2g$, am Ende der dritten Secunde $= 3g$ u. s. w. sein. — Der Raum, welchen der fallende Körper in irgend einer Secunde, z. B. in der dritten Secunde wirklich zurücklegt, ist offenbar größer, als die Geschwindigkeit am Anfange und kleiner als die Geschwindigkeit am Ende dieser Secunde, also $> 2g$, aber $< 3g$; und er muß genau dem Mittel dieser beiden Größen $\frac{5}{2}g$ gleich sein, da die Geschwindigkeit während dieser Secunde ganz gleichmäßig von 2g bis 3g gewachsen ist. — Eben so findet man den Fallraum für die erste Secunde $= \frac{1}{2}g$, für die zweite $= \frac{3}{2}g$ u. s. w. **Die Fallräume in den einzelnen Secunden verhalten sich also wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 u. s. w.**

Durch Addition der in den einzelnen Secunden zurückgelegten Räume ergeben sich die Fallräume für die ganzen Zeiten; für die erste Secunde $= \frac{1}{2}g$, für 2 Secunden $= \frac{1}{2}g + \frac{3}{2}g = \frac{4}{2}g$, für 3 Secunden $= \frac{4}{2}g + \frac{5}{2}g = \frac{9}{2}g$, für 4 Secunden $= \frac{9}{2}g + \frac{7}{2}g = \frac{16}{2}g$ u. s. w. **Diese Fallräume verhalten sich also wie die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16 u. s. w.**

Bezeichnen wir überhaupt beim freien Falle die in Secunden ausgedrückte Zeit mit t, die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit mit v, den in der ganzen Zeit durchlaufenen Raum mit s und den Fallraum in der ersten Secunde mit $\frac{1}{2}g$, so ist

$$1)\ v = gt \text{ und } 2)\ s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Fragen wir, welche Geschwindigkeit ein von einer bestimmten Höhe herabfallender Körper erlangt, so ist s gegeben und v gesucht. Aus (2) ergibt sich zunächst die Zeit

$$3)\ t = \sqrt{\frac{2s}{g}},$$

und dieses in (1) eingesetzt, gibt

$$4)\ v = \sqrt{2gs}.$$

Wenn ein fallender Körper die Endgeschwindigkeit v während der ganzen Dauer t seiner Bewegung, von Anfang bis zu Ende, gehabt hätte, so würde der von demselben durchlaufene Weg $= vt$, oder da wir vermöge Gleichung (1) statt v auch gt setzen können, $= gt^2$ sein. Da nun nach Gleichung (2) der wirklich durchlaufene Weg $= \frac{1}{2} gt^2$ ist, so folgt hieraus, daß ein mit der Endgeschwindigkeit eines fallenden Körpers gleichförmig fortbewegter Körper in der nämlichen Zeit einen doppelt so großen Raum als der fallende Körper durchläuft.

Bei dem Falle auf der schiefen Ebene ist (nach §. 32) die Beschleunigung dem Verhältniß zwischen der Höhe und Länge, d. h. dem Sinus des Neigungswinkels proportional. Nennen wir denselben α und bedienen uns im Uebrigen ähnlicher Bezeichnungen, wie beim freien Falle, so ist

$$5)\ v' = gt \sin \alpha \text{ und } 6)\ s' = \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha.$$

Beantworten wir auch hier wieder die Frage, welche Geschwindigkeit ein Körper erlangt, wenn er einen bestimmten Weg s auf der schiefen Ebene durchlaufen hat, so ergibt sich zunächst aus (5) die Zeit

$$7)\ t = \sqrt{\frac{2s'}{g \sin \alpha}},$$

und wenn wir diesen Werth in (6) einsetzen,

$$8)\ v' = \sqrt{2gs' \sin \alpha}.$$

$v = ct$

$s = \frac{t \cdot v}{2}$

$\frac{t^2 c}{2}$

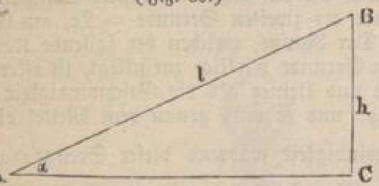
$h = \frac{1}{2} gt^2$

$v = gt$

$v = \sqrt{2g \cdot h}$

Bezeichnen wir die Länge der schiefen Ebene AB (Fig. 59) mit l, die Höhe BC mit h, ferner die Geschwindigkeit, welche beim Fall auf der schiefen Ebene ein Körper erlangt, welcher die ganze Länge derselben zurückgelegt hat, mit v' und die Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangen würde, wenn er durch die senkrechte Höhe BC gefallen wäre, mit v, so ist zufolge der Gleichung (8)

(Fig. 59.)



$$v' = \sqrt{2gl \sin \alpha}$$

und vermöge Gleichung (4)

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Nun ist aber $l \sin \alpha = h$, folglich $v = v'$, d. h. ein Körper erlangt beim Falle auf der schiefen Ebene, wenn er die Länge derselben AB durchlaufen hat, die nämliche Geschwindigkeit wie ein frei fallender Körper, welcher durch die senkrechte Höhe derselben BC gefallen ist.

*§. 38, b. Das Trägheitsmoment.

Bei den im Vorhergehenden behandelten Bewegungen beschrieb der bewegte Körper eine gerade Linie. Wir wenden uns nun zur Betrachtung solcher Bewegungen, bei denen der bewegte Körper genöthigt ist, eine krummlinige Bahn, insbesondere einen Kreis zu durchlaufen.

Wir unterscheiden bei einer kreisförmigen Bewegung die lineare und die Winkelgeschwindigkeit. Unter der linearen Geschwindigkeit verstehn wir so wie früher (§. 17) die Länge des Weges, welchen ein Körper in der Zeiteinheit zurücklegt, wenn der Zustand seiner Bewegung unverändert derselbe bleibt, unter der Winkelgeschwindigkeit aber den Winkel, welchen der Radius vector, d. h. die Linie, welche den bewegten Körper mit dem Mittepunkt des Kreises verbindet, unter den eben angeführten Bedingungen beschreibt.

Bewegen sich zwei Körper auf gleichen Kreisen, so verhalten sich die Winkelgeschwindigkeiten offenbar wie die linearen. Bewegen sich dagegen zwei Körper auf ungleichen Kreisen mit gleicher linearer Geschwindigkeit, so verhalten sich, wie leicht zu sehen, die Winkelgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Radien. Ist z. B. der Radius des einen Kreises dreimal größer als der des anderen, so ist der Winkel, um welchen der größere Radius fortgerückt ist, nur der dritte Theil des Winkels, welchen der kleinere Radius beschrieben hat, wenn beide Körper Bogen von gleicher Länge durchlaufen haben. — Ueberhaupt verhalten sich bei kreisförmigen Bewegungen die Winkelgeschwindigkeiten direkt wie die linearen Geschwindigkeiten, aber umgekehrt wie die Radien. — Bezeichnen wir daher für zwei Körper, welche sich auf verschiedenen Kreisen bewegen, die Radien dieser Kreise mit R und R′, die linearen Geschwindigkeiten mit C und C′, die Winkelgeschwindigkeiten mit V und V′, so verhält sich

(Fig. 60.)

$$V : V' = \frac{C}{R} : \frac{C'}{R'} = CR' : C'R.$$

Wir behandeln nun zunächst die folgende Aufgabe: Auf einer schwerlosen Stange BC (Fig. 60), welche um den festen Punkt C drehbar ist, ist im Punkte A eine Masse M angebracht, und eine auf den nämlichen Punkt A in senkrechter Richtung zu CB und mit unveränderlicher Stärke wirkende Kraft P ertheilt der Stange CB in einer bestimmten Zeit die Winkelgeschwindigkeit V; wie groß wird die in der nämlichen Zeit erzeugte Winkelgeschwindigkeit sein, wenn die Größe der Kraft P und ihr Angriffspunkt A unverändert bleiben, die Masse M aber aus dem Punkte A in irgend einen andern Punkt B der Stange BC verlegt wird?

Bevor wir diese Frage beantworten, bestimmen wir zunächst die Größe der Kraft, welche im Punkte B (nach der entgegengesetzten Richtung hin) angebracht werden müßte, um der in A wirkenden Kraft P das Gleichgewicht zu halten. Bezeichnen wir die gedachte Kraft mit Q, dann verhält sich nach dem Gesetze vom Hebel

$$Q : P = AC : BC.$$

Mit einer der Größe dieser Kraft Q entsprechenden Stärke wird daher auch die nach B verlegte Masse M durch die in A wirkende Kraft P angetrieben. Da sich nun für zwei Kräfte, welche auf gleiche Massen wirken, die durch dieselben in gleichen Zeiten hervorgebrachten linearen Geschwindigkeiten (nach §. 36) wie diese Kräfte verhalten, so bekommen wir weiter, wenn wir mit C die Geschwindigkeit bezeichnen, welche die Kraft P der Masse M in der Zeiteinheit ertheilt, als diese Masse sich in A befand, und mit c die Geschwindigkeit, welche diese Kraft der von A nach B verlegten Masse M in der Zeiteinheit ertheilt, die Proportion

$$c : C = Q : P = AC : BC,$$

oder wenn wir der Kürze wegen AC = R und BC = r setzen,

$$c : C = R : r.$$

Ist uns aber für zwei kreisförmige Bewegungen das Verhältniß der Radien und der linearen Geschwindigkeiten bekannt, so setzt sich hieraus nach der oben angeführten Regel das Verhältniß der Winkelgeschwindigkeiten zusammen. Bezeichnen wir daher mit v die Winkelgeschwindigkeit, welche die in den Punkt B verlegte Masse in der nämlichen Zeit erlangt, in welcher dieselbe, als sie sich im Punkte A befand, die Winkelgeschwindigkeit V erreichte, dann verhält sich $v : V = cR : Cr$,
oder da $c : C = R : r$ ist: $v : V = R^2 : r^2$.
Verlegen wir die Masse M aus B noch in irgend einen andern Punkt B′ der festen Stange BC und geben wir v′ und r′ für diesen Punkt die nämliche Bedeutung, welche v und r für den Punkt B erhalten haben, dann ist aus den angeführten Gründen $v' : V = R^2 : r'^2$.

Verbinden wir diese Proportion mit der vorhergenden, so ergibt sich

$$v : v' = r'^2 : r^2,$$

d. h. wenn die Größe und der Angriffspunkt der bewegenden Kraft die nämlichen bleiben, der Abstand der zu bewegenden Masse vom Drehungspunkte aber sich verändert, so verhalten sich die Winkelgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Quadrate dieser Abstände. Die zwei-, dreimal so weit entfernte Masse braucht also unter den angeführten Bedingungen zu einem ganzen Umlaufe vier-, neunmal so viel Zeit, als eine gleichgroße Masse in der einfachen Entfernung. Um die erstere mit derselben Geschwindigkeit fortzubewegen, würde eine vier-, neunmal so große Kraft erforderlich sein.

Da überhaupt zufolge der obigen Proportion die Winkelgeschwindigkeit bei ungeändeter Kraft in dem nämlichen Verhältnisse abnimmt, in welchem das Quadrat des Radius wächst, und da ferner (nach §. 36) die Geschwindigkeiten den Kräften proportional sind, so werden wir, wenn die Winkelgeschwindigkeit ungeändert bleiben soll, die Kraft in gleichem Verhältnisse mit dem Quadrat des Radius wachsen lassen müssen. Wenn wir also mit p und p′ zwei in A angebrachte Kräfte bezeichnen, welche der in B oder B′ befindlichen Masse M gleiche Winkelgeschwindigkeiten ertheilen, so muß sich verhalten $p : p' = r^2 : r'^2$.

Bisher haben wir die zu bewegende Masse als unverändert angesehen; vergrößern wir die Masse, so muß (nach §. 36), wenn die nämliche Geschwindigkeit erzielt werden soll, die Kraft in demselben Verhältnisse zunehmen. Da also die Kräfte bei gleichen Radien sich gerade wie die Massen, bei gleichen Massen wie die Quadrate der Radien verhalten müssen, wenn die Winkelgeschwindigkeit keine Aenderung erfahren soll, so müssen folglich überhaupt bei gleichen Winkelgeschwindigkeiten sich die bewegenden Kräfte wie die Producte aus den Massen und den Quadraten der Radien verhalten, in Zeichen

$$p : p' = Mr^2 : M'r'^2,$$

wo M und M′ die zu bewegenden Massen bezeichnen, die übrigen Buchstaben aber die schon früher angegebene Bedeutung haben.

Das Product aus der Masse und dem Quadrate des Radius, welches zufolge des Vorstehenden als das Maaß der bewegenden Kraft angesehn werden kann, führt den Namen Trägheitsmoment. Dasselbe ist besonders für die Maschinenlehre von großer Wichtigkeit.

Verhalten sich z. B. bei zwei Schwungrädern von gleicher Masse die Radien wie 1 : 3, so verhalten sich, wenn nur das Gewicht des äußern Ringes in Betracht gezogen, von dem Gewicht der Speichen u. s. w. aber abgesehn wird, die Trägheitsmomente derselben wie 1 : 9. Wären überdies noch die Massen verschieden, und verhielten sich dieselben wie 1 : 5, so wäre das Verhältniß der Trägheitsmomente = 1 : 45.

Zufolge der obigen Proportion

$$p : p' = Mr^2 : M'r'^2$$

verhalten sich bei gleichen Winkelgeschwindigkeiten die bewegenden Kräfte wie die Trägheitsmomente. Da nun bei gleichen Trägheitsmomenten sich die bewegenden Kräfte offenbar wie die Winkelgeschwindigkeiten verhalten müssen, so folgt hieraus, daß sich überhaupt die bewegenden Kräfte wie die Producte aus den Winkelgeschwindigkeiten und Trägheitsmomenten verhalten, also

$$p : p' = v' . Mr^2 : v' . Mr'^2.$$

Ist $p = p'$, so verhält sich

$$v : v' = M'r'^2 : Mr^2,$$

d. h. bei gleichen bewegenden Kräften verhalten sich die Winkelgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Trägheitsmomente.

