BEGINSELEN

DER

STELKUNST.

BEGINSELEN

DER

STELKUNST,

BEVATTENDE:

DE BEHANDELING DER STELKUNSTIGE VORMEN, DE OPLOSSING DER VERGELIJKINGEN VAN DEN EERSTEN EN TWEEDEN GRAAD, ALSMEDE DE THEORIËN DER GEWONE LOGARITHMEN, REKEN- EN MEETKUNSTIGE REEKSEN EN KOGELSTAPELS.

DOOR

J. BADON GHIJBEN EN H. STROOTMAN,

Leeraren der 1ste klasse in de Wiskunde, bij de Koninklijke Militaire Akademie te BREDA.

TE BREDA,
BIJ BROESE & COMP.
1838.

Geene exemplaren worden voor echt erkend dan die, welke hieronder door een' der schrijvers eigenhandig zijn geteekend.

A. Strootman.

INHOUD.

BEGINSELEN

DER

STELKUNST.

VERKLARING VAN HET STELKUNSTIG TEEKENSCHRIFT.

§ 1. In de Stelkunst leert men de getallen met elkander vergelijken en behandelen, zonder dat het noodig zij, aan dezelve eene bepaalde waarde toe te kennen. Het is daarom, dat men in de stelkunst de getallen door letters voorstelt, en men is overeengekomen, om, wanneer men in de oplossing van eenig vraagstuk met gegevene en te zoekene getallen te doen heeft, alsdan de gegevene getallen door de eerste letters a, b, c, enz., en de te zoekene getallen door de laatste letters x, y, z, enz. van het alphabet, voor te stellen.

§ 2. Om de gelijkheid of ongelijkheid van twee, op die wijze voorgestelde, getallen aan te duiden, gebruikt men de teekens $=$ (gelijk, gelijk aan), $>$ (grooter dan) en $<$ (kleiner dan). Men schrijft derhalve $a=b$, om aan te duiden, dat de getallen a en b even groot zijn; zulk eene uitdrukking noemt men eene *vergelijking*; hetgeen vóór het teeken $=$ staat, wordt het *voorste* of *eerste lid*, en hetgeen achter dat teeken staat, het *achterste*, *tweede* of *laatste lid* der vergelijking genoemd; eene vergelijking, welke dient, om bewezene waarheden of verkregene uitkomsten voor te stellen, noemt men eene *formule*. Wil men te kennen geven, dat een getal e grooter is dan een getal f, dan schrijft men $e>f$, hetwelk ook kan gelezen worden $f<e$. Ten einde de teekens $>$ en $<$ niet met elkander te verwarren, merke men op, dat het grootste getal aan den open' kant van het teeken geplaatst wordt.

Om voorts de getallen te kunnen behandelen, zonder aan dezelve eenige bepaalde waarde toe te kennen, is het noodig, de gewone bewerkingen der cijferkunst, die op zulke onbepaalde getallen moeten worden uitgevoerd, door teekens te kunnen aanduiden.

§ 3. Wanneer twee of meer getallen bij elkander worden opgeteld, wordt de uitkomst dezer optelling de *som* dier getallen genoemd, en om deze bewerking op de getallen aan te duiden, gebruikt men het teeken + (plus), dat men tusschen dezelve plaatst. Alzoo is $2+3=5$; $4+7+5=16$. Op gelijke wijze beteekent $a+b$ de som der getallen a en b; $a+b+c$ de som der getallen a, b en c; $d+e+5$ de som der getallen d, e, en 5; enz. Zoo lang aan onbepaalde getallen, door letters, b. v. a, b, c, voorgesteld, geene bepaalde waarde wordt gegeven, kan hunne som niet anders, dan door $a+b+c$ worden voorgesteld, en deze som aldus voor te stellen, is eigenlijk wat men in de stelkunst optellen noemt; zoodra men echter aan de letters a, b, c bepaalde getallenwaarden geeft, kan derzelver som door een enkel getal worden uitgedrukt: zoo zou, wanneer men bij voorbeeld $a=12$, $b=7$ en $c=9$ nam, $a+b+c=12+7+9=28$ zijn. Het vinden van dit getal 28, als de som van 12, 7 en 9, is hetgeen men in de cijferkunst als de optelling heeft leeren kennen.

Het is klaar, dat men bij de optelling van getallen niet behoeft te letten op de rangorde, waarin dezelve voorkomen, en dat dus $a+b+c$ hetzelfde beteekent, als $b+a+c$ of $c+a+b$, enz.; men heeft echter tot regel aangenomen, om de letters, waaruit de som bestaat, te rangschikken naar de orde, waarin zij in het alphabet voorkomen. Men schrijft dus niet $f+a+c+h+e$,

maar $a+c+e+f+h$.

Hieruit blijkt tevens, dat het eerste der getallen, waaruit eene som bestaat, altijd geacht kan worden, het teeken + vóór zich te hebben; zoodat men in plaats van $a+b$ kan schrijven $+a+b$. Dit is ook daaruit op te maken, dat $+a+b$ de som beteekent, die men verkrijgt door a en b bij niets op te tellen, welke som natuurlijk $a+b$ is.

§ 4. Worden twee getallen van elkander afgetrokken, dan wordt hetgeen er na die aftrekking overblijft, het *verschil* dezer getallen genoemd, en om deze bewerking op de getallen aan te duiden, gebruikt men het teeken — (min), welk teeken zoodanig tusschen die beide getallen geplaatst wordt, dat het af te trekken getal achter aan komt te staan. Zoo is $17-8=9$. Op gelijke wijze beteekent $a-b$ het verschil der getallen a en b, dat is, hetgeen er overblijft, wanneer b van a wordt afgetrokken; insgelijks geeft $a-5$ te kennen een getal, dat 5 minder is dan a, enz. Zoo lang aan twee getallen a en b geene bepaalde waarde wordt toegekend, kan men hun verschil niet anders, dan door $a-b$ voorstellen; het op deze wijze voorstellen van dit verschil is eigenlijk hetgeen men in de stelkunst aftrekken noemt; terwijl weder, hetgeen men in de cijferkunst als aftrekking heeft leeren kennen, daarin bestaat, dat men, als a en b bepaalde getallen zijn, een enkel getal vindt, hetwelk dit verschil aangeeft.

§ 5. Om aan te duiden, dat eenig getal achtervolgens met eenige andere getallen vermeerderd en verminderd wordt, plaatst men achter het eerste getal al die andere, en wel elk met het teeken + of — vóór zich, naar mate zij opgeteld of afgetrokken moeten worden. Dus beteekent $a+b-c-d+e$, de uitkomst, die men verkrijgt, wanneer men bij a optelt b, van deze som c aftrekt, het overschot nog eens met d vermindert, en bij de laatstverkregene rest e voegt.

Het is klaar, dat ook hier de rangorde, waarin die optellingen en aftrekkingen voorkomen, geenen invloed op de uitkomst kan hebben, en dat gevolgelijk $a+b-c-d+e$ hetzelfde beteekent, als $b-d+a+e-c$, $e-c+b-d+a$, enz. Men schrijft zelfs somtijds, om ook in dit geval de alphabetische rangorde te bewaren, een der af te trekken getallen vooraan, zoodat men in plaats van

$$b-a+d-c$$

ook schrijft $$-a+b-c+d.$$

§ 6. Worden twee getallen met elkander vermenigvuldigd, dan wordt de uitkomst dezer vermenigvuldiging het *product* dier getallen, en de getallen zelven de *factoren* van dit product genoemd. Om de vermenigvuldiging aan te duiden, gebruikt men het teeken $\times$ (maal), dat men somtijds door een enkel punt vervangt, of ook geheel weglaat, wanneer dit tot geene dubbelzinnigheid kan aanleiding geven. Alzoo is $7\times9=63$, stelt $a\times b$ of ab het product der getallen a en b voor, en is $3\times a$ of $3a$ het product der getallen 3 en a.

Worden meerdere getallen met elkander vermenigvuldigd, dan noemt men de uitkomst een *gedurig product*, waarvan de getallen zelven weder de factoren heeten. Om zulke gedurige producten aan te duiden, gebruikt men het teeken van vermenigvuldiging eenige achtervolgende malen. Aldus is $3\times5\times7\times12=15\times7\times12=105\times12=1260$; $1.3.5.7.9=945$; ingelijks is $2xyz$ het gedurig product der getallen 2, x, y en z, enz.

In het op deze wijze voorstellen van producten en gedurige producten, bestaat het stelkunstig vermenigvuldigen; terwijl het vermenigvuldigen, dat in de cijferkunst geleerd is, een enkel getal doet vinden, voor het product van twee of meer getallen.

Het is uit de cijferkunst gebleken, dat men in een gedurig product de factoren in zoodanige rangorde met elkander vermenigvuldigen kan, als men verkiest, zonder dat daardoor het product verandert. Men kan dus willekeurig schrijven: abc of bca; $2xy$ of $x\times2\times y$ of $yx\times2$; men is echter overeengekomen, om de factoren, door cijfers aangeduid wordende, vóóraan te plaatsen, en de letters in alphabetische rangorde te schikken, en men schrijft dus niet $d\times2\times b\times f\times3\times h$, maar $2.3.\,bdfh$ of $6bdfh$.

§ 7. Wanneer men een getal door een ander getal deelt, wordt het eerste getal het *deeltal*, het tweede de *deeler*, en de uitkomst dezer deeling het *quotient* dier getallen genoemd. Om deze bewerking op de getallen aan te duiden, gebruikt men het teeken : (gedeeld door), hetwelk zoodanig tusschen de beide getallen geplaatst wordt, dat de deeler achteraan komt te staan; of ook, daar men in de cijferkunst geleerd heeft, dat eene uitgedrukte deeling en eene breuk in het wezen der zaak hetzelfde zijn, gebruikt men, om eene deeling aan te duiden, dezelfde schrijfwijze, die men in de cijferkunst tot het voorstellen van breuken heeft leeren kennen: men schrijft namelijk het deeltal boven den deeler, met een dwars streepje tusschen beiden. Aldus is $12:3=\frac{12}{3}=4$, $13:8=\frac{13}{8}=1{,}625$. Op gelijke wijze beteekent $a:b$ of $\frac{a}{b}$ het quotient, dat er komt, wanneer b in a gedeeld wordt, en $\frac{4}{c}$ stelt het quotient voor der deeling van 4 door c. Zoo lang a en b onbepaalde getallen zijn, kan men hun quotient niet eenvoudiger voorstellen, dan door te schrijven $a:b$ of $\frac{a}{b}$, en het op deze wijze voorstellen van het quotient is eigenlijk stelkunstig deelen; hetgeen men daarentegen in de cijferkunst als deeling heeft leeren kennen, is het vinden van een enkel getal voor het quotient van twee bepaalde getallen.

§ 8. Wanneer men de som van eenige gelijke getallen moet nemen, kan deze som eenvoudiger worden voorgesteld, dan door het teeken $+$ tusschen al die gelijke getallen te plaatsen; het is namelijk klaar, dat men heeft $a+a+a=3a$, want $a+a+a$ stelt de som voor van 3 gelijke getallen a, en $3a$ beteekent het product der getallen a en 3, of het getal a driemaal genomen. Het op deze wijze verkregene getal, dat aanduidt uit hoeveel gelijke getallen eene som is zamengesteld, wordt de *coëfficiënt* genoemd van het getal, dat eenige malen genomen is. Zoo is in $5abc$ het getal 5 de coëfficiënt van abc, omdat $5abc$ niets anders beteekent dan de som van 5 gelijke getallen, die elk door abc worden voorgesteld.

In plaats van bepaalde getallen te zijn, kunnen coëfficiënten ook door letters worden aangeduid; zoo zoude men na als de som van n gelijke getallen a kunnen beschouwen, en dan zou n de coëfficiënt van a zijn; of ook zou men na als de som van a gelijke getallen n kunnen aanzien, en in dat geval zou a de coëfficiënt van n genoemd worden. Het is hieruit klaar, dat wanneer men een gedurig product, b. v. $3abc$ heeft, 3 als de coëfficiënt van abc, $3a$ als de coëfficiënt van bc, $3ac$ als de coëfficiënt van b, c als de coëfficiënt van $3ab$ enz., kan worden beschouwd. Het gebruik heeft echter gewild, dat, als in eenige producten een zelfde factor voorkomt, men dan in elk dezer producten meer bepaaldelijk den overblijvenden factor als coëfficiënt aanmerkt. Had men, b. v.

$$2\,ax,\ 3\,ax,\ 5\,ax \text{ en } 8\,ax$$

dan zou men 2, 3, 5 en 8; had men echter

$$2\,ax,\ 3\,bx,\ 5\,cx \text{ en } 8\,dx$$

dan zou men $2a$, $3b$, $5c$ en $8d$ coëfficiënten noemen. Indien eene stelkunstige grootheid geen' coëfficiënt heeft, kan men dezelve altijd aanmerken, als de eenheid tot coëfficiënt te hebben; immers is het duidelijk, dat $a=1\times a=1a$ is.

§ 9. Om het product van eenige gelijke factoren eenvoudiger voor te stellen, dan door al die gelijke factoren met het teeken van vermenigvuldiging naast elkander te plaatsen, schrijft men dien gelijken factor slechts eenmaal, en plaatst, een weinig hooger, ter regterzijde van dien factor, eene kleine cijfer, die het aantal gelijke factoren aanwijst, waaruit het product bestaat. In plaats van $a\,a\,a$ schrijft men alzoo a^3. Gelijkerwijze heeft men $a\,a=a^2$, $b\,b\,b\,b=b^4$, $2\times2\times2\times2\times2=2^5$, enz. Zulke producten van gelijke factoren, noemt men *magten*, en de cijfers, die aanwijzen uit hoeveel gelijke factoren die magten bestaan, worden derzelver *exponenten* genoemd. Aldus is a^2 de tweede magt van a, b^3 de derde magt van b, c^n de n^{de} magt van c, enz. Indien eene stelkunstige grootheid geen' exponent heeft, kan men dezelve altijd aanmerken als de eenheid tot exponent te hebben; immers is het duidelijk, dat $a=a^1$ is, want de exponent 1 wijst aan, dat de grootheid a^1 slechts uit éénen enkelen factor a bestaat, en het is daarom, dat men elke grootheid ook de eerste magt van zich zelve noemt.

Van elk bepaald getal kan men door eenvoudige vermenigvuldiging al de verschillende magten berekenen. Was, b. v. $a=3$, dan zou $a^2=3^2=3\times3=9$, $a^3=3^3=3\times3\times3=27$, $a^4=3^4=3\times3\times3\times3=81$, enz. zijn. Indien men in a^n, $a=4$ en $n=5$ nam, zou men hebben $a^n=4^5=4\times4\times4\times4\times4=1024$. Deze bewerking noemt men de *magtsverheffing*. Zoo wil b. v. het getal 4 tot de vijfde magt te verheffen, niets anders zeggen, dan het berekenen van $4^5=1024$. Ten gevolge van meetkunstige beschouwingen, noemt men de tweede magt van een getal, ook het vierkant of quadraat van dat getal, en de spreekwijze, een getal in het vierkant brengen, beteekent dan ook niets anders, dan een getal tot de tweede magt te verheffen. Even zoo wordt somtijds ook de derde magt van een getal deszelfs cubus genoemd.

§ 10. Elk getal, dat tot eene zekere magt verheven is, noemt men den *wortel* van die magt; zoo is b. v. a de n^{de}magtswortel van a^n, en 4 de vijfdemagtswortel van 4^5 of van 1024, enz. Om dezelfde reden, als bij de magten gezegd is, noemt men den tweedemagtswortel van eenig getal, gewoonlijk deszelfs vierkantswortel of quadraatswortel, zoo als ook somtijds het woord derdemagtswortel, door dat van cubuswortel vervangen wordt.

Wanneer eenige magt gegeven is, en men wil den wortel van die magt vinden, wordt de bewerking, waardoor dit geschiedt, *worteltrekking* genoemd. Alzoo beteekent het trekken van den n^{de}magtswortel uit eenig gegeven getal, een getal te vinden, dat tot de n^{de} magt verheven wordende, dit gegeven getal voortbrengt. Hoe deze bewerking uitgevoerd wordt, zal in het vervolg geleerd worden. Voor het tegenwoordige is het genoegzaam te weten, dat deze bewerking wordt aangeduid door het teeken $\sqrt{}$ (wortel uit) vóór het getal te plaatsen, waaruit de wortel moet worden getrokken, en dat men in dit teeken eene kleine cijfer stelt, om aan te wijzen den hoeveelstemagtswortel men begeert; bij den tweedemagtswortel, vierkants- of quadraats-wortel wordt die cijfer echter weggelaten. Men heeft b. v. $\sqrt{25}=5$; $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[5]{1024}=4$, enz. Alzoo beteekent ook $\sqrt{a}$ den vierkantswortel uit a, dat is, een getal, waarvan de tweede magt a is; $\sqrt[n]{a}$ beteekent even zoo een getal, waarvan de $n$de magt a is, enz.

§ 11. Wij hebben nu gezien, hoe men getallen voorstelt, die door eene der zes bewerkingen: optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, deeling, magtsverheffing en worteltrekking uit andere getallen moeten worden afgeleid. De alzoo voorgestelde getallen noemt men *stelkunstige vormen*, *stelkunstige grootheden*, welke benaming men zelfs toepast op getallen, die door eene enkele letter worden aangeduid. Op stelkunstige vormen, die reeds uit zekere getallen zijn zamengesteld, kan men op nieuw eene der genoemde zes bewerkingen toepassen, door zich van de aangewezene teekens te bedienen; alsdan beschouwt men die vormen als enkele getallen, en plaatst dezelve, in het algemeen, tusschen twee haakjes, om aan te duiden, dat de aangewezene bewerking den geheelen vorm betreft; wanneer zulks echter ook zonder haakjes duidelijk genoeg blijken zou, kan men dezelve weglaten. Wil men, bij voorbeeld, de producten $a\,c$ en $b\,d$ bij elkander optellen, dan schrijft men

$$ac+bd.$$

Moet deze som nu nog vermenigvuldigd worden met de tweede magt van het verschil $e-f$, dan wordt voor het product geschreven

$$(ac+bd)\,(e-f)^2$$

Wil men van dit product weder aftrekken de derde magt van het product $g\,h\,i$, dan schrijft men voor de rest

$$(ac+bd)\,(e-f)^2-(g\,h\,i)^3.$$

Moet deze laatste vorm nog gedeeld worden door het verschil der breuken $\frac{k}{l}$ en $\frac{m}{n}$, dan schrijft men voor het quotient

$$\frac{(ac+bd)\,(e-f)^2-(g\,h\,i)^3}{\frac{k}{l}-\frac{m}{n}}.$$

Begeerde men eindelijk nog den vierdemagtswortel uit de laatstverkregene uitdrukking te trekken, dan zou men voor dien wortel schrijven:

$$\sqrt[4]{\frac{(ac+bd)\,(e-f)^2-(g\,h\,i)^3}{\frac{k}{l}-\frac{m}{n}}}.$$

Het kan gebeuren, dat men eenen stelkunstigen vorm, waarin reeds haakjes voorkomen, op nieuw tusschen haakjes moet stellen; in dat geval gebruikt men dikwijls duidelijkheidshalve haakjes van eene andere gedaante. Zoo zou, bij voorbeeld, de stelkunstige grootheid

$$[ad-b^2(c-3f)]\,gh$$

beteekenen, dat men $c-3f$ met b^2 moet vermenigvuldigen, dit product van het product ad aftrekken, en eindelijk de rest met gh vermenigvuldigen.

Om zich met de regte beteekenis van deze schrijfwijzen gemeenzaam te maken, is het zeer nuttig, om voor elk der letters, die in eenen stelkunstigen vorm voorkomen, bepaalde, hetzij dan geheele of gebrokene, getallen aan te nemen, en te berekenen, welke waarde de vorm hierdoor verkrijgt.

Ook zal men wel doen, de volgende vormen twee aan twee met elkander te vergelijken, en derzelver beteekenis te verklaren, ten einde het onderscheid in te zien, dat uit het al of niet gebruiken der haakjes ontstaat:

$$a-b+c \text{ en } a-(b+c);$$
$$a-bc \text{ en } (a-b)c;$$
$$a+bc-d \text{ en } (a+b)\,(c-d);$$
$$a+b(c-d) \text{ en } (a+b)c-d;$$
$$\sqrt{a+b} \text{ en } \sqrt{(a+b)};$$
$$a+b^2 \text{ en } (a+b)^2$$
$$ab+(cd)^n \text{ en } (ab+cd)^n$$
$$(a-b)^2 \text{ en } a^2-b^2.$$

§ 12. Het is duidelijk, dat men door de omschrevene bewerkingen op onbepaalde getallen toe te passen, uit die getallen een oneindig groot aantal stelkunstige vormen kan zamenstellen; men onderscheidt dezelve in een- en veelledige vormen.

Wanneer een stelkunstige vorm bestaat uit de som of het verschil van twee andere, noemt men dien vorm een' *tweeledigen*, terwijl de vormen, waaruit zulk een tweeledige is zamengesteld, deszelfs *termen* heeten. Zoo zijn $a+b$ en $a-b$ tweeledige vormen, waarvan a en b de termen zijn. Even zoo zijn

$$2a^2b+3cd^2, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n-\sqrt{\frac{c}{d}}, \qquad pq+\frac{\sqrt{2\,rs}}{t},$$
$$(a+b)^3c-(ac-bd)e, \qquad \frac{m^2+n^2}{p}-\frac{7q^3}{m+n}, \qquad \sqrt[3]{a^2}+\frac{bc+de-fg}{hi-klm+n},$$

alle tweeledige vormen; het valt van zelf in het oog, wat de beide termen van elk dezer vormen zijn.

Is een stelkunstige vorm uit drie of meer andere door optelling of aftrekking zamengesteld, dan noemt men denzelven, in het algemeen, een' *veelledigen* vorm, waarvan dan weder elk der drie of meer zamenstellende vormen de termen zijn. Het is hieruit klaar, wat men verstaat door een' drieledigen vorm, vierledigen vorm, enz.

Zoo zijn van de volgende vormen:

$$ab+ac+bc,$$

$$(cd+ef)(ghi-klm)-\frac{p}{q+r}+abcd,$$

$$\frac{(a+b)(c-d)}{4e(f+g)}-\frac{h(i-k+l)}{m(n+p)}+a-\sqrt{3},$$

$$9\sqrt[6]{(a+b)}-5(a-b)+(7ab)^p+cdefg,$$

de twee eerste drieledige, en de twee laatste vierledige vormen.

Elke vorm, die niet uit de som of het verschil van twee of meer andere bestaat, noemt men een' *eenledigen* vorm; bij gevolg zijn alle producten, quotienten, magten en wortels, van welke de vermenigvuldiging, deeling, magtsverheffing en worteltrekking op de boven verklaarde wijze is aangeduid, eenledige vormen, al ware het dan ook, dat twee- of veelledige vormen tot derzelver zamenstelling gediend hadden. Aldus zijn:

$$(ab+cd)(ac-bd),$$

$$\frac{a+b+c}{a-b-c},$$

$$(pq+qr+pr)^3,$$

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)^n,\quad \sqrt[3]{(a^3-b^3)^2},$$

$$\sqrt[7]{\frac{a(b+c)-b(a-c)}{b(a+c)+c(a-b)}},$$

alle eenledige vormen. Het is voorts duidelijk, dat elke eenledige vorm slechts eenen enkelen term van eenen veelledigen vorm kan uitmaken.

§ 13. Men onderscheidt de stelkunstige vormen ook nog in geheele en gebrokene. Een *geheele* vorm is zoodanig een, waarin geene deeling voorkomt, terwijl elke uitgedrukte deeling een *gebroken* vorm genoemd wordt, waarvan het deeltal de *teller*, en de deeler de *noemer* is. Door een' *gemengden* vorm verstaat men zoodanig eenen, die uit de som of het verschil van eenen geheelen en gebrokenen bestaat; terwijl men een *zamengesteld* gebroken noemt, elken gebrokenen vorm, waarvan teller en noemer beide of een van beide gebrokene of gemengde vormen zijn. Eindelijk noemt men *wortelgrootheden* zulke vormen, waarin wortelteekens voorkomen.

§ 14. Even als men in de cijferkunst, wanneer de deeling van twee getallen niet in den eigenlijken zin kan plaats hebben, eene nieuwe soort van grootheden, namelijk de gebrokens, heeft leeren kennen, zoo ook ontstaat in de stelkunst, wanneer eene aftrekking niet in den eigenlijken zin kan geschieden, omdat het af te trekken getal grooter is, dan het getal, waarvan moet afgetrokken worden, eene nieuwe soort van grootheden, die men *negatieve getallen* noemt. Door negatieve getallen verstaat men namelijk de resten van al zulke aftrekkingen. Getallen, die niet negatief zijn, noemt men, in tegenoverstelling, *positieve getallen.* In de cijferkunst, heeft men slechts met bepaalde getallen te doen, en men kan dus vooraf altijd beoordeelen, welk van twee getallen het grootst is, zoodat men alleen kleinere van grootere getallen behoeft af te trekken; maar in de stelkunst trekt men getallen van elkander af, door letters voorgesteld, waaraan men geene bepaalde waarde toekent, en waarvoor men alle mogelijke getallenwaarden zou kunnen nemen: bij zulk eene aftrekking kan men dus in het onzekere zijn, of men een kleiner getal van een grooter, dan wel een grooter van een kleiner getal heeft afgetrokken, en van hier, dat de negatieve getallen alleen aan de stelkunstige aftrekking hunnen oorsprong te danken hebben. Neemt men, b. v. in $a-b$, $a=10$ en $b=17$, dan is $a-b=10-17$ een negatief getal. Het negatieve getal 10—17 kan eenvoudiger voorgesteld worden, door op te merken, dat de rest eener aftrekking onveranderd blijft, wanneer men beide getallen met eenzelfde getal vermindert; aldus is

$$10-17=9-16=2-9=0-7=-7.$$

Hieruit blijkt, dat het negatief getal 10—17 voorgesteld moet worden, door het teeken — te plaatsen voor het verschil 17—10=7.

In het algemeen heeft men

$$a-b=(a-a)-(b-a)=0-(b-a)=-(b-a),$$

of ook

$$b-a=(b-b)-(a-b)=0-(a-b)=-(a-b);$$

waaruit blijkt, dat men de orde, waarin twee getallen van elkander moeten afgetrokken worden, mag omkeeren, mits men het teeken — voor het alsdan komende verschil plaatse.

Is dus $a>b$ en het verschil van a en b gelijk c, dan is

$$a-b=c \text{ en } b-a=-c.$$

Is echter $a<b$ en het verschil van a en b gelijk c, dan is

$$a-b=-c \text{ en } b-a=c.$$

Men kan ook een negatief getal door eene enkele letter voorstellen, en in het vervolg zal genoegzaam blijken, dat bij de stelkunstige behandeling der getallen dezelfde regels moeten gevolgd worden, onverschillig of de letters positieve, dan wel negatieve getallen voorstellen.

§ 15. Men kan zelfs elken stelkunstigen vorm door eene enkele letter voorstellen, het zij, dat dit ter bekorting strekt, het zij, dat zulks noodig is in algemeene stelkunstige beschouwingen.

Indien eene enkele letter een' stelkunstigen vorm verbeeldt, stelt zij echter altijd het positieve of negatieve getal voor, dat uit het berekenen der waarde van die stelkunstige uitdrukking zou voortkomen. In al het verder voor te dragene, moet het dus, behoudens het aangemerkte in het slot der vorige §, onverschillig zijn, of de letters onmiddellijk getallen, dan wel stelkunstige uitdrukkingen verbeelden.

§ 16. Uit het voorgaande is gebleken, hoe men stelkunstige grootheden voorstelt, die op eene bepaalde wijze uit andere stelkunstige grootheden worden gevormd; gewoonlijk kunnen de aldus verkregene vormen tot andere gedaanten gebragt worden, welke gedaanteveranderingen, in het algemeen, *herleidingen* genoemd worden, en in het bijzonder den naam van *ontwikkelingen* dragen, wanneer zij dienen, om aan te toonen, hoe de bewerkingen, op veelledige vormen aangeduid, afhangen van de bewerkingen op de enkele termen van die vormen. Het zijn deze gedaanteveranderingen, die in de volgende §§ zullen behandeld worden, en wel vooreerst, ten aanzien van geheele stelkunstige vormen, waarin geene wortelteekens voorkomen.

BEHANDELING DER GEHEELE STELKUNSTIGE VORMEN.

Herleiding tot eenvoudiger' vorm van de som en het verschil van twee of meer stelkunstige grootheden.

§ 17. Indien eenige stelkunstige grootheden alleen van elkander onderscheiden zijn door derzelver coëfficiënten, noemt men dezelve *gelijksoortig*. De som van twee of meer gelijksoortige grootheden kan altijd vereenvoudigd worden, door werkelijke optelling dezer coëfficiënten. Aldus is $2a+3a=(2+3)a=5a$, $ab^4+3ab^4+7ab^4=(1+3+7)ab^4=11ab^4$, enz. Worden de coëfficiënten door letters voorgesteld, dan kan men denzelfden weg volgen. Zoo is $ax+bx=(a+b)x$, $2by+cy+3dy=(2b+c+3d)y$.

§ 18. Het verschil van twee gelijksoortige grootheden kan almede, door werkelijke aftrekking der coëfficiënten, vereenvoudigd worden. Aldus is $5a-3a=(5-3)a=2a$, $a^3-7a^3=(1-7)a^3=-6a^3$, $8a^2x-a^2x=(8-1)a^2x=7a^2x$, $2a^3xy-3b^2xy=(2a^3-3b^2)xy$, enz.

§ 19. Indien eenige grootheid achtervolgens met eenige gelijksoortige moet vermeerderd en verminderd worden, voert de optelling en aftrekking der coëfficiënten tot eene dergelijke vereenvoudiging. Men heeft dus: $7pq+3pq-4pq=(7+3-4)pq=6pq$, $5abx+4abx-8abx-abx=(5+4-8-1)abx=(9-9)abx=0$, $7bc^2d-3bc^2d-8bc^2d+2bc^2d=(7-3-8+2)bc^2d=(7+2-3-8)bc^2d=(9-11)bc^2d=-2bc^2d$, $max+2nax-mnax+ax=(m+2n-mn+1)ax$, enz.

§ 20. Hetgeen in de drie vorige §§ gezegd is, is uit zich zelf klaar, en behoeft dus geen bewijs. Omdat alle stelkunstige grootheden, die een' gemeenschappelijken factor hebben, ten opzigte van dien factor, als gelijksoortig kunnen worden beschouwd, blijkt hieruit tevens, dat bij elken vorm, die door optelling en aftrekking van zulke grootheden ontstaan is, die gemeenschappelijke factor buiten haakjes kan gebragt worden. Deze eigenschap wordt stelkunstig uitgedrukt door de vergelijking:

$$ax+bx-cx=(a+b-c)x \ldots\ldots (1).$$

§ 21. Wanneer een veelledige vorm, b. v. $p+q+r$, moet opgeteld worden bij eenen anderen stelkunstigen vorm A, dan is het klaar, dat het onverschillig is, of men de grootheid A achtervolgens met elk der termen p, q en r vermeerdert, dan wel of men de som der termen p, q en r in eens bij de grootheid A voegt; derhalve is

$$A+(p+q+r)=A+p+q+r \ldots\ldots (2).$$

Komen er in den op te tellen' vorm, af te trekken termen voor, b. v. moest $p+q-r$ opgeteld worden bij den vorm A, dan is het even duidelijk, dat men zal hebben:

$$A+(p+q-r)=A+p+q-r \ldots\ldots (3).$$

Hieruit blijkt, dat, als eenige veelledige vormen bij elkander moeten worden opgeteld, men onmiddellijk al de termen van die vormen, elk met zijn eigen teeken, achter elkander kan schrijven. Aldus is

$$(a+b)+(c+d-e)+(f-g-h)=a+b+c+d-e+f-g-h \ldots (4).$$

§ 22. Wanneer een veelledige vorm, b. v. $p+q+r$ van eenen anderen vorm A moet afgetrokken worden, dan is het klaar, dat het onverschillig is, of men den vorm A achtervolgens met elk der termen p, q en r, dan wel in eens met de som dier termen vermindert. Men heeft dus

$$A-(p+q+r)=A-p-q-r \ldots\ldots (5)$$

Is in den af te trekken' vorm een term, die het teeken — vóór zich heeft, zoodat, b. v. $p-q$ van A moest worden afgetrokken, dan merke men op, dat indien A alleen met p verminderd werd, de rest $A-p$ de grootheid q te klein zou zijn, omdat A niet met p, maar met $p-q$ moest verminderd worden, en men moet dus de rest $A-p$ nog met q vermeerderen, om de rest $A-(p-q)$ te verkrijgen, derhalve is

$$A-(p-q)=A-p+q \ldots\ldots (6).$$

Zijn in den af te trekken' vorm verscheidene termen, die de teekens + of — vóór zich hebben, zoodat b. v. $p+q-r+s-t-u$ van den vorm A moest worden afgetrokken, dan zou men voor dien af te trekken' vorm volgens § 5 vooreerst schrijven $p+q+s-r-t-u$, daarna ingevolge vergelijking (5) $(p+q+s)-(r+t+u)$.

Men heeft dus

$$A-(p+q-r+s-t-u)=A-[(p+q+s)-(r+t+u)],$$

ingevolge vergelijking (6) is dan ook

$$A-(p+q-r+s-t-u)=A-(p+q+s)+(r+t+u);$$

ingevolge vergelijking (4) en (5) is verder

$$A-(p+q-r+s-t-u)=A-p-q-s+r+t+u,$$

en eindelijk volgens § 5, is

$$A-(p+q-r+s-t-u)=A-p-q+r-s+t+u \ldots\ldots (7).$$

Hieruit blijkt, dat, wanneer een veelledige vorm van eenen anderen moet afgetrokken worden, men al de termen van dien af te trekken' vorm slechts met tegengestelde teekens achter den anderen vorm behoeft te schrijven.

§ 23. Wordt een negatief getal bij een ander getal A opgeteld, dan geeft dit dezelfde uitkomst, als of men een even groot positief getal van het getal A aftrok.

En wordt een negatief getal van een ander getal A afgetrokken, dan dan geeft dit dezelfde uitkomst, als of men een even groot positief getal bij het getal A optelde.

Om deze beide stellingen te bewijzen, merke men op, dat volgens (3)

$$A+(p-q)=A+p-q$$

en volgens (6) $\quad A-(q-p)=A-q+p$

is. Daar nu klaarblijkelijk

$$A+p-q=A-q+p$$

is, heeft men ook $\quad A+(p-q)=A-(q-p) \ldots\ldots\ldots (8).$

Onderstellen wij nu $p<q$, dan is $p-q$ volgens § 14 een negatief getal, b. v.

$$p-q=-a,$$

maar, volgens dezelfde §, is dan ook $q-p$ een even groot positief getal, en dus

$$q-p=a;$$

deze waarden van $p-q$ en $q-p$ in (8) overbrengende, komt er

$$A+(-a)=A-a \ldots\ldots\ldots (9).$$

Onderstellen wij echter $p>q$, dan is $p-q$ een positief, en volgens § 14, $q-p$ een even groot negatief getal, zoodat

$$p-q=a$$

stellende, $\quad q-p=-a$

is. Door deze laatste onderstelling, gaat (8) over in

$$A+a=A-(-a) \ldots\ldots\ldots (10);$$

zijnde door de vergelijkingen (9) en (10) het gestelde bewezen.

Uit het bewezene volgt onmiddellijk, dat een veelledige vorm, waarvan de termen door de teekens + en — met elkander verbonden zijn, b. v.

$$a+b-c+d-e-f-g$$

niet alleen kan aangezien worden als de uitkomst, die men verkrijgt, door de som van a, b en d achtervolgens te verminderen met c, e, f en g, maar ook als de som van a, b, $-c$, d, $-e$, $-f$, en $-g$.

Men kan dus de termen, die het teeken — vóór zich hebben, zoowel *negatieve termen* als af te trekken' termen noemen.

Uit de vergelijkingen (9) en (5) volgt nog, dat men heeft

$$A+(-a)+(-b)+(-c)=A-a-b-c=A-(a+b+c) \ldots\ldots (11);$$

stelt men nu $A=0$, dan zoude men hebben

$$(-a)+(-b)+(-c)=-a-b-c=-(a+b+c) \ldots\ldots (12),$$

waaruit blijkt, dat de som van eenige negatieve getallen niets anders is, dan de negatieve som dier getallen, elk in het bijzonder positief genomen. Daar in het algemeen volgens § 14

$$p-q=-(q-p)$$

is, heeft men, door $p=a+b+$ *enz.* en $q=a'+b'+$ *enz.* te stellen,

$a+b+$ *enz.* $-(a'+b'+$ *enz.*$)=-[(a'+b'+$*enz.*$)-(a+b+$ *enz.*$)]$,

of volgens (5),

$a+b+$ *enz.* $-a'-b'-$ *enz.* $=-(a'+b'+$ *enz.* $-a-b-$ *enz.*$)$

dat is,

$a+b+$ *enz.* $-a'-b'-$ *enz.* $=-(-a-b-$ *enz.* $+a'+b'+$ *enz.*$)$. (12′).

Uit de vergelijkingen (12) en (12′) blijkt, dat als eene veelledige grootheid, tusschen twee haakjes staande, het teeken — voor zich heeft, men deze haakjes weg kan laten, mits men de teekens van al de termen dezer grootheid omkeere.

§ 24. De herleiding tot eenvoudiger' vorm van de som of het verschil van eenige stelkunstige vormen steunt op hetgeen in § 17 tot en met § 23 gezegd is. Men heeft hiertoe den volgenden

Regel. *Schryf al de termen der gegevene vormen achter elkander, laat daarbij elken term van een' op te tellen' vorm, of van een' vorm, waarvan afgetrokken moet worden, zijn eigen teeken behouden, maar verander het teeken van elken term eens af te trekken' vorms. Vereenig vervolgens al de gelijksoortige termen, door de positieve en negatieve, elk in het bijzonder, tot éénen term, en deze twee termen weder tot eenen enkelen te herleiden.*

Voorbeeld. Zij gegeven de som te vinden van de vormen $3a^2b-bc^2+2abc-b^3$, $2a^2c-ab^2+4a^2b$, $5abc$, $7bc^2+4ab^2$, $-5a^2c$, $2bc^2-a^2b-3abc$, $5a^3-6a^2b-abc+c^3$, $3c^3-11bc^2-2b^3$, dan heeft men

$(3a^2b-bc^2+2abc-b^3)+(2a^2c-ab^2+4a^2b)+5abc+(7bc^2+4ab^2)+(-5a^2c)$
$+(2bc^2-a^2b-3abc)+(5a^3-6a^2b-abc+c^3)+(3c^3-11bc^2-2b^3)=3a^2b-$
$bc^2+2abc-b^3+2a^2c-ab^2+4a^2b+5abc+7bc^2+4ab^2-5a^2c+2bc^2-a^2b-$
$3abc+5a^3-6a^2b-abc+c^3+3c^3-11bc^2-2b^3=3a^2b+4a^2b-a^2b-6a^2b+$
$7bc^2+2bc^2-bc^2-11bc^2+2abc+5abc-3abc-abc-b^3-2b^3+2a^2c-5a^2c+$
$4ab^2-ab^2+5a^3+c^3+3c^3=7a^2b-7a^2b+9bc^2-12bc^2+7abc-4abc-3b^3+$
$2a^2c-5a^2c+4ab^2-ab^2+5a^3+4c^3=-3bc^2+3abc-3b^3-3a^2c+3ab^2+5a^3+$
$4c^3=5a^3-3a^2c+3ab^2+3abc-3b^3-3bc^2+4c^3$.

Voorbeeld. Laat gevraagd worden om den vorm $5a^3-2ab+3a-1$ af te trekken van $2a^3+5ab-3b-5$, en deze rest nog te verminderen met $-ab-4$, dan heeft men:

$(2a^3+5ab-3b-5)-(5a^3-2ab+3a-1)-(-ab-4)=2a^3+5ab-3b-5-5a^3$
$+2ab-3a+1+ab+4=2a^3-5a^3+5ab+2ab+ab-3b-3a-5+1+4=-3a^3$
$+8ab-3b-3a=-3a^3+8ab-3a-3b$.

§ 25. Indien men vooruit ziet, dat onder de vormen, die opgeteld en afgetrokken moeten worden, onderscheidene gelijksoortige termen voorkomen, schrijft men die vormen zoodanig onder elkander, dat de onderling gelijksoortige termen in eenen zelfden kolom komen te staan, ten einde derzelver vereeniging tot eenen enkelen term gemakkelijker te maken. Voor de voorbeelden, in de vorige § behandeld, zou deze bewerking aldus komen te staan.

Eerste voorbeeld.

$$
\begin{array}{l}
+3a^2b - bc^2 + 2abc - b^3 \\
+4a^2b \ldots\ldots\ldots\ldots + 2a^2c - ab^2 \\
\qquad +5abc \\
\quad + 7bc^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + 4ab^2 \\
\qquad\qquad -5a^2c \\
- a^2b + 2bc^2 - 3abc \\
-6a^2b \ldots - abc \ldots\ldots\ldots\ldots + 5a^3 + c^3 \\
\quad -11bc^2 \ldots -2b^3 \ldots\ldots\ldots\ldots + 3c^3 \\
\hline
\text{som: } -3bc^2 + 3abc - 3b^3 - 3a^2c + 3ab^2 + 5a^3 + 4c^3.
\end{array}
$$

Tweede voorbeeld.

$$
\begin{array}{l}
2a^3 + 5ab - 3b - 5 \\
5a^3 - 2ab \ldots -1 + 3a \\
\hline
\text{1e rest: } -3a^3 + 7ab - 3b - 4 - 3a \\
\qquad - ab \quad -4 \\
\hline
\text{2e rest: } -3a^3 + 8ab - 3b \ldots -3a.
\end{array}
$$

§ 26. Wanneer in op te tellen en af te trekken vormen verschillende magten van eene zelfde letter voorkomen, kan men volgens § 8 de termen, welke dezelfde magt van die letter als factor bevatten, als gelijksoortig beschouwen, en vervolgens de handelwijze van de vorige § toe passen. Men heeft in zoodanig geval tot regel aangenomen, die vormen vooraf naar de afdalende of opklimmende magten van die letter te rangschikken.

Voorbeelden. 1°. De som te vinden van de vormen $ax^3 + bx + c - dx^2$, $cx^2 - d - 3bx^3$, en $2d + bx^3 - cx$.

2°. Insgelijks van de vormen $b^2y^2 + c^4 - 2c^3y + 2ay^3 + a^3y + 3by^3 - 3a^2y^2$, $ay^3 + c^3y + y^2 - 2y^3 - b^4 + 2b^2y^2$ en $3y^3 - 3ay^3 - y^2 + 3a^2y^2 - 3b^2y^2 - 2a^3y$.

3°. Te verminderen $ax + by + cz$ met $a'x + b'y + c'z$.

De bewerkingen komen nu, volgens het gezegde, aldus te staan:

1°.

$$
\begin{array}{l}
\quad ax^3 - dx^2 + bx + c \\
-3bx^3 + cx^2 \ldots\ldots - d \\
\quad bx^3 \ldots\ldots - cx + 2d \\
\hline
\text{som: } (a-2b)x^3 + (c-d)x^2 + (b-c)x + (c+d)
\end{array}
$$

2°.

$$
\begin{array}{l}
(2a+3b)y^3 - (3a^2-b^2)y^2 + (a^3-2c^3)y + c^4 \\
(a-2)y^3 + (2b^2+1)y^2 + c^3y - b^4 \\
(3-3a)y^3 - (3b^2-3a^2+1)y^2 - 2a^3y \\
\hline
\text{som: } (3b+1)y^3 \ldots\ldots\ldots\ldots - (a^3+c^3)y - (b^4-c^4)
\end{array}
$$

3°. $\begin{array}{ccccc} ax & + & by & + & cz \\ a'x & + & b'y & + & c'z \\ \hline \end{array}$

rest: $(a-a')x+(b-b')y+(c-c')z.$

Herleiding en ontwikkeling van de producten der stelkunstige vormen.

§ 27. Wanneer twee stelkunstige grootheden beide magten van een' zelfden wortel zijn, kan derzelver product eenvoudiger worden voorgesteld, dan door dezelve met of zonder het teeken $\times$ naast elkander te plaatsen. Moest bij voorbeeld a^3 met a^4 vermenigvuldigd worden, dan zou men hebben

$$a^3\times a^4=aaa\times aaaa=aaaaaaa=a^7\,;$$

zijnde het duidelijk, dat de exponent 7 van het product niet anders is en niet anders zijn kan, dan de som der exponenten 3 en 4 van de factoren.

Even zoo is in het algemeen

$$a^p\times a^q=a^{p+q} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13);$$

want a^p is het product van p gelijke factoren a, a^q is het product van q gelijke factoren a, dus is $a^p\times a^q$ het product van $p+q$ gelijke factoren a, dat is a^{p+q}.
Men moet echter wel opmerken, dat in de vergelijking (13) p en q geheele positieve getallen beteekenen.

Het is klaar, dat men even zoo hebben zal

$$a^p\times a^q\times a^r=a^{p+q+r}$$

$$b^m\times b^n\times b^p\times b^q=b^{m+n+p+q}$$

§ 28. Hetgeen in de vorige § is aangetoond, in verband met hetgeen in § 6 is gezegd, is voldoende om het product van twee of meer eenledige stelkunstige vormen, die het teeken $+$ voor zich hebben, zoo eenvoudig mogelijk voor te stellen.

Moest bij voorbeeld $3ab^2c^3d$ vermenigvuldigd worden met $7b^3cde^2$, dan zou men hebben:

$$3ab^2c^3d\times 7b^3cde^2=3\times 7ab^2b^3c^3cdde^2=21ab^5c^4d^2e^2;$$

even zoo is $4a^2bc^3\times 5ac^4\times 7a^3d=4\times 5\times 7a^2aa^3bc^3c^4d=140a^6bc^7d.$

Voor het vermenigvuldigen van eenledige stelkunstige vormen, die het teeken $+$ voor zich hebben, heeft men dus den volgenden

Regel. *Vermenigvuldig de getallencoëfficiënten der gegevene vormen met elkander, schrijf achter dit product al de overige factoren, in alphabetische rangorde, en geef aan elken factor tot exponent, de som der exponenten, die deze factor in de gegevene vormen heeft.*

Deze regel blijft even goed doorgaan, wanneer de opgegevene vormen, hoezeer eenledig, veelledige factoren bevatten. Zoo is, bij voorbeeld, $3a(a^2+b^2)(c-d)^3 \times 6b(a^2+b^2)^2(c-d)^2 = 18a\,b(a^2+b^2)^3(c-d)^5$.

§ 29. Wanneer de som van eenige getallen a, b, c, enz. met een zeker getal n moet vermenigvuldigd worden, is het klaarblijkelijk onverschillig, of men de som dier getallen in eens n maal neemt, of wel, dat men elk dezer getallen in het bijzonder met n vermenigvuldigt, en daarna de som neemt van die producten.

Men heeft dus $(a+b+c+ \text{enz.})n = a\,n + b\,n + c\,n + \text{enz.}$ . . . . . . (14); deze regel is het omgekeerde van hetgeen in § 17 gezegd is.

Wanneer het verschil van twee getallen a en b met een zeker getal m moet vermenigvuldigd worden, is het even duidelijk, dat het onverschillig is, of men in eens het verschil m maal neemt, dan wel, of men elk der getallen a en b met m vermenigvuldigt, en het verschil dezer producten neemt.

Men heeft dus $(a-b)m = a\,m - b\,m$ . . . . (15); deze regel is het omgekeerde van hetgeen in § 18 gezegd is.

Wanneer eindelijk een vorm, waarin op te tellen en af te trekken termen voorkomen, bij voorbeeld, $a-b+c-d-e$ met een zeker getal p moet vermenigvuldigd worden, dan heeft men vooreerst, volgens (5),

$$p\times(a-b+c-d-e) = p\times[(a+c)-(b+d+e)].$$

Volgens (15) is

$$p\times[(a+c)-(b+d+e)] = p(a+c)-p(b+d+e),$$

en dus ook

$$p\times(a-b+c-d-e) = p(a+c)-p(b+d+e);$$

maar men heeft volgens (14)

$$p(a+c) = a\,p + c\,p$$

en

$$p(b+d+e) = b\,p + d\,p + e\,p,$$

zoodat

$$p\times(a-b+c-d-e) = (a\,p + c\,p) - (b\,p + d\,p + e\,p)$$

is; en eindelijk heeft men, volgens (5),

$$p\times(a-b+c-d-e) = a\,p + c\,p - b\,p - d\,p - e\,p,$$

of

$$p\times(a-b+c-d-e) = a\,p - b\,p + c\,p - d\,p - e\,p \quad . . . . . (16).$$

Wanneer het product van eenen veelledigen vorm met eenen eenledigen moet ontwikkeld worden, volge men dus slechts dezen

Regel. *Vermenigvuldig elken term van den veelledigen vorm met den eenledigen, en verbind deze gedeeltelijke producten door dezelfde teekens, waardoor de overeenkomstige termen van den veelledigen vorm verbonden zijn.* Hierbij moet overigens, ter vereenvoudiging van elk gedeeltelijk product, de regel van § 28 gevolgd worden.

Voorbeeld. Zij te vermenigvuldigen $4a^2b^3c - 7a\,b^4c^2 - b^5c^3d + 5\frac{3}{4}a\,c\,d\,e$ met $\frac{2}{3}a^3b\,d\,e^2$, dan heeft men deze bewerking:

$(4a^2b^3c-7ab^4c^2-b^5c^3d+5\frac{3}{4}acde)\times\frac{2}{3}a^3bde^2=4a^2b^3c\times\frac{2}{3}a^3bde^2-7ab^4c^2\times\frac{2}{3}a^3bde^2-b^5c^3d\times\frac{2}{3}a^3bde^2+5\frac{3}{4}acde\times\frac{2}{3}a^3bde^2=2\frac{2}{3}a^5b^4cde^2-4\frac{2}{3}a^4b^5c^2de^2-\frac{2}{3}a^3b^6c^3d^2e^2+3\frac{5}{6}a^4bcd^2e^3$.

§ 30. Wanneer de som van eenige getallen a, b, c, enz. met de som van eenige andere getallen p, q, r, enz. moet vermenigvuldigd worden, kan men dit product, volgens den regel der voorgaande §, eerst ontwikkelen, alsof $p+q+r$ enz. een eenledige vorm ware. Men heeft dus

$$(a+b+c+enz.)\times(p+q+r+enz.)=$$
$$a\times(p+q+r+enz.)+b\times(p+q+r+enz.)+c\times(p+q+r+enz.)+enz.;$$

maar volgens dienzelfden regel heeft men ook

$$a\times(p+q+r+\ enz.)=ap+aq+ar+\ enz.$$
$$b\times(p+q+r+\ enz.)=bp+bq+br+\ enz.$$
$$c\times(p+q+r+\ enz.)=cp+cq+cr+\ enz.$$

alzoo is dan ook

$$(a+b+c+\ enz.)\times(p+q+r+\ enz.)=$$
$$ap+aq+ar+bp+bq+br+cp+cq+cr+enz. \quad \ldots\ldots (17).$$

De ontwikkeling van dit product bestaat dus uit de som der gedeeltelijke producten, die men verkrijgt, door elken term van den eenen vorm met elken term van den anderen te vermenigvuldigen.

Wanneer het verschil van twee getallen, b. v. $a-b$, met het verschil van twee andere getallen, b. v. $p-q$, moet vermenigvuldigd worden. kan men, even zoo, vooreerst $p-q$ als een' eenledigen vorm beschouwen, en men heeft dus, volgens (15),

$$(a-b)\times(p-q)=a(p-q)-b(p-q);$$

verder is, mede volgens (15),

$$a(p-q)=ap-aq$$

en $$b(p-q)=bp-bq,$$

zoodat men heeft

$$(a-b)\times(p-q)=(ap-aq)-(bp-bq)$$

of $$(a-b)\times(p-q)=ap-aq-bp+bq \quad \ldots\ldots\ldots (18).$$

Ook hier bestaat dus de ontwikkeling van het product uit eene vereeniging van de gedeeltelijke producten der afzonderlijke termen; maar deze vereeniging geschiedt door de teekens + en — beide, zoodanig, dat elk gedeeltelijk product het teeken + of — vóór zich heeft, naargelang de termen, uit welker vermenigvuldiging dit gedeeltelijk product voortkomt, gelijke of ongelijke teekens vóór zich hebben.

