Erstes Kapitel.

Anfangsgründe der Rechenkunst.

§. 1.

Alles Rechnen geschieht entweder mit Zahlen oder mit Buchstaben. Hier handeln wir nur vom Rechnen mit Zahlen, das Rechnen mit Buchstaben kommt in den folgenden Theilen dieses Werkes vor.

Alle Zahlen haben ihren Ursprung vom Zählen. Die Menschen zählten anfangs über die Finger, so wie dieses auch noch diejenigen thun, welche nicht viel vom Rechnen verstehen. So oft man nun bis auf zehn gezählt hatte, so mußte man einen Absatz machen und von vorne wieder anfangen, weil der Mensch nur 10 Finger hat. Dieses ist die erste Entstehung unsers Decimalsystems, und die einzige Ursache, warum wir, so oft wir im Zählen bis auf 10 gekommen sind, einen Absatz machen.

§. 2.

Die einfachen Zahlzeichen sind so wie ihre Aussprache so bekannt, daß es fast überflüßig ist sie hierhin zu setzen.

Eins	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben	acht	neun.
1	2	3	4	5	6	7	8	9.
.	..	..	..	...	...	...	...	...
		.	..	..	...	.	..	...
						...	...	...

Man nennt diese Zahlzeichen auch wohl deutsche, zum Unterschiede von den römischen, welche aus dem lateinischen Alphabete genommen sind.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XX.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20

XXX.	XL.	L.	C.	D.	M.
30	40	50	100	500	1000.

Die deutschen Zahlzeichen stammen ursprünglich aus Indien her, und sind in ihrem Gebrauche weit bequemer als die römischen.

§. 3.

Wir befolgen beim Schreiben der Zahlen dieselbe Ordnung, welche man beim Zählen über die Finger befolgt.

Hat man bis 10 gezählt, so macht man einen Absatz und fängt von vorne an. Hat man wieder bis 10 gezählt, so macht man den zweiten Absatz, und sofort bis man zehn dieser Absätze hat, wo man dann einen großen Absatz macht, der Hundert heißt. Zehn von diesen heißen Tausend u. s. w.

Eben so schreibt man die Zahlen in Absätzen, und setzt in die erste: die Einer, in die zweite: die Zehner, in die dritte: die Hunderte, in die vierte: die Tausende, u. s. w.

Die Morgenländer schreiben bekanntlich von der rechten Hand gegen die linke, und dieses ist auch die Ursache, warum wir unsere Zahlen rückwärts von der rechten Hand gegen die linke schreiben, da wir sie von den Morgenländern erhalten haben.

Die kleinsten Stellen stehen demnach in jeder Zahl nach der rechten Hand, und die größten nach der linken. Z. B. 325. dreihundert, zwanzig und fünf. Hier steht die 5 in der Classe der Einer, die 2 in der der Zehner, und die 3 in der der Hunderten. Es wäre daher unrecht, wenn man diese Zahl so wollte aussprechen: fünfhundert, zwanzig, drei.

Ich muß hier noch bemerken, daß wir beim Schreiben der Zahlen, so wie beim Zählen, die kleinsten zuerst nehmen, beim Aussprechen hingegen nennen wir die höchsten Stellen zuerst. Man sagt z. B. nicht fünf, zwanzig und dreihundert, sondern dreihundert fünf und zwanzig.

Von zehn bis hundert pflegt man indeß doch die kleinste Stelle gewöhnlich zuerst auszusprechen. So sagt man z. B. fünf und achtzig öfter als achtzig fünf.

§. 4.

So wie man beim Zählen und Schreiben sehr drauf achten muß, ob eine Zahl in die Classe der Einer, Zehner oder Hunderte gehört, so muß man dieses auch beim Aussprechen der Zahlen beobachten, und man bezeichnet deswegen jede Stelle die fehlt mit einer Null, um sich weniger zu irren. Es ist z. B. ein großer Unterschied, ob man die Zahl 907 als sieben und neunzig, oder als neunhundert sieben läßt. Und doch besteht, dieser Unterschied blos darin, daß man genau zusieht in welcher Classe die 9 steht, ob in der Classe der Zehner oder der Hunderten. Hierin fehlen Anfänger gewöhnlich am meisten, sie schreiben oft sechs und neunzig auf folgende Weise 69, so daß die 6 vorne steht, und die Zahl dann neun und sechszig heißt.

Wenn man das Bisherige gefaßt hat, so hat das Aussprechen der Zahlen weiter keine Schwierigkeit. Z. B. folgende Zahl 5693 heißt fünftausend, sechshundert, neunzig, drei, weil die 3 in der Stelle der Einer, die 9 in der Stelle der Zehner, die 6 in der Stelle der Hunderter und die 5 in der Tausenden steht.

Aufgabe. Wie werden folgende Zahlen ausgesprochen? 3965? 9356? 6935? 3569? 3695?

Alle diese Zahlen haben dieselbe Ziffern, aber sie stehen in andern Classen; so steht die 9 in der ersten in der Stelle der Hunderter, in der zweiten in der Stelle der Tausenden u. s. w. und man sieht wie wichtig es ist, genau auf die Stelle zu merken, auf welcher die Ziffer steht.

An solchen und ähnlichen Beispielen muß sich der Anfänger üben, damit er die gehörige Fertigkeit bekomme, alle Zahlen nach dem Decimalsystem zu schreiben und auszusprechen.

§. 5.

Kommen große Zahlen vor, so werden diese, um sie bequemer aussprechen zu können, vorher mit kleinen Strichen zu drei und drei abgetheilt. Z. B. 4,038,679,521. Man fängt hiebei wieder hinten an, und das erste Comma kommt bei die zehntausende, das zweite bei die Millionen, und das dritte bei die tausend Millionen zu stehen.

Die Zahl kann nun ohne Mühe ausgesprochen werden. Sie heißt 4038 Millionen, 679 tausend und 521.

Aufgabe. Wie werden folgende Zahlen ausgesprochen:

8,765,493,283? 23,896,348,967? 973,892,456,345?

1 Anmerkung. Man sieht aus dem Bisherigen, mit welcher Leichtigkeit man große Zahlen nach dem Decimalsystem schreiben und aussprechen kann. — Die Landleute rechnen häufig beim Kaufen und Verkaufen mit Kreuzen, Fünfern und Strichen, (statt 27 schreiben sie XXVII.) Aber wie lange dauert es, ehe man auf diese Weise eine Zahl geschrieben hat, die größer als tausend ist.

2 Anmerk. Man kann jede Zahl als eine Reihe Ziffern ansehen, wovon die folgende immer zehnmal mehr Werth hat als die vorige, z. B. 5555, so daß wenn die erste in die Stelle der Einer ist, so ist die zweite zehnmal mehr, die dritte hundertmal mehr, die vierte tausendmal mehr, und hierin liegt die eigentliche Ursache, daß wir große Zahlen mit so wenig Ziffern schreiben können. Um sich ein sinnliches Bild zu machen, wie groß die vorige Zahl ist, so mache man auf die Tafel vier Reihen Punkte, wo in der ersten fünf, in der zweiten fünfzig, in der dritten fünfhundert, und in der vierten fünftausend sind, und man hat die Zahl 5555 in Punkten ausgedruckt.

3 Anmerk. Noch größere Zahlen werden durch Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. ausgedrückt. Eine Million Millionen ist eine Billion, eine Million Billionen ist eine Trillion, und eine Million Trillionen ist eine Quadrillion.

Um das Aussprechen so ganz großer Zahlen zu erleichtern, so schreibt man von sechs zu sechs Stellen den Anfangsbuchstaben der Million, Billion oder Trillion dabei, z. B.

T. B. M.
782,384,546,897,368,934,568.

Diese Zahl wird nun so ausgesprochen:

782 Trillionen 384,546 Billionen 897,368 Millionen und 934,568.

Aufgabe. Wie wird folgende Zahl ausgesprochen
1832,976,543,783,267,945,681.

Das Zusammenzählen. (Addiren.)

§. 6.

Hat man nur kleine Zahlen, die blos aus Einern bestehen, so macht das Zusammenzählen keine Schwierigkeiten. Z. B. 4 und 3 macht 7. Hat man aber größere Zahlen, die aus Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. bestehen, so muß man sie so übereinander schreiben, daß immer Einer über Einer, Zehner über Zehner u. s. w. zu stehen kommen. Z. B.

243	Wollte man so schreiben, 243
12	12
41	41
296	

so würde dieses beim Zusammenzählen eine falsche Summe geben, weil man immer die Zahlen zusammenzählt, welche übereinander stehen, und man addirte dann Zehner und Einer, welche keine gleichartigen Größen sind.

Denn man kann nur immer Gleichartiges zu Gleichartigem addiren. 5 Thaler und 4 Thaler machen 9. Aber man kann nicht sagen 5 Thaler und 4 Groschen machen 9.

Aufgabe. Es sollen folgende Zahlen addirt werden: 231 und 38210. Ferner 10341 und 27.

§. 7.

Man fängt beim Addiren hinten an, und schreibt unter jede Classe die Summe, welche die zusammengezählte Ziffern geben. Wird die Summe mit zwei Ziffern geschrieben, so setzt man die eine, welche das Zehnfache ist, unter die folgende Classe. Es soll addirt werden z. B.

$$\begin{array}{r} 3827 \\ 4598 \\ \hline 15 \\ 11 \\ 13 \\ 7 \end{array}$$

Da man die Zahl so nicht aussprechen kann, so muß man sie noch einmal addiren, wo sie dann 8425 macht. Um das doppelte Addiren zu vermeiden, schreibt man lieber die zweite Ziffer klein unter die folgende Classe, und addirt sie gleich mit dieser. Z. B.

$$\begin{array}{r} 3827 \\ 4598 \\ \scriptstyle 111 \\ \hline 8425 \end{array}$$

Hier werden die 15, 12 und 14 so geschrieben, daß die zweite Ziffer gleich unter die ihr zugehörige Stelle kommt, und mit ihr addirt wird.

Um dieses Verfahren noch mehr abzukürzen, so behält man die zweite Ziffer im Sinn, ohne daß man sie dahin schreibt, und addirt sie in Gedanken gleich mit zu der folgenden Classe.

Das Zeichen der Addition ist ein aufrechtstehendes Kreuz +. Man setzt es zwischen die Zahlen, welche addirt werden sollen, und spricht es im Lesen mit dem Wörtchen plus aus. Z. B. $4 + 5$ ist gleich 9.

Sind zwei Zahlen gleich, so macht man zwei Strichlein, als das Zeichen der Gleichheit zwischen sie. Z. B. $3 + 2 = 5$ heißt drei plus zwei gleich fünf.

Aufgabe. Es sollen folgende Zahlen zu einander addirt werden: 420 + 387 + 219 + 3876 + 41 + 893 + 3.

Anmerk. Wenn man eine große Reihe von Zahlen zusammenzuziehen hat, so wird dieses sehr erleichtert, wenn man sie in mehrere kleine zerschneidet, und nachher die Summe dieser Stücke addirt. Man braucht dann nachher, wenn man sich irgendwo geirrt hat, nicht wieder von vorne anzufangen.

Das Abziehen. (Subtrahiren.)

§. 8.

Hat man kleine Zahlen von einander abzuziehen, so hat dieses keine Schwierigkeit. Z. B. 7 von 9 bleibt 2. Sind aber die Zahlen größer, so schreibt man sie beide so untereinander, daß Einer, Zehner und Hunderter gehörig übereinander stehen, und zieht dann eine Ziffer nach der andern ab. Es soll z. B.

von	7438	oder 12 von	437
abgezogen werden	4216		12
Rest =	3222	Rest	425

Hiebei werden die Einer von den Einern, die Zehner von den Zehnern abgezogen, also Gleichartiges von Gleichartigem. Wollte man das Beispiel so schreiben;

$$\begin{array}{r} 437 \\ 12 \\ \hline 317 \end{array}$$

so würde dieses falsch seyn, weil hiebei die Einer von den Zehnern, und die Zehner von den Hunderten abgezogen werden. Es wäre dasselbe, als wenn man 3 Thaler an 7 Pferden abziehen wollte.

Anmerk. Das Zeichen der Subtraction ist ein Strich — oder auch wohl ein Strich mit zwei Punkten $\div$, und er wird minus oder weniger gelesen. Z. B. $9 - 7 = 2$. Neun weniger sieben gleich 2.

§. 9.

Man zieht zwar immer die kleinere Zahl von der größern ab. Allein es kann kommen, daß man eine größere Ziffer von einer kleinern abziehen soll. Es soll z. B. 9 von 43 abgezogen werden, so schreibt man dieses auf die gewöhnliche Weise:

$$\begin{array}{r} 43 \\ -9 \\ \hline \text{Rest } 34 \end{array}$$

Da 3 Einer zu klein sind, um 9 davon abzuziehen, so lehnt man 10 Einer aus der folgenden Stelle. Da man nur 13 Einer hat, so kann man von diesen ohne Schwierigkeit 9 abziehen, da aber von der 4 ein Zehner gelehnt ist, so ist diese nur noch 3.

Man hätte die Zahl 43 auch so schreiben können: $30 + 13$, weil man dieselbe Zahl, ohne daß sie ihren Werth vermindert, auf unzählig verschiedene Weise schreiben kann, wobei man immer diejenige wählt, welche beim Rechnen am bequemsten ist.

Aufgabe. Es soll 2876 von 9234 abgezogen werden.

$$\begin{array}{r} \text{ııı} \\ 9234 \\ -2876 \\ \hline \text{Rest } 6358 \end{array}$$

Hier müssen Zehner, Hunderte und Tausender gelehnt werden, und die 3 wird zur 2, die 2 zur 1, und die 9 zu 8. Um sich nicht zu irren, pflegen Anfänger die 1, welche sie lehnen, oben über die Zahl zu schreiben.

Kommen Nullen vor, wie im folgenden Beispiele, so verfährt man auf dieselbe Weise.

1 1 1		
3004	dieses heißt	7 von 14 = 7
1657		5 von 9 = 4
		6 von 9 = 3
Rest 1347		1 von 2 = 1

Als 7 von 4 sollte abgezogen werden, so mußte ein Zehner gelehnt werden. Da keiner da war, so mußte man vorher einen Hunderten lehnen. Da auch dieser fehlte, so mußte man in der Stelle der Tausender lehnen.

Anmerk. Da die Subtraktion gerade das Entgegengesetzte der Addition ist, so dient immer einer der anderen zur Probe. Hat man zwei Zahlen addirt, und zieht die kleinste von der Summe ab, so muß die größte übrig bleiben.

Hat man zwei Zahlen von einander abgezogen und addirt die kleinste zum Rest, so muß die größere wieder heraus kommen. Z. B. 434

$$\begin{array}{r} 434 \\ +\,123 \\ \hline 557 \\ -\,123 \\ \hline 434 \\ +\,123 \\ \hline 557 \end{array}$$

Das Vervielfältigen (Multipliciren).

§. 10.

Nimmt man eine Zahl ein oder mehreremal, so hat man ihr Vielfaches. Z. B. drei fünfmal genommen, macht 15. — Dieses heißt multipliciren. Die beiden Zahlen, welche multiplicirt werden, heißen die Faktoren, und das Vielfache, welches herauskommt, heißt das Produkt. So waren hier die Zahlen 3 und 5 die Faktoren, und 15 war das Produkt dieser beiden Faktoren.

Für alle Einer findet man die Produkte in dem Multiplicationstäflein, oder dem Einmal Eins. — Man muß dieses sorgfältig auswendig lernen, so daß man es vor= und rückwärts, und in jeder beliebigen Ordnung hersagen und anwenden kann.

Man nennt dieses Multiplicationstäflein auch wohl das Pytagoräische Täflein, nach dem berühmten Weltweisen Pytagoras, der es zuerst erfunden.

Das Einmal Eins,
oder
Produktentafel von 1 bis 10.