Unter dem Trägheitsmomente eines materiellen Körpers versteht man die Summe der Trägheitsmomente aller seiner materiellen Theile. Dasselbe kann, wenn die Größe und Gestalt eines aus gleichförmiger Materie bestehenden Körpers und die Lage der Drehungsaxe gegeben ist, durch Rechnung gefunden werden. Diese Rechnungen bieten jedoch, wenn nur die Lehren der Elementarmathematik zu Hilfe genommen werden, im allgemeinen nicht unerhebliche Schwierigkeiten dar. Wir beschränken uns auf die folgenden einfachen Fälle.

Es soll zunächst das Trägheitsmoment einer sehr dünnen Stange, welche um den einen Endpunkt drehbar ist, gefunden werden, wenn die Länge der Stange gleich a, die Masse derselben gleich M gegeben ist. — Denken wir uns die Länge der Stange in n gleiche Theile getheilt, dann ist die Masse eines jeden Theilchens $= \frac{M}{n}$; die Abstände dieser Theilchen von dem Drehungspunkte sind offenbar größer als

$$0, \frac{1}{n}a, \frac{2}{n}a, \frac{3}{n}a \ldots\ldots \frac{n-1}{n}a$$

und kleiner als

$$\frac{1}{n}a, \frac{2}{n}a, \frac{3}{n}a \ldots\ldots \frac{n}{n}a.$$

Bezeichnen wir das gesuchte Trägheitsmoment der ganzen Stange mit T, so ist folglich

$$T < M \cdot \frac{a^2}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 \ldots\ldots + (n-1)^2),$$

aber

$$T > M \cdot \frac{a^2}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 \ldots\ldots + n^2).$$

Nun ist bekanntlich*)

$$1 + 2^2 + 3^2 \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

und

$$1 + 2^2 + 3^2 \ldots\ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

also

$$T > \frac{a^2 \cdot M}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

und

$$T < \frac{a^2 \cdot M}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Je größer wir n annehmen, um so mehr nähert sich sowohl die obere wie die untere der beiden Grenzen, zwischen denen T liegt, dem Werthe $\frac{1}{3}a^2M$, und da beide, wenn wir n unendlich groß annehmen, in diesen einen Werth zusammenfallen, so folgt hieraus

$$T = \frac{1}{3}a^2M.$$

Das Trägheitsmoment der um einen Endpunkt drehbaren Stange ist daher eben so groß, als wenn der dritte Theil ihrer ganzen Masse in dem andern Endpunkte vereinigt, die Stange im Uebrigen aber ohne Schwere wäre. — Liegt der Drehungspunkt nicht in einem Endpunkte, sondern zwischen beiden Endpunkten, so ist das Trägheitsmoment der ganzen Stange gleich der Summe der Trägheitsmomente der beiden Theile, in welche die Stange durch den Drehungspunkt getheilt wird. Ist die Stange um ihren Schwerpunkt, also um ihre Mitte drehbar, so ist die Länge der einen Hälfte $= \frac{1}{2}a$, ihre Masse $= \frac{1}{2}M$, also ihr Trägheitsmoment $= \frac{1}{24}a^2M$ und folglich das Trägheitsmoment der ganzen Stange $= \frac{1}{12}a^2M$.

Wir behandeln ferner die Aufgabe, das Trägheitsmoment einer um den Mittelpunkt drehbaren kreisförmigen Scheibe zu finden, wenn die Masse derselben $= M$ und der Radius $= r$ gegeben ist. — Theilen wir einen Radius in n gleiche Theile und beschreiben aus dem Mittelpunkte Kreise, welche die Abstände der

*) Arithm. u. Alg. §. 254 Anm.

Theilungspunkte vom Mittelpunkte zu Radien haben, so wird der ganze Kreis, wenn wir den innersten kleinen Kreis ebenfalls als einen Ring bezeichnen, in n Ringe zerschnitten, deren Breite $= \frac{1}{n}r$ ist. Der m^{te} dieser Ringe hat zum innern Radius $\frac{m-1}{n} . r$, zum äußern $\frac{m}{n} . r$, zur innern Peripherie $\frac{m-1}{n} . 2r\pi$, zur äußern $\frac{m}{n} . 2r\pi$, und da die Breite des Ringes $= \frac{1}{n}r$, so ist folglich sein Inhalt

$$> \frac{m-1}{n^2} . 2r^2\pi, \text{ aber } < \frac{m}{n^2} . 2r^2\pi.$$

Da ferner der Flächeninhalt der ganzen kreisförmigen Scheibe $= r^2\pi$, ihre Masse $= M$ ist, so ist die Masse des gedachten Ringes

$$> \frac{2(m-1)}{n^2}M, \text{ aber } < \frac{2m}{n^2}M,$$

und da endlich der Abstand dieses Ringes vom Drehungspunkte offenbar $> \frac{m-1}{n}r$ aber $< \frac{m}{n}r$ zu setzen ist, so ist folglich das Trägheitsmoment des m^{ten} Ringes

$$> \frac{2(m-1)^3}{n^4} . r^2M, \text{ aber } < \frac{2m^3}{n^4} . r^2M.$$

Bezeichnen wir daher mit T das Trägheitsmoment der ganzen kreisförmigen Scheibe, so ist hiernach $T > \frac{2r^2M}{n^4}(1 + 2^3 + 3^3 \ldots + (n-1)^3)$,

aber $T < \frac{2r^2M}{n^4}(1 + 2^3 + 3^2 \ldots n^3)$.

Nun ist bekanntlich*)

$$1 + 2^3 + 3^3 \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

und $1 + 2^3 + 3^3 \ldots + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2n^2}{4}$,

demnach ist $T > \frac{1}{2}r^2M\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$,

aber $T < \frac{1}{2}r^2M\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

Hieraus ergibt sich, wenn wir n unendlich groß annehmen,

$$T = \frac{1}{2}r^2M.$$

Um das **Trägheitsmoment eines von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Ringes** zu finden, wenn der größere Radius $= r$, der kleinere $= \rho$ und die Masse des Ringes $= M$ gegeben ist, denken wir uns auch die innere Kreisfläche, welche ρ zum Radius hat, eben so wie den Ring selbst gleichförmig mit Masse besetzt; dann ist die Masse der ganzen Kreisfläche, welche r zum Radius hat,

$$= \frac{r^2M}{r^2 - \rho^2} \text{ und ihr Trägheitsmoment } = \frac{r^4M}{2(r^2 - \rho^2)},$$

die Masse der abzuziehenden Kreisfläche, welche zum Radius ρ hat,

$$= \frac{\rho^2M}{r^2 - \rho^2} \text{ und ihr Trägheitsmoment } = \frac{\rho^4M}{2(r^2 - \rho^2)},$$

also das gesuchte Trägheitsmoment des Ringes

$$= \frac{(r^4 - \rho^4)M}{2(r^2 - \rho^2)} = \frac{r^2 + \rho^2}{2}M.$$

Auf gleiche Weise ist das **Trägheitsmoment eines massiven oder hohlen um seine Axe drehbaren Cylinders** zu berechnen.

Durch eine Betrachtung, welche derjenigen, die wir über eine kreisförmige um ihren Mittelpunkt drehbare Scheibe angestellt haben, ganz ähnlich ist, findet man das

*) Arithmetik und Algebra a. a. O.

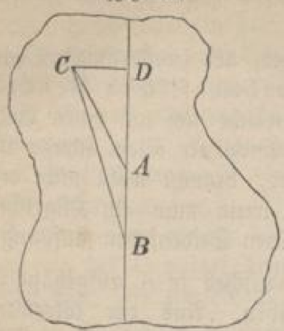
Trägheitsmoment einer Kugel, wenn die Drehungsaxe durch den Mittelpunkt geht

$$= \frac{2}{5} r^2 M,$$

wenn r den Radius und M die Masse der Kugel bezeichnet.

Endlich führen wir über das Trägheitsmoment noch den folgenden Satz*) an: Wenn ein Körper um eine Axe gedreht wird, welche nicht durch den Schwerpunkt geht, so ist das Trägheitsmoment größer, als wenn die Drehung um eine zu jener parallele, aber durch den Schwerpunkt gehende Axe erfolgt, und zwar um das Product aus der Masse des Körpers und dem Quadrate des senkrechten Abstandes der parallelen Achsen von einander. — Wir betrachten zunächst irgend einen materiellen Punkt C des in Rede stehenden Körpers (Fig. 61) und bezeichnen die Masse dieses Punktes mit m. Legen wir dann durch denselben eine Ebene senkrecht zu den beiden parallelen Axen, welche die durch den Schwerpunkt gehende Axe in A, die andere in B schneidet, fällen wir ferner aus dem Punkte C auf die verlängerte Linie AB die Senkrechte CD und setzen AB = a, AD = x, CD = y, dann ist das Trägheitsmoment des in C befindlichen materiellen Theilchens für die durch den Schwerpunkt gehende Axe gleich

(Fig. 61.)



$$m \cdot AC^2 = m \cdot x^2 + m \cdot y^2,$$

für die andere Axe aber gleich

$$m \cdot BC^2 = m(a + x)^2 + my^2$$
$$= ma^2 + 2max + mx^2 + my^2.$$

Es unterscheidet sich daher das letztere Trägheitsmoment von dem ersteren um die Größe

$$ma^2 + 2max.$$

Denken wir uns dieselbe Betrachtung auf alle anderen materiellen Theilchen unseres Körpers angewendet, bezeichnen wir die Massen derselben mit m', m'', m''' . . ., ihre Abscissen mit x', x'', x''' . . ., ferner das Trägheitsmoment des ganzen Körpers für die durch den Schwerpunkt gehende Axe mit T, für die andere ihr parallele Axe mit T^1, so erhalten wir die Gleichung

$$T^1 - T = a^2(m + m' + m'' + m''' + \ldots) + 2a(mx + m'x' + m''x'' + m'''x''' + \ldots).$$

Der Factor $m + m' + m'' + m''' \ldots$ ist offenbar der Masse des ganzen Körpers gleich, welche wir mit M bezeichnen wollen; der Factor $mx + m'x' + m''x'' + m'''x''' + \ldots$ ist die Summe der statischen Momente der materiellen Theile des fraglichen Körpers für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe und folglich nach §. 26, a. Anm. gleich Null. Die zuletzt erhaltene Gleichung geht daher über in

$$T^1 = T + a^2M, \text{ w. z. b. w.}$$

Oder haben wir das Trägheitsmoment einer kreisförmigen Scheibe $= \frac{1}{2} r^2 M$ und das Trägheitsmoment einer Kugel $= \frac{2}{5} r^2 M$ gefunden, wenn die Drehungsaxe durch den Mittelpunkt geht. Werden die Scheibe oder die Kugel um eine Axe gedreht, welche von dem Mittelpunkt um den Abstand a entfernt ist, so ist für die erstere das Trägheitsmoment

$$T^1 = \left(\frac{1}{2} r^2 + a^2\right) M,$$

für die letztere

$$T^1 = \left(\frac{2}{5} r^2 + a^2\right) M.$$

§. 39. Mathematisches Pendel.

Eine zweite durch die Schwere hervorgebrachte Bewegung ist die schwingende Bewegung eines Pendels. Unter einem Pendel versteht man einen schweren Körper, welcher in irgend einem Punkte, welcher jedoch nicht gerade

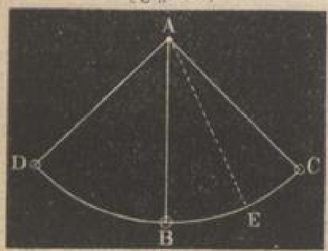
*) Auf diesen Satz gründet sich das weiter unten (§. 40, a.) anzuführende Reversionspendel.

der Schwerpunkt sein darf, so aufgehängt ist, daß er sich um diesen Punkt frei herumdrehen kann. Ein solcher Körper kann, wie wir wissen, nur dann ruhen, wenn sein Schwerpunkt lotrecht unter dem Aufhängepunkte liegt. Aus dieser Lage gebracht und dann sich selbst überlassen, kehrt er vermöge seiner Schwere nicht bloß in dieselbe zurück, sondern überschreitet sie nach dem Trägheitsgesetze, kehrt dann wieder zurück u. s. w., wodurch die schwingende Bewegung des Pendels entsteht.

Wir gehen auch hier, wie beim Falle der Körper, am zweckmäßigsten von einer *hypothetischen* Annahme, nämlich vom *mathematischen Pendel*, aus. Hierunter versteht man eine gerade Linie, welche sich um einen Endpunkt frei herumdrehen kann, und deren anderer Endpunkt allein schwer ist. Daß ein solches Pendel in der Natur nicht existirt, braucht wohl nicht erst gesagt zu werden; man stellt es annähernd dar, wenn man ein Kügelchen von Blei oder noch besser von Platin an einem feinen Seidenfaden aufhängt.