Moet eindelijk het product van twee veelledige vormen, welker termen willekeurig door de teekens + en — verbonden zijn, ontwikkeld worden, dan kan men deze vormen algemeen voorstellen door

$$a+b+\ enz.\ -c-d-enz. \quad \text{en} \quad a'+b'+\ enz.\ -c'-d'-\ enz.$$

stelt men nu

$$a+b+\text{enz.}=p$$
$$c+d+\text{enz.}=q$$
$$a'+b'+\text{enz.}=p'$$
en $$c'+d'+\text{enz.}=q'$$
dan gaan deze algemeene vormen over in
$$p-q \quad \text{en} \quad p'-q';$$
en stelt men, kortheidshalve, derzelver product door P voor, dan heeft men, $\mathrm{P}=(p-q)\times(p'-q')$.
Volgens (18) is dan ook
$$\mathrm{P}=pp'-pq'-p'q+qq'.$$
Nu is volgens (17)
$$pp' = (a+b+\text{enz.})\,(a'+b'+\text{enz.})=aa'+ab'+a'b+bb'+\text{enz.}$$
$$pq' = (a+b+\text{enz.})\,(c'+d'+\text{enz.})=ac'+ad'+bc'+bd'+\text{enz.}$$
$$p'q = (a'+b'+\text{enz.})\,(c+d+\text{enz.}) = a'c+a'd+b'c+b'd+\text{enz.}$$
$$qq' = (c+d+\text{enz.})\,(c'+d'+\text{enz.}) = cc'+cd'+c'd+dd'+\text{enz.}$$
zoodat men heeft
$$\mathrm{P} = aa'+ab'+a'b+bb'+\text{enz.}-ac'-ad'-bc'-bd'-\text{enz.}-a'c-a'd-b'c-b'd-\text{enz.}+cc'+cd'+c'd+dd'+\text{enz.} \quad \ldots\ldots\ldots (19);$$
waaruit blijkt, dat de ontwikkeling van het product van twee veelledige vormen gevonden wordt door den volgenden

REGEL. *Neem al de gedeeltelijke producten der termen; en verbind dezelve zoodanig met elkander, dat elk gedeeltelijk product het teeken + of — vóór zich heeft, naargelang de termen, uit welker vermenigvuldiging hetzelve voortkomt, gelijke of ongelijke teekens hebben.*

§ 31. De regel, dien wij in de vorige § gevonden hebben, dat producten het teeken + of — vóór zich verkrijgen, naargelang de factoren, waaruit die producten voortkomen, gelijke of ongelijke teekens hebben, geldt niet alleen, wanneer die teekens, zoo als daar het geval was, tusschen de termen staan, ter aanduiding van optelling of aftrekking, maar ook dan nog, wanneer zij vóór de termen geplaatst zijn, en dus aanduiden, dat dezelve positieve of negatieve getallen zijn.

Men heeft namelijk
$$\left.\begin{aligned} +a\times+b&=+ab\\ -a\times+b&=-ab\\ +a\times-b&=-ab\\ -a\times-b&=+ab \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (20).$$

De eerste dezer vergelijkingen is uit zich zelve klaar. Om de tweede te bewijzen, hebben wij volgens (15)
$$(p-q)\times+b=bp-bq,$$
volgens § 14 is $\quad bp-bq=-(bq-bp)$,
volgens § 18 is $\quad bq-bp=(q-p)\,b$
en dus ook $\quad -(bq-bp)=-(q-p)\,b$,

hieruit volgt $(p-q)\times+b=-(q-p)b$;
stelt men nu, dat $p<q$, en het verschil van p en q gelijk a is, dan is, volgens § 14, $p-q=-a$ en $q-p=a$. Hierdoor verandert dan de laatste vergelijking in $-a\times+b=-ab$.

Om de derde en vierde der gestelde vergelijkingen te bewijzen, merke men op, dat volgens (18)

$$(p-q)(p'-q')=pp'-p'q-pq'+qq'$$
$$(q-p)(q'-p')=qq'-pq'-p'q+pp'$$

en dus ook $(p-q)(p'-q')=(q-p)(q'-p')$ . . . . (21)
is. Stelt men nu, dat $p>q$ en $p-q=+a$, dat $p'<q'$ en $q'-p'=+b$ is, dan is, volgens § 14, $q-p=-a$ en $p'-q'=-b$, en hierdoor zal (21) overgaan in $+a\times-b=-a\times+b$;
maar, volgens het zoo even bewezene, is $-a\times+b=-ab$, en dus is ook

$$+a\times-b=-ab.$$

Stelt men ten laatste, dat $p<q$ en $q-p=+a$, dat $p'<q'$ en $q'-p'=+b$ is, dan is weder, volgens § 14, $p-q=-a$ en $p'-q'=-b$, waardoor dan (21) overgaat in $-a\times-b=+a\times+b$,
maar $+a\times+b=+ab$ zijnde, is ook

$$-a\times-b=+ab.$$

Volgens het hier aangetoonde, kan men den regel, in § 28 voor het vermenigvuldigen van eenledige vormen gegeven, algemeener maken, door er bij te voegen, *dat vóór het product het teeken + of — moet geplaatst worden, naargelang die vormen gelijke of ongelijke teekens hebben.*

§ 32. De voorgedragene regels zijn genoegzaam, om de producten van stelkunstige vormen te ontwikkelen en te herleiden. Bij eene toepassing van die regels, is het gemakkelijk op de volgende wijze te handelen.

Maak de gedeeltelijke producten op van elken term van den eenen met elken term van den anderen vorm; bepaal daartoe van elk gedeeltelijk product vooreerst het teeken, ten tweede den getallen-coëfficiënt, ten derde de letters, die er in moeten voorkomen, en ten vierde de exponenten, die elke letter moet hebben. Schrijf al deze gedeeltelijke producten met hun eigen teeken achter elkander, en vereenig de gelijksoortige termen, die in het geheele product mogten voorkomen, tot eenen enkelen term.

Ten einde bij het opmaken der gedeeltelijke producten er geene over te slaan, is het noodig, hierbij eene geregelde volgorde in het oog te houden, zoodat men, bij voorbeeld, indien A en B de gegevene vormen zijn, eerst den eersten term van A achtervolgens met den eersten, tweeden, derden term enz., van B vermenigvuldigt, daarna den tweeden term van A met den eersten, tweeden, derden term, enz. van B, en zoo vervolgens, tot dat men al de gedeeltelijke producten verkregen heeft.

Voorbeeld. Het product $(2a^3b-3a^2b^2+7ab^3)$ $(5ab-b^2)$ te ontwikkelen. Men heeft, de boven opgegevene handelwijze volgende, $(2a^3b-3a^2b^2+7ab^3)$ $(5ab-b^2)=10a^4b^2-15a^3b^3+35a^2b^4-2a^3b^3+3a^2b^4-7ab^5=10a^4b^2-17a^3b^3+38a^2b^4-7ab^5$.

§ 33. Om het in het oog houden van de zoo even genoemde volgorde, bij het opmaken van de gedeeltelijke producten, alsmede het vereenigen der gelijksoortige gedeeltelijke producten, gemakkelijker te maken, gaat men op eene dergelijke wijze te werk, als in de vermenigvuldiging der getallen; men schrijft namelijk de te vermenigvuldigen vormen, die wij gemakshalve A en B zullen noemen, onder elkander, bij voorbeeld A onder B, plaatst in eenen zelfden regel al de gedeeltelijke producten van den eersten term van A met al de termen van B; in eenen tweeden regel al de gedeeltelijke producten van den tweeden term van A met al de termen van B en zoo vervolgens, en wel zoodanig, dat de gelijksoortige termen, die in deze regels voorkomen, onder elkander komen te staan, vervolgens vereenigt men al deze gedeeltelijke producten op de wijze, in § 25 voorgeschreven.

Wanneer men, alvorens tot deze bewerking over te gaan, ook nog de vormen, wier product ontwikkeld moet worden, naar de afdalende of opklimmende magten van eene zelfde letter rangschikt, verkrijgt men de gedeeltelijke producten, die ten opzigte van eene zelfde magt dier letter gelijksoortig zijn, onder elkander geplaatst, zonder de volgorde te veranderen, waarin zij achtervolgens ontstaan, en hierdoor verkrijgt men tevens het geheele product naar de magten van diezelfde letter gerangschikt. Het is uit dien hoofde, dat bij de ontwikkeling van stelkunstige producten als maatregel van orde op den voorgrond moet staan, het rangschikken der vormen naar de opklimmende of afdalende magten van eene zelfde letter.

Passen wij het hier gezegde op het voorbeeld der vorige § toe, dan komt de bewerking aldus te staan:

$$\begin{array}{l} 2a^3b-3a^2b^2+7ab^3 \\ 5ab-b^2 \\ \hline 10a^4b^2-15a^3b^3+35a^2b^4 \\ \qquad -2a^3b^3+3a^2b^4-7ab^5 \\ \hline \end{array}$$

product: $10a^4b^2-17a^3b^3+38a^2b^4-7ab^5$.

Zie hier nog een paar voorbeelden.

Eerste Voorbeeld. Te ontwikkelen het product der vormen $3abc^2+2ab^3-4a^2c^2$ en b^2-3c^2-2ab.

Deze vormen naar de afdalende magten van de letter b rangschikkende, komt de bewerking aldus te staan:

$$
\begin{array}{l}
2ab^3+3abc^2-4a^2c^2 \\
b^2-2ab-3c^2 \\
\hline
2ab^5 \ldots\ldots +3ab^3c^2 - 4a^2b^2c^2 \\
\quad -2a^2b^4 \ldots\ldots\ldots - 6a^2b^2c^2+ 8a^3bc^2 \\
\qquad -6ab^3c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots - 9abc^4 \ldots\ldots +12a^2c^4 \\
\hline
\end{array}
$$

product: $2ab^5-2a^2b^4-3ab^3c^2-10a^2b^2c^2+(8a^3c^2-9ac^4)b+12a^2c^4$.

Tweede Voorbeeld. Het product der vormen $b^2x-2bx^2+x^4-cx^2$ en $2c+2x^2-3bx$ te vinden.

Deze vormen naar de afdalende magten van x rangschikkende, heeft men de volgende bewerking:

$$
\begin{array}{l}
x^4-(2b+c)x^2+b^2x \\
2x^2-3bx+2c \\
\hline
2x^6 \ldots\ldots -2(2b+c)x^4+2b^2x^3 \\
\quad -3bx^5 \ldots\ldots\ldots\ldots +3b(2b+c)x^3-3b^3x^2 \\
\qquad +2cx^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 2c(2b+c)x^2+2b^2cx \\
\hline
\end{array}
$$

product: $2x^6-3bx^5-4bx^4+b(8b+3c)x^3-(3b^3+4bc+2c^2)x^2+2b^2cx$.

§ 34. Daar het zeer omslagtig zoude zijn, om bij geringe vermenigvuldigingen, altijd de bovenstaande handelwijze te volgen, is het van belang, zich de uitkomsten van een aantal vermenigvuldigingen in het geheugen te prenten, ten einde zich daarvan in andere overeenkomstige gevallen te kunnen bedienen.

Deze vermenigvuldigingen zijn hoofdzakelijk de volgende:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

De eerste dezer vermenigvuldigingen leert, *dat het product van de som van twee grootheden, met derzelver verschil, gelijk is aan het verschil van de vierkanten dezer grootheden.*

De tweede leert, *dat het vierkant van eene tweeledige grootheid, gelijk is aan het vierkant van het eerste lid, plus het dubbele product der beide leden en het vierkant van het tweede lid.*

Even zoo zou men al de andere in woorden kunnen overbrengen. Dit zij ter oefening aan den lezer overgelaten; zullende het gebruik, dat men van de kennis der opgegevene producten kan maken, uit de volgende voorbeelden blijken.

Eerste Voorbeeld. Het product te vinden van $2ab-3bc$ en $2ab+3bc$. Past men hier den regel toe in de vergelijking $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ begrepen, dan vindt men terstond

$(2ab-3bc)(2ab+3bc)=(2ab)^2-(3bc)^2=2ab\times2ab-3bc\times3bc=4a^2b^2-9b^2c^2$.

Tweede Voorbeeld. Te ontwikkelen $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

Verschikt men de termen der factoren, en past men vervolgens denzelfden regel toe, als in het vorige voorbeeld, dan heeft men

$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=[(a^2+b^2)+ab][(a^2+b^2)-ab]=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$;

volgens den regel, begrepen in de vergelijking $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, is

$$(a^2+b^2)^2=(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2=a^2\times a^2+2a^2b^2+b^2\times b^2=a^4+2a^2b^2+b^4;$$

verder is $(ab)^2=ab\times ab=a^2b^2$,

en dus is het gevraagde product

$$a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=a^4+a^2b^2+b^4.$$

Derde Voorbeeld. Te vermenigvuldigen $x+2$ met $x-3$.

Hier de vergelijking $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ toepassende, heeft men onmiddellijk

$$(x+2)(x-3)=x^2-x-6.$$

§ 35. Hoe het product van drie of meer eenledige vormen kan herleid worden, is reeds in § 28 gebleken; moet het product van drie of meer vormen, waaronder veelledige voorkomen, ontwikkeld worden, dan is het klaar, dat men hiertoe eerst het product van twee factoren, vervolgens het product van dit product met eenen derden factor, en zoo vervolgens, moet ontwikkelen. De handelwijze, in de vorige § opgegeven, kan ook hier dikwijls met vrucht gevolgd worden, zoo als blijkt uit het volgende

Voorbeeld. Te ontwikkelen het product van de vier factoren $a+b+c$, $a+b-c$, $a-b+c$, $-a+b+c$.

Den voorgeschreven' weg volgende, heeft men

$(a+b+c)\times(a+b-c)\times(a-b+c)\times(-a+b+c)=$
$[(a+b)+c][(a+b)-c][c+(a-b)][c-(a-b)]=$
$[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]=(a^2+2ab+b^2-c^2)(c^2-a^2+2ab-b^2)=$
$[2ab+(a^2+b^2-c^2)][2ab-(a^2+b^2-c^2)]=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=$
$4a^2b^2-[(a^2+b^2)-c^2]^2=4a^2b^2-[(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)c^2+c^4]=$
$4a^2b^2-(a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2c^2-2b^2c^2+c^4)=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$.

§ 36. In § 31 is gebleken, dat

$$+a\times+b=-a\times-b$$

en $$-a\times+b=+a\times-b$$

is. Hieruit volgt, dat men, wanneer een product uit twee factoren bestaat, de teekens dezer factoren gelijktijdig mag omkeeren; zoo is bij voorbeeld

$$(b-a)(d-c)=-(b-a)\times-(d-c)=(a-b)(c-d).$$

In dezelfde § 31 is nog gebleken, dat

$$+a\times+b=-(+a\times-b),$$
$$-a\times-b=-(+a\times-b)=-(-a\times+b),$$
en $$+a\times-b=-(-a\times-b)=-(+a\times+b)$$
is. Hieruit volgt, dat men in een product van twee factoren, een derzelve van teeken mag veranderen, mits men te gelijkertijd het teeken van het product omkeere; zoo is, bij voorbeeld,
$$(b-a)(c-d)=-(a-b)(c-d).$$
Eindelijk valt, omtrent het teeken van een gedurig product op te merken, dat dit teeken + of — zal zijn, naargelang het aantal negatieve factoren even of oneven is. Want is het aantal negatieve factoren even, dan kan men dezelve paarsgewijze met elkander vermenigvuldigen, en hierdoor zal dan het geheele product uit positieve factoren komen te bestaan; is echter het aantal negatieve factoren oneven, dan zal men, even zoo handelende, altijd een' negatieven factor overhouden, terwijl het product van al de overige positief zal zijn; in dit geval is dus het geheele product negatief.

§ 37. Zeer dikwijls is het bij de ontwikkeling van producten, tot voorkoming van misslagen, van belang, te letten op den *graad* der stelkunstige vormen. Men noemt namelijk elken eenledigen stelkunstigen vorm van den eersten, tweeden, in het algemeen van den n^{den} graad, naargelang er in dien vorm een, twee, of in het algemeen n factoren voorkomen, die door eene enkele letter worden voorgesteld; zoo zijn bij voorbeeld abc, $12a^2b$ en $5a^3$ van den derden; $3a^2b^2$, $7a^3c$, $2c^4$ van den vierden en $5a^4b$, a^3b^2, $7p^2q^2r$ van den vijfden graad. Men ziet hieruit, dat het getal, waardoor de graad aangewezen wordt, bestaat uit de som der exponenten, die bij de verschillende letters staan. Zijn al de termen van eenen veelledigen vorm van denzelfden graad, dan noemt men dien vorm *gelijkslachtig*, en dan wordt ook die geheele vorm gezegd van dienzelfden graad te zijn. Uit de regels, die voor de ontwikkeling van producten gegeven zijn, volgt onmiddellijk, dat de graad van het product van twee of meer eenledige, of gelijkslachtige veelledige vormen, zal aangewezen worden, door de som der getallen, die de graden der afzonderlijke vormen aangeven. Heeft men dus het product van gelijkslachtige vormen ontwikkeld, en zijn al de termen van het verkregene product niet van den behoorlijken graad, dan kan men zeker zijn, zich ergens vergist te hebben.

§ 38. Wanneer het product van twee of meer stelkunstige vormen ontwikkeld is geworden, kan men, in plaats van dat ontwikkelde product, weder het niet ontwikkeld product der factoren schrijven; deze herleiding noemt men: *een' vorm in deszelfs factoren te ontbinden*, en wanneer elk dezer factoren niet meer het product van andere is, zegt men, dat de vorm in zijne *eenvoudigste factoren* is ontbonden. In het voorbeeld van § 35, is voor het ontwikkeld product gevonden

$$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4;$$

schrijft men nu voor dien vorm

$$[(a+b)^2-c^2]\,[c^2-(a-b)^2],$$

dan zegt men, dat die vorm *in factoren* is ontbonden; schrijft men echter voor denzelven

$$(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c),$$

dan zegt men, dat die vorm *in zijne eenvoudigste factoren* is ontbonden.

De ontbinding van vormen in factoren is dus eene herleiding, die het tegengestelde is van de ontwikkeling der producten; ten aanzien van eenledige vormen, valt het van zelf in het oog, hoe die ontbinding kan plaats hebben; ten aanzien der veelledige is zij, in het algemeen, een der ingewikkeldste vraagstukken, die in de stelkunst voorkomen. In de meest voorkomende gevallen, zal echter een weinig oefening en de kennis der, in § 34 opgegevene, uitkomsten, toereikend zijn, om zulke ontbindingen te bewerkstelligen.

Herleiding en ontwikkeling van de quotienten der stelkunstige vormen.

§ 39. Indien twee stelkunstige vormen in elkander gedeeld moeten worden, en de deeler als factor in het deeltal voorkomt, kan het quotient eenvoudiger dan door het, voor de deeling aangenomen, teeken worden voorgesteld. Het is namelijk uit de cijferkunst bekend, dat het quotient niets anders is, dan een getal, dat, met den deeler vermenigvuldigd, het deeltal oplevert; zoodat men in het algemeen heeft

$$\frac{p}{q}\times q=p \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (22).$$

Moet dus ab door b gedeeld worden, dan moet het quotient een getal zijn, dat, met den deeler b vermenigvuldigd, het deeltal ab oplevert; dit quotient kan dus niets anders dan a zijn; zoo dat men heeft

$$\frac{ab}{b}=a \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (23).$$

Hieruit blijkt, *dat het quotient in dit geval gevonden wordt, door den deeler als factor uit het deeltal weg te laten.*

Bestaat de deeler uit factoren, en komen deze factoren ook alle in het deeltal als factoren voor, dan kan men het deeltal als het product van twee vormen schrijven, waarvan de eene juist de deeler is, en er vervolgens de vergelijking (23) op toepassen. Moest men, bij voorbeeld, deelen $15abcd$ door $3ad$, dan zou men hebben

$$\frac{15abcd}{3ad}=\frac{5bc\times 3ad}{3ad}=5bc.$$

In dit geval zal dus het quotient in zijnen eenvoudigsten vorm gevonden worden, door den coëfficiënt van den deeler werkelijk in dien van het deeltal te deelen, en de letter-factoren, die in den deeler voorkomen, uit het deeltal weg te laten.

Komt in het deeltal eenige factor tot zekere magt voor, en bevat de deeler dienzelfden factor in eene lagere magt, dan kan men op dezelfde wijze handelen als zoo even. Moest bij voorbeeld a^5b^3c gedeeld worden door ab^2 dan zou men hebben

$$\frac{a^5b^3c}{ab^2}=\frac{a^4bc\times ab^2}{ab^2}=a^4bc,$$

waaruit blijkt, dat in zoodanig geval, de exponenten van de factoren des deelers moeten afgetrokken worden van de exponenten, die dezelfde letters in het deeltal hebben, om de exponenten te verkrijgen, welke die letters in het vereenvoudigde quotient moeten hebben.

In het algemeen is

$$\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (24),$$

want, volgens hetgeen vroeger is gebleken, is $a^{p-q}\times a^q=a^p$, en dus volgens (23) $\frac{a^p}{a^q}=\frac{a^{p-q}\times a^q}{a^q}=a^{p-q}$.

Wat de teekens betreft, die voor de quotienten moeten geplaatst worden, merken wij op, dat uit de, in § 31 bewezene, vergelijkingen

$$+ab=+a\times+b$$
$$-ab=-a\times+b$$
$$-ab=+a\times-b$$
$$+ab=-a\times-b$$

onmiddellijk volgt

$$\frac{+ab}{+a}=+b,\ \frac{-ab}{-a}=+b,\ \frac{-ab}{+a}=-b,\ \frac{+ab}{-a}=-b \dots\dots (25),$$

waaruit blijkt, dat de quotienten het teeken + of — vóór zich moeten hebben, naargelang deeler en deeltal gelijke of ongelijke teekens hebben.

Uit (25) volgt

$$\frac{+ab}{+a}=\frac{-ab}{-a} \quad \text{en} \quad \frac{-ab}{+a}=\frac{+ab}{-a}$$

en hieruit ziet men, dat een quotient niet verandert, wanneer men de teekens van deeler en deeltal beide omkeert.

Verder volgt uit (25) ook nog

$$\frac{+ab}{+a}=-\frac{-ab}{+a}=-\frac{+ab}{-a},$$
$$\frac{-ab}{-a}=-\frac{+ab}{-a}=-\frac{-ab}{+a},$$
$$\frac{-ab}{+a}=-\frac{+ab}{+a}=-\frac{-ab}{-a},$$
$$\frac{+ab}{-a}=-\frac{+ab}{+a}=-\frac{-ab}{-a},$$

uit welke vergelijkingen men leert, dat men in eene deeling de teekens van deeler of deeltal een van beide mag veranderen, mits men daarna ook het teeken van het quotient omkeere.

§ 40. Ingevalle al de factoren van den deeler ook als factoren in het deeltal voorkomen, zegt men gewoonlijk, dat de deeling opgaat. Hetgeen in de vorige § gezegd is, is voldoende, om in zoodanig geval het quotient van eenledige stelkunstige vormen zoo eenvoudig mogelijk voor te stellen. Men heeft hiertoe den volgenden

REGEL. *Bepaal eerst het teeken van het quotient, dat + of — zal moeten zijn, naargelang deeler en deeltal gelijke of ongelijke teekens hebben; deel vervolgens den coëfficiënt des deelers in dien des deeltals, hierdoor wordt de coëfficiënt van het quotient gevonden; schrijf daarna achter dezen coëfficiënt al de letterfactoren des deeltals, voor zoo verre zij in den deeler niet tot dezelfde magt als in het deeltal voorkomen, en geef eindelijk aan elken letterfactor tot exponent de rest, die er overblijft, als men zijnen exponent in den deeler aftrekt van zijnen exponent in het deeltal.*

§ 41. Het is eene algemeene stelling, dat het quotient eener deeling niet verandert, wanneer men deeler en deeltal door een zelfde getal deelt, of met een zelfde getal vermenigvuldigt.

Laat, om deze stelling te bewijzen, het quotient $\frac{a}{b}$ door q voorgesteld worden, en alzoo

$$\frac{a}{b}=q$$

zijn, dan is

$$a=bq$$

en dus, welk willekeurig getal men ook door n wil voorstellen,

$$an=bqn,$$

waaruit weder volgt

$$\frac{an}{bn}=q,$$

of ook

$$\frac{an}{bn}=\frac{a}{b}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26);$$

en hierdoor is de stelling bewezen, omdat a en b verkregen worden, indien men an en bn beide door n deelt, terwijl an en bn verkregen worden, wanneer men a en b beide met n vermenigvuldigt.

§ 42. Ingevalle de deeling van eenledige stelkunstige vormen niet opgaat, kan het quotient niet eenvoudiger voorgesteld worden, dan door, op grond van de zoo even bewezene stelling, deeler en deeltal te deelen door al de factoren, die zij gemeen hebben. Zoo is bij voorbeeld

$$\frac{12a^3b^2c}{15a^2b^4d}=\frac{4ac}{5b^2d},$$

$$\frac{7c^3d^5}{21a\,c^4d^6e^2f}=\frac{1}{3acde^2f}.$$

In het eerste dezer voorbeelden heeft men deeler en deeltal door $3a^2b^2$, en in het tweede door $7c^3d^5$ gedeeld.

§ 43. Hetgeen wij van de deeling van eenledige stelkunstige vormen gezegd hebben, blijft even zeer toepasselijk, wanneer de stelkunstige vormen, hoewel eenledig zijnde, veelledige factoren bevatten. Zoo is, bij voorbeeld,

$$\frac{9a^2(a+b)\,(c+d)^2}{3(a+b)\,(c+d)} = 3a^2(c+d),$$

$$\frac{12\,(a^2+b^2)^3}{27\,(a^2+b^2)^4\,(e-f)} = \frac{4}{9\,(a^2+b^2)\,(e-f)}.$$

§ 44. Wanneer een veelledige vorm $a+b-c-d+e$ door een' eenledigen p moet gedeeld worden, dan kan men het quotient naar welgevallen, door $\frac{a+b-c-d+e}{p}$, of door $\frac{a}{p}+\frac{b}{p}-\frac{c}{p}-\frac{d}{p}+\frac{e}{p}$ voorstellen, omdat beide uitdrukkingen met den deeler p vermenigvuldigd, het deeltal weder opleveren. Men heeft namelijk: volgens (22)

$$\frac{a+b-c-d+e}{p}\times p = a+b-c-d+e,$$

volgens (16) en (22)

$$\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{p}-\frac{c}{p}-\frac{d}{p}+\frac{e}{p}\right)\times p =$$

$$\frac{a}{p}\times p+\frac{b}{p}\times p-\frac{c}{p}\times p-\frac{d}{p}\times p+\frac{e}{p}\times p = a+b-c-d+e$$

en dus ook

$$\frac{a+b-c-d+e}{p} = \frac{a}{p}+\frac{b}{p}-\frac{c}{p}-\frac{d}{p}+\frac{e}{p} \;\ldots\ldots (27).$$

Op dezelfde wijze heeft men

$$\frac{a+b-c-d+e}{-p} = -\,\frac{a+b-c-d+e}{p} =$$

$$-\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{p}-\frac{c}{p}-\frac{d}{p}+\frac{e}{p}\right) = -\frac{a}{p}-\frac{b}{p}+\frac{c}{p}+\frac{d}{p}-\frac{e}{p}.\;\ldots (28).$$

Hieruit blijkt, dat men bij het deelen van veelledige vormen door eenledige gebruik kan maken van den volgenden

REGEL. *Deel elken term van het deeltal door den deeler, en schrijf de gedeeltelyke quotienten met de teekens, die zij verkrijgen, achter elkander.* Hierbij moet overigens, ter vereenvoudiging van elk gedeeltelijk quotient, de regel van § 40 gevolgd worden.

Bij de deeling van eenen veelledigen vorm door een' eenledigen wordt de deeling alleen dan gezegd op te gaan, wanneer dit opgaan bij al de termen van het deeltal plaats heeft, en in dit geval dient de gegeven regel tot wezenlijke vereenvoudiging van het quotient. Heeft dit opgaan slechts bij sommige of bij geene der termen plaats, dan kan men evenwel denzelfden regel gebruiken, om het quotient onder eene andere gedaante voor te stellen. Zoo is, bij voorbeeld:

$$1^o.\quad \frac{12a^3b^4c+9a^2b^3c^3d-15b^3c^4}{3b^2c}=4a^3b^2+3a^2bc^2d-5bc^3;$$

$$2^o.\quad \frac{-na^nb+mab^m}{-ab}=na^{n-1}-mb^{m-1};$$

$$3^o.\quad \frac{16p^3q^4r-14p^4q^3s+3p^2q^2r^2s^2}{2p^3q^3}=8qr-7ps+\frac{3r^2s^2}{2pq};$$

$$4^o.\quad \frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}.$$

§ 45. Het herleiden der quotienten van veelledige stelkunstige vormen, tot derzelver eenvoudigste gedaante, zou onmiddellijk kunnen terug gebragt worden, tot hetgeen van de behandeling der eenledige stelkunstige vormen gezegd is, ingevalle men slechts even gemakkelijk, als bij de eenledige vormen, kon ontdekken, of de veelledige vormen uit het product van eenige factoren bestaan, en men tevens wist te vinden, welke die factoren zijn. Moest bij voorbeeld $2a^3+a^2b-5ab^2+2b^3$ gedeeld worden door $a^2+ab-2b^2$, en wist men, dat de eerste vorm niets anders is, dan de ontwikkeling van het product $(a-b)\,(2a-b)\,(a+2b)$ en de tweede niets anders dan $(a-b)\,(a+2b)$, dan zou men voor het quotient terstond hebben

$$\frac{2a^3+a^2b-5ab^2+2b^3}{a^2+ab-2b^2}=\frac{(a-b)\,(2a-b)\,(a+2b)}{(a-b)(a+2b)}=2a-b.$$

Daar men echter doorgaans niet zien kan, of er, en welke factoren er in de veelledige vormen aanwezig zijn, moet men in zulke gevallen eenen anderen weg inslaan, die echter weder geheel en al steunt op het beginsel, dat de deeler, vermenigvuldigd met het quotient, het deeltal moet opleveren.

Beschouwt men namelijk het deeltal, als voortgekomen te zijn, uit de vermenigvuldiging van den deeler met het quotient, en stelt men zich alle drie deze vormen voor, als naar de afdalende magten van eene zelfde letter gerangschikt te zijn, dan is het duidelijk, dat de eerste term van het deeltal ontstaan is uit de vermenigvuldiging van den eersten term des deelers met den eersten term van het quotient. Omgekeerd zal dan ook, deeler en deeltal beide naar de afdalende magten van eene zelfde letter gerangschikt zijnde, de eerste term van het quotient moeten gevonden worden, door den eersten term des deelers in den eersten term des deeltals te deelen. Beschouwt men nu het deeltal, als te bestaan uit de som van twee stelkunstige vormen, waarvan de eene is het product van den deeler met den gevonden' eersten term van het qnotient, en waarvan de andere gevonden wordt, door dit product van het deeltal af te trekken, dan wordt, door toepassing van den regel, in § 44 opgegeven, het quotient herleid tot de som van dien gevonden' eersten term en een nieuw quotient, waarvan men weder, op dezelfde wijze als boven gezegd is, den eersten term bepalen kan, die dan de tweede term van het te zoeken quotient zijn zal. Met deze bewerking gaat men dan voort, totdat men het quotient in dien vorm, waarvoor het vatbaar is, gevonden heeft.

Moet bij voorbeeld $a^2b+2b^3-5ab^2+2a^3$ gedeeld worden door $2a-b$, zoo rangschikke men eerst deeler en deeltal volgens de afdalende magten van eene zelfde letter, b. v. a, dan heeft men, het quotient gemakshalve Q noemende,

$$Q=\frac{2a^3+a^2b-5ab^2+2b^3}{2a-b}.$$

Deelt men nu $2a$ in $2a^3$, dan vindt men voor den eersten term van het quotient a^2; dezen eersten term met den deeler vermenigvuldigende, komt er tot product $2a^3-a^2b$, en dit product van het deeltal aftrekkende, blijft er over $2a^2b-5ab^2+2b^3$; men kan dus voor het quotient ook schrijven

$$Q=\frac{(2a-b)a^2+(2a^2b-5ab^2+2b^3)}{2a-b};$$

volgens den regel van § 44, is nu

$$Q=a^2+\frac{2a^2b-5ab^2+2b^3}{2a-b};$$

behandelt men nu het tweede gedeelte van dit quotient op dezelfde wijze, dan heeft men

$$\frac{2a^2b-5ab^2+2b^3}{2a-b}=\frac{(2a-b)\,ab+(-4ab^2+2b^3)}{2a-b}$$
$$=ab+\frac{-4ab^2+2b^3}{2a-b};$$

hierdoor wordt

$$Q=a^2+ab+\frac{-4ab^2+2b^3}{2a-b};$$

en herhaalt men nu nog eens dezelfde bewerking, dan vindt men

$$\frac{-4ab^2+2b^3}{2a-b}=\frac{-2b^2\,(2a-b)}{2a-b}=-2b^2,$$

waardoor eindelijk het quotient wordt

$$Q=a^2+ab-2b^2.$$

§ 46. Ten einde over al de bewerkingen, die bij dit achtervolgend opmaken der termen van het quotient voorkomen, een geregeld overzigt te kunnen houden, is men gewoon, dezelve aldus te plaatsen:

$$\begin{array}{l|l|l}
2a-b & 2a^3+a^2b-5ab^2+2b^3 & a^2+ab-2b^2 \\
 & \underline{2a^3-a^2b} & \\
 & \quad 2a^2b-5ab^2+2b^3 & \\
 & \quad \underline{2a^2b-\;ab^2} & \\
 & \qquad -4ab^2+2b^3 & \\
 & \qquad \underline{-4ab^2+2b^3} & \\
 & \qquad\qquad 0. &
\end{array}$$

Vermenigvuldigt men nu weder den deeler met het quotient, volgens het voorschrift van § 33, aldus:

$$\begin{array}{l}
2a\;-b \\
\underline{a^2+ab-2b^2} \\
2a^3-a^2b \\
\qquad 2a^2b-\;ab^2 \\
\qquad\qquad \underline{-4ab^2+2b^3} \\
2a^3+a^2b-5ab^2+2b^3,
\end{array}$$

dan ziet men, dat de vormen, die men achtervolgens bij het opmaken van het quotient heeft afgetrokken, niets anders zijn, dan de rijen van gedeeltelijke producten, die bij de vermenigvuldiging van den deeler met het quotient ontstaan.

Uit het aangevoerde blijkt, dat men, om het quotient van twee veelledige stelkunstige vormen te ontwikkelen, in acht moet nemen den volgenden

Regel. *Rangschik deeler en deeltal naar de afdalende magten van eene zelfde letter, deel den eersten term van den deeler in den eersten term des deeltals, waardoor de eerste term van het quotient gevonden wordt, vermenigvuldig den deeler met dien term van het quotient, trek dat product van het deeltal af, rangschik de rest behoorlijk, handel met dezelve, even als met het deeltal gedaan is, en ga hiermede voort, totdat er eene rest nul te voorschijn komt, of totdat de rest, ten opzigte van de letter, waarnaar gerangschikt is, van eenen lageren graad is, dan de deeler.*

Zoo men, bij deze bewerking, tot eene rest nul komt, zegt men, dat de deeling opgaat, en in dit geval dient de gegeven regel tot wezenlijke vereenvoudiging van het quotient. Heeft dit opgaan geene plaats, dan kan deze regel dienen:

1°. Om het quotient in de gedaante van eenen gemengden vorm voor te stellen, die dan, volgens § 45, bestaan zal, uit de som der gevondene termen, plus een gebroken, dat de laatste rest tot teller en den deeler tot noemer heeft, of ook

2°. Om het quotient in eene oneindig voortloopende reeks te ontwikkelen, zoo als nader in § 92 zal worden aangetoond.

Het herleiden van eenig quotient tot eenen gemengden vorm, of tot eene oneindig voortloopende reeks, kan echter geene wezenlijke vereenvoudiging genoemd worden. Ingevalle de deeling dus niet opgaat, is de eenige wezenlijke vereenvoudiging, waarvoor het quotient vatbaar is, dat men deeler en deeltal, op grond der in § 41 bewezene stelling, deele door al de factoren, die zij gemeen mogten hebben. Hoe deze gemeenschappelijke factoren gevonden worden, zal in § 59 en volgende blijken.

§ 47. Bij het toepassen van den regel der vorige § kan het gebeuren, dat er in de af te trekken' vormen termen voorkomen, die zich niet in het deeltal bevinden. De bewerking blijft dan dezelfde, mits men slechts zorg drage, de resten behoorlijk te rangschikken. Het is echter nuttig, op te merken, dat zulke termen juist diegenen zijn, welke bij de vermenigvuldiging van deeler en quotient door andere vernietigd worden.

Ook kan het gebeuren, dat men bij het rangschikken van deeler en deeltal naar de afdalende magten van eene zelfde letter, verschillende termen aantreft, waarin dezelfde magt van die letter voorkomt. Men moet dan, ten einde de rangschikking hare wezenlijke beteekenis niet verlieze, de som van zulke termen als eenen enkelen term beschouwen, welks coëfficiënt dan tusschen haakjes geplaatst wordt, en dit moet, zoowel in de achtervolgende resten, als in deeler en deeltal, plaats hebben. Moest bij voorbeeld $a^4-b^2c^2+4ab^2c+4a^2c^2-4a^3c-4a^2b^2$ gedeeld worden door $bc+a^2-2ac-2ab$, dan zou de bewerking aldus te staan komen:

$$
\begin{array}{l|l}
a^2-(2b+2c)a+bc & a^4-4a^3c-(4b^2-4c^2)a^2+4ab^2c-b^2c^2 \;\Big\}\; a^2+(2b-2c)a-bc \\
 & \underline{a^4-(2b+2c)a^3+a^2bc} \\
 & \qquad (2b-2c)a^3-(4b^2+bc-4c^2)a^2+4ab^2c \ldots\ldots -b^2c^2 \\
 & \qquad \underline{(2b-2c)a^3-(4b^2 \ldots -4c^2)a^2+(2b^2c-2bc^2)a} \\
 & \qquad\qquad\qquad -a^2bc+(2b^2c+2bc^2)a-b^2c^2 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{-a^2bc+(2b^2c+2bc^2)a-b^2c^2} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

§ 48. Heeft men zich, volgens § 34, de uitkomsten van sommige vermenigvuldigingen in het geheugen geprent, dan kan dit dikwijls dienen, om de bewerkingen der deeling geheel te ontwijken, of te vereenvoudigen, door op te merken uit welke factoren deeler en deeltal bestaan.

Moest, bij voorbeeld, $4a^2b^4-9c^4d^6$ door $2ab^2+3c^2d^3$ gedeeld worden, dan zou men hebben, volgens § 34,

$$\frac{4a^2b^4-9c^4d^6}{2ab^2+3c^2d^3}=\frac{(2ab^2-3c^2d^3)(2ab^2+3c^2d^3)}{2ab^2+3c^2d^3}=2ab^2-3c^2d^3.$$

Had men nog $a^2+3ab+b^2$ te deelen door $a^2+2ab+b^2$, dan zou men mede volgens § 34 hebben,

$$\frac{a^2+3ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a+2b)(a+b)}{(a+b)^2}=\frac{a+2b}{a+b}=1+\frac{b}{a+b}.$$

§ 49. Van sommige deelingen, die opgaan, is het almede van belang, zich de uitkomsten in het geheugen te prenten. De merkwaardigste zijn:

1°. Wanneer het verschil van twee grootheden, die tot dezelfde magt verheven zijn, gedeeld moet worden door het verschil dezer grootheden;

2°. Wanneer de som van twee grootheden, die tot eene zelfde onevene magt verheven zijn, gedeeld moet worden door de som dezer grootheden;

3°. Wanneer het verschil van twee grootheden, die tot eene zelfde evene magt verheven zijn, gedeeld moet worden door de som dier grootheden, —

dan zullen deze deelingen altijd opgaan, en de quotienten zijn begrepen in de volgende vormen:

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots\ldots\ldots+y^{n-1}\ldots\ (29);$$

$$\frac{x^{2n+1}+y^{2n+1}}{x+y}=x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\ldots\ldots\pm y^{2n}\ldots\ (30);$$

$$\frac{x^{2n}-y^{2n}}{x+y}=(x-y)(x^{2n-2}+x^{2n-4}y^2+x^{2n-6}y^4\ldots+y^{2n-2})\ldots\ (31);$$

waarvan men zich kan overtuigen, door elk dezer quotienten weder met den deeler te vermenigvuldigen, als wanneer men zien zal, dat dit product het deeltal oplevert.

§ 50. Uit hetgeen in § 37 gezegd is, volgt onmiddellijk', dat, wanneer deeltal en deeler gelijkslachtige vormen zijn, ook het quotient een gelijkslachtige vorm moet wezen, en dat de graad van het quotient gevonden zal worden, door het verschil te nemen van de getallen, die aanwijzen van welken graad deeler en deeltal zijn.

Herleiding der magten van stelkunstige grootheden.

§ 51. De herleiding der magten van eenledige stelkunstige vormen is geheel begrepen in de beide volgende formulen:

$$(a^p)^q=a^{pq}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (32)$$

en $(abcd\,\ldots)^n = a^n b^n c^n d^n.$ enz. . . . . (33).

Om de eerste dezer formulen te bewijzen, merke men op, dat volgens § 9, $(a^p)^q$ het product voorstelt van q gelijke factoren, die elk a^p zijn. Men heeft dus, volgens § 27,

$$(a^p)^2 = a^p \times a^p = a^{p+p} = a^{2p};$$

$$(a^p)^3 = a^p \times a^p \times a^p = a^{p+p+p} = a^{3p};$$

en in het algemeen

$$(a^p)^q = a^p \times a^p \times a^p \times \text{enz.} = a^{p+p+p+\text{enz.}} = a^{pq}.$$

Om de tweede formule te bewijzen, heeft men even zoo

$$(abcd\ldots)^2 = abcd\ldots \times abcd \ldots = aabbccdd\ldots = a^2b^2c^2d^2\ldots$$

$$(abcd\ldots)^3 = abcd\ldots \times abcd\ldots \times abcd\ldots = aaabbbcccddd\ldots = a^3b^3c^3d^3\ldots$$

en in het algemeen

$$(abcd\ldots)^n = abcd\ldots \times abcd\ldots \times abcd\ldots \times \text{enz.} = a^n b^n c^n d^n \ldots$$

Verder valt op te merken, dat overeenkomstig hetgeen in § 36 gezegd is, alle evene magten altijd het teeken $+$ vóór zich zullen hebben; maar dat de onevene magten altijd hetzelfde teeken zullen moeten hebben, als de vorm, welke tot die onevene magt verheven wordt. Men heeft dus

$$(+a)^{2n} = +a^{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

$$(-a)^{2n} = +a^{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1} \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

in al welke uitdrukkingen n eenig geheel getal moet verbeelden, opdat door $2n$ een even, en door $2n+1$ een oneven getal zou voorgesteld worden.

§ 52. Volgens de vorige § heeft men dus, om eenledige stelkunstige vormen tot eene zekere magt te verheffen, den volgenden

Regel. *Bepaal eerst het teeken, dat de magt moet verkrijgen; dit teeken zal — zijn, indien de aanwijzer der magtsverheffing oneven is, en de grootheid, welke tot die magt verheven moet worden, het teeken — vóór zich heeft; in alle andere gevallen zal dit teeken + zijn. Verhef daarna elken factor van den vorm tot de verlangde magt, daartoe aan dien factor tot nieuwen exponent gevende het product van den exponent, dien hij reeds heeft, met den aanwijzer der magt, waartoe men verheffen moet, en neem vervolgens het product van al deze magten der factoren.*

Uit dezen regel volgt onmiddellijk, dat ingevalle de vorm, die tot eenige magt moet verheven worden, een' getallen-coëfficiënt bij zich heeft, men dezen coëfficiënt almede tot die magt zal moeten verheffen, hetgeen, volgens § 9, door bloote vermenigvuldiging geschiedt.

De volgende voorbeelden kunnen strekken tot toepassing van den gegevenen regel:

1°. $(3\,a\,x^2\,y^3)^4 = 3^4 a^4 x^8 y^{12} = 81\,a^4 x^8 y^{12}$;

2°. $(-2\tfrac{2}{3}b^3\,x\,z^2)^2 = 7\tfrac{1}{9}b^6\,x^2\,z^4$;

3°. $(-10\,p^5\,q^4\,r^2)^3 = -\,1000\,p^{15}\,q^{12}\,r^6$;

4°. $(5\,a^3\,b^m\,c)^n = 5^n\,a^{3n}\,b^{mn}\,c^n$;

5°. $(a^p\,b^q\,c^r\,d^s)^n = a^{pn}\,b^{qn}\,c^{rn}\,d^{sn}$.

§ 53. De ontwikkeling van veelledige stelkunstige vormen tot gegevene magten kan geheel en al geschieden door de regels, voor de ontwikkeling der producten van veelledige vormen gegeven. Het is nuttig, zich de volgende uitkomsten, die op deze wijze verkregen zijn, in het geheugen te prenten:

$$\left.\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2;\\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2;\\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3;\\
(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3;\\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4;\\
(a-b)^4 &= a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}\right\}\ldots(38)$$

Zoo men dan eenen tweeledigen vorm tot de tweede, derde, vierde magt te verheffen heeft, kan men de ontwikkeling van die magt terstond door toepassing van die bekende uitkomsten verkrijgen. Had men, bij voorbeeld, te ontwikkelen $(3x^2\,y-2y^2\,z)^3$, dan zou men vooreerst hebben

$(3x^2\,y-2y^2\,z)^3=(3x^2y)^3-3(3x^2y)^2\,(2y^2z)+3(3x^2y)(2y^2z)^2-(2y^2z)^3$,

en hierop den regel der vorige § toepassende,

$(3\,x^2\,y-2\,y^2\,z)^3=27\,x^6\,y^3-3.\,9\,x^4\,y^2.\,2\,y^2\,z+3.\,3\,x^2\,y.\,4\,y^4z^2-8\,y^6\,z^3$,

hetwelk, na herleiding der termen, wordt,

$$(3x^2\,y-2\,y^2\,z)^3 = 27\,x^6\,y^3 - 54\,x^4\,y^4\,z + 36\,x^2\,y^5\,z^2 - 8\,y^6\,z^3.$$

De boven opgegevene uitkomsten voor de tweede, derde en vierde magten zijn slechts bijzondere gevallen van de volgende algemeenere formule, die onder den naam van het *binomium van* NEWTON bekend is, te weten:

$$(a\pm b)^n = a^n \pm \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^{n-4}b^4 \pm enz. \ldots\ldots\ldots (39).$$

Het is hier de plaats niet, om het bewijs dezer formule, die voor alle geheele, gebrokene, positieve en negatieve waarden van n doorgaat, voortedragen; men zal echter wel doen, zich die formule zelve in het geheugen te prenten, en daartoe op te merken, welk verband er tusschen de opvolgende termen bestaat.

Deze zelfde formule kan ook nog dienen, om magten van veelledige vormen te ontwikkelen, omdat men elken veelledigen vorm ook onder de gedaante van eenen tweeledigen kan schrijven. Moest, bij voorbeeld, ontwikkeld worden $(a^2-b^2-c^2)^3$, dan zou men hebben:

$$(a^2-b^2-c^2)^3$$
$$=[(a^2-b^2)-c^2]^3=(a^2-b^2)^3-3(a^2-b^2)^2c^2+3(a^2-b^2)c^4-c^6$$
$$=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6-3a^4c^2+6a^2b^2c^2-3b^4c^2+3a^2c^4-3b^2c^4-c^6.$$

Overeenkomstig hetgeen in het slot der vorige § gezegd is, kan men nog opmerken, dat wanneer een vorm tot eene evene magt moet verheven worden, de uitkomst dezelfde zal blijven, indien men vooraf de teekens der termen omkeert, en dat wanneer de verheffing tot eene onevene magt moet plaats hebben, het omkeeren van de teekens der termen ook eene omkeering van de teekens der ontwikkeling ten gevolge zal hebben. Zoo is:

$$(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n} \dots\dots\dots\dots (40)$$
$$(a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1} \dots\dots\dots (41)$$
$$(-a-b)^{2n} = (a+b)^{2n} \dots\dots\dots\dots (42)$$
$$(-a-b)^{2n+1} = -(a+b)^{2n+1} \dots\dots\dots (43)$$

welke formulen men evenzeer tot veelledige vormen kan uitstrekken.

Herleiding der wortels uit stelkunstige grootheden.

§ 54. Zoo als in § 10 gezegd is, verstaat men door den p^{de} magtswortel uit een getal a niets anders, dan een getal, dat tot de p^{de} magt verheven, het getal a oplevert. Dit wordt stelkunstig uitgedrukt, door de formule

$$(\sqrt[p]{a})^p = a \dots\dots\dots\dots (44).$$

Verder volgt uit de bepaling van magtsverheffing en worteltrekking, in § 9 en 10 gegeven, dat als men een getal a tot de p^{de} magt verheft, en uit die magt weder den p^{de} magtswortel trekt, men het getal a zal terug bekomen, zoodat men heeft

$$\sqrt[p]{a^p} = a \dots\dots\dots\dots (45).$$

Overigens is de herleiding der wortels uit eenledige stelkunstige vormen geheel begrepen in de beide volgende formulen:

$$\sqrt[p]{a^{pq}} = a^q \dots\dots\dots\dots (46)$$

en $$\sqrt[n]{a\,b\,c\,d\dots} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.\sqrt[n]{d}.\dots\ enz.\ (47).$$

Om de eerste dezer formulen te bewijzen, heeft men, volgens (32),

$$(a^q)^p = a^{pq}.$$

De p^{d} magtswortel uit $(a^q)^p$ is, volgens (45), a^q, en de p^{de} magtswortel uit a^{pq} wordt voorgesteld door $\sqrt[p]{a^{pq}}$. Daar nu zelfde magtswortels uit gelijke grootheden klaarblijkelijk even groot zijn, heeft men

$$a^q = \sqrt[p]{a^{pq}},$$

of $$\sqrt[p]{a^{pq}} = a^q.$$

Om de tweede formule te bewijzen, heeft men, volgens (33),

$$(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.\sqrt[n]{d}\ldots)^n = (\sqrt[n]{a})^n.(\sqrt[n]{b})^n.(\sqrt[n]{c})^n.(\sqrt[n]{d})^n\ldots;$$

volgens (44) kan men hiervoor schrijven

$$(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.\sqrt[n]{d}\ldots)^n = abcd\ldots;$$

nu is volgens (45) uit $(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.\sqrt[n]{d}\ldots)^n$ de n^{de} magtswortel $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.\sqrt[n]{d}\ldots$, en de n^{de} magtswortel uit $abcd\ldots$ wordt voorgesteld door $\sqrt[n]{abcd\ldots}$, waaruit volgt

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.\sqrt[n]{d}\ldots = \sqrt[n]{abcd\ldots}$$

of $$\sqrt[n]{abcd\ldots} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.\sqrt[n]{d}\ldots$$

Ten aanzien van de teekens, valt bij de herleiding der wortels uit stelkunstige vormen het volgende op te merken. Wanneer men $+a$ en $-a$ beide tot eene zelfde onevene, b.v. de $(2n+1)^{de}$ magt verheft, verkrijgt men, volgens (36) en (37), in het eene geval $+a^{2n+1}$, en in het andere $-a^{2n+1}$. Hieruit volgt, dat dan ook de $(2n+1)^{de}$ magtswortel uit $+a^{2n+1}$ zal zijn $+a$, en dat die uit $-a^{2n+1}$ zal wezen $-a$, en dat men dus heeft

$$\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} \text{ en } -\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = +\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} \ldots (48);$$

derhalve mag men, bij onevenemagtswortels, het teeken van de uitdrukking onder het wortelteeken veranderen, mits men te gelijker tijd het teeken, dat vóór het wortelteeken staat, omkeere. Zoo is, bij voorbeeld, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; $-\sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{3}$; *enz.*

Wanneer men $+a$ en $-a$ tot eene zelfde evene magt, b. v. tot de magt $2n$ verheft, leveren beide, volgens (34) en (35), $+a^{2n}$ op; er bestaat dus geen positief of negatief getal, dat, tot eene evene magt verheven zijnde, een negatief getal voortbrengt; voor den evenemagtswortel uit een negatief getal kan dus geenerlei getallenwaarde worden aangewezen, en het is daarom, dat men zulke, door stelkunstige teekens voorgestelde, wortels *onbestaanbare* uitdrukkingen noemt. Zoo zijn b. v. $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-1}$, en in het algemeen $\sqrt[2n]{-a^{2n}}$ onbestaanbare uitdrukkingen. Daarentegen is de $2n^{de}$ magtswortel uit a^{2n} niet alleen $+a$, maar ook $-a$, men heeft dus

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = \pm a \quad \text{en} \quad \sqrt[2n]{-a^{2n}} \textit{ onbestaanbaar} \ldots (49),$$

waaruit volgt, dat bij wortels eener evene magt de gedaanteverandering, die in (48) voor de wortels eener onevene magt is aangetoond, niet kan plaats hebben.