1 mal 1 ist 1	4 mal 1 ist 4	7 mal 1 ist 7
1 — 2 — 2	4 — 2 — 8	7 — 2 — 14
1 — 3 — 3	4 — 3 — 12	7 — 3 — 21
1 — 4 — 4	4 — 4 — 16	7 — 4 — 28
1 — 5 — 5	4 — 5 — 20	7 — 5 — 35
1 — 6 — 6	4 — 6 — 24	7 — 6 — 42
1 — 7 — 7	4 — 7 — 28	7 — 7 — 49
1 — 8 — 8	4 — 8 — 32	7 — 8 — 56
1 — 9 — 9	4 — 9 — 36	7 — 9 — 63
1 — 10 — 10	4 — 10 — 40	7 — 10 — 70
2 mal 1 — 2	5 mal 1 ist 5	8 mal 1 ist 8
2 — 2 — 4	5 — 2 — 10	8 — 2 — 16
2 — 3 — 6	5 — 3 — 15	8 — 3 — 24
2 — 4 — 8	5 — 4 — 20	8 — 4 — 32
2 — 5 — 10	5 — 5 — 25	8 — 5 — 40
2 — 6 — 12	5 — 6 — 30	8 — 6 — 48
2 — 7 — 14	5 — 7 — 35	8 — 7 — 56
2 — 8 — 16	5 — 8 — 40	8 — 8 — 64
2 — 9 — 18	5 — 9 — 45	8 — 9 — 72
2 — 10 — 20	5 — 10 — 50	8 — 10 — 80
3 mal 1 — 3	6 mal 1 ist 6	9 mal 1 ist 9
3 — 2 — 6	6 — 2 — 12	9 — 2 — 18
3 — 3 — 9	6 — 3 — 18	9 — 3 — 27
3 — 4 — 12	6 — 4 — 24	9 — 4 — 36
3 — 5 — 15	6 — 5 — 30	9 — 5 — 45
3 — 6 — 18	6 — 6 — 36	9 — 6 — 54
3 — 7 — 21	6 — 7 — 42	9 — 7 — 63
3 — 8 — 24	6 — 8 — 48	9 — 8 — 72
3 — 9 — 27	6 — 9 — 54	9 — 9 — 81
3 — 10 — 30	6 — 10 — 60	9 — 10 — 90

Anmerkung. Man nennt dieses das kleine Ein mal Eins. Es geht von 1 bis 10. Sonst lernte man wohl das große Ein mal Eins auswendig, welches alle Pro=

dukte der Zahlen 1 bis 100 enthielt. Allein dieses war eine überflüßige Anstrengung des Gedächtnisses. Weil man viel leichter die Produkte des großen aus dem kleinen herleiten kann, als sie im Gedächtniß behalten.

§. 11.

Bestehen die Zahlen, welche vervielfältigt werden sollen, aus mehreren Ziffern, so schreibt man sie auf die gewöhnliche Weise untereinander, und verrichtet dann das Multipliciren theilweise.

Soll z. B. 232 mit 3 multiplicirt werden, so geschieht dieses auf folgende Weise:

232	d. h.	3 mal 2 ist 6
3		3 mal 3 ist 9
696		3 mal 2 ist 6

Da man selbst die größten Zahlen in einzelne Ziffern zerlegen kann, und da man für diese aus dem Ein mal Eins die Produkte weiß, so sieht man, daß das Multipliciren weiter keine Schwierigkeit hat, weil man große Zahlen nicht auf einmal, sondern theilweise multiplicirt.

§. 12.

Im vorigen Beispiele wurde das Produkt zweier Faktoren nur mit einer Ziffer geschrieben. Wird es mit zweien geschrieben, so kommt die zweite so wie beim Addiren unter die folgende Stelle, und wird zum folgenden Produkt gezählt. Es soll z. B. 564 mit 5 multiplicirt werden:

564	d. h.	5 mal 4 ist 20
$_{3\,2}5$		5 mal 6 ist 30 + 2 = 32
2820		5 mal 5 ist 25 + 3 = 28

Der Kürze halber pflegt man aber diese Zahlen nicht immer drüber zu schreiben, sondern gleich in Gedanken dazu zu addiren.

§. 13.

Bestehen beide Faktoren aus mehrern Ziffern, so schreibt man sie auf folgende Weise. Es soll z. B. 382 mit 47 multiplicirt werden, und 482 mit 432.

```
  382            482
   47            432
 ----          ------
 2674            964
1528            1446
-----          1928
17954          ------
               208224
```

Man begreift leicht, warum die Zahlen beim Multipliciren schief untereinander geschrieben werden, wenn man sich erinnert, daß im letzten Beispiele eigentlich mit 400 mit 30 und mit 2 ist multiplicirt worden, und da man nachher beim Zusammenzählen nur Gleichartiges zu Gleichartigem addiren kann, so muß man die einzelnen Produkte so schreiben, daß die Einer, Zehner und Hunderter gehörig untereinander zu stehen kommen.

Nullen bezeichnen nur leere Stellen; sie zeigen an, daß eine gewisse Classe von Zahlen fehlt. Wenn daher beim Multipliciren welche vorkommen, so werden sie auf folgende Weise geschrieben:

```
  20       137       408
  20       300       309
 ---     -----     ------
 400     41100      3672
                  12240
                  ------
                  126072
```

Im letzten Beispiele bezeichnet die Null, daß keine Zehner da sind, mit denen könnte multiplicirt werden.

Aufgabe. Man multiplicire 83403 mit 8381, und 97623 mit 89831.

§. 14.

Man theilt die Zahlen in einfache und zusammengesetzte. Die einfachen oder Primzahlen sind solche, welche nicht durch die Multiplication zweier andern entstehen. Z. B. 1, 2, 3, 5, 7. 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 . . . . .

Die zusammengesetzten, z. B. 4, 6, 8, 9, 10, 12... sind als Produkte anderer Zahlen anzusehen, aus denen sie durch die Multiplication entstehen. 6 z. B. ist das Produkt aus 2 mal 3. Ferner 9 das Produkt aus 3 mal 3. 12 ist das Produkt aus 2 mal 2 mal 3.

Alle zusammengesetzten Zahlen lassen sich daher wieder in die Primzahlen zerlegen, aus denen sie entstanden sind.

1. Anmerkung. Die große Leichtigkeit, mit der man die Produkte aus großen Faktoren erhält, rührt, wie man leicht sieht, aus der einfachen Einrichtung unsers Decimalsystems her, wobei die folgende Stelle immer das Zehnfache von der vorigen ist. — Ein Volk, welches nicht so einfache Zahlzeichen und eine so zweckmäßige Methode hat, die Zahlen zu schreiben, wird es daher nie weit in der Rechenkunst bringen. Um sich hievon zu überzeugen, versuche man es die Zahl 1838 mit 1838 zu multipliciren, wenn man sie mit römischen Zahlen schreibt. (MDCCCXXXVIII.) Man begreift kaum, wie die alten Völker, welche ihre Zahlzeichen nicht nach dem Decimalsystem schrieben, nur die leichtesten Rechnungen haben machen können.

2. Anmerk. Das Zeichen der Multiplikation ist ein schiefes Kreuz (⋊) oder auch wohl ein bloßer Punkt (.), welchen man zwischen die Zahlen setzt, welche mit einander sollen multiplieirt werden. Z B. 13 . 7 = 91 oder 13 ⋊ 7 = 91 heißt 13 mal 7 gleich 91.

Das Eintheilen oder Dividiren.

§. 15.

Wenn man untersucht, wie oft eine Zahl in der andern enthalten ist, so heißt dieses dividiren.

Die Division ist das Umgekehrte der Multiplication. Jene, die Multiplication, sucht das Vielfache von zwei Zahlen. Diese, die Division, sucht wie oft eine Zahl in der andern enthalten ist.

Man nennt Dividendus die Zahl, welche dividirt werden soll. Divisor oder Theiler aber die Zahl, welche dividirt, und Quotient die, welche anzeigt, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist.

Das, was beim letzten Abziehen übrig bleibt, heißt der Rest.

Z. B. Wenn 72 mit 9 dividirt wird, so geht dieses 8 mal. 72 ist der Dividendus, 9 der Divisor und 8 der Quotient.

Wird 75 mit 9 dividirt, so ist 8 der Quotient, und die 3, welche übrig bleibt, ist der Rest.

Anmerk. Das Zeichen der Division ist ein Doppelpunkt. Soll z. B. 84 mit 4 dividiret werden, so schreibt man dieses so 84 : 4 = 21, d. h. 84 durch 4 dividiret gibt 21. Oder 4 ist 21 mal in 84 enthalten.

§. 16.

Sind die Zahlen klein, die mit einander sollen dividirt werden, so hat dieses gewöhnlich keine Schwierigkeit, da man sie leicht aus dem Ein mal Eins nehmen kann. Z. B. Da man weiß, daß 9 mal 8 = 72 ist, so weiß man auch, daß wenn 9 der Divisor, und 72 der Dividendus ist, jener in diesem 8 mal enthalten ist.

Sind aber die Zahlen größer, so kann man die Division nur theilweise vornehmen, so wie man bei großen Zahlen auch die Multiplication nur theilweise macht.

Es soll z. B. 693 mit 3 dividirt werden, dann sieht man wie oft die 3 in den 6 Hunderter, in den 9 Zehnern, und in den 3 Einern enthalten ist.

3 : 693 (231.

§. 17.

Ist die erste Ziffer des Dividends kleiner als der Divisor, so muß man die zweite hinzunehmen.

5 : 405 (81   6 : 480 (80

Bleibt ein Rest, indem man den Quotient mit dem Divisor multiplicirt, und das Product vom Dividend abzieht, so schreibt man dieses drunter, und nimmt ihn zur folgenden Ziffer.

Z. B. 5 : 425 (85	6 : 498 (83
40:	48:
25	18
25	18

Dieses heißt: 5 in 42 achtmal. Die 8 setzt man hinter den Strich. Ferner: 5 mal 8 ist 40, diese schreibt man unter den Dividend, so daß Hunderte und Zehner gehörig unter einander kommen. 40 von 42 läßt 2. hiezu die 5 herunter gezogen, macht 25, und da 5 in 25 fünfmal enthalten ist, so ist der Quotient 85.

§. 18.

Besteht der Divisor aus mehreren Ziffern, so wird die Division schon schwieriger, weil man jetzt das Multiplicationstäflein verläßt. Es bleibt dann nichts übrig als den Quotient durch Versuche zu finden, indem man zusieht, wie oft die höchste Ziffer des Divisors in der höchsten des Dividends enthalten ist. Es soll z. B. 845 mit 21 dividirt werden: 21 : 845 (40

84:

5

so sieht man, daß 2 in 8 viermal enthalten ist, und daß wahrscheinlich 4 der erste Theil des Quotienten seyn wird. Hätte man aber 23 zum Divisor gehabt, so hätte dieses mit 4 multiplicirt, 92 gegeben, also mehr als 84. Man hätte dann eine Zahl zum Quotient nehmen müssen, die um 1 kleiner wäre, also 3.

23 : 845 (36
69:
155
138
17

Es wäre dann 36 der Quotient, und 17 der Rest.

Kommen beim fortgesetzten Dividiren Stücke vor, in denen der Divisor nicht ganz enthalten ist, so setzt man in den Quotient eine Null.

Z. B. 23 : 7083 (307
69::
183
161
22

Weil in den 18 Zehnern der Divisor 23 nicht völlig enthalten ist, so steht im Quotient in der Stelle der Zehner eine Null. Aber in den 183 Einern ist der Divisor 23 siebenmal enthalten, wobei noch 22 übrig bleiben.

Endigt sich der Divisor in Nullen, so läßt man diese der Bequemlichkeit wegen weg, und schneidet im Dividend eben so viele Nullen weg.

Z. B. 400 : 8328 (20 mal und 328 Rest.
8 : : :
———
328.

Aufgabe. Es soll 3807 durch 73 dividirt werden. Ferner: 98765 durch 731. Ferner: 345678 durch 8765 u. s. w.

Anmerk. 1. Alle diese Sätze begreift man leicht und ohne Beweis, sobald man sich daran erinnert, daß man jede Zahl auf verschiedene Weise schreiben kann, z. B. die vorige war gleich 8000 und 328, und daß, wenn man die einzelnen Theile einer Zahl richtig dividirt hat, die ganze Zahl nothwendig auch richtig dividirt ist.

Anmerk. 2. So wie die Addition der Subtraktion zur Probe diente, — so dient auch die Multiplication der Division zur Probe. Wenn man nämlich diese und den Quotient mit einander multiplicirt, und zum Produkte den Rest addiret, so kommt der Dividendus wieder heraus.

§. 19.

Ein Divisor, der zwei Zahlen ohne Rest dividirt, ist das gemeinschaftliche Maas dieser Zahlen. Z. B. 6 dividirt 18 und 42 ohne Rest. Da nun 3 und 7 Primzahlen sind, so ist 6 das gemeinschaftliche Maas von 18 und 42.

Man findet zu zwei Zahlen das größte gemeinschaftliche Maas, wenn man die kleinste in die größte dividirt, und wenn ein Rest bleibt, diesen in den ersten Divisor. Man setzt dieses so lange fort, bis entweder 1 oder gar kein Rest bleibt.

Z. B. 18 : 42 (2
36
6 : 18 (3

Geht aber der Rest nicht auf, so haben die Zahlen kein gemeinschaftliches Maas, und werden incommensurable genennt.

Z. B. 17 : 45 (2
34
11 : 17 (1
11
6 : 11 (1
6
5 : 6 (1
5
1

Der Rest ist hier Eins, welche, da sie weder multiplicirt noch dividirt, kein gemeinschaftliches Maas ist.

§. 20.

Die vier Rechnungsarten, welche wir bis jetzt erklärt haben, heißen die vier Species in ganzen Zahlen. — Sie sind: 1) Zusammenzählen, 2) Abziehen, 3) Vervielfältigen, und 4) Theilen. Auf ihnen und auf den Lehren von den Verhältnissen beruhet die ganze Rechenkunst.

Diese vier Species beruhen hingegen ganz und allein auf unserer Art die Zahlen zu schreiben und auszusprechen, und wer daher das Decimalsystem, welches bei unsern Zahlen zum Grunde liegt, gut gefaßt hat, der wird leicht jedes Verfahren bei ihrer Anwendung einsehen, und die Gründe davon anzugeben wissen. — Will man die Gründe ausführlich entwickeln, so wird die Erklärung weitläuftig, und durch die Weitläuftigkeit für den Anfänger dunkel.

Daß wir 10 Finger haben, ist die erste Veranlassung gewesen bis auf 10 zu zählen, und dieses macht den Grund unsers Decimalsystems aus. — Wer zuerst den sinnreichen und fruchtbaren Gedanken gehabt hat, die Zahlen so zu schreiben, daß ihre Stelle ihnen einen zehnfachen, hundertfachen, tausendfachen Werth gab, ist unbekannt, so wie wir von vielen der wichtigsten Erfindungen gar nicht wissen wer sie gemacht hat. Nur allein hiedurch ist es möglich geworden, daß wir große Zahlen mit Leichtigkeit nicht allein schreiben und aussprechen können, sondern auch durch alle vier Species hindurch verwandelen. — Wie wollte man es machen, wenn man große Zahlen mit römischen Ziffern geschrieben, in einander multipliciren oder dividiren wollte? —

Weil wir aber unsere Zahlen classenweise schreiben, so kann man jede Classe einzeln behandeln, und wenn man an den Zehnern ist, so thun, als wenn keine Tausende da wären, — bis denn auch endlich an diese die Reihe kommt.

Die vier Species sind an sich so leicht, daß bei kleinen Zahlen selbst der Wilde sie mit bloßem Zu- und Abzählen zu machen versteht. Soll er 4 und 3 Cokosnüsse zusammenzählen, so thut er dieses, indem er sie zusammen legt. Soll er 8 von 12 abziehen, so thut er dieses wieder durch Abzählen. Soll er 4 mit 3 multipliciren, so legt er dreimal 4 Cokosnüsse beisammen, soll er 24 durch 8 dividiren, so zählt er Haufen von 8 ab, und sieht, daß er dieser Haufen 3 bekommt.

Allein über die kleine Zahlen hinaus erstrecken sich seine Geschicklichkeiten im Rechnen nicht, und es bleibt unmöglich, große Zahlen zu behandeln, ohne das Decimalsystem, durch das man den Zahlzeichen einen doppelten Werth gibt, — einen, der ihre Figur, und den zweiten, der ihre Classe bestimmt.

Von den Brüchen.

§. 21.

Eine Zahl, die kleiner als Eins ist, heißt ein Bruch. Z. B. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{6}{10}$ u. s. w. Ein Viertel Apfel ist kleiner als der ganze. Eine Siebentel Elle kleiner als eine ganze.

Anmerk. Die obere Zahl heißt der Zähler des Bruchs, die unter dem Strich der Nenner. Hat man z. B. den Bruch $\frac{3}{4}$ Apfel, so nennt der Nenner die Anzahl der Theile in die der Apfel getheilt ist, nämlich in 4, und der Zähler zählt die Anzahl der Theile, und sagt wie viel deren da sind: nämlich hier 3.

§. 22.

Sind bei einem Bruche Zähler und Nenner gleich groß, so ist der Werth des Bruches = 1. Z. B. $\frac{4}{4}$ Apfel, $\frac{8}{8}$ Elle, $\frac{10}{10}$ Fuß. Es ist dann eigentlich kein Bruch mehr, sondern die Zahl 1 wie ein Bruch geschrieben, und $\frac{4}{4}$ $\frac{7}{7}$ $\frac{10}{10}$ sind immer dasselbe, nemlich 1 Ganzes.

Ist der Zähler aber größer als der Nenner, z. B. $\frac{5}{4}$ oder $\frac{9}{8}$, so heißt der Bruch ein unächter oder Bastard-Bruch. Aber eigentlich ist dieses eine ganze Zahl und ein Bruch, nemlich $1\frac{1}{4}$ und $1\frac{1}{8}$, die wie ein Bruch geschrieben sind.

