Zweites Kapitel.

Anfangsgründe der Geometrie.

§. 1.

Was eine gerade Linie sey ist jedem bekannt. Es ist die kürzeste Linie zwischen zweien Punkten.

Wenn zwei oder mehrere gerade Linien so nebeneinander liegen, daß sie immer gleichweit von einander entfernt bleiben, und sich nie durchschneiden, man mag sie nach beiden Seiten so weit verlängern wie man will, so heißen sie Parallellinien, wie z. B. in Fig. 1. die Linien A, B und C.

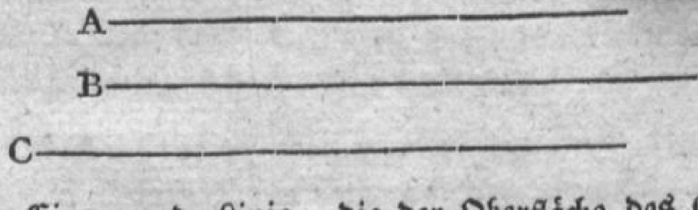


Fig. 1.

Eine gerade Linie, die der Oberfläche des stillstehenden Wassers parallel ist, heißt eine horizontale Linie.

Bindet man eine Bleikugel an einen Faden, und läßt ihn frei hangen, so bildet der Faden eine senkrechte Linie. Diese Linie, die häufig vorkommt, heißt auch die Lothlinie, oder der Perpendikel.

§. 2.

Wenn man auf eine horizontale Linie eine Lothrechte zieht, so entstehen in dem Punkte, wo sie einander durchschneiden, zwei Winkel, die gleich groß sind. Man nennt diese Winkel, um sie von andern zu unterscheiden, **rechte Winkel**. So sind die Winkel a u. b in Fig. 2 beide rechte Winkel.

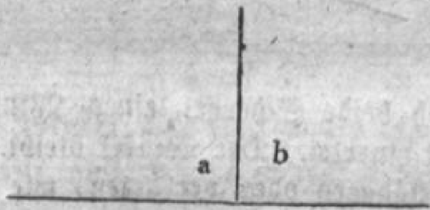


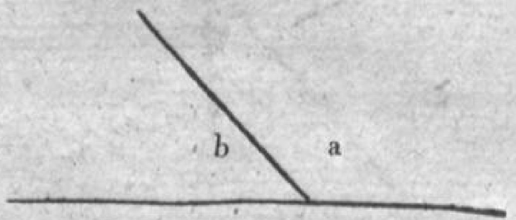
Fig. 2.

§. 3.

Wenn zwei Linien sich nicht senkrecht, sondern schief durchschneiden, so entstehen ungleiche Winkel, wovon einer größer und der andere kleiner ist als ein rechter. — Jener heißt ein stumpfer, und dieser ein spitzer Winkel.

So ist z. B. in Fig. 3 der Winkel a ein stumpfer, und der Winkel b ein spitzer.

Fig. 3.

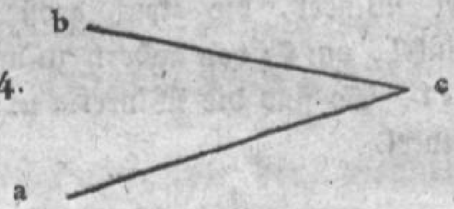


§. 4.

Die beiden Linien, die einen Winkel einschließen, heißen die **Schenkel des Winkels**, und der Punkt, wo sie sich durchschneiden, heißt der **Winkelpunkt**.

So ist in Fig. 4 die Linie a c der eine, und b c der andere Schenkel des Winkels, a c b und c ist der Winkelpunkt.

Fig. 4.



Anmerk. Ob beide Schenkel eines Winkels gleichlang sind, das ist einerlei. Der Winkel bleibt derselbe, man mag ihn verlängern oder verkürzen, wie man dieses an Fig. 5 sieht. — Nur die Neigung der Linien gegen einander bestimmt beim Winkel seine Größe, und nicht die Länge seiner Schenkel. Ob diese einen Zoll oder eine Meile lang sind, dieses ist dasselbe.

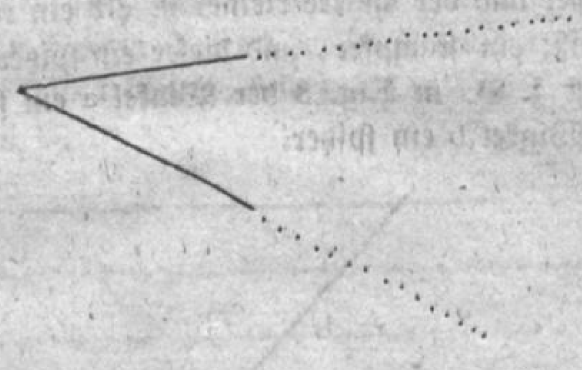
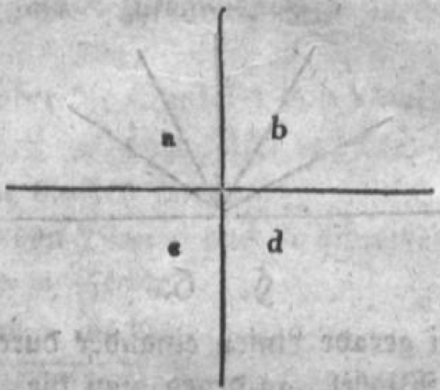


Fig. 5.

§. 5.

Aus dem vorigen ist klar, daß um einen Punkt nicht mehr als vier rechte Winkel liegen können, wie z. B. in Fig. 6 die Winkel a b c d.

Fig. 6.



Sind einige Winkel aber kleiner als ein rechter Winkel, so müssen die andern um so viel größer seyn.

Je mehr Winkel um einen Punkt liegen, desto kleiner werden sie, allein ihre Summe beträgt immer nicht mehr als vier Rechte.

Dieses zeigt die 7te Figur deutlich.

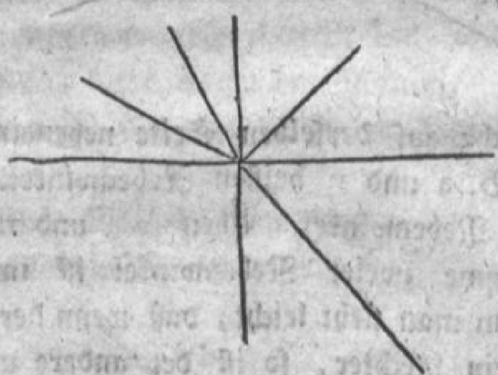


Fig. 7.

Also alle Winkel, die um einen Punkt liegen, betragen in der Summe vier Rechte.

Und alle Winkel, die an einer Seite einer geraden Linie um einen gemeinschaftlichen Punkt liegen, betragen zwei Rechte. Wie z. B. Fig. 8.

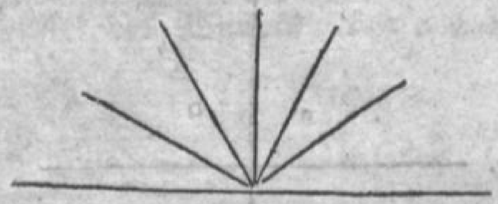


Fig. 8

§. 6.

Wenn zwei gerade Linien einander durchschneiden, so entstehen vier Winkel, an denen man die, welche einander gegenüber stehen, Scheitelwinkel nennt.

So sind die Winkel a und b in Fig. 9 Scheitelwinkel, desgleichen die Winkel m und n.

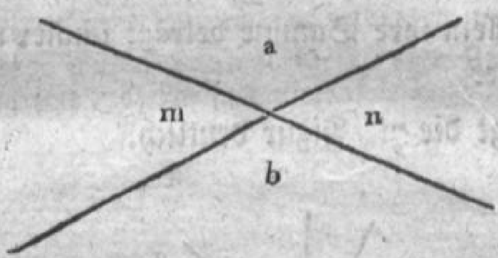


Fig. 9

Die, welche auf derselben Seite nebeneinander liegen, wie z. B. a und n heißen Nebenwinkel. Eben so sind b und n Nebenwinkel. Eben so a und m.