Denken wir uns, AB (Fig. 62) sei ein mathematisches in A aufgehängtes Pendel und B der einzige schwere Punkt desselben. Aus der lotrechten Lage AB in die schiefe Lage AC gebracht und sich dann selbst überlassen, wird das Pendel vermöge der Schwere in die Lage AB zurückkehren und der schwere Endpunkt den Bogen CB durchlaufen. Wir können diese Bewegung mit dem Falle auf der schiefen Ebene vergleichen, indem wir uns den Bogen BC als aus unendlich vielen, unendlich kleinen geraden Stücken bestehend denken; doch findet der wesentliche Unterschied statt, daß beim Falle auf der schiefen Ebene der Neigungswinkel fortwährend der nämliche bleibt, während derselbe hier von C nach B beständig abnimmt und in B selbst verschwindet. Die Geschwindigkeit des Pendels wird daher zwar beständig, aber nicht gleichförmig, sondern um so langsamer zunehmen, je mehr sich der schwere Punkt dem Punkte B nähert, wo seine Geschwindigkeit gar keinen Zuwuchs mehr erhält. Da indeß, wie gesagt, die Bewegung von C nach B fortwährend durch die Schwere beschleunigt worden ist, so muß die Geschwindigkeit in B am größten sein; vermöge des Trägheitsgesetzes fährt daher der schwere Punkt fort, sich über B hinaus zu bewegen und steigt nun in dem Bogen BD in die Höhe. Da die Schwere seiner Bewegung jetzt genau eben so entgegenwirkt, als sie vorhin beschleunigend wirkte, so muß der äußerste Punkt D, welchen der schwere Punkt erreicht, eben so hoch über B wie C liegen, also Bogen BC genau gleich BD sein, indem bei einem *mathematischen* Pendel alle Hindernisse der Bewegung, Widerstand der Luft, Reibung u. dgl. wegfallen. Nachdem der schwere Punkt in D angekommen ist, hat er vermöge der Gegenwirkung der Schwere seine ganze Geschwindigkeit verloren, und er durchläuft nun auf ganz gleiche Weise den Bogen CD in der entgegengesetzten Richtung von D nach C u. s. w. Ein mathematisches Pendel würde daher, wenn wir ein solches darzustellen vermöchten, ein vollkommenes perpetuum mobile sein.

(Fig. 62.)



Von den Schwingungen eines *mathematischen Pendels* gelten folgende Gesetze:

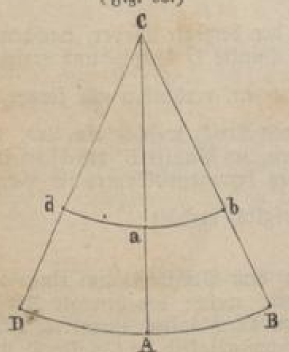
1) *Bei dem nämlichen Pendel ist für kleine Schwingungsbogen,* (welche 10 Grad nicht übersteigen,) *die Dauer der Schwingungen von der Größe der durchlaufenen Bogen fast unabhängig.*

Wenn man die Schwingungen zählt, welche ein wirkliches oder physisches Pendel während einer Stunde macht, so findet man, daß es in der letzten Minute eben so viele Schwingungen macht wie in der ersten, obschon die Schwingungsbogen in der ersten Minute bedeutend größer waren, als in der letzten; es muß daher die größern Bogen auch mit einer größern Geschwindigkeit durchlaufen haben. — Wenn nämlich ein Pendel einmal von B bis E, (Fig. 62), das anderemal von B bis C aufgehoben wird, so ist die Richtung seiner Bewegung in C stärker gegen den Horizont geneigt, als in E; es wird also auch in C mehr durch die Schwere beschleunigt, als in E und bewegt sich daher, wenn es von B bis C aufgehoben wird, mit größerer Geschwindigkeit, als wenn man es nur bis E aufgehoben hätte. Hierdurch wird es möglich, daß ein bis C aufgehobenes Pendel den größern Bogen BC in derselben Zeit durchläuft, wie ein bis E aufgehobenes Pendel den kleinen Bogen BE.

2) *Wenn zwei Pendel ungleiche Länge haben, so schwingt das 4=, 9=, 16mal längere 2=, 3=, 4mal langsamer. Ueberhaupt verhalten sich die Schwingungszeiten zweier Pendel wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.*

Dieses Gesetz läßt sich in folgender Art verdeutlichen: Wie wir oben (in §. 38, a) gesehen haben, verhalten sich beim freien Fall die Fallräume wie die Quadrate der Fallzeiten; folglich verhalten sich die Fallzeiten wie die Quatratwurzeln aus den Fallräumen. Dasselbe muß offenbar auch bei zwei gleich geneigten schiefen Ebenen stattfinden, da für den Fall auf den schiefen Ebenen die nämlichen Gesetze wie für den freien Fall gelten; und es dürfte daher dieses Gesetz auch noch auf die Bewegungen zweier um gleiche Neigungswinkel aufgehobenen Pendel anzuwenden sein. Es werden sich also bei denselben die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Schwingungsbogen DAB und dab (Fig. 63) verhalten. Diese Bogen verhalten sich aber bekanntlich wie die Radien CA und Ca, d. h. wie die Pendellängen; folglich müssen sich auch die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus diesen Längen verhalten.

(Fig. 63.)



Die Gesetze der Pendelschwingungen sind ebenfalls zuerst von *Galilei* aufgefunden worden.

Ist l die Länge eines mathematischen Pendels, t die Dauer einer Schwingung und $\frac{1}{2}g$ der Raum, welchen ein frei fallender Körper in der ersten Secunde zurücklegt, so ist sehr nahe

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

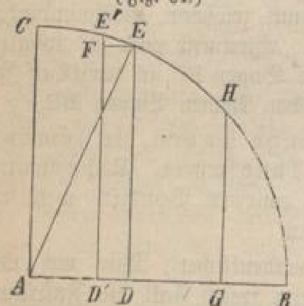
wo π die Verhältnißzahl zwischen Peripherie und Durchmesser bezeichnet.

Die so eben angeführte Formel ist jedoch nur eine Annäherung an die Wahrheit: sie würde vollkommen richtig sein, wenn beim Pendel die beschleunigende Kraft beim Beginn seiner Bewegung im höchsten Punkte C (Fig. 62) dem zwischen diesem und dem tiefsten Punkte B liegenden Bogen BC proportional wäre und während der Bewegung von C nach B sich in demselben Verhältnisse verminderte, in welchem der noch bis B hin zu durchlaufende Bogen kleiner wird, was, wie wir weiterhin noch ausführlicher besprechen werden, nicht genau, sondern nur annähernd zutrifft.

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit der Lösung der Aufgabe, welche uns auch noch weiter unten (§. 168) wesentlichen Nutzen gewähren wird, die Gesetze der Bewegung eines Körpers zu ermitteln, für welchen die eben ausgesprochenen Voraussetzungen nicht annähernde, sondern volle Gültigkeit haben, daß nämlich die Größe der beschleunigenden Kraft dem überhaupt von dem bewegten Körper bis zu einem bestimmten Punkte seiner Bahn zu durchlaufenden Wege proportional ist und sich in demselben Verhältnisse vermindert, in welchem während der Bewegung die Größe des bis zu diesem Punkte hin noch zurückzulegenden Weges abnimmt.

Dem zufolge nehmen wir an, daß von dem Punkte B aus (Fig. 64) sich ein Körper den angegebenen Voraussetzungen gemäß gegen den Punkt A bewege. Da diese Voraussetzungen offenbar von der Gestalt der Bahn ganz unabhängig sind, so werden wir dieselbe am einfachsten als eine gerade Linie AB zeichnen. Nach unserer Annahme ist die beschleunigende Kraft im Punkte B, also auch die Geschwindigkeit, welche dieselbe, wenn sie mit unveränderlicher Stärke wirkte, dem bewegten Körper in der Zeiteinheit ertheilen würde, der Größe des Weges AB proportional. Bezeichnen wir das Verhältniß dieser Geschwindigkeit zu dem Wege AB mit k, so gibt das Product

(Fig. 64.)



$$k \,.\, AB$$

für den Punkt B die Größe dieser Geschwindigkeit an, welche wir, da durch dieselbe die Größe der bewegenden Kraft gemessen wird, im Folgenden kurzweg die Größe der bewegenden Kraft nennen wollen. Da nach unserer Annahme dieselbe dem noch bis A zu durchlaufenden Wege porportional abnimmt, so ist sie für irgend einen andern Punkt D der Linie AB

$$= k \,.\, AD.$$

Bezeichnen wir mit v die Geschwindigkeit, welche der bewegte Körper, nachdem er den Weg BD durchlaufen hat, bei seiner Ankunft im Punkte D besitzt, und errichten wir in D auf AB ein Lot DE, welches wir $= \frac{v}{\sqrt{k}}$ machen, verbinden wir ferner den Punkt E mit A, und beschreiben wir mit AE um A einen Kreis, welcher ein Lot, das wir auf AB in irgend einem andern Punkte D' errichten, im Punkte E' durchschneidet, so läßt sich zeigen, daß, wenn v' die Geschwindigkeit des bewegten Körpers im Punkte D' bezeichnet, das Lot D'E', $= \frac{v'}{\sqrt{k}}$ ist, und daß sich folglich verhält

$$v : v' = DE : D'E'.$$

Nehmen wir zunächst an, daß der Punkt D' von dem Punkte D um einen unendlich kleinen Abstand entfernt ist, so ist auch die Zeit, welche der bewegte Körper gebraucht, die unendlich kleine Strecke von D bis D' zu durchlaufen, unendlich klein, und der unendlich kleine Weg DD' ist offenbar der Geschwindigkeit im Punkte D und der unendlich kleinen Zeit proportional. Bezeichnen wir diese letztere mit t, so erhalten wir die Geichung

$$1)\ DD' = v \,.\, t.$$

Indem der bewegte Körper in D' anlangt, hat sich auch seine Geschwindigkeit um eine unendlich kleine Größe, welche wir z nennen wollen, vermehrt. Da dieser Zuwachs an Geschwindigkeit der bewegenden Kraft, welche zufolge des Obigen $= k \,.\, AD$ ist, und der unendlich kleinen Zeit t proportional ist, so erhalten wir ferner die Gleichung

$$2)\ z = k \,.\, AD \,.\, t.$$

Aus den beiden vorstehenden Gleichungen ergibt sich

$$3)\ \frac{z}{DD'} = \frac{k \,.\, AD}{v}.$$

Da wir die Linie DD' als unendlich klein angenommen haben, so gilt dasselbe offenbar auch von dem Bogen EE'; wir werden daher diesen ohne merklichen Fehler mit der Sehne EE' verwechseln und den Winkel E'EA als einen rechten annehmen können. Dies vorausgesetzt, ist, wenn wir $EF \parallel DD'$ ziehn, $\triangle EFE' \backsim EDA$, da Winkel $E'EF + FEA = 90^0 = FEA + AED$, also Winkel $E'EF = AED$ ist. Demnach verhält sich

$$E'F : EF = AD : DE,$$

oder da nach unserer Annahme $DE = \frac{v}{\sqrt{k}}$ und $EF = DD'$ ist,

$$4)\ \frac{E'F}{DD'} = \frac{AD\sqrt{k}}{v}.$$

Dividiren wir die Gleichung (4) durch (3), so erhalten wir

$$5)\ \frac{E'F}{z} = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ oder } E'F = \frac{z}{\sqrt{k}}.$$

Wir haben oben $DE = \frac{v}{\sqrt{k}}$ angenommen; demnach verhält sich

$$E'F : DE = z : v,$$

folglich auch
$$E'F + DE : DE = z + v : v,$$
d. h.
$$D'E' : DE = v' : v.$$

Die nämliche Beziehung findet aber auch für jeden andern Punkt G der Linie AB zwischen der Geschwindigkeit, welche der bewegte Körper in diesem Punkte erlangt, und dem in demselben errichteten Lote GH statt. Denn wenn wir uns die Linie AB durch unendlich viele Punkte, deren einer D sein soll, in unendlich viele unendlich kleine Theile getheilt denken, so wird sich das im Vorhergehenden für den Punkt D' Erwiesene, wenn wir immer von einem vorangehenden Punkte zu einem nächstfolgenden — einerseits von D nach A, andererseits von D nach B hin — übergehn, eben so von jedem andern Theilungspunkte darthun lassen.

Da die Geschwindigkeit des bewegten Körpers im Anfangspunkte B der Bewegung gleich Null ist, das der Geschwindigkeit proportionale Lot $(v : \sqrt{k})$ aber da verschwindet, wo der mit AE beschriebene Kreis die verlängerte Linie AD durchschneidet, so muß dieser Durchschnitt im Punkte B stattfinden, folglich der Radius AE gleich der Linie AB sein, welche wir oben mit a bezeichnet haben.

Zufolge des Vorhergehenden ist die Geschwindigkeit, welche der bewegte Körper in den Punkten G, D, A erlangt, gleich den Producten aus der Größe der in diesen Punkten errichteten Lote GH, DE, AC und $\sqrt{k}$. Insbesondere ist hiernach die Geschwindigkeit, mit welcher der bewegte Körper in dem Punkte A ankommt

$$= AC\sqrt{k} = a\sqrt{k}.$$

Wir haben nun noch die Zeit zu suchen, welche der bewegte Körper braucht, die Strecke von B bis A zu durchlaufen. Vermöge der oben unter (1) aufgeführten Gleichung ist

$$6)\ t = \frac{DD'}{v},$$

wo t die unendlich kleine Zeit bedeutet, welche der bewegte Körper gebraucht, um den unendlich kleinen Weg DD' zu durchlaufen. Da $DD' = EF$ und zufolge des Vorhergehenden $v = DE\sqrt{k}$ ist, so können wir die so eben angeführte Gleichung auch umwandeln in

$$7)\ t = \frac{EF}{DE \,.\, \sqrt{k}}.$$

Nun verhält sich aber, da, wie oben gezeigt, $\triangle EFE' \backsim EDA$ ist,

$$EF : DE = EE' : AE,$$

wonach die Gleichung (7) übergeht in

$$8)\ t = \frac{EE'}{AE\sqrt{k}}.$$

Da der Radius AE für alle in Betracht zu ziehenden Punkte und eben so die Verhättnißzahl k die nämliche Größe behalten, so ist zufolge der vorstehenden Gleichung die Zeit, welche der bewegte Körper gebraucht, um von D nach D' zu gelangen, dem Bogen EE' proportional.