Uit het gezegde is gebleken, dat wanneer uit een getal of uit een' stelkunstigen vorm de wortel eener evene magt moet getrokken worden, er altijd twee zulke wortels zijn, die van elkander alleen in teeken verschillen; men heeft tot gebruik aangenomen, om, bij het aanduiden van zulk eene worteltrekking, die wortels reeds van elkander te onderscheiden, door de teekens + en — vóór het wortelteeken te plaatsen. Voor den $2n^{de}$ magtswortel uit A schrijft men alzoo $\pm\sqrt[2n]{A}$, en nu duidt $+\sqrt[2n]{A}$ of $\sqrt[2n]{A}$ den eenen, en $-\sqrt[2n]{A}$ den anderen wortel aan, zoodat tengevolge van dat aangenomen gebruik, $\sqrt[2n]{A}$ en $-\sqrt[2n]{A}$ ieder nu slechts ééne beteekenis hebben.

Is A een enkel positief getal, dan bedoelt men altijd door $\sqrt[2n]{A}$ den positieven, en door $-\sqrt[2n]{A}$ den negatieven wortel uit dat getal; zoo is, bij voorbeeld, de vierkantswortel uit 9 zoowel — 3 als + 3, maar door $5+\sqrt{9}$ wordt alleen het getal 8, en door $5-\sqrt{9}$ alleen het getal 2 bedoeld.

Is echter A een stelkunstige vorm, dan hangt het van bijzondere omstandigheden af, of $\sqrt[2n]{A}$ den positieven en $-\sqrt[2n]{A}$ den negatieven wortel voorstelt, dan wel of dit omgekeerd plaats heeft; het zou buiten het bestek dezer beginselen gaan, hieromtrent in meer bijzonderheden te treden; men kan echter uit de volgende voorbeelden zien, dat $+\sqrt[2n]{A}$ in sommige gevallen een negatief getal aanduidt:

1°. $\sqrt{(-3)^2}=-3$; $\sqrt[4]{(-2)^4}=-2$;
2°. $\sqrt{(-3)(-27)}=\sqrt{(-1)^2\times3\times27}=\sqrt{(-1)^2\times81}=-1\times9=-9$;
3°. $\sqrt[4]{(-4)(-16)(-2)^2}=\sqrt[4]{(-1)^4\times4\times16\times2^2}=\sqrt[4]{(-1)^4\times256}=-1\times4=-4$.

§ 55. Volgens de vorige § heeft men dus, ter herleiding der wortels uit eenledige stelkunstige vormen den volgenden

Regel. *Bepaal eerst het teeken, dat de wortel moet verkrijgen: indien de aanwijzer der worteltrekking oneven is, en de grootheid achter het wortelteeken het teeken — vóór zich heeft, dan moet het teeken van den begeerden wortel — of + zijn, naargelang er + of — vóór het wortelteeken mogt staan; in alle andere gevallen blijft de wortel het teeken behouden, dot vóór het wortelteeken staat. Trek vervolgens den gevraagden wortel uit elken factor van den vorm, daartoe aan dien factor tot nieuwen exponent gevende het quotient, dat er komt, wanneer men den exponent, welken die factor reeds heeft, deelt door den aanwijzer der worteltrekking, en neem vervolgens het product van al deze wortels uit de factoren.*

Uit dezen regel volgt onmiddellijk, dat, ingevalle de vorm, waaruit eenige wortel moet getrokken worden, een' getallen-coëfficiënt bij zich heeft, men uit dezen coëfficiënt almede dien wortel zal moeten trekken, waartoe later de weg zal aangewezen worden.

De volgende voorbeelden kunnen strekken tot toepassing van den gegevenen regel:

1°. $\sqrt{16\,a^4\,b^2\,c^6} = 4\,a^2\,b\,c^3$;

2°. $\sqrt[3]{27\,x^3\,y^6\,z^9} = 3\,x\,y^2\,z^3$;

3°. $\sqrt[3]{-64\,p^9\,q^3} = -4\,p^3\,q$;

4°. $-\sqrt[4]{16\,a^4 d^8} = -2\,a\,d^2$;

5°. $\sqrt[n]{5^n\,a^{2n}\,b^{mn}\,c^n} = 5a^2\,b^m\,c$.

§ 56. Ingevalle de aanwijzer der worteltrekking een even getal is, en de grootheid achter het wortelteeken het teeken — vóór zich heeft, is de zoo even gegeven regel voor geene volkomene toepassing vatbaar; dit is evenmin het geval, wanneer niet uit elk der factoren van den eenledigen vorm de begeerde wortel, zonder het gebruik van een wortelteeken, kan worden uitgedrukt; tot dit laatste wordt vereischt, dat de exponenten van al de letter-factoren deelbaar zijn door den aanwijzer der worteltrekking, en dat ook de getallen-coëfficiënten in de gedaante van magten geschreven kunnen worden, waarvan de exponenten mede door den aanwijzer der worteltrekking deelbaar zijn. De voorbeelden, in de vorige § gegeven, verkeeren alle in dit geval.

Hebben de eenledige vormen, waarvan men de wortels begeert, die eigenschappen niet, dan kan dezelfde regel in vele gevallen dienen, om, zoo als men zegt, *factoren buiten het wortelteeken te brengen;* in dit geval, is de herleiding der wortels begrepen in de algemeene formule

$$\sqrt[n]{a^n\,b} = a\sqrt[n]{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (50),$$

die een onmiddellijk gevolg van de bewezene vergelijking (47) is. Om deze herleiding te bewerkstelligen, neme men in acht den volgenden

Regel. *Ontbind den vorm, waaruit de wortel moet getrokken worden, zoo mogelijk, in twee factoren, waarvan de eene de eigenschap heeft, dat de begeerde wortel uit denzelven, zonder behulp van wortelteeken, kan worden uitgedrukt, terwijl de andere geene factoren meer bevat, die dezelfde eigenschap hebben, schrijf den wortel uit dien eersten factor buiten het wortelteeken, en laat den tweeden factor onder het wortelteeken staan.*

Zie hier eenige voorbeelden, tot toepassing van den gegevenen regel.

1°. $\sqrt{12} = \sqrt{2^2.3} = 2\sqrt{3}$;

2°. $\sqrt{-147} = \sqrt{7^2 \times -3} = 7\sqrt{-3}$;

3°. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27.2} = 3\sqrt[3]{2}$;

4°. $\sqrt[3]{-375} = \sqrt[3]{-125.3} = -5\sqrt[3]{3}$;

5°. $\sqrt{8\,a^4\,b^5} = \sqrt{2^2\,a^4\,b^4.\,2\,b} = 2\,a^2\,b^2\sqrt{2\,b}$;

6°. $\sqrt[3]{81\,x^3\,y^4\,z^7} = \sqrt[3]{3^3\,x^3\,y^3\,z^6.\,3\,yz} = 3\,xyz^2\sqrt[3]{3\,yz}$;

7°. $\sqrt[4]{-16\,a^9\,b^7} = \sqrt[4]{2^4\,a^8\,b^4 \times -ab^3} = 2\,a^2\,b\sqrt[4]{-ab^3}$;

8°. $\sqrt[5]{-64\,p^7\,q^{10}\,r^2} = \sqrt[5]{-2^5\,p^5\,q^{10}.2\,p^2\,r^2} = -2\,p\,q^2\sqrt[5]{2\,p^2\,r^2}$;

9°. $\sqrt[6]{-a^6\,b^6} = ab\sqrt[6]{-1}$.

Indien men de vergelijking (50) aldus schrijft:

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b},$$

leert zij, zoo er factoren buiten het wortelteeken staan, die *factoren onder het wortelteeken te brengen.* Men heeft daartoe den volgenden

REGEL. *Verhef den factor, die buiten het wortelteeken staat, tot zoodanige magt, als door den aanwijzer der worteltrekking wordt aangewezen, en breng die verkregene magt, als factor, onder het wortelteeken.*

In de zoo even gegevene voorbeelden, behoeft men de leden der vergelijkingen slechts te verplaatsen, om even zoo vele voorbeelden ter toepassing van dezen regel te verkrijgen.

Het volgens § 54 aangenomen gebruik, om de beide evenemagtswortels uit eenige grootheid, door de teekens + en — van elkander te onderscheiden, vordert, dat men bij het toepassen van den laatsten regel, om factoren onder een evenemagtswortelteeken te brengen, nimmer het teeken — onder de binnen te brengen factoren moet begrijpen, daar hierdoor de genoemde onderscheiding zou verloren gaan. Men moet dus niet schrijven

$$-a\sqrt{b}=\sqrt{(-a)^2 b}=\sqrt{a^2 b},$$

maar

$$-a\sqrt{b}=-\sqrt{(a)^2 b}=-\sqrt{a^2 b}.$$

Voorts is het hier de geschikte plaats, om op te merken, dat, zoo eene wortelgrootheid met eene grootheid zonder wortelteeken moet worden vermenigvuldigd, men altijd dezen laatsten factor vóór den eersten moet schrijven, dewijl men anders een' factor, die buiten het wortelteeken behoort, onveranderd onder hetzelve zou brengen. Voor het product van a^2 en $\sqrt[3]{b}$ schrijve men dus $a^2\sqrt[3]{b}$ of $\sqrt[3]{a^6 b}$, en niet $\sqrt[3]{ba^2}$; even zoo is van 3 en $\sqrt{5}$ het product $3\sqrt{5}$ of $\sqrt{45}$, en niet $\sqrt{5\times 3}$.

§ 57. De wortels uit stelkunstige vormen zijn somtijds nog voor eene andere herleiding vatbaar, die begrepen is in de formule

$$\sqrt[np]{a^{nq}}=\sqrt[p]{a^q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (51).$$

Om deze formule te bewijzen, merke men op, dat volgens (44)

$$\left(\sqrt[p]{a^q}\right)^p=a^q$$

is. Brengt men nu elk lid dezer vergelijking tot de n^{de} magt, dan blijkt, dat men ook heeft

$$\left(\sqrt[p]{a^q}\right)^{np}=a^{nq}$$

Nu is, volgens (45), de npdemagtswortel uit het eerste lid dezer vergelijking $\sqrt[p]{a^q}$, die uit het tweede lid wordt door $\sqrt[np]{a^{nq}}$ voorgesteld, en bijgevolg is

$$\sqrt[p]{a^q}=\sqrt[np]{a^{nq}}$$

of

$$\sqrt[np]{a^{nq}}=\sqrt[p]{a^q},$$

waardoor de opgegevene formule bewezen is.

Dezelve toont aan, dat wanneer de aanwijzer eener worteltrekking en de exponent van de grootheid onder het wortelteeken eenen gemeenen deeler mogten hebben, men dien gemeenen deeler uit beide die getallen kan weglaten, zonder daardoor de waarde van den vorm te veranderen. Daar in deze formule onder het teeken $\sqrt[np]{\ }$ niets anders dan alleen de grootheid a^{nq} staat, kan dezelve ook alleen dan toegepast worden, wanneer al, wat onder het wortelteeken staat, (het teeken en de getallen-coëfficiënt daaronder begrepen) in de gedaante eener magt kan worden geschreven, waarvan de exponent eenen gemeenen deeler met den aanwijzer der worteltrekking heeft.

Zie hier eenige voorbeelden van deze herleiding:

1°. $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$;

2°. $\sqrt[4]{4a^2b^6}=\sqrt[4]{(2ab^3)^2}=\sqrt{2ab^3}=b\sqrt{2ab}$;

3°. $\sqrt[9]{-27a^3b^6}=\sqrt[9]{(-3ab^2)^3}=\sqrt[3]{-3ab^2}=-\sqrt[3]{3ab^2}$;

4°. $\sqrt[6]{-512a^9}=\sqrt[6]{(-2a)^9}=\sqrt{(-2a)^3}=-2a\sqrt{-2a}$;

5°. $\sqrt[np]{a^{nq}b^{nr}c^{ns}}=\sqrt[np]{(a^qb^rc^s)^n}=\sqrt[p]{a^qb^rc^s}$.

§ 58. De regels, in de drie laatste §§ gegeven, zijn even zeer toepasselijk op eenledige stelkunstige vormen, die veelledige factoren bevatten. Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $\sqrt{(a-b)^2(c+d)^4}=(a-b)(c+d)^2$;

2°. $\sqrt[3]{p^6(p^2+q^2)^3}=p^2(p^2+q^2)$;

3°. $\sqrt{2b^2(e^2+f^2)^3}=b(e^2+f^2)\sqrt{2(e^2+f^2)}$;

4°. $\sqrt[5]{160(m^5-n^5)^6}=2(m^5-n^5)\sqrt[5]{5(m^5-n^5)}$;

5°. $\sqrt[15]{(a^2-b^2)^7(a+b)^5(a-b)^2}=\sqrt[15]{(a+b)^{12}(a-b)^9}=\sqrt[5]{(a+b)^4(a-b)^3}$
$=\sqrt[5]{(a+b)(a^2-b^2)^3}$.

De herleiding der wortels uit veelledige vormen komt dan eigenlijk ook daarop neder, dat men die veelledige vormen, in zulke gedaanten weet te schrijven, dat de regels voor de eenledige vormen op dezelve, even als in de bovenstaande voorbeelden, kunnen worden toegepast; dit kan echter slechts in sommige gevallen plaats hebben, en of dit kan geschieden, zal men het best ontdekken, door de vormen zoo eenvoudig mogelijk voor te stellen, waartoe het nuttig is, zich steeds de uitkomsten, in § 34 en 53 opgegeven, te herinneren. Zoo is, bij voorbeeld:

1°. $\sqrt{(4a^4-8a^3b+4a^2b^2)}=\sqrt{4a^2(a^2-2ab+b^2)}$
$=\sqrt{4a^2(a-b)^2}=2a(a-b)$;

2°. $\sqrt{[(a-2b)^2+8ab]}=\sqrt{(a^2-4ab+4b^2+8ab)}$
$=\sqrt{(a^2+4ab+4b^2)}=\sqrt{(a+2b)^2}=a+2b$;

3°. $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}=\sqrt{(a-b)(a+b)(a+b)}$
$=\sqrt{(a-b)(a+b)^2}=(a+b)\sqrt{(a-b)}$;

4°. $\sqrt[3]{(a^3-b^3)(a^2+ab+b^2)^2}=\sqrt[3]{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2+ab+b^2)^2}$
$=(a^2+ab+b^2)\sqrt[3]{(a-b)}$.

De meest voorkomende herleidingen van wortels uit stelkunstige vormen hebben plaats ten opzigte der vierkantswortels; het is daarom van belang op te merken, dat de ontwikkelde tweede magt van eenen tweeledigen vorm altijd drie termen bevat, en dat de ontwikkelde tweede magt van eenen drieledigen uit zes termen bestaat; waaruit volgt, dat de vierkantswortel uit eene twee- vier- of vijfledige grootheid nooit zonder behulp van het wortelteeken zal kunnen worden voorgesteld; en bij eene drieledige zal dit alleen dan kunnen plaats hebben, indien zulks bij twee der termen kan geschieden, en tevens de derde term het dubbel product is van de wortels uit de beide andere. Was, bij voorbeeld, gegeven $\sqrt{(25a^2b^4 - 70a^4b^2c + 49a^6c^2)}$, dan zou men opmerken, dat $\sqrt{25a^2b^4} = 5ab^2$, $\sqrt{49a^6c^2} = 7a^3c$ en $2 . 5ab^2 . 7a^3c = 70a^4b^2c$ is, en dat men derhalve voor den gegevenen vorm schrijven kan $\sqrt{(5ab^2 - 7a^3c)^2} = 5ab^2 - 7a^3c$.

BEHANDELING DER GEBROKENE STELKUNSTIGE VORMEN.

§ 59. Wanneer een stelkunstige vorm een factor is van eenen anderen vorm, en men den eersten in den laatsten deelt, zal deze deeling opgaan; hierom wordt de eerste vorm een *deeler* van den tweeden, en de tweede een *veelvoud* van den eersten genoemd.

Wanneer twee stelkunstige vormen eenen zelfden vorm als factor bevatten, wordt die laatste vorm *een gemeene deeler* der beide eerste genoemd; zoo is, bij voorbeeld, a een gemeene deeler der vormen $3a^2b$ en $2ac^2$.

Twee vormen kunnen verscheidene gemeene deelers hebben; zoo hebben, bij voorbeeld, $6a^2b^2c$ en $15ab^3d$ tot gemeene deelers 3, a, b, ab, $3a$, $3ab$ enz.; wanneer echter, een gemeene deeler in twee stelkunstige vormen gedeeld wordende, de quotienten, die er komen, geene gemeenschappelijke factoren meer hebben, noemt men dien gemeenen deeler *den grootsten gemeenen deeler;* van $6a^2b^2c$ en $15ab^3d$ is alzoo $3ab^2$ de grootste gemeene deeler, omdat $\frac{6a^2b^2c}{3ab^2} = 2ac$ en $\frac{15ab^3d}{3ab^2} = 5bd$ geene gemeenschappelijke factoren meer bevatten.

Wanneer een stelkunstige vorm te gelijker tijd een veelvoud van eenige andere stelkunstige vormen is, wordt de eerste een *gemeen veelvoud* van die andere vormen genoemd; zoo is, bij voorbeeld, $6a^2b^3c$ een gemeen veelvoud van $2abc$, $3ac$ en $6b^2$. Het gedurig product van eenige stelkunstige vormen is dus altijd een gemeen veelvoud van dezelve; van de zoo even genoemde vormen $2abc$, $3ac$ en $6b^2$, is dan ook het gedurig product $36a^2b^3c^2$ een gemeen veelvoud.

Eenige stelkunstige vormen hebben altijd een oneindig aantal gemeene veelvouden, onder welke er een is, dat men het *kleinste gemeene veelvoud* dezer vormen noemt, omdat het uit minder factoren bestaat, dan elk ander gemeen veelvoud.

Zijn er onder eenige gegevene stelkunstige vormen geene, die gemeenschappelijke factoren hebben, dan zal het gedurig product van die vormen hun kleinste gemeene veelvoud zijn; want zoo men uit dit gedurig product slechts een enkele factor wegliet, zou de komende vorm geen gemeen veelvoud der gegevene vormen zijn.

Komen onder eenige gegevene stelkunstige vormen zoodanige voor, die gemeenschappelijke factoren hebben, dan zal, als men uit hun gedurig product die gemeenschappelijke factoren weglaat, de komende vorm nog een gemeen veelvoud der gegevene vormen zijn, en dit gemeene veelvoud zal het kleinste wezen, omdat, zoo men er nog meer factoren uit wegliet, de komende vorm geen gemeen veelvoud meer zijn zou.

Van de zoo even genoemde vormen $2abc$, $3ac$ en $6b^2$ is $6ab^2c$ het kleinste gemeene veelvoud, want laat men uit hun gedurig product $36a^2b^3c^2$ achtervolgens weg: den factor ac, die aan de beide eerste; den factor 3, die aan de beide laatste, en den factor $2b$, die aan de eerste en laatste vormen gemeen is, dan verkrijgt men $6ab^2c$, en wilde men hieruit nu nog meer factoren weglaten, dan zou de komende vorm klaarblijkelijk geen gemeen veelvoud meer wezen van de opgegevene vormen.

Alvorens tot de behandeling der stelkunstige gebrokens over te gaan, zal het noodig zijn, vooraf aan te wijzen, hoe de grootste gemeene deelers en kleinste gemeene veelvouden van gegevene stelkunstige vormen gevonden worden.

Over het vinden van de grootste gemeene deelers der stelkunstige vormen.

§ 60. Bij twee eenledige vormen vallen niet alleen de gemeene deelers, maar ook de grootste gemeene deelers, van zelven in het oog, mits men slechts vooraf den grootsten gemeenen deeler der getallen-coëfficiënten, zoo als dit in de cijferkunst geleerd is, bepaald heeft.

Uit hetgeen in de vorige § gezegd is, blijkt duidelijk, dat men, om den grootsten gemeenen deeler van twee of meer eenledige stelkunstige vormen te vinden, gebruik kan maken van den volgenden

Regel. *Bepaal eerst den grootsten gemeenen deeler der getallen-coëfficiënten, en vermenigvuldig dien met al de letterfactoren, die de vormen met elkander gemeen hebben, elk verheven tot de laagste magt, waartoe die letterfactor in de gegevene vormen voorkomt, dan zal dit gedurig product de grootste gemeene deeler zijn.*

Het is klaar, dat de vormen geenen gemeenen deeler zullen hebben, wanneer de getallen-coëfficiënten er geenen hebben, en er ook geene gemeenschappelijke factoren in de opgegevene vormen voorkomen.

§ 61. In § 29 is gebleken, dat, als men eenen veelledigen vorm met eenen eenledigen vermenigvuldigt, die eenledige in al de termen van het ontwikkelde product voorkomt; hieruit volgt, dat een veelledige vorm geen' eenledigen factor kan hebben, tenzij die eenledige factor zich in al de termen van den veelledigen vorm als factor bevinde. Wanneer men dus de factoren, die aan al de termen van eenen veelledigen vorm gemeen zijn, buiten haakjes brengt, zal die veelledige vorm geene andere eenledige factoren bevatten.

Om alzoo den grootsten gemeenen deeler van eenen eenledigen en eenen veelledigen vorm te vinden, brenge men de factoren, die aan al de termen van den veelledigen vorm gemeen zijn, buiten haakjes, waardoor de veelledige vorm de gedaante van eenen eenledigen zal hebben verkregen, en daarna passe men den regel der vorige § toe.

§ 62. Het vinden van den grootsten gemeenen deeler van twee veelledige vormen, zou onmiddellijk tot den regel, voor de eenledige gegeven, teruggebragt kunnen worden, indien men slechts die veelledige vormen in derzelver eenvoudigste factoren wist te ontbinden; want het is klaar, dat indien men die vormen, in hunne eenvoudigste factoren ontbonden, schrijft, daarna volgens den regel van § 60 den grootsten gemeenen deeler bepaalt, en de vormen alsdan door dien deeler deelt, de komende quotienten geene gemeenschappelijke factoren meer zullen hebben.

Verkeeren dus twee veelledige vormen, waarvan de grootste gemeene deeler moet gezocht worden, in dit geval, dan volge men den boven aangeduiden weg. Wilde men, bij voorbeeld, den grootsten gemeenen deeler vinden van de vormen

$$4a^2b^3 + 2a^3b^2 + 2ab^4$$

en

$$8a^4b - 8a^2b^3,$$

dan zou men deze vormen naar de afdalende magten van eene zelfde letter, b. v. a rangschikken, en vervolgens zoo eenvoudig mogelijk schrijven. Hierdoor zou men voor den eersten vorm verkrijgen

$$2a^3b^2 + 4a^2b^3 + 2ab^4 = 2ab^2(a^2 + 2ab + b^2) = 2ab^2(a + b)^2,$$

en voor den tweeden

$$8a^4b - 8a^2b^3 = 8a^2b(a^2 - b^2) = 8a^2b(a - b)(a + b).$$

Door toepassing van den regel, voor de eenledige vormen gegeven, vindt men nu voor den grootsten gemeenen deeler dadelijk $2ab(a + b)$. Deelt men de beide vormen door dezen deeler, dan verkrijgt men tot quotienten $b(a+b)$ en $4a(a-b)$, die nu klaarblijkelijk geene gemeenschappelijke factoren meer hebben.

Daar men echter altijd zoo gemakkelijk niet zien kan, of een veelledige vorm in factoren ontbonden kan worden, en welke die zijn, zoo heeft men, om de grootste gemeene deelers van twee veelledige vormen in alle gevallen te kunnen ontdekken, naar andere hulpmiddelen omgezien.

§ 63. Het is vooreerst klaar, dat, indien van twee veelledige vormen een gemeene factor van zelf in het oog mogt vallen, deze een factor van den grootsten gemeenen deeler dezer vormen zou wezen; men kan dus de vormen door dezen gemeenschappelijken factor deelen, en dan blijft er nog over, den grootsten gemeenen deeler te zoeken van de komende quotienten; deze gevonden wordende, zal men denzelven met den reeds opgemerkten factor moeten vermenigvuldigen, en dit product zal dan de grootste gemeene deeler der beide vormen wezen. Indien het mogt blijken, dat de genoemde quotienten geenen gemeenen deeler hadden, zou alleen de reeds ontdekte factor de grootste gemeene deeler der beide vormen zijn.

Het weglaten van gemeenschappelijke factoren is dus een eerste hulpmiddel, om het zoeken der gemeene deelers van gegevene vormen tot het zoeken der gemeene deelers van eenvoudiger vormen terug te brengen.

Nemen wij tot een voorbeeld, dat gevraagd werd, den grootsten gemeenen deeler te vinden van $2a^3c^2 - 2b^3c^2$ en $2a^4c^2 - 2b^4c^2$, dan valt terstond in het oog, dat beide vormen den factor $2c^2$ gemeen hebben, die dus reeds een factor van den grootsten gemeenen deeler moet zijn. Deelen wij beide vormen nu door dien factor, dan zijn de quotienten a^3-b^3 en a^4-b^4. Het opgemerkte in § 49 is genoegzaam, om dadelijk te zien, dat de beide laatste vormen den factor $a-b$ gemeen hebben. Weder door dezen deelende, komt er a^2+ab+b^2 en $a^3+a^2b+ab^2+b^3$, en er blijft dus slechts over, den grootsten gemeenen deeler van de laatste vormen te zoeken. Mogt het nu blijken, dat deze vormen geen' gemeenen deeler hebben, dan is het product der reeds gevondene factoren, dat is $2c^2(a-b)$ de begeerde grootste gemeene deeler. Mogten echter a^2+ab+b^2 en $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ gemeene deelers hebben, dan zou men hunnen grootsten gemeenen deeler met $2c^2(a-b)$ moeten vermenigvuldigen, om den begeerden grootsten gemeenen deeler te verkrijgen.

§ 64. Het is klaar, dat als men een' der gegevene vormen met eenen factor vermenigvuldigt, of door eenen factor deelt, die geen factor is van den anderen vorm, en ook geene deelers heeft, die in den anderen vorm als factoren voorkomen, de nieuwe vorm, die daardoor ontstaat, met den anderen vorm nog denzelfden grootsten gemeenen deeler zal hebben, als de beide oorspronkelijke vormen, omdat de gemeene deeler uit factoren moet bestaan, die aan beide vormen gemeen zijn. Mogt dus bij eenen der gegevene vormen van zelf zulk een factor in het oog vallen, dan kan men dien factor weglaten, en den aldus verkregenen vorm in plaats van den opgegevenen nemen.

Het weglaten van factoren, die niet aan de beide vormen gemeen zijn, is dus een tweede hulpmiddel, om het zoeken van gemeene deelers eenvoudiger te maken.

Nemen wij tot een voorbeeld, dat gevraagd werd den grootsten gemeenen deeler te vinden van $2a^3c^2d - 2b^3c^2d$ en $3a^4b^2 + 3ab^5$, dan valt terstond in het oog, dat de eerste dezer vormen den factor $2c^2d$ bevat, die geen factor is van den anderen vorm, en ook geene deelers heeft, die in den anderen vorm voorkomen. Hetzelfde heeft plaats met den factor $3ab^2$, die in den tweeden vorm begrepen is. Deelt men nu elken vorm door den daarin opgemerkten factor, dan zijn de quotienten a^3-b^3 en a^3+b^3. Volgens het opgemerkte in § 49, is nu $a-b$ een factor van den eersten, en $a+b$ een factor van den laatsten dezer beide vormen. Heeft men zich nu verzekerd, dat $a-b$ geen factor is van a^3+b^3 en $a+b$ geen factor van a^3-b^3, dan kan men weder deze vormen door den daarin opgemerkten factor deelen, waardoor men de quotienten a^2+ab+b^2 en a^2-ab+b^2 zal bekomen, en er blijft dus slechts over, den grootsten gemeenen deeler van de laatste vormen te zoeken.

§ 65. Een derde hulpmiddel, om het zoeken der grootste gemeene deelers te vereenvoudigen, steunt op de stelling, dat, wanneer men op twee stelkunstige vormen, die gemeene deelers hebben, de gewone bewerking der deeling toepast (§ 46), en daardoor een gedeelte van het quotient gevonden heeft, de deeler en de rest dezer deeling nog denzelfden grootsten gemeenen deeler zullen hebben, als de beide oorspronkelijke vormen.

Om deze stelling te bewijzen, neme men aan, dat twee gegevene stelkunstige vormen eenen anderen vorm tot grootsten gemeenen deeler hebben; noemt men dan kortheidshalve dien gemeenen deeler D, en de quotienten, die er komen zouden, als men de gegevene vormen door dien gemeenen deeler deelde, A en B, dan hebben de vormen A en B geene gemeenschappelijke factoren meer, en dan worden de gegevene vormen zelven door AD en BD voorgesteld. Wordt nu AD in BD gedeeld, en stelt men het gevondene gedeelte van het quotient door Q voor, zoodat de bewerking aldus te staan komt,

$$\begin{array}{l|l|l} \mathrm{AD} & \mathrm{BD} & \mathrm{Q} \\ & \mathrm{ADQ} & \\ \hline & \mathrm{BD-ADQ}, & \end{array}$$

dan ziet men duidelijk, dat de rest in de factoren D en B—AQ kan ontbonden worden, en dus met AD den deeler D gemeen heeft. Deelt men nu AD en BD—ADQ beide door D, dan hebben de komende quotienten A en B—AQ geene gemeenschappelijke factoren meer, omdat elke factor van A, volgens de onderstelling, geen factor van B is, en dus ook (§ 44) geen factor van B—AQ kan wezen. Hieruit volgt, dat D niet alleen een gemeene deeler, maar ook de grootste gemeene deeler van AD en BD—ADQ is, waardoor de opgegevene stelling bewezen is.

Begeert men nu den grootsten gemeenen deeler van twee stelkunstige vormen te vinden, en past men daarop, na behoorlijke rangschikking der vormen, de bewerking der deeling, zoover mogelijk, toe, daarbij tot deeler aannemende den vorm, die ten opzigte der rangletter van den laagsten graad is, dan zal de rest, ten opzigte dezer rangletter, van lageren graad zijn, dan deeler of deeltal, en, volgens de bewezene stelling, met den deeler denzelfden grootsten gemeenen deeler hebben, als de beide opgegevene vormen. Om dus den grootsten gemeenen deeler der beide opgegevene vormen te vinden, behoeft men slechts den grootsten gemeenen deeler van den deeler en de rest te zoeken, waardoor het zoeken der gemeene deelers van gegevene vormen tot het zoeken der gemeene deelers van eenvoudiger vormen wordt teruggebragt.

Op deze eenvoudiger vormen kan men hetzelfde hulpmiddel nogmaals toepassen, ten einde vormen van nog lageren graad te bekomen, die weder denzelfden grootsten gemeenen deeler als de oorspronkelijke moeten hebben; de laatst verkregene vormen kan men weder op dezelfde wijze behandelen, en zoo vervolgens.

Komt men nu bij eene der hiertoe vereischte deelingen tot eene rest 0, dan is de laatste deeler klaarblijkelijk de grootste gemeene deeler van zich zelven en de vóórlaatste rest, en dus ook van de opgegevene vormen.

Komt men niet tot eene rest 0, dan kan men de achtervolgende deelingen zoo ver voortzetten, tot dat men eene rest verkrijgt, waarin de rangletter niet meer voorkomt, en dewijl ook deze rest altijd nog den grootsten gemeenen deeler der gegevene vormen, als factor, moet bevatten, zal er in dit geval geen gemeene deeler, afhankelijk van die rangletter, kunnen wezen.

Indien er een, van die rangletter afhangende, gemeene deeler in de gegevene vormen aanwezig is, zal men dan ook, bij de achtervolgende deelingen, eens tot eene rest 0 moeten komen.

§ 66. Na dus, waar dit plaats kan hebben, door toepassing der in § 63 en 64 aangegevene hulpmiddelen, het zoeken der grootste gemeene deelers van twee veelledige stelkunstige vormen, te hebben teruggebragt, tot het zoeken dier deelers van zulke vormen, waarin men op het oog geene factoren meer ontdekt, heeft men, overeenkomstig het derde aangewezen hulpmiddel den volgenden

Regel. *Rangschik de beide vormen naar de afdalende magten van eene zelfde letter; deel, volgens den regel van § 46, de vorm, die ten opzigte der rangletter van den laagsten graad is, in den anderen, totdat er eene rest van lageren graad dan de deeler komt; deel deze rest even zoo in den vorigen deeler, en ga hiermede voort, totdat er eene rest 0, of eene rest, die onafhankelijk van de rangletter is, te voorschijn komt; in het eerste geval is de laatste deeler de gezochte grootste gemeene deeler, en in het laatste geval hebben de vormen geenen gemeenen deeler, die van de rangletter afhankelijk is.*

Bij het toepassen van dezen regel, zal het dikwijls gebeuren, dat de eerste term des deelers niet opgaat in den eersten term des deeltals; om nu evenwel de bewerking te kunnen voortzetten, zonder in gebrokens te vervallen, kan men, om de deeling der eerste termen te doen opgaan, overeenkomstig het opgemerkte in § 64, in het deeltal factoren invoeren, of, zoo mogelijk, factoren uit den deeler weglaten, mits die factoren aan de voorwaarden, in § 64 opgegeven, voldoen. Bij het achtervolgend deelen moet men voorts zorgen, dat na elke aftrekking de resten weder behoorlijk gerangschikt zijn, en hetgeen hierboven gezegd is, omtrent het weglaten en invoeren van factoren blijft ook, na elke aftrekking, op nieuw toepasselijk. Verder is het klaar, dat twee vormen geene gemeene deelers zullen hebben, wanneer al de getallen-coëfficiënten geenen zelfden factor bevatten, en er ook geene gemeenschappelijke letters in voorkomen; zoo is het, bij voorbeeld, blijkbaar, dat de vormen

$$2a^3+5a^2b+7ab^2-4b^3 \quad \text{en} \quad 17x^3-3x^2y+5xy^2-25y^3$$

geenen gemeenen deeler kunnen hebben.

Ter opheldering van den gegevenen regel, strekken de volgende voorbeelden:

Eerste Voorbeeld. Den grootsten gemeenen deeler te vinden van de vormen $5ab^4+a^3b^2-10b^5-2a^2b^3$ en $a^2b^2-8b^4-2ab^3+a^3b$.

De bewerking komt aldus te staan:

$$a^3b^2-2a^2b^3+5ab^4-10b^5;\ a^3b+a^2b^2-2ab^3-8b^4;$$

$$a^3b-2a^2b^2+5ab^3-10b^4;\ a^3+a^2b-2ab^2-8b^3;$$

$$\begin{array}{l|l}
a^3-2a^2b+5ab^2-10b^3 & \left.a^3+a^2b-2ab^2-8b^3\right\}1 \\
 & \underline{a^3-2a^2b+5ab^2-10b^3} \\
 & 3a^2b-7ab^2+2b^3 \\
 & 3a^2-7ab+2b^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
3a^2-7ab+2b^2 & \left.\begin{array}{l} a^3-2a^2b+5ab^2-10b^3 \\ 3a^3-6a^2b+15ab^2-30b^3 \end{array}\right\}a \\
 & \underline{3a^3-7a^2b+2ab^2} \\
 & \left.\begin{array}{l} a^2b+13ab^2-30b^3 \\ 3a^2+39ab-90b^2 \end{array}\right\}1 \\
 & \underline{3a^2-7ab+2b^2} \\
 & 46ab-92b^2 \\
 & a-2b
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
a-2b & \left.3a^2-7ab+2b^2\right\}3a-b \\
 & \underline{3a^2-6ab} \\
 & -ab+2b^2 \\
 & \underline{-ab+2b^2} \\
 & 0
\end{array}$$

Vooreerst zijn hier de vormen gerangschikt naar de afdalende magten van a; vervolgens is opgemerkt, dat de beide vormen den gemeenschappelijken factor b hadden, deze factor is dus weggelaten; verder is opgemerkt, dat b toen nog een factor van den eersten, maar niet meer van den tweeden vorm was, derhalve is ook die factor uit den eersten vorm weggelaten; daarna zijn de komende vormen in elkander gedeeld, en daar zij beide, ten opzigte van a, van denzelfden graad waren, was het hier onverschillig, welken men voor deeler aannam. De rest dezer deeling eenen factor b bevattende, die geen factor van den deeler was, zoo is die factor uit de rest weggelaten, en deze vereenvoudigde rest, ten opzigte van a, van eenen lageren graad dan de deeler zijnde, is als nieuwe deeler en de vorige deeler als nieuw deeltal aangenomen. Om bij deze tweede deeling de eerste termen in elkander te doen opgaan, is in het deeltal de factor 3 ingevoerd, hetgeen mogt geschieden, omdat 3 geen factor van den deeler was; na de eerste aftrekking is, om dezelfde reden, de factor 3 ingevoerd, en ter vereenvoudiging de factor b weggelaten, even zoo is in de volgende rest de factor $46b$ weggelaten, hetgeen alweder mogt plaats hebben, omdat $46b$ geen factor van den deeler was, en ook geene deelers bevatte, die factoren van den deeler waren. De vereenvoudigde rest $a-2b$ is eindelijk weder in den vorigen deeler gedeeld, en deze deeling opgegaan zijnde, zoo volgt hieruit, dat $a-2b$ de grootste gemeene deeler van de twee opgegevene vormen zijn zou, indien uit die opgegevene vormen geene gemeenschappelijke factoren waren weggelaten; daar echter hier reeds in den beginne de gemeenschappelijke factor b is weggelaten geworden, is $b(a-2b)$ de gevraagde grootste gemeene deeler.

Tweede Voorbeeld. Den grootsten gemeenen deeler te vinden van de vormen $2x^2 + 3x + 1$ en $x^3 + 2x + 1$.

De bewerking is deze:

$$\begin{array}{r|rl}
2x^2+3x+1 & \left.\begin{array}{r} x^3 + 2x + 1 \\ 2x^3 + 4x + 2 \end{array}\right\} & x \\
 & 2x^3 + 3x^2 + x & \\
\hline
 & \left.\begin{array}{r} -3x^2 + 3x + 2 \\ -6x^2 + 6x + 4 \end{array}\right\} & -3 \\
 & -6x^2 - 9x - 3 & \\
\hline
 & 15x + 7 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rl}
15x+7 & \left.\begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 1 \\ 30x^2 + 45x + 15 \end{array}\right\} & 2x \\
 & 30x^2 + 14x & \\
\hline
 & \left.\begin{array}{r} 31x + 15 \\ 465x + 225 \end{array}\right\} & 31 \\
 & 465x + 217 & \\
\hline
 & 8 &
\end{array}$$

Daar de laatste rest 8 geheel onafhankelijk van x is, en klaarblijkelijk geene factoren bevat, die ook factoren van de opgegevene vormen zijn, zoo hebben dezelve geenen gemeenen deeler.

§ 67. Indien men, bij het rangschikken der vormen naar de afdalende magten van eene zelfde letter, verschillende termen aantreft, waarin dezelfde magt van die letter voorkomt, is het vooral noodig, het opgemerkte in § 47 in het oog te houden, daar zich anders de zwarigheid zou kunnen opdoen, dat men door de deeling tot geene resten van lageren graad geraakte. Zie hier een paar voorbeelden ter toepassing.

Eerste Voorbeeld. Den grootsten gemeenen deeler te zoeken van de vormen $ab-b^2-ac+bc$ en $a^2b-b^3+a^2c-b^2c$.

Verzuimde men hier het boven opgemerkte, dan zou men de volgende bewerking verkrijgen

$$\begin{array}{l|l}
ab-ac-b^2+bc & \left.\begin{array}{l} a^2b+a^2c-b^3-b^2c \\ \underline{a^2b-a^2c-ab^2+abc} \end{array}\right\} a \\
& \quad 2a^2c+ab^2-abc-b^3-b^2c \\
& \quad \left.\begin{array}{l} 2a^2bc+ab^3-ab^2c-b^4-b^3c \\ \underline{2a^2bc-2a^2c^2-2ab^2c+2abc^2} \end{array}\right\} 2ac \\
& \qquad 2a^2c^2+ab^3+ab^2c-2abc^2-b^4-b^3c \\
& \qquad\qquad enz.
\end{array}$$

en nu ziet men, dat er, na elke aftrekking, een term met a^2 is overgebleven, welk verschijnsel zou blijven plaats hebben, hoe ver men de bewerking ook voortzette.

Rangschikt men echter de vormen behoorlijk, volgens § 47, dan verkrijgen zij de volgende gedaanten

$$a(b-c)-b(b-c) \qquad \text{en} \qquad a^2(b+c)-b^2(b+c).$$

Nu ziet men terstond, dat de factor $b-c$ uit den eersten en $b+c$ uit den tweeden kan worden weggelaten, waardoor men komt tot de eenvoudiger vormen

$$a-b \qquad \text{en} \qquad a^2-b^2,$$

die klaarblijkelijk geene andere factoren dan $a-b$ gemeen hebben, zoodat dan ook $a-b$ de grootste gemeene deeler van de opgegevene vormen is.

Tweede Voorbeeld. Den grootsten gemeenen deeler te zoeken van de vormen $ab+ac+b^2$ en $a^2b+ab^2+c^3$.

Men heeft hier het volgende

$$\begin{array}{l|l}
a(b+c)+b^2 & a^2b+ab^2+c^3 \\
& \left.\begin{array}{l} a^2b(b+c)+ab^2(b+c)+c^3(b+c) \\ \underline{a^2b(b+c)+ab^3} \end{array}\right\} ab \\
& \qquad ab^2c+c^3(b+c) \\
& \qquad \left.\begin{array}{l} ab^2(b+c)+c^2(b+c)^2 \\ \underline{ab^2(b+c)+b^4} \end{array}\right\} b^2 \\
& \qquad\qquad c^3(b+c)^2-b^4
\end{array}$$

waaruit blijkt, dat er geen gemeene deeler, afhankelijk van de rangletter, is.

§ 68. Wanneer het gebleken is, dat twee vormen geenen gemeenen deeler hebben, afhankelijk van de letter, waarnaar alles gerangschikt is, dan zouden zij evenwel nog eenen veelledigen gemeenen deeler kunnen, die onafhankelijk van deze rangletter is. In zulk een geval, moeten al de coëfficiënten van de verschillende magten der rangletter dien gemeenen deeler als factor bevatten.

Stellen wij, om deze stelling te bewijzen, dat de deeling van een' der gegevene vormen, door zulk eenen gemeenen deeler, tot quotient gaf

$$Pa^3+Qa^2+Ra+S,$$

waarin P, Q, R, S een- of veelledige stelkunstige vormen verbeelden, waarin de letter a niet voorkomt, en laat D dien gemeenen deeler voorstellen, dan zal men den gegevenen vorm moeten terug vinden, zoo men dat quotient met dien deeler vermenigvuldigt; de vorm zelf zal dus wezen

$$DPa^3+DQa^2+DRa+DS.$$

Deze vorm is nu, omdat D, P, Q, R, S geen van allen de letter a bevatten, nog naar a gerangschikt, en al de coëfficiënten van de verschillende magten van a hebben klaarblijkelijk D tot factor, waaruit de waarheid van het gestelde volgt.

Zoodra dus de magten der rangletter veelledige coëfficiënten hebben, is het raadzaam, vooraf te onderzoeken, of al die coëfficiënten ook eenen gemeenen deeler hebben; want dit zoo zijnde, zal de grootste gemeene deeler van al die coëfficiënten, tevens een gemeene deeler van de opgegevene vormen zijn, en dezen gemeenen deeler uit de vormen weglatende, zal het zoeken der gemeene deelers, die van de rangletter afhankelijk zijn, veel vereenvoudigd worden.

Men zal uit het hier gezegde gemakkelijk kunnen opmaken, dat in het laatste voorbeeld der voorgaande § ook geen gemeene deeler onafhankelijk van de rangletter aanwezig is.

Verder kan, tot opheldering van hetgeen in deze § gezegd is, dienen het volgende

Voorbeeld. Den grootsten gemeenen deeler te zoeken van de vormen $a^2b^2-4a^2c^2-2b^4+8b^2c^2$ en $a^4b-2a^4c-4a^2b^3+8a^2b^2c+4b^5-8b^4c$.

Vooreerst schrijve men deze vormen aldus:

$$a^2(b^2-4c^2)-2b^2(b^2-4c^2)$$

en

$$a^4(b-2c)-4a^2b^2(b-2c)+4b^4(b-2c),$$

dan ziet men, in aanmerking nemende, dat $b^2-4c^2=(b+2c)(b-2c)$ is, terstond, dat al de coëfficiënten $b-2c$ als factor bevatten. Men kan dus dezen weglaten, opmerkende, dat dezelve een factor van den grootsten gemeenen deeler moet wezen; hierdoor verkrijgt men, in plaats van de opgegevene vormen

$$a^2(b+2c)-2b^2(b+2c)$$
en $$a^4-4a^2b^2+4b^4.$$
Nu ziet men weder, dat $b+2c$ een factor van den eersten, maar niet van den tweeden vorm is; men laat dus ook dezen factor weg, en dan verkrijgt men, in plaats van de opgegevene vormen
$$a^2-2b^2$$
en $$a^4-4a^2b^2+4b^4.$$
Op deze laatste vormen nu den gegeven' regel toepassende, zal men vinden, dat de eerste in den tweeden deelbaar is, en bijgevolg is $(a^2-2b^2)(b-2c)$ de gevraagde gemeene deeler.

§ 69. Wanneer de grootste gemeene deeler van drie of meer veelledige stelkunstige vormen gevraagd wordt, zoeke men eerst den grootsten gemeenen deeler van twee der vormen, vervolgens dien van den gevonden' gemeenen deeler en den derden vorm, daarna dien van den laatstgevonden' gemeenen deeler en den vierden vorm, en hiermede ga men voort tot aan den laatsten vorm toe, dan is de laatste gemeene deeler, dien men gevonden zal hebben, de grootste gemeene deeler van al de vormen. Het is klaar, dat men bij dit onderzoek de vormen in eene willekeurige rangorde kan gebruiken, en dat, wanneer bij eene van die bewerkingen geen gemeene deeler mogt gevonden worden, de opgegevene vormen ook geenen gemeenen deeler zullen hebben.

Over het vinden van de kleinste gemeene veelvouden der stelkunstige vormen.

§ 70. Omdat bij eenledige stelkunstige vormen de gemeenschappelijke factoren van zelven in het oog vallen, zoo ziet men ook dadelijk, welke vorm het kleinste gemeene veelvoud van eenige gegevene eenledige vormen is, mits men slechts vooraf het kleinste gemeene veelvoud der getallen-coëfficiënten, zoo als dit in de cijferkunst geleerd is, bepaald heeft.

Uit hetgeen in § 59 gezegd is, blijkt duidelijk, dat men, om het kleinste gemeene veelvoud van eenige eenledige vormen te vinden, gebruik kan maken van den volgenden

Regel. *Bepaal eerst het kleinste gemeene veelvoud van de getallen-coëfficiënten, vermenigvuldig dit met al de verschillende, in de vormen voorkomende, letter-factoren, elk verheven tot de hoogste magt, waartoe die letter-factor in de gegevene vormen voorkomt, dan zal dit gedurig product het kleinste gemeene veelvoud zijn.*

§ 71. Wanneer onder de vormen, waarvan men het kleinste gemeene veelvoud begeert, ook veelledige voorkomen, zou het bepalen van dat veelvoud onmiddellijk tot den regel der vorige § terug gebragt zijn, indien men slechts die veelledige vormen in derzelver eenvoudigste factoren wist te ontbinden. Zijn dus de veelledige vormen van dien aard, dat die ontbinding op het oog kan geschieden, dan schrijve men de vormen in hunne factoren ontbonden, en passe er den vorigen regel op toe. Moest, bij voorbeeld, het kleinste gemeene veelvoud gezocht worden van $4a^2+8ab+4b^2$, $6a^2-6b^2$ en $3a^2-6ab+3b^2$, dan zou men deze vormen schrijven in de gedaante

$$4(a+b)^2, \qquad 6(a+b)(a-b) \qquad \text{en} \qquad 3(a-b)^2,$$

en hierdoor, volgens den regel, voor het kleinste gemeene veelvoud, verkrijgen: $12(a+b)^2(a-b)^2$.

§ 72. Daar, zoo als reeds in § 59 is opgemerkt geworden, alleen het aanwezen van gemeenschappelijke factoren, in twee of meer der vormen, waarvan men het kleinste gemeene veelvoud begeert, oorzaak kan zijn, dat het kleinste gemeene veelvoud uit minder factoren bestaat dan het gedurig product, behoeft men de veelledige vormen slechts in zoo verre in factoren te ontbinden, als noodig zou zijn, om gemeenschappelijke factoren in de gegevene vormen te ontdekken, en de regels, voor het zoeken der gemeene deelers gegeven, zijn altijd genoegzaam, om die ontbinding in zoo verre te doen kennen. Ook bij veelledige vormen is dus de regel van § 70 altijd toepasselijk, mits men slechts vooraf de genoemde ontbinding bewerkstelligd hebbe. Ter opheldering van het gezegde, strekke het volgende

Voorbeeld. Het kleinste gemeene veelvoud te vinden van de vormen: $3a^2b^2$, $2a^3c+4a^2bc-6ab^2c$, $3a^3b+9a^2b^2-3ab^3-9b^4$ en $6a^3c+12a^2bc+12ab^2c+6b^3c$.

Vooreerst brenge men de eenledige factoren buiten haakjes, waardoor men voor de opgegevene vormen verkrijgt:

$$3a^2b^2,$$
$$2ac(a^2+2ab-3b^2),$$
$$3b\ (a^3+3a^2b-ab^2-3b^3)$$
en
$$6c\ (a^3+2a^2b+2ab^2+b^3).$$

Nu zoeke men den grootsten gemeenen deeler van $a^2+2ab-3b^2$ en $a^3+3a^2b-ab^2-3b^3$, dan zal men vinden, dat $a^2+2ab-3b^2$ zelf die deeler is, en in $a^3+3a^2b-ab^2-3b^3$ gedeeld wordende, $a+b$ tot quotient geeft. Hierdoor ziet men, dat voor de opgegevene vormen geschreven kan worden:

$$3a^2b^2,$$
$$2ac(a^2+2ab-3b^2),$$
$$3b\ (a+b)\ (a^2+2ab-3b^2)$$
en
$$6c\ (a^3+2a^2b+2ab^2+b^3).$$

Verder zal men bij onderzoek vinden, dat $a^2+2ab-3b^2$ en $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$ geenen gemeenen deeler hebben; er blijft dus nog slechts over te onderzoeken of $a+b$ en $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$ eenen gemeenen deeler hebben; men vindt weder, dat $a+b$ zelf deze deeler is; en in $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$ gedeeld wordende a^2+ab+b^2 tot quotient geeft. Hierdoor ziet men, dat de opgegevene vormen ook aldus geschreven kunnen worden:

$$3a^2b^2,$$
$$2ac(a^2+2ab-3b^2),$$
$$3b(a+b)(a^2+2ab-3b^2)$$
en
$$6c(a+b)(a^2+ab+b^2).$$

Daar er nu onder de drie veelledige factoren $a+b$, $a^2+2ab-3b^2$ en a^2+ab+b^2, die in deze vormen voorkomen, geene zijn, die gemeene deelers hebben, zoo kan men den regel van § 70 toepassen, en vindt daardoor, voor het begeerde kleinste gemeene veelvoud,

$$6a^2b^2c(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2+2ab-3b^2),$$

welk veelvoud vrij wat eenvoudiger, dan het gedurig product der opgegevene vormen, is.

Bij dit voorbeeld kan men nog opmerken, dat $a^2+2ab-3b^2$ in de factoren $a-b$ en $a+3b$ kan ontbonden worden, maar dat het kennen dezer ontbinding, ter bepaling van het kleinste gemeene veelvoud, niet noodig is, omdat $a-b$ en $a+3b$ in de opgegevene vormen niet anders, dan als factoren van $a^2+2ab-3b^2$ voorkomen.

Herleiding der stelkunstige gebrokens.

§ 73. Een gebroken stelkunstige vorm, ook wel bij verkorting *breuk* genoemd, is, zoo als reeds in § 13 is gezegd, niet anders, dan eene uitgedrukte deeling; het deeltal wordt dan de teller en de deeler de noemer van den gebrokenen vorm genoemd. De in § 41 bewezene stelling kan dus op gebrokene vormen toegepast worden, en luidt dan als volgt: de waarde van een gebroken verandert niet, wanneer teller en noemer met eenen zelfden vorm vermenigvuldigd, of door eenen zelfden vorm gedeeld worden.

§ 74. Deze stelling verschaft dadelijk een middel, om, wanneer teller en noemer van een gegeven stelkunstig gebroken gemeenschappelijke factoren mogten hebben, dat gebroken eenvoudiger voor te stellen. Men heeft hiertoe den volgenden

Regel. *Zoek den grootsten gemeenen deeler van teller en noemer; deel elk in het bijzonder door den gevonden grootsten gemeenen deeler, dan zullen de komende quotienten de teller en noemer zijn van het vereenvoudigde gebroken.*

Eerste Voorbeeld. Het gebroken $\dfrac{6a^n b^2 x^{m+1}}{9a^{n+2}c^4x^{m-1}}$ te vereenvoudigen.