Die Summe zweier Nebenwinkel ist immer zwei Rechte. Denn man sieht leicht, daß wenn der eine kleiner ist als ein Rechter, so ist der andere um so viel größer, und wenn der eine ein spitzer Winkel ist, so ist der andere ein stumpfer.

§. 7.

Alle Scheitelwinkel sind einander gleich. Fig. 9. Denn a und n sind zusammen 2 rechte, als Nebenwinkel, eben so sind b und n zusammen zwei Rechte als Nebenwinkel.

Nun sind aber die Winkel a und b nothwendig einander gleich, weil sie sonst nicht mit dem Winkel n eine gleiche Summe machen könnten.

Man kann den Beweis auch so schreiben:

$a + n = 2$ Rechte.

$b + n = 2$ Rechte.

also $a + n = b + n$, denn wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie sich selbst gleich,

also $- n \quad - n$ an beiden Seiten abgezogen

bleibt $a = b$, weil Gleiches von Gleichem abgezogen, Gleiches übrig läßt.

§. 8.

Wenn zwei Parallellinien von einer dritten geschnitten werden, so entstehen ausser den Neben- und Scheitelwinkeln noch drei andere Arten von Winkel.

1) Innere Winkel, wie z. B. in Fig. 10 die Winkel c und d.
2) Aeussere Winkel, wie b und e.
3) Wechselwinkel, wie c und f.

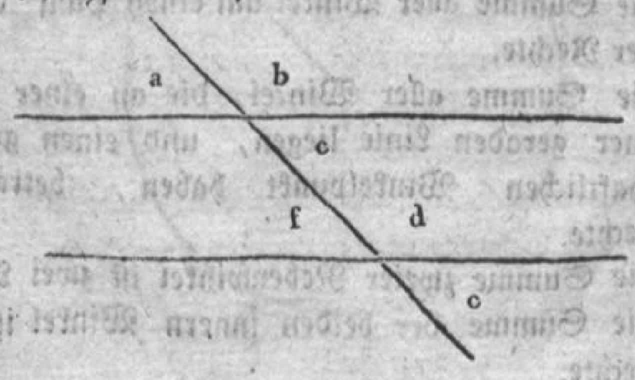


Fig. 10.

Man sieht aus der Figur, daß der äussere Winkel b dem innern d gleich ist, weil sie, wenn man sie aufeinander legte, sich einander decken würden.

Eben so ist der innere Winkel c dem äussern Winkel e gleich.

Man sieht ferner, daß die beiden äussern Winkel b und e zusammen gleich zwei Rechte sind. Denn da b + c gleich zwei Rechte sind als Nebenwinkel, so müssen b + e auch gleich zwei Rechte seyn, da c = e ist.

Aus demselben Grunde sind die beiden innern Winkel c und d zusammen gleich zwei Rechten. Denn da d + e gleich zwei Rechten ist, so ist auch d + c gleich zwei Rechten, da e und c einander gleich sind.

Aus demselben Grunde sind die beiden Wechselwinkel c und f einander gleich. Da c und e einander gleich sind, und da f der Scheitelwinkel von e ist, so ist er diesem sowohl als dem Winkel c gleich.

§. 9.

Das Bisherige läßt sich demnach kurz in folgende Sätze zusammen fassen.

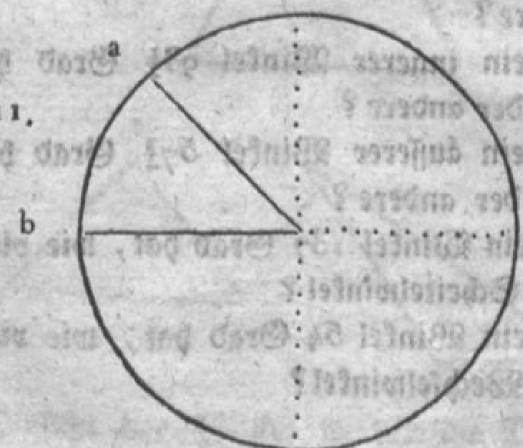
1) Wenn zwei Linien sich senkrecht durchschneiden, so entstehen 4 rechte Winkel.
2) Die Summe aller Winkel um einen Punkt beträgt vier Rechte.
3) Die Summe aller Winkel, die an einer Seite einer geraden Linie liegen, und einen gemeinschaftlichen Winkelpunkt haben, beträgt 2 Rechte.
4) Die Summe zweier Nebenwinkel ist zwei Rechte.
5) Die Summe der beiden innern Winkel ist zwei Rechte.

6) Die Summe der beiden äussern Winkel ist zwei Rechte.
7) Alle Scheitelwinkel sind einander gleich.
8) Der innere und äussere Winkel sind einander gleich.
9) Alle Wechselwinkel sind einander gleich. (Ihre Figur hat Aehnlichkeit mit einem lateinischen Z.)

Anmerkung. Man kann sich die Entstehung eines Winkels auch so vorstellen, daß von zwei geraden Linien a und b, die aufeinander liegen, die eine a sich so herumdreht, daß sie mit dem einen Endpunkte auf der andern b liegen bleibt, und einen Kreis beschreibt. So wie die Linie sich herumdreht, entstehen immer andere Neigungen und andere Winkel, deren gemeinschaftlicher Scheitelpunkt im Mittelpunkt des Kreises liegt.

Je größer der Winkel ist, desto größer ist das Stück des Kreisbogen, das zwischen seinen beiden Schenkeln liegt. — Deswegen ist der Kreisbogen ein bequemes Maas für die Winkel, und man bedient sich seiner, um die Größe der Winkel zu messen.

Fig. 11.



Man hat deswegen den Kreis seit alten Zeiten in 360 Theile eingetheilt, welche man Grade nennt, weil diese Zahl 360 sich durch eine Menge Zahlen ohne Bruch theilen läßt, z. B. durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24 u. s. w. so hat man diese Eintheilung lange beibehalten, bis man in neuern Zeiten darauf gekommen ist, den Kreis dem Decimalsystem gemäß in 400 Grade, jeden Grad in 100 Minuten, und jede Minute in 100 Sekunden zu theilen.

Die Winkel auf dem Papier werden mit einem Instrumente gemessen, das man Transporteur nennt. Es ist ein Halbkreis, der in Grade und halbe Grade eingetheilt ist.

Auf dem Felde werden die Winkel mit dem Meßtische oder Magnetnadel, oder dem Astrolabio, oder dem Sextanten gemessen. Von diesen Instrumenten wird in den folgenden Theilen gehandelt.

Aufgaben:

1) Wenn ein Nebenwinkel 37 Grad hat, wie viel hat denn der andere? Antwort: 143 Grad, weil beide zusammen gleich zwei Rechte oder 180 Grad haben.

2) Wenn ein Nebenwinkel 97 Grad hat, wie viel hat denn der andere?

3) Wenn ein innerer Winkel $93\frac{1}{2}$ Grad hat, wie viel hat denn der andere?

4) Wenn ein äusserer Winkel $57\frac{3}{4}$ Grad hat, wie viel hat denn der andere?

5) Wenn ein Winkel 137 Grad hat, wie viel Grade hat denn sein Scheitelwinkel?

6) Wenn ein Winkel 54 Grad hat, wie viel Grade hat denn sein Wechselwinkel?

Von den Dreiecken.

§. 10.

Die einfachste geradlinigte Figur ist das Dreieck, und es ist zugleich diejenige, welche wegen ihrer Einfachheit am meisten sowohl in dem Theoretischen als Praktischen gebraucht wird. — Sie hat nur drei Seiten und drei Winkel.

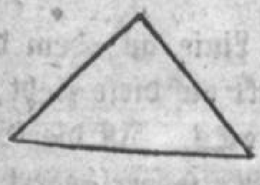
Sind in einem Dreiecke alle Seiten gleich groß, so heißt es ein *gleichseitiges* Dreieck, wie Fig. 12.

Sind aber nur zwei Seiten gleich lang, so heißt es ein *gleichschenkliges* Dreieck, wie Fig. 13.