Diese sogenannte unächte Brüche sind beim Rechnen oft sehr bequem, und es ist leicht, jede Zahl in einen zu verwandeln. Z. B. $2 = \frac{20}{10}$, $3 = \frac{30}{10}$, $3 = \frac{27}{9} = \frac{24}{8} = \frac{12}{4}$. — Man braucht sie nur mit dem Nenner zu multipliciren.

Eben so leicht ist es eine ganze Zahl die noch einen ächten Bruch bei sich hat, z. B. $3\frac{7}{8}$ in einen unächten zu verwandeln. Diese gibt $\frac{31}{8}$, nemlich 3 Ganze sind $\frac{24}{8}$, und hiezu noch $\frac{7}{8}$ macht $\frac{31}{8}$.

Die Regel hiebei ist folgende: Man multiplicirt die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs, (hier 3×8) und addirt den Zähler hinzu. $(24 + 7 = 31)$ und schreibt den Nenner als Divisor darunter. $\frac{31}{8}$.

Anmerk. Man sieht leicht ein, daß man jedes Divisions-Exempel als einen solchen Bruch schreiben kann, z. B. $324 : 4 = \frac{324}{4} = 81$. Der Quotient 81 zeigt an, daß der Nenner 4 im Zähler 324 81 mal enthalten ist. Oder $325 : 4 = \frac{325}{4} = 81\frac{1}{4}$. Dieses heißt: der Nenner ist 81 mal im Zähler enthalten und noch $\frac{1}{4}$ mal. Den Rest $\frac{1}{4}$ schreibt man als Bruch an die ganze Zahl.

§. 23.

Der Werth eines Bruchs ist um so größer, je mehr er sich der Einheit nähert, z. B. $\frac{9}{10}$ ist größer als $\frac{4}{5}$.

Je größer die Zähler und Nenner sind, und je kleiner ihr Unterschied, desto größer ist der Werth des Bruchs. Denn in je mehr Theile die Einheit getheilt ist, desto kleiner werden sie, und je mehr man von diesen Theilen nimmt, desto weniger fehlen bis zur vollen Einheit, wo also der Bruch am größten ist, z. B. bei $\frac{99}{100}$ fehlt nur $\frac{1}{100}$ zur vollen Einheit.

Ein Bruch hingegen ist um so kleiner, je größer der Nenner und je kleiner der Zähler ist, d. h. in je mehr Theile die Einheit ist getheilt worden, und je weniger man von diesen Theilen nimmt.

So ist z. B. $\frac{3}{123456}$ kleiner als $\frac{4}{1000}$.

Wird bei einem Bruch der Zähler größer, und der Nenner bleibt, so wächst der Werth des Bruchs, so ist z. B. $\frac{7}{8}$ mehr als $\frac{3}{8}$, weil bei einer gleichen Größe der Theile mehrere genommen werden. Wird aber der Nenner größer und der Zähler bleibt, so wird der Werth des Bruches kleiner, z. B. $\frac{3}{8}$ ist kleiner als $\frac{3}{4}$, weil die Theile, die man im Zähler nimmt, kleiner sind.

Multiplicirt man den Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl, so wird der Werth des Bruchs um so viel mal größer. Z. B. $\frac{3}{8}$ mit 4 multiplicirt, gibt $\frac{12}{8}$. Multiplicirt man den Nenner mit einer ganzen Zahl, so wird er um so viel kleiner. Z. B. $\frac{3}{8}$ mit 4 im Nenner multiplicirt, gibt $\frac{3}{32}$.

Die Gründe sind die vorigen. Aus denselben Gründen wird der Werth eines Bruchs, dessen Zähler man mit einer ganzen Zahl dividirt, um so vielmal kleiner. Z. B. $\frac{12}{8}$ dividirt mit 4, gibt $\frac{3}{8}$.

Dividirt man aber den Nenner mit einer ganzen Zahl, so wird er um so viel mal größer. Z. B. $\frac{3}{32}$ dividirt im Nenner mit 4, gibt $\frac{3}{8}$, welches 4 mal größer ist als $\frac{3}{32}$. In diesem Falle wird die Anzahl der Theile, in die die Einheit getheilt worden, kleiner, und folglich diese Theile größer.

Der Werth eines Bruchs bleibt derselbe, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplirt. Eben so bleibt sein Werth derselbe, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl dividirt.

Wird z. B. der Bruch $\frac{3}{8}$ in Zähler und Nenner mit 2, 3, 4, 5 multiplicirt, so erhält man $\frac{6}{16}$, $\frac{9}{24}$, $\frac{12}{32}$, $\frac{15}{40}$.

Wird $\frac{60}{120}$ mit 5, 4, 3, 2 in Zähler und Nenner dividirt, so erhält man $\frac{12}{24}$, $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{40}$, $\frac{30}{60}$.

Es ist hiebei leicht einzusehen, warum der Werth des Bruchs derselbe bleibt, weil in demselben Verhältnisse, in dem die Theile im Nenner größer oder kleiner werden, man ihrer im Zähler weniger oder mehr nimmt.

Man kann demnach jeden Bruch auf unzählige Weise ausdrücken, ohne daß sein Werth geändert wird. So ist z. B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ u. s. w.

Dieses heißt das Verwandeln der Brüche, und dient bei den Bruchrechnungen zu einer großen Bequemlichkeit. Soll z. B. $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{2}$ zu einander addirt werden, so geht dieses nicht, weil die beiden Größen ungleichartig sind, und man nur Gleichartiges zu einander addiren kann. Nimmt man aber statt $\frac{1}{2}$ $\frac{4}{8}$, so ist das Hinzufügen von $\frac{1}{8}$ leicht.

Will man von zwei oder mehrern Brüchen, die verschiedene Nenner haben, den gemeinschaftlichen wissen, so multiplicirt man die Nenner mit einander, wo dann das Produkt der gemeinschaftliche Nenner ist. So ist von $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{5}$ der gemeinschaftliche Nenner $3 \times 4 \times 5 = 60$. Und $\frac{2}{3}$ ist $= \frac{40}{60}$, $\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$ und $\frac{3}{5} = \frac{36}{60}$.

Oft kann man für mehrere Brüche einen gemeinschaftlichen Nenner finden, der kleiner und folglich bequemer im Gebrauch ist, als der, welcher aus der Multiplication aller Nenner entsteht. — Die allgemeinen Regeln, die man hiefür hat, gründen sich auf den oben angeführten Satz, vom gemeinschaftlichen Maas zweier Zahlen. Da dieses indeß weitläuftiger ist, als wenn man einen allgemeinen Nenner durch Multiplication findet, so begnügt man sich entweder mit diesem Nenner, oder man sieht, ob man durch ein paar Versuche nicht schnell einen kleinern finden kann; wobei man sich an Regeln, wie etwa folgende, erinnert. Für alle geraden Zahlen ist 2 das gemeinschaftliche Maas, — für sehr viele ungerade ist es 3, — für alle die am Ende 0 oder 5 haben, ist es 5 u. s. w.

Das Zusammenziehen der Brüche. (Addiren.)

§. 24.

Wenn die Brüche gleiche Nenner haben, so hat dieses keine Schwierigkeit, weil es leicht ist gleichartige Größen zusammenzuzählen, z. B. $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{8}$ gibt $\frac{10}{8}$.

Sind aber die Nenner verschieden, so müssen die Brüche, ehe man sie addiren kann, auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht werden. Es sollen $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{4}$ addirt werden, so ist 12 der gemeinschaftliche Nenner. Dieser Nenner ist viermal größer als 3. Wenn man daher $\frac{2}{3}$ im Zähler und Nenner mit 4 multiplicirt, so erhält man $\frac{8}{12}$, welches dem Bruch $\frac{2}{3}$, wie wir eben gesehen haben, gleich ist. Ferner ist der gemeinschaftliche Nenner dreimal größer als der Nenner des Bruchs $\frac{1}{4}$. Multiplicirt man diesen in Zähler und Nenner mit 3, so erhält man $\frac{8}{12}$. Die beiden Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{4}$ sind also den beiden $\frac{8}{12}$ und $\frac{3}{12}$ gleich, und die Summe von diesen beiden ist $\frac{11}{12}$.

§. 25.

Sind der Brüche mehrere, so ist die Sache schwieriger, und sie lassen sich dann nicht mehr so leicht weg im Kopf überrechnen. Wenn z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{5}{6}$ sollen addirt werden, so ist der gemeinschaftliche Nenner $2 . 3 . 5 . 6 = 180$. Man sieht aber leicht, daß in 30 auch alle Nenner aufgehen, und da dieser kleiner, und folglich bequemer ist, so nimmt man diesen statt 180 zum gemeinschaftlichen Nenner, und schreibt die Brüche auf folgende Weise.

	30	Man sagt nemlich	
$\frac{1}{2}$	$15 - \frac{15}{30}$	2 in 30	15 mal also $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$
$\frac{1}{3}$	$10 - \frac{10}{30}$	3 in 30	10 mal also $\frac{1}{3} = \frac{10}{30}$
$\frac{2}{5}$	$6 - \frac{12}{30}$	5 in 30	6 mal also $\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$
$\frac{5}{6}$	$5 - \frac{25}{30}$	6 in 30	5 mal also $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$
	Summa $\frac{62}{30} = 2\frac{2}{30}$.		

Sobald man auf diese Weise lauter Brüche von gleichen Nennern erhalten hat, so hat die Addition weiter keine Schwierigkeiten.

1. Anmerk. Man hätte der Kürze wegen die gemeinschaftlichen Nenner 30 unter jedem Bruche weglassen können, da er schon einmal oben an stand. Folgendes Beispiel wird zeigen, wie man die Brüche auf die kürzeste Weise addiren kann. Der gemeinschaftliche Nenner ist 36.

	36		
$\frac{2}{3}$	12 — 24	die 24 bedeutet	$\frac{24}{36}$
$\frac{3}{4}$	9 — 27	die 27 —	$\frac{27}{36}$
$\frac{2}{6}$	6 — 12	die 12 —	$\frac{12}{36}$
$\frac{1}{18}$	2 — 2	die 2 —	$\frac{2}{36}$
Summa $1\frac{29}{36}$	$36 : 65 \; (1\frac{29}{36}$ $\frac{36}{29}$		

2. Anmerk. Den gemeinschaftlichen Nenner findet man immer, wenn man alle Nenner in einander multipliciret. $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 18 = 1296$. Dieses wäre der gemeinschaftliche Nenner gewesen. Indeß da 6 und 3 Faktoren von 18 sind, so wußte man auch, daß der Nenner für 18 auch für diese passen würde. Nun ist 2 das gemeinschaftliche Maas für 4 und 18, also war 2 mal 18 der gemeinschaftliche Nenner für $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{6}$ und $\frac{1}{18}$.

3. Anmerk. Das Addiren der Brüche zu ganzen Zahlen oder ganze Zahlen die Brüche bei sich haben zu einander, hat, wie man aus folgendem sieht, gar keine Schwierigkeit.

	36
$12\frac{2}{3}$	12 — 24
$7\frac{3}{4}$	9 — 27
$11\frac{2}{6}$	6 — 12
$9\frac{1}{18}$	2 — 2
1	36 : 65 ($1\frac{29}{36}$
$40\frac{29}{36}$	$\frac{36}{29}$

Aufgabe. Man addire $9\frac{3}{7}$, $8\frac{2}{3}$, $11\frac{1}{2}$ und $7\frac{1}{5}$ zusammen.

Ferner $112\frac{13}{14}$, $117\frac{14}{15}$ und $3\frac{17}{18}$.

Das Abziehen der Brüche. (Subtrahiren.)

§. 26.

Sind die Nenner von zwei Brüchen dieselben, so hat das Abziehen keine Schwierigkeit. Da man nur die Zähler von einander abzuziehen braucht. Es soll von $\frac{7}{8}$ $\frac{3}{8}$ abgezogen werden, so bleibt $\frac{4}{8}$ übrig.

Sind die Nenner verschieden, so bringt man vorher beide Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner, und zieht sie dann ab. Es soll z. B. von $\frac{7}{8}$ $\frac{2}{3}$ abgezogen werden:

$$\begin{array}{r|l} & \quad 40 \\ \hline \frac{7}{8} & 5 - \frac{35}{40} \\ \div \frac{3}{5} & 8 - \frac{24}{40} \\ \hline \text{Rest } \frac{11}{40} & \end{array}$$

Soll von einer ganzen Zahl ein Bruch abgezogen werden, z. B. $\frac{2}{3}$ von 6, so muß man vorher der Zahl folgende Form geben: $5\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$.

Die Vervielfältigung mit Brüchen. (Multiplication.)

§. 27.

Wenn eine ganze Zahl mit einem Bruche soll multiplicirt werden, so heißt das: man soll die Zahl so oft vervielfältigen, als der Bruch andeuten soll. Z. B. 6 soll durch $\frac{2}{3}$ vervielfacht werden, so ist dieses so viel, als 6 zwei Drittelmal zu nehmen. Oder 6 in 3 Theile zu theilen, und hievon 2 zu nehmen. Nun ist der dritte Theil von 6 = 2 also zwei Drittel sind 4 . oder $\frac{2 \cdot 6}{3}$.

Hieraus fließt die Regel: Man multiplicirt die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruchs, und dividirt das Produkt mit dem Nenner.

Aufgaben. Es soll 14 mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden. $\frac{14 \cdot 3}{4} = 10\frac{1}{2}$. Ferner $18 \cdot \frac{4}{5} = \frac{18 \cdot 4}{5} = \frac{72}{5} = 14\frac{2}{5}$.

Anmerk. Oft können die Anfänger nicht gut begreifen, warum bei einer Multiplication mit einem Bruche, das Produkt kleiner wird, da sie aus den ganzen Zahlen gewohnt sind, daß das Produkt immer größer war, als der Multiplikandus.

Aber die Multiplication ist keine Vermehrung sondern eine Vervielfachung. Vervielfältige ich eine Zahl mit 3, so bekomme ich das Dreifache. Vervielfältige ich sie mit zwei, so bekomme ich das Zweifache, — mit 1 das Einfache, und mit $\frac{2}{3}$ das Zweidrittelfache, und da $\frac{2}{3}$ kleiner als 1 ist, so ist es auch kleiner als das Einfache, und das Product ist kleiner als der Multiplicandus.

In allen den Fällen, wo der Multiplicator kleiner als Eins ist, also ein Bruch, ist das Vervielfachen kein Vermehren. Nur wenn er größer ist als 1 ist das Vervielfachen ein Vermehren.

Gewöhnlich kommt diese irri e Vorstellung bei Anfängern daher, daß man ihnen die Multiplication aus der Addition herleitet. Dieses ist irrig, denn beide Rechnungsarten sind in ihren Grundbegriffen wesentlich von einander verschieden, obschon sie auf den ersten Blick eine anscheinende Aehnlichkeit haben.

§. 28.

Soll ein Bruch mit einem andern multiplicirt werden, z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{8}$, so heißt dieses: man soll $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ mal nehmen, oder man soll von $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ nehmen.

Dieses heißt mit andern Worten: Man soll die Zahl $\frac{3}{4}$ in 8 Theile theilen, und hievon 5 nehmen. Der 8te Theil von $\frac{3}{4}$ aber ist $\frac{3}{4.8} = \frac{3}{32}$, denn da von $\frac{1}{4}$ der achte Theil $\frac{1}{32}$ ist, so ist von $\frac{3}{4}$ der achte Theil dreimal größer, also $\frac{3}{32}$. Nimmt man diese $\frac{3}{32}$ fünfmal, so hat man $\frac{15}{32}$. Also $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$.

Hieraus fließt folgende Regel: Wenn ein Bruch mit dem andern multiplicirt werden soll, so multiplicire man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Der neue Bruch, der dann entsteht, ist das gesuchte Produkt.

§. 29.

Es kommt sehr häufig vor, daß man zwei ganze Zahlen miteinander zu multipliciren hat, die beide Brüche haben. Z. B. $121\frac{2}{3}$ mit $82\frac{3}{4}$.

Hiebei ist die Regel folgende: Man multiplicire erstlich die beiden ganzen Zahlen in einander. Dann die ganze Zahl des Multiplicandus mit dem Bruch des Multiplicators. Ferner den Bruch des Multiplicandus mit der ganzen Zahl des Multiplicators, und endlich noch beide Brüche miteinander.

Beispiel:

$$\begin{array}{r|l}
121\frac{2}{3} & \\
82\frac{3}{4} & \\
\hline
242 & \\
968 & 12 \\
\cline{2-2}
90\frac{3}{4} & 3 - 9 \\
54\frac{2}{3} & 4 - 8 \\
\frac{6}{12} & 1 - 6 \\
\cline{2-2}
\widehat{1} & 12 : 23 \; (1\frac{11}{12} \\
\hline
\text{Summa } 10067\frac{11}{12} & \quad \frac{12}{11}
\end{array}$$

Da die ganze Auflösung auf dem 27 und 28ten §. beruht, nemlich auf der Multiplication einer ganzen Zahl mit einem Bruch, und auf der eines Bruchs mit einem Bruche, so hat sie weiter keine Schwierigkeit, und man sieht leicht die Richtigkeit des Verfahrens ohne fernern Beweis ein.