De grootste gemeene deeler is, volgens den regel van § 60, $3a^n x^{m-1}$, teller en noemer hierdoor deelende, vindt men

$$\frac{6a^n b^2 x^{m+1}}{9a^{n+2}c^4x^{m-1}} = \frac{2b^2x^2}{3a^2c^4}.$$

Tweede Voorbeeld. Het gebroken $\dfrac{a^3b^2-2a^2b^3+5ab^4-10b^5}{a^3b+a^2b^2-2ab^3-8b^4}$ te vereenvoudigen.

In het 1e voorbeeld van § 66 is voor den grootsten gemeenen deeler van teller en noemer reeds gevonden $b(a-2b)$; deelt men dezen deeler in den teller, dan komt er a^2b+5b^3, en in den noemer, dan vindt men $a^2+3ab+4b^2$, derhalve is

$$\frac{a^3b^2-2a^2b^3+5ab^4-10b^5}{a^3b+a^2b^2-2ab^3-8b^4}=\frac{a^2b+5b^3}{a^2+3ab+4b^2}.$$

Het is vooral van belang, deze vereenvoudiging, die men gewoonlijk het *verkleinen* der breuken noemt, waar dezelve plaats kan hebben, nimmer achterwege te laten. Een gebroken, waarbij deze vereenvoudiging niet kan plaats hebben, en waarvan dus teller en noemer geene gemeenschappelijke factoren bevatten, wordt dan ook een *onverkleinbaar gebroken* genoemd.

§ 75. De stelling van § 73 kan ook dienen, om een gegeven gebroken te herleiden tot een ander, waarvan de noemer een veelvoud is van den noemer van het gegevene. Men heeft hiertoe den volgenden

Regel. *Deel den noemer van het gegevene in den noemer van het begeerde gebroken; ontwikkel dit quotient, en vermenigvuldig daarmede teller en noemer van het gegeven gebroken, dan zullen de komende producten de teller en noemer zijn van het begeerde gebroken.*

Eerste Voorbeeld. Het gebroken $\frac{a}{b}$ te herleiden tot een ander, dat $ab-b^2$ tot noemer heeft.

Den noemer $ab-b^2$ door den noemer b deelende, komt er $a-b$, en teller en noemer van het gegeven gebroken met $a-b$ vermenigvuldigende, heeft men

$$\frac{a}{b}=\frac{a(a-b)}{b(a-b)}=\frac{a^2-ab}{ab-b^2}.$$

Tweede Voorbeeld. Het gebroken $\frac{a+b}{a+2b}$ te herleiden tot een ander, dat a^2-4b^2 tot noemer heeft.

Men heeft vooreerst $\frac{a^2-4b^2}{a+2b}=a-2b$; vermenigvuldigt men hiermede den teller en noemer van het gegeven gebroken, dan komt er

$$\frac{a+b}{a+2b}=\frac{(a+b)(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)}=\frac{a^2-ab-2b^2}{a^2-4b^2}.$$

§ 76. Daar men elken geheelen vorm kan schrijven in de gedaante van een gebroken, dat de eenheid tot noemer en den gegeven' vorm zelf tot teller heeft, kan de regel der vorige § dienen, om elken geheelen vorm te herleiden tot een gebroken, dat eenen willekeurigen noemer heeft.

Wilde men, bij voorbeeld, den vorm $x+y$ herleiden tot een gebroken, dat $a-b$ tot noemer heeft, dan zou men hebben:

$$x+y=\frac{x+y}{1}=\frac{(x+y)(a-b)}{a-b}.$$

§ 77. Wanneer teller en noemer van een stelkunstig gebroken beide, of een van beide, veelledige vormen zijn, kan men veeltijds dit gebroken tot eenen gemengden vorm herleiden; daartoe behoeft men alleen de regels in § 44 en 46, tot het ontwikkelen van quotienten gegeven, toe te passen.

Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $$\frac{x^2-y^2}{x}=x-\frac{y^2}{x};$$

2°. $$\frac{a^2}{a-b}=a+\frac{ab}{a-b}=a+b+\frac{b^2}{a-b};$$

3°. $$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=1-\frac{2b^2}{a^2+b^2};$$

4°. $$\frac{a^3+ab^2}{3a^2-2b^2}=\tfrac{1}{3}a+\frac{1\tfrac{1}{3}ab^2}{3a^2-2b^2}.$$

§ 78. Uit hetgeen in het slot van § 39 gezegd is, blijkt ook nog onmiddellijk, dat de waarde van een gebroken niet verandert, indien men de teekens van teller en noemer te gelijker tijd omkeert, of ook, indien men slechts de teekens van een van beide omkeert, en dan tevens het teeken, dat vóór de breuk staat, verandert.

Zoo is, bij voorbeeld,

$$\frac{m^2-n^2}{n-m}=-\frac{m^2-n^2}{m-n}=-(m+n)=-m-n.$$

Herleiding van de som en het verschil van stelkunstige gebrokens.

§ 79. Overeenkomstig den regel van § 44, heeft men:

$$\frac{a+b+c}{p}=\frac{a}{p}+\frac{b}{p}+\frac{c}{p};$$

$$\frac{a-b}{p}=\frac{a}{p}-\frac{b}{p};$$

$$\frac{a+b-c-d+e}{p}=\frac{a}{p}+\frac{b}{p}-\frac{c}{p}-\frac{d}{p}+\frac{e}{p};$$

derhalve is ook

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{p}+\frac{c}{p}=\frac{a+b+c}{p};$$

$$\frac{a}{p}-\frac{b}{p}=\frac{a-b}{p},$$

en $$\frac{a}{p}+\frac{b}{p}-\frac{c}{p}-\frac{d}{p}+\frac{e}{p}=\frac{a+b-c-d+e}{p}.$$

Hieruit volgen deze

Regels. 1°. *De som van eenige breuken, die gelijke noemers hebben, is gelijk aan de som der tellers, gedeeld door den gelijken noemer.*

2°. *Het verschil van twee breuken, die gelyke noemers hebben, is gelijk aan het verschil der tellers, gedeeld door den gelijken noemer.*

3°. *Eenige breuken, die gelijke noemers hebben, en door de teekens + en — met elkander verbonden zijn, kunnen tot eene enkele breuk vereenigd worden, door de tellers op dezelfde wijze te verbinden, en den vorm, die hierdoor ontstaat, door den gelijken noemer te deelen.*

Overigens moet men, na deze regels toegepast te hebben, de verkregene breuk, zooveel mogelijk trachten te vereenvoudigen.

Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $$\frac{3c^3-2d^3}{5pq}+\frac{d^3-2c^3}{5pq}=\frac{(3c^3-2d^3)+(d^3-2c^3)}{5pq}=\frac{c^3-d^3}{5pq};$$

2°. $$\frac{4xy-3y^2}{p^2+q^2}+\frac{x^2}{p^2+q^2}+\frac{4y^2-2xy}{p^2+q^2}=\frac{x^2+2xy+y^2}{p^2+q^2}=\frac{(x+y)^2}{p^2+q^2};$$

3°. $$\frac{3a^2b}{a^2-b^2}+\frac{3ab^2}{a^2-b^2}=\frac{3a^2b+3ab^2}{a^2-b^2}=\frac{3ab(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{3ab}{a-b};$$

4°. $$\frac{3c^3-2d^3}{5pq}-\frac{d^3-2c^3}{5pq}=\frac{(3c^3-2d^3)-(d^3-2c^3)}{5pq}=\frac{3c^3-2d^3-d^3+2c^3}{5pq}$$
$$=\frac{5c^3-3d^3}{5pq};$$

5°. $$\frac{3a^2b}{a^2-b^2}-\frac{3ab^2}{a^2-b^2}=\frac{3a^2b-3ab^2}{a^2-b^2}=\frac{3ab(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{3ab}{a+b};$$

6°. $$\frac{3a^4}{a^2+2b^2}+\frac{a^4-a^3b}{a^2+2b^2}-\frac{4a^2b^2-4a^4}{a^2+2b^2}-\frac{3a^3b+ab^3}{a^2+2b^2}$$
$$=\frac{3a^4+a^4-a^3b-4a^2b^2+4a^4-3a^3b-ab^3}{a^2+2b^2}=\frac{-4a^3b-4a^2b^2-ab^3}{a^2+2b^2}$$
$$=-\frac{4a^3b+4a^2b^2+ab^3}{a^2+2b^2}=-\frac{ab(4a^2+4ab+b^2)}{a^2+2b^2}=-\frac{ab(2a+b)^2}{a^2+2b^2}.$$

§ 80. Wanneer eenige gegevene stelkunstige gebrokens verschillende noemers hebben, kan men dezelve, volgens § 75, alle tot breuken van eenen zelfden noemer herleiden, mits slechts die noemer een gemeen veelvoud zij van de noemers der gegevene gebrokens. De alzoo herleide breuken zullen klaarblijkelijk het eenvoudigste zijn, wanneer men voor dien gemeenschappelijken noemer niet slechts een gemeen veelvoud van de noemers der gegevene gebrokens, maar het kleinste gemeene veelvoud dezer noemers genomen heeft. Om de som of het verschil van twee of meer gegevene stelkunstige gebrokens, die ongelijke noemers hebben, tot eene enkele breuk te herleiden, behoeft men dus slechts te volgen dezen

Regel. *Zoek het kleinste gemeene veelvoud van de noemers der gegevene gebrokens; herleid daarna elk dezer gebrokens tot een ander, hetwelk dit kleinste gemeene veelvoud tot noemer heeft, en pas ver-*

volgens op deze breuken, die nu alle denzelfden noemer hebben, de regels van de vorige § toe.

Om de som of het verschil van eenige vormen, waaronder zoowel geheele als gebrokene voorkomen, tot eene enkele breuk te herleiden, kan men klaarblijkelijk denzelfden regel volgen, indien men slechts, volgens § 76, die geheele vormen in de gedaante van breuken schrijft, welke den daartoe vereischten noemer hebben. Tot opheldering van den gegeven' regel, diene het volgende

Voorbeeld. Laat gevraagd worden tot eene enkele breuk te herleiden den vorm $a-b+\frac{ab}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{a^2b-2ab^2+3b^3}{a^2-b^3}$.

Hier is a^2-b^2 het kleinste gemeene veelvoud der noemers; men schrijve dus den geheelen vorm $a-b$ in de gedaante $\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{a^2-b^2}$; het gebroken $\frac{ab}{a-b}$ herleide men tot eene breuk, die a^2-b^2 tot noemer heeft, door volgens § 75 teller en noemer te vermenigvuldigen, met $a+b$, waardoor men verkrijgt $\frac{ab(a+b)}{a^2-b^2}$; even zoo herleide men het gebroken $\frac{a^2+b^2}{a+b}$, door teller en noemer met $a-b$ te vermenigvuldigen, tot $\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{a^2-b^2}$. Hierdoor al de termen nu tot breuken van gelijke noemers herleid zijnde, is

$$a-b+\frac{ab}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{a^2b-2ab^2+3b^3}{a^2-b^3}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{a^2-b^2}+\frac{ab(a+b)}{a^2-b^2}-\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{a^2-b^2}-\frac{a^2b-2ab^2+3b^3}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2-b^2)+ab(a+b)-(a^2+b^2)(a-b)-a^2b+2ab^2-3b^3}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2-b^2)+a^2b+ab^2-(a^2+b^2)(a-b)-a^2b+2ab^2-3b^3}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2-b^2)-(a^2+b^2)(a-b)+3ab^2-3b^3}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2-(a^2+b^2)+3b^2}{a+b}$$

$$=\frac{a^2-b^2-a^2-b^2+3b^2}{a+b}=\frac{b^2}{a+b}.$$

§ 81. Volgens de vorige § heeft men

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd};$$

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c};$$

$$a-\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}.$$

Daar het nu onverschillig is, of de letters enkele getallen, dan wel stelkunstige vormen voorstellen, heeft men ook, zoo A, B, C, D willekeurige stelkunstige vormen zijn,

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD} \; . \; . \; . \; . \; (52); \quad A \pm \frac{B}{C} = \frac{AC \pm B}{C} \; . \; . \; . \; (53);$$

welke vergelijkingen een beknopt voorschrift bevatten, om de som of het verschil van twee breuken, alsmede gemengde vormen, tot enkele breuken te herleiden.

Hoezeer dit voorschrift eigenlijk reeds in den regel der voorgaande § ligt opgesloten, verdient hetzelve eene bijzondere vermelding, omdat de toepassing daarvan zeer dikwijls voorkomt. Alleen moet men daarbij opmerken, dat zoo de vormen B en D eenen gemeenen deeler mogten hebben, BD niet hun kleinste gemeene veelvoud, en dus ook $\frac{AD \pm BC}{BD}$ niet de eenvoudigste breuk is, waardoor $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D}$ kan worden voorgesteld; men kan echter ook in dit geval de vergelijking (52) altijd toepassen, mits men slechts zorge, daarna de komende breuk behoorlijk te verkleinen. Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $$\frac{2yz^2}{3pq} + \frac{4p^2q^2}{5y^2z} = \frac{10y^3z^2+12p^3q^3}{15pqy^2z};$$

2°. $$\frac{a+b}{a^2-ab} - \frac{a+b}{b^2-ab} = \frac{(a+b)(b^2-ab)-(a+b)(a^2-ab)}{(a^2-ab)(b^2-ab)}$$

$$= \frac{b(a+b)(b-a)-a(a+b)(a-b)}{ab(a-b)(b-a)} = \frac{-b(a+b)(a-b)-a(a+b)(a-b)}{-ab(a-b)(a-b)}$$

$$= \frac{-b(a+b)-a(a+b)}{-ab(a-b)} = \frac{b(a+b)+a(a+b)}{ab(a-b)} = \frac{(a+b)^2}{ab(a-b)};$$

3°. $$17m^2n + \frac{3m^2n^3-7m^4n}{m^2+n^2} = \frac{17m^2n(m^2+n^2)+(3m^2n^3-7m^4n)}{m^2+n^2}$$

$$= \frac{17m^4n+17m^2n^3+3m^2n^3-7m^4n}{m^2+n^2} = \frac{10m^4n+20m^2n^3}{m^2+n^2} = \frac{10m^2n(m^2+2n^2)}{m^2+n^2};$$

4°. $$2b-a-\frac{b^2}{a} = \frac{a(2b-a)-b^2}{a} = \frac{2ab-a^2-b^2}{a} = -\frac{a^2-2ab+b^2}{a} = -\frac{(a-b)^2}{a}.$$

§ 82. In het voorgaande is gebleken, hoe men de som of het verschil van eenige breuken tot eene enkele breuk kan herleiden; omgekeerd kan men elke enkele breuk verdeelen in de som of het verschil van eenige andere, die alle denzelfden noemer als de oorspronkelijke breuk, en elk een gedeelte van derzelver teller tot teller hebben. Deze gedeeltelijke breuken zullen somtijds verkleinbaar zijn, en zelfs kan men, alvorens tot de verdeeling over te gaan, bij den teller der oorspronkelijke breuk een' zelfden vorm optellen en aftrekken, ten einde die verkleinbaarheid te bevorderen.

Zie hier eenige voorbeelden van deze verdeeling:

1°. $\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}=\frac{a^2}{ab}+\frac{2ab}{ab}+\frac{b^2}{ab}=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$;

2°. $\frac{a^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab-ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}-\frac{ab}{a^2-b^2}$

$=\frac{a}{a-b}-\frac{ab}{a^2-b^2}$;

3°. $\frac{a^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab-ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}+\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{a(a-b)}{a^2-b^2}+\frac{ab}{a^2-b^2}$

$=\frac{a}{a+b}+\frac{ab}{a^2-b^2}$;

4°. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2+ab-ab}{a^2-b^2}=\frac{(a^2+ab)-(ab-b^2)}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\frac{ab-b^2}{a^2-b^2}$

$=\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}-\frac{b(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$.

Herleiding van de producten der stelkunstige gebrokens.

§ 83. Het gebroken $\frac{A}{B}$, waarin A en B twee willekeurige stelkunstige vormen verbeelden, stelt het quotient voor der deeling van A door B, en dus is, volgens vergelijking (22),

$$\frac{A}{B}\times B=A \text{ . . . . } (54).$$

Men heeft dus den

Regel. *Het product van een stelkunstig gebroken met deszelfs noemer is gelijk aan den teller.*

Om te vinden, hoe het product van twee gebrokens $\frac{A}{B}$ en $\frac{C}{D}$, waarin A, B, C, D willekeurige stelkunstige vormen verbeelden, kan herleid worden, stelle men het eerste door x en het tweede door y voor, dan is

$$x=\frac{A}{B},\qquad y=\frac{C}{D},$$

dus ook

$$Bx=\frac{A}{B}\times B,\quad Dy=\frac{C}{D}\times D,$$

of, volgens (54)

$$Bx=A,\qquad Dy=C.$$

Daar nu gelijke grootheden, met gelijke vermenigvuldigd, gelijke producten moeten geven, heeft men

$$BDxy=AC;$$

elk lid van deze vergelijking door BD deelende, verkrijgt men

$$xy=\frac{AC}{BD},$$

of, voor x en y wederom $\frac{A}{B}$ en $\frac{C}{D}$ schrijvende,

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD} \dots\dots\dots\dots\dots (55).$$

Daar het gedurig product van eenige stelkunstige gebrokens door achtervolgende vermenigvuldiging gevonden moet worden, is het klaar, dat men voor het product van drie of meer stelkunstige gebrokens ook heeft

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} \times \frac{E}{F} \times \textit{enz.} = \frac{ACE \textit{ enz.}}{BDF \textit{ enz.}} \dots\dots\dots (56).$$

Hieruit blijkt deze

REGEL. *Het product van eenige stelkunstige gebrokens is gelijk aan het product hunner tellers, gedeeld door het product hunner noemers.*

De herleiding der producten van geheele en gebrokene vormen is in dezen regel begrepen, aangezien men elken geheelen vorm kan schrijven in de gedaante van een gebroken, dat de eenheid tot noemer heeft. Zoo is, bij voorbeeld,

$$\frac{A}{B} \times C = \frac{A}{B} \times \frac{C}{1} = \frac{AC}{B} \dots\dots\dots\dots (57).$$

Als een bijzonder geval van den vorigen, heeft men dus ook dezen

REGEL. *Het product van een stelkunstig gebroken met eenen geheelen vorm is gelijk aan het product van den teller met dien geheelen vorm, gedeeld door den noemer.*

Overeenkomstig het vroeger gezegde, wordt het product van eenen geheelen met eenen gebrokenen vorm aangeduid, door die vormen, zonder teeken tusschen beide, naast elkander (den geheelen vorm, zoo die veelledig mogt zijn, tusschen haakjes) te plaatsen. Men moet zich dus wel wachten, zulke uitdrukkingen met gemengde vormen te verwarren, waartoe men ligtelijk zou kunnen verleid worden, omdat het in cijfers gebruikelijk is, de geheelen en het gebroken, waaruit een gemengd getal bestaat, zonder teeken naast elkander te schrijven. Zoo is, b. v. $3\frac{3}{4}$ hetzelfde als $3+\frac{3}{4}$; maar $b\frac{a}{c}$ is hetzelfde als $b\times\frac{a}{c}$.

§ 84. Door de regels, in de vorige § gegeven, is het herleiden der producten van stelkunstige gebrokens terug gebragt tot vroeger geleerde bewerkingen. Daar de breuk, die men voor het product verkrijgt, altijd zooveel mogelijk moet verkleind worden, is het van belang, op te merken, dat die verkleining, indien zij mogelijk is, reeds vóór het opmaken van het product kan plaats hebben, door de gelijke factoren, die in den noemer van eene, en in den teller van eene andere der te vermenigvuldigen breuken voorkomen, tegen elkander weg te laten. Hierin ligt opgesloten, dat men, bij het vermenigvuldigen van eenen gebrokenen met eenen geheelen vorm, ook de gemeenschappelijke factoren kan weglaten, die in den noemer van het gebroken en in den geheelen vorm mogten voorkomen. De weg, dien men, bij de genoemde verkleining te volgen heeft, wordt kortelijk aangewezen, door de volgende vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{A}{BM}\times\frac{CM}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}\\ \frac{AN}{B}\times\frac{C}{DN}=\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}\\ \frac{AN}{BM}\times\frac{CM}{DN}=\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ (58).$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{A}{BM}\times CM=\frac{A}{B}\times C\\ \frac{A}{B}\times BM=\frac{A}{1}\times M=AM\\ \frac{A}{BM}\times B=\frac{A}{M}\times 1=\frac{A}{M}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ (59).$$

De twee laatste dezer vergelijkingen, in woorden overgebragt, verschaffen nog den volgenden

REGEL. *Wanneer een geheele en een gebroken vorm met elkander vermenigvuldigd moeten worden, en de noemer een factor van den geheelen vorm, of de geheele vorm een factor van den noemer is, wordt het product verkregen: in het eerste geval, door den noemer in den geheelen vorm te deelen en het quotient met den teller te vermenigvuldigen, en in het tweede geval, door aan het gebroken slechts die verandering toe te brengen, dat men dien geheelen vorm in den noemer deelt.*

Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $\frac{2a^2+3b^2-4c^2}{ab-cd}\times(ab-cd)=2a^2+3^2-4c^2;$

2°. $\frac{a^2-2b^2}{a+b}\times\frac{2a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a^2-2b^2)(2a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)}=\frac{2a^4-3a^2b^2-2b^4}{a^2-b^2};$

3°. $\frac{3a}{5b}\times\frac{a(a+b)}{c(a-b)}\times\frac{3(a+b)}{5b}=\frac{9a^2(a+b)^2}{25b^2c(a-b)};$

4°. $\frac{a^2+ab+b^2}{a^3+b^3}\times(a-b)=\frac{(a^2+ab+b^2)(a-b)}{a^3+b^3}=\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3};$

5°. $\frac{6a^3(c^2-d^2)}{5b(a+b)}\times\frac{7c^2(c-d)}{9a^2b(c+d)^2}=\frac{2a(c-d)}{5b(a+b)}\times\frac{7c^2(c-d)}{3b(c+d)}=\frac{14ac^2(c-d)^2}{15b^2(a+b)(c+d)};$

6°. $\frac{15m^2n^2(p+q)^2}{(p^2+q^2)^2}\times\frac{2n^3(p^2+q^2)}{5m(p^2-q^2)}\times\frac{m^3}{6n^4pq}$

$=\frac{3mn^2(p+q)}{(p^2+q^2)^2}\times\frac{2n^3(p^2+q^2)}{p-q}\times\frac{m^3}{6n^4pq}=\frac{3mn^2(p+q)}{p^2+q^2}\times\frac{2n^3}{p-q}\times\frac{m^3}{6n^4pq}$

$=\frac{m(p+q)}{p^2+q^2}\times\frac{2n^3}{p-q}\times\frac{m^3}{2n^2pq}=\frac{m(p+q)}{p^2+q^2}\times\frac{n}{p-q}\times\frac{m^3}{pq}=\frac{m^4n(p+q)}{pq(p-q)(p^2+q^2)}$;

7°. $\frac{a^2+b^2}{6ab(a^2-b^2)}\times 4a(a+b)^2=\frac{a^2+b^2}{3b(a-b)}\times 2(a+b)=\frac{2(a+b)(a^2+b^2)}{3b(a-b)}$;

8°. $\frac{a+b}{p^2q^2(a-b)}\times 7p^nq^m(a^2-b^2)=(a+b)\times 7p^{n-2}q^{m-2}(a+b)$

$=7p^{n-2}q^{m-2}(a+b)^2$;

9°. $\frac{a+b}{7p^nq^m(a-b)^2}\times p^2q^2(a-b)=\frac{a+b}{7p^{n-2}q^{m-2}(a-b)}$.

§ 85. In het voorgaande is gebleken, hoe men het product van eenige breuken, of ook het product van geheele en gebrokene vormen tot eene enkele breuk kan herleiden; omgekeerd kan elke breuk in het product van twee of meer andere vormen ontbonden worden. Zoo is, b. v.

1°. $\frac{abc}{def}=\frac{ab}{de}\times\frac{c}{f}=\frac{ac}{de}\times\frac{b}{f}=\frac{a}{d}\times\frac{b}{e}\times\frac{c}{f}=\frac{a}{e}\times\frac{b}{f}\times\frac{c}{d}=$ *enz.*;

2°. $\frac{bcd}{a}=\frac{b}{a}\times cd=\frac{c}{a}\times bd=\frac{bd}{a}\times c=\frac{1}{a}\times bcd=$ *enz.*;

3°. $\frac{a}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=a\times\frac{1}{bc}=$ *enz.*;

4°. $\frac{a}{b}=\frac{1}{b}\times a$.

De ontbinding, in het laatste voorbeeld aangetoond, wordt zeer dikwijls gebruikt; zoo schrijft men $\frac{1}{2}a$, in plaats van $\frac{a}{2}$; $\frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5})$, in plaats van $\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, in plaats van $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *enz.*

§ 86. Wanneer het product van gemengde vormen, of het product van gemengde met geheele of gebrokene vormen, moet herleid worden, kan men eerst de gemengde vormen, volgens § 81, tot enkele breuken herleiden, en daarna de regels voor de vermenigvuldiging der gebrokene vormen toepassen; of ook kan men de gemengde vormen als tweeledige beschouwen, waarvan de eerste term de geheelen, en de tweede het gebroken bevat, vervolgens de producten, overeenkomstig § 29 en 30, ontwikkelen en daarna het ontwikkelde product, volgens § 80, tot eene enkele breuk herleiden. Tot opheldering diene het volgende

Voorbeeld. Te herleiden het product van $a+b+\frac{a^2+b^2}{a-b}$ en $a-b-\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

Volgens de eerste handelwijze, heeft men

$$a+b+\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)+(a^2+b^2)}{a-b}=\frac{a^2-b^2+a^2+b^2}{a-b}=\frac{2a^2}{a-b};$$

$$a-b-\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b)-(a^2+b^2)}{a+b}=\frac{a^2-b^2-a^2-b^2}{a+b}=\frac{-2b^2}{a+b},$$

en derhalve

$$\left(a+b+\frac{a^2+b^2}{a-b}\right)\left(a-b-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)=\frac{2a^2}{a-b}\times\frac{-2b^2}{a+b}=\frac{-4a^2b^2}{a^2-b^2}=-\frac{4a^2b^2}{a^2-b^2}.$$

Volgens de tweede handelwijze, heeft men

$$\left\{(a+b)+\frac{a^2+b^2}{a-b}\right\}\times\left\{(a-b)-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right\}$$

$$=(a-b)(a+b)+(a-b)\frac{a^2+b^2}{a-b}-(a+b)\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{a-b}\times\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

$$=a^2-b^2+(a^2+b^2)-(a^2+b^2)-\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2-b^2}=a^2-b^2-\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{a^2-b^2}=\frac{-4a^2b^2}{a^2-b^2}=-\frac{4a^2b^2}{a^2-b^2}.$$

Herleiding van de quotienten der stelkunstige gebrokens.

§ 87. Om te vinden, hoe het quotient van twee gebrokens $\frac{A}{B}:\frac{C}{D}$, waarin A, B, C, D willekeurige stelkunstige vormen verbeelden, kan herleid worden, stelle men weder

$$x=\frac{A}{B}, \qquad y=\frac{C}{D},$$

dan is, even als in § 83,

$$Bx=A, \qquad Dy=C.$$

Vermenigvuldigt men de beide leden der eerste vergelijking met D, en die der laatste met B, dan heeft men

$$BDx=AD, \qquad BDy=BC.$$

Daar nu gelijke grootheden, in gelijke gedeeld, gelijke quotienten moeten geven, zoo volgt hieruit,

$$\frac{BDx}{BDy}=\frac{AD}{BC};$$

maar men heeft ook, volgens § 74,

$$\frac{BDx}{BDy}=\frac{x}{y}=x:y=\frac{A}{B}:\frac{C}{D},$$

en, volgens § 85,

$$\frac{AD}{BC}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C},$$

derhalve is

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(60).$$

Hieruit blijkt deze

Regel. *Het quotient van twee stelkunstige gebrokens is gelijk aan het product van het deeltal met het omgekeerde van den deeler.* Door het omgekeerde van een gebroken wordt namelijk een ander gebroken bedoeld, dat verkregen wordt, door teller en noemer van het eerste met elkander te verwisselen.

De herleiding der quotienten van geheele door gebrokene, of van gebrokene door geheele vormen, is in dezen regel begrepen, aangezien men weder elken geheelen vorm in de gedaante van eene breuk kan schrijven, die de eenheid tot noemer heeft. Zoo is, bij voorbeeld,

$$A : \frac{C}{D} = \frac{A}{1} : \frac{C}{D} = A \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{C} \quad \ldots\ldots\ldots (61)$$

en

$$\frac{A}{B} : C = \frac{A}{B} : \frac{C}{1} = \frac{A}{B} \times \frac{1}{C} = \frac{A}{BC} \quad \ldots\ldots\ldots (62).$$

Mogt in het laatste geval C een factor van A zijn, zoodat men had $A=CM$, dan zou men, volgens (62) hebben,

$$\frac{CM}{B} : C = \frac{CM}{BC} = \frac{M}{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (63).$$

De vergelijkingen (62) en (63), in woorden overgebragt, verschaffen nog den volgenden

Regel. *Wanneer een gebroken vorm door een' geheelen moet gedeeld worden, wordt het quotient verkregen, door aan het gebroken slechts die verandering toe te brengen, dat men dien geheelen vorm, zoo dit kan, in den teller deelt, of anders met den noemer vermenigvuldigt.*

Mogten van een te herleiden quotient, deeltal en deeler beide, of een van beide, gemengde vormen zijn, dan kan men die gemengde vormen, volgens § 81, tot enkele breuken herleiden, en dus is, door het in deze § aangetoonde, het herleiden der quotienten van gebrokene of gemengde vormen teruggebragt tot het herleiden van producten, en men behoeft dus overigens slechts de daarvoor gegevene regels te volgen.

§ 88. Wanneer twee vormen beide, of een van beide, gebrokene of gemengde vormen zijn, kan men hun quotient dadelijk in de gedaante van een zamengesteld gebroken schrijven, en daarna dit zamengesteld gebroken tot de eenvoudigste gedaante herleiden. Bij deze herleiding kunnen zich de twee gevallen voordoen, dat teller of noemer van het zamengesteld gebroken slechts een van beide eene breuk bevatten, of dat er in beide eene breuk voorkomt. In het eerste geval vermenigvuldige men teller en noemer van het zamengesteld gebroken met den noemer der breuk, die in een van beide voorkomt; in het tweede geval vermenigvuldige men teller en noemer van het zamengesteld gebroken met het kleinste gemeene veelvoud van de noemers der breuken, die zich in beide bevinden. Hierdoor zal men, in plaats van het zamengesteld, een ander gebroken verkregen hebben, dat dan nog zooveel mogelijk verkleind moet worden.

Zie hier eenige voorbeelden :

1°. $$\frac{3a^2b}{5cd} : \frac{6ab^2c}{7d^2e} = \frac{\frac{3a^2b}{5cd}}{\frac{6ab^2c}{7d^2e}} = \frac{\frac{3a^2b}{5cd} \times 35cd^2e}{\frac{6ab^2c}{7d^2e} \times 35cd^2e} = \frac{3a^2b \times 7de}{6ab^2c \times 5c}$$
$$= \frac{a \times 7de}{2bc \times 5c} = \frac{7ade}{10bc^2};$$

2°. $$(a^2+ab) : \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+ab}{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}} = \frac{(a^2+ab)\times(a^2+b^2)}{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\times(a^2+b^2)}$$
$$= \frac{a(a+b)(a^2+b^2)}{a^2-b^2} = \frac{a(a^2+b^2)}{a-b};$$

3°. $$\frac{a+b}{a^2+3ab} : \frac{a-b}{3a^2+ab} = \frac{\frac{a+b}{a(a+3b)}}{\frac{a-b}{a(3a+b)}} = \frac{\frac{a+b}{a(a+3b)} \times a(a+3b)(3a+b)}{\frac{a-b}{a(3a+b)} \times a(a+3b)(3a+b)}$$
$$= \frac{(a+b)(3a+b)}{(a-b)(a+3b)} = \frac{3a^2+4ab+b^2}{a^2+2ab-3b^2};$$

4°. $$(a+q) : \left(q - \frac{a^2}{a-q}\right) = \frac{a+q}{q-\frac{a^2}{a-q}} = \frac{(a+q)\times(a-q)}{\left(q-\frac{a^2}{a-q}\right)\times(a-q)}$$
$$= \frac{a^2-q^2}{q(a-q)-a^2} = \frac{a^2-q^2}{aq-q^2-a^2} = -\frac{a^2-q^2}{a^2-aq+q^2};$$

5°. $$\left(a^2+x^2+\frac{3a^2x+ax^2}{a-3x}\right) : (a^2-x^2) = \frac{a^2+x^2+\frac{3a^2x+ax^2}{a-3x}}{a^2-x^2}$$
$$= \frac{(a^2+x^2)(a-3x)+3a^2x+ax^2}{(a^2-x^2)(a-3x)} = \frac{a^3+2ax^2-3x^3}{(a^2-x^2)(a-3x)}$$
$$= \frac{(a^2+ax+3x^2)(a-x)}{(a^2-x^2)(a-3x)} = \frac{a^2+ax+3x^2}{(a+x)(a-3x)} = \frac{a^2+ax+3x^2}{a^2-2ax-3x^2};$$

6°. $$\frac{ax}{by} : \left(1+\frac{bx}{ay}\right) = \frac{\frac{ax}{by}}{1+\frac{bx}{ay}} \times \frac{aby}{aby} = \frac{a^2x}{aby+b^2x} = \frac{a^2x}{b(ay+bx)};$$

7°. $$\left(1+\frac{2ab}{a^2+b^2}\right) : \left(1-\frac{2ab}{a^2+b^2}\right) = \frac{1+\frac{2ab}{a^2+b^2}}{1-\frac{2ab}{a^2+b^2}} = \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2};$$

8°. $$\left(a+\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}\right):\left(a+\frac{x}{x+y}+\frac{y(3x-y)}{x^2-y^2}\right)$$

$$=\frac{a+\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{x+y}}{a+\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y(3x-y)}{x^2-y^2}}=\frac{a(x^2-y^2)+x(x+y)+y(x-y)}{a(x^2-y^2)+x(x-y)+y(3x-y)}$$

$$=\frac{a(x^2-y^2)+x^2+xy+xy-y^2}{a(x^2-y^2)+x^2-xy+3xy-y^2}=\frac{a(x^2-y^2)+x^2+2xy-y^2}{a(x^2-y^2)+x^2+2xy-y^2}=1.$$

Herleiding der magten van stelkunstige gebrokens.

§ 89. Volgens de beteekenis, in § 9 aan het woord magt gegeven, is de magt van een stelkunstig gebroken niets anders dan het product van zooveel gelijke factoren, als de exponent dier magt eenheden bevat, welke factoren ieder op zich zelven dat gebroken zijn. Daar nu de regel, voor het herleiden der producten van gebrokens, in de vergelijking (56) aangetoond, even zeer moet doorgaan, als die gebrokens onderling gelijk zijn, zoo is klaarblijkelijk

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2};\quad\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3};$$

en in het algemeen, $$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(64),$$

waarin A en B zoowel enkele getallen als stelkuustige vormen kunnen voorstellen. Men heeft dus dezen

REGEL. *De nde. magt van een stelkunstig gebroken is gelijk aan de nde. magt van den teller, gedeeld door de nde. magt van den noemer.* Mogt het gebroken het teeken — vóór zich hebben, dan zal men bij het toepassen van dezen regel in het oog moeten houden hetgeen in § 51 ten aanzien van de teekens der magten van eenledige vormen gezegd is.

Door dezen regel, is de herleiding der magten van gebrokene vormen onmiddellijk teruggebragt, tot de herleiding der magten van een- of veelledige vormen, die in § 51 en volgende is behandeld geworden.

Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $$\left(\frac{2a^2x^3}{3by^4}\right)^4=\frac{(2a^2x^3)^4}{(3by^4)^4}=\frac{16a^8x^{12}}{81b^4y^{16}};$$

2°. $$\left(-\frac{1}{5m^2}\right)^3=-\left(\frac{1}{5m^2}\right)^3=-\frac{1^3}{(5m^2)^3}=-\frac{1}{125m^6};$$

3°. $$\left(-\frac{a+b}{a-b}\right)^2=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2};$$

4°. $$\left(-\frac{y^2+x^2}{y^2-x^2}\right)^3=\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)^3=\frac{(x^2+y^2)^3}{(x^2-y^2)^3}.$$

Het is duidelijk, dat als gemengde vormen tot magten moeten verheven worden, men die vormen eerst, volgens § 81, tot enkele breuken kan herleiden, en daarna den bovenstaanden regel toepassen.

§ 90. Het is van belang op te merken, dat indien $\frac{A}{B}$ een onverkleinbaar stelkunstig gebroken is, ook al deszelfs magten onverkleinbaar zullen zijn.

Onderstellen wij, om dit aan te toonen, dat men de eenvoudigste factoren kent, waarin teller en noemer van een stelkunstig gebroken kunnen ontbonden worden, dan bestaat de onverkleinbaarheid van dit gebroken alleen daarin, dat er onder die factoren geene voorkomen, die aan teller en noemer gemeen zijn. Nemen wij dus aan, dat p, q, r, enz. de eenvoudigste factoren van eenen vorm A, en p', q', r', enz. die van eenen vorm B zijn, dan is

$$\frac{A}{B} = \frac{pqr \text{ enz.}}{p'q'r' \text{ enz.}}$$

en dus

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{A^2}{B^2} = \frac{ppqqrr \text{ enz.}}{p'p'q'q'r'r' \text{ enz.}}.$$

Daar nu $\frac{pqr \text{ enz.}}{p'q'r' \text{enz.}}$ het gebroken $\frac{A}{B}$ in dien toestand voorstelt, dat teller en noemer in derzelver eenvoudigste factoren ontbonden zijn, zoo stelt ook $\frac{ppqqrr \text{ enz.}}{p'p'q'q'r'r' \text{ enz.}}$ het gebroken $\left(\frac{A}{B}\right)^2$ in dienzelfden toestand voor. Hebben de producten pqr *enz.* en $p'q'r'$ *enz.* geene gemeenschappelijke factoren, dan hebben de producten $ppqqrr$ *enz.* en $p'p'q'q'r'r'$ *enz.* er ook geene. Is derhalve $\frac{A}{B}$ een onverkleinbaar gebroken, dan zal ook $\left(\frac{A}{B}\right)^2$ onverkleinbaar wezen. Op dezelfde wijze blijkt, dat als $\frac{A}{B}$ onverkleinbaar is, ook $\left(\frac{A}{B}\right)^3$, $\left(\frac{A}{B}\right)^4$, en in het algemeen $\left(\frac{A}{B}\right)^n$ onverkleinbaar zal zijn.

Heeft men dus, volgens de vorige §, een gebroken tot eene zekere magt verheven, en zich vooraf van deszelfs onverkleinbaarheid overtuigd, dan zal het onnoodig zijn, te onderzoeken, of die ontwikkelde magt verkleinbaar is. Voorts is het duidelijk, dat de, in deze § bewezene, eigenschap insgelijks doorgaat, wanneer A en B getallen, in plaats van stelkunstige vormen, zijn.

Herleiding der wortels uit stelkunstige gebrokens.

§ 91. Volgens de vergelijking (64) is

$$\left\{\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right\}^n = \frac{(\sqrt[n]{A})^n}{(\sqrt[n]{B})^n} = \frac{A}{B},$$

Daar nu de $n$demagtswortel uit het eerste lid van deze vergelijking $\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ is, en die uit het laatste lid door $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$ wordt voorgesteld, zoo is

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[n]{\frac{A}{B}} \text{ of } \sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} \ldots\ldots\ldots (65)$$

en dus heeft men dezen

Regel. *De $n$demagtswortel uit een stelkunstig gebroken is gelijk aan den $n$demagtswortel uit den teller, gedeeld door den $n$demagtswortel uit den noemer.* Mogt het gebroken het teeken — vóór zich hebben, dan zal men, bij het toepassen van dezen regel in het oog moeten houden, hetgeen in § 54, ten aanzien van de teekens der wortels uit eenledige vormen gezegd is.

Door dezen regel is de herleiding der wortels uit gebrokene vormen onmiddellijk teruggebragt tot de herleiding der wortels uit geheele vormen, die in § 54 en volgende is behandeld geworden.

Indien de wortels uit gebrokene vormen niet zonder behulp van wortelteekens kunnen worden voorgesteld, kan men de herleidingen, in § 56 en 57 opgegeven, ook hier volgen. Deze herleidingen zijn hoofdzakelijk begrepen in de volgende vergelijkingen:

$$\sqrt[n]{\frac{a^nb}{c^nd}}=\sqrt[n]{\left(\frac{a}{c}\right)^n\cdot\frac{b}{d}}=\frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}} \ldots\ldots\ldots (66);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a^nb}{d}}=\sqrt[n]{a^n\cdot\frac{b}{d}}=a\sqrt[n]{\frac{b}{d}} \ldots\ldots\ldots (67);$$

$$\sqrt[n]{\frac{b}{c^nd}}=\sqrt[n]{\left(\frac{1}{c}\right)^n\cdot\frac{b}{d}}=\frac{1}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}} \ldots\ldots\ldots (68);$$

$$\sqrt[np]{\frac{a^{pr}}{b^{pq}}}=\sqrt[np]{\left\{\frac{a^r}{b^q}\right\}^p}=\sqrt[n]{\frac{a^r}{b^q}} \ldots\ldots\ldots (69);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}=\frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^{n-1}} \ldots (70).$$

De herleiding, in deze laatste vergelijking begrepen, verdient bijzondere opmerking, daar zij aantoont, hoe men wortels uit gebrokene tot wortels uit geheele vormen kan herleiden. Hiertoe behoeft men slechts te volgen dezen

Regel. *Vermenigvuldig den teller en noemer van het gebroken, dat onder het wortelteeken staat, met zoodanigen vorm, dat de wortel uit den noemer, zonder behulp van wortelteeken, kan worden voorgesteld, en pas daarna den laatstvoorgaanden regel toe.*

Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $$\sqrt{\frac{49a^2b^4}{64c^6d^{10}}} = \frac{7ab^2}{8c^3d^5};$$

2°. $$\sqrt[3]{-\frac{8c^6d^{3n}}{125p^{6m+3}}} = -\frac{2c^2d^n}{5p^{2m+1}};$$

3°. $$\sqrt{-\frac{2ab-a^2-b^2}{2ab+a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}} = \frac{a-b}{a+b};$$

4°. $$\sqrt{-\frac{25a^2}{64b^2}} = \frac{5a}{8b}\sqrt{-1};$$

5°. $$\sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{1}{b}\sqrt{ab};$$

6°. $$\sqrt[3]{\frac{16a^4b}{3c^5d^2}} = \frac{2a}{c}\sqrt[3]{\frac{2ab}{3c^2d^2}} = \frac{2a}{c}\sqrt[3]{\frac{18abcd}{27c^3d^3}} = \frac{2a}{3c^2d}\sqrt[3]{18abcd};$$

7°. $$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

8°. $$\sqrt[3]{\frac{16}{25}} = \sqrt[3]{\frac{8.10}{125}} = \frac{2}{5}\sqrt[3]{10};$$

9°. $$\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2};$$

10°. $$\sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

Het is duidelijk, dat als wortels uit gemengde vormen herleid moeten worden, men die vormen eerst, volgens § 81, tot enkele breuken kan herleiden, en daarna de bovenstaande regels toepassen.

Herleiding van quotienten of gebrokens tot oneindig voortloopende reeksen.

§ 92. Reeds in § 46 is gezegd, dat, als bij de ontwikkeling van een quotient de deeling niet opgaat, de gewone bewerking dienen kan, om het quotient in eene oneindig voortloopende reeks te ontwikkelen, dat wil zeggen, voor het quotient eene rij van termen te vinden, die onophoudelijk voortgaat, en volgens de magten van eene zelfde letter afdaalt of opklimt. Om deze ontwikkeling te verkrijgen, behoeft men, door den regel van § 46 eene rest verkregen hebbende, die ten opzigte der rangletter van eenen lageren graad is, dan de deeler, slechts op die rest denzelfden regel toe te passen, en daartoe eenen gebrokenen term in het quotient te schrijven; de rest, die men daarna verkrijgt, kan men op dezelfde wijze behandelen, en hiermede kan men voortgaan, zoo ver men verkiest. Wil men, bij voorbeeld, het quotient of het gebroken $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ in eene oneindig voortloopende reeks ontwikkelen, dan komt de bewerking aldus te staan:

$$
\begin{array}{l|l}
a^2+b^2 & a^3+b^3 \Big\} \; a - \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} - \frac{b^5}{a^4} - \text{enz.} \\
 & \underline{a^3+ab^2} \\
 & \quad -ab^2+b^3 \\
 & \quad \underline{-ab^2-\frac{b^4}{a}} \\
 & \qquad b^3+\frac{b^4}{a} \\
 & \qquad \underline{b^3+\frac{b^5}{a^2}} \\
 & \qquad\quad \frac{b^4}{a}-\frac{b^5}{a^2} \\
 & \qquad\quad \underline{\frac{b^4}{a}+\frac{b^6}{a^3}} \\
 & \qquad\qquad -\frac{b^5}{a^2}-\frac{b^6}{a^3} \\
 & \qquad\qquad \underline{-\frac{b^5}{a^2}-\frac{b^7}{a^4}} \\
 & \qquad\qquad\quad -\frac{b^6}{a^3}+\frac{b^7}{a^4}
\end{array}
$$

Men heeft dus

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} = a - \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} - \frac{b^5}{a^4} - \text{enz.}$$

§ 93. Indien men, alvorens de bewerking der deeling toe te passen, deeltal en deeler, of teller en noemer, naar de opklimmende magten eener letter rangschikt, zal men even zoo eene oneindig voortloopende reeks verkrijgen, welke ook naar de magten van die letter zal opklimmen, en dus eene geheel andere gedaante zal hebben, dan die, welke men door de rangschikking naar de afdalende magten van dezelfde letter zou hebben verkregen. Zoo zal men, in het zoo even gegeven voorbeeld, door eene rangschikking naar de opklimmende magten van a, de volgende bewerking hebben:

$$b^2+a^2 \,\Big)\, b^3+a^3 \,\Big(\, b-\frac{a^2}{b}+\frac{a^3}{b^2}+\frac{a^4}{b^3}-\frac{a^5}{b^4}-enz.$$

$$\begin{array}{r}
\underline{b^3+ba^2} \\
-ba^2+a^3 \\
\underline{-ba^2-\frac{a^4}{b}} \\
a^3+\frac{a^4}{b} \\
\underline{a^3+\frac{a^5}{b^2}} \\
\frac{a^4}{b}-\frac{a^5}{b^2} \\
\underline{\frac{a^4}{b}+\frac{a^6}{b^3}} \\
-\frac{a^5}{b^2}-\frac{a^6}{b^3} \\
\underline{-\frac{a^5}{b^2}-\frac{a^7}{b^4}} \\
-\frac{a^6}{b^3}+\frac{a^7}{b^4}
\end{array}$$

Men heeft dus

$$\frac{b^3+a^3}{b^2+a^2}=b-\frac{a^2}{b}+\frac{a^3}{b^2}+\frac{a^4}{b^3}-\frac{a^5}{b^4}\ enz.$$

§ 94. Uit de beide vorige §§ blijkt dus, dat men elk gebroken in twee verschillende reeksen zal kunnen ontwikkelen, waarvan de eene de opklimmende magten der rangletter in de noemers, en de andere die magten in de tellers der termen van het quotient heeft. Zie hier nog eenige voorbeelden van gebrokens, die op beide wijzen ontwikkeld zijn:

1°. $$\frac{a}{1-x}=a+ax+ax^2+ax^3+ax^4+enz.;$$

$$\frac{a}{-x+1}=-\frac{a}{x}-\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x^3}-\frac{a}{x^4}-\frac{a}{x^5}-enz.;$$

2°. $$\frac{a}{1+x}=a-ax+ax^2-ax^3+ax^4-enz.;$$

$$\frac{a}{x+1}=\frac{a}{x}-\frac{a}{x^2}+\frac{a}{x^3}-\frac{a}{x^4}+\frac{a}{x^5}-enz.;$$

3°. $$\frac{3+2x}{1+3x-x^2}=3-7x+24x^2-79x^3+261x^4-enz.;$$

$$\frac{2x+3}{-x^2+3x+1}=-\frac{2}{x}-\frac{9}{x^2}-\frac{29}{x^3}-\frac{96}{x^4}-enz.$$

Wanneer voor eene bepaalde getallen-waarde van de letter, volgens welker magten eene reeks voortgaat, de termen achtervolgens grooter worden, noemt men die reeks eene *divergerende*; worden echter de termen achtervolgens kleiner, dan heet de reeks eene *convergerende*.

Het verdient opmerking, dat van de beide reeksen, die men door de ontwikkeling van een zelfde gebroken verkrijgt, voor eene zelfde waarde van de rangletter, altijd de eene divergerend en de andere convergerend zal wezen.

Neemt men, in de opgegevene voorbeelden, $x>1$, dan zullen de reeksen, die de magten van x in de tellers hebben, divergeren, en die, welke de magten van x in de noemers hebben, convergeren; neemt men echter $x<1$, dan zal juist het omgekeerde plaats hebben. Zoo is, in het 1e voorbeeld, voor $x=2$,

$$\frac{a}{1-x} = -a = a + 2a + 4a + 8a + 16a + enz.;$$

en $$\frac{a}{-x+1} = -a = -\frac{a}{2} - \frac{a}{4} - \frac{a}{8} - \frac{a}{16} - enz.$$

De eerste dezer reeksen is nu divergerend, omdat de termen hoe langer hoe grooter worden; hoeveel termen men dus ook van die reeks mogt verkiezen te nemen, zal zij nimmer, zelfs niet ten naasten bij, de waarde $-a$ van het gebroken kunnen voorstellen, en in die voorstelling wijkt zij meer van de waarheid af, naar gelang men meer termen neemt.

De tweede dezer reeksen convergeert, omdat de termen hoe langer hoe kleiner worden; neemt men dus een groot aantal termen van deze reeks, dan zal zij, ten naasten bij, de waarde $-a$ van het gebroken voorstellen, en in die voorstelling wijkt zij minder van de waarheid af, naarmate men meer termen neemt.

Neemt men, in hetzelfde voorbeeld, $x=\frac{1}{3}$, dan heeft men:

$$\frac{a}{1-x} = \frac{3}{2}a = a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9}a + \frac{1}{27}a + enz.;$$

$$\frac{a}{-x+1} = \frac{3}{2}a = -3a - 9a - 27a - 81a - enz.,$$

van welke reeksen nu de eerste convergeert en de tweede divergeert. Hoe meer termen men dus van de eerste neemt, des te minder zal de som dier termen van $\frac{3}{2}a$ verschillen; terwijl men, door een grooter aantal termen van de tweede te nemen, meer en meer van $\frac{3}{2}a$ zal afwijken.

BEHANDELING DER WORTELGROOTHEDEN.

Herleiding tot eenvoudiger' vorm van de som en het verschil van wortelgrootheden.

§ 95. Indien eenige eenledige wortelgrootheden, waardoor men verstaan moet zulke, die de gedaante $A\sqrt[n]{B}$ hebben, ten opzigte van den wortel, die daarin voorkomt, gelijksoortig, en dus alleen van elkander onderscheiden zijn door de factoren, die vóór het wortelteeken staan, kan derzelver som en verschil, volgens § 17, 18 en 19 dadelijk vereenvoudigd worden, door optelling en aftrekking der coëfficiënten. Zoo is, bij voorbeeld,

$$5\sqrt{3}+7\sqrt{3}-9\sqrt{3}=3\sqrt{3};$$

$$p\sqrt[3]{q}+2q\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{q}=(p+2q-1)\sqrt[3]{q};$$

$$(a-b)\sqrt[4]{(a+b)}-(a+b)\sqrt[4]{(a+b)}=-2b\sqrt[4]{(a+b)}.$$

Wanneer eenledige wortelgrootheden niet gelijksoortig zijn, kan derzelver som of verschil niet anders worden voorgesteld, dan door dezelve met de teekens $+$ of $-$ er tusschen naast elkander te schrijven. Zoo zijn, bij voorbeeld, de uitdrukkingen

$$2\sqrt{5}+3\sqrt[3]{7}\quad;\quad 7a\sqrt{c}+3b\sqrt{d};$$

$$(p+q)\sqrt[4]{(c+d)}+c\sqrt{(p-q)}-d\sqrt[3]{(c-d)}$$

voor geene vereenvoudiging vatbaar.