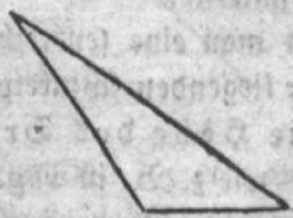
Sind endlich alle Seiten ungleich, so heißt es ein *ungleichseitiges* Dreieck, wie Fig. 14.

Fig. 12.

13.



14.



In Hinsicht der Winkel werden die Dreiecke eingetheilt in *Spitzwinkligte*, *Rechtwinkligte* und *Stumpfwinkligte*.

Spitzwinkligt heißt ein Dreieck in dem alle drei Winkel spitz sind, wie Fig. 15.

Rechtwinkligt heißt ein Dreieck in dem ein rechter Winkel ist, wie Fig. 16.

Stumpfwinkligt heißt ein Dreieck in dem ein stumpfer Winkel ist, wie Fig. 17.

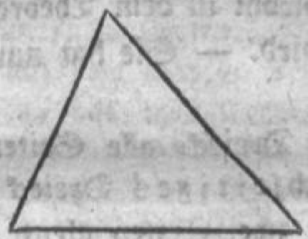
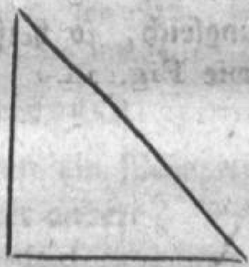
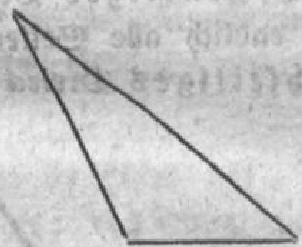


Fig. 15.



16.



17.

§. 11.

Eine von den drei Seiten eines Dreiecks, es ist gleichviel welche, nennt man die Basis oder die Grundlinie. Gewöhnlich nimmt man hiezu entweder die längste Seite oder die unterste.

Wenn man eine senkrechte Linie aus dem der Basis gegenüber liegenden Winkelpunkt auf diese zieht, so heißt dieses die Höhe des Dreiecks. Ist die Grundlinie zu kurz, wie z. B. in Fig. 18, so verlängert man sie, bis die Lothlinie sie trifft, wie in folgender Figur.

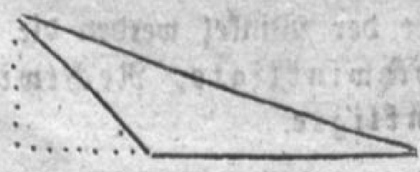


Fig. 18.

Im rechtwinkligten Dreieck heißen die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, die **Catheten**, und die gegenüber liegende die **Hypothenuse**.

§. 12.

In jedem Dreieck sind zwei Seiten zusammen genommen immer größer als die dritte, weil, wenn eine Seite größer ist als die beiden übrigen zusammen, die Endpunkte der Seiten nicht aneinander schließen können.

Dem größten Winkel steht auch immer die größte Seite gegenüber.

Alle drei Winkel in einem Dreiecke betragen zusammen genommen zwei Rechte.

Beweis.

In dem Dreieck a b c betragen die drei Winkel $a + b + c = 2$ Rechte.

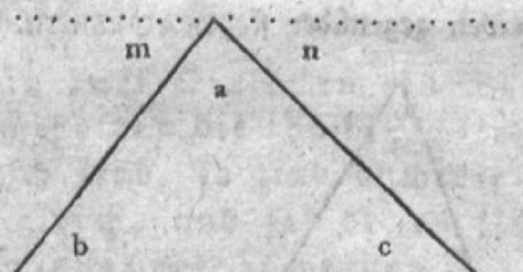


Fig. 19.

Denn man ziehe der Grundlinie b c eine andere Linie parallel, welche zugleich durch die Spitze des Dreiecks geht, so entstehen die beiden Winkel m und n, welche mit a zusammen zwei Rechte betragen, da sie auf einer geraden Linie um einen Punkt liegen.

Nun ist aber der Winkel b so groß wie m, weil sie Wechselwinkel sind, und aus demselben Grunde ist der Winkel c so groß als n.

Also a + b + c ist gleich a + m + n. Da aber diese drei Winkel zusammen gleich zwei Rechten sind, so sind auch jene drei a + b + c = 2 Rechte.

Aufgabe. Wenn in einem Dreieck die Summe zweier Winkel 120 Grad ist, wie groß ist dann der dritte? Antwort: 60 Grad, da alle drei 2 Rechte oder 180 betragen.

Wenn in einem Dreieck der eine Winkel 23, und der andere 67 Grad hat, wie groß ist dann der dritte?

Wenn in einem rechtwinkligten Dreiecke ein Winkel 53 Grad hat, wie groß ist dann der Dritte?

§. 13.

Wenn man in einem Dreieck eine Seite verlängert, so ist der äußere Winkel, der dadurch entsteht, so groß wie die beiden gegenüber stehenden innern.

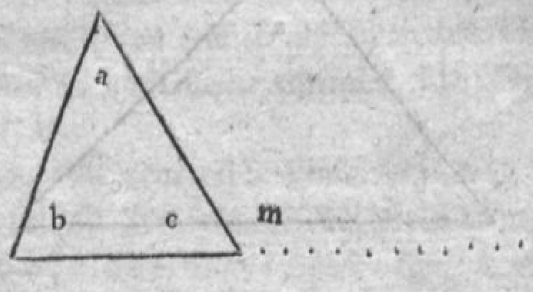


Fig. 20.

Beweis.

Der Winkel m ist so groß als die beiden Winkel a + b. Denn da a + b + c gleich zwei Rechte sind, und da ferner m + c gleich zwei Rechte sind (als Nebenwinkel) so bleibt, wenn man c wegnimmt, n und a + b übrig, welche einander gleich seyn müssen. Denn Gleiches von Gleichem weggenommen, läßt Gleiches übrig.

Aufgabe. Wenn der äussere Winkel 68 Grad hat, wie groß sind dann die beiden gegenüberstehenden innern?

§. 14.

Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn sie eins aufs andere gelegt einander decken.

Dann sind in beiden nicht allein die drei Winkel einander gleich, sondern auch die drei Seiten und der Flächeninhalt.

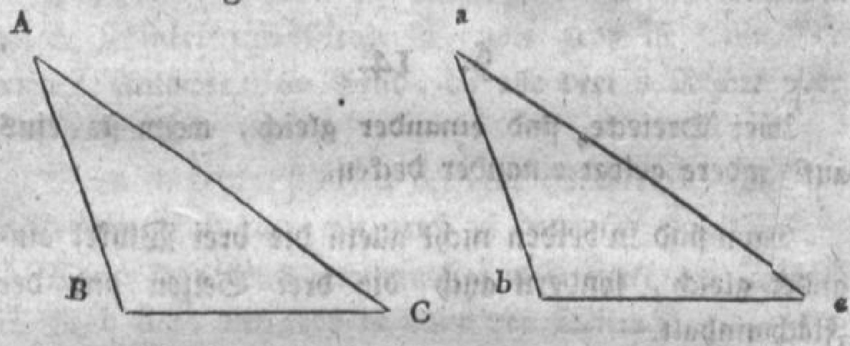
Sind aber nur die drei Winkel in zwei Dreiecken einander gleich, so sind beide Dreiecken einander ähnlich. So sind z. B. alle gleichseitigen Dreiecke einander ähnlich, die Seiten mögen groß oder klein seyn, da jeder Winkel $\frac{2}{3}$ eines Rechten ist.

Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel und die beiden Seiten die ihn einschließen, einander gleich sind, so sind auch die Dreiecke einander gleich, und sie decken sich, wenn sie aufeinander gelegt werden.

Beweis.

In den Dreiecken A B C und a b c soll der Winkl A = a und die Seite A B = a b und A C = ac seyn, beide Dreiecke sind dann einander gleich, sowohl in den Winkeln und Seiten als im Inhalte.

Fig. 21. 22.