Aufgaben. Es soll $113\frac{7}{9}$ mit $12\frac{3}{11}$ multiplicirt werden. Ferner $12\frac{7}{17}$ mit $11\frac{3}{19}$. Ferner $121\frac{7}{13}$ mit $3\frac{77}{103}$.

1. Anmerk. Man muß sich hierbei erinnern, daß es völlig einerlei ist, ob man $\frac{3}{4}$ mit 8 multipliciret, oder 8 mit $\frac{3}{4}$. Eben so erhält man dasselbe Resultat, ob man $\frac{2}{3}$ mit $\frac{5}{6}$ oder $\frac{5}{6}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciret.

2. Anmerk. Man kann auch beide Zahlen mit ihren Brüchen in Bastardbrüche verwandeln, und diese dann der größeren Bequemlichkeit wegen mit einander multipliciren. Ich will obiges Beispiel nehmen: $121\frac{2}{3} = \frac{365}{3}$ und $82\frac{3}{4} = \frac{331}{4}$. Ferner $\frac{365}{3} \cdot \frac{331}{4} = \frac{120815}{12} = 10067\frac{11}{12}$.

Von dem Theilen durch Brüche.
(Division.)

§. 30.

Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, z. B. 12 durch $\frac{3}{4}$, so will man wissen, wie oft $\frac{3}{4}$ in 12 enthalten ist. Da 1 schon zwölfmal in 12 enthalten ist, so wird $\frac{3}{4}$, welches kleiner als 1 ist, noch öfter darin enthalten seyn, und der Quotient wird größer als der Dividendus.

Anmerk. Den Anfängern, welche bloß mit ganzen Zahlen gerechnet haben, pflegt dieses auffallend zu seyn, weil die Division eine Theilung ist. Aber es ist natürlich, daß der Quotient, welcher anzeigt, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist, immer um so größer werden muß je kleiner der Divisor ist, wenn der Dividendus derselbe bleibt. So gehen in einen Scheffel mehr Senfkörner als Erbsen — und mehr Erbsen als Nüsse.

§. 31.

Um also eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren, so verwandelt man sie in einen Bastardbruch, der mit dem Divisor gleichen Nenner hat, und verrichtet die Division ohne Schwierigkeit. Z. B. 12 ist gleich $\frac{48}{4}$. Da nun $\frac{3}{4}$ der Divisor ist, so sieht man leicht, daß dieser 16 mal in $\frac{48}{4}$ enthalten ist, weil 3 in 48 sechszehnmal ist.

Hieraus folgt die Regel. Man kehre den Divisor um, und multiplicire dann mit dem Zähler und dividire mit dem Nenner. Z. B. $12 : \frac{3}{4} = 12 \times \frac{4}{3} = \frac{48}{3} = 16$.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellt nicht allein aus dem Vorigen, sondern auch daraus, daß die Division immer das Umgekehrte von der Multiplication ist.

§. 32.

Soll ein Bruch durch einen andern dividiret werden, so hat das keine Schwierigkeit, wenn beide gleiche Nenner haben. Soll z. B. $\frac{6}{8}$ mit $\frac{2}{8}$ dividiret werden, so sieht man leicht, daß $\frac{2}{8}$ dreimal in $\frac{6}{8}$ enthalten ist.

Haben Dividendus und Divisor verschiedene Nenner, so bringt man sie vorher auf einen gemeinschaftlichen, und dividirt sie dann. Es soll z. B. $\frac{20}{24}$ durch $\frac{1}{3}$ dividirt werden. So ist dieses so viel, als wenn man $\frac{60}{72}$ durch $\frac{24}{72}$ dividiren sollte, da diese beiden Brüche jenen gleich sind. Man sieht daß der letzte $2\frac{1}{2}$ mal in ersterem enthalten ist. —

Kehrte man nach der obigen Regel den Divisor um, so hätte man dasselbe erhalten. $\frac{20}{24} : \frac{1}{3} = \frac{20}{24} \times \frac{3}{1} = \frac{60}{24} = 2\frac{1}{2}$.

§. 33.

Sollen zwei ganze Zahlen mit einander dividirt werden, wovon entweder eine oder beide Brüche haben, so verwandle man sie vorher in Bastardbrüche, kehre dann den Divisor um, und multiplicire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Es soll z. B. $34\frac{2}{3}$ durch $11\frac{1}{5}$ dividirt werden. $34\frac{2}{3} = \frac{104}{3}$ und $11\frac{1}{5} = \frac{56}{5}$. Ferner $\frac{104}{3} \times \frac{5}{56} = \frac{520}{168} = \frac{65}{21}$.

Aufgaben. Es soll $17\frac{3}{7}$ mit $2\frac{1}{5}$ dividirt werden. Ferner $23\frac{1}{9}$ mit $18\frac{33}{35}$.

Anmerk. Es kommen wohl einmal Brüche vor, die einen doppelten Nenner haben. Man multipliciret dann beide Nenner und erhält nun einen, welcher viel bequemer ist. Z. B. $\frac{\frac{1}{3}}{6} = \frac{1}{18}$. Ein drittel sechstel ist gleich ein achtzehntel.

§. 34.

Es kommt zu Zeiten die Aufgabe vor: einen Bruch durch die möglichst kleinsten Zahlen im Nenner und Zähler auszudrücken, ohne seinen Werth zu ändern.

Bekanntlich geschieht dieses dadurch, daß man Zähler und Nenner durch die möglichst größte Zahl dividirt, und es ist dieselbe Aufgabe, die wir eben hatten; das gemeinschaftliche Maas, zweier Zahlen zu finden.

Auflösung.

1) Man dividire den Zähler in den Nenner. Geht dieses auf, so ist der Zähler selbst das größte gemeinschaftliche Maas. Z. B. der Bruch $\frac{16}{64}$ soll auf die kleinsten Zahlen gebracht werden. 16 : 64 (4. Hier ist der Zähler 16 das größte gemeinschaftliche Maas, und der kleinste Ausdruck für diesen Bruch ist $\frac{1}{4}$.

2) Geht dieser nicht im Dividendus auf, so bleibt ein Rest. Wenn dieser Rest nun im Divisor aufgeht, so ist dieser das größte gemeinschaftliche Maas. Z. B. der Bruch $\frac{18}{42}$ soll auf die kleinsten Zahlen gebracht werden.

$$\begin{array}{l} 18 : 42\ (2 \\ \quad\ \ \underline{36} \\ \quad\quad\ 6 : 18\ (3 \\ \quad\quad\quad\ \ 18 \end{array}$$

Hier ist 6 das gemeinschaftliche Maas und der Bruch $= \frac{3}{7}$.

Geht nemlich der Rest im Divisor auf, so ist er, wie man leicht sieht, sein Maas. Aber er wird auch im Dividendus aufgehen, weil der Dividendus erstens aus dem Vielfachen des Divisors, und zweitens aus dem Reste selber besteht.

Hier war z. B. der Rest 6 dreimal im Divisor 18 enthalten, und dieser Divisor wieder zweimal im Dividendus + dem Reste 6, nemlich $2 . 18 + 6 = 42$.

3) Geht der Rest nicht im Divisor auf, so bleibt wieder ein Rest übrig. Nun macht man diesen zum Divisor und den ersten Rest zum Dividendus. Gehen diese beide in einander auf, so ist dieser zweite Rest das größte gemeinschaftliche Maas beider Zahlen. Z. B. der Bruch $\frac{18}{44}$ soll auf die kleinsten Zahlen gebracht werden.

$$\begin{array}{l} 18 : 44 \ (2 \\ \quad\ \ 36 \\ \hline \quad\ \ \ 8 : 18 \ (2 \\ \quad\quad\quad 16 \\ \hline \quad\quad\quad\ 2 : 8 \ (4 \end{array}$$

Hier ist die Zahl 2 das größte gemeinschaftliche Maas für Zähler und Nenner. — Der Beweis wird hiebei wie im vorigen geführt.

Auf diese Weise fährt man fort, bis man endlich im Reste 1 findet; dieses ist ein Zeichen, daß 1 das größte gemeinschaftliche Maas ist, und daß keine Verkleinerung für den Bruch möglich sey.

Aufgabe der Brüche: $\frac{6}{44}$, $\frac{7}{44}$, $\frac{8}{44}$ sollen auf ihre kleinsten Zahlen gebracht werden.

Ferner die Brüche: $\frac{1561}{1573}$ und $\frac{4121}{4301}$.

Anmerk. Daß man auf diesem Wege eine Zahl findet, die beide Zähler und Nenner ohne Rest dividiret, ist aus dem vorigen klar. Daß aber die Zahl auch zugleich die möglichst größte sey, die statt findet, sieht man leicht aus 2 ein. Denn der Dividendus besteht aus dem Vielfachen des Divisors + einmal dem Reste. $(2 . 18) + (1 . 6)$. Da nun der Rest in beiden Theilen des Dividendus aufgehen muß, und da es für den zweiten Theil kein größeres Maas giebt, als der Rest selber (nemlich 6 in 6 einmal), so gibt es auch für die ganze Zahl kein größeres gemeinschaftliches Maas.

Die vier Rechnungsarten mit Decimalbrüchen.

§. 35.

Die Decimalbrüche sind solche, welche im Nenner eine 1 mit einer oder mehrern Nullen haben. Z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{2}{1000}$, $\frac{7}{10000}$ u. s. w.

Sie sind in der Rechnung viel leichter als die anderen Brüche, von denen wir bis jetzt gehandelt haben, weil sie dasselbe Decimalgesetz befolgen, welches bei den ganzen Zahlen statt findet.

Um das Wesen der Decimalbrüche recht einzusehen, muß man sich wieder an folgendes erinnern:

Wenn man eine Zahl, z. B. 783 schreibt, so steht die 7 in der Stelle der Hunderter, die 8 in der Stelle der Zehner, und die 3 in der der Einer. Jede folgende Stelle ist also zehnmal kleiner, als die vorige. Schreibt man nun nach demselben Gesetz hinter die 3 noch eine Ziffer, z. B. 783,5 so muß diese 5 zehnmal kleiner seyn als die vorige, und da die 3 schon in der Stelle der Einer stand, so steht die 5 in der der Zehntel, und die Zahl heißt $783\frac{5}{10}$.

Schreibt man hinter die 5 noch eine Zahl, z. B. 7, so ist diese in einer Stelle, die wieder zehnmal kleiner ist, wie die vorige, also in der der Hundertel, und die Zahl 783,57 heißt $783\frac{5}{10}$ und $\frac{7}{100}$.

Es würde indessen eine unnöthige Weitläuftigkeit machen, die Zahlen auf diese Weise zu schreiben, und da die Decimalbrüche dasselbe Gesetz befolgen, wie die ganzen Zahlen, so schreibt man sie auch auf dieselbe Weise, und setzt da ein Comma hin, wo die ganzen Zahlen und die Brüche sich berühren, hier z. B. zwischen die 3 und 5.

Da die Decimalbrüche dasselbe Gesetz befolgen, wie die ganzen Zahlen, so kann man sie auch gerade auf dieselbe Weise addiren, wie diese.

Das Zusammenzählen der Decimalbrüche. (Addiren).

§. 36.

Man hat hierbei nur darauf zu sehen, daß alle Stellen gehörig unter einander zu stehen kommen, die Zehntel unter die Zehntel, die Hundertel unter die Hundertel u. s. w.

Aufgabe. Es soll addirt werden $121\frac{12}{100}$ $232\frac{8}{10}$ $320\frac{3}{100}$ $11\frac{5}{1000}$ und $210\frac{1}{10}$. So schreibt man diese Brüche auf folgende Weise:

$$\begin{array}{r} 121{,}12 \\ 232{,}8 \\ 320{,}03 \\ 11{,}005 \\ 210{,}1 \\ \hline 895{,}055 \end{array} = 895\tfrac{55}{1000}$$

Weil bei 320 keine Zehntel waren, so blieb die Stelle leer und wurde mit einer Null ausgefüllt. Aus demselben Grunde blieb bei $11\frac{5}{1000}$ die Stelle der Zehntel und der Hundertel leer, weil blos Tausendtel da waren.

Man sieht, daß man beim Uebereinanderschreiben nur darauf zu sehen hat, daß die Comma gehörig in allen Zahlen übereinander stehen, weil dann von selber die Zehntel unter die Zehntel, die Einer unter die Einer kommen u. s. w.

Das Abziehen der Decimalbrüche.

§. 37.

Das Abziehen der Decimalbrüche hat eben so wenig Schwierigkeiten, wie das der ganzen Zahlen, sobald man sie so geschrieben hat, daß Zehntel, Hundertel, Tausendtel, gehörig übereinanderstehen.

Aufgaben. Es soll von $337\frac{7}{10}$, $17\frac{7}{10}$ abgezogen werden.

$$\begin{array}{r} 337,3 \\ 17,7 \\ \hline \text{Rest } 319,6 \end{array}$$

Es soll von $229\frac{3}{100}$, $23\frac{5}{10}$ abgezogen werden.

$$\begin{array}{r} 229,03 \\ 23,5 \\ \hline \text{Rest } 205,53 \end{array}$$

Es soll von 10,0034, 6,384 abgezogen werden.

$$\begin{array}{r} 10,0034 \\ 6,384 \\ \hline \text{Rest } 3,6194 \end{array}$$

Das Vervielfältigen der Decimalbrüche. (Multipliciren).

§. 38.

Nachdem man die Zahlen gehörig unter einander geschrieben hat, so wird die Multiplication wie bei ganzen Zahlen verrichtet. Nur muß man am Ende mit dem Comma so viel Decimalstellen wegstreichen, als die beiden Faktoren zusammen haben. Hat der eine Faktor z. B. 4 und der andere 3 Decimalstellen, so muß man im Produkt 7 Decimalstellen abstreichen.

Aufgabe. Es soll $33\frac{3}{100}$ mit 13,3 multiplicirt werden.

$$\begin{array}{r} 33,03 \\ 13,3 \\ \hline 9909 \\ 9909 \\ 3303 \\ \hline \text{Produkt } 439,299 \end{array}$$

Es soll 12,32 mit 12,05 multiplicirt werden.

$$\begin{array}{r} 12,32 \\ 12,05 \\ \hline 6160 \\ 24640 \\ 1232 \\ \hline \text{Produkt } 148,4560 \end{array}$$

Da die Ziffern in den Decimalbrüchen nach demselben Gesetz geschrieben werden wie in den ganzen Zahlen, so kann man sie natürlich auch auf dieselbe Weise multipliciren.

Auch sieht man die Richtigkeit des Verfahrens leicht ein, im Produkt so viel Decimalstellen abzuschneiden, als die beiden Faktoren zusammengenommen haben, wenn man die Brüche auf gewöhnliche Weise schreibt.

Z. B. $\frac{37}{100} \times \frac{23}{1000} = \frac{851}{100000}$, wobei Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt wird. — Multiplicirt man diese beide Brüche auf die vorige Weise, so erhält man dasselbe Resultat.

$$\begin{array}{r} 0,37 \\ 0,023 \\ \hline 0\,111 \\ 0\,74 \\ 00\,00 \\ \hline 0,00851 = \frac{851}{100,00}. \end{array}$$

1. Anmerk. Man muß bei Decimalbrüchen die leeren Stellen bis ans Comma immer mit Nullen ausfüllen, um sich nicht zu irren. Auch pflegt man gewöhnlich noch in die Stelle der Einer eine Null zu setzen, wenn die Einer fehlen, um den Stand der Comma desto besser bezeichnen zu können.

2. Anmerk. Soll eine Zahl mit 10, 100 oder 1000 multipliciret werden, so braucht man, wenn sie einen Deci-

malbruch bei sich hat, das Comma nur um so viele Stellen zurückzusetzen. Es soll z. B. 37,896 durch 100 multipliciret werden, so ist dieses 3789,6.

Das Theilen mit Decimalbrüchen. (Division).

§. 39.

Hiebei kommen mehrere Fälle vor, die man der größern Deutlichkeit wegen auf folgende Weise unterscheiden kann. Das Dividiren mit Decimalbrüchen geht wie mit ganzen Zahlen, nur muß man auf das Comma achten, wo dieses in den Quotienten zu stehen kommt.

1) Hat blos der Dividendus Decimalstellen, der Divisor aber keine, so bekommt der Quotient so viele als der Dividendus hat. Z. B. 3 : 27,93 (9,31.

2) Hat der Divisor welche, aber der Dividendus keine, so hängt man diesem so viele Nullen an, als jener derselben hat, und der Quotient hat keine Decimalstellen.

Es soll z. B. 70 mit 3,5 dividirt werden:

3,5 : 70,0 (20. Oder : 35 : 700 (20.

Hiedurch wird der Divisor die ganze Zahl 35, und der Dividendus die Zahl 700. Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist von selber klar.

3) Hat der Dividendus mehr Decimalstellen als der Divisor, so bekommt der Quotient so viele als dieser mehr hat.