§ 96. Alvorens over het al of niet gelijksoortig zijn van eenledige wortelgrootheden te oordeelen, moet men dezelve, door toepassing der vroeger gegevene regels, zooveel mogelijk vereenvoudigen, omdat somtijds schijnbaar ongelijksoortige wortelgrootheden, na toepassing dezer regels, zullen blijken gelijksoortig te zijn. Zoo is, bij voorbeeld,

1°. $5\sqrt{12}+\sqrt{27}-4\sqrt{3}=10\sqrt{3}+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}=9\sqrt{3};$

2°. $4\sqrt[3]{24}-2\sqrt[3]{81}+\sqrt[4]{32}-5\sqrt[4]{2}=8\sqrt[3]{3}-6\sqrt[3]{3}+2\sqrt[4]{2}-5\sqrt[4]{2}=2\sqrt[3]{3}-3\sqrt[4]{2};$

3°. $2\sqrt[4]{64}+8\sqrt[6]{8}-\sqrt{18}=2\sqrt{8}+8\sqrt{2}-3\sqrt{2}=4\sqrt{2}+8\sqrt{2}-3\sqrt{2}=9\sqrt{2};$

4°. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}\sqrt[6]{3\frac{3}{8}}+\frac{1}{5}\sqrt{24}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{9}}-\frac{1}{3}\sqrt[6]{\frac{27}{8}}+\frac{1}{5}\sqrt{4\times6}=\frac{1}{6}\sqrt{6}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}\sqrt{6}$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}+\frac{2}{5}\sqrt{6}=\frac{2}{5}\sqrt{6};$$

5°. $\sqrt{8a^2b^3c}-b\sqrt{2bc^3}+2a\sqrt{2a^2bc}=2ab\sqrt{2bc}-bc\sqrt{2bc}+2a^2\sqrt{2bc}$

$$=(2ab-bc+2a^2)\sqrt{2bc}=(2a^2+2ab-bc)\sqrt{2bc};$$

6°. $\sqrt{\frac{1}{3x^2y}}-\frac{3}{x}\sqrt[4]{\frac{x^4}{729y^6}}+\frac{1}{xy}\sqrt{3y}=\sqrt{\frac{3y}{9x^2y^2}}-\frac{3}{x}\sqrt{\frac{x^2}{27y^3}}+\frac{1}{xy}\sqrt{3y}$

$$=\frac{1}{3xy}\sqrt{3y}-\frac{3}{x}\sqrt{\frac{3x^2y}{81y^4}}+\frac{1}{xy}\sqrt{3y}=\frac{1}{3xy}\sqrt{3y}-\frac{1}{3y^2}\sqrt{3y}+\frac{1}{xy}\sqrt{3y}$$

$$=\left(\frac{1}{3xy}-\frac{1}{3y^2}+\frac{1}{xy}\right)\sqrt{3y}=\frac{4y-x}{3xy^2}\sqrt{3y}.$$

§ 97. Volgens hetgeen in de twee vorige §§ gezegd is, heeft men dus, om de som en het verschil van eenledige wortelgrootheden tot de eenvoudigste gedaante te herleiden, dezen

REGEL. *Herleid, volgens de vroeger gegevene regels, de wortelgrootheden tot derzelver eenvoudigsten vorm; vereenig daarna de gelijksoortige termen tot eenen enkelen term, en schrijf de hierdoor verkregene termen met hun eigen teeken achter elkander.*

Om de som en het verschil van veelledige wortelgrootheden te herleiden, verbindt men dezen regel met dien van § 24.

Herleiding en ontwikkeling der producten van wortelgrootheden.

§ 98. Wanneer de wortels uit stelkunstige vormen door behulp van wortelteekens zijn aangeduid, noemt men dezelve *gelijknamig* of *ongelijknamig*, naargelang de aanwijzers der worteltrekkingen gelijk of ongelijk zijn. Zoo zijn, bij voorbeeld, $\sqrt{bc}$, $\sqrt{pq}$, $\sqrt{3}$, alsmede $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{(a+b)}$ gelijknamige wortels; daarentegen zijn $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[5]{2a}$, $\sqrt[6]{b}$ alle ongelijknamig.

De vroeger bewezene vergelijking (47) aldus geschreven wordende:

$$\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} \,.\, \sqrt[n]{c} \,.\, \sqrt[n]{d} \,.\,.\,.\,.\,. = \sqrt[n]{abcd} \,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

verschaft tot het herleiden van de producten van gelijknamige wortels den volgenden

REGEL. *Vermenigvuldig de grootheden, die onder de wortelteekens staan, met elkander; neem daaruit den gelijknamigen wortel, en herleid dien wortel, volgens vorige regels, tot deszelfs eenvoudigste gedaante.*

Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $$\sqrt{3}\times\sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$

2°. $$\sqrt[3]{18}\times\sqrt[3]{60} = \sqrt[3]{1080} = 6\sqrt[3]{5};$$

3°. $$\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{1} = 1;$$

4°. $$\sqrt[4]{14}\times\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\times\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{567} = 3\sqrt[4]{7};$$

5°. $$\sqrt{a(a+b)}\times\sqrt{b(a+b)} = \sqrt{ab(a+b)^2} = (a+b)\sqrt{ab};$$

6°. $$\sqrt[3]{3a^2b}\times\sqrt[3]{-6ac^2}\times\sqrt[3]{3b^2c} = \sqrt[3]{-54a^3b^3c^3} = -\,3abc\sqrt[3]{2}.$$

Wanneer men dezen regel wil toepassen, om het product van twee onbestaanbare gelijknamige wortels te herleiden, moet men deze bijzonderheid in het oog houden, dat men voor den wortel uit het vierkant van een negatief getal weder datzelfde negatieve getal moet nemen. Men heeft derhalve

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b} = \sqrt{(-a)(-b)} = \sqrt{(-1)^2\times ab} = -\sqrt{ab};$$

$$\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{(-a)\times(-b)} = \sqrt[4]{(-1)^2\times ab} = \sqrt[4]{(-1)^2}\times\sqrt[4]{ab} = \sqrt{-1}\times\sqrt[4]{ab};$$

$$\sqrt[6]{-a}\times\sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{(-a)(-b)} = \sqrt[6]{(-1)^2ab} = \sqrt[6]{(-1)^2}\sqrt[6]{ab} = \sqrt[3]{-1}.\sqrt[6]{ab} = -\sqrt[6]{ab};$$

enz.

Een dieper onderzoek omtrent het vermenigvuldigen der onbestaanbare wortels achterwege latende, kan men evenwel ten opzigte der vierkantswortels opmerken, dat zonder de genoemde bijzonderheid in het oog te houden, het product van de beide factoren $\pm\sqrt{-a}$ en $\pm\sqrt{-b}$, volgens den regel toch altijd of $+\sqrt{ab}$ of $-\sqrt{ab}$ zijn moet, en dat het in acht nemen dier bijzonderheid alleen dient, om aan het product het teeken te geven, dat hetzelve, naar aanleiding van de teekens der factoren, hebben moet.

§ 99. De vroeger bewezene vergelijking (51) aldus geschreven wordende:

$$\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[np]{a^{nq}}$$

verschaft het middel, om ongelijknamige wortels gelijknamig te maken. Zij leert namelijk, dat men den aanwijzer der worteltrekking en den exponent van de grootheid onder het wortelteeken altijd met een zelfde willekeurig getal mag vermenigvuldigen.

Men kan hierdoor een' willekeurigen wortel herleiden tot eenen anderen, waarvan de aanwijzer een veelvoud van den vorigen aanwijzer is. Indien men dus eenige ongelijknamige wortels heeft, kan men ze alle herleiden tot andere wortels, die denzelfden aanwijzer hebben, mits slechts die gemeenschappelijke aanwijzer een gemeen veelvoud zij van de vorige aanwijzers, en klaarblijkelijk zal dit op de eenvoudigste wijze geschieden, indien men het kleinste gemeene veelvoud neemt.

Men heeft alzoo, voor het herleiden van ongelijknamige wortels tot gelijknamige, den volgenden

Regel. *Neem het kleinste gemeene veelvoud van de aanwijzers der worteltrekkingen; deel den aanwijzer van elken wortel in dit kleinste gemeene veelvoud, en vermenigvuldig den aanwijzer van dien wortel, alsmede den exponent van de grootheid onder het wortelteeken, met het quotient van genoemde deeling.*

Voorbeeld. De wortels $\sqrt{2ab}$, $\sqrt[3]{4b^2c}$ en $\sqrt[4]{3a^3c}$ gelijknamig te maken.

Hier zijn de aanwijzers der worteltrekkingen 2, 3 en 4; hun kleinste gemeene veelvoud is 12, de quotienten van 12 door 2, 3 en 4 zijn 6, 4 en 3; men vermenigvuldige dus den aanwijzer en den exponent van $\sqrt{2ab}$ met 6, dan komt er

$$\sqrt{2ab} = \sqrt[2]{(2ab)^1} = \sqrt[12]{(2ab)^6} = \sqrt[12]{64a^6b^6};$$

om voorts $\sqrt[3]{4b^2c}$ te herleiden, neme men 4 tot vermenigvuldiger, waardoor men verkrijgt

$$\sqrt[3]{4b^2c} = \sqrt[3]{(4b^2c)^1} = \sqrt[12]{(4b^2c)^4} = \sqrt[12]{256b^8c^4};$$

even zoo heeft men, 3 tot vermenigvuldiger nemende,

$$\sqrt[4]{3a^3c} = \sqrt[4]{(3a^3c)^1} = \sqrt[12]{(3a^3c)^3} = \sqrt[12]{27a^9c^3}.$$

Derhalve zijn $\sqrt[12]{64a^6b^6}$, $\sqrt[12]{256b^8c^4}$ en $\sqrt[12]{27a^9c^3}$ de gevraagde gelijknamige wortels.

§ 100. Wanneer men het product van ongelijknamige wortels wil herleiden, make men dezelve dus eerst volgens de vorige § gelijknamig, en passe daarna den regel van § 98 toe.

Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $$\sqrt{6}\times\sqrt[3]{12}=\sqrt[6]{216}\times\sqrt[6]{144}=\sqrt[6]{8\times27\times8\times18}=\sqrt[6]{64\times486}$$
$$=2\sqrt[6]{486}=2\sqrt[6]{2.3^5};$$

2°. $$\sqrt{3}\times\sqrt[4]{18}=\sqrt[4]{9}\times\sqrt[4]{18}=\sqrt[4]{162}=3\sqrt[4]{2};$$

3°. $$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[5]{6}=\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[5]{2.3}=\sqrt[15]{2^{10}}\times\sqrt[15]{2^3.3^3}=\sqrt[15]{2^{13}.3^3};$$

4°. $$\sqrt{2ab}\times\sqrt[3]{4b^2c}\times\sqrt[4]{3a^3c}=\sqrt[12]{2^6a^6b^6}\times\sqrt[12]{2^8b^8c^4}\times\sqrt[12]{3^3a^9c^3}$$
$$=\sqrt[12]{2^{14}.3^3a^{15}b^{14}c^7}=2ab\sqrt[12]{2^2.3^3a^3b^2c^7};$$

5°. $$\sqrt{\frac{2a}{3b}}\times\sqrt[3]{\frac{9b^2}{4a^2}}=\sqrt[6]{\frac{8a^3}{27b^3}}\times\sqrt[6]{\frac{81b^4}{16a^4}}=\sqrt[6]{\frac{8a^3}{27b^3}\times\frac{81b^4}{16a^4}}=\sqrt[6]{\frac{3b}{2a}}.$$

Wanneer men den regel voor het gelijknamig maken op onbestaanbare wortels wil toepassen, en daartoe het negatieve getal, dat onder het wortelteeken staat, tot eene evene magt zou moeten verheven worden, zou men, door het bewerkstelligen dier magtsverheffing, het kenmerk der onbestaanbaarheid laten verloren gaan, in zulke gevallen moet men dus van dezen regel geen gebruik maken.

Was, bij voorbeeld, gevraagd het product te vinden van $\sqrt{-2}$ en $\sqrt[4]{3}$, dan moet dit prodnct klaarblijkelijk onbestaanbaar zijn; past men echter den regel onvoorwaardelijk toe, dan vindt men

$$\sqrt{-2}\times\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{(-2)^2}\times\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{4\times3}=\sqrt[4]{12},$$

welke uitkomst bestaanbaar is, en dus het bedoelde onbestaanbare product niet meer voorstelt. De uitdrukkingen

$$\sqrt{-2}\times\sqrt[4]{3} \quad \text{en} \quad \sqrt[4]{12}$$

komen, hoezeer de eerste onbestaanbaar en de laatste bestaanbaar is, echter daarin overeen, dat elk derzelve, tot de vierde magt verheven wordende, het getal 12 oplevert, zoodat de onzuiverheid van de vergelijking

$$\sqrt{-2}\times\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{12}$$

slechts een gevolg is van het aangenomen gebruik, om door $\sqrt[4]{12}$ alleen het positieve getal te bedoelen, dat tot de vierde magt verheven, het getal 12 oplevert, en geenszins eene stelkunstige uitdrukking, die hieraan mogt voldoen.

§ 101. Het herleiden der producten van een- of veelledige wortelgrootheden heeft na het verhandelde nu geene de minste zwarigheid, daar men hiertoe slechts de vroeger gegevene regels voor het herleiden der producten van een- of veelledige vormen met de regels van § 98 en 99 behoeft te verbinden. Bij de veelledige vormen, kan men het uitvoeren der bewerking op dezelfde wijze inrigten, als in § 33 is aangewezen.

Moest, bij voorbeeld, $2a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+7\sqrt{ab}$ vermenigvuldigd worden met $5\sqrt{a}-\sqrt{b}$, dan zou de bewerking aldus te staan komen:

$$\begin{array}{llll} & 2a\sqrt{a} & -\ 3a\sqrt{b} & +\ 7\sqrt{ab} \\ & 5\sqrt{a} & -\ \sqrt{b} & \\ \hline 10a^2 & -\ 15a\sqrt{ab}+35a\sqrt{b} & & \\ & -\ 2a\sqrt{ab} \ \ldots\ldots & +3ab-7b\sqrt{a} & \\ \hline 10a^2 & -\ 17a\sqrt{ab}+35a\sqrt{b}+3ab-7b\sqrt{a}. & & \end{array}$$

Zie hier nog eenige voorbeelden, betreffende de herleiding van producten van een- en veelledige wortelgrootheden.

1°. $5\sqrt{6}\times3\sqrt{3}=15\sqrt{18}=45\sqrt{2}$;

2°. $2\sqrt{3}\times7\sqrt[3]{4}=2\sqrt[6]{27}\times7\sqrt[6]{16}=14\sqrt[6]{432}$;

3°. $a\sqrt{b}\times c\sqrt{d}=ac\sqrt{bd}$;

4°. $3(a+b)\sqrt{2a(a-b)}\times2(a-b)\sqrt[3]{3b(a+b)}=$
$3(a+b)\sqrt[6]{8a^3(a-b)^3}\times2(a-b)\sqrt[6]{9b^2(a+b)^2}=6(a^2-b^2)\sqrt[6]{72a^3b^2(a+b)^2(a-b)^3}$

5°. $(2+\sqrt{3}+\sqrt{2})\times5\sqrt{6}=10\sqrt{6}+5\sqrt{18}+5\sqrt{12}=10\sqrt{6}+15\sqrt{2}+10\sqrt{3}$;

6°. $(2\sqrt[3]{2}-4\sqrt[4]{3})\times5\sqrt{2}=10\sqrt[3]{2}.\sqrt{2}-20\sqrt[4]{3}.\sqrt{2}=10\sqrt[6]{4}.\sqrt[6]{8}-20\sqrt[4]{3}.\sqrt[4]{4}$
$=10\sqrt[6]{32}-20\sqrt[4]{12}$;

7°. $(5+3\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})=-5+5\sqrt{5}$;

8°. $(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})(2\sqrt{3}-3\sqrt{7})=60-13\sqrt{21}$;

9°. $(2a^2b+d\sqrt{bc}-3\sqrt{cd})(2a^2b-d\sqrt{bc}+3\sqrt{cd})=4a^4b^2-bcd^2-9cd+6cd\sqrt{bd}$.

§ 102. Hetgeen in § 38, betrekkelijk de ontbinding in factoren gezegd is, kan ook op wortelgrootheden worden toegepast. Zelfs kan men stelkunstige vormen, waarin geene wortelteekens voorkomen, in factoren ontbinden, die ieder op zich zelven wortelgrootheden zijn. Zoo is, bij voorbeeld, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$; $\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}$; $a=\sqrt{a}.\sqrt{a}$; $a=\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[3]{a}$; $a\sqrt{b}-c\sqrt{ab}=(a-c\sqrt{a})\sqrt{b}$; $2+\sqrt{6}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}$; $4=(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})$; *enz.*

Zulke ontbindingen, in factoren die beide of een van beide eenledig zijn, vallen, indien men eenige vaardigheid in het opmaken van producten verkregen heeft, van zelven in het oog In het bewerkstelligen van zulke ontbindingen in veelledige factoren, zal men even gemakkelijk slagen, indien men zich de volgende ontwikkelingen in het geheugen geprent heeft.

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b;$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b;$$
$$(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})=a^2b-c^2d;$$
$$(a+b\sqrt{c})(c+d\sqrt{c})=ac+bcd+(ad+bc)\sqrt{c};$$
$$(\sqrt{a}+b\sqrt{c})(\sqrt{a}+d\sqrt{c})=a+bcd+(b+d)\sqrt{ac};$$
$$(a\pm b\sqrt{})^2=a^2+b\pm2a\sqrt{b};$$
$$(a\pm b\sqrt{c})^2=a^2+b^2c\pm2ab\sqrt{c};$$
$$(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=a+b\pm\sqrt{2ab};$$
$$(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})=a-b;$$
$$(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=a+b.$$

Herleiding der quotienten van wortelgrootheden.

§ 103. De vroeger bewezene vergelijking (65) aldus geschreven wordende:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

verschaft tot het herleiden der quotienten van gelijknamige wortels den volgenden

Regel. *Deel de grootheid, die in het deeltal onder het wortelteeken staat, door de grootheid, die in den deeler onder het wortelteeken voorkomt; neem den gelijknamigen wortel uit dat quotient, en herleid dien wortel, volgens vorige regels, tot deszelfs eenvoudigste gedaante.*

Tot het herleiden der quotienten van ongelijknamige wortels, volge men denzelfden regel, na eerst die ongelijknamige wortels, door den regel van § 99, gelijknamig gemaakt te hebben,

Brengt men nu dezen regel in verband met hetgeen in § 85 gezegd is, waardoor men verkrijgt

$$\frac{p\sqrt[n]{a}}{q\sqrt[n]{b}} = \frac{p}{q}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (71),$$

dan is dezelve voldoende, om de quotienten van eenledige wortelgrootheden te herleiden.

Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2};$$

2°. $$\frac{\sqrt{3ab}}{\sqrt{6bc}} = \sqrt{\frac{3ab}{6bc}} = \sqrt{\frac{a}{2c}} = \frac{1}{2c}\sqrt{2ac};$$

3°. $$\frac{3\sqrt[4]{6}}{\sqrt{2}} = 3\cdot\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{4}} = 3\sqrt[4]{\frac{3}{2}} = 3\sqrt[4]{\frac{24}{16}} = \frac{3}{2}\sqrt[4]{24};$$

4°. $$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{9}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{9^2}} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{3^3}{3^4}} = \frac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{3^5}{3^6}} = \frac{1}{6}\sqrt[6]{3^5} = \frac{1}{6}\sqrt[6]{243};$$

5°. $$\frac{a\sqrt{(a-b)}}{b\sqrt[4]{(a^2-b^2)}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{\sqrt[4]{(a-b)^2}}{\sqrt[4]{(a^2-b^2)}} = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{a-b}{a+b}}.$$

Wanneer men dezen regel wil toepassen in het geval, dat het deeltal bestaanbaar, maar de deeler onbestaanbaar is, moet men dezelfde bijzonderheid in het oog houden, die in het slot van § 98 is opgemerkt. Zoo is, bij voorbeeld,

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-a}} = \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} \times \frac{-1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{b}\,.\sqrt{-1} = -\sqrt{-b};$$

$$\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{-b}} = \frac{-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{b}} \times \frac{-1}{\sqrt[4]{-1}} = -\sqrt[4]{a}\,.\,\sqrt[4]{(-1)^3} = -\sqrt[4]{a}\,.\,\sqrt[4]{(-1)^2(-1)}$$
$$= -\sqrt[4]{a}\,.\,\sqrt[4]{-1}\,.\,\sqrt{-1} = -\sqrt[4]{-a}\,.\,\sqrt{-1}.$$

§ 104. Indien het deeltal of de teller geene wortelteekens mogt bevatten, en de deeler of de noemer eene eenledige wortelgrootheid is, bepaalt de herleiding van het quotient zich tot het vermenigvuldigen van teller en noemer met zoodanigen vorm, dat de nieuwe noemer, dien men daardoor verkrijgt, zonder behulp van wortelteeken kan worden voorgesteld. In het algemeen, is deze herleiding begrepen in de formule

$$\frac{p}{q\sqrt[n]{a}} = \frac{p.\sqrt[n]{a^{n-1}}}{q\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a^{n-1}}} = \frac{p\sqrt[n]{a^{n-1}}}{aq} = \frac{p}{aq}\sqrt[n]{a^{n-1}} \quad \ldots \quad (72).$$

Zie hier eenige voorbeelden van dezelve:

1°. $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3};$$

2°. $$\frac{2}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{2.\sqrt[3]{2^2}}{3\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3.2} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4};$$

3°. $$\frac{7}{5\sqrt[3]{12}} = \frac{7}{5\sqrt[3]{2^2.3}} = \frac{7.\sqrt[3]{2.3^2}}{5\sqrt[3]{2^2.3}.\sqrt[3]{2.3^2}} = \frac{7\sqrt[3]{18}}{5.2.3} = \frac{7}{30}\sqrt[3]{18};$$

4°. $$\frac{c}{b\sqrt{a}} = \frac{c\sqrt{a}}{b\sqrt{a}.\sqrt{a}} = \frac{c\sqrt{a}}{ab} = \frac{c}{ab}\sqrt{a};$$

5°. $$\frac{p^2-q^2}{q\sqrt{2p(p+q)}} = \frac{(p^2-q^2)\sqrt{2p(p+q)}}{q\sqrt{2p(p+q)}.\sqrt{2p(p+q)}} = \frac{(p^2-q^2)\sqrt{2p(p+q)}}{2pq(p+q)}$$
$$= \frac{p-q}{2pq}\sqrt{2p(p+q)}.$$

§ 105. Indien de deeler eene eenledige wortelgrootheid en het deeltal een veelledige vorm is, waarvan de termen al of niet wortelgrootheden zijn, kan men eerst den regel van § 44 toepassen, en de daardoor verkregene gedeeltelijke quotienten verder volgens § 103 en 104 herleiden. Of ook kan men, het quotient in de gedaante van een gebroken geschreven hebbende, teller en noemer met zoodanigen vorm vermenigvuldigen, dat de nieuwe noemer, dien men daardoor verkrijgt, zonder behulp van wortelteeken kan worden voorgesteld.

Zie hier een paar voorbeelden:

1°. $$\frac{2+\sqrt{3}-2\sqrt[3]{6}}{5\sqrt{6}} = \frac{2}{5\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{6}} - \frac{2\sqrt[3]{6}}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{30} + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}.\frac{\sqrt[6]{6^2}}{\sqrt[6]{6^3}}$$
$$= \frac{1}{15}\sqrt{6} + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{4}} - \frac{2}{5}\sqrt[6]{\frac{6^5}{6^6}} = \frac{1}{15}\sqrt{6} + \frac{1}{10}\sqrt{2} - \frac{1}{15}\sqrt[6]{6^5};$$

2°. $\dfrac{2a^2b^2-cd\sqrt{(a^4-b^4)}}{abcd\sqrt{(a^2+b^2)}}=\dfrac{[2a^2b^2-cd\sqrt{(a^4-b^4)}]\sqrt{(a^2+b^2)}}{abcd\sqrt{(a^2+b^2)}.\sqrt{(a^2+b^2)}}=$

$$\frac{2a^2b^2\sqrt{(a^2+b^2)}-cd(a^2+b^2)\sqrt{(a^2-b^2)}}{abcd(a^2+b^2)}=\frac{2ab}{cd(a^2+b^2)}\sqrt{(a^2+b^2)}-\frac{1}{ab}\sqrt{(a^2-b^2)}.$$

§ 106. Wanneer de deeler eene veelledige wortelgrootheid is, onverschillig wat dan ook het deeltal zijn moge, herleidt men het quotient gewoonlijk, door teller en noemer van het gebroken, waardoor dat quotient wordt voorgesteld, met zulk eenen veelledigen vorm te vermenigvuldigen, dat in den nieuwen noemer geene wortelteekens voorkomen. In de meest voorkomende gevallen van deze herleiding bestaat de deeler uit de som of het verschil van twee termen, waarin, hetzij in beide, hetzij in een van beide, geene andere dan vierkantswortelteekens voorkomen; en in deze gevallen kan men zich, blijkens de, in § 102 opgegevene, producten, bedienen van den volgenden

Regel. *Vermenigvuldig teller en noemer van het gebroken, waar door het quotient wordt voorgesteld, met den vorm, die ontstaat, door de termen van den noemer te verbinden met het tegengestelde teeken, als waarmede die termen in den noemer verbonden zijn.*

Deze regel is vervat in de volgende formulen:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{A}{a+b\sqrt{c}}=\dfrac{A(a-b\sqrt{c})}{a^2-b^2c};\quad \dfrac{A}{a-b\sqrt{c}}=\dfrac{A(a+b\sqrt{c})}{a^2-b^2c};\\ \dfrac{A}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}=\dfrac{A(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{a^2b-c^2d};\quad \dfrac{A}{a\sqrt{b}-c\sqrt{d}}=\dfrac{A(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}{a^2b-c^2d}.\end{array}\right\}\ldots(73).$$

Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $\dfrac{2a}{-1+\sqrt{5}}=\dfrac{2a(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}=\dfrac{1}{2}a(1+\sqrt{5});$

2°. $\dfrac{10-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}=\dfrac{(10-2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{(10+2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}=\dfrac{120-40\sqrt{5}}{80}=\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{5});$

3°. $\dfrac{8+4\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{11}}=\dfrac{(8+4\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{11})}{(\sqrt{7}-\sqrt{11})(\sqrt{7}+\sqrt{11})}=\dfrac{(8+4\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{11})}{-4}$
$=-(2+\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{11});$

4°. $\dfrac{33}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}=\dfrac{33(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{5})(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})}=\dfrac{33(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})}{-33}=3\sqrt{5}-2\sqrt{3};$

5°. $\dfrac{g\sqrt{g}-b\sqrt{b}}{\sqrt{g}-\sqrt{b}}=\dfrac{(g\sqrt{g}-b\sqrt{b})(\sqrt{g}+\sqrt{b})}{(\sqrt{g}-\sqrt{b})(\sqrt{g}+\sqrt{b})}=\dfrac{g^2-b^2+(g-b)\sqrt{bg}}{g-b}$
$=\dfrac{g^2-b^2}{g-b}+\dfrac{(g-b)\sqrt{bg}}{g-b}=g+b+\sqrt{bg};$

6°. $\dfrac{a^2}{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}=\dfrac{a^2[x-\sqrt{(x^2-a^2)}]}{[x+\sqrt{(x^2-a^2)}]\,[x-\sqrt{(x^2-a^2)}]}$
$=\dfrac{a^2[x-\sqrt{(x^2-a^2)}]}{a^2}=x-\sqrt{(x^2-a^2)}.$

Wanneer de noemer uit het verschil of de som van twee derde-, vierdemagtswortels enz. mogt bestaan, of ook somtijds, wanneer de noemer meer dan twee termen mogt bevatten, kunnen er dergelijke herleidingen plaatshebben, waaromtrent echter het bestek dezer beginselen niet gedoogt, in nadere bijzonderheden te treden.

Herleiding der magten van wortelgrootheden.

§ 107. Daar de magt van eenigen wortel niets anders is, dan het product of gedurig product van eenige wortels, die alle onderling gelijk, en dus ook gelijknamig zijn, kan de herleiding van zulk eene magt onmiddellijk tot den regel van § 98 worden teruggebragt. Men heeft namelijk

$$(\sqrt[n]{a})^2 = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \times a} = \sqrt[n]{a^2};$$

$$(\sqrt[n]{a})^3 = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \times a \times a} = \sqrt[n]{a^3};$$

en zoo ook in het algemeen

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (74).$$

Om dus eenen gegevenen wortel tot eene gegevene magt te verheffen, heeft men den volgenden

Regel. *Verhef de grootheid, die onder het wortelteeken staat, tot de gegevene magt, neem uit die magt den, met den gegevenen, gelijknamigen wortel, en herleid dien wortel, volgens vorige regels, tot deszelfs eenvoudigste gedaante.*

Deze regel, met dien van § 52 in verband gebragt, is genoegzaam, om eenledige wortelgrootheden tot gegevene magten te verheffen. Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3};$

2°. $(2\sqrt[3]{5})^2 = 2^2(\sqrt[3]{5})^2 = 4\sqrt[3]{5^2} = 4\sqrt[3]{25};$

3°. $(-7\sqrt[4]{6})^2 = +7^2(\sqrt[4]{6})^2 = 49\sqrt[4]{6^2} = 49\sqrt{6};$

4°. $(3ab\sqrt{2ac})^3 = (3ab)^3(\sqrt{2ac})^3 = (3ab)^3\sqrt{(2ac)^3}$
$= 27a^3b^3\sqrt{8a^3c^3} = 54a^4b^3c\sqrt{2ac};$

5°. $\left(2b^2c\sqrt[3]{-\frac{a^2b}{3cd^2}}\right)^2 = \left(-2b^2c\sqrt[3]{\frac{a^2b}{3cd^2}}\right)^2 = +(2b^2c)^2\left(\sqrt[3]{\frac{a^2b}{3cd^2}}\right)^2$

$$= 4b^4c^2\sqrt[3]{\frac{a^4b^2}{9c^2d^4}} = 4b^4c^2\sqrt[3]{\frac{3a^4b^2cd^2}{27c^3d^6}} = \frac{4ab^4c^2}{3cd^2}\sqrt[3]{3ab^2cd^2} = \frac{4ab^4c}{3d^2}\sqrt[3]{3ab^2cd^2}.$$

Wanneer men dezen regel wil toepassen, om eenen onbestaanbaren wortel tot zekere magt te verheffen, moet men weder de, aan het slot van § 98 opgemerkte, bijzonderheid in het oog houden. Zoo is, bij voorbeeld,

$(\sqrt{-a})^2 = -a$; $(\sqrt{-a})^3 = -a\sqrt{-a}$; $(\sqrt{-a})^4 = +a^2$;
$(\sqrt[4]{-a})^2 = \sqrt{-a}$; $(\sqrt[4]{-a})^3 = \sqrt{-1} \times \sqrt[4]{-a^3}$; $(\sqrt[4]{-a})^4 = -a$; enz.

§ 108. Wanneer de exponent van de magt, waartoe een wortel moet verheven worden, gelijk is aan den aanwijzer der worteltrekking, bestaat de magtsverheffing, volgens de vergelijking (44), alleen in het weglaten van het wortelteeken.

Indien voorts de aanwijzer der worteltrekking een factor is van den exponent der magt, waartoe de wortel moet verheven worden, heeft men, volgens (74) en (46),

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^{np} = \sqrt[p]{a^{np}} = a^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \; . \; . \; . \; . \; (75),$$

zoodat in zoodanig geval het wortelteeken verdwijnt, en de verlangde magt verkregen wordt, door de grootheid onder het wortelteeken tot exponent te geven het quotient, dat er komt, wanneer men den aanwijzer der worteltrekking deelt in den exponent van de magt, waartoe men verheffen moet. In zoodanige gevallen, moet men dus den regel der vorige § niet toepassen, daar zulks niet alleen overbodig is, maar ook somtijds, indien men de meer genoemde bijzonderheid uit het oog verloor, tot verkeerde uitkomsten zou geleiden.

Zoo is, bij voorbeeld:

1°. $(3a^2b\sqrt[3]{-4b^2c})^3 = (3a^2b)^3 \times (\sqrt[3]{-4b^2c})^3 = 27a^6b^3 \times -4b^2c = -108a^6b^5c;$

2°. $(\sqrt[3]{-5})^{12} = (-5)^4 = 625;$

3°. $(2\sqrt{-3})^6 = 2^6(\sqrt{-3})^6 = 2^6(-3)^3 = -2^6.3^3 = -1728;$

4°. $(cd\sqrt[5]{abcd})^{15} = (cd)^{15}(\sqrt[5]{abcd})^{15} = c^{15}d^{15} \times (abcd)^3 = a^3b^3c^{18}d^{18}.$

§ 109. Om de magten van veelledige wortelgrootheden te ontwikkelen, behoeft men, hetgeen in § 53 gezegd is, slechts te verbinden met de regels, die voor de herleiding der producten en magten van wortels gegeven zijn.

Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $(-1+\sqrt{5})^2 = (-1)^2+2(-1)\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2 = 1-2\sqrt{5}+5 = 6-2\sqrt{5};$

2°. $(3+\sqrt{3})^2 = 3^2+2.3.\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2 = 9+6\sqrt{3}+3 = 12+6\sqrt{3};$

3°. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2-2.\sqrt{5}.\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2 = 5-2\sqrt{15}+3 = 8-2\sqrt{15};$

4°. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2+2.\sqrt{x}.\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2 = x+y+2\sqrt{xy};$

5°. $(a\sqrt[3]{b}-c\sqrt[3]{d})^3 = (a\sqrt[3]{b})^3-3(a\sqrt[3]{b})^2.c\sqrt[3]{d}+3.a\sqrt[3]{b}.(c\sqrt[3]{d})^2-(c\sqrt[3]{d})^3$
$= a^3b-3a^2c\sqrt[3]{b^2d}+3ac^2\sqrt[3]{bd^2}-c^3d;$

6°. $(-1+\sqrt{-3})^3 = (-1)^3+3(-1)^2.\sqrt{-3}+3(-1).(\sqrt{-3})^2+(\sqrt{-3})^3$
$= -1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3} = 8.$

Herleiding van de wortels uit wortelgrootheden.

§ 110. Wanneer uit eenen wortel, of uit eene eenledige wortelgrootheid, wederom een wortel van zekere magt moet worden getrokken, stelt men, in het algemeen, de grootheid, waaruit die laatste worteltrekking moet plaats hebben, tusschen twee haakjes, alvorens men het nieuwe wortelteeken daarvoor plaatst. Moest, bij voorbeeld, uit $\sqrt[p]{a}$

of uit $b\sqrt[p]{a}$ de q^{de}magtswortel worden getrokken, dan zou men dezen wortel aanduiden, door te schrijven $\sqrt[q]{(\sqrt[p]{a})}$ of $\sqrt[q]{(b\sqrt[p]{a})}$. Men moet opmerken, dat in het eerste geval de haakjes wel mogen worden weggelaten, omdat dit weglaten geene verwarring kan veroorzaken, maar dat zulks in het tweede geval niet mag geschieden; want zoo men schreef $\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}$, zou door deze uitdrukking toch niets anders dan $\sqrt[q]{(\sqrt[p]{a})}$ verstaan kunnen worden, maar zoo men schreef $\sqrt[q]{b}\sqrt[p]{a}$, zou daardoor het product der beide grootheden $\sqrt[q]{b}$ en $\sqrt[p]{a}$ worden aangewezen, zoodat $\sqrt[q]{b}\sqrt[p]{a}$ geheel iets anders beteekent, dan $\sqrt[q]{(b\sqrt[p]{a})}$.

§ 111. De herleiding van wortels uit wortels is begrepen in de volgende formule:

$$\sqrt[q]{(\sqrt[p]{a})} = \sqrt[pq]{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76).$$

Om deze formule te bewijzen, heeft men, volgens (44),

$$\left(\sqrt[q]{(\sqrt[p]{a})}\right)^q = \sqrt[p]{a};$$

verheft men de beide leden dezer vergelijking tot de p^{de} magt, dan verkrijgt men, volgens (32) en (44),

$$\left(\sqrt[q]{(\sqrt[p]{a})}\right)^{pq} = a;$$

trekt men eindelijk uit beide leden dezer laatste vergelijking den pq^{de}-magtswortel, dan komt er

$$\sqrt[q]{(\sqrt[p]{a})} = \sqrt[pq]{a},$$

zijnde dit juist de gestelde formule. Uit dezelve volgt terstond, voor het herleiden van wortels uit wortels, dezen

Regel. *Vermenigvuldig de beide aanwijzers der worteltrekkingen met elkander, en neem uit de grootheid, die onder het wortelteeken staat, den wortel, welke dit product tot aanwijzer heeft.*

Om wortels uit eenledige wortelgrootheden te herleiden, kan men, hetgeen in § 56 over het brengen van factoren onder een wortelteeken gezegd is, met dezen regel verbinden; of ook kan men eerst de formule (47), daarna den bovenstaanden regel, en eindelijk de regels, die voor het herleiden der producten van wortels gegeven zijn, toepassen.

Zie hier eenige voorbeelden, op beide wijzen behandeld:

1°. $$\sqrt{(2\sqrt[3]{3})} = \sqrt{(\sqrt[3]{24})} = \sqrt[6]{24};$$

$$\sqrt{(2\sqrt[3]{3})} = \sqrt{2}.\sqrt{(\sqrt[3]{3})} = \sqrt{2}.\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{8}.\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{24};$$

2°. $$\sqrt[3]{(3a\sqrt[4]{2ab^3})} = \sqrt[3]{(\sqrt[4]{(3a)^4.2ab^3})} = \sqrt[12]{162a^5b^3};$$

$$\sqrt[3]{(3a\sqrt[4]{2ab^3})} = \sqrt[3]{3a}.\sqrt[3]{(\sqrt[4]{2ab^3})} = \sqrt[12]{(3a)^4}.\sqrt[12]{2ab^3} = \sqrt[12]{162a^5b^3};$$

3°. $$\sqrt[4]{(2a\sqrt[3]{2a})} = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{(2a)^3.2a})} = \sqrt[12]{(2a)^4} = \sqrt[3]{2a};$$

$$\sqrt[4]{(2a\sqrt[2]{2a})} = \sqrt[4]{2a}.\sqrt[4]{(\sqrt[3]{2a})} = \sqrt[12]{(2a)^3}.\sqrt[12]{2a} = \sqrt[12]{(2a)^4} = \sqrt[3]{2a}.$$

Het kan gebeuren, dat uit eene eenledige wortelgrootheid, die het teeken — vóór zich heeft, op nieuw een wortel moet getrokken worden. Zijn nu de aanwijzers der worteltrekkingen beide of een van beide oneven, dan kan men, volgens (48), dat teeken — altijd onder het eene of buiten het andere wortelteeken brengen. Zoo is, bij voorbeeld:

$$\sqrt[3]{(-2\sqrt[5]{3})} = -\sqrt[3]{(2\sqrt[5]{3})} \quad \text{of} \quad \sqrt[3]{(-2\sqrt[5]{3})} = \sqrt[3]{(2\sqrt[5]{-3})};$$

$$\sqrt[4]{(-2\sqrt[5]{3})} = \sqrt[4]{(2\sqrt[5]{-3})}; \quad \sqrt[3]{(-2\sqrt[4]{3})} = -\sqrt[3]{(2\sqrt[4]{3})}.$$

In zoodanige gevallen, vereischt het toepassen der gegevene regels geene bijzondere voorzorg. Zijn echter de aanwijzers der worteltrekkingen beide even, dan zal, naargelang men de eerste of de tweede der opgegevene handelwijzen wil volgen, in het oog gehouden moeten worden, hetgeen te dezen aanzien in § 56 of in § 100 is aangemerkt. Men heeft, bij voorbeeld:

$$\sqrt{(-a\sqrt{b})} = \sqrt{(-\sqrt{a^2b})} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{(\sqrt{a^2b})} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt[4]{a^2b},$$

of $\sqrt{(-a\sqrt{b})} = \sqrt{-a}\,.\,\sqrt[4]{b} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a}\,.\,\sqrt[4]{b} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt[4]{a^2}\,.\,\sqrt[4]{b} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt[4]{a^2b}.$

§ 112. Wanneer bij herhaling wortels uit wortels moeten getrokken worden, is eene herhaalde toepassing van hetgeen in de vorige § geleerd is, genoegzaam, om zulke vormen te herleiden. Zie hier een paar voorbeelden tot opheldering:

1°. $$\sqrt[3]{(2a\sqrt{(3b\sqrt[4]{ab})})} = \sqrt[3]{(2a\sqrt{(\sqrt[4]{3^4ab^5})})} = \sqrt[3]{(2a\sqrt[8]{3^4ab^5})}$$
$$= \sqrt[3]{(\sqrt[8]{2^8.3^4a^9b^5})} = \sqrt[24]{2^8.3^4a^9b^5};$$

2°. $$\sqrt[4]{(2a^3\sqrt[3]{(a^2b\sqrt{(a\sqrt[3]{a^2b})})})} = \sqrt[4]{2a^3}\,.\,\sqrt[12]{(a^2b\sqrt{(a\sqrt[3]{a^2b})})}$$
$$= \sqrt[4]{2a^3}\,.\,\sqrt[12]{a^2b}\,.\,\sqrt[24]{(a\sqrt[3]{a^2b})} = \sqrt[4]{2a^3}\,.\,\sqrt[12]{a^2b}\,.\,\sqrt[24]{a}\,.\,\sqrt[72]{a^2b}$$
$$= \sqrt[72]{2^{18}.a^{54}}\,.\,\sqrt[72]{a^{12}b^6}\,.\,\sqrt[72]{a^3}\,.\,\sqrt[72]{a^2b} = \sqrt[72]{2^{18}a^{71}b^7}.$$

§ 113. Op het herleiden der wortels uit veelledige wortelgrootheden is toepasselijk hetgeen in § 58 ten aanzien der wortels uit veelledige vormen in het algemeen gezegd is. Men zal zich bij deze herleidingen met vrucht kunnen bedienen van de in § 102 opgegevene uitkomsten.

Een der meest voorkomende gevallen is de herleiding van den vierkantswortel uit vormen, die de gedaante $A \pm B\sqrt{C}$ hebben, waarin A, B en C vormen beteekenen, waarin geene wortelteekens meer voorkomen. Uit de drie laatste voorbeelden van § 101 blijkt, dat zulke vormen kunnen ontstaan zijn, door ontwikkeling van het product van twee ongelijke factoren; terwijl uit de vier eerste voorbeelden van § 109 blijkt, dat zulke vormen ook de ontwikkelde tweede magt van andere kunnen zijn. In het laatste geval zal dus de vierkantswortel uit zulke vormen kunnen worden voorgesteld, zonder het wortelteeken vóór dezelve te plaatsen. In de aangehaalde voorbeelden is gevonden:

$$(-1+\sqrt{5})^2 = 6-2\sqrt{5};\ (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = 8-2\sqrt{15};$$
$$(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})(2\sqrt{3}-3\sqrt{7}) = 60-13\sqrt{21}.$$

Hieruit volgt, dat men ook hebben zal

$$(\surd(6-2\surd 5) = -1+\surd 5 \quad \text{en} \quad \surd(8-2\surd 15) = \surd 5-\surd 3;$$

maar dat men den vierkantswortel uit $60-13\surd 21$ niet anders, dan door het wortelteeken vóór dien vorm te plaatsen, kan aanduiden.

Onderstelt men nu, dat $A\pm B\surd C$ werkelijk de ontwikkelde tweede magt is van eenen vorm, die eene der gedaanten

$$a\pm\surd b, \; a\pm b\surd c, \; \surd a\pm b\surd c \text{ en } a\surd b\pm c\surd d$$

heeft, dan kan, omdat men voor die vormen ook kan schrijven

$$\surd a^2\pm\surd b, \; \surd a^2\pm\surd b^2c, \; \surd a\pm\surd b^2c, \; \surd a^2b\pm\surd c^2d,$$

in deze onderstelling $A\pm B\surd C$ aangezien worden, als de ontwikkelde tweede magt van den vorm $\surd p\pm\surd q$, waarin p en q grootheden zonder wortelteekens verbeelden. In de onderstelling

$$A\pm B\surd C = (\surd p\pm\surd q)^2 \text{ of } \surd(A\pm B\surd C) = \surd p\pm\surd q,$$

zal dan ook de ontwikkelde tweede magt van $\surd p\pm\surd q$, dat is $p+q\pm 2\surd pq$ den vorm $A\pm B\surd C$ moeten opleveren, en dus

$$p+q = A \quad \text{en} \quad 2\surd pq = B\surd C$$

moeten wezen. Verheft men elk lid van de twee laatste vergelijkingen tot de tweede magt, dan komt er

$$p^2+2pq+q^2 = A^2 \quad \text{en} \quad 4pq = B^2C.$$

Trekt men de tweede vergelijking van de eerste af, dan verkrijgt men

$$p^2-2pq+q^2 = A^2-B^2C,$$

of $\quad (p-q)^2 = A^2-B^2C$

en dus is $\quad p-q = \surd(A^2-B^2C).$

Zullen nu p en q grootheden zonder wortelteekens zijn, dan kan ook hun verschil geene wortelgrootheid wezen, en dus moet, *indien* $\surd(A\pm B\surd C)$ *tot eenen vorm van de gedaante* $\surd p\pm\surd q$ *herleidbaar zal wezen, de vierkantswortel uit* A^2-B^2C *zonder behulp van wortelteeken kunnen worden voorgesteld, en dus, zoo als men zegt,* A^2-B^2C *een volkomen vierkant zijn.*

Daar voorts $\quad p+q = A \quad$ en $\quad p-q = \surd(A^2-B^2C)$

is, vindt men, door optelling en aftrekking dezer vergelijkingen

$$2p = A+\surd(A^2-B^2C) \quad \text{en} \quad 2q = A-\surd(A^2-B^2C),$$

of $\quad p = \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\surd(A^2-B^2C) \quad$ en $\quad q = \frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\surd(A^2-B^2C),$

zoodat men heeft

$$\surd(A\pm B\surd C) = \surd\left\{\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\surd(A^2-B^2C)\right\}\pm\surd\left\{\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\surd(A^2-B^2C)\right\}\ldots(77).$$

Indien men dus eenen vorm van de gedaante $\surd(A\pm B\surd C)$ heeft, moet men eerst onderzoeken, of A^2-B^2C een volkomen vierkant is, en dit zoo zijnde, daarna de formule (77) toepassen.

Zie hier eenige voorbeelden:

1°. $\sqrt{(7-4\sqrt{3})} = \sqrt{\left\{3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(49-48)}\right\}} - \sqrt{\left\{3\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(49-48)}\right\}}$
$= \sqrt{4}-\sqrt{3} = 2-\sqrt{3}$;

2°. $\sqrt{(12+2\sqrt{35})} = \sqrt{\left\{6+\frac{1}{2}\sqrt{(144-140)}\right\}} + \sqrt{\left\{6-\frac{1}{2}\sqrt{(144-140)}\right\}}$
$= \sqrt{7}+\sqrt{5}$;

3°. $\sqrt{(29-4\sqrt{7})} = \sqrt{\left\{14\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(841-112)}\right\}} - \sqrt{\left\{14\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(841-112)}\right\}}$
$= \sqrt{28}-\sqrt{1} = -1+2\sqrt{7}$;

4°. $\sqrt{(16a^2+\frac{1}{4}b^2c+4ab\sqrt{c})} = 4a+\frac{1}{2}b\sqrt{c}$.

Men kan nog opmerken, dat, zoo A^2-B^2C geen volkomen vierkant zijn mogt, de vorm $A\pm B\sqrt{C}$ somtijds kan ontbonden worden in een product $(A'\pm B'\sqrt{C'})\sqrt{D}$, welks eerste factor de eigenschap heeft, dat $A'^2-B'^2C'$ een volkomen vierkant is; in zulk een geval heeft men

$$\sqrt{(A\pm B\sqrt{C})} = \sqrt{[(A'\pm B'\sqrt{C'})\sqrt{D}]} = \sqrt{(A'\pm B'\sqrt{C'})}.\sqrt[4]{D},$$

en dan kan men op den factor $\sqrt{(A'\pm B'\sqrt{C'})}$ de opgegevene herleiding toepassen. Zoo is, bij voorbeeld,

$$\sqrt{(4+3\sqrt{2})} = \sqrt{[(3+2\sqrt{2})\sqrt{2}]} = \sqrt{(3+2\sqrt{2})}\sqrt[4]{2} = (1+\sqrt{2})\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}.$$

§ 114. Wanneer men zich bij eenen bijzonderen vorm overtuigd heeft, dat A^2-B^2C een volkomen vierkant is, kan men, in plaats van de formule (77), die men anders daartoe altijd in het geheugen zou moeten hebben, op dien vorm toe te passen, ten opzigte van dien bijzonderen vorm, de bewerkingen herhalen, die in de vorige § ten aanzien van den algemeenen vorm $A\pm B\sqrt{C}$ verrigt zijn.

Voorbeeld. Te herleiden $\sqrt{[2ab-2\sqrt{(a^2b^2-c^2d^2)}]}$.

Hier is $A^2 = 4a^2b^2$ en $B^2C = 4a^2b^2-4c^2d^2$, dus $A^2-B^2C = 4c^2d^2$; deze laatste vorm een volkomen vierkant zijnde, zoo stelle men

$$\sqrt{[2ab-2\sqrt{(a^2b^2-c^2d^2)}]} = \sqrt{p}-\sqrt{q}.$$

Elk lid dezer vergelijking brenge men in het vierkant, dan komt er

$$2ab-2\sqrt{(a^2b^2-c^2d^2)} = p+q-2\sqrt{pq}.$$

Daarna stelle men

$$p+q = 2ab \quad \text{en} \quad 2\sqrt{pq} = 2\sqrt{(a^2b^2-c^2d^2)}.$$

Elk lid dezer vergelijkingen brenge men weder in het vierkant, dan verkrijgt men

$$p^2+2pq+q^2 = 4a^2b^2 \quad \text{en} \quad 4pq = 4a^2b^2-4c^2d^2.$$

Door deze vergelijkingen van elkander af te trekken, zal men vinden

$$p^2-2pq+q^2 = 4c^2d^2$$

of $\quad (p-q)^2 = 4c^2d^2$,

dus is $\quad p-q = 2cd$;

maar men had $\quad p+q = 2ab$;

door dus de som en het verschil der beide laatste vergelijkingen te nemen, verkrijgt men

$$2p = 2ab+2cd \qquad \text{en} \qquad 2q = 2ab-2cd$$

of $$p = ab+cd \qquad \text{en} \qquad q = ab-cd,$$

zoodat men eindelijk heeft

$$\sqrt{[2ab-2\sqrt{(a^2b^2-c^2d^2)}]} = \sqrt{(ab+cd)}-\sqrt{(ab-cd)},$$

welke laatste uitdrukking nu de herleide vorm is.

§ 115. Overeenkomstig hetgeen in § 58 gezegd is, merke men nog op, dat zoo in den vorm $A \pm B\sqrt{C}$, de grootheid A uit twee termen bestaat, en $B\sqrt{C}$ het dubbele product van de vierkantswortels uit elk dier beide termen mogt zijn, de vierkantswortel uit dien vorm de som of het verschil van de vierkantswortels uit de genoemde termen zal wezen, zoodat in zoodanig geval de herleiding der vorige §§ kan ontweken worden.

In het 4e voorbeeld van § 113, is

$$A = 16a^2+\frac{1}{4}b^2c \qquad \text{en} \qquad B\sqrt{C} = 4ab\sqrt{c}.$$

Daar nu

$$\sqrt{16a^2} = 4a,\ \sqrt{\frac{1}{4}b^2c} = \frac{1}{2}b\sqrt{c} \qquad \text{en} \qquad 2\times 4a\times\frac{1}{2}b\sqrt{c} = 4ab\sqrt{c}$$

is, heeft men

$$16a^2+\frac{1}{4}b^2c+4ab\sqrt{c} = (4a)^2+2\times 4a\times\frac{1}{2}b\sqrt{c}+\left(\frac{1}{2}b\sqrt{c}\right)^2,$$

en dus

$$\sqrt{(16a^2+\frac{1}{4}b^2c+4ab\sqrt{c})} = 4a+\frac{1}{2}b\sqrt{c}.$$

§ 116. De vergelijking (77) blijft, ingevalle A^2-B^2C geen volkomen vierkant mogt zijn, desniettemin doorgaan, hetgeen daaruit blijkt, dat het tweede lid dier vergelijking, in het vierkant gebragt wordende, juist den vorm $A \pm B\sqrt{C}$ oplevert; past men echter deze formule toe op eenen vorm, waarbij A^2-B^2C geen volkomen vierkant is, dan zal men wel tot geene valsche uitkomsten geraken, maar dan zal men, in plaats van den opgegeven' vorm te vereenvoudigen, denzelven zamengestelder maken.