Denn man lege den Winkel a auf A, und die Seiten a c auf A C, und a b auf A B, so werden sie einander decken, da sie einander gleich sind. Da nun die Endpunkte der Linie b c auf die Endpunkte der Linie B C fallen, so decken sich auch diese, und sind einander gleich. Sobald aber in zwei Dreiecken alle drei Seiten einander gleich sind, so sind es auch die Winkel und der Inhalt, und beide Dreiecke decken sich.

§. 15.

Wenn man zwei rechtwinkligte Dreiecke von gleicher Größe und Seiten aneinander legt, so entsteht ein rechtwinkligtes Viereck. (Recktangel.)

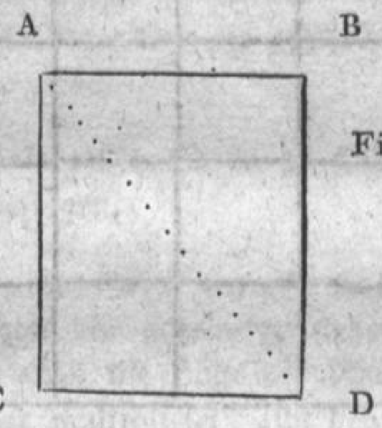


Fig. 23.

In dem Viereck ABCD heißt die Linie CB, welche von einer Ecke zur andern gezogen wird, die Diagonale.

Man sieht, daß man jedes rechtwinkligte Viereck durch das Ziehen der Diagonale in zwei rechtwinkligte Dreiecke zerlegen kann, die einander gleich sind.

Um den Inhalt eines Vierecks zu messen, so muß man als Maas ein anderes Viereck zur Einheit annehmen, z. B. den Quadratfuß, welches eine Fläche ist, die 1 Fuß lang, und 1 Fuß breit ist, oder die Quadratruthe eine Fläche, die eine Ruthe lang und eine Ruthe breit ist. Man mißt dann wie viele Quadratfuß oder Quadratruthen das Viereck enthält.

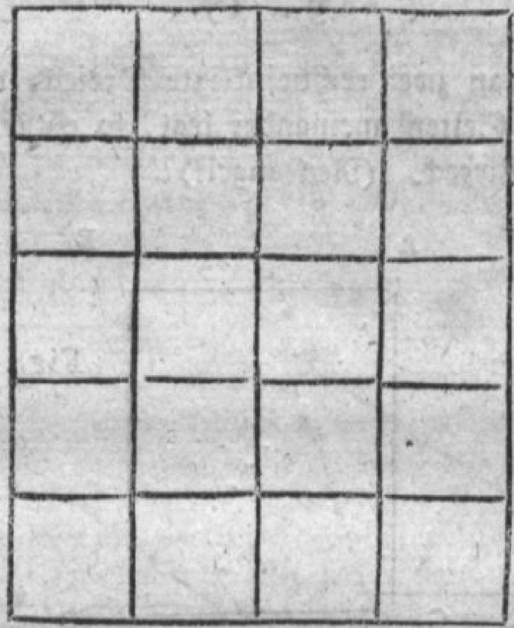


Fig. 24.

Wenn, wie in Fig. 24, z. B. 5 Ruthen auf die Länge und 4 auf die Breite gehen, so ist der ganze Inhalt 20 Quadratruthen.

Hieraus folgt die Regel: daß, um ein rechtwinkligtes Viereck auszumessen, man seine Länge mit seiner Breite multipliciren muß. Wenn es z. B. 33 Ruthen lang und 10 Ruthen breit ist, so ist sein Inhalt 330 Ruthen.

Aufgabe. Wie groß ist der Inhalt eines rechtwinkligten Vierecks, das 38 Ruthen lang und 35 Ruthen breit ist?

§. 16.

Wenn in einem Viereck, das nicht rechtwinkligt ist, die gegeneinander überstehende Seiten gleich, und folglich parallel sind, so heißt es ein geschobenes Viereck, oder eine Raute. In der Raute sind nicht alle vier

Winkel einander gleich, sondern blos zwei und zwei, die gegeneinander über stehen.

Wollte man, um den Flächeninhalt einer Raute zu finden, die vorige Regel anwenden, und zwei Seiten miteinander multipliciren, so würde man ein um so unrichtigeres Resultat erhalten, je geschobener das Viereck wäre.

Um den Inhalt einer Raute zu finden, muß man folgende Regel befolgen.

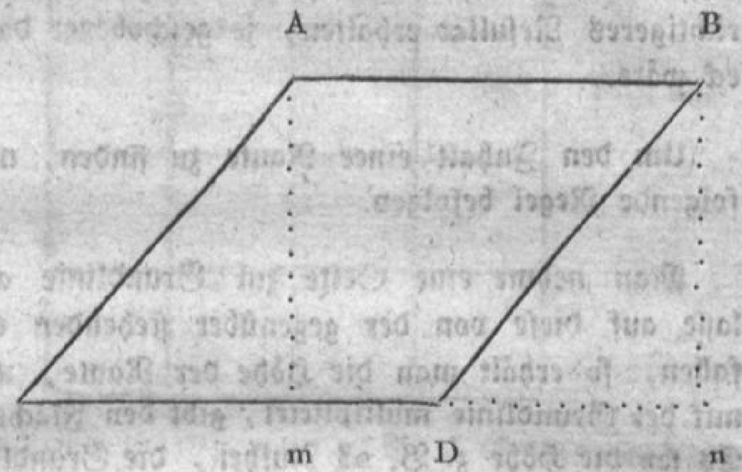
Man nehme eine Seite zur Grundlinie an, und lasse auf diese von der gegenüber stehenden ein Loth fallen, so erhält man die Höhe der Raute, und diese mit der Grundlinie multiplicirt, gibt den Flächeninhalt. Es sey die Höhe z. B. 23 Ruthen, die Grundlinie 20, so ist der Inhalt 460 Ruthen.

Denn alle Rauten oder Parallelogrammen, die gleiche Höhe und gleiche Grundlinien haben, sind in ihrem Flächeninhalte gleich, sie mögen rechtwinkligt oder schiefwinkligt seyn.

Das schiefwinkligte Parallelogramm A B C D ist dem rechtwinkligten A B m n gleich, mit dem es gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Beweiß.

Fig. 25.



Die Seite A B als Grundlinie genommen, haben beide gemeinschaftlich, eben so haben beide dieselbe Höhe A m. Folglich haben beide gleiche Grundlinien und gleiche Höhe.

Die beiden Dreiecke A C m und B D n decken einander. Weil beide rechtwinkligt sind, und weil die Winkel bei C und D einander gleich sind, (als innere und äussere) so sind es auch die bei A und B, da m und n rechte Winkel sind. Zudem sind die Seiten, welche die Winkel bei A und B einschließen, einander gleich, als gegeneinander über stehende Seiten in Parallelogrammen, folglich decken sich die Dreiecke und sind einander gleich.

Wenn man aber zu dem schiefen Viereck A B m l das Dreieck C A m hinzu thut, so erhält man das Parallelogramm A B C D, thut man aber das Dreieck B D n dazu, so erhält man das Parallelogramm A B m n.

Beide sind aber gleich, weil, wenn man Gleiches zu Gleichem addirt, Gleiches kommt.

Folglich sind alle Parallelogrammen, die gleiche Höhen und gleiche Grundfläche haben, einander gleich.

Man kann also vermöge dieses Satzes jedes schiefe Parallelogramm in ein rechtwinkligtes verwandeln, das mit ihm gleiche Höhe und gleiche Grundlinien hat, und dessen Inhalt sich dann leicht berechnen läßt.

Aufgabe. Wie groß ist die Fläche eines Parallelogramms, dessen Höhe 19 Fuß, und dessen Grundlinie 27 ist?

§. 17.

Jedes Parallelogramm, es mag rechtwinkligt oder schiefwinkligt seyn, kann man durch das Ziehen einer Diagonale in zwei Dreiecke theilen, die einander gleich sind, weil jedes die Hälfte des Parallelogramms ist.

Wenn also alle Parallelogramme, die gleiche Grundlinien und gleiche Höhe haben, einander gleich sind, so sind auch alle Dreiecke einander gleich, deren Grundlinien und Höhen gleich sind, denn was von den ganzen gilt, das gilt auch von den halben, und wenn z. B. zwei Aepfel gleich groß sind, so sind auch ihre Hälften gleich groß, wenn man sie durchschneidet.