Z. B. 3,5 : 70,735 (20,21.

Dieses ist aus dem Vorigen klar.

4) Hat der Divisor mehr Decimalstellen als der Dividendus, so gibt man diesem so viel Nullen als ihm Stellen fehlen, und der Quotient hat keine Decimalbrüche.

Z. B. 70,7 soll mit 0,35 dividirt werden:

0,35 : 70,70 (202.

Dieses ist aus Nro. 2. klar

§. 40.

Wenn man bei der Division mit Decimalbrüchen auf Reste stößt, so hängt man diese hinten an den Quotienten.

Es soll z. B. 813,6 durch 454 dividirt werden.

454) 813,6 ($1,7\frac{418}{454}$
454
3596
3178
418

Indeß würde ein solcher Bruch im Gebrauche sehr unbequem seyn; und man drückt ihn deswegen lieber völlig in Decimaltheilen aus, indem man immer Nullen an den Dividendus hängt, und die Division so lange fortsetzt, bis der Bruch entweder aufgeht, oder bis man ihn hinlänglich genau hat.

Z. B. 454 : 813,6 (1,79207
454
3596
3178

An diesen Rest 4180 werden die Nullen angehängt.

4086
940
908
3200
3178
22

Dieser Decimalbruch zeigt nun bis auf ein Hunderttausendtheil genau wie oft der Divisor im Dividendus enthalten sey. — Wäre es nöthig gewesen, so hätte man leicht durch fortgesetztes Anhängen von Nullen ihn auch noch genauer finden können.

Anmerk. Durch das Anhängen von Nullen wird der Werth einer Zahl nicht gemindert, sobald die Stellen der Einer einmal durch das Comma bestimmt ist. Z. B. 8136, ist gleich 8136,00000 und ist gleich 000008136,000. Denn Nullen bedeuten nur leere Stellen, welcher an jeder Seite einer Zahl unendlich viele sind.

Das Verwandeln der gewöhnlichen Brüche in Decimalbrüche.

§. 41.

Aus dem Bisherigen ist die große Bequemlichkeit klar, welche die Decimalbrüche in den Rechnungen vor den gewöhnlichen haben.

Deswegen verwandelt man gerne die gewöhnlichen Brüche in Decimalbrüche. Dieses geschieht auf eine leichte Weise. Man dividirt nemlich den Zähler des Bruchs, den man verwandeln will, durch seinen Nenner.

Es soll z. B. $\frac{7}{8}$ in einen Decimalbruch verwandelt werden, so geschieht dieses auf folgende Weise.

8 : 7,000 (0,875 d. h. $\frac{7}{8}$ ist gleich $\frac{875}{1000}$.

$$\begin{array}{r} 64 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \end{array}$$

Man hängt nemlich so viele Nullen an den Zähler bis entweder kein Rest bei der Division bleibt, oder bis man den Decimalbruch doch so genau hat als man ihn verlangt.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens sieht man leicht auf folgende Weise ein: Es ist aus dem Vorigen bekannt, daß wenn man einen Bruch im Zähler und Nenner mit derselben Zahl dividirt, er seinen Werth nicht mindert. Nun ist aber das vorige Verfahren im Grunde folgendes: $\frac{8 : 7}{8 : 8}$ ($\frac{0,875}{1,000}$, wobei mit derselben Zahl Zähler und Nenner dividirt wird.

Es kann auch der Fall vorkommen, daß man einen Decimalbruch in einen andern verwandeln soll, der einen gegebenen Nenner hat. Z. B. $\frac{875}{1000}$ in einen Bruch, dessen Nenner 24 ist.

Man multiplicirt dann Zähler und Nenner mit der Zahl, welche der künftige Nenner seyn soll. Z. B.

$$\frac{24 \times 875}{24 \times 1000} \left(= \frac{21000}{24000} = \frac{21}{24}.\right.$$

Weil Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt werden, so ändern sich zwar die Ziffer des Bruchs, aber nicht sein Werth. S. §. 23.

§. 42.

Das Verwandeln der Brüche in Decimalbrüche kommt vorzüglich beim Addiren vor, wo es einem das Aufsuchen eines allgemeinen Nenners erspart.

Soll z. B. $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{1}{11}$ zusammen addirt werden, so ist 4620 der allgemeine Nenner, und die Brüche erhalten folgende Form:

$$\frac{924}{4620} \; \frac{1155}{4620} \; \frac{1540}{4620} \; \frac{1980}{4620} \; \frac{420}{4620}$$

Statt sie auf einen allgemeinen Nenner zu bringen, verwandelt man sie in Decimalbrüche, und schreibt sie untereinander.

$$
\begin{array}{r}
0,25 \\
0,2 \\
0,3333 \\
0,4285 \\
0,0909 \\
\hline
1,3027
\end{array}
$$

Hiebei hat man zugleich den Vortheil, daß man in der Summe nun auch gleich einen Decimalbruch hat, mit dem sich bequem fortrechnen läßt.

A u f g a b e. Es sollen die Brüche $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{11}$ und $\frac{1}{13}$ in Decimalbrüche verwandelt, und zu einander addirt werden.

Die vier Rechnungsarten in benannten Zahlen.

§. 43.

Wir haben bis jetzt die Zahlen im Allgemeinen betrachtet, ohne auf die Art der Dinge zu sehen, die sie bezeichnen. — Wird die Art der Dinge genannt, welche sie bezeichnen, z. B. Pfunde, Loth, Quentchen, so heissen sie b e n a n n t e Z a h l e n.

Wenn bei unseren Maaßen und Gewichten durchaus das Decimalsystem zum Grunde läge, so wären die Rechnungsarten i n b e n a n n t e n Zahlen von denen in unbenannten fast in nichts unterschieden, weil sie dann bei ihren Eintheilungen dasselbe Gesetz befolgten, welches wir beim Schreiben unserer Zahlen haben. — Allein 1 Pf. wird nicht in 10, sondern in 32 Loth getheilt — ein Thaler nicht in 10, sondern in 24 Ggroschen, und so gehen alle unsere alten Eintheilungen nach einem anderen Gesetze als unsere Zahlen. — Man muß deswegen immer auf die Art der Eintheilung sehen, sobald man mit

Zahlen rechnet, welche sich auf Münzen, Maaße und Gewichte beziehen.

Bei den neuen französischen Münzen, Maaßen und Gewichten hingegen, bedarf man dieses fast gar nicht, weil alle ihre Nebenabtheilungen nach dem Decimalsystem sind. — So hat z. B. die Ruthe 10 Ellen, die Elle 10 Hand, die Hand 10 Finger, der Finger 10 Linien. So hat das Pfund 10 Unzen, die Unze 10 Gran. So hat der Scheffel 10 Becher, der Becher 10 Maaß, das Maaß 10 Schöbchen.

Das Addiren in benannten Zahlen.

§. 44.

Man schreibt alle Zahlen derselben Art gehörig unter einander, und zieht dann jede Art für sich zusammen.

Z. B.	3 Centner	8 Pfund	28 Loth
	5 =	3 =	17 =
	8 =	4 =	12 =
Summa	16 =	15 =	57 =

Da 57 Loth = 1 ℔ 25 Loth sind, (weil das ℔ 32 Loth hat) so schreibt man lieber das 1 ℔ zu den Pfunden, und läßt hinten bloß die 25 Loth stehen. Wo es dann heißt 16 Centn. 16 Pfund 25 Loth.

Beispiele:	7 Thlr.	18 Ggr.	6 Pfennige
	3 =	17 =	8 =
	11 =	12 =	2 =

Da der Thlr. 24 Ggr. und der Ggr. 12 Pf. hat.

14 Morgen	93 Ruthen	20 Ellen
9 =	20 =	97 =
24 =	14 =	17 =

Weil der Morgen 100 Ruthen und die Ruthe 100 Quadr. Ellen hat.

Das Abziehen in benannten Zahlen.

§. 45.

Man schreibt die Zahlen so übereinander, daß die größere oben kommt, und wenn in einer Stelle, z. B. in den Lothen die untere größer ist als die obere, so borgt man in der obern Stelle 1 dazu, und verrichtet das Abziehen wie gewöhnlich.

34 Centn.	8 Pf.	10 Loth
÷ 3 =	2 =	22 =
31 =	5 =	20 =

Weil von 10 Loth keine 22 können abgezogen werden, so wird 1 ℔ oder 32 Loth geborgt. Dieses macht mit den 10 Loth zusammen 42, von denen ohne Mühe die 22 Loth können abgezogen werden.

Die Multiplication in benannten Zahlen.

§. 46.

Hierbei ist der Multiplicator immer eine unbenannte Zahl.

Aufgabe. Es soll 34 Centn. 2 ℔ und 17 Loth mit 8 multipliciret werden.

Dieses macht 272 Centn. 16 ℔ 136 Loth. Oder da 32 Loth auf 1 ℔ gehen, 272 Centn. 20 ℔ 8 Loth.

Die Division in benannten Zahlen.

§. 47.

Hiebei ist der Divisor eine unbenannte Zahl, und der Dividendus eine benannte, wenn durch die Division die letztere in eine gewisse Anzahl Theile getheilt werden.

Z. B. 24 Centn. 30 ℔. 12 Loth sollen durch 3 dividiret werden, so ist dieses 8 Centn. 10 ℔ 4 Loth.

Soll aber durch die Division gefunden werden, wie oft eine Zahl in der anderen enthalten sey, so sind beide benannte Zahlen. Z. B. wie oft ist 3 ℔ 4 Loth in 30 ℔ 16 Loth enthalten.

In diesem Falle bringt man beide Zahlen auf die kleinste Gattung und dividiret sie dann in einander. 3 ℔ 4 Loth = 100 Loth und 30 ℔ 16 Loth sind 976 Loth. Die erste Zahl ist also in der letzten 9,76 mal enthalten. — Der Quotient ist also eine unbenannte Zahl. Im ersten Falle hingegen, wo der Divisor eine unbenannte Zahl war, war der Quotient eine benannte.

Anmerk. In den vorigen Beispielen ging 3 in 24 Cent. 30 Pf. 12 Loth auf. Wären es 31 Pf. gewesen, so blieb 1 Pf. übrig. Dieses hätte man dann mit 32 zu Loth gemacht, hiezu die 12 addirt, macht 44, und diese dann mit 3 getheilt, gibt $11\frac{1}{3}$. Man sieht hieraus, wie man in solchen Fällen verfährt, wo der Divisor in einer Stelle der benannten Zahl nicht aufgeht.

§. 48.

Indem ich die Lehre von den vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen, in Brüchen und in benannten schließe, kann ich nicht unterlassen noch einmal zu erinnern, daß sie das Fundament der ganzen Rechenkunst ist; — und daß man sie sich daher ganz zu eigen machen muß.

Sie zu fassen ist für den nicht schwer, der das Wahre des Dicimalsystems, welches wir beim Zählen und Schreiben der Zahlen befolgen, wohl begriffen hat.

Dieses ist nicht schwer, wenn man die Entstehung der Dekadik oder des Zählens bis auf 10, bis auf ihren Grund nachforscht. Bloß der Umstand, daß wir 10 Finger haben ist die Veranlassung, daß wir bis auf 10 zählen. Hätten wir 12 Finger, so zählten wir höchstwahrscheinlich bis 12, wo wir dann noch zwei einfache Zahlzeichen (Ziffern) haben müßten, die wir jetzt nicht bedürfen. Uebrigens würde dann das Duodecimalsystem nach denselben Gesetzen gehen, die jetzt das Decimalsystem befolgt. Man zählte dann mit Absätzen von 12 zu 12, statt von 10 zu 10, und 12 solcher Absätze (oder 144) würde einen großen Absatz bilden, der das wäre, was jetzt bei uns die 100 ist, und 12 von diesen oder 1728 wäre dann das, was bei uns die Tausende sind.

Es ist wirklich vor einigen Jahren vorgeschlagen worden, statt bis auf 10 zu zählen, dieses Duodecimalsystem (wo bis auf 12 gezählt wird) einzuführen. Man hielt es für bequemer, weil man dann die Grundzahl mit 2, 3, 4 und 6 theilen könnte ohne einen Bruch zu bekommen, welches man mit 10 nicht kann. — Allein dieser Vortheil wäre auf jeden Fall zu unbedeutend, um eine so unvernünftige Aenderung des Decimalsystems zu machen, welches alle Völker des Erdbodens angenommen haben, da alle 10 Finger haben.

Das Decimalsystem, die Buchstabenschrift und die Buchdruckerei gehören zu den größten und wohlthätigsten Erfindungen, indeß da wir an ihren Besitz gewöhnt sind, so denken wir wenig darüber nach, wie es in der Welt seyn würde, wenn diese Erfindungen, welche die Grundlage aller Cultur sind, nicht wären gemacht worden.

Schreibt man die Zahlen so wie Griechen und Römer sie schrieben, das heißt mit Zahlzeichen, denen die verschiedenen Stellen auf denen sie stehen, keinen zehnfach größern oder geringeren Werth geben, so kann man Rechnungen, wie z. B. die Logarithmen erfordern, gar nicht machen, denn mit der Größe der Zahlen wächst die Menge der Ziffern in einem schnell steigenden Verhältnisse.

Um nur eine Zahl wie z. B. 9,879,398 zu schreiben, hatten die Römer schon 109 Zeichen oder Buchstaben nöthig. Nemlich: IↃↃↃↃↃ CCCCIↃↃↃↃ CCCCIↃↃↃↃ CCCCIↃↃↃↃ CCCCIↃↃↃↃ IↃↃↃↃ CCCIↃↃↃ CCCIↃↃↃ CCCIↃↃↃ IↃↃↃ CCIↃↃ CCIↃↃ IↃↃ CIↃ CIↃ CIↃ CIↃ CCC L XXXX V III.

Hätte die Zahl noch eine 9 mehr gehabt, z. B. 99,879,398, so würden die Römer noch 51 Zeichen mehr gebraucht haben um sich auszudrücken. Denn bei ihnen war D = 500, M oder CIↃ = 1000, CCIↃↃ = 10,000, CCCIↃↃↃ = 100,000 u. s. w.

Also das, was uns jetzt nur ein Zahlzeichen mehr kostet, dazu hätten sie 51 gebraucht. Hätte die Zahl zwei 9 statt einer erhalten, so hätten sie 111 Buchstaben mehr gebraucht. — Auch sieht man, daß Zahlen, welche auf diese Weise geschrieben sind, sich weder bequem mit einander multipliciren noch dividiren lassen. Es würde für die Römer leichter gewesen seyn, eine Heerstraße aus Italien nach Deutschland unter den Alpen hindurch zu brechen, als mit ihren Zahlzeichen nur eine Logarithmische Tabelle zu berechnen.

Von den Quadratzahlen und dem Ausziehen der Quadratwurzeln.

§. 49.

Wenn man eine Zahl mit sich selber multipliciret, so heißt das Produkt, welches man erhält, das Quadrat dieser Zahl, und die Zahl selber heißt die Wurzel. Z. B. 8 . 8 = 64. So ist 64 das Quadrat von der Wurzel 8.

Aufgabe. Ein Land, welches 12 Meilen lang und 12 Meilen breit ist, wie viele Quadratmeilen hat das?

§. 50.

Für alle Wurzeln, die nicht mehr als eine Stelle haben, findet man die Quadrate in folgendem Täfelchen eben so wie man im Ein mal Eins die Produkte aller Zahlen findet, die nicht mehr als eine Stelle haben.

Wurzel	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Quadrat	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

§. 51.

Soll man aus einer Zahl die Wurzel ziehen, so geschieht dieses mit Hülfe dieses Täfelchen, durch eine Art von Division, wobei sich bei jeder Stelle der Devisor ändert.

Um dieses zu begreifen, muß man erst sehen, wie eine Quadratzahl aus ihrer Wurzel durch die Multiplication entsteht, damit man nachher umgekehrt durch die Division aus der Quadratzahl die Wurzel wieder herleiten könne.

Es soll eine Zahl von zwei Stellen, z. B. 13 zum Quadrat erhoben werden.

13	Das Quadrat von 13 ist also 169.
13	Die Wurzel 13 besteht aus zwei Theilen,
9	aus 10 und 3, und das Quadrat 169 besteht
30	aus vier Theilen. Nemlich:
30	
100	
169	

1) Dem Quadrat des zweiten Theils	3 . 3 =	9
2) aus dem Produkt des ersten in den zweiten	3 . 10 =	30
3) aus dem Produkte des zweiten in den ersten	10 . 3 =	30
4) aus dem Quadrat des ersten Theils	10 . 10 =	100
		169

Da Nr. 2 und 3 einander gleich sind, so drückt man diesen Satz noch kürzer auf folgende Weise aus.

Das Quadrat einer zweitheiligen Wurzel besteht:
1) Aus dem Quadrat des ersten Theils,
2) aus dem doppelten Produkt des ersten in der zweiten,
3) aus dem Quadrat des zweiten Theils.

§. 52.