Wilde men, bij voorbeeld, $\sqrt{(6+2\sqrt{3})}$ herleiden, dan zou men, door toepassing der formule (77), verkrijgen:

$$\sqrt{(6+2\sqrt{3})} = \sqrt{[3+\frac{1}{2}\sqrt{(36-12)}]}+\sqrt{[3-\frac{1}{2}\sqrt{(36-12)}]}$$
$$= \sqrt{(3+\sqrt{6})} + \sqrt{(3-\sqrt{6})},$$

en de vorm $\sqrt{(3+\sqrt{6})}+\sqrt{(3-\sqrt{6})}$ is nu klaarblijkelijk zamengestelder dan de opgegevene.

§ 117. Men kan ook altijd wortelgrootheden van de gedaante $\sqrt{(A \pm B\sqrt{C})} \pm \sqrt{(A \mp B\sqrt{C})}$, bestaande uit twee termen, die alleen door het teeken, dat tusschen A en $B\sqrt{C}$ geplaatst is, van elkander verschillen, tot een' enkelen term herleiden, die de gedaante der zamenstellende termen heeft. Hiertoe behoeft men alleen de tweede magt van den gegevenen vorm te ontwikkelen en daarna weder den vierkantswortel uit die ontwikkelde tweede magt te nemen. Wil men, bij voorbeeld, herleiden $\sqrt{(7+2\sqrt{3})}-\sqrt{(7-2\sqrt{3})}$, dan zou men vinden

$$[\sqrt{(7+2\sqrt{3})}-\sqrt{(7-2\sqrt{3})}]^2 = (14-2\sqrt{37}),$$

en dus is $$\sqrt{(7+2\sqrt{3})}-\sqrt{(7-2\sqrt{3})} = \sqrt{(14-2\sqrt{37})}.$$

Deze herleiding is het omgekeerde van die, welke men in de vorige § heeft leeren kennen, zoodat, wanneer men op den verkregenen vorm de formule (77) toepaste, de opgegeven vorm weder te voorschijn zou komen.

Wanneer men vormen op deze wijze herleidt, moet men opletten, dat men bij het nemen van den vierkantswortel uit derzelver ontwikkelde tweede magt het teeken $+$ of $-$ vóór het wortelteeken stelle, naargelang de opgegeven vorm een positief of negatief getal voorstelt. Moest men dus herleiden $\sqrt{(7-2\sqrt{3})}-\sqrt{(7+2\sqrt{3})}$, welke vorm, omdat de eerste term kleiner dan de tweede is, klaarblijkelijk een negatief getal voorstelt, dan zou men, even als boven, hebben

$$[\sqrt{(7-2\sqrt{3})}-\sqrt{(7+2\sqrt{3}]^2} = 14-2\sqrt{37},$$

waaruit nu zou volgen

$$\sqrt{(7-2\sqrt{3})}-\sqrt{(7+2\sqrt{3})} = -\sqrt{(14-2\sqrt{37})}.$$

§ 118. De handelwijze, in de vorige § opgegeven, kan somtijds met vrucht op nog andere vormen worden toegepast, zoo als uit de volgende voorbeelden zal blijken.

Eerste Voorbeeld. Te herleiden $\sqrt{(75+6\sqrt{5})}+\sqrt{(15-6\sqrt{5})}$.

Hier vindt men, door ontwikkeling,

$$[\sqrt{(75+6\sqrt{5})}+\sqrt{(15-6\sqrt{5})}]^2 = 90+6\sqrt{(105-40\sqrt{5})};$$

door toepassing der formule (77), vindt men $\sqrt{(105-40\sqrt{5})} = 4\sqrt{5}-5$; derhalve is

$$[\sqrt{(75+6\sqrt{5})}+\sqrt{(15-6\sqrt{5})}]^2 = 90+6(4\sqrt{5}-5) = 60+24\sqrt{5};$$

en hieruit volgt, omdat de opgegeven vorm een positief getal voorstelt,

$$\sqrt{(75+6\sqrt{5})}+\sqrt{(15-6\sqrt{5})} = \sqrt{(60+24\sqrt{5})} = 2\sqrt{(15+6\sqrt{5})}.$$

Past men, in dit voorbeeld, op de uitkomst de formule (77) toe, dan komt er

$$2\sqrt{(15+6\sqrt{5})} = \sqrt{(30+6\sqrt{5})}+\sqrt{(30-6\sqrt{5})},$$

welke laatste vorm in gedaante van den opgegevenen verschilt, maar toch dezelfde waarde moet hebben. Men heeft dus

$$\sqrt{(75+6\sqrt{5})}+\sqrt{(15-6\sqrt{5})} = \sqrt{(30+6\sqrt{5})}+\sqrt{(30-6\sqrt{5})}.$$

Tweede Voorbeeld. Te herleiden $\sqrt{(15-\sqrt{6}-6\sqrt{2})}-\sqrt{(15+\sqrt{6}+6\sqrt{2})}$.

Door ontwikkeling verkrijgt men

$$[\sqrt{(15-\sqrt{6}-6\sqrt{2})}-\sqrt{(15+\sqrt{6}+6\sqrt{2})}]^2 = 30-2\sqrt{(147-24\sqrt{3})};$$

door de formule (77) vindt men $\sqrt{(147-24\sqrt{3})} = 12-\sqrt{3}$, derhalve is

$$[\sqrt{(15-\sqrt{6}-6\sqrt{2})}-\sqrt{(15+\sqrt{6}+6\sqrt{2})}]^2 = 6+2\sqrt{3};$$

en omdat de opgegeven vorm klaarblijkelijk een negatief getal beteekent, volgt hieruit

$$\sqrt{(15-\sqrt{6}-6\sqrt{2})}-\sqrt{(15+\sqrt{6}+6\sqrt{2})} = -\sqrt{(6+2\sqrt{3})}.$$

Derde Voorbeeld. Te herleiden $\sqrt{[4+\sqrt{(3+4\sqrt{3})}]}-\sqrt{[4-\sqrt{(3+4\sqrt{3})}]}$.
Hier wordt

$$\left\{\sqrt{[4+\sqrt{(3+4\sqrt{3})}]}-\sqrt{[4-\sqrt{(3+4\sqrt{3})}]}\right\}^2 = 8-2\sqrt{(13-4\sqrt{3})},$$

of, omdat $\sqrt{(13-4\sqrt{3})} = 2\sqrt{3}-1$ is,

$$\left\{\sqrt{[4+\sqrt{(3+4\sqrt{3})}]}-\sqrt{[4-\sqrt{(3+4\sqrt{3})}]}\right\}^2 = 10-4\sqrt{3}.$$

en bij gevolg

$$\sqrt{[4+\sqrt{(3+4\sqrt{3})}]}-\sqrt{[4-\sqrt{(3+4\sqrt{3})}]} = +\sqrt{(10-4\sqrt{3})}.$$

OVER DE GEBROKENE EN NEGATIEVE EXPONENTEN.

§ 119. In al hetgeen tot hiertoe is voorgedragen, stelden de exponenten altijd geheele positieve getallen voor, daar zij niets anders beteekenden, dan het getal, dat aanwees, uit hoeveel gelijke factoren een product bestond. Wanneer men zich een' exponent als een gebroken of als een negatief getal wil voorstellen, gaat deze oorspronkelijke beteekenis verloren, dewijl toch nimmer het aantal factoren, waaruit een product bestaat, een gebroken of negatief getal kan wezen. Om na te gaan, wat derhalve de beteekenis van eenen gebrokenen of negatieven exponent zijn kan, moet men opmerken, dat, even als in de cijferkunst de gebrokens, en volgens § 14 de negatieve getallen, ontstaan zijn uit deelingen en aftrekkingen, die niet in den eigenlijken zin konden plaats hebben, zoo ook de gebrokene en negatieve exponenten alleen kunnen voortkomen, door exponenten aan deelingen en aftrekkingen te onderwerpen, die niet in den eigenlijken zin kunnen worden uitgevoerd.

§ 120. De eenige bewerking, waarbij het is te pas gekomen, om een' exponent door eenig getal te deelen, is begrepen in de vroeger bewezene formule (46). Een gebroken exponent kan dus alleen ontstaan zijn, door die formule, $\sqrt[p]{a^{pq}}=a^q$, welke onderstelt, dat de exponent pq door het getal p deelbaar is, en ook slechts in die onderstelling is bewezen, toe te passen, ingevalle die deelbaarheid niet plaats heeft; hieruit volgt, dat $a^{\frac{q}{p}}$ niet anders beteekenen kan, dan $\sqrt[p]{a^q}$, en men heeft dus

$$a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78).$$

Men kan alzoo het gebruik der gebrokene exponenten aanzien, als eene nieuwe schrijfwijze, om wortels voor te stellen, die gegrond is, op eene uitbreiding der formule (46). Deze schrijfwijze stemt overeen met de bewezene vergelijking (51); want op beide leden dezer vergelijking die schrijfwijze toepassende, heeft men $a^{\frac{nq}{np}} = a^{\frac{q}{p}}$.

§ 121. De eenige bewerking, waarbij het is tepas gekomen, een getal van een' exponent af te trekken, is begrepen in de vroeger bewezene formule (24). Een negatieve exponent kan dus alleen ontstaan zijn, door die formule, $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, welke onderstelt, dat $p>q$ is, en ook slechts in die onderstelling is bewezen, toe te passen, ingevalle $p<q$ is. Is $q-p = s$, dan is $p-q = -s$, en dus, door toepassing der formule, $\frac{a}{a^q} = a^{p-q} = a^{-s}$. Deelt men echter teller en noemer van het gebroken $\frac{a^p}{a^q}$ door a^p, dan verkrijgt men $\frac{a^p}{a^q} = \frac{1}{a^{q-p}} = \frac{1}{a^s}$. Men heeft derhalve

$$a^{-s} = \frac{1}{a^s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (79).$$

Men kan alzoo het gebruik der negatieve exponenten aanzien, als eene nieuwe schrijfwijze, om gebrokens voor te stellen, die op eene uitbreiding der formule (24) gegrond is. Door deze uitbreiding aan die formule te geven, wordt dezelve ook toepasselijk op het geval, dat $p=q$ is; hieruit volgt dan $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0$; daar echter ook $\frac{a^p}{a^p} = 1$ is, heeft men

$$a^0 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (80).$$

Omdat in deze laatste formule a elk willekeurig getal, of elken willekeurigen stelkunstigen vorm kan voorstellen, zoo leert zij, dat de 0de magt van elke grootheid gelijk 1 is, zoodat men zelfs hebben zal $0^0 = 1$.

§ 122. Een negatieve gebroken exponent kan niet anders zijn voortgekomen, dan door de uitbreidingen, die, volgens de beide vorige §§, aan elk der formulen (46) en (24) gegeven zijn, achtervolgens toe te passen. Heeft men dus $a^{-\frac{p}{q}}$, dan moet deze uitdrukking ontstaan zijn, door eerst de formule (78) en vervolgens (79), of ook, door eerst (79) en vervolgens (78) toe te passen. Men kan alzoo de beteekenis van $a^{-\frac{p}{q}}$ vinden, door diezelfde bewerkingen om te keeren, waardoor men zal verkrijgen

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[q]{\frac{1}{a^p}}$$

of

$$a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{-p}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}} = \sqrt[q]{\frac{1}{a^p}}.$$

§ 123. Door het gebruik van gebrokene en negatieve exponenten, kan men alle wortelgrootheden en gebrokens in de gedaante van geheele vormen, zonder wortelteekens schrijven. Uit de volgende voorbeelden zal men zien, hoe zulks, door toepassing van hetgeen in de drie vorige §§ gezegd is, kan geschieden.

1°. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; $\quad 2\sqrt[5]{3a^4b^3c} = 2.3^{\frac{1}{5}}a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{3}{5}}c^{\frac{1}{5}}$;

2°. $\frac{a}{b} = ab^{-1}$; $\quad \frac{2a^3b^2c}{3(a^2-b^2)} = 2a^3b^2c.3^{-1}(a^2-b^2)^{-1}$;

3°. $\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a}{b^{\frac{2}{3}}} = ab^{-\frac{2}{3}}$; $\frac{\sqrt[3]{(a+b)}}{(a-b)\sqrt{(a-b)}} = \frac{\sqrt[3]{(a+b)}}{\sqrt{(a-b)^3}} = \frac{(a+b)^{\frac{1}{3}}}{(a-b)^{\frac{3}{2}}} = (a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{-\frac{3}{2}}$.

§ 124. Reeds in § 119 is gezegd, dat wanneer men zich een' gebroken of negatieven exponent voorstelt, de oorspronkelijke beteekenis van magten verloren gaat; het is uit dien hoofde, dat men grootheden, waarbij gebrokene of negatieve exponenten staan, *oneigenlijke magten* noemt. De uitdrukking a^0 behoort mede tot de oneigenlijke magten, en de overige worden, naargelang van derzelver exponenten, gebrokene, negatieve, en negatieve gebrokene magten genoemd. Om de beteekenis van zulke oneigenlijke magten te verklaren, moet men altijd terugkeeren tot de wortelgrootheden of gebrokens, waaruit zij kunnen zijn voortgekomen.

De volgende voorbeelden kunnen strekken, om zich in het verklaren dezer beteekenis te oefenen:

1°. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $2^{-1} = \frac{1}{2}$; $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\frac{3^{-\frac{2}{3}}}{4^{-\frac{1}{2}}} = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$;

2°. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^{-\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$; $a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$;

3°. $(a+b)^{\frac{1}{2}}(a-b)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$;

$$(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})^3} = (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})\sqrt{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})}.$$

§ 125. Het nut, dat men van het gebruik der gebrokene en negatieve exponenten trekken kan, steunt alleen daarop, dat dezelfde regels, die vroeger zijn bewezen geworden, ingevalle de exponenten geheele positieve getallen waren, ook doorgaan voor gebrokene en negatieve exponenten. Zie hier het bewijs voor de voornaamste dezer regels.

Laat r, s, t, u geheele positieve getallen voorstellen, dan zijn $-r$, $-s$, $-t$, $-u$ geheele negatieve getallen, $\frac{r}{s}$, $\frac{t}{u}$ positieve en $-\frac{r}{s}$, $-\frac{t}{u}$ negatieve gebrokens. Volgens het vroeger geleerde, heeft men dan

$$a^{\frac{r}{s}} \times a^{\frac{t}{u}} = \sqrt[s]{a^r} \times \sqrt[u]{a^t} = \sqrt[su]{a^{ru}} \times \sqrt[su]{a^{st}} = \sqrt[su]{a^{ru+st}} = a^{\frac{ru+st}{su}} = a^{\frac{r}{s}+\frac{t}{u}}.$$

Hierdoor is de formule (13) voor gebrokene exponenten bewezen.

Gelijkerwijze heeft men

$$a^{-r}\times a^{-s} = \frac{1}{a^r}\times\frac{1}{a^s} = \frac{1}{a^{r+s}} = a^{-(r+s)} = a^{-r-s}.$$

Hierdoor is de formule (13) voor negatieve exponenten bewezen.

Zoo is ook

$$a^{-\frac{r}{s}}\times a^{-\frac{t}{u}} = \frac{1}{\sqrt[s]{a^r}}\times\frac{1}{\sqrt[u]{a^t}} = \frac{1}{\sqrt[su]{a^{ru}}}\times\frac{1}{\sqrt[su]{a^{st}}} = \frac{1}{\sqrt[su]{a^{ru+st}}}$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{ru+st}{su}}} = a^{-\frac{ru+st}{su}} = a^{-\frac{r}{s}-\frac{t}{u}},$$

waardoor dezelfde formule (13) bewezen is voor negatieve gebrokene exponenten.

Om de overige regels, die ten aanzien van geheele positieve exponenten bewezen zijn, ook voor gebrokene en negatieve exponenten te bewijzen, kan men op dezelfde wijze te werk gaan. Men heeft namelijk:

Voor de formule (24),

$$\frac{a^{\frac{r}{s}}}{a^{\frac{t}{u}}} = \frac{\sqrt[s]{a^r}}{\sqrt[u]{a^t}} = \frac{\sqrt[su]{a^{ru}}}{\sqrt[su]{a^{st}}} = \sqrt[su]{\frac{a^{ru}}{a^{st}}} = \sqrt[su]{a^{ru-st}} = a^{\frac{ru-st}{su}} = a^{\frac{r}{s}-\frac{t}{u}};$$

$$\frac{a^{-r}}{a^{-s}} = \frac{\frac{1}{a^r}}{\frac{1}{a^s}} = \frac{a^s}{a^r} = a^{s-r} = a^{-r-(-s)};$$

$$\frac{a^{-\frac{r}{s}}}{a^{-\frac{t}{u}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt[s]{a^r}}}{\frac{1}{\sqrt[u]{a^t}}} = \frac{\sqrt[u]{a^t}}{\sqrt[s]{a^r}} = \frac{\sqrt[su]{a^{st}}}{\sqrt[su]{a^{ru}}} = \sqrt[su]{\frac{a^{st}}{a^{ru}}} = \sqrt[su]{a^{st-ru}}$$

$$= a^{\frac{st-ru}{su}} = a^{\frac{t}{u}-\frac{r}{s}} = a^{-\frac{r}{s}-\left(-\frac{t}{u}\right)}.$$

Voor de formule (32),

$$\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{t}{u}} = \sqrt[u]{\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^t} = \sqrt[u]{\left(\sqrt[s]{a^r}\right)^t} = \sqrt[u]{\left(\sqrt[s]{a^{rt}}\right)} = \sqrt[su]{a^{rt}} = a^{\frac{rt}{su}} = a^{\frac{r}{s}\times\frac{t}{u}};$$

$$\left(a^{-r}\right)^{-s} = \left(\frac{1}{a^r}\right)^{-s} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^r}\right)^s} = \frac{1}{\frac{1}{a^{rs}}} = a^{rs} = a^{-r\times -s};$$

$$\left(a^{-\frac{r}{s}}\right)^{-\frac{t}{u}} = \sqrt[u]{\frac{1}{\left(a^{-\frac{r}{s}}\right)^t}} = \sqrt[u]{\frac{1}{\left(\sqrt[s]{\frac{1}{a^r}}\right)^t}} = \sqrt[u]{\frac{1}{\sqrt[s]{\frac{1}{a^{rt}}}}} = \sqrt[u]{\left\{\sqrt[s]{\frac{1}{\frac{1}{a^{rt}}}}\right\}}$$

$$= \sqrt[u]{\left(\sqrt[s]{a^{rt}}\right)} = \sqrt[su]{a^{rt}} = a^{\frac{rt}{su}} = a^{\frac{r}{s}\times\frac{t}{u}} = a^{-\frac{r}{s}\times -\frac{t}{u}}.$$

Voor de formule (33),

$$(abcd)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{(abcd)^r} = \sqrt[s]{a^r b^r c^r d^r} = \sqrt[s]{a^r}.\sqrt[s]{b^r}.\sqrt[s]{c^r}.\sqrt[s]{d^r} = a^{\frac{r}{s}} b^{\frac{r}{s}} c^{\frac{r}{s}} d^{\frac{r}{s}};$$

$$(abcd)^{-r} = \frac{1}{(abcd)^r} = \frac{1}{a^r b^r c^r d^r} = \frac{1}{a^r}.\frac{1}{b^r}.\frac{1}{c^r}.\frac{1}{d^r} = a^{-r} b^{-r} c^{-r} d^{-r};$$

$$(abcd)^{-\frac{r}{s}} = \frac{1}{\sqrt[s]{(abcd)^r}} = \frac{1}{\sqrt[s]{a^r b^r c^r d^r}} = \frac{1}{a^{\frac{r}{s}} b^{\frac{r}{s}} c^{\frac{r}{s}} d^{\frac{r}{s}}} = \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}.\frac{1}{b^{\frac{r}{s}}}.\frac{1}{c^{\frac{r}{s}}}.\frac{1}{d^{\frac{r}{s}}}$$

$$= a^{-\frac{r}{s}} b^{-\frac{r}{s}} c^{-\frac{r}{s}} d^{-\frac{r}{s}}.$$

Voor de formule (46),

$$\sqrt[r]{a^{\frac{t}{u}}} = \sqrt[r]{(\sqrt[u]{a^t})} = \sqrt[ru]{a^t} = a^{\frac{t}{ru}} = a^{\frac{t}{u}:r};$$

$$\sqrt[r]{a^{-s}} = \sqrt[r]{\frac{1}{a^s}} = \frac{1}{a^{\frac{s}{r}}} = a^{-\frac{s}{r}};$$

$$\sqrt[r]{a^{-\frac{t}{u}}} = \sqrt[r]{\frac{1}{a^{\frac{t}{u}}}} = \sqrt[r]{\left\{\sqrt[u]{\frac{1}{a^t}}\right\}} = \sqrt[ru]{\frac{1}{a^t}} = \frac{1}{a^{\frac{t}{ru}}} = a^{-\frac{t}{ru}} = a^{-\frac{t}{u}:r}.$$

Voor de formulen (47), (50), (51), (64) en (74) zal de lezer, de bovenstaande bewijzen tot voorbeeld nemende, gemakkelijk zelf het bewijs kunnen opmaken.

§ 126. Daar in de vorige § is gebleken, dat de gebrokene en negatieve exponenten aan dezelfde regels, als de geheele positieve, onderworpen zijn, kan de toepassing dier regels doorgaans met vrucht aangewend worden tot het herleiden van wortelgrootheden. Om te doen zien, hoe men zich hierbij te gedragen hebbe, zal het geschiktst zijn, eenige herleidingen, die vroeger, door de regels voor het herleiden van wortels en wortelgrootheden gegeven, zijn bewerkstelligd, andermaal door behulp van gebrokene en negatieve exponenten te verrigten. Zie hier een aantal voorbeelden van dergelijke herleidingen:

1°. $\sqrt{16a^4b^2c^6} = (2^4a^4b^2c^6)^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{1}{2}}.(a^4)^{\frac{1}{2}}.(b^2)^{\frac{1}{2}}.(c^6)^{\frac{1}{2}} = 2^2a^2bc^3 = 4a^2bc^3;$

2°. $\sqrt[3]{81x^3y^4z^7} = (3^4x^3y^4z^7)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{3}}xy^{\frac{4}{3}}z^{\frac{7}{3}} = 3^{1+\frac{1}{3}}xy^{1+\frac{1}{3}}z^{2+\frac{1}{3}}$

$= 3.3^{\frac{1}{3}}xyy^{\frac{1}{3}}z^2z^{\frac{1}{3}} = 3xyz^2.3^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} = 3xyz^2(3yz)^{\frac{1}{3}} = 3xyz^2\sqrt[3]{3yz};$

3°. $2a^2b^2\sqrt{2b} = 2a^2b^2(2b)^{\frac{1}{2}} = 2a^2b^22^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{5}{2}} = (2^3a^4b^5)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2^3a^4b^5} = \sqrt{8a^4b^5};$

4°. $\sqrt[4]{4a^2b^6} = (2^2a^2b^6)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}}a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}bb^{\frac{1}{2}} = b.2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

$= b(2ab)^{\frac{1}{2}} = b\sqrt{2ab};$

$$5^0.\quad \sqrt{\frac{49a^2b^4}{64c^6d^{10}}} = \left\{\frac{7^2a^2b^4}{8^2c^6d^{10}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{(7^2a^2b^4)^{\frac{1}{2}}}{(8^2c^6d^{10})^{\frac{1}{2}}} = \frac{7ab^2}{8c^3d^5};$$

$$6^0.\quad \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2}} = \left(a^2b^{-2}\right)^{\frac{1}{4}} = (a^2)^{\frac{1}{4}}\left(b^{-2}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}b^{-1} = b^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab};$$

$$7^0.\quad \sqrt[3]{3a^2b}\times\sqrt[3]{-6ac^2}\times\sqrt[3]{3b^2c} = (3a^2b)^{\frac{1}{3}}.(-1)^{\frac{1}{3}}.(6ac^2)^{\frac{1}{3}}.(3b^2c)^{\frac{1}{3}}$$

$$= -(3a^2b.6ac^2.3b^2c)^{\frac{1}{3}} = -(2.3^3a^3b^3c^3)^{\frac{1}{3}} = -(2)^{\frac{1}{3}}.3abc = -3abc\sqrt[3]{2};$$

$$8^0.\quad \sqrt{2ab}\times\sqrt[3]{4b^2c}\times\sqrt[4]{3a^3c} = 2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}2^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{4}}a^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}3^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} =$$

$$2^{\frac{7}{6}}.3^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{7}{6}}c^{\frac{7}{12}} = 2ab.2^{\frac{1}{6}}3^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{7}{12}} = 2ab.2^{\frac{2}{12}}3^{\frac{3}{12}}a^{\frac{3}{12}}b^{\frac{2}{12}}c^{\frac{7}{12}} = 2ab\sqrt[12]{2^23^3a^3b^2c^7};$$

$$9^0.\quad \sqrt{\frac{2a}{3b}}\times\sqrt[3]{\frac{9b^2}{4a^2}} = 2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}2^{-\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{1}{6}}3^{\frac{1}{6}}a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\frac{3b}{2a}};$$

$$10^0.\quad \frac{a\sqrt{(a-b)}}{b\sqrt[4]{(a^2-b^2)}} = a(a-b)^{\frac{1}{2}}.b^{-1}(a^2-b^2)^{-\frac{1}{4}} = a(a-b)^{\frac{1}{2}}b^{-1}(a-b)^{-\frac{1}{4}}(a+b)^{-\frac{1}{4}}$$

$$= ab^{-1}(a-b)^{\frac{1}{4}}(a+b)^{-\frac{1}{4}} = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{a-b}{a+b}};$$

$$11^0.\quad \frac{c}{b\sqrt{a}} = cb^{-1}a^{-\frac{1}{2}} = cb^{-1}a^{\frac{1}{2}-1} = ca^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{-1} = ca^{\frac{1}{2}}(ab)^{-1} = \frac{c}{ab}\sqrt{a};$$

$$12^0.\quad (3ab\sqrt{2ac})^3 = \left(3ab.2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 3^3a^3b^32^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}} = 2.3^3a^4b^3c.2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} =$$
$$= 54a^4b^3c\sqrt{2ac};$$

$$13^0.\quad \sqrt[3]{(3a\sqrt[4]{2ab})^3} = \sqrt[3]{\left(3a.2^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\right)} = \sqrt[3]{\left(3.2^{\frac{1}{4}}a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{3}{4}}\right)} = 3^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{12}}a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{1}{4}}$$

$$= 3^{\frac{4}{12}}2^{\frac{1}{12}}a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{3^4.2a^5b^3} = \sqrt[12]{162a^5b^3};$$

$$14^0.\quad \sqrt[4]{2a\sqrt[3]{2a})} = \left\{2a(2a)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{4}} = \left\{(2a)^{\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{1}{4}} = (2a)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2a};$$

$$15^0.\quad \sqrt[3]{(2a\sqrt{(3b(\sqrt[4]{ab}))})} = (2a(3b(ab)^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (2a(3a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (2.3^{\frac{1}{2}}a^{\frac{9}{8}}b^{\frac{5}{8}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{6}}a^{\frac{3}{8}}b^{\frac{5}{24}} = 2^{\frac{8}{24}}3^{\frac{4}{24}}a^{\frac{9}{24}}b^{\frac{5}{24}} = \sqrt[24]{2^8.3^4a^9b^5};$$

$$16^0.\quad \sqrt[4]{(2a^3\sqrt[3]{(a^2b\sqrt{(a\sqrt[3]{a^2b})})})} = 2^{\frac{1}{4}}a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{12}}a^{\frac{1}{24}}a^{\frac{1}{36}}b^{\frac{1}{72}} = 2^{\frac{18}{72}}a^{\frac{54}{72}}a^{\frac{12}{72}}b^{\frac{6}{72}}a^{\frac{3}{72}}a^{\frac{2}{72}}b^{\frac{1}{72}}$$

$$= 2^{\frac{18}{72}}a^{\frac{71}{72}}b^{\frac{7}{72}} = \sqrt[72]{2^{18}a^{71}b^7}.$$

Ingevalle men deze wijze van herleiding wil toepassen op onbestaanbare worteluitdrukkingen, zal men dezelfde voorzorgen moeten gebruiken, die vroeger zijn aanbevolen geworden, waartoe men slechts in het oog zal dienen te houden, dat gebrokene exponenten niets anders zijn, dan eene andere schrijfwijze om wortels voor te stellen. Voorts is het van belang, op te merken, dat, wanneer de noemer van een gebroken exponent een even getal is, de uitdrukkingen $(-a)^{\frac{1}{2n}}$ en $-a^{\frac{1}{2n}}$ niet met elkander mogen verwisseld worden, omdat, $(-a)^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{-a}$ en $-a^{\frac{1}{2n}} = -\sqrt[2n]{a}$ zijnde, volgens (49), de eene dezer uitdrukkingen bestaanbaar en de andere onbestaanbaar is. Is echter de noemer van een' gebroken' exponent een oneven getal, dan hebben $(-a)^{\frac{1}{2n+1}}$ en $-a^{\frac{1}{2n+1}}$, omdat $(-a)^{\frac{1}{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{-a}$ en $-a^{\frac{1}{2n+1}} = -\sqrt[2n+1]{a}$ is, volgens (48) dezelfde beteekenis. Zoo mag b. v. voor $(-a)^{\frac{1}{2}}$ niet $-a^{\frac{1}{2}}$, maar voor $(-a)^{\frac{1}{3}}$ wel $-a^{\frac{1}{3}}$ geschreven worden.

§ 127. In § 95 is gezegd, dat, wanneer eenledige grootheden ongelijksoortig zijn, derzelver som of verschil niet anders, dan door het teeken $+$ of $-$ tusschen dezelve te plaatsen, kan worden voorgesteld. Daar nu elke eenledige wortelgrootheid in de gedaante van eene gebrokene magt kan worden geschreven, zoo volgt hieruit, dat, wanneer ongelijksoortige grootheden gebrokene exponenten bij zich hebben, derzelver som of verschil almede niet eenvoudiger zal kunnen worden voorgesteld, al ware het dan ook, dat die gebrokene exponenten gemeenschappelijke factoren hadden, of zelfs gelijk waren. Men zou dus grovelijk dwalen, indien men, bij voorbeeld, $a^{\frac{2}{5}} + b^{\frac{4}{5}}$ door $(a+b^2)^{\frac{2}{5}}$ of $p^{\frac{3}{4}} - q^{\frac{3}{4}}$ door $(p-q)^{\frac{3}{4}}$ wilde vervangen. Het op deze wijze buiten haakjes brengen van exponenten mag alleen dan geschieden, wanneer gebrokene magten met elkander vermenigvuldigd zijn, en steunt dan op de vergelijkingen (32) en (33), die in § 125 mede voor gebrokene of negatieve exponenten bewezen zijn. Zoo is, bij voorbeeld, $a^{\frac{2}{5}} \times b^{\frac{4}{5}} = (ab^2)^{\frac{2}{5}}$ en $p^{\frac{3}{4}} \times q^{\frac{3}{4}} = (pq)^{\frac{3}{4}}$.

Zijn echter grootheden, die gebrokene of negatieve exponenten bij zich hebben, ten opzigte van zekeren factor gelijksoortig, dan kan derzelver som of verschil vereenvoudigd worden, door dien factor buiten haakjes te brengen. Zie hier eenige voorbeelden:

$$1^{\circ}.\quad a^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{4}{5}}=a^{\frac{2}{5}}(1+a^{\frac{2}{5}})=a(a^{-\frac{3}{5}}+a^{-\frac{1}{5}})=a^{-\frac{1}{5}}(a^{\frac{3}{5}}+a)=a^{-\frac{3}{5}}(a+a^{\frac{7}{5}});$$

$$2^{\circ}.\quad (xy^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}y)^{\frac{1}{2}}=\left[x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})\right]^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}};$$

$$3^{\circ}.\quad (2x^2-2rx)^{\frac{1}{2}}=(2x)^{\frac{1}{2}}(x-r)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(x-r)^{\frac{1}{2}};$$

$$4^{\circ}.\quad (q^2+p^2)^{\frac{3}{2}}=\left\{q^2\left(1+\left(\frac{p}{q}\right)^2\right)\right\}^{\frac{3}{2}}=(q^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\left(\frac{p}{q}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}=q^3\left(1+\left(\frac{p}{q}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}};$$

$$5^{\circ}.\quad e^{x}+1+e^{-x}=e^{x}(1+e^{-x}+e^{-2x})=e^{-x}(e^{2x}+e^{x}+1).$$

Het is klaar, dat men deze wijze van herleiding zal kunnen omkeeren, ten einde eenen factor, die buiten haakjes staat, binnen dezelve te brengen. In de zoo even gegevene voorbeelden, behoeft men de leden der vergelijkingen slechts te verplaatsen, om even zoo vele voorbeelden van deze omgekeerde handelwijze te verkrijgen.

§ 128. Het binomium van Newton, in § 53 opgegeven, voor negatieve waarden van n toegepast wordende, verschaft het middel, om de ontwikkeling van quotienten of gebrokens in oneindig voortloopende reeksen op eene andere wijze, dan in § 92 en 93 te verkrijgen. Zoo is, bij voorbeeld, $\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$; stelt men nu in de formule (39) $a=1$, $b=x$ en $n=-1$, dan zal men, het benedenste teeken gebruikende, verkrijgen:

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+ \textit{enz.}$$

en dus is ook

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+ \textit{enz.}$$

Op dezelfde wijze, zal men vinden

$$\frac{1}{1+2x+x^2}=\frac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+ \textit{enz.}$$

In de hier gegevene voorbeelden, hadden de gebrokens de eenheid tot teller; mogt dit het geval niet zijn, dan zou men het gebroken kunnen ontbinden in twee factoren, waarvan de eene de teller en de andere een gebroken is, dat de eenheid tot teller heeft, welk laatste op de bovenverklaarde wijze ontwikkeld zijnde, dan met dien teller zal moeten vermenigvuldigd worden.

§ 129. Door dezelfde formule (39) voor gebrokene waarden van n toe te passen, kan men de wortels uit tweeledige grootheden almede in oneindig voortloopende reeksen ontwikkelen. Zoo is, bij voorbeeld:

$$\sqrt[3]{(p+q)}=(p+q)^{\frac{1}{3}}=p^{\frac{1}{3}}\left\{1+\frac{q}{p}\right\}^{\frac{1}{3}}=p^{\frac{1}{3}}\left\{1+\frac{1}{3}\frac{q}{p}-\frac{1}{9}\frac{q^2}{p^2}+\frac{5}{81}\frac{q^3}{p^3}-\textit{enz.}\right\}$$

of ook

$$\sqrt[3]{(p+q)}=(q+p)^{\frac{1}{3}}=q^{\frac{1}{3}}\left\{1+\frac{p}{q}\right\}^{\frac{1}{3}}=q^{\frac{1}{3}}\left\{1+\frac{1}{3}\frac{p}{q}-\frac{1}{9}\frac{p^2}{q^2}+\frac{5}{81}\frac{p^3}{q^3}-\textit{enz.}\right\},$$

van welke reeksen de eene convergeert, wanneer de andere divergeert.

ALGEMEENE AANMERKING OMTRENT DE HERLEIDING DER STELKUNSTIGE VORMEN.

§ 130. Blijkens hetgeen tot hiertoe verhandeld is, bestaat het herleiden van eenen stelkunstigen vorm altijd daarin, dat men op eene andere wijze uitdrukt, hoe de waarde van dien vorm kan berekend worden. Heeft men dus een' gegeven' vorm tot een' vorm van eene andere gedaante herleid, en neemt men in deze beide vormen voor de letters, die er in voorkomen, willekeurige getallen, mits voor eene zelfde letter ook hetzelfde getal, dan zal men, de waarde van die vormen berekenende, daarvoor een zelfde getal moeten verkrijgen. Deze eigenschap noemt men de *identiteit* der beide vormen. Hieruit vloeit een gemakkelijk middel voort, om te onderzoeken, of men, bij het herleiden van vormen, ook fouten gemaakt heeft. Men stelle namelijk in den oorspronkelijken en in den, door herleiding verkregenen, vorm voor de letters gemakshalve kleine getallen, en berekene dan de waarde, die de beide vormen hierdoor verkrijgen; vindt men dan voor beide niet dezelfde waarde, dan kan men zeker zijn, zich in het herleiden ergens vergist te hebben; vindt men voor beide wel dezelfde waarde, dan wordt het zeer waarschijnlijk, dat men geene fouten gemaakt heeft. De volkomene zekerheid, van zich niet vergist te hebben, wordt door deze beproeving niet opgeleverd, omdat twee vormen, waarvan de eene niet tot den anderen herleidbaar is, voor dezelfde getallenwaarden van dezelfde letters, toevalligerwijze dezelfde waarden zouden kunnen verkrijgen; de genoemde waarschijnlijkheid wordt echter zeer verhoogd, en bijna tot zekerheid gebragt, indien men, zulk eene beproeving met andere getallen herhalende, op nieuw onderling gelijke waarden voor de beide vormen verkrijgt.

Had men, bij voorbeeld, het product $(a+2b)(2a-b)$ ontwikkeld, en daarvoor verkregen $2a^2+4ab-3b^2$, hetgeen blijkbaar fout is, en stelde men nu, om de juistheid der herleiding te beproeven, $a=1$ en $b=1$, dan zou men toch hebben

$$(a+2b)(2a-b)=3 \qquad \text{en} \qquad 2a^2+4ab-3b^2=3\,;$$

door het nemen van $a=1$ en $b=1$, zou dus de fout niet aan den dag komen. Neemt men echter $a=2$ en $b=1$, dan vindt men

$$(a+2b)(2a-b)=0 \qquad \text{en} \qquad 2a^2+4ab-3b^2=13,$$

waardoor men de zekerheid verkrijgt, dat er een misslag begaan is.

Overigens moet men opmerken, dat tot het herleiden van stelkunstige vormen al de tot hiertoe gegevene regels kunnen te pas komen, en dat het dus van het grootste belang is, zich al die regels eigen te maken. Om eenen stelkunstigen vorm tot de eenvoudigste, of tot eene bepaalde, gedaante te herleiden, zal men doorgaans van verscheidene regels achtervolgens moeten gebruik maken; men heeft dikwijls de volgorde, waarin die regels moeten worden aangewend, in zijne keuze; eene gelukkige keuze daaromtrent zal veel toebrengen, om gemakkelijker tot de begeerde herleiding te geraken; in het algemeen, is het daarbij verkiesselijk, geene magten of producten te ontwikkelen, zonder dat men vooruit ziet, dat zulks eene wezenlijke vereenvoudiging der vormen zal te weeg brengen; en het is alleen door veel oefening, dat men de noodige vaardigheid kan verkrijgen, niet alleen om de herleidingen spoedig uit te voeren, maar ook om te leeren inzien, hoe men het voorgestelde doel op de gemakkelijkste wijze zal bereiken.

Welke herleiding men echter eenen vorm moge doen ondergaan, en hoe gering die herleiding ook zijn moge, zal men, ter voorkoming van misslagen, wel doen, met zich zelven telkens af te vragen, op welke der bewezene formulen of eigenschappen die herleiding steunt. Tot het geven van een gemakkelijk overzigt, zijn hier de voornaamste die formulen bij elkander geplaatst.

Optelling en Aftrekking.

$$ax+bx-cx = (a+b-c)x\,;$$
$$(a+b)+(c+d-e)+(f-g-h) = a+b+c+d-e+f-g-h\,;$$
$$\mathrm{A}-(p+q-r+s-t-u) = \mathrm{A}-p-q+r-s+t+u\,;$$
$$\mathrm{A}+(p-q) = \mathrm{A}-(q-p)\,; \qquad \mathrm{A}+(-a) = \mathrm{A}-a\,; \qquad \mathrm{A}+a = \mathrm{A}-(-a)\,;$$
$$-(a+b+\text{ enz. } -a'-b'-\text{ enz.}) = -a-b-\text{ enz. } +a'+b'+\text{ enz.}$$

Vermenigvuldiging.

$$a^p\times a^q = a^{p+q}\,; \qquad a^p\times a^q\times a^r = a^{p+q+r}\,;$$
$$(a+b+c+\text{ enz.})p = ap+bp+cp+\text{ enz.}\,;$$
$$(a+b+c+\text{ enz.})(p+q+r+\text{ enz.}) =$$
$$= ap+aq+ar+bp+bq+br+cp+cq+cr+\text{ enz.}\,;$$
$$+a\times+b = +ab\,;\ -a\times+b = -ab\,;\ +a\times-b = -ab\,;\ -a\times-b = +ab\,;$$
$$-a\times-b = +a\times+b\,; \qquad +a\times-b = -a\times+b = -(+a\times+b)\,;$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2\,; \qquad (x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab\,;$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3\,; \quad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3.$$

Magtsverheffing.

$$(a^p)^q = a^{pq}\,; \qquad (abcd\,..\,\text{enz.})^n = a^nb^nc^nd^n\,..\,\text{enz.}\,;$$
$$(\pm a)^{2n} = +a^{2n}\,; \qquad (\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1}\,;$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\,; \qquad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2\,;$$
$$(a\pm b)^3 = a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3\,;$$
$$(a\pm b)^4 = a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4\,;$$
$$(a\pm b)^n = a^n\pm\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}b^2\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-3}b^3+\text{ enz.}$$

Deeling en Gebrokens.

$$\frac{ab}{a}=b;\quad \frac{a^p}{a^q}=a^{p-q};\quad a^0=1;\quad a^{-s}=\frac{1}{a^s};$$

$$\frac{+ab}{+a}=b;\quad \frac{-ab}{-a}=b;\quad \frac{-ab}{+a}=-b;\quad \frac{+ab}{-a}=-b;$$

$$\frac{an}{bn}=\frac{a}{b};\quad \frac{-p}{-q}=\frac{p}{q};\quad \frac{-p}{q}=\frac{p}{-q}=-\frac{p}{q};$$

$$\frac{a+b-c-d}{p}=\frac{a}{p}+\frac{b}{p}-\frac{c}{p}-\frac{d}{p};$$

$$\frac{a+b-c-d}{-p}=-\frac{a}{p}-\frac{b}{p}+\frac{c}{p}+\frac{d}{p};$$

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\text{enz.}\ldots+y^{n-1};$$

$$\frac{x^{2n+1}+y^{2n+1}}{x+y}=x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\text{enz.}\ldots+y^{2n};$$

$$\frac{x^{2n}-y^{2n}}{x+y}=(x-y)(x^{2n-2}+x^{2n-4}y^2+x^{2n-6}y^4+\ldots+y^{2n-2});$$

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd};\qquad a\pm\frac{b}{c}=\frac{ac\pm b}{c};$$

$$\frac{a}{b}\times b=a;\quad \frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b};\quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\quad \frac{a}{b}=\frac{1}{b}a;\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n};$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc};\quad a:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b};\quad \frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc};\quad \frac{ac}{b}:c=\frac{a}{b}.$$

Worteltrekking en Wortelgrootheden.

$$(\sqrt[p]{a})^p=a;\ \sqrt[p]{a^p}=a;\ \sqrt[p]{a^q}=a^{\frac{q}{p}};\quad \sqrt[n]{abcd}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdot\sqrt[n]{d};$$

$$\sqrt[2n+1]{\pm a^{2n+1}}=\pm\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}};\quad \sqrt[2n]{-a^{2n}}=\text{onbestaanbaar};$$

$$\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b};\quad \sqrt[np]{a^{nq}}=\sqrt[p]{a^q};\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^{n-1}};$$

$$(\sqrt[n]{a})^p=\sqrt[n]{a^p};\qquad (\sqrt[n]{a})^{np}=a^n;\qquad \sqrt[p]{(\sqrt[q]{a})}=\sqrt[pq]{a};$$

$$\frac{A}{a\pm b\sqrt{c}}=\frac{A(a\mp b\sqrt{c})}{a^2-b^2c};\quad \frac{A}{a\sqrt{b}\pm c\sqrt{d}}=\frac{A(a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d})}{a^2b-c^2d};$$

$$\sqrt{(A\pm B\sqrt{C})}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2C)}\right\}}\pm\sqrt{\left\{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2C)}\right\}}.$$

De lezer zal zelf gemakkelijk kunnen vinden, in welke der voorgaande §§ elk dezer formulen bewezen is, en merke op, dat elk derzelve de uitdrukking van twee verschillende regels bevat, naar gelang men het tweede lid als eene vervorming van het eerste, of het eerste lid als eene vervorming van het tweede wil beschouwen.

OVER DE VERGELIJKINGEN VAN DEN EERSTEN GRAAD, MET ÉÉNE ONBEKENDE.

Onderscheiding der vergelijkingen in identieke en niet identieke.

§ 131. Wanneer men eenen stelkunstigen vorm tot eenen vorm van eene andere gedaante herleid heeft, en de gelijkheid dier vormen door eene vergelijking voorstelt, zal, volgens hetgeen in de vorige § gezegd is, die vergelijking altijd waar blijven, welke bepaalde getallen men ook voor de letters verkiest te nemen. Men drukt dit gewoonlijk uit door te zeggen, dat *de vergelijking voor alle waarden der daarin voorkomende letters doorgaat*, en eene vergelijking, die deze eigenschap heeft, noemt men eene *identieke vergelijking*. Bijna al de vergelijkingen, die in het tot dus ver verhandelde voorkwamen, zijn zulke identieke vergelijkingen, zoo als, bij voorbeeld,

$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b); \qquad (a+b-c)x = ax+bx-cx;$$

$$(a+x)^2-(a-x)^2 = 4ax; \qquad \frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

Vergelijkingen, waarin geene letters voorkomen, zoo als:

$$2+3=5; \qquad \sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}; \qquad \sqrt{(6+2\sqrt{5})}=1+\sqrt{5},$$

voldoen aan de bovengegevene bepaling, en zijn dus almede identiek.

§ 132. Wanneer men de gelijkheid van twee willekeurige stelkunstige vormen, of de gelijkheid van eenen willekeurigen vorm met een gegeven getal, door eene vergelijking uitdrukt, kan zulk eene vergelijking wel bij toeval identiek wezen, maar doorgaans zal zij het niet zijn. Schrijft men, bij voorbeeld, op

$$(a-b)^2c = b^2(a-2b+c) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha),$$

in welke vergelijking voor elk lid een willekeurige vorm genomen is, dan zou men, door $a=3$, $b=2$ en $c=1$ te nemen, in plaats van eene ware vergelijking, $1=0$ vinden; voor $a=3$, $b=2$ en $c=1$ gaat dus deze vergelijking niet door, zij is alzoo niet identiek.

Hoezeer zulk eene vergelijking niet voor alle waarden der daarin voorkomende letters doorgaat, kan zij echter voor sommige waarden der letters waar zijn. Men zegt dan, dat deze waarden *aan de vergelijking voldoen*. Aan de vergelijking (α) voldoen, bij voorbeeld, de waarden $a=4$, $b=2$ en $c=3$, omdat voor deze waarden elk der leden 12 wordt.

Om voor de letters, die in eene niet identieke vergelijking voorkomen, waarden te vinden, die aan de vergelijking voldoen, kan men zich voorstellen, dat eerst voor al die letters, op éene na, willekeurig gegevene getallen genomen worden, en dat dan de vraag zij: welk getal men voor de overblijvende letter moet nemen, om aan de vergelijking te voldoen. Het vinden van zulk een getal noemt men *de vergelijking oplossen*; de letter, waardoor dit te zoeken getal wordt voorgesteld, noemt men *de onbekende*, en de letters, waarvoor willekeurig gegevene getallen aangenomen worden, noemt men *de bekenden.* Neemt men, bij voorbeeld, in de vergelijking (α), $b=2$ en $c=3$, waardoor b en c als bekenden beschouwd worden, dan is de overblijvende letter a de onbekende; de vergelijking (α) verandert dan in

$$3(a-2)^2 = 4(a-1) \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta);$$

elk willekeurig getal, voor a genomen, zal nu aan deze vergelijking niet voldoen, maar wel $a = \frac{4}{3}$; door het vinden dezer waarde voor a is nu de vergelijking (β) opgelost. Hoe deze waarde voor a gevonden kan worden, zal later blijken; voor den oogenblik is het genoeg, op te merken, dat zij aan de vergelijking voldoet, en dus in de plaats van a gesteld, of, zoo als men gewoonlijk zegt, voor a *gesubstitueerd*, de vergelijking (β) identiek maakt.

Blijft men b en c als bekenden aanzien, maar neemt men er andere waarden voor, bij voorbeeld, $b=4$ en $c=2$, dan verandert de vergelijking (α) in

$$2(a-4)^2 = 16(a-6) \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma);$$

aan deze vergelijking voldoet $a=8$, en het vinden van deze waarde, welke voor a gesubstitueerd, de vergelijking (γ) identiek maakt, is het oplossen van die vergelijking.

Men zou kunnen voortgaan, met voor b en c nieuwe getallen te stellen, waardoor altijd die letters de bekenden zouden zijn, en dan telkens te onderzoeken, welke waarde voor de onbekende a moest genomen worden, om aan de vergelijking te voldoen, of, wat hetzelfde is, om de vergelijking identiek te maken; het is echter klaar, dat, indien men eenen stelkunstigen vorm kon vinden, waarin alleen de letters b en c voorkomen, en zoodanig, dat die vorm, voor a gesubstitueerd, de vergelijking (α) identiek maakte, men voor alle nieuwe aan b en c te gevene waarden, niet op nieuw eene vergelijking, zoo als (β) en (γ) zou hebben op te lossen. Neemt men, bij voorbeeld, $a = \frac{b^2}{c}$, dan verandert de vergelijking (α) in

$$\left\{\frac{b^2}{c} - b\right\}^2 c = b^2\left\{\frac{b^2}{c} - 2b+c\right\},$$

of, na behoorlijke herleiding van elk lid, in

$$\frac{b^2(b-c)^2}{c} = \frac{b^2(b-c)^2}{c};$$

voor $a = \frac{b^2}{c}$ wordt dus de vergelijking (α) identiek. Welke getallen men derhalve voor b en c ook nemen wil, zal de vergelijking altijd identiek gemaakt worden, indien men slechts $a = \frac{b^2}{c}$ neemt. Stelt men, bij voorbeeld, $b=1$ en $c=1$, dan zal $a = \frac{b^2}{c} = 1$ aan de vergelijking voldoen. Door het vinden van $a = \frac{b^2}{c}$ is, voor alle willekeurige waarden der bekenden b en c, de waarde van de onbekende a gevonden, en alzoo de vergelijking (α), onafhankelijk van de waarden der bekenden, opgelost. Het oplossen eener vergelijking is dus in het algemeen: eenen, alleen uit de bekenden zamengestelden, vorm te vinden, die, in plaats van de onbekende gesubstitueerd, de vergelijking identiek maakt; door zulk eenen vorm wordt, zoo als men zegt, *de onbekende in de bekenden uitgedrukt*, en deze vorm zelf wordt dan ook *de waarde van de onbekende* genoemd.

In de vergelijking (α), zoo als boven gedaan is, b en c als bekenden aannemende, wordt door het vinden van $a = \frac{b^2}{c}$ die vergelijking gezegd ten opzigte van a opgelost te zijn. Men zou echter ook a en c als bekenden kunnen aannemen, dan zou $b = \sqrt{ac}$ de vergelijking identiek maken, en door het vinden van $b = \sqrt{ac}$ was dan de vergelijking ten opzigte van b opgelost. Nam men a en b als bekenden aan, dan zou $c = \frac{b^2}{a}$ de vergelijking identiek maken, en dan was, door het vinden van $c = \frac{b^2}{a}$, de vergelijking ten opzigte van c opgelost. Hieruit blijkt, wat men bedoelt, door de spreekwijze: *eene vergelijking ten opzigte van eene zekere letter oplossen*.

Ten aanzien van de, tot voorbeeld gekozene, vergelijking (α) kan men nog opmerken, dat $a = 2b$, even goed als $a = \frac{b^2}{c}$, die vergelijking identiek maakt, zoodat, voor dezelfde waarden van b en c, twee verschillende waarden voor a aan de vergelijking kunnen voldoen; aan de vergelijking (β) voldoet dan ook $a=4$, even zoo wel als $a=\frac{4}{3}$.

§ 133. Uit hetgeen in de vorige § gezegd is, blijkt:

1°. Dat in eene identieke vergelijking geene onbekende behoeft voor te komen, en dat, zoo er zich ééne of meer letters in bevinden, die men als onbekenden heeft aangezien, men om aan die vergelijking te voldoen, voor die letters willekeurige waarden kan nemen.

2°. Dat in eene niet-identieke vergelijking altijd ééne onbekende moet, maar ook niet meer dan ééne behoeft voor te komen, en dat, zoo er zich meer letters in bevinden, die men als onbekenden heeft aangezien, men om aan die vergelijking te voldoen, slechts ééne dier letters als onbekende behoeft te blijven aanzien, en voor al de overige willekeurige waarden kan nemen.