Da man den Flächeninhalt eines Parallelogramms findet, wenn man die Höhe mit der Grundlinie multiplicirt, so findet man den Inhalt eines Dreiecks, wenn man seine Höhe mit seiner Grundlinie multiplicirt, und davon die Hälfte nimmt, weil das Dreieck immer die Hälfte eines Parallelogramms ist.

Also um den Inhalt eines Dreiecks zu finden, multiplicirt man die Basis mit der Höhe, und dividirt mit 2.

Oder man multiplicirt die Basis mit der halben Höhe.

Oder man multiplicirt die Höhe mit der halben Basis.

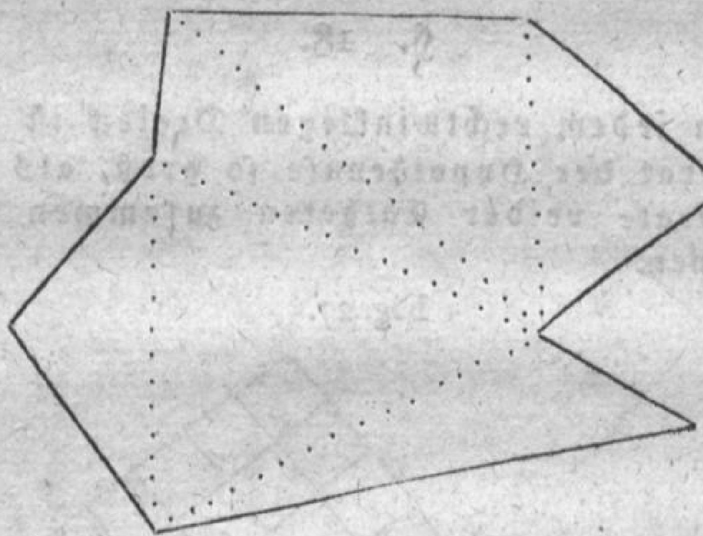
Alles dieses gibt dasselbe, und man gebraucht nur jedesmal diejenige Methode, welche die bequemste Rechnung gibt, und die wenigsten Zahlen.

Den Satz: daß alle Dreiecke, die gleiche Höhe und gleiche Grundlinien haben, einander gleich sind, kann man auch so ausdrücken: Alle Dreiecke, welche zwischen Parallellinien sind, und auf derselben Grundlinie stehen, sind einander gleich, und sind halb so groß wie ein Parallelogramm, das mit ihnen gleiche Grundlinien, und gleiche Höhe hat.

Anmerkung. Der Anfänger muß sich diese Sätze sehr wohl einprägen, denn sie sind für die Feldmeßkunst die wichtigsten, weil auf ihnen die ganze Berechnung von der Größe der Felder beruht.

Jedes Feld wird, ehe es gemessen wird, durch Grenzsteine begrenzt. Hiedurch wird es in ein Vieleck von 10, 12 oder mehrern Seiten verwandelt. Die Winkelpunkte der Figur sind die Grenzsteine. Die Figur wird nur durch Ziehung der Diagonalen in lauter Dreiecke verwandelt, wie z. B. Fig. 26.

Fig. 26.



Von jedem Dreiecke wird Grundlinie und Höhe gemessen, die werden miteinander multiplicirt, und hievon ist die Hälfte der Flächeninhalt des Dreiecks. — Addirt man dann zuletzt den Flächeninhalt aller Dreiecke, so erhält man den Inhalt der Figur oder die Größe des Feldes.

Aufgabe. 1) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Grundlinie 12 Ruthen, und dessen Höhe 10 Ruthen ist?

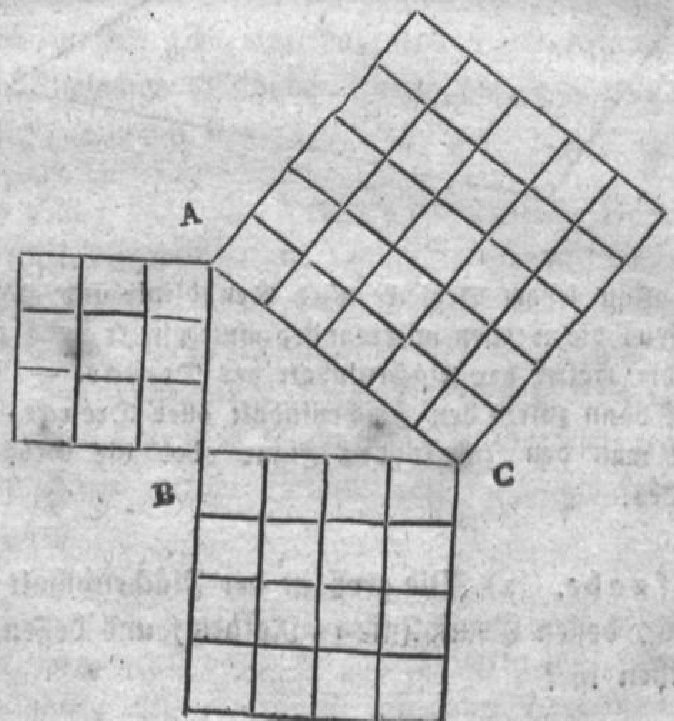
2. Wie groß ist eine Figur, die in 5 Dreiecken zerlegt ist, die folgende Grundlinie und Höhen haben?

a	37	Ruthen	Grundlinie	und	12	Ruthen	Höhe.
b	34	—	—	— —	6	—	—
c	16	—	—	— —	19	—	—
d	12	—	—	— —	17	—	—
e	19	—	—	— —	20	—	—

§. 18.

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypothenuse so groß, als die Quadrate beider Catheten zusammen genommen.

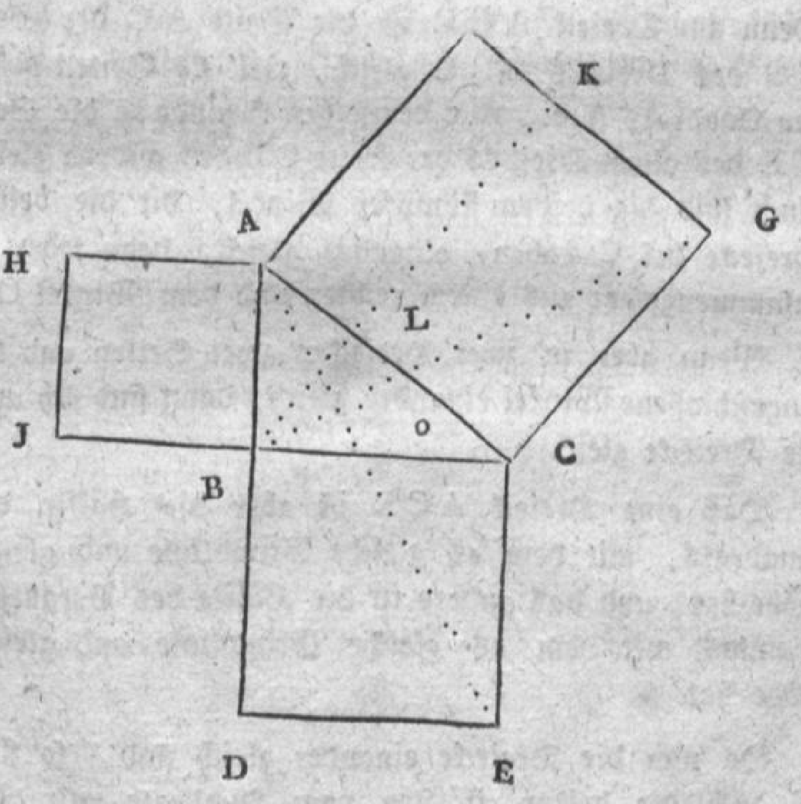
Fig. 27.



Z. B. In dem rechtwinkligen Dreieck A B C soll die Seite A B 3 Meter, die Seite B C 4 Meter und die Seite A C 5 Meter seyn. So ist das Quadrat von 3 = 9 und das von 4 = 16, beide zusammen sind = 25. Das Quadrat der Hypothenuse A C ist auch 25.