Jede Quadratzahl, deren Wurzel nur 2 Stellen hat, hat selber nicht mehr als 3 oder 4 Stellen.

Denn wenn die Wurzel zwei Stellen hat, so ist sie größer als 10, und kleiner als 100, folglich ihr Quadrat größer als 100, und kleiner als 10000. Jede Zahl aber, die größer als 100, und kleiner als 10000 ist, wird entweder mit 3 oder mit 4 Ziffern geschrieben.

Wenn man also eine Zahl von 3 oder 4 Stellen hat, so weiß man, daß ihre Wurzel zwei Stellen haben wird, und daß diese 1stens aus dem Quadrat der ersten Stelle, 2tens aus dem doppelten Produkte der ersten Stelle in die zweite, und 3tens aus dem Quadrat der zweiten Stelle besteht.

Dieses ist alles, was vorher bekannt ist, ehe man anfängt die Wurzel auszuziehen, welches eine Art von Division ist, bei der beide der Divisor sowohl als der Quotient unbekannt sind, und wovon man blos weiß, daß sie sich einander gleich sind.

Das erste, was man thut, ist, daß man die Zahl in Classen eintheilt, so daß zwei und zwei Ziffern in eine Classe kommen, wobei man hinten anfängt. Besteht sie nur aus 3 Stellen, so kommt in die erste Classe nur eine Ziffer. Z. B. |1|69. Da eine solche Zahl eine zweitheilige Wurzel hat, so sieht man leicht ein, daß man gerade so viele Classen erhält, als die Wurzel Ziffern haben wird.

In der ersten Classe ist nun das Quadrat des ersten Theils die Wurzel, und in der zweiten Classe ist das Quadrat des zweiten Theils, nebst dem doppelten Produkt des ersten in den zweiten.

§. 53.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun leicht, die Wurzel zu finden. Wir wollen wieder das vorige Beispiel nehmen:

In der ersten Stelle ist das Quadrat vom ersten Theil der Wurzel. Da diese Stelle = 100 ist, so ist der erste Theil der Wurzel 10 und der Quotient also auch 10. Nachdem man die zweite Stelle heruntergezogen, so nimmt man den ersten Theil der Wurzel doppelt, (also 20) und dividirt damit in 69. Dieses geht 3 mal. Diese 3 ist der zweite Theil der Wurzel. Das Quadrat vom zweiten Theile ist 9, und das doppelte Produkt des ersten Theils in den zweiten 2 mal 3 mal 10 = 60, und hiezu 9, macht

|1|69| 10
3

1 00
—
0 69

69
—
00

Zweites Beispiel: Man soll die Wurzel aus 441 ziehen.

Die Wurzel des ersten Theils ist 20 und das Quadrat =

|4|41| 20
|4|00| 1
—
41

Den ersten Theil doppelt genommen, gibt 40. Diese 40 in die zweite Classe dividirt, geht 1 mal, also ist 1 der zweite Theil der Wurzel. Das Quadrat des zweiten Theils plus dem doppelten Produkt des ersten in den zweiten ist 1 + (2 . 20) =

41
—
00

Drittes Beispiel: Man soll die Wurzel von 1225 suchen. Da die Zahl nur 4 Stellen hat, so sieht man gleich, daß die Wurzel eine zweitheilige ist.

12	25	(30
9	00	5
3	25	

Die nächste Wurzel von 1200 ist 30 ihr Quadrat = 9|00

Den ersten Theil der Wurzel doppelt genommen, macht 60. Dieses geht in 325 5mal, also ist 5 der zweite Theil der Wurzel.

Das doppelte Produkt des ersten Theils in den zweiten + dem Quadrat des zweiten Theils (30 . 5 = 150 150 . 2 = 300 + 25) ist = 325

00

Anmerk. In dem letzten Beispiele enthält die erste Classe außer dem Quadrat des ersten Theils auch noch einen Theil vom Produkte des ersten Theils der Wurzel in den zweiten. Nachdem aber das Quadrat 900 davon abgezogen war, so blieb das, was zum Produkte gehörte übrig, und kam zur zweiten Classe, mit der es 325 machte.

Aufgaben. Aus folgenden Zahlen sollen die Wurzeln gesucht werden. 1296, 1521 und 1849?

§. 54.

Wenn eine Wurzel 3 Stellen hat, so hat die Quadratzahl 5 oder 6 Stellen. Denn die Wurzel muß größer als 100 seyn und kleiner als 1000, — in allen Zahlen aber, die zwischen 100 und 1000 liegen, ist das Quadrat größer als 10,000 und kleiner als 1,000,000 — und kann daher nicht weniger als 5, und nicht mehr als 6 Stellen haben. Z. B. das Quadrat von 235 ist 55225, die Wurzel hat drei, und die Quadratzahl fünf Stellen.

Soll man aus einer solchen Zahl die Wurzel ziehen, so muß man erst sehen, wie das Quadrat einer dreitheiligen Wurzel entsteht.

Es werde die Zahl 235 zum Quadrat erhoben, und man schreibe sie so, daß alle Stellen einzeln stehen bleiben.

235		Diese Zahl besteht aus 200
235		+ 30
	Nr.	+ 5
25	6	Quadrat des dritten Theils.
150	5	Produkt des zweiten in den dritten.
1000	3	Produkt des ersten in den dritten.
150	5	Produkt des zweiten in den dritten.
900	4	Quadrat des zweiten Theils.
6000	2	Produkt des ersten Theils in den zweiten.
1000	3	Produkt des ersten in den dritten.
6000	2	Produkt des ersten in den zweiten.
40000	1	Quadrat des ersten Theils.
55225		

Die Zahl 55225, die eine Wurzel von 3 Stellen hat, besteht demnach:

1) Aus dem Quadrat der ersten Stelle.
2) Aus dem doppelten Produkt der ersten in die zweite.
3) Aus dem doppelten Produkt der ersten in die dritte.
4) Aus dem Quadrate der zweiten Stelle.
5) Aus dem doppelten Produkte der zweiten in die dritte.
6) Aus dem Quadrat der dritten Stelle.

Nachdem man nun die Zahl gehörig in Classen getheilt hat, so fänge man das Ausziehen der Wurzeln mit der ersten Classe an.

Die nächste Wurzel von 50000 ist 200 und das Quadrat =

Das doppelte Produkt von 200 ist 400.

Dieses in 15225 geht 30mal, also ist der zweite Theil der Wurzel 30.

Das doppelte Produkt des ersten in den zweiten plus dem Quadrat des 2ten Theils ist (200 . 30) . 2 + 900 =

Das doppelte vom ersten und 2ten Theil der Wurzel ist 230 . 2 = 460. Dieses in 2325 dividiret, geht 5mal, also ist der dritte Theil der Wurzel = 5.

Das doppelte Produkt vom 1ten und 2ten Theil in den 3ten plus dem Quadrat des 3ten ist (Nemlich 230 . 2 . 5 = 2300 und hiezu 25)

5	52	25	200
4	00	00	30
1	52	25	5
1	29	00	
	23	25	
	23	25	
	00	00	

1. Anmerk. Ich habe das Ausziehen der Quadratwurzel so gestellt, daß man leicht sieht, daß es in allen Theilen gerade das Umgekehrte der Multiplication ist, und da bedarf es weiter keines Beweises von der Richtigkeit des Verfahrens, weil das eine dem andern völlig gleich ist, blos daß beim Ausziehen der Wurzel die Ordnung umgekehrt ist, denn beim Zusammensetzen der Quadratzahl fängt man mit der niedrigsten, und beim Zerlegen mit der höchsten Stelle an.

Ich finde, daß die Art des Vortrags auch für den Anfänger deutlicher ist, als wenn man alles mit Worten aus einander setzt und beweist. Dieses kann ohne weitläuftig zu werden, nicht geschehen, und die Weitläuftigkeit schadet immer der Klarheit. — Denn hier liegt, wie fast in allen andern Fällen, die Schwierigkeit nicht in dem Begreifen des einzelnen Satzes, sondern in dem

Uebersehen des Weges, den man gegangen hat, um zu diesem Satze zu kommen, und je mehr Worte gemacht werden, desto länger wird der Weg und je schwerer ist er zu übersehen.

In diesen und vielen andern Fällen ist es für jeden gewiß leichter und bequemer, ihn selber zu suchen, als ihn aus der weitläuftigen Beschreibung eines andern kennen zu lernen.

2. Anmerk. Wenn man eine Zahl zum Quadrat erheben will, so bezeichnet man dieses mit einer kleinen 2, die oben neben sie geschrieben wird. Z. B. $4^2 = 16$.

Will man aus einer Zahl die Wurzel ziehen, so setzt man das Wurzelzeichen davor, z. B. $\sqrt{25} = 5$. d. h. die Wurzel aus 25 ist 5.

§. 55.

Ich habe im vorigen Beispiele alle Zahlen hingeschrieben, um desto deutlicher die Entstehung des Quadrats und seine Wiederauflösung in die Wurzel zu zeigen.

Ich will jetzt dasselbe Exempel auf die gewöhnliche Weise hier hinsetzen.

```
         235
         235
     ----------
        1175
        705
       470
    ---------------
       5|52|25 (235
       4|  |
   --------|
    4  1|52|
       1|29|
  -------------
   46   |23|25
        |23|25
   -------------
        |00|00
```

Aufgabe. Man suche aus folgenden Zahlen die Wurzel: 19025, 226576 und 998001.

§. 56.

Jede Wurzel von 4 Stellen hat im Quadrat entweder 7 oder 8 Stellen. — Der Beweis wird wie im vorigen geführt.

Jede Wurzel von 5 Stellen hat im Quadrat 9 oder 10 u. s. w.

Aus diesen Wurzeln entsteht die Quadratzahl auf eine ähnliche Weise wie in §. 53 und 54 bei denen von 2 und 3 Stellen ist gezeigt worden.

Auch geschieht das Wurzelausziehen aus diesen Zahlen auf dieselbe Weise, wie bei den vorigen, und es wäre daher überflüssig, es hier weitläuftig zu beschreiben.

Ich will statt dessen nur ein Beispiel anführen:

Aus der Zahl 98765432 soll die Wurzel gezogen werden. Man sieht gleich, daß diese 4 Stellen haben wird, da die Zahl 8 Stellen hat.

```
            98|76|54|32 (9938
            81|  |  |
        ------   |  |
     18   17|76  |  |
          17|01  |  |
     ------------   |
    198       |75|54|
              |59|49|
    ----------------
    1986      16 05|32
              15 89 44
              --------
                 15 88
```

§. 57.

In dem letzten Beispiele ist 9938 die Wurzel. Aber es ist hier ein Rest geblieben, welcher anzeigt, daß die Wurzel zu klein ist, und daß ausser der ganzen Zahl noch ein Bruch zur Wurzel gehöre. Wie findet man nun diesen?

Auflösung. Man hängt an den Rest immer zwei und zwei Nullen an, und setzt das Ausziehen der Quadratwurzel so lange fort, bis man die Wurzel hinlänglich genau hat.

Ich will den Rest des vorigen Beispiels nehmen.

19876	15	88	00			9938,079
	0	00	00			
198760	15	88	00	00		
	13	91	32	49		
1987614	1	96	67	51	00	
	1	78	88	53	41	
		17	78	97	59	

Die Wurzel ist jetzt bis auf tausend Theile genau. Wollte man sie noch genauer haben, so hätte man noch mehr Nullen an den Rest hängen müssen und das Ausziehen fortsetzen.

Allein völlig genau hätte man sie nie gefunden, denn wenn die Wurzel einer ganzen Zahl nicht genau in ganzen Zahlen enthalten ist, so ist sie auch nicht genau in Brüchen enthalten.

Beweis. Eine Quadratzahl entsteht, wenn ich die Wurzel mit sich selbst multiplicire. Nun besteht aber die Wurzel entweder aus einer ganzen Zahl, oder aus einem Bruche. Ist sie eine ganze Zahl, so ist das Quadrat auch eine ganze Zahl, und zieht man aus dem Quadrate die Wurzel, so erhält man natürlich wieder eine ganze Zahl ohne Bruch.

Ist aber die Wurzel ein Bruch, oder eine Zahl mit einem Bruche, so wird man beim Multipliciren mit sich selbst eine Quadratzahl erhalten, die auch ein Bruch ist, oder einen Bruch bei sich hat. Denn wenn man einen Bruch mit einem Bruche multipliciret, so wird man im

Produkte immer wieder einen Bruch erhalten. Z. B. das Quadrat von 0 34 ist = 0,1156 und das Quadrat 12,3 ist 151,29.

Wenn man also aus diesem die Wurzel zieht, so wird man wieder eine Wurzel mit einem Bruche bekommen.

Es folgt hieraus, daß sobald man beim Ausziehen der Wurzel einen Bruch erhält, die Quadratzahl auch ein Bruch seyn werde, und wenn die Quadratzahl kein Bruch ist, daß dann auch ihre Wurzel kein vollkommner Bruch ist.

§. 58.

Soll aus einem Bruche oder aus einer ganzen Zahl mit einem Bruche die Wurzel ausgezogen werden, so verwandelt man ihn vorher in einen Decimalbruch, wenn es nicht schon einer ist. — Dann theilt man die Zahl rechts und links in Classen, so daß bei das Comma der erste Strich zu stehen kommt, und verfährt dann auf die gewöhnliche Weise.

Es soll aus der Zahl 783,45671 die Wurzel gezogen werden.

```
         7|83|45|67|1  (27,990
         4|  |  |  |
    ------   |  |  |
    4  3 83  |  |  |
       3 29  |  |  |
    ------   |  |  |
   54    54|45  |  |
         49|41  |  |
  ---------------  |
  558     5 04 67  |
          5 03 01  |
  ---------------  |
 5598       1 66 |10|
```

Wenn in die letzte Classe des Decimalbruchs nur eine Zahl zu stehen kommt, so hängt man noch eine Null an, (wodurch bekanntlich der Werth der Zahl nicht geändert wird) um sich beim Abziehen weniger zu irren.

Man sieht hier, daß wenn man die Wurzel genauer wie auf drei Decimalstellen hätte haben wollen, man nur nöthig gehabt hätte, so wie in den vorigen Beispielen, immer Nullen anzuhängen.

Aufgabe. Es soll aus folgenden Zahlen die Wurzel gezogen werden. 384,8273 und 1178,73251.

Anmerk. Das bisherige mag genug seyn, um dem Anfänger eine anschauliche Idee von der Entstehung der Quadratzahlen und dem Ausziehen der Wurzel zu geben. Um sich dieses völlig eigen zu machen, muß er sich fleißig im Ausziehen der Wurzeln üben.

Anfangsgründe der Lehre von den Gleichungen und Verhältnissen.

§. 59.

Jeder Satz, der anzeigt, daß zwei Größen einander gleich sind, heißt eine Gleichung.

Z. B. $3 + 5 = 6 + 2$
oder $3 + 7 = 12 - 2$
oder $4 \times 6 = 8 \times 3$
oder $12 : 3 = 48 : 12$

Alle diese Sätze sind Gleichungen.

Man kann sich auch die Gleichungen unter dem Sinnbilde einer Wage vorstellen, wo in jeder Schaale gleichviel liegt, und also ein vollkommnes Gleichgewicht statt findet.

Wenn man dann zu jeder Seite gleichviel hinzulegt oder addirt, so wird das Gleichgewicht nicht gemindert. Z. B. $3 + 5 + 100 = 6 + 2 + 100$.

Eben so bleibt das Gleichgewicht, wenn man an jeder Seite gleichviel wegnimmt oder subtrahirt. Z. B. $3 + 5 - 4 = 6 + 2 - 4$.

Eben so bleibt das Gleichgewicht, wenn man jede Seite der Gleichung mit derselben Zahl vervielfacht oder multipliciret. Z. B. $(3 + 5) \times 10 = (6 + 2) \times 10$.

Eben so bleibt das Gleichgewicht, wenn man sie mit derselben Zahl dividirt.

Z. B. $\frac{3 + 5}{4} = \frac{6 + 2}{4}$.

1. Anmerk. Man pflegt der Kürze wegen die Zahlen, die mit einander dividiret werden sollen, als einen Bruch zu schreiben, wobei der Dividendus der Zähler und der Divisor der Nenner ist, z. B. $\frac{3 + 5}{4} = 2$.

2. Anmerk. Die Zahlen, welche in einer Gleichung unmittelbar zu einander gehören, pflegt man der größern Deutlichkeit wegen in Klammern einzuschließen. Z. B. $(3 + 5) \times 10 = 80$.

§. 60.

Wenn man eine Gleichung hat, zu der man noch eine andere Gleichung addirt, so bleibt das Gleichgewicht.

$$\begin{array}{r} 3 + 6 = 7 + 2 \\ + 3 + 7 = 22 - 12 \\ \hline 19 = 19 \end{array}$$

Z. B.

Zieht man von einer Gleichung eine andere ab, so bleibt ebenfalls das Gleichgewicht.