Denken wir uns, wie wir dies in ähnlicher Art schon oben einmal gethan haben, den Quadranten BC in unendlich viele unendlich kleine Theile getheilt und aus den Theilungspunkten Lote auf AB gefällt, so werden wir leicht zu der Ueberzeugung gelangen, daß die Zeit, welche der bewegte Körper gebraucht, den Weg von B nach D zu durchlaufen, gleich

$$\frac{BE}{AE \,.\, \sqrt{k}},$$

die Zeit für den Weg DA gleich
$$\frac{CE}{AE \,.\, \sqrt{k}}$$

und die Zeit für den ganzen Weg AB gleich

$$\frac{BC}{AE \cdot \sqrt{k}}$$

ist. Nun ist aber BC ein mit dem Radius AE beschriebener Quadrant, folglich

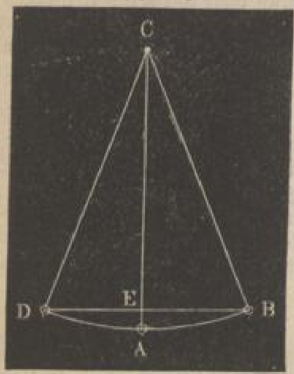
$$\frac{BC}{AE} = \frac{\pi}{2},$$

wenn π das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser bezeichnet. Es ist daher die Zeit der ganzen Bewegung von B nach A gleich

$$\frac{\pi}{2\sqrt{k}}.$$

Wir haben so das höchst merkwürdige Resultat erhalten, daß die Zeit, welche der bewegte Körper braucht, um von dem Punkte B bis zu dem unveränderlichen Punkte A zu gelangen, von der Größe des Weges AB ganz unabhängig, nämlich allemal gleich dem obigen Ausdrucke $\frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ ist, welches auch immer die Größe des Weges AB sein mag, vorausgesetzt, daß die bewegende Kraft dem angebenen Gesetze folgt, nämlich in demselben Verhältnisse abnimmt, in welchem der Weg bis zum Punkte A verkürzt wird*).

(Fig. 65.)



Diese Voraussetzungen treffen jedoch beim Pendel nicht mit voller Genauigkeit, sondern nur annähernd zu. Ist nämlich B (Fig. 65) der schwere Punkt eines mathematischen Pendels, welches mit der lotrechten Linie AC einen Winkel $ACB = \alpha$ bildet, und denken wir uns durch B eine Tangente an den Bogen AB gezogen, so ist der Neigungswinkel derselben gegen den Horizont, wie leicht zu sehen, gleich $ACB = \alpha$, folglich die beschleunigende Kraft der Schwere (nach §. 32 und 38, a) gleich

$$g \sin \alpha = \frac{g \cdot BE}{BC} = \frac{g \cdot BE}{l},$$

wenn wir die Länge des Pendels mit l bezeichnen. Wiewohl nun hiernach die beschleunigende Kraft beim Pendel dem Sinus BE des Bogens AB und nicht dem Bogen AB selbst proportional ist, so werden wir doch, wenn dieser Bogen nur wenige Grade umfaßt, ohne einen allzu erheblichen Fehler besorgen zu müssen, den Sinus BE mit dem Bogen AB verwechseln dürfen. Wir erhalten dann für die Größe der beschleunigenden Kraft den Ausdruck

$$\frac{g \cdot AB}{l}.$$

In der obigen Entwickelung haben wir diese Größe durch das Product

$$k \cdot AB$$

ausgedrückt, woraus sich

$$k = \frac{g}{l}$$

ergibt. Am Schlusse dieser Entwickelung haben wir die Zeit der Bewegung von A nach B gleich

$$\frac{\pi}{2\sqrt{k}}$$

gefunden. Setzen wir den so eben für k erhaltenen Werth ein, so ergibt sich für die

---

*) Wenn die Erde aus einer Masse von gleichförmiger Dichtigkeit bestände, so würde die Schwere im Innern der Erde in gleichem Verhältniß mit der Annäherung an den Mittelpunkt abnehmen. Bezeichnen wir die Beschleunigung der Schwere an der Erdoberfläche mit g, den Radius der Erde mit r, so ist zufolge des Obigen $g = k \cdot r$, also $k = \frac{g}{r}$. Denken wir uns nun ein Loch bis zum Mittelpunkte der Erde getrieben, so ist die Zeit, welche ein Körper gebrauchen würde, um in demselben von der Oberfläche bis zum Mittelpunkte zu fallen, gleich

$$\frac{\pi}{2\sqrt{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} = 1270 \text{ Secunden} = 21 \text{ Minuten ohngefähr.}$$

Zeit der Bewegung von B nach A der Ausdruck

$$\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

folglich für die Zeit einer ganzen Schwingung von B bis D

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Zeit, welche das Pendel zu einem Hin- und Hergange, zu einer Doppelschwingung gebraucht, ist hiernach

$$2t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Nach §. 38, a ist die Zeit, welche ein Körper gebraucht, um durch eine der doppelten Länge des Pendels gleiche Höhe zu fallen,

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Es verhält sich daher

$$2t : T = \pi : 1,$$

d. h. die Zeit einer Doppelschwingung verhält sich zu der Fallzeit der doppelten Pendellänge, wie die Peripherie zum Durchmesser.

§. 40, a. Physisches Pendel.

Wir haben nun noch weiter zu zeigen, wie diese Gesetze auf ein physisches Pendel zu übertragen sind. Da in einem physischen Pendel jedes, auch das kleinste Theilchen Schwere hat, so kann man sich dasselbe als aus unzähligen mathematischen Pendeln, von ungleicher Länge bestehend denken. Die dem Aufhängepunkte näheren Theilchen haben zufolge des zweiten Gesetzes das Bestreben rascher zu schwingen, als die entfernteren; da sie aber alle miteinander fest verbunden sind und daher gleichzeitig schwingen müssen, so werden offenbar die näheren durch die entfernteren in ihrer Bewegung verzögert, die entfernteren aber durch die näheren Punkte beschleunigt. Zwischen ihnen muß es nun einen Punkt geben, welcher weder beschleunigt noch verzögert wird, und welcher daher ganz eben so schwingen würde, wenn er der einzige schwere Punkt des physischen Pendels wäre. Dieser Punkt verhält sich also genau wie der schwere Punkt eines mathemathischen Pendels und wird der Schwingungspunkt genannt. Sein Abstand vom Aufhängepunkte heißt die reducirte Länge des physischen Pendels. Man kann die Länge eines jeden physischen Pendels sehr nahe dadurch finden, daß man zugleich mit demselben ein kleines Bleikügelchen an einem feinen Faden schwingen läßt und diesen Faden so lange verkürzt oder verlängert, bis beide Pendel gleichzeitig schwingen.

Wenn man eine gleichförmige Stange um das eine Ende schwingen läßt, so fällt der Schwingungspunkt ein Drittel vom andern Ende. Der Schwingungspunkt fällt also keineswegs mit dem Schwerpunkte zusammen.

Die Länge des Secundenpendels beträgt für unsere Gegenden ohngefähr 3 Par. Fuß (genauer 36½ Par. Zoll oder 38 preuß. Zoll). Sie nimmt vom Aequator nach den Polen hin zu*). Denn da am Aequator die Schwere am kleinsten ist (vergl. §. 19), so wird das nämliche Pendel am Aequator langsamer schwingen, als in höhern Breiten, z. B. in Paris; man wird dasselbe folglich am Aequator verkürzen müssen, wenn es eben so rasch schwingen soll, als in Paris. Der französische Astronom Richer fand im

*) Bezeichnet φ die geographische Breite eines Ortes, so ist in Pariser Linien die Länge des Secundenpendels für denselben

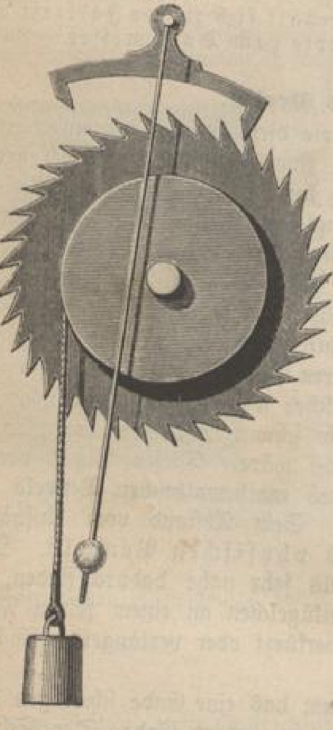
$$l = 493{,}4008 + 2{,}2887 \sin \varphi^2.$$

Jahre 1672 zu Cayenne, welches nur 5 Grad nördlich vom Aequator liegt, daß die aus Paris mitgebrachte Pendeluhr täglich 2½ Minute zurückblieb, und er mußte das Pendel um 1¼ Linie verkürzen, damit die Uhr wieder richtig ging.

Eben so hat man durch Pendelbeobachtungen gefunden, daß die Schwere auf hohen Bergen geringer ist, als im Thale.

Wiewohl nun hiernach ein Körper am Aequator langsamer als in höheren Breiten und auf hohen Bergen langsamer als im Thale fallen muß, so sind doch die Unterschiede in diesen Bewegungen viel zu gering, als daß sie sich durch die Beobachtungen wirklich fallender Körper nachweisen ließen. Wir verdanken allein den Beobachtungen der Pendelschwingungen die nähere Kenntniß dieser Abnahme der Schwere.

(Fig. 66.)

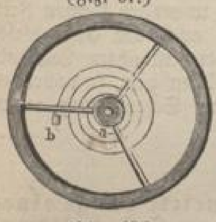


Durch das Pendel werden wir ferner in den Stand gesetzt, den Satz zu erweisen, daß alle Körper gleich schwer sind, d. h. ohne den Widerstand der Luft mit gleicher Geschwindigkeit fallen würden. Newton verfertigte Pendel aus den verschiedensten Materien und fand, daß sie bei gleicher Länge genau gleichzeitig schwingen, und Bessel hat später in Königsberg dieselben Versuche mit großer Sorgfalt wiederholt und bestätigt, auch zwischen magnetischen und unmagnetischen Körpern keinen Unterschied gefunden. Aus diesen Versuchen folgt, daß verschiedene Materien auf gleiche Weise durch die Schwere beschleunigt werden.

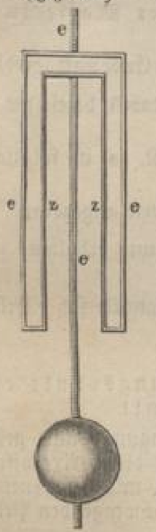
Da wegen der unveränderlichen Größe der Schwere an dem nämlichen Orte der Erde die Schwingungen desselben Pendels in genau gleichen Zeiten geschehen, so eignet sich dasselbe vorzüglich zum genauen Zeitmaße. Der holländische Physiker Huyghens hat zuerst die Anwendung des Pendels für diesen Zweck gelehrt und im Jahre 1658 die erste Pendeluhr construirt.

Wenn man um eine Rolle, welche um ihre Axe leicht drehbar ist, eine Schnur wickelt und an diese ein Gewicht hängt, so wird die Rolle, während das Gewicht abläuft, umgedreht werden; diese Bewegung wird aber nicht mit gleichförmiger, sondern mit immer mehr wachsender Geschwindigkeit erfolgen. Wenn aber die Rolle mit einem gezähnten Rade verbunden ist, in dessen Zähne die Spitzen eines Doppelhakens eingreifen, welcher an einer Pendelstange befestigt ist, wie dies Fig. 66 zeigt, so wird das Rad nur jedesmal, nachdem das Pendel eine (Doppel-) Schwingung vollendet hat, um einen Zahn weiter gehn, und da das Pendel zu jeder Schwingung eine gleiche Zeit gebraucht, so wird auch die Umdrehung des Rades jetzt mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgen. — Auf diese Art wird bei unsern Pendeluhren die Bewegung des Räderwerkes durch das mit demselben verbundene Pendel regulirt, mit dem Unterschiede, daß die Rolle, an welcher das Gewicht hängt, und das Zahnrad, in welches der Doppelhaken der Pendelstange eingreift, nicht an der nämlichen Axe befestigt, sondern durch einige Räder und Triebe mit einander verbunden sind. Auf gleiche Weise wird auch die Verbindung mit den Wellen, an denen die Zeiger sitzen, hergestellt. — Indem das Pendel jedesmal, wenn der Doppelhaken einen Zahn des Steigrades losläßt, von demselben, vermöge des dieses Rad zur Umdrehung antreibenden Gewichtes einen kleinen Stoß erhält, so wird ihm hierdurch Ersatz für die Verluste, welche es durch die Reibung und den Widerstand der Luft erleidet, gewährt und so die schwingende Bewegung des Pendels fortdauernd bis zum Ablaufen des Gewichtes unterhalten.

(Fig. 67.)



(Fig. 68.)



An das Vorstehende anreihend führen wir noch an, daß wir dem Scharfsinne **Huyghens** auch die Regulirung der Taschenuhren verdanken, welche zwar schon früher (ums Jahr 1500) erfunden worden sind, hierdurch aber erst ihre volle Brauchbarkeit erhalten haben. Die Bewegung des Räderwerkes wird bei den Taschenuhren bekanntlich nicht durch ein Gewicht, sondern durch die Aufwindung einer starken elastischen Feder hervorgebracht; zur Regulirung dieser Bewegung aber dient die sogenannte **Unruhe**, welche aus einem kleinen Schwungrädchen besteht, in welchem eine sehr feine elastische Feder, welche mit dem einen Ende an der Axe des Rädchens a (Fig. 67), mit dem andern an irgend einer Stelle des Gehäuses b befestigt ist, indem das Rädchen hin und her schwingt, sich abwechselnd zusammenzieht und ausdehnt. Was also beim Pendel die Schwere leistet, bewirkt hier die Elasticität der feinen Feder. — Die Pendeluhren übertreffen jedoch die Taschenuhren bei weitem in der Regelmäßigkeit des Ganges.