Der Beweis für diesen wichtigen Satz läßt sich leicht auf folgende Weise führen:

Fig. 28.



Man ziehe aus der Spitze des rechten Winkels senkrecht auf die Hypothenuse die Linie B L und verlängere sie bis K. Diese theilt das Quadrat A C F G in zwei Parallelogrammen, wovon das größte dem Quadrate

BCED und das kleinste dem Quadrate ABIH gleich ist. Beide zusammen sind also gleich den Quadraten der beiden Catheten.

Um zu beweisen, daß das größere Parallelogramm dem Quadrat des größeren Catheten, und das kleinere dem Quadrat des kleineren Catheten gleich sey, so ziehe man noch die beiden punktirten Linien AE und BG.

Diese beiden Linien machen die längste Seite von zwei Dreiecken, die einander vollkommen gleich sind. Denn im Dreieck ACE ist die Seite AC der Seite CG des Dreiecks BCG gleich, weil sie Seiten desselben Quadrats sind. Aus demselben Grunde ist die Seite CE des einen Dreiecks der Seite CB des andern gleich. Auch sind die beiden stumpfen Winkel, die die beiden Dreiecke bei C haben, einander gleich, denn jeder ist zusammengesetzt aus einem rechten und dem Winkel O.

Wenn aber in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel einander gleich, dann sind sich auch die Dreiecke gleich.

Das eine Dreieck ACE ist aber die Hälfte des Quadrats, mit dem es gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat, und das andere ist die Hälfte des Parallelogramms mit dem es gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Da nun die Dreiecke einander gleich sind, so sind es auch die beiden Hälften vom Quadrate und vom Parallelogramm, und da sich, auch die Ganzen einander gleich sind, wenn die Hälften einander gleich sind, so folgt, daß das Parallelogramm KLCG, dem Quadrat BCDE gleich sey.

Der Beweis, daß das kleine Parallellogramm AFKL dem Quadrate des andern gleich sey, wird ganz auf dieselbe Weise geführt, und es ist daher unnöthig ihn hinzusetzen, zudem da man dann nach zwei punktirte Linien ziehen muß, welches die Figur etwas verwirrt.

Anmerk. Dieses ist der berühmte Pythagorische Lehrsatz, den ein griechischer Weltweiser, Namens Pythagoras, ungefähr 500 Jahre vor Christi Geburt erfunden hat. Man sagt, daß er sich hierüber so gefreut, daß er den Göttern aus Dankbarkeit hundert Ochsen geopfert habe. Allein dieses ist wohl eine Fabel, denn nach seiner Lehre war es nicht erlaubt, Thiere zu tödten, und er selber lebte blos von Milch, Gemüse und Obst.

Von den Vielecken und dem Kreise.

§. 19.

Eine Figur, die 5, 6, 10 oder mehrere Seiten hat, heißt ein Vieleck. — Sind alle Seiten und alle Winkel an ihrem Umfange gleich groß, so heißt sie ein reguläres Vieleck.

Wenn man in einem regulären Vielecke vom Mittelpunkte nach allen Winkeln am Umfange Linien zieht, so entstehen lauter Dreiecke, die gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.

Setzt man alle diese Dreiecke so aneinander, wie in folgendem Sechseck, Fig. 29 und 30, und zieht die punktirte Linien, so erhält man sechs andere, die so groß sind, wie die vorigen, und deren Spitzen alle im Punkte B zusammenlaufen.

Fig. 29.

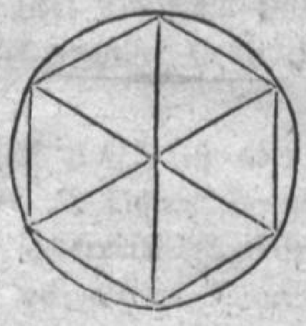
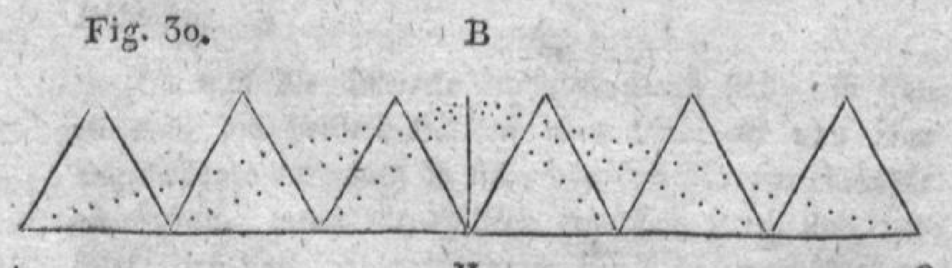


Fig. 30.



Alle diese Dreiecke bilden zusammen ein großes Dreieck, A B C, dessen Inhalt man findet, wenn man seine Grundlinie A C mit der halben Höhe B H multipliciret.

§. 20.

Wenn eine reguläre Figur in Dreiecke zerlegt wird, deren Spitzen alle im Mittelpunkt liegen, so sind alle diese Dreiecke gleichschenklicht, (weil vom Mittelpunkt aus nach jedem Winkelpunkte hin, gleich weit ist), und die beiden Winkel an der Peripherie sind daher in jedem Dreieck einander gleich.

Alle Winkel, die um den Mittelpunkt liegen, betragen zusammen, wie wir eben gesehen haben, vier Rechte.

In einem regulären Sechseck beträgt also jeder Winkel am Mittelpunkt $\frac{4}{6}$ oder $\frac{2}{3}$ eines Rechten. Da nun die beiden am Umfange einander gleich sind, so ist jeder von diesen auch $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels, weil alle drei Winkel eines Dreiecks $\frac{6}{3}$ oder 2 Rechte seyn müssen.

Daher sind in jedem regulären Sechsecke immer alle Dreiecke gleichseitig, weil ihre drei Winkel gleich groß sind, und jede Seite ist dem Radius oder Halbmesser des Kreises gleich, in dem es beschrieben wird.

Man kann daher in jedem Kreise, den Radius sechsmal herumtragen, und es entsteht, wenn man die Durchschnittspunkte zusammenzieht, immer ein reguläres Sechseck, dessen Umfang sich zum Radius verhält, wie 6 zu 1.

Da der Durchmesser eines Kreises doppelt so groß wie sein Halbmesser ist, so verhält sich im Sechseck des Kreises der Durchmesser zum Umfange, wie 1 zu 3.

§. 21.

Je mehr Seiten eine reguläre Figur hat, desto mehr nähert sie sich dem Kreise. Das 12eck kommt ihm schon näher, als das 6eck. Das 24eck kommt ihm noch näher, u. s. w.

Man kann daher einen Kreis als ein reguläres Vieleck ansehen, das unendlich viele Seiten hat, und seinen Umfang und Inhalt auf diese Weise berechnen.

Man bekommt dann, wie in Fig. 25. beim Sechseck, statt der vielen kleinen Dreiecke, in die der Kreis zerlegt worden, ein großes, dessen Grundlinie der Umfang des Kreises und dessen Höhe der Radius ist.

Ein Kreis z. B., dessen Radius 50 Fuß ist, hat einen Umfang von 314 Fuß. Das Dreieck das ihm gleich ist, hat also eine Grundlinie von 314 bei einer Höhe von 50 Fuß. Multipliciret man nun 314 mit der halben Höhe, nemlich mit 25, so findet man den Inhalt des Dreiecks 7850 Quadratfuß, welches denn auch der Inhalt des Kreises ist.

Die Regel, um den Flächeninhalt eines Kreises zu finden, ist demnach folgende: Man multiplicire den Umfang des Kreises mit der Hälfte des Radius.

Oder: welches dasselbe ist, man multiplicire den Umfang des Kreises mit dem vierten Theil des Durchmessers.

§. 22.

Dieses ist die berühmte Aufgabe von der Quadratur des Zirkels, welche, wie man sieht, blos darauf hinausläuft, das Verhältniß zwischen dem Durchmesser des Kreises und seinem Umfange genau zu kennen, weil dann die Berechnung seines Quadrat-Inhalts oder die Quadratur des Zirkels weiter keine Schwierigkeiten hat.