Z. B.

$$\begin{array}{r} 3 + 7 = 12 - 2 \\ + 3 + 5 = 6 + 2 \\ \hline 2 = 2 \end{array}$$

Multiplicirt man eine Gleichung mit einer andern, so bleibt ebenfalls das Gleichgewicht.

$$\begin{array}{rl} \text{z. B.}\ 3 + 5 = & 6 + 2 \\ \text{multiplicirt mit}\ 3 + 7 = & 12 \div 2 \\ \hline 80 = & 80. \end{array}$$

Dividirt man eine Gleichung mit der andern, so bleibt es ebenfalls.

$$\begin{array}{rl} \text{z. B.}\ 3 + 5 = & 6 + 2 \\ \text{dividirt mit}\ 6 - 4 = & 12 - 10 \\ \hline 4 = & 4. \end{array}$$

§. 61.

Auf diesen wenigen Sätzen beruhet die Auflösung der Gleichungen des ersten Grades, und ein großer Theil der Algebra.

Da aber die Buchstabenrechnung erst im zweiten und dritten Theil vorkommt, so will ich hier nur einige Beispiele anführen, aus denen man sieht, wie man leichte Aufgaben mit diesen einfachen Sätzen auflösen kann.

Jede Aufgabe hat zwei Theile; der erste besteht aus den bekannten Größen, der zweite aus den gesuchten. — Bei einem Divisionsexempel sind z. B. der Divisor und der Dividendus die bekannten Theile, und der Quotient der gesuchte oder unbekannte. —

Die unbekannte Größe, welche man sucht, pflegt man gewöhnlich mit dem Buchstaben X zu bezeichnen.

1. Aufgabe. Ein Vater hinterläßt ein Vermögen von 11280 Thaler, welches seine drei Söhne so unter sich theilen sollen, daß der älteste 2000 Thlr. mehr als der zweite, und der zweite 1000 Thlr. mehr als der dritte erhielt, — wie viel bekommt ein jeder?

Wir wollen beim dritten Sohne anfangen, und dem seinen Antheil X nennen.

So bekommt der zweite ebenfalls $X + 1000$
und der älteste ebenfalls $X + 1000 + 2000.$
Also $3 . X + 4000 = 11280$
Zieht man von dieser Gleichung
an jeder Seite 4000 ab $- 4000 = 4000$
so bleibt nach dem obigen
Grundsatze $3 X \quad = 7280$
Dividirt man nun mit 3 an
jeder Seite, so bleibt $1 X \quad = 2426\frac{2}{3}$ Thlr.

Denn oben hatten wir: daß wenn man von einer Gleichung eine andere abzieht, wieder eine Gleichung übrig bleibt, und wenn man einen Gleichen vorn und hinten mit derselben Zahl dividirt, daß dann auch wieder eine Gleichung komme.

X ist also $= 2426\frac{2}{3}$ Thlr. Dieses ist der Antheil des jüngsten. Der zweite erhält 1000 Thlr. mehr, also $3426\frac{2}{3}$, und der älteste, der 2000 Thlr. mehr als der zweite erhält, bekommt $5426\frac{2}{3}$, und alle zusammen 11280 Thlr.

2. Aufgabe. Ein Onkel hat fünf Vettern, denen er sein Vermögen von 10000 Thlr. vermacht, aber so, daß der erste 100 Thlr. mehr bekommt als der zweite, dieser 200 Thlr. mehr als der dritte, dieser 300 Thlr. mehr als der vierte, und dieser 400 Thlr. mehr als der fünfte, wie viel erhält jeder?

Von den Verhältnissen. (Proportionen.)

§. 62.

Alles Rechnen beruhet auf der Kenntniß von den Eigenschaften der Zahlen und ihrer Verhältnisse zu einander.

Wenn zwei Zahlen zu einander im Verhältnisse stehen, so fragt man entweder:

Wie viel größer ist die eine als die andere?

oder man fragt:

Wie oft ist die eine in der andern enthalten?

Jene Frage wird durch die Subtraction beantwortet, und diese durch die Division. Jenes nennt man ein arithmetisches Verhältniß, und bezeichnet es mit dem Zeichen der Subtractiou (—).

Dieses nennt man ein geometrisches Verhältniß, und bezeichnet es durch das Zeichen der Division (:).

§. 63.

Das Verhältniß zweier Zahlen kann nur mit Hülfe einer dritten Zahl bestimmt werden. Diese heißt beim arithmetischen Verhältniß die Differenz, und beim geometrischen Verhältniß der Exponent.

Z. B. in dem arithmetischen Verhältnisse, in dem die beiden Zahlen 3 — 12 stehen, ist 9 die Differenz.

Und in dem geometrischen Verhältnisse, in dem die beiden Zahlen 3 : 12 stehen, ist 4 der Exponent.

§. 64.

Wenn zwei paar Zahlen dieselbe Differenz haben, so bilden sie eine arithmetische Gleichung. Z. B. 2 — 12 = 6 — 15. Beide haben die Differenz 9 zwischen sich.

Wenn zwei paar Zahlen denselben Exponent haben, so bilden sie eine geometrische Gleichung. Z. B. 3 : 12 = 6 : 24. Beide haben den Exponenten 4, wie man sieht, wenn man sie in einander dividirt.

Diese geometrische Gleichung wird nun so ausgesprochen: 3 verhält sich zu 12 wie 6 zu 24.

Jede aritmetische oder geometrische Gleichung enthält also 4 Glieder, wovon das erste und vierte die beiden äussern, und das zweite und dritte die beiden innern heißen.

Sind die beiden mittlern Glieder einander gleich, so heißt die Gleichung stetig.

So ist z. B. 8 — 5 = 5 — 2 eine stetige arithmetische Gleichung, welche die Differenz 3 hat.

Und 8 : 4 = 4 : 2 ist eine stetige geometrische Gleichung, die den Exponenten 2 hat.

§. 65.

In jeder arithmetischen Gleichung ist die Summe der beiden äussern Glieder so groß, als die Summe der beiden innern Glieder.

Z. B. in der vorigen ist 8 + 2 = 10 und 5 + 5 auch = 10.

In jeder geometrischen Gleichung ist das Produkt aus den beiden äussern Gliedern so groß, als das Produkt der beiden innern.

z. B. in der geometr. Prop. $7 : 28 = 3 : 12$ ist $7 \cdot 12 = 84$ und $28 \cdot 3$ auch gleich 84.

Man findet daher in einer arithmetischen Gleichung das vierte Glied, wenn man die beiden mittlern addirt, und das vordere davon abzieht.

Wenn z. B. in der arithmetischen Gleichung $17 - 21 = 23 - X$ das vierte Glied unbekannt wäre, und mit X bezeichnet würde, so könnte man es auf folgende Weise finden.

$$\begin{array}{r} 21 \\ +\ 23 \\ \hline 44 \\ -\ 17 \\ \hline X = 27 \end{array}$$

Und in jeder geometrischen Gleichung findet man das vierte Glied, wenn man die beiden mittlern mit einander multiplicirt, und das Produkt durch das vordere dividirt.

Es sey in der geometr. Proportion $17 : 34 = 19 : X$ das vierte Glied unbekannt und mit X bezeichnet, so findet man dieses auf folgende Weise:

$$\begin{array}{r} 34 \\ 19 \\ \hline 306 \\ 34 \\ \hline 17 : | \ 646 \ (38 = X. \\ 51 \\ \hline 136 \\ 136 \end{array}$$

§. 66.

Ist die arithmetische Gleichung stetig, das heißt: daß ihre beiden mittlern Glieder gleich sind, so kann man diese finden, wenn bloß das erste und vierte bekannt ist. — Man addirt nemlich das erste und vierte und dividirt die Summe, die der Summe der beiden innern gleich ist, mit 2.

Es seyen z. B. in der arithmetischen Gleichung $19 - X = X - 15$ die beiden mittlern Gliedern unbekannt, so ist $X = 17$.

Nemlich:
$$\begin{array}{r} 19 \\ +\ 15 \\ \hline 2\,|\,34 \\ \hline 17 = X \end{array}$$
und die Gleichung $19 - 17 = 17 - 15$.

Ist die geometrische Gleichung eine stetige, und es fehlen die beiden mittlern Glieder, so multiplicirt man die beiden äussern, und zieht aus dem Produkt die Quadratwurzel.

Es fehlen z. B. in der geometrischen Gleichung $5 : X = X : 45$ die beiden mittlern Glieder, so ist $5 . 45 = 225$, und hieraus die Wurzel gezogen,
$$\begin{array}{r|l} 2 & 2\ 5\ (15 \\ 1 & \\ \hline 2 & 1\ 2\ 5 \\ & 1\ 2\ 5 \end{array}$$
gibt für $X = 15$, und die Gleichung ist $5 : 15 = 15 : 45$.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens sieht man leicht ein, wenn man bedenkt, daß das Produkt aus den beiden mittlern Gliedern dem Produkte aus den beiden äussern gleich seyn muß. Da nun in einer stetigen Gleichung die mittlern Glieder gleich sind, so ist das Produkt beim Multipliciren jedesmal eine Quadratzahl, und jedes Glied die Wurzel.

§. 67.

In einer arithmetischen Gleichung kann man die Glieder umkehren, und die Gleichung bleibt. Es sey z. B. 10 — 5 = 22 — 17, so ist auch umgekehrt 17 — 22 = 5 — 10. Die Differenz bleibt dieselbe, nemlich 5.

Eben so kann man das erste und dritte, und das zweite und vierte Glied miteinander verbinden, und es bleibt eine arithmetische Gleichung, obschon sich die Differenz ändert.

Z. B. 10 — 22 = 5 — 17.

Eben so kann man alle Glieder mit derselben Zahl multipliciren, und die Gleichung bleibt, aber die Differenz wird um so viel größer als die Zahl beträgt, die multiplicirt.

Es werden z. B. die letzte Gleichung mit 3 multiplicirt, so erhält man

30 — 66 = 15 — 51,

und die Differenz wird auch 3mal größer oder 36.

Eben so kann man alle Glieder mit derselben Zahl dividiren, und die Gleichung bleibt, obschon die Differenz um so viel kleiner wird.

Es werde z. B. die letzte Gleichung mit 3 dividirt, so erhält man 10 — 22 = 5 — 17, und die Differenz 36 wird 12.

Auf diese Weise läßt sich jede arithmetische Gleichung auf eine unendliche Weise verändern, wobei sie immer eine arithmetische Gleichung bleibt.

§. 68.

In einer geometrischen Gleichung kann man die Glieder umkehren, und die Gleichung bleibt. Wenn z. B. 3 : 12 = 6 : 24 ist, so ist auch umgekehrt 24 : 6 = 12 : 3, wobei der Exponent 4 derselbe bleibt.

Eben so kann man auch das erste und dritte, und zweite und vierte Glied mit einander verbinden, und es bleibt eine geometrische Gleichung, obschon sich der Exponent ändert. Bei der vorigen ist z. B. 24 : 12 = 6 : 3.

Eben so kann man alle Glieder mit derselben Zahl multipliciren, und die Gleichung bleibt so wie der Exponent, derselbe. Wenn man die vorige z. B. mit 3 multiplicirt, so erhält man 72 : 36 = 18 : 9.

Eben so kann man alle Glieder mit derselben Zahl dividiren, und die Gleichung bleibt so wie der Exponent. Man dividire z. B. die vorige Gleichung mit 9, so erhält man 8 : 4 = 2 : 1.

Auf diese Weise kann man eine geometrische Gleichung auf eine unendliche Weise abändern, ohne daß sie aufhört eine geometrische Gleichung zu seyn.

Die Regul de Tri.

§. 69.

Wenn in einer geometrischen Gleichung drei Glieder bekannt sind, so kann man leicht das vierte finden, indem man die beiden mittlern miteinander multiplicirt, und mit dem andern dividirt.

Man nennt dieses die Regel von dreien, oder Regula de Tri, weil hiebei immer drei Sätze bekannt sind.

Nach dieser Regel werden fast alle Rechnungen im gemeinen Leben geführt, z. B. die Berechnung der Kaufleute über die Waarenpreise, über Frachten, Wechsel, Zinsen u. dgl. Ferner die Rechnungen der Landmesser über die Größe der gemessenen Felder, Wiesen, Waldungen u. s. w. Ferner die Rechnungen der Forstbedienten über Holzpreise und über die Anzahl Cubikfuße, die in einer Eiche oder Buche sind, u. s. w.

Man sieht hieraus, wie nützlich diese Regel für jeden in seinen Geschäften ist, und daß es daher sehr der Mühe lohnt, sich mit ihr bekannt zu machen.

Dieses ist auch so sehr schwer nicht, wenn man sich bei ihrer Anwendung an folgende Sätze erinnert.

1) Sind immer drei Größen gegeben, und die vierte, welche man sucht, bezeichnet man mit X. Diese findet man, indem man die zweite und dritte mit einander multiplicirt, und mit der ersten dividirt.

Z. B. Wenn 3 ℔ Caffe 5 Thlr. kosten, was kosten 117 ℔?

Man sieht, daß diese drei Größen die drei ersten Glieder einer geometrischen Gleichung sind, die also gelesen wird:

$$3 : 117 = 5 : X$$

3 ℔ verhalten sich zu 117 ℔ wie 5 Thlr. zum Gesuchten.

Denn man muß natürlich in demselben Verhältnisse mehr Thaler geben, indem man mehr Pfunde erhält.

$$\begin{array}{r} 117 \\ 5 \\ \hline 3 : | 585 \\ \hline X = 195 \end{array}$$

Stellt man die Rechnung an, so findet man, daß man 195 Thaler für 117 ℔ geben muß, wobei man folgende geometrische Proportion hat:

$$3 : 117 = 5 : 195.$$

Anmerk. Gewöhnlich lehren die Rechenmeister ein solches Regula de Tri-Exempel auf folgende Weise aufsetzen:

Thlr. Pf.
3 Pf. kosten 5 was kosten 117

Wobei sie sagen: man müsse vorne und hinten gleichartige Größen haben, und das, was im Facit kommen sollte, müsse in der Mitte stehen. — Hiedurch glauben sie das Aufsetzen der Exempel den Anfängern zu erleichtern.

Da immer die zweite und dritte Zahl miteinander multiplicirt werden, so ist es freilich einerlei, ob man das Beispiel so oder anders schreibt, denn 117 . 5 ist immer so viel als 5 . 117. Indeß ist es besser eine geometrische Gleichung auch als eine geometrische Gleichung zu schreiben, theils weil man dann immer den Grund weiß, worauf die Regel beruht, und theils weil man sich dann weniger der Gefahr zu irren aussetzt, wenn Fälle aus der umgekehrten Regul de Tri kommen. Zudem haben genau genommen 3 Pf. und 5 Thlr. so wenig ein Verhältniß zu einander als 3 Pferde und 5 Schafe. Aber 3 Pfunde und 117 Pfunde sind gleichartige Dinge.

§. 70.

Man muß immer zusehen, ob die Größen, mit denen man rechnet, in einem direkten oder in einem umgekehrten Verhältnisse zu einander stehen. Z. B. bei gleichen Preisen der Waaren steht die Menge des Geldes mit der Menge der Waaren, die man dafür erhält, in einem direkten Verhältnisse.

Eben so stehen die Zinsen eines Capitals bei einer gleichen Zeit in einem direkten Verhältnisse zu seiner Größe, wenn der Zinsfuß derselbe ist — denn je größer das Capital, je mehr Zinsen.

Eben so stehen die Zinsen in einem direkten Verhältniß mit der Zeit bei gleichem Capital und Zinsfuße. Je länger ein Capital steht, desto größer ist die Menge der Zinsen.

Aber ausser diesen direkten Verhältnissen gibt es auch oft umgekehrte Verhältnisse, in denen die Größen miteinander stehen.

Die Zeit, welche eine gewisse Anzahl Arbeiter zu einer Arbeit gebrauchen, vermindert sich in demselben Grade, in dem die Anzahl der Arbeiter sich vermehrt. Hier steht also die Menge der Arbeiter mit der Menge der Zeit zwar in einem Verhältnisse, aber in einem umgekehrten.

So steht z. B. die Zeit, in der man 300 Thlr. Zinsen erhält, bei gleichem Zinsfuße in umgekehrtem Verhältnisse mit der Größe des Capitals. — Je größer das Capital, desto kürzer die Zeit, in der es 300 Thlr. Zinsen trägt.

Hierauf muß man immer Rücksicht nehmen, denn wenn man Größen, die in einem umgekehrten Verhältnisse zu einander stehen, so ansetzen wollte, als wenn sie zu einander in einem direkten stünden, so würde man natürlich eine unrichtige Rechnung machen.

Wenn z. B. 100 Arbeiter in 20 Tagen einen Graben machen können, und man fragt: wie viel Arbeiter muß man haben, um ihn in 5 Tagen zu machen?

So sieht man, daß die Anzahl der Tage im Verhältnisse mit der Anzahl der Arbeiter steht, aber in einem umgekehrten, und man würde eine unrichtige Rechnung erhalten, wenn man die Gleichung so schreiben wollte. 20 Tage verhalten sich zu 100 Arbeitern wie 5 Tage zu 25 Arbeiter, obschon dieses eine richtige Gleichung wäre.