Da die Stange eines physischen Pendels in der Wärme sich verlängert, so muß dasselbe bei einer höheren Temperatur langsamer schwingen, als bei einer niederen Temperatur. Um dieses zu vermeiden, pflegt man bei Uhren, welche einen sehr genauen Gang haben sollen, die Pendelstange aus zwei Metallen von sehr verschiedener Ausdehnung durch die Wärme, z. B. Zink und Eisen, deren Ausdehnungen bei gleichen Temperaturerhöhungen sich nahe wie 18 : 7 verhalten, ohngefähr in der Art, wie dieses die Fig. 68 zeigt, zusammenzusetzen, so daß bei der Ausdehnung des einen Metalls z durch die Wärme die Linse sich um eben so viel hebt, als sie durch die Ausdehnung des andern e sich senkt. Man nennt dergleichen Pendel **Compensationspendel**.

Auch an der Unruhe der Taschenuhren wird, wenn dieselben einen sehr genauen Gang haben sollen, eine Compensation angebracht, auf deren nähere Beschreibung wir jedoch nicht eingehen können.

Zur genauen Theorie des Schwingungspunktes führen wir noch Folgendes an: Es sei T′ das Trägheitsmoment (vergl. oben §. 38, b), M die Masse und a der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse eines physischen Pendels. Wird dasselbe in eine von der senkrechten abweichende Lage gebracht, in welcher die Verbindungslinie des Schwerpunktes mit der Drehungsachse einen Winkel $= \alpha$ mit der Verticalen bildet, so würde die Schwere, wenn die ganze Masse des Pendels im Schwerpunkte vereinigt wäre, diesem (nach §. 38, a) in dem unendlich kleinen Zeittheilchen t eine lineare Geschwindigkeit

$$1) \quad c = g \,.\, \sin \alpha \,.\, t$$

ertheilen. Bezeichnen wir die dieser linearen Geschwindigkeit entsprechende Winkelgeschwindigkeit mit v′, mit v aber die Winkelgeschwindigkeit, welche unser um den Elongationswinkel α aufgehobenes physisches Pendel in dem unendlich kleinen Zeittheilchen t wirklich erlangt, so verhält sich, da das Trägheitsmoment der in dem Schwerpunkte vereint gedachten Masse $= a^2M$ ist, nach §. 38, b

$$2)\ v : v' = a^2 . M : T'.$$

Wenn ein mathematisches Pendel, dessen Länge wir mit l bezeichnen wollen, um den Elongationswinkel α aufgehoben worden ist, so ist, wie schon in Gleichung (1) angegeben, die lineare Geschwindigkeit, welche der schwere Punkt desselben in dem unendlich kleinen Zeittheilchen t erlangt, $c = g . t . \sin \alpha$. Bezeichnen wir die dieser linearen Geschwindigkeit entsprechende Winkelgeschwindigkeit mit w, so verhält sich

$$3)\ v' : w = l : a,$$

da bei kreisförmigen Bewegungen die Winkelgeschwindigkeiten, wenn die linearen Geschwindigkeiten gleich sind, sich umgekehrt wie die Radien verhalten. Aus den Gleichungen (2) und (3) ergibt sich $4)\ v : w = a . M . l : T'$.

Machen wir daher die Länge des mathematischen Pendels

$$5)\ l = \frac{T'}{a . M},$$

so wird $v = w$. Dieses mathematische und unser physisches Pendel erhalten also, wenn sie um den gleichen Winkel α aufgehoben worden sind, in dem unendlich kleinen Zeittheilchen t gleiche Winkelgeschwindigkeiten und müssen daher auch am Ende dieses Zeittheilchens wieder unter gleichen Elongationswinkeln von der senkrechten Lage abweichen. Da dasselbe nun eben so von jedem folgenden Zeittheilchen gilt, so vollenden folglich das mathematische Pendel und das physische Pendel eine Schwingung genau in derselben Zeit, wenn die Länge des mathematischen Pendels

$$l = \frac{T'}{a . M}$$

ist. — Aus dieser Gleichung folgt der wichtige Satz: **Die reducirte Länge eines physischen Pendels ist gleich dem Quotienten aus dem Trägheitsmomente desselben dividirt durch das Produkt aus der Masse in den Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse.**

Das Trägheitsmoment eines gleichförmigen, um den einen Endpunkt drehbaren Stabes ist (nach §. 38, b) $= \frac{1}{3} a^2 M$, wenn a die Länge des Stabes bezeichnet. Da der Abstand seines Schwerpunktes vom Drehungspunkte $= \frac{1}{2} a$ ist, so ist folglich die reducirte Länge dieses Pendels $= \frac{2}{3} a$, wie schon oben im Haupttexte angegeben.

In der Anmerkung zu §. 38, b haben wir ferner die Gleichung erhalten:

$$T' = T + a^2 M.$$

Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung (5) ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$6)\ l = a + \frac{T}{aM}.$$

Da hiernach immer $l > a$ ist, so liegt folglich **der Schwingungspunkt eines physischen Pendels allemal tiefer, als der Schwerpunkt.**

Wenn wir ein physisches Pendel um eine durch den Schwingungspunkt gehende Axe schwingen lassen, so ist der Abstand des Schwerpunktes von dieser Axe offenbar $= l - a$. Setzen wir diesen Werth statt a in die Gleichung (6), und bezeichnen wir die reducirte Länge des jetzt um den früheren Schwingungspunkt schwingenden Pendels mit l', so erhalten wir die Gleichung

$$l' = l - a + \frac{T}{(l - a)M},$$

oder da vermöge Gleichung (6) $l - a = \frac{T}{aM}$ ist,

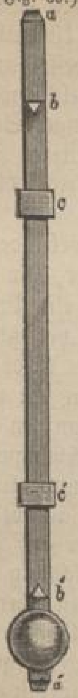
$$l' = \frac{T}{aM} + a,$$

also

$$7)\ l' = l.$$

Bei einem physischen Pendel lassen sich also der Schwingungspunkt und der Aufhängepunkt vertauschen, ohne daß die Schwingungsdauer eine Aenderung erfährt. Auf diesen merkwürdigen Satz gründet sich das **Reversionspendel**, welches zuerst von dem Engländer Kater ums Jahr 1815 zur genauen Abmessung der Länge des Secundenpendels angewendet worden ist. Dasselbe besteht aus einer Messingstange aa' (Fig. 69), an welcher in dem ohngefähren Abstande von 3 Fuß zwei feste Schneiden b und b', um welche die Stange schwingen kann, und ganz nahe unter dem Rücken der einen Schneide b' ein festes, mehrere Pfund schweres Gewicht, ferner zwischen den beiden Schneiden zwei kleine verschiebbare Gewichte c und c' angebracht sind. Wenn man nun das Pendel abwechselnd um die eine und um die andere Schneide schwingen läßt und die Laufgewichte c und c' so lange verschiebt, bis das Pendel um beide Schneiden genau gleichzeitig schwingt, in der Stunde gleich viel Schwingungen macht, so gibt der Abstand der beiden Schneiden von einander die Länge dieses Pendels an.

(Fig. 69.)



Hieraus läßt sich aber dann weiter die Länge des Secundenpendels, d. h. eines Pendels, welches zu einer Schwingung genau eine Secunde Zeit braucht, leicht herleiten, vermöge des obigen Gesetzes, daß sich die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen, also die Pendellängen wie die Quadrate der Schwingungszeiten verhalten. Da nun die Schwingungszeiten zweier Pendel sich offenbar umgekehrt verhalten, wie die Anzahlen der Schwingungen, welche dieselben in einer gleichen Zeit, z. B. in einer Stunde vollenden, so verhalten folglich die Längen zweier Pendel sich umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszahlen. — Bezeichnen wir daher mit l die Länge des Reversionspendels, mit n die Zahl der Schwingungen, welche dasselbe in der Stunde macht, und mit x die gesuchte Länge des Secundenpendels, welches in der Stunde genau 3600 Schwingungen vollendet, so ergibt sich die gesuchte Länge des Secundenpendels leicht aus der Proportion

$$x : l = n^2 : 3600^2.$$

Durch die genaue Abmessung und Berechnung der Lände des Secundenpendels gelangen wir auch zur schärferen Bestimmung des Raumes, welchen ein Körper beim freien Falle in der ersten Secunde zurücklegt. Ist nämlich in der oben (§. 39) mitgetheilten Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

l gegeben, und wird $t = 1$ gesetzt, so ergibt sich hieraus

$$g = \pi^2 l.$$

Bezeichnen wir für zwei Orte der Erdoberfläche die ungleichen Größen der Schwere mit g und g', die ungleichen Zeiten, welche das nämliche Pendel an diesen Orten zu einer Schwingung gebraucht, mit t und t', die ungleichen Anzahlen der Schwingungen, welche dasselbe in einer bestimmten Zeit, z. B. in einer Stunde, an diesen Orten vollendet, mit n und n', endlich die Länge des Pendels mit l, so ist

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ und } t' = \pi \sqrt{\frac{l}{g'}},$$

folglich

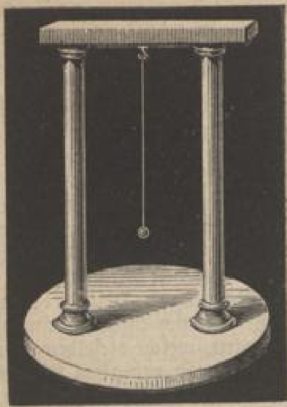
$$g : g' = t'^2 : t^2 = n^2 : n'^2,$$

indem offenbar $t' : t = n : n'$ ist. Es verhalten sich also die ungleichen Größen der Schwere zweier Orte umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszeiten und direct wie die Quadrate der Schwingungszahlen des nämlichen Pendels.

*§. 40, b. Foucault's Pendelversuch.

In neuerer Zeit hat Foucault in Paris das Pendel dazu benutzt, um einen directen Beweis für die Axendrehung der Erde zu liefern. Um dieses zu begreifen, hängen wir ein Pendel an einem beweglichen Gestelle vermittelst eines feinen Fadens in der Art auf, wie dieses Fig. 70 zeigt, setzen dann dasselbe in irgend einer Richtung, z. B. senkrecht auf die Ebene des Gestelles, in Schwingungen und drehen dieses so, daß der Querbalken und die Grundfläche die wagerechte, die Seitenbalken aber die senkrechte Stellung beibehalten. Wir werden dann bemerken, daß trotz der Drehung des Gestelles die Schwingungsebene des Pendels ihre ursprüngliche Lage beibehält. War also die Ebene des Gestelles ursprünglich von Osten nach Westen gerichtet, und

(Fig. 70.)



erfolgten die Schwingungen des Pendels in der Richtung von Norden nach Süden, so daß sie also die Ebene des Gestelles senkrecht durchschnitten, so wird nach einer Umdrehung des Gestelles um 90⁰ die Ebene desselben mit der Schwingungsebene des Pendels, welche unverändert die Lage von Norden nach Süden beibehält, zusammenfallen; bei weiterer Drehung um 90⁰ dieselbe wieder senkrecht durchschneiden u. s. f.

Denken wir uns nun ein Gebäude an einem Pole der Erde aufgerichtet, an der Decke desselben an einem Faden ein Pendel aufgehängt und in Schwingungen versetzt, so wird vermöge der Axendrehung der Erde sich das Gestell innerhalb 24 Stunden um volle 360⁰, in einer Stunde also um 15⁰ von Westen nach Osten, ganz in derselben Art wie bei dem eben beschriebenen Versuche drehen, die Schwingungsebene des Pendels dagegen ihre Lage gegen die Himmelsgegenden unverändert beibehalten. Da wir bekanntlich von der Axendrehung der Erde, an welcher wir selbst theilnehmen, nichts bemerken, so würde einem Beobachter am Pole die Schwingungsebene des Pendels sich in der entgegengesetzten Richtung von Osten nach Westen und zwar in einer Stunde um 15⁰ zu drehen scheinen.

Führen wir diesen Versuch, da wir an den Pol nicht zu gelangen vermögen, an irgend einem zwischen dem Pole und dem Aequator gelegenen Orte aus, so wird sich im wesentlichen derselbe Erfolg zeigen, nur mit dem Unterschiede, daß, da die Drehungsaxe der Erde nicht wie am Pole mit der lotrechten Linie zusammenfällt, sondern mit derselben einen spitzen Winkel bildet, die scheinbare Drehung der Schwingungsebene des Pendels nicht mehr 15⁰ für die Stunde beträgt, sondern hinter dieser Größe um so mehr zurückbleibt, je weiter der Beobachtungsort vom Pole entfernt ist. [Bezeichnen wir die Breite des Beobachtungsortes mit φ, so ist die Größe der angegebenen Drehung für die Stunde sehr nahe gleich $15^0 . \sin \varphi$, also für unsere Breiten ungefähr gleich 12⁰*).] Nur am Aequator wird die angegebene Drehung ganz ausbleiben, da hier die lotrechte Linie mit der Umdrehungsaxe der Erde einen rechten Winkel bildet.

Der hier beschriebene Versuch ist mit dem angegebenen Erfolge zuerst von Foucault in Paris im Anfange des Jahres 1851 ausgeführt und später an anderen Orten von verschiedenen Physikern wiederholt worden.