Völlig genau läßt sich dieses nie finden, denn ein Vieleck, welches auch noch so viele Seiten hat, ist immer noch kein Zirkel, obschon es ihm sehr nahe kommt, aber der Unterschied zwischen einem Vieleck und einem Zirkel wird immer kleiner, je weiter man die Rechnung fortsetzt, obschon dieser Unterschied nie völlig aufhören kann, weil genau genommen ein Vieleck nie ein Zirkel ist noch werden kann.

Im gemeinen Leben nimmt man gewöhnlich das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange, wie 1 zu 3 an. Allein dieses Verhältniß würde nur dann genau seyn, wenn der Zirkel ein Sechseck wäre, und man fehlet hiebei immer soviel, um wieviel das Sechseck kleiner als der Zirkel ist. Genauer ist das Verhältniß, wie 7 zu 22, aber etwas zu groß.

Noch genauer ists, wie 1000 zu 3141.

Noch genauer ists, wie 100000 zu 314159.

Indeß ist es selten, daß man diese Zahlen gebraucht, weil sie zu groß sind. Der Bequemlichkeit wegen, nimmt man daher beim gewöhnlichen Rechnen das Verhältniß, wie 100 zu 314, wobei man sich bei einem Zirkel von 100 Fuß Durchmesser nur um $1\frac{1}{2}$ Zoll irrt.

Uebrigens ist das Suchen an der Quadratur des Zirkels eine vergebene Mühe, weil sich das Verhältniß zwischen Durchmesser und Umfang doch nicht ganz genau finden läßt, und weil durch die Bemühungen der alten Rechner es bereits viel genauer bekannt ist, als man es je gebraucht.

Wenn z. B. das obige Verhältniß noch nicht genau genug wäre, so könnte man folgendes nehmen. Der Durchmesser verhält sich zum Umfange wie 1 zu 3,14159265358g. Dieses Verhältniß ist so genau, daß man bei einem Kreise, dessen Durchmesser so groß, wie der Durchmesser der Erdkugel ist, bei der Berechnung des Flächeninhalts noch nicht um die Dicke eines Haars fehlte.

Von dem Ausmessen der Körper.

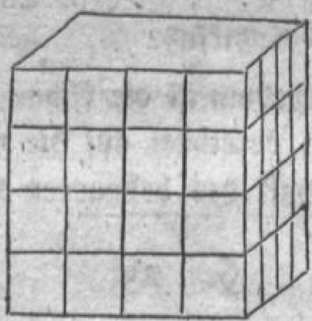
§. 23.

Ein Würfel ist ein Körper, der so lang und breit als hoch ist. Er hat 6 Flächen. Jede dieser Flächen ist ein gleichseitiges Viereck, mit vier rechten Winkeln.

Die Oberfläche eines Würfels läßt sich leicht berechnen, sobald man den Flächeninhalt einer Seite kennt. Man hat diesen nur mit sechs zu multipliciren.

Um den Körperinhalt eines Würfels zu berechnen, muß man seine Länge, Breite und Höhe mit einander multipliciren. Ein Würfel, wie z. B. folgender von 4 Fuß Seite, hat 64 Cubikfuß Inhalt und 96 Quadratfuß Fläche.

Fig. 31.



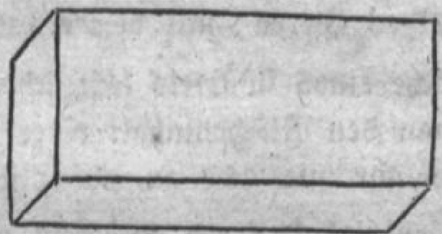
Bei der Berechnung des Cubik-Inhalts eines Körpers, bedient man sich immer eines Würfels der als Einheit angenommen wird. Dieser kann klein oder groß seyn, je nachdem es die Umstände fodern. Z. B. Es kann eine Cubiklinie, ein Cubikzoll, ein Cubikfuß, eine Cubikelle oder eine Cubikruthe seyn.

Ein Cubikzoll hat 1000 Cubiklinien, ein Cubikfuß hat 1000 Cubikzoll u. s. w.

§. 24.

Ein Parallelepipedum ist ein Körper, dessen zwei und zwei gegeneinander überstehende Seiten parallel sind, wie z. B. folgender.

Fig. 32.



Dieses hat auch sechs Flächen, und man findet seinen Cubikinhalt, wenn man seine Länge mit der Breite und Höhe multiplicirt. Es soll z. B. 12 Fuß lang, 7 breit und 5 hoch seyn, so ist sein Cubikinhalt 12 mal 7 mal 5 gleich 420 Cubikfuß.

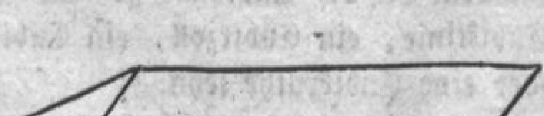
Das Parallelepipedum ist die Figur, welche ein Balken hat, und man berechnet auf die vorhin angeführte Weise den Cubikinhalt des behauenen Bauholzes.

§. 25.

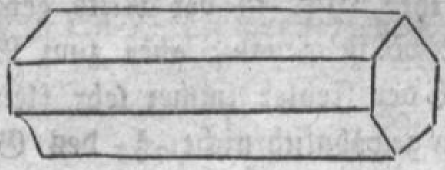
Ein dreiseitiges Prisma ist ein Körper wie folgender:

Seine Grundflächen sind einander parallel. Seine Seiten sind Vierecke.

Fig. 33.



Ein sechsseitiges, ist ein Körper wie folgender:

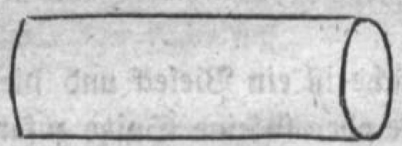
Fig. 34.


Um den Cubikinhalt eines Prisma zu finden, berechnet man seine Grundfläche und multiplicirt diese mit der Höhe.

So viel Seiten die Grundfläche hat, so viel Seiten hat auch das Prisma, und es wird um so runder, je mehr Seiten es hat.

§. 26.

Ein Prisma von unendlich vielen Seiten heißt ein Cylinder oder eine Walze. Seine Grundfläche sind Kreise und einander parallel.

Fig. 35.


Man findet seinen Inhalt, wenn man die Grundfläche mit seiner Höhe multipliciret.

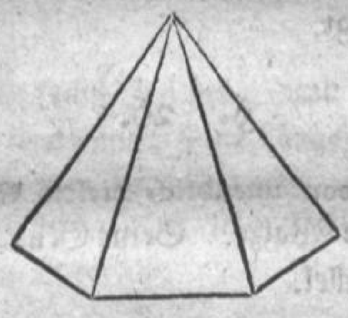
Der Durchmesser eines Cylinders sey 100 Zoll, dann ist sein Umfang 314 Zoll, und seine Grundfläche 314mal 25 gleich 7850 Quadratzoll. Wenn seine Länge nun 200 Zoll ist, so ist sein Inhalt 1570000 Cubikzoll, oder 1570 Cubikfuß. Da 1000 Cubikzoll 1 Cubikfuß machen.

Der Cubikinhalt des runden Bauholzes wird als ein Cylinder berechnet, wenn nemlich die Stücke so kurz sind, daß sie an beiden Enden gleich dick sind. — Sind sie an der einen Seite ein wenig dicker, als an der andern, so wird ihre Dicke in der Mitte gemessen; dieses ist zwar nicht völlig genau, aber zum Gebrauche hinlänglich, weil der Fehler immer sehr klein ist, und bey Baumstämmen gewöhnlich nicht $\frac{1}{300}$ des Ganzen beträgt.

§. 27.

Eine Pyramide oder eine Spitzsäule ist ein Körper wie folgender.

Fig. 36.