Man muß eine solche Aufgabe so schreiben:

5 Tage verhalten sich zu 20 Tagen, wie 100 Arbeiter zum Gesuchten, welches 400 sind. — Denn man sieht leicht ein, daß wenn man die Arbeit in einer vierfach kleinern Zeit vollenden will, man viermal mehr Arbeiter haben muß.

Anmerk. Die Rechenmeister nennen dieses die umgekehrte Regel de Tri, und geben für das Aufsetzen des Exempels die Regel: daß man die Frage vorne setzen müsse. Sie setzen sie dann so an:

5 Tage verhalten sich zu 100 Arbeitern wie 20 Tage zum Gesuchten. Die Rechnung bleibt dieselbe, da es einerlei ist, ob man 100 mit 20, oder 20 mit 100 multiplicirt, allein da man nur gleichartige Größen miteinander vergleichen kann, so ist es unrecht, Tage und Arbeiter in ein Verhältniß zu stellen, da man strenge genommen, doch nur Tage mit Tagen, und Arbeiter mit Arbeiter vergleichen kann.

§. 71.

Aufgaben aus der Regel de Tri.

1) Wenn 1 ℔ Tabak 1 Rthlr. 10 stbr. kostet, was kosten 17 ℔ 8 Loth? Antw. 20 Rthlr. $7\frac{1}{2}$ stbr. Nemlich: wie 1 ℔ sich zu 17 ℔ 8 Loth verhält, so verhält sich 1 Rthlr. 10 stbr. zur gesuchten Anzahl Pfunden. — Denn die Menge der Waare steht bei gleichem Preise immer mit der Menge des Geldes im Verhältnisse.

℔	℔	Loth	Rthl.	stbr.
1 —	17 =	8 —	1 =	10
32	32		60	
32	34		70	
	51			
	544			
	8			
	552			

Diese vorläufige Rechnung, wo die Pfunde in Loth, und die Thaler in Stüber verwandelt werden, geschieht deswegen, damit man überall gleichartige Größen habe, weil man nur diese miteinander vergleichen kann.

Die Aufgabe steht nun so:

Wie sich 32 Loth zu 552 Loth verhalten, so verhält sich 70 Stüber zum Gesuchten.

$$\begin{array}{r} 552 \\ 70 \\ \hline 32 \mid 38640 \\ \hline 1207\frac{1}{2} \text{ stbr.} \end{array}$$

Die 552 Loth Tabak kosten also $1207\frac{1}{2}$ stbr., welche das vierte Glied in dem geometrischen Verhältnisse sind, und das man immer erhält, wenn man die beiden mittlern miteinander multiplicirt, und dann durchs vordere dividirt.

Da man aber so kleine Geldsorten der Bequemlichkeit wegen lieber in größere ausdrückt, so verwandelt man sie in Thaler, indem man sie mit 60 dividirt. Diese $1207\frac{1}{2}$ stbr. betragen 20 Rthlr. $7\frac{1}{2}$ stbr.

1. Anmerk. Wenn man Thaler in Stüber, Centner in Pfund und Pfund in Loth verwandelt, so nennt man dieses auflösen. Das Umgekehrte, wenn man die Stüber in Thaler, Loth in Pfund, und Pfund in Centner verwandelt, nennt man: reduciren.

2. Anmerk. Das was als viertes Glied der Proportion kommt, nennen die Rechenmeister das Facit. Es ist die Antwort auf die Frage.

2te Aufgabe. Wenn 17 ℔ 8 Loth, 20 Rthlr. $7\frac{1}{2}$ stbr. kosten, was kostet denn 1 Pfund?

℔ Loth ℔ Rthlr. stbr.
17 : 8 — 1 — 20 : $7\frac{1}{2}$ stbr. zum Gesuchten.

Man sieht leicht, daß dieses Beispiel das Umgekehrte von dem vorigen ist, und daß für den Preis eines Pfundes wieder 1 Rthlr. 10 stbr. kommen muß, wenn richtig gerechnet worden. — Dieses Beispiel dient also zur Probe der Rechnung, so wie das Dividiren eine Probe fürs Multipliciren ist, weil es das Umgekehrte davon ist.

Anmerk. Die Rechenmeister nennen ein solches Beispiel schlechtweg, eine Probe, und der Rechenschüler muß in den Beispielen, wo sie kein Facit beisetzen, durch eine solche Probe sich überzeugen, daß er richtig gerechnet habe.

3te Aufgabe. Wenn 3 ℔ einer Waare 5 Rthl. 7 stbr. kosten, wie viel kosten 18 ℔ 6 Loth, wenn noch ausserdem auf jede 3 ℔ 10 Stüber Fracht gegangen ist?

Anmerk. Da die Fracht die Waare vertheuert, so wird diese bei der Berechnung dazu addirt.

4te Aufgabe. Wenn das ℔ Caffe 1 Rthl. 36 stbr. kostet, wie viel ist ein Ballen werth, der Brutto 187 ℔ wiegt, wobei aber für Emballage 7 ℔ abgehen, und für Staub noch 2 ℔.

Anmerk. Brutto heißt eine Waare, wenn sie noch mit demjenigen vermischt ist, was nicht zu ihr gehört: z. B. Emballage, Matten, Packkiste, auch Staub und andere Unreinigkeiten, für die ein gewisses abgezogen wird. — So sind im vorigen Beispiele nur 178 Pf. wirliche Caffeebohnen. Dieses Gewicht von 178 Pf., welches nach Abzug von Staub und Emballage übrig bleibt, heißt das Netto-Gewicht, und das ist eigentlich dasjenige, worauf es bei einer Waare eigentlich ankommt.

Das was am Brutto-Gewichte abgezogen wird, um das Netto-Gewicht zu erhalten, heißt Tara.

In vielen Rechenbüchern findet man eine eigene Regel unter dem Titel: Tara-Rechnung, welche sich blos hiemit beschäftigt, übrigens aber zur Regula de Tri gehört.

5te Aufgabe. Wenn 100 Rthl. jährlich 4 Rthl. Zinsen thun, wie viel thun 17830 Rthl. in 6 Jahren?

Man muß hier zuerst berechnen, wie viel sie in einem Jahre thun, und das Gefundene mit 6 multipliciren.

6te Aufgabe. Wenn man 4 Rthlr. vom 100 Zinsen zieht, wie viel Capital muß man haben, um in einem Jahre 800 Rthlr. Zinsen zu ziehen?

Wie 4 Rthlr Zinsen sich zu 800 Rthl. Zinsen verhalten, so verhält sich 100 Rthl. Capital zum Gesuchten.

Von diesen und ähnlichen Aufgaben findet sich in den Rechenbüchern ein eigner Abschnitt, unter dem Namen Zins-Rechnung, das aber weiter nichts enthält als die Regel de Tri.

7te Aufgabe. Einer kauft für 900 Rthl. Waare, bezahlt sie aber gleich und genießt 1 Procent Rabat.

Wie viel Rabat zieht er ab? — Antwort 9 Rthlr., und er bezahlt nun 891 Rthlr.

Anmerk. Den Abzug, den der Verkäufer sich für gleich baare Zahlung gefallen läßt, heißt Rabat. Dieser beträgt für den Monat gewöhnlich $\frac{2}{3}$ Procent. Eine Waare, die also auf 3 Monate zahlbar verkauft worden, genießt 2 Procent Rabat für prompte Bezahlung, und der Ankäufer bezahlt statt 100 Rthl. nur 98.

Diese und ähnliche Aufgaben finden sich in den Rechenbüchern unter dem Namen der Rabat-Rechnung, welche so wie alle übrigen zur Regel de Tri gehört.

8te Aufgabe. Wenn jemand 1000 tannene Bretter für 150 Rthlr. kauft, und verkauft sie, jedes zu 12 Stbr., wie viel bekommt er, und wie viel hat er im Ganzen verdient?

Er verkauft sie für 200 Rthl., hat also im Ganzen mit 150 Rthlr. 50 verdient.

$$150 : 100 = 50 : x.$$

Anmerk. Solche und ähnliche Aufgaben finden sich in den Rechenbüchern unter dem Namen: der Gewinn- und Verlust-Rechnung. Sie gehören zur Regula de Tri.

9te Aufgabe. Drei Kaufleute fangen einen Handel an, und schießen dazu ein Capital von 10000 Rthlr. zusammen. Nemlich A 2000, B 3000 und C 5000. Nach Verlauf von 5 Jahren haben sie 5000 Rthlr. gewonnen, welche sie unter sich theilen. Nun ist die Frage, wie viel jeder erhält? — Da jeder in demselben Verhältnisse Antheil am Gewinne hat, indem er Capital eingelegt hat, so wird A 1000 Rthlr., B 1500 und C 2500 erhalten.

10te Aufgabe. Drei Kaufleute legen ein Capital von 10000 Rthlr. zusammen. A giebt 2000 Rthlr. auf

2 Jahr, B 3000 auf 15 Monate, und C 5000 auf 10 Monate. Sie haben 5000 Rthlr. Gewinnst zu theilen, wie viel erhält jeder?

Da der Gewinnst sich verhält wie die Größe des Capitals und die Länge der Zeit, so bekommt jeder in dem Verhältnisse der Größe des Capitals und der Länge der Zeit, daß er es in der Handlung hatte.

A	hatte	2000	Rthl.	24	Mon.	das	Prod. ist	48000
B	—	3000	—	15	—	—	—	45000
C	—	5000	—	10	—	—	—	50000
								143000

Da es einerlei ist, ob A 2000 Rthlr. 24 Monate oder 48000 Rthlr. 1 Monat in der Handlung hatte, (denn beides thut gleichviel Zinsen) und da dasselbe von B und C gilt, so sieht man, daß 143000 Rthlr. in 1 Monat auch 5000 Rthlr. würden gewonnen haben. Man hat also folgendes Verhältniß.

Wie sich 143000 zu 48000 verhalten, so verhält sich der gesammte Gewinn 5000, zum Gewinn von A.

Ferner: 143 : 45 = 5000, zum Gewinn von B.
Endlich: 143 : 50 = 5000, zum Gewinn von C.

A erhält also $1678\frac{46}{143}$ Rthlr.
B — — $1573\frac{61}{143}$ —
C — — $1748\frac{36}{143}$ —

Der gesammte Gewinn ist 5000 Rthlr.

Anmerk. In den Rechenbüchern findet man einen eigenen Abschnitt, unter dem Titel: Gesellschafts-Rechnung, der solche und ähnliche Aufgaben enthält.

Die einfache Gesellschafts-Rechnung ist die, wo die Zeit gleich ist, wie in der 9ten Aufgabe, — die doppelte Gesellschafts-Rechnung ist die, wo die Zeit ungleich ist, wie die in der 10ten. Beide gehören, wie man sieht, zur Regel von Dreien.

11te Aufgabe. Ein Weinhändler mischt 4 Ohm Wein, die Ohm von 40 Rthlr. mit 6 Ohm von 50 Rthl. zusammen, wie viel ist nun die Ohm des gemischten Weines werth.

Die 4 Ohm zu 40 Rthlr. kosteten 160
und die 6 Ohm zu 50 Rthlr. kosteten 300

Also 10 Ohm kosten 460 Rthlr.
und folglich 1 Ohm des gemischten Weins 46 Rthlr.

Denn angenommen, daß sich die Güte des Weins verhalte wie sein Preis, welches freilich bei allen Weinhändlern nicht immer der Fall ist, so ist die Güte und der Werth der Mischung offenbar aus der Menge und der Güte der Weine zusammengesetzt, die miteinander vermischt werden.

12te Aufgabe. Ein Münzmeister vermischt 2 Mark 13 löthig und 4 Mark 10 löthig Silber miteinander, wie viel löthig ist die Mischung, wenn die Mark fein 16 Loth reines Silber hat?

In den 2 Mark dreizehnlöthig Silber sind
26 Lth. Silber und 6 Lth. Zusatz.
In den 4 Mark zehnlöthig Silber sind
40 Lth. Silb. u. 24 Lth. Zusatz.

Also ist in der
Mischung für Xlöthig 66 Lth. Silb. u. 30 Lth. Zusatz.

Da beide zusammen 96 Loth oder 6 Mark wiegen, so hat man folgendes Verhältniß.

Wie 96 Loth sich zu 66 Loth fein verhalten, so verhält sich 16 Loth zum Gesuchten, welches 11 ist. Die

Mischung ist also 11 löthiges Silber, das heißt, unter 16 Loth sind 11 Loth reines Silber.

Anmerk. Diese und ähnliche Aufgaben findet man in den Rechenbüchern unter dem Namen der Mischungsregel. In den alten Rechenbüchern heißt sie Regula Coeci oder Alligations-Rechnung. — Der Name ist gelehrter wie die Sache, und man sieht, daß es weiter nichts ist, als eine Anwendung der Regel von Dreien.

In einigen Rechenbüchern findet man auch noch eine sogenannte Zinn-Rechnung, die auf dasselbe hinausläuft, nur mit dem Unterschiede, daß das Zinn mit Blei vermischt wird, und daß man 10 Pfündig Zinn solches nennt, was gar keinen Zusatz hat. Dieses heißt auch englisches Zinn.

13te Aufgabe. Wenn $\frac{3}{4}$ ℔ $9\frac{1}{2}$ Rthlr. kosten, wie viel kosten $11\frac{1}{3}$ ℔?

$\frac{3}{4}$ ℔ : $11\frac{1}{3}$ ℔ = $9\frac{1}{2}$ Rthlr. zum Gesuchten.

Dieses ist ein Beispiel aus der Regula de Tri in Brüchen. Um eine solche Aufgabe aufzulösen, muß man vorher die Zahlen, die miteinander verglichen werden sollen, in gleichnamige Brüche verwandeln, um sie bequem mit einander multipliciren und dividiren zu können. Die Aufgabe steht dann so:

3 Viertel zu $25\frac{1}{3}$ Viert. wie $9\frac{1}{2}$ Rthlr. zum Gesuchten, und läßt sich wie andere Aufgaben aus der Regula de Tri lösen.

Anmerk. Man kann sich oft gewisser Abkürzungen bei einer Rechnung mit Vortheil bedienen, wie z. B. folgende: 169 soll mit 32 multiplicirt werden, so zerlegt man 32 in seine beiden Faktoren 8 und 4 und multipliciret damit.

$$\begin{array}{r} 169 \\ 8 \\ \hline 1352 \\ 4 \\ \hline 5408 \end{array}$$

Oder sie sollen mit einander dividirt werden.

```
4) 5408 (8) 1352 (169
   4         8
  ----      ----
   14        55
   12        48
  ----      ----
    20        72
    20        72
  ----      ----
     8
     8
```

Solche und ähnliche Rechnungsvortheile finden sich in den Rechenbüchern unter dem Namen: Praxis Italica, oder Welsche Praktik. Der Name ist auch hiebei gelehrter, wie die Sache, und jeder der viel rechnet, kommt auf solche Abkürzungen von selber. Diejenigen, die nicht viel rechnen, kommen indeß geschwinder auf dem gewöhnlichen Wege fort, denn in der Zeit, in der sie überlegen, wie sie die Rechnung abkürzen wollen, können sie auch die halbe Aufgabe rechnen.

14te Aufgabe. Ein Bothe geht täglich 8 Stunden und gebraucht 6 Tage bis Frankfurt, wie viel Zeit gebraucht ein anderer, der täglich 12 Stunden macht? —

15te Aufgabe. Man gebraucht in ein Zimmer 10 Stück Tapeten die $\frac{1}{2}$ Elle breit sind, wie viel wird man gebrauchen, wenn sie $\frac{3}{4}$ Ellen breit sind?

16te Aufgabe. Ein Capital von 1000 Rthlr. gebraucht 5 Jahr um 200 Rthlr. Zinsen zu thun, wie viel Zeit gebraucht ein anderes Capital von 2000 Rthlr. um 200 Rthlr. Zinsen abzuwarten?

Anmerk. Diese und ähnliche Aufgaben, wo die Größen in einem umgekehrten Verhältnisse stehen, gehören in die umgekehrte Regel von Dreien, bei der die ersten Zahlen des Verhältnisses umgekehrt werden, so daß die, welche sonst die zweite war und die Frage enthält, jetzt die erste wird.

An diesen wenigen Aufgaben mag es genug seyn, um dem Anfänger die Anwendung der Lehre von den Verhältnissen beim Rechnen zu zeigen. Wer zu seiner Uebung mehr Aufgaben durchrechnen will, findet ihrer hinlänglich in allen Rechenbüchern, wie z. B. im Schlieperschen, Schürmannschen u. s. w. Der Anfänger braucht aber nicht mehr Exempel von jeder Regel zu rechnen, als nothwendig ist, um sich zu überzeugen, daß er sie versteht. Alle zu rechnen, wäre Zeitverlust. Es ist genug, wenn er die übrigen bloß durchsieht.