*§. 41. Wurfbewegung.

Die bisher besprochenen Bewegungen (Fall und Pendelschwingungen) wurden allein durch die Schwere hervorgebracht. Die geworfenen Körper dagegen werden zuerst durch irgend eine momentane Kraft in Bewegung gesetzt und würden sowohl beim horizontalen, als beim schiefen Wurfe beständig in gerader Linie fortschreiten, wenn nicht die Einwirkung der Schwere fortwährend die Richtung ihrer Bewegung veränderte.

*) Einen einfachen Beweis dieses Satzes findet man in Poggendorfs Annalen, Bd. 88, S. 477. Tiefer eingehend behandelt diesen Gegenstand Dr. Lottner in dem Programme der Realschule zu Lippstadt vom Jahre 1855.

Wir gehen auch bei der Wurfbewegung von der Betrachtung eines hypothetischen Falles aus, da die Bewegung der wirklich geworfenen Körper eine viel zu verwickelte Erscheinung ist, als daß wir im Stande wären, dieselbe auf ein einfaches Gesetz zurückzuführen. Wir setzen nämlich erstens voraus, daß der geworfene Körper sich im gänzlich leeren Raume bewege; zweitens vernachlässigen wir die Verminderung, welche seine Schwere erfährt, indem er sich vom Mittelpunkte der Erde entfernt, und drittens nehmen wir an, daß die Weite des Wurfes klein genug ist, daß wir die Richtungen der Schwere für alle Punkte der Bahn, welche der geworfene Körper beschreibt, als parallel ansehen können. Die beiden letzten Annahmen weichen in den meisten Fällen von der Wahrheit so wenig ab, daß auch die genauesten Beobachtungen und Messungen der Bahnen geworfener Körper nicht im Stande sein würden, einen Unterschied nachzuweisen.

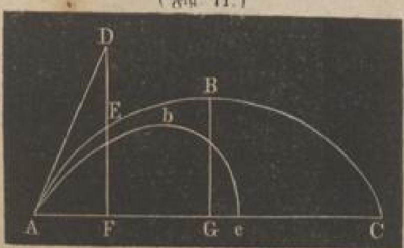
Wir unterscheiden folgende Fälle:

1) Wenn die Richtung des Wurfes mit der Schwere übereinstimmt oder derselben gerade entgegengesetzt ist, mit anderen Worten, wenn ein Körper senkrecht niederwärts oder senkrecht aufwärts geworfen wird, so findet man die Geschwindigkeit, welche er in einer bestimmten Zeit erlangt, wenn man die ursprüngliche Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit, welche ein Körper beim freien Falle in dieser Zeit erlangen würde, entweder zu einander addirt oder von einander subtrahirt, und eben so findet man den Raum, um welchen sich ein senkrecht abwärts oder aufwärts geworfener Körper in einer bestimmten Zeit fortbewegt, wenn man den Weg, welchen er mit der ursprünglichen Geschwindigkeit vermöge des Trägheitsgesetzes in dieser Zeit durchlaufen haben würde, und den Weg, welchen ein frei fallender Körper in der nämlichen Zeit durchläuft, entweder addirt oder diese Wege von einander subtrahirt.

Ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper steigt so lange, bis seine Geschwindigkeit durch die Gegenwirkung der Schwere gänzlich aufgehoben ist, und er fällt dann ganz in dieselben Art, in welcher er vorher gestiegen ist. Ohne den Widerstand der Luft müßte er mit der nämlichen Geschwindigkeit an der Stelle, von der er ausging, wieder ankommen, mit welcher er in die Höhe geworfen wurde. Der Widerstand der Luft bewirkt jedoch hierin einen großen Unterschied. Ohne denselben würden nicht bloß die aus der Höhe der Wolken niederfallenden Hagelkörner, sondern auch Regentropfen große Verwüstungen anrichten.

2) Wenn die Richtung des Wurfes mit der Richtung der Schwere einen Winkel bildet, so beschreibt der geworfene Körper eine krumme Linie ABC (Fig. 71), welche man eine Parabel nennt. Man findet den Ort E, welchen der geworfene Körper nach irgend einer bestimmten Zeit in seiner Bahn erreicht, wenn man zunächst den Weg AD zeihichnet, welchen er vermöge seiner ursprünglichen Geschwindigkeit ohne alle Einwirkung der Schwere zurückgelegt haben würde, und von D

(Fig. 71.)



aus auf einer lotrechten Linie DF den Raum DE aufträgt, welchen ein frei fallender Körper in derselben Zeit zurücklegt.

Die wagerechte Linie AC heißt die Weite, die senkrechte Höhe BG des höchsten Punktes die Höhe des Wurfes; der Winkel DAC wird der Elevationswinkel genannt. Die Höhe des Wurfes ist natürlich am größten, wenn der Elevationswinkel ein rechter ist. Die Weite des Wurfes ist aber am größten, wenn der Elevationswinkel 45^0 beträgt.

Wenn aus einem erhöhten Punkte B ein Körper in wagerechter Richtung geworfen wird, so beschreibt derselbe eine halbe Parabel BC.

Die Gesetze des Wurfes sind zuerst von Galilei aufgefunden worden.

Aus der vorstehenden Darstellung folgt offenbar, daß man den Lauf eines Geschützes oder einer Büchse, um einen bestimmten Punkt zu treffen, etwas höher richten muß, und zwar um so mehr, je weiter das Ziel entfernt ist, was durch die verschiedene Stellung des Visirs bewirkt wird.

Wegen des Widerstandes der Luft weicht die wirkliche Bahn geworfener Körper, welche man die ballistische Curve nennt, von der parabolischen Gestalt bedeutend ab. Während die Parabel ABC durch den höchsten Punkt B in zwei ganz gleiche Hälften AB und BC getheilt wird, ist bei der ballistischen Curve der Schenkel bc bedeutend kürzer und steiler, als der Schenkel Ab.

Bezeichnen wir die ursprüngliche Geschwindigkeit eines geworfenen Körpers mit c, die in Secunden ausgedrückte Zeit mit t, den in dieser Zeit durchlaufenen Raum mit s, die erlangte Geschwindigkeit mit v, ferner den Raum, welchen ein frei fallender Körper in der ersten Secunde zurücklegt, mit g, so ist für einen senkrecht niederwärts geworfenen Körper

$$1)\ v = c + gt \text{ und } 2)\ s = ct + \frac{1}{2}gt^2$$

und für einen senkrecht in die Höhe geworfenen Körper

$$3)\ v = c - gt \text{ und } 4)\ s = ct - \frac{1}{2}gt^2.$$

So lange $t < \frac{c}{g}$ ist, ist v positiv, und der Körper steigt in die Höhe; ist $t > \frac{c}{g}$, so wird v negativ, und der Körper fällt. Ist $t = \frac{c}{g}$, so wird $v = 0$, und der Körper hat dann seine größte Höhe erreicht. Um diese zu bestimmen, setzen wir den Werth $t = \frac{c}{g}$ in die Gleichung (4) ein und finden so die größte Höhe $= \frac{c^2}{2g}$.

Bildet die Richtung des Wurfes mit dem Horizonte einen schiefen Winkel $DAF = \alpha$, und bezeichnen wir für irgend einen Punkt E auf der Bahn des geworfenen Körpers die in wagerechter und lotrechter Richtung durchlaufenen Räume AF und EF mit x und y, so ist $AD = ct$, $AF = ct \cos \alpha$, $DF = ct \sin \alpha$ und $DE = \frac{1}{2}gt^2$,

folglich $\quad 5)\ x = ct \cos \alpha$ und $6)\ y = ct \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$.

Der Werth von y verschwindet für $t = 0$, d. h. am Anfange des Wurfes, und für $t = \frac{2c \sin \alpha}{g}$, d. h. am Ende des Wurfes, wenn der geworfene Körper in C angekommen ist. Dieser letzte Werth von t gibt also die ganze Dauer des Wurfes an. Setzen wir denselben in (5) ein, so erhalten wir die Weite des Wurfes

$$AC = \frac{2c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Die Weite des Wurfes ist folglich am größten, wenn $2\alpha = 90^0$ oder $\alpha = 45^0$ ist. — Da der geworfene Körper in der einen Hälfte seiner Bahn eben so steigt, wie er in der andern fällt, so muß er nach der halben Dauer des ganzen Wurfes, also für $t = \frac{c \sin \alpha}{g}$ die größte Höhe erreichen. Dieser Wert von t in (6) eingesetzt gibt $BG = \frac{c^2 \sin \alpha^2}{2g}$ d. h. zufolge der Gleichung (4) in §. 38, a: der Körper steigt eben so hoch, als ein mit der Geschwindigkeit $c \sin \alpha$ in die Höhe geworfener Körper.

*§. 42. Bewegung der Himmelskörper.

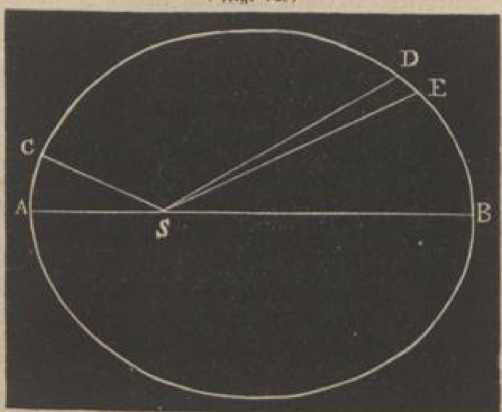
Die vorhergehenden Abschnitte behandelten solche Bewegungen, welche durch die Schwere, d. h. durch die gegenseitige Anziehung der Erde und der ihr zugehörigen Körper hervorgebracht werden. Den nämlichen Gesetzen ist auch die Kraft, mit welcher die Sonne die Planeten anzieht und dieselben in ihren Bahnen erhält, unterworfen (§. 20).

Die Gesetze dieser Bahnen, welche wir dem Scharfsinne des unsterblichen Keppler (1610) verdanken, sind folgende:

1) Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte S (Fig. 72) die Sonne steht.

2) Sie durchlaufen diese Bahnen nicht mit gleichförmiger Geschwindigkeit, sondern rascher in der Sonnennähe, A, langsamer in der Sonnenferne, B, überhaupt nimmt ihre Geschwindigkeit zu und ab, so wie sie sich in ihrer elliptischen Bahn der Sonne nähern oder von derselben entfernen, und zwar in der Art, daß, wenn man sich den Mittelpunkt des Planeten mit dem Mittelpunkte der Sonne durch eine gerade Linie, Radius vector, verbunden denkt, der Radius vector in gleichen Zeiten gleiche Sectoren beschreibt.

(Fig. 72.)



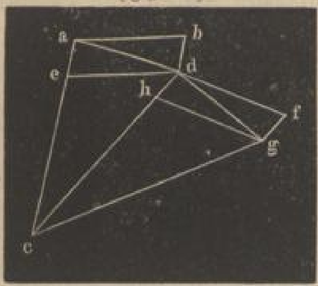
Sind daher AC und DE zwei Bogen, welche der Planet in gleichen Zeiten durchläuft, so ist der Sector ASC gleich dem Sector DSE und folglich der Bogen AC größer als der Bogen DE.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Axen (AB) der Planetenbahnen. So verhalten sich z. B. beim Merkur und Mars die großen Axen ihrer Bahnen, oder was auf dasselbe hinausläuft, die mittleren Entfernungen von der Sonne (nahe) wie 1 : 4, also die Kuben hiervon wie 1 : 64, und die Umlaufszeiten (nahe) wie 1 : 8, also die Quadrate hiervon ebenfalls wie 1 : 64.

Diese nämlichen Gesetze, welche die Grundlage der gesammten neuern Astronomie bilden, befolgen auch diejenigen Kometen, deren Bahnen näher bekannt sind, sowie auch die Nebenplaneten oder Monde bei ihrem Umlaufe um den Hauptplaneten. Ja selbst von zwei Doppelsternen (Fixsternen, welche sehr nahe bei einander stehen), bewegt sich, wie neuere, besonders von Encke in Berlin angestellte Untersuchungen gezeigt haben, der eine um den andern in einer Ellipse und befolgt hierbei das zweite Kepplersche Gesetz, daß der Radius vector in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreibt. Es sind hiernach auch noch solche Himmelskörper, welche unserm Sonnensysteme nicht angehören, den von dem unsterblichen **Keppler** entdeckten Gesetzen unterworfen.

Sämmtliche **Kepplersche Gesetze** sind jedoch nur Folgerungen des von **Newton** (1682) aufgefundenen allgemeinen **Gravitationsgesetzes**, daß die Himmelskörper (unseres Sonnensystems) sich gegenseitig anziehen, und **daß diese anziehende Kraft in geradem Verhältnisse ihrer Masse und im umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Entfernung steht.**

(Fig. 73.)