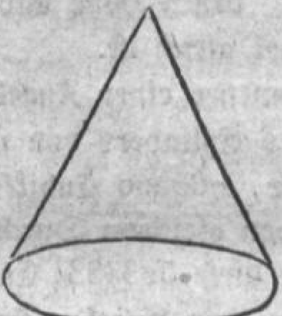
Die Grundfläche ist ein Vieleck und die Seitenflächen sind Dreiecke, die oben in eine Spitze zusammenlaufen.

Man findet den Cubikinhalt einer Pyramide, wann man die Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe multipliciret. Die Grundfläche einer Pyramide sey z. B. 50 Quadratfuß, und ihre Höhe 18, so ist ihr Inhalt 50 . 6 = 300 Cubikfuß.

§. 28.

Ein Kegel ist ein Körper wie folgender:

Fig. 37.

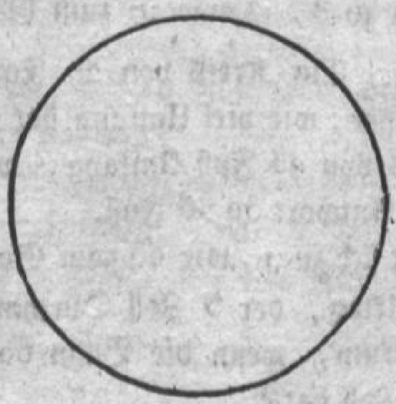


Seine Grundfläche ist ein Kreis. Die Seitenfläche endigt sich oben in eine Spitze. Man kann den Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten ansehen, und eben so seinen Innhalt berechnen. Man multipliciret nemlich die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe. Es sey seine Grundfläche 50 Quadratfuß, seine Höhe 18, so ist sein Inhalt 300 Cubikfuß.

§. 29.

Eine Kugel ist ein Körper wie folgender:

Fig. 38.



Alle Punkte auf ihrer Oberfläche sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

Der Cubikinhalt einer Kugel ist $\frac{2}{3}$ von dem Cubikinhalt eines Cylinders, dessen Höhe und Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist.

Wenn der Durchmesser einer Kugel 100 Fuß ist, so wird der Inhalt eines Cylinders von 100 Fuß Höhe und 100 Fuß Durchmesser, 785000 Cubikfuß seyn. Da der Inhalt einer Kugel von gleichem Durchmesser $\frac{2}{3}$ des vom Cylinder ist, so hätte diese $523333\frac{1}{3}$ Cubikfuß Inhalt.

Um die Oberfläche einer Kugel zu finden, so sucht man zuerst den Cubikinhalt, und dividirt diesen mit dem 6ten Theil ihres Durchmessers.

Bei obiger Kugel z. B. ist der Durchmesser 100 und der sechste Theil desselben $16\frac{2}{3}$. Hiermit die Zahl $523333\frac{1}{3}$ dividirt, gibt für die Oberfläche einer Kugel von 100 Fuß Durchmesser 31400 Quadratfuß.

§. 29.

Aufgaben über die Kreisrechnungen. 1) Ein Kreis, der 17 Fuß Durchmesser hat, wie viel Umfang hat der? Antwort 53,38 Fuß.

1 verhält sich zu 3, 14 wie 17 zum Gesuchten.

2. Aufgabe. Ein Kreis von 27 Fuß und 3 Decimalzoll Durchmesser, wie viel Umfang hat der?

3) Ein Kreis von 95 Fuß Umfang, wie viel Durchmesser hat der? Antwort 30,25 Fuß.

3, 14 verhält sich zu 1, wie 95 zum Gesuchten.

4) Ein Kegelklotz, der 5 Zoll Durchmesser hat, wie oft läuft der herum, wenn die Bahn 60 Fuß lang ist, und der Fuß 10 Zoll hat?

5) Wenn ein Kutschenrad 5 Fuß hoch ist, wie oft läuft es auf einem Wege von 10 Stunden herum, wenn man die Stunde zu 15,000 Fuß rechnet?

6) Wenn das vordere Kutschenrad nur 3 Fuß hoch ist, wie oft läuft es auf demselben Wege herum?

7) Wenn der Durchmesser eines Kreises 17 Fuß ist, wie groß ist dann seine Fläche?

Sein Umfang ist dann 53,38 Fuß, und dieses mit $4\frac{1}{4}$ als den 4ten Theil des Durchmessers multipliciret, giebt 226,86 Quadratfuß Fläche.

8) Wenn ein Kreis 273 Fuß Durchmesser hat, wie groß ist dann seine Fläche?

9) Wenn eine Karre, deren Achse 6 Fuß lang ist, im Kreise herumgeht, so daß der innre Kreis 100 Fuß Durchmesser hat, wie viel Fläche hat dann a) der innere Kreis, b) der äussere Kreis und c) die Karrenspur?

10) Wenn eine runde Kirche 500 Fuß im Umfange hat, und eine gleichseitig viereckige 600 Fuß, in welche gehen die meisten Menschen?

§. 30.

Aufgaben über die Berechnung der Körper.

1) Ein Würfel, der 10 Fuß lang, breit und hoch ist, wie viel Cubikfuß hat der?

2) Wie viel Oberflächen haben seine 6 Seiten?

3) Ein Parallelepidum, das 5 Fuß lang, 4 Fuß breit und 3 Fuß hoch ist, wie viel Fuß Inhalt hat dasselbe?

4) Ein Balken der 20 Fuß lang, 2 Fuß breit und 1 Fuß hoch ist, wie viel Cubikfuß hat derselbe?

5) Ein achtkantiges Prisma, dessen Höhe 17 Fuß und seine Grundfläche 13 Quadratfuß ist, wie viel Cubikfuß Inhalt hat dasselbe?

6) Ein Cylinder, dessen Höhe 17 Fuß und seine Grundfläche 13 Quadratfuß ist, wie viel Cubikfuß Inhalt hat derselbe?

7) Ein Cylinder, dessen Höhe 37 Fuß und sein Durchmesser 6 Fuß ist, wie viel Cubikfuß hat derselbe?

8) Ein Säule die oben beinahe so dick ist, wie unten, und die in der Mitte 3 Fuß Durchmesser hat, soll eine Höhe von 20 Fuß haben. — Wie groß ist dann ihr Umfang, ferner ihre Oberfläche in Quadratfuß, (ohne die Grundflächen) und wie viel Cubikschuh Inhalt hat sie?

Um den Flächeninhalt eines Cylinders zu finden, braucht man nur die Höhe mit seinem Umfange zu multipliciren.

9) Wie viel Cubikfuß hat eine Tanne, die 20 Fuß lang, an einem Ende 3 Fuß 1 Zoll, und am andern 3 Fuß weniger 1 Zoll Durchmesser hat?

10) Wie viel Cubikfuß Inhalt hat eine Thurmspitze, die 100 Fuß hoch ist, und deren Grundfläche 400 Quadratfuß hat? Da die Thurmspitzen gewöhnlich Pyramiden sind, so findet man ihren Cubikinhalt, wenn man ihre Grundflächen mit dem dritten Theile ihrer Höhe multipliciret.

11) Wie viel Cubikfuß Inhalt hat ein Kegel, dessen Grundfläche 400 Quadratfuß und dessen Höhe 100 Fuß ist?

12) Wie viel Cubikinhalt hat eine Kugel von 20 Fuß Durchmesser? Ein Cylinder von 20 Fuß Durchmesser und Höhe würde 62,8 Fuß Umfang und 314 Quadratfuß

Grundfläche haben. Wenn man diese mit $\frac{2}{3}$ seiner Höhe oder $13\frac{1}{3}$ Fuß multipliciret, gibt $4186\frac{2}{3}$ Cubikfuß, welches der Inhalt der Kugel ist.

13) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel von 20 Fuß Durchmesser? Da man die Oberfläche einer Kugel findet, wenn man ihren Cubikinhalt mit dem sechsten Theil ihres Durchmessers, also mit $3\frac{1}{3}$ dividirt, so ist die Oberfläche 1256 Quadratfuß.

14) Eine Halbkugel, die 9 Fuß Durchmesser hat, soll mit Blech gedeckt werden, es ist die Frage, wie viel Quadratfuß Blech gehen auf die Halbkugel?