3°. Dat in eene vergelijking, wanneer men die op zich zelve beschouwt, en dus geenerlei vraagstuk, waaruit die vergelijking kan ontstaan zijn, in aanmerking neemt, elke letter, die er in voorkomt, tot onbekende kan aangenomen worden; dat dus de oplossing eener vergelijking ten opzigte van eene willekeurige letter kan begeerd worden, en dat dan de overige letters als bekenden moeten worden aangezien.

4°. Dat er vergelijkingen zijn, waaraan door meer dan ééne waarde voor de onbekende voldaan kan worden, of die, zoo als men ook wel zegt, verschillende waarden voor de onbekende toelaten.

Hierbij moet niet uit het oog verloren worden, dat dit alles het geval betreft, waarin men slechts aan ééne vergelijking te voldoen heeft. Het geval, waarin men aan twee of meer vergelijkingen moet voldoen, zal later behandeld worden.

Herleiding der vergelijkingen met ééne onbekende tot derzelver algemeene gedaante.

§ 134. Men kan niet alleen de stelkunstige vormen, die de leden eener vergelijking uitmaken, maar ook die vergelijking zelve herleiden. Eene vergelijking wordt herleid, wanneer men uit dezelve eene nieuwe vergelijking afleidt, waaraan voldaan wordt door dezelfde waarden van de onbekende, die aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen. Had men, bij voorbeeld,

$$x^2+2a^2 = ax+a^2,$$

en trok men van elk lid dezer vergelijking a^2 af, dan zou

$$x^2+a^2 = ax$$

eene nieuwe vergelijking zijn, waaraan klaarblijkelijk elke waarde van x voldoen moet, die aan de vergelijking $x^2+2a^2 = ax+a^2$ voldoet.

De leden van elke vergelijking, die men door herleiding verkrijgt, moeten wel onderling gelijk zijn, maar kunnen geheel andere waarden hebben, dan de leden der vergelijking, waaruit zij afgeleid wordt; deze vergelijkingen mogen alzoo niet door het teeken = met elkander verbonden worden. In het zoo even gebruikte voorbeeld, mag men dus niet schrijven

$$x^2+2a^2 = ax+a^2 = x^2+a^2 = ax.$$

De ééne onbekende, waarmede men, overeenkomstig hetgeen in § 133 gezegd is, te doen heeft, indien ééne vergelijking al de te vervullen voorwaarden bevat, wordt gewoonlijk door de letter x voorgesteld; de herleiding eener vergelijking geschiedt dan met het doel, om te vinden, welke waarden van x aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen, en daartoe leidt men eerst uit dezelve, door achtervolgende herleiding eene nieuwe vergelijking af, die eene der volgende gedaanten heeft:

$$x+P = 0,$$
$$x^2+Px+Q = 0,$$
$$x^3+Px^2+Qx+R = 0,$$
$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S = 0,$$

enz.

waarin de letters, P, Q, R enz. stelkunstige vormen verbeelden, die geheel uit bekenden zijn zamengesteld.

Naar gelang men door herleiding tot eene vergelijking van eene dezer gedaanten komt, wordt de vergelijking gezegd van den eersten, tweeden, derden, vierden graad enz. of ook van de eerste, tweede, derde, vierde magt, enz. te zijn. De graad of magt eener vergelijking kan dus alleen beoordeeld worden uit de gedaante, die de vergelijking door herleiding zal verkrijgen, en wordt bepaald door den grootsten exponent, dien de onbekende in de, door herleiding verkregene, vergelijking heeft.

De vergelijkingen van den tweeden graad noemt men gewoonlijk *vierkantsvergelijkingen;* die van den derden, vierden graad enz. worden *hoogeremagtsvergelijkingen* genoemd.

§ 135. De herleiding der vergelijkingen steunt op eenige regels, die meestal zoo eenvoudig zijn, dat zij geen bewijs behoeven, en daarom *axioma's* genoemd worden. Bij het opgeven dezer regels is de gewone zegswijze: »men mag deze of gene verandering aan eene vergelijking toebrengen« en door dit zeggen wordt dan bedoeld, dat wanneer men de opgegevene verandering op eene vergelijking toepast, daaruit eene nieuwe vergelijking voortkomt, waaraan voldaan zal worden door dezelfde waarden van de onbekende, die aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen.

De bedoelde regels worden in de onmiddellijk volgende §§ opgegeven.

§ 136. Regel. *Men mag bij elk lid van eene vergelijking een zelfde getal optellen, of van elk lid een zelfde getal aftrekken.*

Deze regel is uit zich zelven klaar. Heeft men, bij voorbeeld, de vergelijking

$$x^2+3ax = b^2+ax,$$

en telt men bij elk lid a^2 op, dan verkrijgt men de nieuwe vergelijking

$$x^2+3ax+a^2 = a^2+b^2+ax;$$

trekt men van elk lid van deze vergelijking wederom ax af, dan verkrijgt men

$$x^2+2ax+a^2 = a^2+b^2,$$

en het is duidelijk, dat aan de beide laatste vergelijkingen door dezelfde waarden van x voldaan zal worden, die aan de eerste voldoen.

§ 137. Regel. *Wanneer in elk lid eener vergelijking een zelfde term, met hetzelfde teeken voorkomt, mag men die gelijke termen tegen elkander weglaten.*

Deze regel is een bijzonder geval van den voorgaanden, en behoeft geenerlei opheldering.

§ 138. Regel. *Men mag eenen term, uit het eene lid eener vergelijking, in het andere overbrengen, mits men tevens het teeken van dien term omkeere.*

Deze regel is een onmiddellijk gevolg van dien van § 136; want, om eenen term over te brengen, zou men slechts dien term bij elk lid moeten optellen, of van elk lid moeten aftrekken. Had men, bij voorbeeld, de vergelijking

$$ax-a^2 = bx+b^2,$$

en wilde men den term a^2 uit het eerste in het tweede lid overbrengen, dan zou men bij elk lid a^2 optellen, en daardoor verkrijgen

$$ax = a^2+bx+b^2;$$

wilde men nu ook nog den term bx uit het tweede lid in het eerste overbrengen, dan zou men van elk lid der laatste vergelijking bx aftrekken, en daardoor verkrijgen

$$ax-bx = a^2+b^2,$$

en hierdoor zijn nu de overgebragte termen met omgekeerde teekens in het andere lid te voorschijn gekomen.

Bij het toepassen van dezen regel op termen, die uit verscheidene letters of vormen zijn zamengesteld, moet men wel opletten, dat alleen het teeken, dat vóór den term staat, omgekeerd moet worden, maar geenszins het teeken, of de teekens, die tot de zamenstelling van den term behooren. Had men, bij voorbeeld, de vergelijking

$$x^2 = \frac{a^2x}{a-x} + (bx-c^2)-(x-a)(x-b)+a^2,$$

en wilde men de drie eerste termen van het tweede lid in het eerste lid overbrengen, dan zou men dit aldus moeten doen:

$$x^2 - \frac{a^2x}{a-x} - (bx-c^2)+(x-a)(x-b) = a^2.$$

Door dezen regel te volgen, kan men al de termen eener vergelijking in het eerste lid overbrengen, waardoor het tweede lid nul wordt; zoo zou men, bij voorbeeld, voor de laatste vergelijking ook kunnen schrijven

$$x^2 - \frac{a^2x}{a-x} - (bx-c^2)+(x-a)(x-b)-a^2 = 0;$$

men noemt dit: *eene vergelijking op nul herleiden.*

§ 139. Regel. *Men mag de teekens van al de termen eener vergelijking te gelijker tijd omkeeren.*

Deze regel is weder een onmiddellijk gevolg van den voorgaanden; want brengt men al de termen van het eerste lid eener gegevene vergelijking in het tweede, en al de termen van derzelver tweede lid in het eerste over, en verplaatst men daarna de leden, zoodat men, in plaats van A=B, schrijft B=A, dan zal men eene vergelijking verkrijgen, die van de gegevene nergens anders in verschilt, dan in de teekens der termen, die nu alle het omgekeerde zijn van hetgeen zij eerst waren. Was, bij voorbeeld, gegeven de vergelijking

$$-x^2+a^2 = b^2-c^2,$$

dan zou men, door toepassing van den regel van § 138, hebben

$$-b^2+c^2 = x^2-a^2,$$

waarvoor men ook kan schrijven

$$x^2-a^2 = -b^2+c^2,$$

en deze zelfde vergelijking wordt verkregen, als men de teekens van de termen der gegevene omkeert.

Ook hier moet men opletten, dat het omkeeren der teekens geenszins op zulke teekens ziet, die tot de zamenstelling van eenen term behooren. Had men, bij voorbeeld,

$$-x^2+(a-b)x-\frac{a^2}{a+b}=0,$$

dan zou men, al de teekens der termen omkeerende, moeten schrijven,

$$x^2-(a-b)x+\frac{a^2}{a+b}=0.$$

§ 140. REGEL. *Men mag de beide leden eener vergelijking met een zelfde getal vermenigvuldigen.*

Om te kennen te geven, dat de beide leden eener vergelijking met een zelfde getal vermenigvuldigd worden, zegt men dikwijls kortheidshalve, dat de vergelijking met dit getal vermenigvuldigd wordt; deze spreekwijze kan men veilig blijven gebruiken, indien men er slechts de opgegevene beteekenis aan hecht.

De hier gegeven regel is uit zich zelven klaar, en verschaft het middel, om uit eene vergelijking, waarvan sommige of alle termen gebrokens zijn, die breuken te verdrijven; daartoe behoeft men slechts de beide leden te vermenigvuldigen met het kleinste gemeene veelvoud van de noemers dier gebrokens. Had men, bij voorbeeld, de vergelijking

$$\frac{5}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{7}{x^2-1}-1,$$

dan is x^2-1 het kleinste gemeene veelvoud der noemers; vermenigvuldigt men dus de vergelijking met x^2-1, dan verkrijgt men de nieuwe vergelijking

$$5(x+1)+3(x-1)=7-(x^2-1),$$

waarin nu geene gebrokens meer voorkomen; zijnde het duidelijk, dat aan deze nieuwe vergelijking door dezelfde waarden van x voldaan wordt, die aan de vergelijking voldoen, waaruit zij is afgeleid.

In plaats van eene vergelijking in eens met het kleinste gemeene veelvoud van de noemers der gebrokene termen te vermenigvuldigen, en daardoor al die gebrokens in eens te verdrijven, kan men ook die gebrokens één voor één wegmaken, door de vergelijking achtervolgens met elken noemer te vermenigvuldigen. Had men, om een nieuw voorbeeld te nemen, de vergelijking

$$\frac{a^2}{x(x-1)}+\frac{3b}{2x}-5=\frac{b^2}{x^2-1},$$

dan kan men die vergelijking eerst met $2x$ vermenigvuldigen; hierdoor verandert zij in

$$\frac{2a^2}{x-1}+3b-10x=\frac{2b^2x}{x^2-1};$$

vervolgens kan men met $x-1$ vermenigvuldigen; dan komt er

$$2a^2+(3b-10x)(x-1)=\frac{2b^2x}{x+1},$$

en eindelijk nog eens met $x+1$ vermenigvuldigende, verkrijgt men

$$2a^2(x+1)+(3b-10x)(x^2-1)=2b^2x,$$

welke vergelijking nu van gebrokens gezuiverd is.

§ 141. Regel. *Men mag de beide leden eener vergelijking door een zelfde getal deelen.*

Kortheidshalve zegt men gewoonlijk, dat eene vergelijking door eenig getal gedeeld wordt; maar men bedoelt dan, dat elk lid van de vergelijking door dit getal wordt gedeeld.

Deze regel is weder uit zich zelven klaar, en verschaft het middel, om eene vergelijking eenvoudiger te maken, indien al hare leden eenen gemeenschappelijken factor mogten hebben; of ook, om eenigen term der vergelijking van deszelfs coëfficiënt te bevrijden. Was, bij voorbeeld, gegeven de vergelijking

$$(a^2-b^2)x^2+a^2(a-b)x=b(a^3-b^3),$$

dan hebben de beide leden dezer vergelijking eenen gemeenschappelijken factor $a-b$; men kan dus de vergelijking door dien factor deelen, en verkrijgt dan de eenvoudiger vergelijking

$$(a+b)x^2+a^2x=b(a^2+ab+b^2);$$

wil men nu den eersten term dezer vergelijking bevrijden van den coëfficiënt $(a+b)$, dan deele men dezelve door dien coëfficiënt, en men verkrijgt

$$x^2+\frac{a^2x}{a+b}=\frac{b(a^2+ab+b^2)}{a+b};$$

aan deze laatste vergelijking zullen nu klaarblijkelijk dezelfde waarden van x voldoen, die aan de gegevene vergelijking voldoen kunnen.

§ 142. Het vermenigvuldigen of deelen eener vergelijking met of door een getal, volgens de beide vorige §§, is aan geenerlei bedenking onderhevig; maar zoo de vermenigvuldiger of deeler een stelkunstige vorm is, die nul is, of nul zou kunnen zijn, en dus eigenlijk geen getal voorstelt, moet men het volgende in het oog houden.

Laat eene identieke, niet-identieke, zelfs eene geheel valsche vergelijking vermenigvuldigd worden met eenen vorm, die niet tot wegmaking van gebrokens dient, en laat ondersteld worden, dat deze vorm, of uit zich zelven (dat wil zeggen, onafhankelijk van de waarde der onbekende) nul is, of voor sommige waarden der onbekende nul kan zijn, dan kunnen de zes volgende gevallen onderscheiden worden:

1°. Eene identieke vergelijking. 2°. Eene niet-identieke. 3°. Eene geheel valsche.	Vermenigvuldigd met eenen vorm, die uit zich zelven nul is.
4°. Eene identieke vergelijking. 5°. Eene niet-identieke. 6°. Eene geheel valsche.	Vermenigvuldigd met eenen vorm, die voor sommige waarden van x nul is.

In de drie eerste gevallen, zal de nieuwe vergelijking, die men verkrijgt, identiek zijn; want zij is altijd $0=0$, omdat de vermenigvuldiger, zoo als ondersteld is, niet tot wegmaking van breuken gediend heeft, en dus een factor van elk lid blijft.

Men vermenigvuldige, bij voorbeeld, de vergelijkingen

$$(x^2-a^2) = (x-a)(x+a),$$
$$x^2-2 = x,$$
$$2 = 3,$$

waarvan de eerste identiek, de tweede niet-identiek en de derde valsch is, met $a-a$, een' vorm, die uit zich zelven nul is, dan zijn de komende vergelijkingen

$$(a-a)(x^2-a^2) = (x-a)(x+a)(a-a),$$
$$(x^2-2)(a-a) = x(a-a),$$
$$2(a-a) = 3(a-a),$$

alle identiek.

In het vierde geval, zal de nieuwe vergelijking, die men verkrijgt, ook identiek zijn; want de beide leden der vergelijking stellen denzelfden vorm voor, onder eene andere gedaante, en moeten dit dus nog doen, nadat men die leden elk met eenen zelfden vorm, om het even welken, heeft vermenigvuldigd.

Vermenigvuldigt men, bij voorbeeld, de identieke vergelijking

$$(x^2-a^2) = (x+a)(x-a)$$

met den vorm x^2-1, die voor $x=1$ en voor $x=-1$ nul wordt, dan is de komende vergelijking

$$(x^2-a^2)(x^2-1) = (x+a)(x-a)(x^2-1)$$

altijd nog identiek.

In het vijfde geval, zal de nieuwe vergelijking, die men verkrijgt, niet-identiek zijn, maar aan dezelve zal voldaan worden: 1°. door de waarden van x, die aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen, en 2°. door de waarden van x, waardoor de vermenigvuldiger nul zou worden.

Vermenigvuldigt men, bij voorbeeld, de niet-identieke vergelijking

$$x=3,$$

waaraan klaarblijkelijk alleen door $x=3$ voldaan wordt, met den vorm x^2-1, die voor $x=1$ en voor $x=-1$ nul wordt, dan is de komende vergelijking

$$x(x^2-1) = 3(x^2-1)$$

niet-identiek, maar aan dezelve voldoet, zoowel $x=1$ en $x=-1$, als $x=3$.

In het zesde geval, zal men ook eene niet-identieke vergelijking verkrijgen, maar waaraan alleen kan worden voldaan, door de waarden van x, die den vermenigvuldiger nul doen worden.

Vermenigvuldigt men, bij voorbeeld, de valsche vergelijking

$$2=3$$

met x^2-1, dan verkrijgt men de niet-identieke vergelijking

$$2(x^2-1) = 3(x^2-1),$$

waaraan alleen $x=1$ en $x = -1$ voldoen.

In het tweede en vijfde geval, heeft dus de nieuwe vergelijking wel de eigenschap, dat zij de waarden voor de onbekende toelaat, die aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen, maar zij laat er meer toe; in het tweede geval zooveel als men wil; in het vijfde zooveel als er zijn, die den vermenigvuldiger nul maken.

In het volgend tafeltje vindt men de uitkomsten dezer redenering opgeteekend:

Gegevene vergelijking.	*Vermenigvuldiger.*	*Verkregene vergelijking.*
Identiek.	Nul uit zich zelven.	Identiek.
Niet-identiek.		Identiek.
Valsch.		Identiek.
Identiek.	Nul voor sommige waarden van x.	Identiek.
Niet-identiek.		Niet-identiek, met invoering van waarden van x.
Valsch.		Niet-identiek, met invoering van waarden van x.

waarbij men altijd moet opletten, dat het beredeneerde op de onderstelling rust, dat de vermenigvuldiger niet tot wegmaking van gebrokens gediend heeft, en alzoo factor van elk lid der vergelijking is gebleven.

Uit de genoemde onderstelling volgt, dat als men uit het bovenstaande bij omkeering wil besluiten tot hetgeen er plaats heeft, indien eene vergelijking gedeeld wordt door eenen vorm, die nul is, of nul zou kunnen zijn, dit besluit alleen gelden kan, ingevalle de vorm, waardoor men deelt, een factor van elk lid der vergelijking is; maar dit zoo zijnde, blijkt dan ook onmiddellijk, dat men, bij de deeling door zulk een' vorm, de uitkomsten heeft, die in het volgend tafeltje zijn opgeteekend:

Gegevene vergelijking.	*Deeler.*	*Verkregene vergelijking.*
Identiek.	Nul uit zich zelven.	Identiek.
Identiek.		Niet-identiek.
Identiek.		Valsch.
Identiek.	Nul voor sommige waarden van x.	Identiek.
Niet-identiek.		Niet-identiek, met verdonkering van eenige waarden van x.
Niet-identiek.		Valsch, met verdonkering van alle waarden van x.

Is alzoo eene identieke vergelijking door eenen factor deelbaar, die uit zich zelven nul is, en deelt men de vergelijking door dien factor, dan weet men vooruit niet, of de vergelijking, die er komt, identiek, niet-identiek, of valsch zal wezen. Zoo zijn, bij voorbeeld, de vergelijkingen

$(x-x)(x+x)=(x-x)2x$, $(x-x)(x+x)=(x-x)x$, $2(x-x)=3(x-x)$,

alle identiek, en door $x-x$, een factor, die uit zich zelven nul is, deelbaar; deelende de vergelijkingen door dezen factor, dan komt er

$x+x=2x$, $\quad x+x=x$, $\quad 2=3$,

waarvan de eerste identiek en de laatste valsch is, terwijl de tweede eene niet-identieke vergelijking is, waaraan door $x=0$ voldaan wordt.

Is eene identieke vergelijking deelbaar door eenen factor, die voor sommige waarden der daarin voorkomende letters nul wordt, dan zal, als men de vergelijking door dien factor deelt, de komende vergelijking nog identiek zijn. Zoo is, bij voorbeeld, de identieke vergelijking

$$(x^2-1)(x+2)=(x-1)(x^2+3x+2)$$

door $x-1$, een vorm, die voor $x=1$ nul wordt, deelbaar; deelt men de vergelijking door dien vorm, dan komt er

$$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2,$$

welke vergelijking nog identiek is.

Is eindelijk eene niet-identieke vergelijking deelbaar door eenen factor, die voor sommige waarden van x nul zou zijn, dan weet men niet vooruit, of men, na de deeling door dien factor, wederom eene niet-identieke, dan wel eene valsche vergelijking zal verkrijgen; maar zoo men geene valsche verkrijgt, dan zal aan de niet-identieke, die er komt, niet meer behoeven voldaan te worden door al de waarden van x, die aan de oorspronkelijke voldeden, en wel niet door die waarden van x, die den deeler nul doen worden. Zoo is, bij voorbeeld, de niet-identieke vergelijking

$$(x-2)(2x+1)=(x-2)(x+7),$$

waaraan $x=2$ en $x=6$ voldoen, door $x-2$ deelbaar; deelt men dezelve door $x-2$, dan is de komende vergelijking

$$2x+1=x+7$$

weder eene niet-identieke vergelijking; maar de waarde $x=2$, die aan de oorspronkelijke vergelijking voldeed, voldoet aan de laatste niet meer, en het is ook juist de waarde $x=2$, die den gebruikten deeler nul maakt. Had men daarentegen de niet-identieke vergelijking

$$x-3=2x-6,$$

waaraan $x=3$ voldoet, en waarvan de beide leden door $x-3$ deelbaar zijn, dan zou, de vergelijking door dien factor deelende, de valsche vergelijking $\quad 1=2$

te voorschijn komen.

De opmerkingen, in deze § vervat, zijn vooreerst dienstig, om sommige stelkunstige verschijnselen te verklaren, die aan den onbedrevenen zouden kunnen toeschijnen tegenstrijdigheden te zijn; doch hoofdzakelijk zijn deze opmerkingen van nut, om te doen uitkomen:

1°. Dat men eene vergelijking niet anders, dan wanneer zulks tot verdrijving van gebrokens noodig is, met eenen vorm, waarin de onbekende voorkomt, kan vermenigvuldigen, zonder in het algemeen waarden van de onbekende in te voeren, die aan de oorspronkelijke vergelijking niet voldoen.

2°. Dat men eene vergelijking, die door eenen vorm, waarin de onbekende voorkomt, deelbaar is, niet door dien vorm kan deelen, zonder in het algemeen waarden van de onbekende te verdonkeren, die aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen.

3°. Dat, zoo eene identieke vergelijking door eenen vorm, die voor sommige waarden der letters nul zou kunnen zijn, deelbaar is, en er door gedeeld wordt, de vergelijking, die er komt, nog identiek zal zijn, en dus zal blijven doorgaan, al wilde men, na de deeling, aan de letters waarden geven, die den gebruikten deeler nul maakten.

§ 143. Regel. *Men mag de beide leden eener vergelijking tot dezelfde magt verheffen.*

Kortheidshalve zegt men gewoonlijk, dat eene vergelijking tot zekere magt verheven wordt, indien men elk harer leden tot die magt verheft. Eene vergelijking in het vierkant brengen, wil dus ook niets anders zeggen, dan dat men elk lid van dezelve tot de tweede magt verheft, en deze tweede magten aan elkander gelijk stelt.

Deze regel verschaft het middel, om eene vergelijking, waarin een wortelteeken voorkomt, van dat wortelteeken te zuiveren. Men verandere daartoe de vergelijking, volgens den regel van § 138, zoodanig, dat in een harer leden niet anders voorkomt, dan een enkele term, die den aangeduiden wortel als factor bevat, en verheffe de vergelijking tot zulk eene magt, als met den aanwijzer van de worteltrekking overeenkomt, dan zal daardoor het wortelteeken verdwijnen. Was, bij voorbeeld, gegeven de vergelijking

$$x+\sqrt{(1+x^2)} = 5,$$

dan zou men, in plaats van dezelve, eerst schrijven

$$\sqrt{(1+x^2)} = 5-x,$$

en vervolgens deze vergelijking in het vierkant brengen, waardoor men zou verkrijgen

$$1+x^2 = 25-10x+x^2,$$

waarin nu geen wortelteeken meer voorkomt.

Komen in eene vergelijking twee of meer wortelteekens voor, dan zal men, door denzelfden regel herhaalde malen toe te passen, wel niet altijd, maar toch in de meest voorkomende gevallen, al die wortelteekens kunnen wegmaken. Had men, bij voorbeeld,

$$\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)} = \sqrt{2}+\sqrt{x},$$

dan zou men, door de vergelijking onmiddellijk in het vierkant te brengen, verkrijgen

$$1+x+2\sqrt{(1-x^2)}+1-x = 2+2\sqrt{2x}+x,$$

of door overbrenging van termen

$$2\sqrt{(1-x^2)} = x+2\sqrt{2x};$$

deze vergelijking weder in het vierkant brengende, komt er

$$4-4x^2 = x^2+4x\sqrt{2x}+8x,$$

of door overbrenging van termen,

$$4-8x-5x^2 = 4x\sqrt{2x},$$

en brengt men nu deze vergelijking nogmaals in het vierkant, dan komt er

$$(4-8x-5x^2)^2 = 32x^3,$$

waardoor al de wortelteekens verdwenen zijn.

Hoezeer de waarheid van den regel dezer § uit zich zelve blijkbaar genoeg is, moet men er bij opmerken, dat wanneer eene vergelijking, ter verdrijving van wortelteekens, tot eene evene magt verheven wordt, altijd de onderscheiding verloren gaat, of in de oorspronkelijke vergelijking vóór die wortelteekens het teeken + of — gestaan heeft; neemt men dan ook, in plaats van de vergelijking, die het laatst tot voorbeeld genomen is, eene der vergelijkingen

$$\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)} = \sqrt{2}+\sqrt{x},$$
$$\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)} = \sqrt{2}-\sqrt{x},$$
$$\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)} = \sqrt{x}-\sqrt{2},$$
$$\sqrt{(1-x)}-\sqrt{(1+x)} = \sqrt{2}-\sqrt{x},$$

enz.

zoo zal men, de wortelteekens verdrijvende, altijd op dezelfde vergelijking

$$(4-8x-5x^2)^2 = 32x^3$$

nederkomen.

Alzoo verkrijgt men, door eene vergelijking tot eene evene magt te verheffen, eene vergelijking, die meer uitdrukt, die meer waarden van de onbekende toelaat, dan de oorspronkelijke vergelijking. Laat nog, ter opheldering, de vergelijking

$$x = 5,$$

waaraan alleen door $x=5$ voldaan wordt, in het vierkant gebragt worden, dan komt er

$$x^2=25,$$

en aan deze vergelijking wordt nu niet alleen door $x=5$, maar ook door $x=-5$ voldaan.

Daar echter tot het oplossen van eene vergelijking, indien de onbekende onder wortelteekens voorkomt, het verdrijven van die wortelteekens doorgaans niet ontweken kan worden, is men wel verpligt, zich het invoeren van meerdere waarden te laten welgevallen.

§ 144. Regel. *Men mag uit de beide leden eener vergelijking eenen zelfdemagtswortel trekken.*

Men zegt weder kortheidshalve gewoonlijk, dat de wortel uit eene vergelijking getrokken wordt, indien men bedoelt, dat de gelijknamige wortels, uit de leden eener vergelijking getrokken, aan elkander gelijk gesteld worden.

Deze regel kan dienen, om vergelijkingen te vereenvoudigen, ingevalle de wortel uit elk der leden, zonder wortelteeken, kan voorgesteld worden, of ook, indien dit slechts met den wortel uit een der leden kan plaats hebben, terwijl het andere lid geheel uit bekenden is zamengesteld. Was, bij voorbeeld, gegeven de vergelijking

$$x^3+3ax^2+3a^2x+a^3 = 8x^3,$$

dan zou men den derdemagtswortel uit elk der leden, zonder behulp van wortelteeken, kunnen voorstellen, en dus de gegevene vergelijking vereenvoudigen tot

$$x+a = 2x.$$

Was de gegevene vergelijking

$$x^3-3ax^2+3a^2x-a^3 = a^2b+ab^2,$$

dan zou men even zoo hebben

$$x-a = \sqrt[3]{ab(a+b)}.$$

Hoezeer deze regel weder uit zich zelven duidelijk is, moet men er bij opmerken, dat men, bij het trekken van eenen evenemagtswortel uit eene vergelijking, vóór een der beide leden het dubbele teeken moet plaatsen, en daardoor eigenlijk twee vergelijkingen uit de oorspronkelijke afleidt. Aan de vergelijking $A^{2n} = B^{2n}$ toch, zal even goed voldaan worden, indien men $A=-B$, als wanneer men $A=B$ neemt. Vóór beide de leden het dubbele teeken te plaatsen, zou overtollig zijn; want indien men dit deed, zou men hebben $\pm A=\pm B$; hierin liggen nu wel de vier vergelijkingen

$$+A=+B,\quad +A=-B,\quad -A=+B,\quad -A=-B,$$

opgesloten; maar de eerste en de laatste vergelijking zijn klaarblijkelijk niet verschillend, zoo ook niet de tweede en derde, zoodat men, alleen de beide eerste, of $A=\pm B$ nemende, al neemt, wat in de vier vergelijkingen $\pm A=\pm B$ zou opgesloten liggen.

Was dus, bij voorbeeld, gegeven

$$(x-a)^2 = (a-b)^2$$

dan zou men, uit deze vergelijking den vierkantswortel trekkende, moeten schrijven

$$x-a = \pm(a-b),$$

zoodat men dan de twee vergelijkingen

$$x-a = a-b \quad \text{en} \quad x-a = b-a$$

zou bekomen; en door de waarden van x, die aan elk dezer vergelijkingen voldoen, zal nu ook aan de gegevene vergelijking voldaan worden.

§ 145. Om de vergelijkingen tot de in § 134 opgegevene gedaanten te herleiden, moet men, behalve van de in § 136—144 voorgedragene regels, ook nog gebruik maken van die, welke vroeger voor de herleiding van stelkunstige vormen zijn opgegeven. In het algemeen kan men, ter herleiding der vergelijkingen, gebruik maken van dezen

Regel. *Verdrijf, door toepassing der regels van § 140 en 143, de gebrokens, die in de vergelijking voorkomen, alsmede de wortel-*

teekens, waaronder de onbekende zich bevindt; ontwikkel de magten en producten der veelledige vormen, waarin de onbekende voorkomt; breng daarna, volgens den regel van § 138, *al de termen in het eerste lid der vergelijking over; vereenig al de termen, die eene zelfde magt van de onbekende als factor bevatten, tot eenen enkelen term; rangschik deze termen naar de afdalende magten der onbekende; pas, indien het noodig is, den regel van* § 139 *toe, om aan den term, die de hoogste magt der onbekende bevat, het positieve teeken te geven, en deel eindelijk de vergelijking door den coëfficiënt van de genoemde hoogste magt; tracht overigens, gedurende deze bewerkingen, de vergelijking telkens zooveel mogelijk te vereenvoudigen, door overbrenging en vereeniging van gelijksoortige termen, of door toepassing der regels van* § 137, 141 *en* 144.

Zie hier eenige voorbeelden, tot toepassing van dezen regel:

Eerste Voorbeeld. Laat ter herleiding gegeven zijn de vergelijking $(x^2+a^2)(b-x)-ax^2 = x^3-(a+b)(a^2-bx)$.

Men ontwikkele de producten $(x^2+a^2)(b-x)$ en $(a+b)(a^2-bx)$, het laatste blootelijk ten opzigte van den tweeledigen factor a^2-bx, dan verandert de gegevene vergelijking in

$$bx^2+a^2b-x^3-a^2x-ax^2 = x^3-[(a+b)a^2-(a+b)bx];$$

men ziet nu in elk lid eenen gelijksoortigen term x^3, alzoo vereenige men deze gelijksoortige termen, door uit het tweede lid den term x^3 met het tegengestelde teeken in het eerste lid over te brengen, en den nieuwen term $-x^3$, die daardoor in het eerste lid zou komen, bij den e rm $-x^3$ te voegen, die reeds in het eerste lid staat; tevens ontwikkele men den laatsten term van de vergelijking uit de buitenste haakes; daardoor verkrijgt men

$$bx^2+a^2b-2x^3-a^2x-ax^2 = -(a+b)a^2+(a+b)bx;$$

verder brenge men al de termen in het voorste lid der vergelijking over, en rangschikke dezelve naar de afdalende magten van x, dan komt er

$$-2x^3+bx^2-ax^2-a^2x-(a+b)bx+a^2b+(a+b)a^2=0;$$

men vereenige daarna de termen, die eene zelfde magt van x als factor bevatten, tot eenen enkelen term; dit geeft

$$-2x^3-(a-b)x^2-(a^2+(a+b)b)x+a^2(b+(a+b))=0$$

of

$$-2x^3-(a-b)x^2-(a^2+ab+b^2)x+a^2(a+2b)=0;$$

men verandere eindelijk de teekens van al de termen, en deele de vergelijking door 2, dan komt er ten laatste

$$x^3+\frac{1}{2}(a-b)x^2+\frac{1}{2}(a^2+ab+b^2)x-\frac{1}{2}a^2(a+2b)=0,$$

welke vergelijking nu de gedaante $x^3+Px^2+Qx+R=0$ heeft, zijnde in dit voorbeeld $P=\frac{1}{2}(a-b)$, $Q=\frac{1}{2}(a^2+ab+b^2)$ en $R=-\frac{1}{2}a^2(a+2b)$.

Tweede Voorbeeld. De vergelijking $2x^2+\sqrt{\left(\frac{3}{2}x^2-1\right)}=4x+5$ te herleiden.

Breng den term $2x^2$ in het tweede lid over, dit geeft

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}x^2-1\right)}=-2x^2+4x+5;$$

verhef de vergelijking tot de tweede magt, dan komt er

$$\frac{3}{2}x^2-1=(-2x^2+4x+5)^2;$$

ontwikkel het tweede lid, dan wordt de vergelijking

$$\frac{3}{2}x^2-1=4x^4-16x^3-4x^2+40x+25;$$

breng de termen $\frac{3}{2}x^2$ en -1 met omgekeerde teekens in het andere lid over, en vereenig ze met de gelijksoortige termen, die in dat lid reeds voorkomen, dan geeft dit

$$0=4x^4-16x^3-5\tfrac{1}{2}x^2+40x+26;$$

verplaats de leden der vergelijking, en deel dezelve door 4, dan komt er ten laatste

$$x^4-4x^3-1\tfrac{3}{8}x^2+10x+6\tfrac{1}{2}=0,$$

welke vergelijking nu de gedaante $x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0$ heeft, zijnde in dit voorbeeld $P=-4$, $Q=-1\frac{3}{8}$, $R=10$ en $S=6\frac{1}{2}$.

Derde Voorbeeld. De vergelijking $x-\frac{x+1}{x}+\frac{2}{x+1}=1-\frac{x^2-4}{x(x+1)}$ te herleiden.

Men vermenigvuldige de vergelijking met $x(x+1)$, ontwikkele daarna de producten en magten der veelledige vormen, late de termen, die elkander vernietigen, weg, en brenge al de termen in het voorste lid, dan zal men achtervolgens verkrijgen

$$x^2(x+1)-(x+1)^2+2x=x(x+1)-(x^2-4),$$
$$x^3+x^2-x^2-2x-1+2x=x^2+x-x^2+4,$$
$$x^3-1=x+4,$$
$$x^3-x-5=0,$$

welke vergelijking nu weder de gedaante $x^3+Px^2+Qx+R=0$ heeft, zijnde hier $P=0$, $Q=-1$ en $R=-5$.

Vierde Voorbeeld. De vergelijking $\frac{bx^2}{a(x^2-a^2)}-\frac{a^2+b^2}{b(x+a)}=\frac{x^2}{ab}+1$ te herleiden.

Het kleinste gemeene veelvoud van de noemers der verschillende termen is hier $ab(x^2-a^2)$; door de vergelijking hiermede te vermenigvuldigen, komt er

$$b^2x^2-a(a^2+b^2)(x-a)=x^2(x^2-a^2)+ab(x^2-a^2);$$

verder verkrijgt men, door ontwikkeling,

$$b^2x^2-a(a^2+b^2)x+a^2(a^2+b^2) = x^4-a^2x^2+abx^2-a^3b;$$

door overbrenging en vereeniging van termen

$$-x^4+(b^2+a^2-ab)x^2-a(a^2+b^2)x+a^2(a^2+b^2+ab)=0;$$

door verandering van teekens en rangschikking der coëfficiënten

$$x^4-(a^2-ab+b^2)x^2+a(a^2+b^2)x-a^2(a^2+ab+b^2) = 0,$$

en deze vergelijking heeft nu weder de gedaante $x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0$, zijnde hier $P=0$, $Q=-(a^2-ab+b^2)$, $R=a(a^2+b^2)$ en $S=-a^2(a^2+ab+b^2)$.

Vijfde Voorbeeld. De vergelijking $\frac{a^2x^2}{\sqrt{(b^2+x^2)}}-a^2\sqrt{(b^2+x^2)} = b^2x$ te herleiden.

Men verkrijgt hier achtervolgens; door de vergelijking met $\sqrt{(b^2+x^2)}$ te vermenigvuldigen

$$a^2x^2-a^2(b^2+x^2) = b^2x\sqrt{(b^2+x^2)};$$

door den term $a^2(b^2+x^2)$ te ontwikkelen,

$$a^2x^2-a^2b^2-a^2x^2 = b^2x\sqrt{(b^2+x^2)};$$

door de termen a^2x^2 en $-a^2x^2$, die elkander vernietigen, weg te laten,

$$-a^2b^2 = b^2x\sqrt{(b^2+x^2)};$$

door de vergelijking door b^2 te deelen,

$$-a^2 = x\sqrt{(b^2+x^2)};$$

door dezelve in het vierkant te brengen,

$$a^4 = x^2(b^2+x^2);$$

door ontwikkeling van het tweede lid

$$a^4 = b^2x^2+x^4,$$

en ten laatste door overbrenging van termen en omkeering van teekens,

$$x^4+b^2x^2-a^4 = 0,$$

welke vergelijking nu de gedaante $x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0$ heeft, zijnde hier $P=0$, $Q=b^2$, $R=0$ en $S=-a^4$.

Zesde Voorbeeld. Laat nog gevraagd worden om de vergelijking $\frac{2x^2}{\sqrt{(x+1)}}-4\sqrt{(x-1)} = \frac{2}{x}\sqrt{(x-1)}+\frac{2}{\sqrt{(x+1)}}$ te herleiden.

Deze vergelijking kan dadelijk door 2 gedeeld worden, waardoor men verkrijgt

$$\frac{x^2}{\sqrt{(x+1)}}-2\sqrt{(x-1)} = \frac{1}{x}\sqrt{(x-1)}+\frac{1}{\sqrt{(x+1)}};$$

brengt men nu den laatsten term van het tweede lid in het eerste lid over, en vereenigt men dan de beide breuken, die denzelfden noemer hebben, tot eene enkele breuk, dan kan deze laatste verkleind worden; men heeft dus achtervolgens

$$\frac{x^2}{\sqrt{(x+1)}}-\frac{1}{\sqrt{(x+1)}}-2\sqrt{(x-1)} = \frac{1}{x}\sqrt{(x-1)},$$

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{(x+1)}}-2\sqrt{(x-1)} = \frac{1}{x}\sqrt{(x-1)},$$

$$(x-1)\sqrt{(x+1)}-2\sqrt{(x-1)} = \frac{1}{x}\sqrt{(x-1)}.$$

Hieruit blijkt, dat het, tot verdrijving der breuken, niet noodig was, de vergelijking met $\sqrt{(x+1)}$ te vermenigvuldigen; men moet dan ook, in zulke gevallen, overeenkomstig hetgeen in § 142 gezegd is, dergelijke vermenigvuldigingen nalaten, ten einde geene nieuwe waarden voor x in te voeren.

Alsnu ziet men ligtelijk, dat al de termen der vergelijking door $\sqrt{(x-1)}$ deelbaar zijn; deelt men dus de vergelijking door $\sqrt{(x-1)}$, dan verdonkert men de waarde van x, die den deeler nul maakt, en dus aan de vergelijking voldoet; men kan echter deze deeling wel verrigten, mits men maar opmerke, dat $x=1$, waardoor de deeler nul zou worden, aan de oorspronkelijke vergelijking voldoet, doch niet meer aan de vergelijking

$$\sqrt{(x-1)(x+1)}-2=\frac{1}{x},$$

die er, na deeling door $\sqrt{(x-1)}$, ontstaat, voldoen zal.

Verder vermenigvuldigt men de vergelijking met x, dan wordt zij

$$x\sqrt{(x^2-1)}-2x=1,$$

of, na overbrenging van den term $2x$,

$$x\sqrt{(x^2-1)}=1+2x;$$

daarna brengt men deze vergelijking in het vierkant, en bekomt dan

$$x^2(x^2-1)=(1+2x)^2,$$

dat is, na ontwikkeling

$$x^4-x^2=1+4x+4x^2,$$

en na overbrenging van termen

$$x^4-5x^2-4x-1=0,$$

welke vergelijking alweder de begeerde gedaante heeft.

De waarde $x=1$, die aan de oorspronkelijke vergelijking voldeed, voldoet nu aan de door herleiding verkregene niet meer; maar hierin steekt geene de minste zwarigheid, omdat de herleiding eene voorafgaande bewerking is, die de oplossing ten doel heeft, en men nu reeds weet, dat $x=1$ eene der te zoekene waarden is, zoodat slechts de overige waarden van x, die aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen, uit de, door herleiding verkregene, behoeven opgespoord te worden.

Oplossing der vergelijkingen van den eersten graad met ééne onbekende, en van vraagstukken, daartoe betrekkelijk.

§ 146. Het is alleen door de vergelijkingen tot derzelver algemeene gedaanten te herleiden, dat men beoordeelen kan, tot welken graad zij opklimmen. Bevindt men bij die herleiding, dat eene vergelijking slechts van den eersten graad wordt, dan brengt men dezelve gewoonlijk tot de gedaante $Ax=B$, welke van de, in § 134 opgegevene, gedaante $x+P=0$ nergens anders in verschilt, dan dat men al de termen, waarin x niet voorkomt, in het tweede, in plaats van in het eerste lid heeft gebragt, en de deeling door den coëfficiënt niet heeft bewerkstelligd.

Is nu eene vergelijking gebragt tot de gedaante

$$Ax = B,$$

dan volgt uit dezelve terstond

$$x = \frac{B}{A},$$

waaruit niet alleen blijkt, dat $\frac{B}{A}$ de waarde voor x is, die aan de vergelijking voldoen zal, maar ook, dat deze waarde de eenige zal wezen, waardoor aan de vergelijking voldaan kan worden.

Men heeft derhalve, tot het oplossen van vergelijkingen van den eersten graad met éene onbekende, den volgenden

Regel. *Verdrijf de gebrokens en wortelteekens, en ontwikkel de magten en producten, zoo als in den laatstvorigen regel gezegd is; laat de termen, die elkander vernietigen, weg, en vereenig de gelijksoortige; plaats al de termen, waarin de onbekende voorkomt, in het eerste, en al de andere in het tweede lid der vergelijking; breng in het eerste lid, zoo hetzelve uit meer dan één' term bestaat, de onbekende buiten haakjes, en deel eindelijk de vergelijking door den coëfficiënt van de onbekende.*

Men kan nog opmerken: 1°. dat deze regel eigenlijk niet anders behelst, dan een voorschrift, om de gegevene vergelijking zoodanig te herleiden, dat het eerste lid alleen uit de onbekende bestaat, en dat het tweede lid alleen uit bekenden is zamengesteld; 2°. dat de, door deze herleiding verkregene, vergelijking onmiddellijk aanwijst, hoe de onbekende van de bekenden afhangt, terwijl deze betrekking van afhankelijkheid in de gegevene vergelijking slechts ingewikkeld lag opgesloten.

Zie hier een paar voorbeelden:

Eerste Voorbeeld. De waarde van y te vinden uit de vergelijking $\frac{\sqrt{(y^2+5)}}{y+1} = 1.$

Men zal hier achtervolgens vinden

$$\frac{\sqrt{(y^2+5)}}{y+1} = 1,$$
$$\sqrt{(y^2+5)} = y+1,$$
$$y^2+5 = (y+1)^2,$$
$$y^2+5 = y^2+2y+1,$$
$$2y = 4,$$
$$y = 2.$$

Tweede Voorbeeld. Men verlangt x op te lossen uit de vergelijking

$$\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}.$$

Hier zal men achtervolgens verkrijgen

$$\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a},$$

$$3a^2bc(a+b)^2+a^3b^2+(2a+b)(a+b)b^2x=3acx(a+b)^3+bx(a+b)^3,$$

$$(2a+b)(a+b)b^2x-3acx(a+b)^3-bx(a+b)^3=-3a^2bc(a+b)^2-a^3b^2,$$

$$x(a+b)[(2a+b)b^2-3ac(a+b)^2-b(a+b)^2]=-a^2b[3c(a+b)^2+ab],$$

$$x(a+b)[2ab^2+b^3-3ac(a+b)^2-a^2b-2ab^2-b^3]=-a^2b[3c(a+b)^2+ab],$$

$$x(a+b)[-3ac(a+b)^2-a^2b]=-a^2b[3c(a+b)^2+ab],$$

$$-ax(a+b)[3c(a+b)^2+ab]=-a^2b[3c(a+b)^2+ab],$$

$$x(a+b)=ab,$$

$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

§ 147. De oplossing van elk vraagstuk komt daarop neder, dat men uit het bekende het onbekende weet te vinden. Om de stelkunst op de oplossing van eenig vraagstuk te kunnen toepassen, wordt vereischt, dat men zoo wel hetgeen bekend, als hetgeen onbekend is, door getallen kan uitdrukken, en de oplossing bestaat dan in te vinden, hoe uit de bekende getallen de onbekende kunnen worden berekend. Wanneer het vinden van *één* onbekend getal tot de oplossing van een vraagstuk genoegzaam is, dan wordt het vraagstuk *bepaald* genoemd, indien men al deszelfs voorwaarden door eene niet-identieke vergelijking kan uitdrukken. De oplossing van zulke bepaalde vraagstukken bestaat dus uit twee deelen. Het eerste is, dat men deszelfs voorwaarden door eene vergelijking uitdrukt, hetgeen men gewoonlijk noemt: *een vraagstuk in vergelijking brengen*, het tweede is, dat men deze vergelijking oplost. Om deze vergelijking op te lossen is, voor zoo verre zij van den eersten graad mogt zijn, hetgeen in de vorige § geleerd is, voldoende; om het vraagstuk in vergelijking te brengen, wordt in ieder geval eene afzonderlijke redenering vereischt, die zich aan geene bepaalde regels laat onderwerpen.

§ 148. Hoezeer het in vergelijking brengen van een vraagstuk zich aan geene vaste regels laat onderwerpen, kan men daartoe echter het volgende tot leiddraad nemen. Onderstel, dat men kon gissen, wat het onbekende getal zijn moest, dan zou men kunnen beproeven, of dat gegiste getal aan al de voorwaarden van het vraagstuk voldeed. Tot deze beproeving zou vereischt worden, dat men: of het gegiste getal aan zekere bewerkingen onderwierp, om te onderzoeken, of daardoor een vooraf bekend getal gevonden zou worden; of dat men het gegiste getal op tweeërlei wijzen aan zekere bewerkingen onderwierp, om te onderzoeken, of men daardoor tot een zelfde getal zou geraken. Doet men nu, in plaats van het gegiste getal, eene onbekende, bij voorbeeld x, dezelfde bewerkingen ondergaan, dan zal men daardoor geraken, of tot eenen stelkunstigen vorm, die gelijk aan een vooraf bekend getal moet zijn, of tot twee stelkunstige vormen, die onderling gelijk moeten wezen, en hierdoor komt men dan tot de begeerde vergelijking.

Tot opheldering van het gezegde, kan de behandeling van de beide volgende vraagstukken strekken.

VRAAGSTUK. *Iemand ontmoet drie bedelaars; aan den eersten geeft hij de helft van de centen, die hij bij zich heeft, met nog eenen cent; aan den tweeden geeft hij de helft van de centen, die hij overhield, met nog eenen cent; aan den derden geeft hij weder de helft der centen, die hij toen over had, met nog eenen cent, en bevindt daarna nog slechts drie centen bij zich te hebben: men vraagt hoe veel centen hij in den beginne gehad heeft.*

Onderstel, dat men giste, dat hij 30 centen bij zich gehad heeft, dan zou men op de volgende wijze kunnen beproeven, of dit getal het juiste ware. Hij geeft aan den eersten bedelaar de helft van die 30 centen met nog éénen cent, en dus in het geheel 16 centen, hij behoudt dus nog 14 centen; hiervan geeft hij aan den tweeden weder de helft met nog éénen cent, dus in het geheel 8 centen, bij gevolg houdt hij er 6 over; aan den derden bedelaar eindelijk geeft hij de helft van deze 6 centen met nog éénen cent, dus in het geheel 4 centen, zoodat hij er ten laatste 2 overhoudt. Ware nu het gegiste getal 30 het juiste, dan zou het gevonden overschot van 2 centen hetzelfde moeten zijn als het overschot van 3 centen, dat in het vraagstuk is opgegeven; derhalve is 30 het begeerde getal niet. Stelt men alzoo het gevraagde getal centen door x voor, en laat men die x dezelfde bewerkingen ondergaan, die boven op het getal 30 zijn verrigt, dan verkrijgt men voor het overschot eenen stelkunstigen vorm, dien men gelijk zal moeten stellen aan het gegeven overschot, en daardoor is dan het vraagstuk in vergelijking gebragt. Men verkrijgt derhalve deze

OPLOSSING. Stel het getal centen, dat hij bij zich had, gelijk . . x,

dan geeft hij aan den eersten bedelaar . . . . $\frac{1}{2}x+1$

en houdt dus over . . . . $\frac{1}{2}x-1$,

aan den tweeden geeft hij $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)+1$, of . . . . $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

en houdt daarna over . . . . $\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$,

aan den derden geeft hij $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}\right)+1$, of . . . . $\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}$,

zoodat hij eindelijk overhoudt . . . . $\frac{1}{8}x-\frac{7}{4}$;

daar nu gegeven is, dat hij 3 centen overhoudt, heeft men de vergelijking

$$\frac{1}{8}x-\frac{7}{4}=3.$$

Om deze vergelijking op te lossen, vermenigvuldige men dezelve met 8, dan komt er

$$x-14 = 24,$$

waaruit volgt

$$x = 38;$$

derhalve had hij 38 centen bij zich.

Beproeft men nu de juistheid van dit getal 38, even zoo als boven met het gegiste getal 30 gedaan is, dan zal men voor het laatste overschot naar behooren 3 centen vinden.

Vraagstuk. *Een wijnkooper heeft 68 kannen wijn, van een gulden de kan: hoeveel kannen, van 55 cents de kan, moet hij daarbij voegen, opdat de gemengde wijn 72 cents de kan waard zij?*

Oplossing. Stel dat hij er x kannen van 55 cents moet bijvoegen, dan is de waarde van den wijn, dien hij er bijvoegt, $55x$ cents; de waarde van de eerstgenoemde 68 kannen is 6800 cents, zoodat de waarde van het mengsel, door den stelkunstigen vorm $6800+55x$, in centen uitgedrukt wordt. Dit mengsel bestaat uit $68+x$ kannen; zal hetzelve nu 72 cents de kan waard zijn, dan wordt de geheele waarde van het mengsel, ook door den vorm $(68+x)72$, in centen uitgedrukt. Bijgevolg heeft men de vergelijking

$$(68+x)72 = 6800+55x,$$

waaruit achtervolgens gevonden wordt

$$4896+72x = 6800+55x,$$
$$72x-55x = 6800-4896,$$
$$17x = 1904,$$
$$x = 112.$$

Hij moet er dus 112 kannen bijvoegen.

§ 149. Bij het oplossen van vergelijkingen, is het verkiesselijk, ook de gegevene getallen door letters voor te stellen, waartoe men dan, zoo als reeds in § 1 gezegd is, de eerste letters van het alphabet neemt. Hierdoor verkrijgt men, in plaats van onmiddellijk het onbekende getal te vinden, voor de onbekende eenen stelkunstigen vorm, die aanwijst, hoe het onbekende getal uit de bekende getallen moet berekend worden. Dit heeft het voordeel, dat men, indien de gegevene getallen veranderd werden, het vraagstuk met die nieuwe getallen niet op nieuw zou behoeven op te lossen, en dat men tevens het eigenlijk cijferen met de gegevene getallen tot het einde der oplossing bespaart, en door het vereenvoudigen van den verkregen' stelkunstigen vorm zoo gemakkelijk mogelijk kan maken.

Zoo zou men, bij voorbeeld, het laatste vraagstuk der vorige § aldus kunnen opgeven: *een wijnkooper heeft a kannen wijn, van b cents de kan, hoeveel kannen, van c cents de kan, moet hij daarbij voegen, opdat de gemengde wijn d cents de kan waard zij?* Dezelfde redenering als vroeger volgende, zou men verkregen hebben de vergelijking

$$(a+x)d = ab+cx,$$

en daaruit achtervolgens hebben gevonden

$$ad+dx = ab+cx,$$
$$dx-cx = ab-ad,$$
$$(d-c)x = a(b-d),$$
$$x = \frac{a(b-d)}{d-c}.$$

Hierdoor is nu eene formule gevonden, die aanwijst, hoe het gevraagde getal x van de bekende getallen afhangt. Stelt men in die formule voor de bekenden de vroeger gegevene getallen: $a = 68$, $b = 100$, $c = 55$ en $d = 72$, dan vindt men

$$x = \frac{68(100-72)}{72-55} = \frac{68 \times 28}{17} = 4 \times 28 = 112.$$

Deze uitkomst is dezelfde, als de vroeger gevondene, maar is, ten opzigte van de bewerkingen, die men met de, in cijfers uitgedrukte, getallen heeft moeten uitvoeren, gemakkelijker verkregen geworden.