Das **erste** der drei Kepplerschen Gesetze läßt sich bequem nur mit Hilfe der höheren Analysis ableiten. Das zweite Gesetz, welches überhaupt für jede **Centralbewegung**, d. h. für eine jede Bewegung gilt, bei welcher ein Körper durch eine beständig nach dem nämlichen Punkte hinziehende Kraft von der geraden Linie abgelenkt wird, welches auch immer das Gesetz sein mag, nach welchem diese Kraft wirkt, ergibt sich leicht aus folgender Ueberlegung: Ist ab (Fig. 73) der Weg, welchen der bewegte Körper vermöge der in a erlangten Geschwindigkeit zufolge des Trägheitsgesetzes in einem unendlich kleinen Zeittheilchen durchlaufen würde, ae der Raum, durch welchen die von dem Centrum c aus wirkende Kraft ihn in diesem Zeittheilchen führen würde, so gibt die Diagonale ad des Parallelogramms abde den Weg an, welchen der Körper wirklich durchläuft, indem wir für die unendlich klein angenommene Dauer der Bewegung diesen Weg als eine gerade Linie ansehen können. Ohne die Einwirkung der Centralkraft würde nun der bewegte Körper in dem nächsten, eben so kleinen Zeittheilchen in der nämlichen Richtung um eine ad gleiche Linie df sich fortbewegen, und wenn dh den Weg anzeigt, durch welchen die Centralkraft ihn in diesem Zeittheilchen führen würde, so ist die Diagonale dg des Parallelogramms dfgh der wirkliche Weg des Körpers in dem zweiten dem ersten gleichen Zeittheilchen. Da wir df = ad gemacht haben, so ist auch, wenn wir uns cf gezogen denken, △ adc = dfc, und da fg parallel cd ist, △ dfc = dgc, folglich △ adc = dgc. Es haben daher die in gleichen Zeiten von dem Radius vector beschriebenen Flächenräume gleiche Größe.

Den Zusammenhang des **dritten Kepplerschen Gesetzes** mit dem **Newton**schen Gravitationsgesetze haben wir bereits oben in §. 20 nachgewiesen. — Aus diesem dritten Gesetze folgt auch noch, daß die ferneren Planeten nicht bloß mit einer geringern Winkelgeschwindigkeit, sondern auch mit einer geringern **absoluten** Geschwindigkeit in ihrer Bahn um die Sonne fortschreiten, als die dieser nähern Planeten, indem die Längen der ganzen Bahnen in gleichem Verhältnisse mit den mittlern Abständen von der Sonne, die Umlaufszeiten aber in einem stärkern Verhältnisse zunehmen. Bezeichnen wir nämlich, um ganz deutlich zu sein, die Geschwindigkeiten zweier Planeten, d. h. die in einer Secunde durchlaufenen Wege, mit c und c', die in Secunden ausgedrückten Umlaufszeiten mit t und t', und die Längen der ganzen Bahnen, welche wir um größerer Einfachheit willen als kreisförmig, wovon dieselben doch nicht erheblich abweichen, annehmen wollen, mit p und p', so ist offenbar

$$c = \frac{p}{t} \text{ und } c' = \frac{p'}{t'},$$

folglich 1) $c : c' = pt' : p't = (p : p') \,.\, (t' : t)$.

Nun ist aber 2) $p : p' = r : r'$,

wenn wir die Abstände der Planeten von der Sonne mit r und r' bezeichnen, und nach dem dritten Gesetze $t'^2 : t^2 = r'^3 : r^3$,

also 3) $t' : t = \sqrt{r'^3} : \sqrt{r^3}$.

Setzen wir die in (2) und (3) erhaltenen Werthe in Gleichung (1) ein, so verwandelt sich dieselbe in $c : c' = (r : r') \,.\, (\sqrt{r'^3} : \sqrt{r^3}) = \sqrt{r^2 r'^3} : \sqrt{r'^2 r^3}$

oder $c : c' = \sqrt{r'} : \sqrt{r}$,

d. h. **die mittleren Geschwindigkeiten zweier** ungleich von der Sonne entfernten **Planeten verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln** aus ihren mittleren Entfernungen von der Sonne; der nähere schreitet folglich mit einer größern, der fernere mit einer kleinern Geschwindigkeit fort. — Der Saturn ist ohngefähr 9mal so weit von der Sonne entfernt, als die Erde; die Erde durchläuft in einer Secunde 4 Meilen, der Saturn folglich nur $4/3 = 1^1/_3$ Meile. Er braucht zu einem Umlauf mehr als 29 Jahre, nicht bloß, weil er einen weiteren Weg zu machen hat, sondern auch, weil er langsamer fortschreitet.

Aus dem Newtonschen Gravitationsgesetze geht jedoch hervor, daß das erste und das zweite Kepplersche Gesetz nur für einen der Wahrheit sehr nahe kommenden Ausdruck der wirklichen Bewegungen der Planeten gelten können, indem die gegenseitigen Anziehungen der Planeten kleine Abweichungen (Perturbationen) von der elliptischen Bahn hervorbringen, welche indeß wegen der im Vergleich mit der Sonnenmasse sehr kleinen Massen der Planeten in der That nur gering sind; (vergl. oben §. 22). Weiter folgt aus dem Newtonschen Gravitationsgesetze, daß das dritte Kepplersche Gesetz nur unter der Voraussetzung ganz streng richtig sein kann, wenn die Planeten sich wirklich in einem gänzlich leeren Raume bewegen, welcher ihrer Bewegung keinen Widerstand entgegensetzt. Die von Encke angestellten Beobachtungen des nach ihm benannten Kometen scheinen jedoch dafür zu sprechen, daß die Kometen bei ihrer Bewegung um die Sonne den Widerstand einer sehr feinen Materie, welche man Aether nennt, zu überwinden haben. Wenn die bisherigen Beobachtungen der Planeten den Widerstand eines solchen Aethers, wenn ein solcher wirklich vorhanden sein sollte, nicht haben erkennen lassen, so dürfte dieses darin seinen Grund haben, daß die Planeten wegen ihrer dichteren Masse diesen Widerstand mit weit größerer Leichtigkeit zu überwinden vermögen, als die aus einer äußerst lockern, nebelartigen Materie bestehenden Kometen.

Tafel über die Sonne und die Planeten.

Name des Weltkörpers.	Entfernung von der Sonne in Millionen geogr. Meilen.		Tropische Umlaufszeit.			Durchmesser in geographischen Meilen.	Masse: die der Erde = 1 gesetzt.	Zeit der Axendrehung.			
	größte.	kleinste.	Jahre.	Tage.	Stdn.			Tage.	Stdn.	Min.	Secdn.
Sonne	—	—	—	—	—	193030	354020	25	4(?)	—	—
Merkur	9,65	6,36	—	87	23	670	0,08	1	0	5	—
Venus	15,06	14,86	—	224	17	1666	0,86	—	23	21	22
Erde	21,03	20,33	1*)	—	—	1719	1,00	—	23	26	4
Mars	34,45	28,57	1	321	16	938	0,12	1	—	37	23
Jupiter	112,80	102,41	11	312	20	20004	338	—	9	55	27
Saturn	208,33	186,24	29	154	17	17214	101	—	10	29	17
Uranus	424,89	378,27	83	271	4	8226	17	—	—	—	—
Neptun	626,89	615,46	163	200	12	7653	18	—	—	—	—

Zwischen dem Mars und Jupiter bewegen sich noch zahlreiche kleine Planeten um die Sonne, welche man unter dem gemeinschaftlichen Namen Planetoiden zusammenfaßt, und von denen vier (Vesta, Juno, Ceres, Pallas) im Anfange dieses Jahrhunderts, die übrigen seit dem Jahre 1845 entdeckt worden sind.

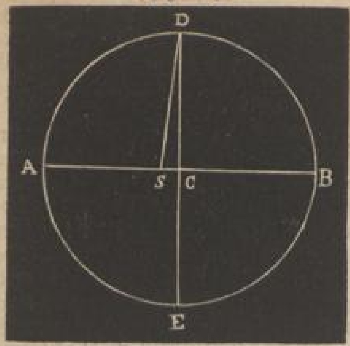
Von den in der vorstehenden Tabelle enthaltenen Zahlen besitzen die Angaben über die Umlaufszeiten der Planeten im allgemeinen einen sehr hohen Grad von Genauigkeit. Von den Entfernungen der Planeten von der Sonne kennt der Astronom zwar die gegenseitigen Verhältnisse sehr genau; dagegen ist ihm die absolute Größe derselben nur ohngefähr bekannt. Eben so können auch die Angaben über die Durchmesser der Sonne und der Planeten nur für ohngefähre Abschätzungen gelten.

Von den Hauptplaneten sind die Erde, der Jupiter, der Saturn, Uranus und der Neptun von Nebenplaneten oder Monden begleitet.

Der Mond der Erde vollendet seinen Umlauf um dieselbe in 27 Tagen 7 Stunden und 43 Minuten und dreht sich genau während dieser Zeit einmal um seine Axe; seine

*) 365 Tage 5 St. 48 Min. 47,5 Sec. — Bei den Angaben über die Umlaufszeiten der folgenden Planeten ist unter einem Jahre die Zeit von $365^1/_4$ Tagen oder 365 Tagen 6 Stunden zu verstehen.

(Fig. 74.)



mittlere Entfernung von der Erde beträgt 51800 geographische Meilen; sein Durchmesser mißt 470 Meilen und seine Masse ist ohngefähr der 80ste Theil von der Masse der Erde.

Von der zahllosen Menge der Kometen sind bereits für ohngefähr zweihundert die Bahnen näher berechnet.

Ueber die Gestalt der Erdbahn bemerken wir noch Folgendes: Nach der obigen Tabelle verhält sich die kleinste Entfernung der Erde von der Sonne zur größten, AS zu BS (Fig. 74), ohngefähr wie 29 zu 30. Ist C der Mittelpunkt der Ellipse, welche die Erde um die Sonne beschreibt, also DE der kleinste Durchmesser derselben, und nehmen wir den mittlern Abstand der Erde von der Sonne $SD = AC$ als Einheit an, so ist die Excentricität $CS = \frac{1}{60}$, da nach dem Obigen $BS - AS = \frac{1}{30}$ ist. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke DCS ergibt sich nun weiter die halbe kleine Axe

$$CD = \sqrt{DS^2 - CS^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3600}} = 1 - \frac{1}{7200} \text{*)}$$

(ohngefähr). Die kleine Axe DE der Erdbahn ist folglich von der großen AB um weniger als ein 7000tel verschieden; es weicht daher die Gestalt der Erdbahn nur sehr wenig von einem Kreise ab. — Aehnliche Betrachtungen lassen sich mit Hilfe der obigen Tabelle leicht über die Bahnen der übrigen dort aufgeführten Planeten anstellen.

*§. 43, a. Hindernisse der Bewegung.

Wenn der Bewegung der Körper auf der Erde keine Hindernisse entgegenständen, so müßte jeder einmal in Bewegung gesetzte Körper sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit zu bewegen ohne Ende fortfahren. Die kleinste Kraft würde hinreichen, eine auf einer wagerechten Unterlage ruhende Last fortzubewegen oder eine Maschine, welche für sich im Gleichgewichte ist, in Bewegung zu setzen; und eine einmal in Bewegung gebrachte Maschine würde nun von selbst fortfahren, sich unaufhörlich zu bewegen, ohne daß es irgend einer Kraft bedürfte, diese Bewegung zu unterhalten. Diejenigen Hindernisse, welche die fortdauernde Anwendung bestimmter Kräfte erforderlich machen, um die angeführten Bewegungen zu unterhalten, sind vorzüglich die Reibung, der Widerstand der Luft oder des Wassers, überhaupt des Mediums, Mittels, in welchem die Bewegung geschieht, und die Steifheit der Seile.

Die Reibung entsteht dadurch, daß bei zwei sich berührenden Körpern, welche einen Druck gegen einander ausüben, die Berührungsflächen auch bei der sorgfältigsten Politur doch niemals vollkommen glatt sind, vielmehr die Erhabenheiten der einen in die Vertiefungen der anderen eingreifen. Wenn nun der eine Körper längs des andern fortbewegt wird, so werden diese Erhabenheiten entweder losgerissen oder verschoben, oder die Erhabenheiten des einen Körpers müssen die Erhabenheiten des andern übersteigen. Der hierzu erforderliche Kraftaufwand bestimmt die Größe der Reibung. Die Reibung ist um so größer, je rauher die sich berührenden Flächen sind. Bei harten Körpern mit geglätteten Berührungsflächen nimmt die Reibung in gleichem Verhältniß mit dem Drucke zu, sie ist dagegen von der Größe der Berührungsflächen unabhängig; bei weichen und faserigen Körpern aber wächst

*) Arithmetik und Algebra §. 225, b.

sie mit der Größe der Berührungsfläche. Die Geschwindigkeit hat, wenn sie nicht allzu groß ist, keinen bedeutenden Einfluß auf die Größe der Reibung. — Man mißt die Reibung durch die Kraft, welche eben ausreicht den auf horizontaler Unterlage ruhenden Körper in Bewegung zu setzen. Bezeichnen wir diese Kraft mit P, den von dem aufliegenden Körper auf die Unterlage ausgeübten Druck mit Q, so wird der Quotient P : Q der **Reibungscoefficient** genannt. Derselbe ist z. B. für Eisen auf Eisen $1/7$, für Eichenholz auf Eichenholz, wenn die Fasern der Richtung der Bewegung parallel laufen, $1/2$, für Eisen auf Eichenholz $1/4$ u. dgl. m. Bei bereits eingetretener Bewegung reicht jedoch eine erheblich geringere Kraft aus, die Bewegung zu unterhalten, also den Reibungswiderstand zu überwinden. — Die Reibung wird ferner vermindert durch Schmiermittel, und sie ist viel geringer bei der rollenden, als bei der gleitenden Bewegung, wie man deutlich an den Rädern unserer Wagen sehen kann.

Der Reibung ist es hauptsächlich zuzuschreiben, daß die wirklichen Leistungen unserer Maschinen immer bedeutend hinter dem berechneten Effecte zurückbleiben. — Andererseits gewährt uns die Reibung aber auch unzählige Vortheile. Ohne dieselbe würden wir kaum zu gehen im Stande sein; kein Nagel würde haften, kein Knoten, keine Nath würde halten; die Gewebe, aus denen unsere Kleider bestehen, würden in einzelne Fäden aus einander fallen u. dgl. m.

Man benutzt die Reibung ferner bei Maschinen, um vermittelst Riemen oder Schnüre die Bewegung eines Rades auf ein anderes zu übertragen. Das bekannteste Beispiel bietet das gewöhnliche Spinnrad dar. — Eben so wird die Fortbewegung der Locomotive auf der Eisenbahn durch die Reibung der durch die Dampfkraft in drehende Bewegung versetzten Räder an den eisernen Schienen vermittelt. Je größer die Zahl der angehängten Wagen und die Belastung derselben ist, um so beträchtlicher muß die Reibung der Räder der Locomotive an den Schienen und also um so größer das Gewicht der Locomotive sein. Dies ist noch mehr der Fall, wenn die Schienen nicht wagerecht liegen, sondern zugleich eine Steigung überwunden werden soll. Ist diese zu groß oder das Gewicht der Locomotive zu gering, so kann es geschehen, daß die Räder derselben sich um ihre Axe drehen, ohne den Zug fortzubewegen.

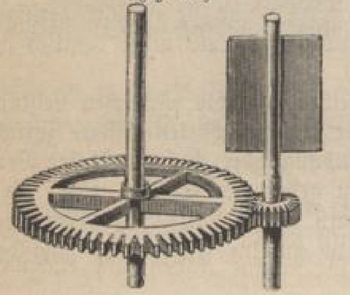
Der **Widerstand des Mittels**, der Luft oder des Wassers, besteht darin, daß ein Körper, welcher sich in demselben bewegt, fortwährend Theile desselben fortschieben muß und daher, so wie jeder stoßende Körper, welcher einen ruhenden in Bewegung setzt, an seiner eigenen Geschwindigkeit verliert. Dieser Widerstand wächst sehr stark mit der Geschwindigkeit *) des bewegten Körpers und hängt außerdem von der Größe und Gestalt desselben und von der Dichtigkeit des Mittels ab, in welchem die Bewegung geschieht. Man sucht diesen Widerstand dadurch zu verringern, daß man die Körper nach der Richtung hin, in welcher die Bewegung geschieht, z. B. die Schiffe, die Linsen an den Uhrpendeln u. dgl. schmal zulaufen läßt. Eben so kommt den Vögeln beim Fliegen, den Fischen beim Schwimmen ihr Bau sehr zu statten. — Der Nutzen dieses Widerstandes zeigt sich beim Rudern, Schwimmen, Fliegen, beim Fallschirme u. dgl.

*) Bei mäßigen Geschwindigkeiten ohngefähr wie das Quadrat derselben.

Die Steifheit der Seile setzt ihrer Krümmung über Rollen, Walzen u. dgl. einen Widerstand entgegen und bewirkt so ebenfalls einen Kraftverlust.

An einem Wagen haben die Pferde auf einer ebenen Straße hauptsächlich nur die der Bewegung entgegenstehenden Hindernisse zu überwinden. Da ein Frachtwagen auf einer guten Chaussee sich von einer Anhöhe von selbst zu bewegen anfängt, wenn die Straße auf 36 Fuß Länge 1 Fuß Neigung hat, so folgt hieraus, daß die zur Fortbewegung in der Ebene erforderliche Kraft $^1/_{36}$ der ganzen Last ist, und daß bei einer Neigung von 1 in 36 schon die doppelte Zugkraft erfordert wird. Wird die Kraft eines Pferdes zu 100 ℔ angenommen, so ergibt sich hieraus 3600 ℔ = 36 C. als Ladung für ein Pferd auf einer vollkommen horizontalen Straße. — Auf Eisenbahnen ist die zum Fortschaffen der Lasten erforderliche Kraft in der Ebene ohngefähr $^1/_{360}$ vom Gewichte der Last, also zehnmal geringer als auf einer Chaussee. Dagegen ist schon bei einer Neigung von 1 in 360 der doppelte Aufwand an Kraft erforderlich.

(Fig. 75.)



Man macht von dem Widerstande der Luft eine nützliche Anwendung in den sogenannten Windfängen, welche verhindern sollen, daß die Geschwindigkeit der Bewegung einer Maschine eine gewisse Grenze nicht überschreite. Man bringt nämlich an einer Welle, welcher durch das Räderwerk der Maschine die größte Geschwindigkeit ertheilt wird, Flügel an, welche von der Luft einen um so größeren Widerstand erfahren, je rascher die Umdrehung erfolgt, und daher dahin wirken, einen zu raschen Gang der Maschine zu verhindern. — Am bekanntesten sind die Windfänge an den Schlagwerken unserer Uhren.

*§. 43, b. Arbeitsgröße. Lebendige Kraft.

In der Technik werden die mannigfaltigsten Kräfte dazu benutzt, die der Fortbewegung der Körper entgegenstehenden Hindernisse zu überwinden. Diese Hindernisse bestehen bei einer senkrecht emporzuhebenden Last in der Schwere, bei einer auf horizontaler Unterlage fortzubewegenden Last in der Reibung, dem Widerstande des Mittels u. dgl. m. — Die durch eine Kraft hervorgebrachte Wirkung, die von derselben geleistete Arbeit ist einerseits der Größe des während der Fortbewegung überwundenen Widerstandes, andererseits der Größe des von dem bewegten Körper durchlaufenen Weges proportional. Man pflegt hiernach das Product aus der Größe des Weges und des überwundenen Widerstandes als das Maß der Arbeitsgröße einer Kraft anzusehen. Eine Kraft, welche im Stande ist, eine Last von 1 Pfd. 100 Fuß hoch zu heben, würde in der nämlichen Zeit eine Last von 100 Pfd. nur 1 Fuß hoch zu heben vermögen.

Man nimmt ziemlich allgemein, besonders in Frankreich, als Einheit die Kraft an, durch welche 1 Kilogramm 1 Meter hoch gehoben wird, und nennt dieselbe ein Meterkilogramm, welches man mit 1^{mk} bezeichnet. In Deutschland wird häufig die Kraft, welche 1 Pfd. 1 Fuß hoch hebt, als Einheit angenommen und 1 Fußpfund genannt. Bei Maschinen, durch welche sehr große Widerstände überwunden werden, wie z. B. bei den Dampfmaschinen, rechnet man meist nach Pferdekräften, indem man eine Pferdekraft gleich 75 Meterkilogramm (= 500 Fußpfund ohngefähr) setzt. Da die Leistung einer Kraft auch von der Zeit abhängt, während welcher dieselbe wirkt, so ist hierbei eine gleiche Zeiteinheit vorausgesetzt, als welche man allgemein die Secunde annimmt.

Wenn eine continuirliche und mit unveränderlicher Stärke wirkende Kraft einer Masse M in der Zeiteinheit die Endgeschwindigkeit G und eine andere Kraft der Masse M' in der nämlichen Zeit die Geschwindigkeit G' ertheilt, so wird nach §. 36 das Verhältniß dieser Kräfte durch den Quotienten $MG : M'G'$ ausgedrückt. Bezeichnen wir ferner die Masse eines fallenden Körpers mit m, die am Ende der ersten Secunde erlangte Geschwindigkeit mit g und die Kraft, mit welcher die Schwere auf diesen Körper gewirkt hat, mit P, so erhalten wir für das Maß dieser Kraft die Gleichung

$$1)\ P = mg.$$

Nehmen wir weiter an, daß der Körper durch t Secunden gefallen ist, und bezeichnen den in dieser Zeit durchlaufenen Weg mit s, die erlangte Endgeschwindigkeit mit v, so ist (zufolge der in der Anm. zu §. 38, a angeführten Gleichungen)

$$v = gt \text{ und } s = \frac{1}{2} gt^2,$$

also wenn wir t eliminiren

$$2)\ s = \frac{v^2}{2g}.$$

Denken wir uns jetzt, daß dieser Körper (im luftleeren Raume) mit der Geschwindigkeit v senkrecht aufwärts geworfen wird, so steigt derselbe eben so hoch, als er vorher gefallen ist, also bis zu der Höhe $\frac{v^2}{2g}$, und er überwindet, bis er (für einen Augenblick) zur Ruhe kommt und diesen Weg s durchlaufen hat, die durch P ausgedrückte Gegenwirkung der Schwere. Wenn daher überhaupt ein bewegter Körper von der Masse m die Geschwindigkeit v besitzt, so ist derselbe im Stande, einen der Kraft P gleichen Widerstand auf eine Wegestrecke von der Größe s zu überwinden, und seine **Arbeitsgröße** oder **Wirkungsfähigkeit** wird zufolge des Obigen durch das Product $P . s$ ausgedrückt. Vermöge der Gleichungen (1) und (2) ist aber dieses Product

$$P . s = \frac{1}{2} m . v^2.$$

Wenn zwei Kräfte P und P' zwei Massen m und m', nachdem sie dieselben eine gleiche Wegestrecke s fortgeführt haben, ohne daß dieser Bewegung ein Hinderniß im Wege stand, die Endgeschwindigkeiten v und v' ertheilen, so verhält sich zufolge der eben angeführten Gleichung

$$P : P' = mv^2 : m' . v'^2.$$

Man pflegt das Product aus der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit eines bewegten Körpers die **lebendige Kraft** desselben zu nennen. Die Wirkungsfähigkeit ist hiernach gleich der Hälfte der lebendigen Kraft.

Zufolge der zuletzt erhaltenen Proportion verhalten sich bei gleichen Massen die Kräfte wie die Quadrate der Geschwindigkeiten; in §. 36 haben wir die Kräfte den einfachen Geschwindigkeiten porportional gesetzt. Dieser scheinbare Widerspruch löst sich einfach dadurch, daß in jenem Falle die Wege, in diesem die Zeiten als gleich angenommen sind. Nun verhalten sich aber bei continuirlich und mit unveränderlicher Stärke wirkenden Kräften die Geschwindigkeiten einfach wie die Zeiten, die Wege wie die Quadrate der Zeiten, also auch wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Setzen wir dem Obigen gemäß eine Kraft $P = mg$, eine andere $P' = mg'$, so erhalten wir, wenn die erstere der Masse m in der Zeit t die Geschwindigkeit v ertheilt und dieselbe durch den Weg s fortführt, die letztere aber der nämlichen Masse m in der Zeit t' die Geschwindigkeit v' ertheilt und dieselbe durch den Weg s' fortbewegt, die Gleichungen

$$v = gt,\ v' = g't',\ s = \frac{v^2}{2g},\ s' = \frac{v'^2}{2g'}.$$

Da sich nach unserer Annahme

$$P : P' = g : g'$$

verhält, so ergibt sich hieraus, wenn wir $t = t'$ setzen,

$$P : P' = g : g' = v : v';$$

wenn wir aber $s = s'$, also $\frac{v^2}{2g} = \frac{v'^2}{2g'}$ und folglich $\frac{g}{g'} = v^2 : v'^2$ annehmen,

$$P : P' = g : g' = v^2 : v'^2.$$

Als Anwendung der hier entwickelten Lehren wollen wir die folgende Aufgabe anführen: Wie groß ist die Wirkungsfähigkeit eines Gefälles, wenn in jeder Secunde eine Wassermasse m von der Höhe h herabfällt?

Die Wirkungsfähigkeit ist zufolge des Obigen gleich der Hälfte der lebendigen Kraft, also

$$= \frac{1}{2}\, m \,.\, v^2.$$

Bezeichnen wir das Gewicht der Wassermasse mit P, so ist nach dem Vorhergehenden $P = mg$, folglich $m = \frac{P}{g}$, und da nach §. 38, a. $v = \sqrt{2gh}$ ist, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} mv^2 = Ph.$$

Die gesuchte Wirkungsfähigkeit ist also gleich dem Producte aus dem Gewichte des Wassers und der Fallhöhe. Fallen z. B. aus der Höhe von 12 Par. Fuß in jeder Secunde 50 Kubikfuß Wasser, und ist das Gewicht des Kubikfußes Wasser = 68 Pfund (ohngefähr), so ist die gesuchte Wirkungsfähigkeit des Gefälles

= 12 . 50 . 68 = 40800 Fußpfund = 82 Pferdekräfte.

*§. 44. Geschichtliche Uebersicht.

250 v. Chr. Archimedes erweist die Gesetze des Hebels, des Flaschenzuges, der schiefen Ebene, der Schraube u. s. w. Eben so lehrt er auch den Schwerpunkt der Körper auf mathematischem Wege bestimmen.

1543 n. Chr. Copernicus stellt das jetzt allgemein angenommene Sonnensystem auf.

1600—1700. Die Untersuchungen verschiedener Physiker führen zur Entdeckung des Theorems vom Parallelogramm der Kräfte, welches zuerst für Kräfte, welche unter einem rechten Winkel zusammenstoßen, später allgemein für Kräfte, deren Richtungen einen beliebigen Winkel einschließen, erwiesen wird.

1602. Galilei entdeckt die Gesetze des freien Falles, des Falles auf der schiefen Ebene und der Pendelschwingungen.

1610. Keppler entdeckt die allgemeinen Gesetze der Bewegungen der Planeten.

1658. Huyghens vervollständigt Galilei's Entdeckungen über das Pendel und wendet dasselbe als Zeitmaß an. Derselbe lehrt auch die Schwungkraft (Centrifugalkraft) berechnen.

1682. Newton entdeckt das allgemeine Gravitationsgesetz.

Da die Entdeckungen der neueren Physiker in den mechanischen Wissenschaften sich auf die höhere Analysis gründen, so haben sie in diesem Lehrbuche keine Aufnahme finden können.

Dritter Abschnitt.

Von den mechanischen Erscheinungen flüssiger Körper.

§. 45. Von den flüssigen Körpern im allgemeinen.

Die flüssigen Körper unterscheiden sich von den festen durch die leichte Verschiebbarkeit ihrer Theile. — Die Zahl derjenigen Körper, welche sich