Stelde men zich nu de vraag voor: *hoeveel kannen wijn, van 50 cents, bij 70 kannen, van 95 cents, moeten gevoegd worden, opdat de kan van het mengsel 75 cents waard zij*, dan zou men, om deze vraag op te lossen, in de formule $x = \frac{a(b-d)}{d-c}$, slechts $a = 70$, $b = 95$, $c = 50$ en $d = 75$ behoeven te substitueren, waardoor men voor het gevraagde aantal kannen zou vinden

$$x = \frac{70(95-75)}{75-50} = \frac{70 \times 20}{25} = 14 \times 4 = 56,$$

zoodat het onnoodig is, met deze nieuwe gegevens de oplossing, zoo als die in de vorige § voorkomt, te hervatten.

§ 150. Het voorstellen van de bekenden door letters, kan nog eene andere nuttige strekking hebben; reeds in § 133 is namelijk gezegd, dat men in eene vergelijking willekeurig elke letter, die daarin voorkomt, als de onbekende kan beschouwen; wil men dus een vraagstuk zoodanig veranderen, dat hetgeen eerst onbekend was, als bekend, en daarentegen een der vroegere gegevens als onbekend wordt aangenomen, dan zal men dit vraagstuk niet op nieuw in vergelijking behoeven te brengen, maar slechts de reeds opgemaakte vergelijking ten opzigte van de letter, waardoor de nieuwe onbekende wordt voorgesteld, behoeven op te lossen.

Lost men, bij voorbeeld, de vergelijking $(a+x)d = ab+cx$, waartoe het vraagstuk van § 149 aanleiding gaf, ten opzigte van d op, waardoor men vindt

$$d = \frac{ab+cx}{a+x},$$

dan behelst deze formule de oplossing der vraag: *hoeveel de kan gemengden wijn waard is, indien bij a kannen wijn, van b cents de kan, een gegeven getal x kannen van c cents de kan gevoegd wordt.*

Lost men diezelfde vergelijking ten opzigte van c op, waardoor men vindt

$$c = \frac{(a+x)d-ab}{x},$$

dan behelst deze formule de oplossing der vraag: *hoe duur de wyn moet zijn, waarvan men een gegeven getal van x kannen bij a kannen wijn, van b cents de kan, moet voegen, opdat het mengsel d cents de kan waard zij.*

Verklaring van eenige bijzondere waarden, die de onbekende kan verkrijgen.

§ 151. Is eene vergelijking van den eersten graad met ééne onbekende tot hare algemeene gedaante $Ax = B$ herleid, waarin A en B stelkunstige vormen verbeelden, die alleen uit bekenden zijn zamengesteld, en stelt men in die vergelijking voor de bekenden de gegevene waarden, dan kan het gebeuren, dat de vormen A en B een van beide, of beide, nul worden.

§ 152. Wordt B alleen gelijk nul, dan verandert de vergelijking $Ax = B$ in

$$Ax = 0,$$

en hieraan kan alleen voldaan worden door $x = 0$ te nemen; want zoo men x niet gelijk nul nam, zou, omdat A niet gelijk nul is, het product Ax ook niet gelijk nul kunnen wezen. Deze zelfde uitkomst wordt ook verkregen, door in de waarde $x = \frac{B}{A}$, die uit de vergelijking $Ax = B$ volgt, B gelijk nul te stellen; want dan verkrijgt men

$$x = \frac{0}{A},$$

welke waarde klaarblijkelijk nul is, omdat het gebroken $\frac{0}{A}$ niets anders beteekent, dan $\frac{1}{A}$ nul maal genomen.

§ 153. Wordt A alleen gelijk nul, dan verandert de vergelijking $Ax = B$ in

$$0.x = B;$$

aan deze vergelijking kan nu geene waarde voor x voldoen, omdat, wat men ook voor x neemt, het eerste lid altijd nul blijft, terwijl het tweede lid altijd gelijk B, en dus niet gelijk nul is. Deze zelfde uitkomst zou men ook moeten verkrijgen, door in de waarde $x = \frac{B}{A}$, die uit de vergelijking $Ax = B$ volgt, A gelijk nul te stellen, waardoor

$$x = \frac{B}{0}$$

wordt. Wat nu de beteekenis van het gebroken $\frac{B}{0}$ is, kan op de volgende wijze blijken.

Stelt men zich de rij van gebrokens

$$\frac{B}{1}, \quad \frac{B}{0{,}1}, \quad \frac{B}{0{,}01}, \quad \frac{B}{0{,}001}, \quad \frac{B}{0{,}0001}, \textit{ enz.}$$

voor, waarvan de waarden zijn:

$$B, \quad 10B, \quad 100B, \quad 1000B, \quad 10000B, \textit{ enz.}$$

dan ziet men duidelijk, dat men, door den teller onveranderd te laten, en den noemer klein genoeg te nemen, de waarde van het gebroken zoo groot kan maken, als men verkiest. Hoe verbazend groot men nu ook de waarde van het gebroken, door den noemer klein genoeg te nemen, moge gemaakt hebben, zal echter die noemer nog niet nul wezen. Zoodra dus de noemer werkelijk nul is, is geen getal groot genoeg, om de waarde van het gebroken uit te drukken, en het is daarom, dat men de waarde van elk gebroken, dat een' bepaalden teller heeft, maar waarvan de noemer nul is, *oneindig groot* noemt. Om zulke oneindig groote waarden aan te duiden, gebruikt men het teeken ∞; men schrijft dus

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{a}{0} = \infty, \textit{ enz.}$$

Na deze verklaring, volgt uit de waarde $x = \frac{B}{A}$, dat voor $A = 0$, $x = \infty$ wordt, dat wil zeggen, dat geene waarde voor x groot genoeg is, om zoo $A = 0$ is, aan de vergelijking $Ax = B$ te voldoen. Men merke echter op, dat de stelkunstige vorm $\frac{B}{0}$ in de vergelijking $0.x = B$ gesubstitueerd wordende, aan dezelve voldoet; want men heeft $0 \times \frac{B}{0} = B$; omdat men hiervoor ook schrijven kan $0 \times \infty = B$, blijkt hieruit tevens, dat het product $0 \times \infty$ eene zekere waarde hebben kan, en niet gelijk 0 behoeft te wezen.

§ 154. Worden in de vergelijking $Ax = B$, de vormen A en B beide gelijk nul, dan verandert die vergelijking in

$$0.x = 0,$$

en nu zullen klaarblijkelijk alle waarden, die men voor x neemt, aan dezelve voldoen; de vergelijking is dus in dit geval identiek. Deze zelfde uitkomst wordt ook verkregen, door in de waarde $x = \frac{B}{A}$, die uit $Ax = B$ volgt, A en B gelijk nul te stellen; want dan verkrijgt men

$$x = \frac{0}{0},$$

welke waarde klaarblijkelijk ieder willekeurig getal kan voorstellen, omdat, welke waarde men ook aan het quotient $\frac{0}{0}$ mogt willen geven, altijd het product van het quotient met den deeler, het deeltal weder zal opleveren; het is uit dien hoofde, dat men de waarde van het quotient $\frac{0}{0}$ *onbepaald* noemt.

Men moet echter opmerken, dat, wanneer een gebroken $\frac{0}{0}$ mogt worden, omdat teller en noemer eenen gemeenschappelijken factor hebben, die nul wordt, de waarde van dit gebroken niet onbepaald behoeft te zijn, maar verkregen zal worden, indien men dien gemeenschappelijken factor uit teller en noemer weglaat.

Had men, bij voorbeeld,

$$Q = \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2},$$

dan zou, indien men $x=a$ stelde, $Q=\frac{0}{0}$ worden; maar dit wordt veroorzaakt, doordien teller en noemer den vorm $x-a$ als factor bevatten, die voor $x=a$ nul wordt. Laat men dezen factor uit teller en noemer weg, dan komt er

$$Q = \frac{x^2+ax+a^2}{x+a},$$

en dan vindt men, dat voor $x=a$, $Q=\frac{3a^2}{2a}=\frac{3}{2}a$ wordt, en dus niet onbepaald is.

Had men daarentegen

$$Q = \frac{ab-ac+bc-b^2}{ab+ac-bc-a^2},$$

dan zou voor $a=b=c$, $Q=\frac{0}{0}$ worden; men zal hier vinden, dat teller en noemer den factor $a-b$ gemeen hebben; laat men dus dezen factor weg, dan komt er

$$Q = \frac{b-c}{c-a},$$

en stelt men hierin $a=b=c$, dan komt er nog $Q=\frac{0}{0}$, zoodat in dit geval Q werkelijk onbepaald is.

§ 155. Tot opheldering van hetgeen in de drie laatste §§ gezegd is, stelle men zich de volgende vragen voor:

1°. *Hoeveel kannen wijn, van c cents de kan, moet men bij a kannen, van b cents de kan, voegen, opdat de gemengde wijn b cents de kan waard zij?*

Dit vraagstuk is hetzelfde, als dat van § 149, alleen met dat onderscheid, dat het getal, aldaar door d voorgesteld, hier b is; om de oplossing te verkrijgen, behoeft men dus in de vergelijking, en in de waarde van x, die aldaar gevonden zijn, namelijk in

$$(d-c)x = a(b-d) \quad \text{en} \quad x = \frac{a(b-d)}{d-c},$$

slechts $d=b$ te stellen, waardoor men hebben zal

$$(b-c)x = 0 \quad \text{en} \quad x = \frac{0}{b-c} = 0.$$

Men moet er dus niets bij voegen.

2°. *Hoeveel kannen wijn, van c cents de kan, moet men bij a kannen, van b cents de kan, voegen, opdat de gemengde wijn c cents de kan waard zij?*

Dit vraagstuk is weder hetzelfde als dat van § 149, mits men slechts d in c verandere; hierdoor gaan

$$(d-c)x = a(b-d) \qquad \text{en} \qquad x = \frac{a(b-d)}{d-c}$$

over in

$$0.x = a(b-c) \qquad \text{en} \qquad x = \frac{a(b-c)}{0} = \infty.$$

Hieruit blijkt, dat het onmogelijk is, om door de verlangde bijvoeging aan den gemengden wijn de begeerde waarde te geven.

3°. *Hoeveel kannen wijn, van b cents de kan, moet men bij a kannen, van b cents voegen, opdat de gemengde wijn b cents de kan waard zij?*

Deze vraag is nogmaals dezelfde, als die van § 149, mits men slechts c en d in b verandere; hierdoor veranderen

$$(d-c)x = a(b-d) \qquad \text{en} \qquad x = \frac{a(b-d)}{d-c}$$

in

$$0.x = 0 \qquad \text{en} \qquad x = \frac{0}{0} = \textit{onbepaald}.$$

Hieruit blijkt, dat welk willekeurig aantal kannen wijn er bijgevoegd worde, de gemengde wijn altijd de vereischte waarde zal hebben.

De uitkomsten, in de bovenstaande vraagstukken, door derzelver stelkunstige behandeling verkregen, waren even gemakkelijk uit de vragen zelven op te maken, en men moet dus hier die stelkunstige behandeling alleen aanzien, als een eenvoudig voorbeeld, waardoor de juistheid van de besluiten, waartoe de stelkunst aanleiding geeft, aanschouwelijk gemaakt wordt. In meer ingewikkelde vraagstukken, waarvan de onmogelijkheid of onbepaaldheid niet zoo van zelve in het oog valt, zijn even zoo $x = \infty$ en $x = \frac{0}{0}$ stelkunstige zinnebeelden, waardoor die onmogelijkheid of onbepaaldheid wordt aangetoond.

§ 156. Als in eene vergelijking van den eersten graad, alvorens dezelve tot de gedaante $Ax = B$ herleid is, aan de bekenden waarden worden gegeven, die, na de herleiding, A en B een van beide, of beide, nul zouden maken, dan zal die vergelijking, door de herleiding, klaarblijkelijk eene der gedaanten

$$Ax = 0, \qquad 0 = B, \qquad 0 = 0,$$

moeten aannemen; en naargelang zij eene dezer gedaanten aanneemt, verkeert men in de gevallen van § 152, 153 of 154. Komt men derhalve tot eene vergelijking $Ax = 0$, dan kan alleen $x = 0$ aan dezelve voldoen; komt men tot eene vergelijking $0 = B$, dan zal door geene eindige waarde van de onbekende aan de vergelijking voldaan kunnen worden, en komt men tot eene vergelijking $0 = 0$, dan zal elke willekeurige waarde, voor de onbekende genomen, aan de vergelijking beantwoorden, zoodat zij in dit geval identiek zal wezen.

Ziehier drie vraagstukken, in elk van welke een dezer gevallen voorkomt.

VRAAGSTUK. *Een vader gevraagd zynde, hoeveel volle jaren zijn zoon oud was, antwoordde: ik ben 25 jaren ouder dan mijn zoon; maar over 5 jaren, zal ik zesmaal zoo veel jaren tellen als hij: wat is de tegenwoordige ouderdom van zijnen zoon?*

OPLOSSING. Stel, dat de tegenwoordige ouderdom van den zoon x jaren is, dan is, over 5 jaren, zijn ouderdom $x+5$; de vader is alsdan, omdat hij 25 jaren ouder dan de zoon is, $x+30$, of ook, omdat hij dan zesmaal zoo oud als de zoon is, $6(x+5)$ jaren. Men heeft dus de vergelijking
$$6(x+5) = x+30,$$
waaruit achtervolgens gevonden wordt
$$6x+30 = x+30,$$
$$5x = 0,$$
en
$$x = 0.$$

De zoon is dus nog geen vol jaar oud.

VRAAGSTUK. *Twee personen A en B zetten ieder een kapitaal op interest uit: A gedurende 10 maanden, tegen 5 ten honderd 'sjaars, en B, die 100 gulden meer uitzet, gedurende 15 maanden, tegen 4 ten honderd 'sjaars. Indien nu mogt bevonden worden, dat het kapitaal van A met de rente, zich tot dat van B met de rente verhoudt, als 125 tot 126, hoe groot moeten dan de kapitalen geweest zijn, die zij uitgezet hebben?*

OPLOSSING. Stel, dat het kapitaal, door A uitgezet, x gulden bedrage, dan is dat door B uitgezet $x+100$ gulden. De rente, die A van zijn kapitaal trekt, is in het jaar, tegen 5 ten honderd, $\frac{5}{100}x$, en dus in 10 maanden $\frac{10}{12} \times \frac{5}{100}x$ of $\frac{1}{24}x$ gulden; A ontvangt dus voor kapitaal en rente $x+\frac{1}{24}x$, of $\frac{25}{24}x$ gulden. De rente, die B van zijn kapitaal trekt, is in het jaar, tegen 4 ten honderd, $\frac{4}{100}(x+100)$, en dus in 15 maanden $\frac{15}{12} \times \frac{4}{100}(x+100)$ of $\frac{1}{20}(x+100)$ gulden; B ontvangt dus voor kapitaal en rente $(x+100)+\frac{1}{20}(x+100)$ of $\frac{21}{20}(x+100)$ gulden. Volgens de opgave, moet men dus hebben de evenredigheid
$$\frac{25}{24}x : \frac{21}{20}(x+100) = 125 : 126.$$

Daar nu in eene evenredigheid het product der uiterste termen gelijk aan dat der middelste moet zijn, volgt uit deze evenredigheid de vergelijking

$$126 \times \frac{25}{24} x = 125 \times \frac{21}{20} (x+100),$$

waarvoor men schrijven kan

$$21 \times \frac{25}{4} x = 25 \times \frac{21}{4} (x+100);$$

deze vergelijking met 4 vermenigvuldigende, en door 21×25 deelende, komt er

$$x = x+100$$

of

$$0 = 100,$$

waaruit blijkt, dat geene kapitalen aangewezen kunnen worden, die aan de voorwaarden van het vraagstuk beantwoorden.

Vraagstuk. *Twee breuken te vinden, van welke, ieder in het bijzonder, de teller één minder is, dan de noemer; terwijl tevens teller en noemer van de kleinste breuk ieder in het bijzonder één minder zijn, dan teller en noemer van de grootste breuk; zoodanig, dat het verschil dezer breuken gelijk zij aan de eenheid, gedeeld door het product der beide noemers.*

Oplossing. Stel voor den teller der kleinste breuk x, dan is deszelfs noemer $x+1$, en bijgevolg de breuk $\frac{x}{x+1}$; de grootste breuk moet dan $\frac{x+1}{x+2}$ zijn en, volgens de laatste voorwaarde van het vraagstuk, heeft men dus de vergelijking

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{(x+2)(x+1)}.$$

Vermenigvuldigt men deze vergelijking met $(x+2)(x+1)$, dan verandert zij in

$$(x+1)^2 - x(x+2) = 1;$$

ontwikkelt men nu het eerste lid, en laat men de termen, die elkander vernietigen, weg, dan verkrijgt men achtervolgens

$$x^2+2x+1-x^2-2x = 1,$$

en

$$0 = 0.$$

Hieruit blijkt, dat de vergelijking, waartoe het vraagstuk aanleiding gaf, identiek was, dat dus alle waarden voor x aan dezelve voldoen zouden, en dat bijgevolg alle breuken, die de eerst opgegevene eigenschappen hebben, altijd van zelven aan de laatste voorwaarde van het vraagstuk voldoen zullen.

Over de beteekenis der negatieve getallen, en over den positieven en negatieven toestand der grootheden.

§ 157. Onder de bijzondere waarden, die de onbekende kan verkrijgen, behooren, behalve de reeds vermelde uitdrukkingen $\frac{0}{a}$, $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$, ook nog de negatieve getallen.

Wanneer men eene vergelijking met ééne onbekende, die niet uit eenig vraagstuk is ontstaan, oplost, en dan voor die onbekende een negatief getal vindt, beteekent dit niets anders, dan dat alleen dit negatieve getal, voor de onbekende genomen, aan de vergelijking voldoen kan. Wanneer echter eene vergelijking, die uit een vraagstuk is voortgekomen, eene negatieve waarde voor de onbekende oplevert, is het van belang, te onderzoeken, wat men door zulk een zoogenaamd negatief antwoord verstaan moet.

Hierbij kan men twee gevallen onderscheiden: het eene, waarin het vraagstuk slechts ten doel heeft, een getal te vinden, dat aan zekere voorwaarden voldoet; het andere, waarin naar zekere onbekende grootheid gevraagd wordt, die door een getal kan uitgedrukt worden.

§ 158. Dewijl, zoo als in § 23 is aangetoond, de optelling van een negatief getal dezelfde uitkomst geeft, als de aftrekking van een even groot positief getal, en omgekeerd, zoo is, in het eerste der beide genoemde gevallen, de beteekenis van de negatieve waarde der onbekende eenvoudiglijk deze, dat men, om aan de voorwaarden van het vraagstuk in den eigenlijken zin te kunnen voldoen, eene in hetzelve verondersteld optelling of vermeerdering in eene aftrekking of vermindering moet veranderen, of omgekeerd.

Zie hier een paar eenvoudige voorbeelden:

VRAAGSTUK. *Men vraagt, teller en noemer van het gebroken* $\frac{26}{45}$, *ieder met een zelfde getal te verhoogen, zoodanig dat de waarde van het nieuwe gebroken, dat hierdoor ontstaat,* $\frac{1}{2}$ *worde.*

OPLOSSING. Laat het getal, waarmede teller en noemer verhoogd moeten worden, door x worden voorgesteld, dan zullen $26+x$ en $45+x$ teller en noemer van het nieuwe gebroken zijn, en men zal dus moeten hebben

$$\frac{26+x}{45+x}=\frac{1}{2};$$

deze vergelijking oplossende, zal men vinden

$$x=-7,$$

welke uitkomst nu aantoont, dat men, door teller en noemer van het gebroken $\frac{26}{45}$ met een zeker getal te verhoogen, de waarde van het gebroken niet gelijk aan $\frac{1}{2}$ kan maken; maar dat deze waarde $\frac{1}{2}$ zal worden, indien men teller en noemer elk met 7 vermindert.

VRAAGSTUK. *Een gezelschap van 20 personen heeft eene som van 120 gulden, tot het maken van zekere verteering, bijeengebragt; hunne verteering loopt echter hooger, zoodat bij de afrekening elk der* *genen, die toen nog aanwezig waren*, 1 *gulden* 50 *cents moest geven, om hetgeen er aan de bijeengebragte* 120 *gulden ontbrak, te voldoen. Indien nu de geheele verteering* 156 *gulden heeft beloopen, hoeveel personen waren er dan bij de afrekening reeds vertrokken?*

Oplossing. Stel, dat er x personen vertrokken waren, dan bleven er $20-x$ over, die bij de voorhanden 120 gulden elk $1\frac{1}{2}$ gulden gaven, om de geheele verteering te voldoen; de geheele verteering wordt dus in guldens uitgedrukt door den stelkunstigen vorm $120+(20-x)\times 1\frac{1}{2}$; maar er is gegeven, dat de geheele verteering 156 gulden beloopt; dus heeft men de vergelijking

$$120+\frac{3}{2}(20-x) = 156;$$

deze vergelijking oplossende, vindt men

$$x = -4,$$

en deze uitkomst toont nu aan, dat er geene personen vertrokken waren, maar dat integendeel het gezelschap met 4 personen vermeerderd was, die bij de afrekening hun aandeel in het te kort betaalden.

§ 159. Verkeert men in het tweede der beide gevallen, die aan het slot van § 157 onderscheiden zijn, dan kan men de beteekenis der negatieve antwoorden, op de volgende wijze, verklaren.

Laat x de onbekende zijn, waarvoor men, door het oplossen der uit eenig vraagstuk opgemaakte vergelijking, een negatief getal heeft gevonden, dan zal men dit negatieve getal, volgens § 14, altijd kunnen aanzien, als het verschil van twee andere getallen a en b, mits dit verschil in die orde genomen worde, dat men het grootste getal van het kleinste moet aftrekken. Men kan dus de gevondene negatieve waarde van x algemeen voorstellen door de formule

$$x = a-b,$$

waarin $b > a$ is.

Had men, in plaats van dit negatieve getal, een even groot positief getal voor x gevonden, dan zou men, volgens § 14, gehad hebben

$$x = b-a,$$

en dan zou men, uit de beteekenis, die aan x, alvorens het vraagstuk in vergelijking te brengen, gegeven is, terstond weten, welke grootheid door dat positieve getal x werd aangeduid.

Gaat men dus na, hoe de grootheid, die door het getal x, zoo het positief ware, zou worden aangeduid, als het verschil kan beschouwd worden, van twee andere grootheden, door de getallen a en b uitgedrukt, en stelt men zich het verschil der laatstgenoemde grootheden in eene omgekeerde orde voor, dan zal dit laatste verschil de grootheid zijn, die door het negatieve getal x wordt aangeduid.

Om deze redenering door een voorbeeld op te helderen, stelle men, dat in eenig vraagstuk naar het gewigt van een zeker ligchaam gevraagd werd, dat men het getal ponden van dit gewigt door x had uitgedrukt, en dat men, door de oplossing der uit dat vraagstuk verkregene vergelijking, had gevonden, $x=-10$. Zoo men hier, in plaats van $x=-10$, gevonden had $x=+10$, zou het gevraagde gewigt 10 pond zijn; dit gewigt van 10 pond kan men beschouwen, als een gewigt van 15 pond, verminderd met een gewigt van 5 pond, dat is, als een gewigt van 15 pond, waarop een tegenwigt van 5 pond werkt. Verandert men nu de orde der aftrekking, dan verkrijgt men een gewigt van 5 pond, verminderd met een gewigt van 15 pond, dat is, een gewigt van 5 pond, waarop een tegenwigt van 15 pond werkt. De waarde $x=-10$ wijst alzoo aan, dat het gevraagde gewigt een gewigt moet zijn, waarop een tegenwigt werkt, dat 10 pond grooter is. Met zulk een negatief gewigt zou, bij voorbeeld, de schaal eener balans naar beneden gedreven worden, indien de andere schaal met een overwigt van 10 pond bezwaard was.

Uit het gezegde volgt, dat de grootheid, die door een negatief getal wordt aangeduid, altijd dezelfde soort van grootheid is, die zij zijn zoude, indien het getal, waardoor zij aangeduid wordt, positief ware; maar dat hare aanduiding door een negatief getal alleen beteekent, dat zij in eenen toestand verkeert, die het tegenovergestelde is van den toestand, waarin men ondersteld heeft, dat zij zich zou bevinden.

In het aangehaalde voorbeeld onderstelde men, dat het ligchaam een gewigt van x pond had; zoo men nu $x=-10$ vindt, beteekent deze waarde van x wel altijd een gewigt van 10 pond, maar een gewigt, in eenen toestand, die tegengesteld is aan den toestand, waarin men hetzelve onderstelde te zijn, en dat alzoo eene drukking naar boven, in plaats van eene drukking naar beneden voortbrengt.

Grootheden, die in denzelfden toestand verkeeren, waarin men dezelve aanvankelijk onderstelde, en die dus ook door positieve getallen worden uitgedrukt, noemt men *grootheden in eenen positieven toestand*, of kortaf *positieve grootheden*; grootheden daarentegen, welke men door negatieve getallen uitgedrukt vindt, en die zich dus in eenen tegengestelden toestand bevinden van dien, waarin men ze aanvankelijk onderstelde te zijn, noemt men *grootheden in eenen negatieven toestand*, of kortaf *negatieve grootheden*.

§ 160. Om in ieder bijzonder geval duidelijk te maken, wat de negatieve toestand eener grootheid is, is het niet noodig, dat men zich, zoo als in de vorige §, eene even groote grootheid in den positieven toestand voorstelle; het is genoeg, dat men eene soortgelijke grootheid in den positieven toestand, als het verschil van twee andere grootheden beschouwe, en dan naga, wat dit verschil zou uitdrukken, indien de af te trekkene grootheid, die aanvankelijk de kleinste van die twee is, grooter dan de andere genomen werd.

Zie hier eenige voorbeelden, tot verklaring van den negatieven toestand van sommige grootheden.

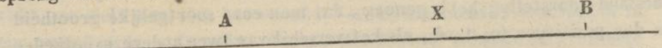
1°. Eene bezitting kan aangezien worden als eene geldwaarde, die het verschil is van twee andere geldwaarden, waarvan de grootste insgelijks eene bezitting, en de kleinste eene schuld is. Onderstelt men nu, dat de af te trekkene grootheid, of de schuld, grooter is, dan de bezitting, waarvan zij moet afgetrokken worden, dan ontstaat er eene negatieve bezitting; daar nu hier de schuld grooter dan de bezitting is, en er dus, na uitputting van de bezitting, eene schuld overblijft, zoo moet men door eene negatieve bezitting eene schuld verstaan. Even zoo blijkt, dat eene negatieve schuld eene bezitting is. Zegt men dus, dat iemand —100 gulden bezit, dan beteekent dit, dat hij 100 gulden meer schuld dan goed heeft; en zegt men, dat iemand —100 gulden schuldig is, dan wil zulks zeggen, dat hij, in plaats van 100 gulden te moeten betalen, integendeel 100 gulden te vorderen heeft.

2°. Eén verlies kan beschouwd worden als eene geldwaarde, die het verschil is van twee andere geldwaarden, waarvan de grootste insgelijks een verlies, en de kleinste of af te trekkene eene winst is. Neemt men deze af te trekkene geldwaarde grooter dan de andere, dan ontstaat er een negatief verlies, en dit negatief verlies is nu eene winst, omdat er meer winst dan verlies is. Op dezelfde wijze blijkt, dat eene negatieve winst een verlies is.

3°. De rijzing eens barometers kan aangemerkt worden als het uitwerksel van eene voorafgegane grootere rijzing en daarop gevolgde daling. Stelt men, dat de daling grooter is, dan de voorafgegane rijzing, dan ontstaat er eene negatieve rijzing, en deze is nu klaarblijkelijk eene daling.

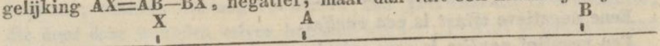
4°. Een jaargetal kan aangeduid worden, door te zeggen, dat men van een gegeven jaargetal een zeker aantal jaren moet terug tellen. Is het aantal jaren, dat men terug moet tellen, en dat dus van het gegeven jaargetal moet afgetrokken worden, grooter dan het laatstgenoemde, dan verkrijgt men een negatief jaargetal, en daar een jaargetal den verloopen' tijd na Christus geboorte aanwijst, zoo zal zulk een negatief jaargetal eenen tijd vóór Christus geboorte aanwijzen.

5°. De plaats van eenige punten op eene regte lijn wordt bepaald door de afstanden, die zij aan deze of gene zijde van een ander punt hebben, welks plaatsing men als bekend aanneemt, en dat men den oorsprong van die afstanden noemt. Laat A dien oorsprong voorstellen,



dan kan men den afstand AX, waarop het punt X zich ter regterzijde van dien oorsprong bevindt, aanzien als een grootere afstand AB, ter regterzijde van dien oorsprong genomen, waarvan door uit B een stuk

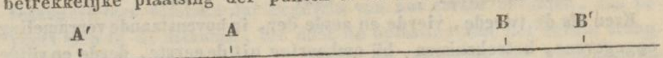
BX naar A uittezetten, dat stuk BX is afgetrokken; men heeft dus $AX = AB - BX$. Neemt men nu $BX > AB$, dan wordt AX, volgens de vergelijking $AX = AB - BX$, negatief; maar dan valt ook klaarblijkelijk het



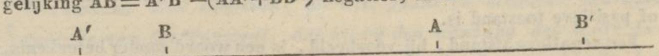
punt X ter linkerzijde van A, terwijl altijd AX deszelfs afstand van den oorsprong blijft; waaruit volgt, dat zoo een, ter regterzijde van zekeren oorsprong gerekende, afstand negatief is, men door dien negatieven afstand eenen even grooten afstand ter linkerzijde van dien oorsprong verstaan moet. Op dezelfde wijze zou blijken, dat zoo een, ter linkerzijde van den oorsprong gerekende, afstand negatief is, daardoor een even groote afstand ter regterzijde moet verstaan worden.

Neemt men dus aan, dat men de afstanden ter regterzijde als positief wil beschouwen, dan zullen die ter linkerzijde negatief zijn, en omgekeerd. Indien, bij voorbeeld, gevraagd werd, hoe ver het punt X ter regterzijde van A verwijderd was, dan zou het antwoord -3 duim beteekenen, dat het punt X op 3 duim afstand ter linkerzijde van A was gelegen.

6°. De betrekkelijke plaatsing van twee punten op eene regte lijn wordt aangewezen door den afstand, waarop zich het eene punt aan deze of gene zijde van het andere bevindt. Zoo zal, bij voorbeeld, de betrekkelijke plaatsing der punten A en B bekend zijn, indien men



weet, dat het punt B op den afstand AB regts van A ligt. Deze afstand AB kan beschouwd worden, als een grootere afstand $A'B'$, waarop het punt B zich vroeger ter regterzijde van A bevonden heeft, verminderd met de som der afstanden AA' en BB', die aanwijzen hoe ver deze punten verplaatst zijn, zoodat men heeft $AB = A'B' - (AA' + BB')$. Onderstelt men nu, dat $AA' + BB' > A'B'$ is, dan wordt AB, volgens de vergelijking $AB = A'B' - (AA' + BB')$ negatief, maar dan valt ook het punt



B ter linkerzijde van A; wordt dus de betrekkelijke plaatsing van twee punten A en B aangewezen, door op te geven, dat de afstand, waarop B ter regterzijde van A ligt, negatief is, dan beteekent de negatieve toestand van dien afstand, dat A op dienzelfden afstand ter regterzijde van B ligt. Vraagt men alzoo, hoe ver B ter regterzijde van A gelegen is, en is het antwoord -5 duim, dan beteekent dit antwoord, dat A op 5 duim afstand ter regterzijde van B ligt.

Deze verklaringen van den negatieven toestand van eenige grootheden tot leiddraad nemende, zal men gemakkelijk kunnen vinden, wat de negatieve toestand van alle andere soorten van grootheden beteekent. Zie hier de verzameling van een aantal dezer beteekenissen:

Eene negatieve *bezitting* is eene *schuld*.
Eene negatieve *schuld* is eene *bezitting*.
Eene negatieve *winst* is een *verlies*.
Een negatief *verlies* is eene *winst*.
Eene negatieve *ontvangst* is eene *uitgaaf*.
Eene negatieve *uitgaaf* is eene *ontvangst*.
Een negatieve *inkoop* is een *verkoop*.
Een negatief *dagloon* is eene *dagelijksche uitkeering*.
Een negatief *gewigt* is eene *kracht*, *die naar boven werkt*.
Een negatieve *afstand regts van een vast of veranderlijk punt* is een *afstand links van dat punt*.
Eene negatieve *hoogte boven zeker peil of nulpunt* is eene *diepte beneden dat peil of nulpunt*.
Eene negatieve *noorderbreedte* is eene *zuiderbreedte*.
Eene negatieve *rijzing* is eene *daling*.
Een negatieve *vooruitgang* is een *achteruitgang*.
Eene negatieve *snelheid in eene zekere rigting* is eene *snelheid in de tegengestelde rigting*.
Een negatieve *tijd na den middag* is een *tijd vóór den middag*.
Een negatieve *tijd na den aanvang eener jaartelling* is een *tijd vóór dien aanvang*. *enz*. *enz*.

Even als de tweede, vierde en zesde der, in bovenstaande verzameling opgegevene, beteekenissen, bij omkeering uit de eerste, derde en vijfde zijn afgeleid, ligt ook in elk der verder opgegevene beteekenissen bij omkeering eene andere opgesloten, waarvan de afzonderlijke opgave kortheidshalve is weggelaten.

§ 161. Dewijl het negatief zijn eener grootheid alleen beteekent, dat die grootheid zich in eenen toestand bevindt, die tegengesteld is aan den toestand, waarin men dezelve onderstelde te zijn, kan dat negatief zijn geene beteekenis hebben, zoo lang men niet weet, wat de onderstelde of positieve toestand is.

Een negatieve afstand, bij voorbeeld, is een woord zonder beteekenis, indien men niet vooraf gezegd heeft, wat men door een' positieven afstand verstaan wil, want het woord afstand drukt alleen de grootheid, maar niet haren toestand uit; zegt men echter, dat men door afstand, dat is, door positieven afstand, eenen afstand ter regterzijde van zeker punt bedoelt, dan is negatieve afstand een afstand ter linkerzijde van dat zelfde punt. Even zoo zijn negatieve tijd, negatieve geldwaarde, negatieve snelheid, enz. woorden zonder beteekenis, indien niet vooraf bepaald is geworden, wat men door positieven tijd, positieve geldwaarde, positieve snelheid, enz. verstaan wil; want ook de woorden tijd, geldwaarde, snelheid, enz. drukken wel eene grootheid, maar geenszins den toestand van die grootheid uit.

Sommige woorden, zoo als: schuld, ontvangst, winst, gewigt, drukken niet alleen eene grootheid, maar tevens den toestand dier grootheid uit; schuld, ontvangst, winst, zijn geldwaarden in toestanden, die door deze woorden zelven bepaald worden; gewigt is een drukkend vermogen, in dien toestand, dat het regt naar beneden werkt. Het is uit dien hoofde, dat negatieve schuld, negatieve ontvangst, negatieve winst, negatief gewigt, eene dadelijke beteekenis hebben.

Hoezeer men volkomen vrij is, om dezen of genen toestand eener grootheid als haren positieven toestand aan te nemen, bestaat echter daaromtrent ten opzigte van sommige grootheden een algemeen gebruik, waaraan men zich, tot bevordering van duidelijkheid en gemak dient te houden. Zoo neemt men, bij voorbeeld, bij eenen thermometer, altijd deszelfs stand boven het nulpunt als positief aan; zegt men dus, dat de thermometer op $+5$, op -3 graden staat, dan wordt daardoor bedoeld, dat dezelve 5 graden boven nul, 3 graden beneden nul aanwijst.

§ 162. De beschouwing van den positieven en negatieven toestand der getallen en grootheden heeft, behalve de verklaring der negatieve antwoorden, nog eene andere nuttige strekking. Wanneer men namelijk eenig vraagstuk heeft opgelost, en daarna een ander vraagstuk zou moeten oplossen, dat van het eerste alleen daarin verschilt, dat een of meer der gegevens, die in het laatste vraagstuk voorkomen, zich in den tegengestelden toestand der gegevens van het eerste bevinden, dan behoeft men in de uitkomst, die door de oplossing van het eerste vraagstuk is verkregen geworden, slechts die gegevens het tegengestelde teeken te geven, om dadelijk de uitkomst, die het laatste vraagstuk moet opleveren, te verkrijgen. Heeft men dus een vraagstuk opgelost, en daarbij de gegevens door letters voorgesteld, dan bevat die oplossing tevens de oplossing van alle andere vraagstukken, die van het oorspronkelijke slechts onderscheiden zijn door den negatieven toestand van een of meer der gegevens. Tot voorbeeld strekke het volgende

Vraagstuk. *Een koopman, die drie jaren na elkander jaarlijks* $\frac{1}{p}$ *gedeelte van het kapitaal, dat hij bij den aanvang des jaars bezat, verliest, bevindt na verloop van dien tijd, dat zijn kapitaal* a *gulden bedraagt: hoe groot was zijn kapitaal bij het begin van het eerste jaar?*

Oplossing. Stel, dat het gevraagde kapitaal in guldens uitgedrukt wordt, door . . . . x,

dan is het verlies in het eerste jaar . . . . $\frac{1}{p}x$,

en de koopman behoudt nog $x-\frac{1}{p}x$, of . . . . $x\left(1-\frac{1}{p}\right)$;

in het tweede jaar is alzoo zijn verlies . . . . $\frac{1}{p}x\left(1-\frac{1}{p}\right)$,

en dan behoudt hij nog $x\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p}x\left(1-\frac{1}{p}\right)$, of . . . . . . $x\left(1-\frac{1}{p}\right)^2$;
het verlies in het derde jaar is dus . . . . $\frac{1}{p}x\left(1-\frac{1}{p}\right)^2$,
en bij het einde van dat jaar is $x\left(1-\frac{1}{p}\right)^2-\frac{1}{p}x\left(1-\frac{1}{p}\right)^2$, of . . . . $x\left(1-\frac{1}{p}\right)^3$
het overblijvende kapitaal. Men heeft dus de vergelijking

$$x\left(1-\frac{1}{p}\right)^3 = a,$$

waaruit volgt $$x=\frac{ap^3}{(p-1)^3}.$$

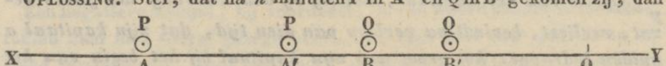
Wil men nu hetzelfde vraagstuk oplossen, met die verandering, dat de koopman jaarlijks $\frac{1}{p}$ gedeelte van het kapitaal, dat hij bij den aanvang des jaars bezit, wint, in plaats van verliest, dan zal men, omdat verlies, negatief genomen, winst is, slechts p in $-p$ moeten veranderen, en daardoor voor het aanvankelijk kapitaal verkrijgen

$$x=\frac{ap^3}{(p+1)^3}.$$

§ 163. Om hetgeen over den positieven en negatieven toestand der grootheden gezegd is, door voorbeelden op te helderen, verdient eene bijzondere onderscheiding de behandeling van het volgende

Vraagstuk. *Twee ligchamen* P *en* Q *bewegen zich op eene regte lijn* XY, *in de rigting van* X *naar* Y; *het eerste met eene gegevene snelheid van* p, *en het tweede met eene gegevene snelheid van* q *ellen in eene minuut. Zoo zich nu gelijktijdig* P *in het punt* A, *en* Q *in het punt* B *bevindt, van welke punten* A *en* B *de afstand* $AB = a$ *ellen gegeven is, vraagt men:* 1°. *op welken afstand deze ligchamen na verloop van* n *minuten van elkander zullen verwijderd zijn;* 2°. *hoeveel minuten er verloopen zullen, voor dat zij ergens in* O *bij elkander zullen wezen, en* 3°. *hoeveel ellen zij elk zullen moeten afleggen, alvorens zich in* O *te bevinden.*

Oplossing. Stel, dat na n minuten P in A′ en Q in B′ gekomen zij, dan



is, omdat P in elke minuut p ellen aflegt, $AA' = pn$ ellen, en omdat Q in elke minuut q ellen aflegt, $BB' = qn$ ellen. Nu is klaarblijkelijk

$$AA'+A'B' = AB+BB'.$$

Stelt men dus, dat de afstand $A'B'$, waarnaar gevraagd is, x ellen zij, dan volgt uit de bovenstaande vergelijking

$$pn+x = a+qn,$$

en hieruit x oplossende, verkrijgt men

$$x = a-(p-q)n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha),$$

door welke formule het eerste gedeelte der vraag beantwoord wordt.

Om het tweede gedeelte der vraag te beantwoorden, stelle men, dat de ligchamen na t minuten bij elkander zullen wezen, en merke op, dat alsdan de afstand A'B', en dus ook x, gelijk nul zal geworden zijn; nemende dus in de laatste vergelijking $x = 0$, dan zal $n = t$ worden, waardoor men komt tot de vergelijking

$$0 = a-(p-q)t,$$

en hieruit t oplossende, vindt men

$$t = \frac{a}{p-q} \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta),$$

door welke formule de begeerde tijd gevonden wordt.

Om eindelijk het antwoord op het derde gedeelte der vraag te verkrijgen, is het duidelijk, dat het ligchaam P in t minuten het punt O bereikende, daartoe pt ellen zal afgelegd hebben, en dat even zoo het ligchaam Q, qt ellen zal afleggen, alvorens in O te komen. Stellende dus AO $= v$ en BO $= w$ ellen, dan heeft men

$$v = pt = \frac{ap}{p-q} \quad \text{en} \quad w = qt = \frac{aq}{p-q} \ldots\ldots (\gamma),$$

waardoor ook het laatste gedeelte der vraag beantwoord is.

Ter toepassing van dit algemeene vraagstuk op een bijzonder voorbeeld, stelle men, dat de bewegende ligchamen voetgangers zijn, die zich een uur gaans, dat is $5555\frac{5}{9}$ ellen, van elkander bevinden, en elkander achter op gaan, de eerste met eene snelheid van 110 ellen, de tweede met eene snelheid van 80 ellen in eene minuut (van welke snelheden de eene grooter, en de andere kleiner is, dan de gewone snelheid, waarmede iemand gaat). Indien nu gevraagd wordt, hoe ver die voetgangers na een uur tijds van elkander verwijderd zijn, substituere men in de formule (α), $a = 5555\frac{5}{9}$, $p = 110$, $q = 80$ en $n = 60$, dan komt er voor den gevraagden afstand in ellen

$$x = 5555\frac{5}{9} - (110-80)60 = 3755\frac{5}{9}.$$

Indien gevraagd wordt, hoe lang het duren zal, eer die voetgangers elkander ingehaald hebben, substituere men in (β), $a = 5555\frac{5}{9}$, $p = 110$ en $q = 80$, dan komt er voor den gevraagden tijd in minuten

$$t = \frac{5555\frac{5}{9}}{110-80} = 185\frac{5}{27}.$$

Door eindelijk dezelfde waarden in de formulen (γ) te substitueren, vindt men voor de wegen, die de voetgangers moeten afleggen, alvorens elkander in te halen, in ellen uitgedrukt,

$$v = 185\frac{5}{27} \times 110 = 20370\frac{10}{27} \quad \text{en} \quad w = 185\frac{5}{27} \times 80 = 14814\frac{22}{27}.$$

§ 164. Aangaande de positieve en negatieve, of bijzondere waarden der onbekenden, geeft het vraagstuk der vorige § aanleiding tot de volgende aanmerkingen.

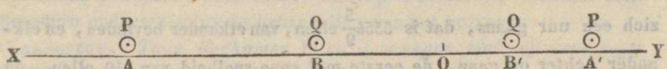
1°. Indien $p>q$ is, en dus P zich sneller dan Q beweegt, zal, blijkens de formule (α), x kleiner worden, naargelang n grooter wordt, terwijl x positief of negatief zal wezen, naargelang men heeft

$$(p-q)n<a, \quad \text{of} \quad (p-q)n>a,$$

dat is

$$n<\frac{a}{p-q}, \quad \text{of} \quad n>\frac{a}{p-q}.$$

Daar nu $\frac{a}{p-q}$, volgens (β), den tijd voorstelt, dien de ligchamen noodig hebben, eer zij bij elkander zijn, blijft x positief, zoolang n een' kleineren tijd aanwijst, maar zal x negatief worden, zoodra n grooter is. Deze uitkomst stemt overeen met hetgeen uit den aard der zaak blijkt; want, omdat P zich sneller dan Q beweegt, zal, zoolang de ligchamen niet bij elkander gekomen zijn, Q zich altijd ter regterzijde van P bevinden; doch na den oogenblik, waarop de ligchamen in O bij elkander zijn geweest, zal P, wegens zijne grootere snelheid, Q voorbij gegaan, en dus ter regterzijde van Q gekomen zijn, waardoor de afstand A′B′ negatief zal zijn geworden.

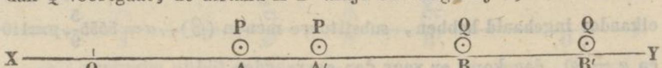


In dit geval zullen, volgens (β) en (γ), t, v en w altijd positief blijven, en het is ook uit den aard der zaak klaar, dat de ligchamen werkelijk na eenigen tijd, en na elk een zeker aantal ellen afgelegd te hebben, ergens in O, regts van A en B, bij elkander zullen komen.

2°. Indien $p<q$ is, en dus P zich langzamer beweegt dan Q, dan ziet men, de formule (α) aldus schrijvende

$$x=a+(q-p)n,$$

dat x grooter wordt, naargelang n aangroeit, en altijd positief zal blijven. Het is ook duidelijk, dat indien P met eene mindere snelheid dan Q voortgaat, de afstand A′B′ altijd zal aangroeijen, maar nimmer



negatief kan worden, omdat P nimmer ter regterzijde van Q zal kunnen komen.

In dit geval wordt, volgens (β), t negatief, en dit beteekent, dat de ligchamen niet t minuten na den oogenblik, waarop zij in A en B waren, bij elkander zullen komen, maar dat zij zooveel minuten vóór dien oogenblik, als het negatieve getal t aanwijst, ergens in O bij elkander geweest zijn.

Alsnu worden ook, blijkens (γ), v en w, dat is AO en BO negatief, hetgeen overeenstemt met de omstandigheid, dat nu het punt O zich ter linker- en niet ter regterzijde van de punten A en B bevindt.

3°. Stelt men $p=q$, hetgeen beteekent, dat de ligchamen even snel gaan, dan wordt, volgens (α), (β) en (γ),

$$x=a, \quad t=\infty, \quad v=\infty, \quad w=\infty;$$

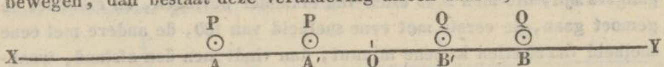
uit welke formulen volgt, dat de afstand der ligchamen altijd even groot zal zijn, als die, waarop zij, in A en B zijnde, van elkander waren; dat zij elkander eerst na een oneindig tijdsverloop, dat is nimmer, zullen inhalen, en dat het punt, waar zij elkander inhalen, oneindig ver van A en B, dat is nergens, zal gelegen zijn. Al hetwelk met den aard der zaak overeenstemt.

4°. Stelt men alles, als in de vorige aanmerking, en bovendien nog $a=0$, waardoor men te kennen geeft, dat de ligchamen, in plaats van gelijktijdig in twee verschillende punten A en B te zijn, zich gelijktijdig in een zelfde punt bevinden, dan geven de formulen (α), (β) en (γ)

$$x=0, \quad t=\frac{0}{0}, \quad v=\frac{0}{0}, \quad w=\frac{0}{0};$$

uit welke formulen volgt, dat de ligchamen nimmer eenigen afstand van elkander zullen verkrijgen; dat de tijd, die er verloopen moet, en de wegen, die zij moeten afleggen, alvorens bij elkander te wezen, onbepaald zijn, en dat zij derhalve altijd en overal bij elkander zullen wezen; en ook dit alles stemt met den aard der zaak overeen.

§ 165. Indien men de voorwaarden van het vraagstuk van § 163 zoodanig wil veranderen, dat de ligchamen zich naar elkander toe, dat is, P in de rigting van X naar Y, en Q in de rigting van Y naar X, bewegen, dan bestaat deze verandering alleen daarin, dat de snelheid



van Q in den tegengestelden toestand verkeert, als waarin men dezelve oorspronkelijk beschouwd heeft, en dus negatief wordt; men zal dus het vraagstuk met deze veranderde voorwaarde niet op nieuw behoeven op te lossen, maar in de gevondene formulen (α), (β) en (γ) slechts $-q$ in plaats van q behoeven te schrijven, waardoor men zal verkrijgen

$$x = a-(p+q)n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha'),$$

$$t = \frac{a}{p+q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta'),$$

$$v = \frac{ap}{p+q} \quad \text{en} \quad w = -\frac{aq}{p+q} \quad \ldots\ldots \quad (\gamma'),$$

in welke formulen nu q de snelheid voorstelt, waarmede Q zich in de rigting van Y naar X beweegt, terwijl w altijd den afstand van het ontmoetingspunt ter regterzijde van B blijft voorstellen.

Daar nu in dit geval t altijd positief, v insgelijks positief, maar w altijd negatief is, zoo blijkt hieruit, dat de ligchamen elkander werkelijk ontmoeten zullen, nadat zij gelijktijdig in A en B waren, en dat dit ontmoetingspunt altijd ter regterzijde van A, maar ter linkerzijde van B zal liggen, hetwelk ook uit den aard der zaak voortvloeit.

Neemt men hier $p=q$, dan wordt volgens de vorige formulen

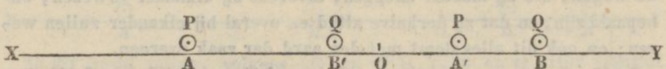
$$v=\frac{1}{2}a \quad \text{en} \quad w=-\frac{1}{2}a,$$

zoodat dan het punt O juist in het midden, tusschen de punten A en B, ligt.

Voorts ziet men, dat x of ook de afstand A′B′, waarop de ligchamen, n minuten na hun gelijktijdig zijn in A en B, zich van elkander bevinden, positief of negatief zal zijn, naargelang

$$n<\frac{a}{p+q}, \quad \text{of} \quad n>\frac{a}{p+q}$$

is. Daar nu $\frac{a}{p+q}$ den tijd voorstelt, die er tot de ontmoeting noodig is, zal de afstand A′B′ positief of negatief zijn, naargelang n kleiner of grooter is, dan de tijd, die er tot de ontmoeting vereischt wordt. Het is ook klaar, dat, bij zulk eene grootere waarde van n, P en Q na hunne ontmoeting zich ergens zoodanig in A′ en B′ zullen bevinden, dat Q



ter linkerzijde van P is.

Men stelle ter toepassing weder, dat de bewegende ligchamen voetgangers zijn, die zich 5000 ellen van elkander bevinden, en elkander te gemoet gaan, de eerste met eene snelheid van 100, de andere met eene snelheid van 90 ellen in eene minuut, dan vindt men den afstand, waarop zij na 30 minuten van elkander verwijderd zijn, door in (α') $a=5000$, $p=100$ $q=90$ en $n=30$, of in (α) $a=5000$, $p=100$, $q=-90$ en $n=30$ te substitueren, waardoor men zal vinden

$$x=-700,$$

hetgeen beteekent, dat zij na 30 minuten elkander reeds voorbij gegaan zijn; en na dien voorbijgang op den afstand van 700 ellen van elkander zijn gekomen.

Om den tijd te vinden, die er verloopen moet, en de wegen, die zij moeten afleggen, totdat zij elkander zullen ontmoeten, substituere men in (β') en (γ') $a=5000$, $p=100$ en $q=90$, of in (β) en (γ) $a=5000$, $p=100$ en $q=-90$, waardoor men zal verkrijgen

$$t=26\frac{6}{19}, \quad v=2631\frac{11}{19} \quad \text{en} \quad w=-2368\frac{8}{19};$$

hieruit blijkt, dat de voetgangers elkander na $26\frac{6}{19}$ minuten zullen ontmoeten; dat dan de eerste $2631\frac{11}{19}$ en de tweede $2368\frac{8}{19}$ ellen zal afgelegd hebben. Deze uitkomst komt overeen met het vroeger gevondene, dat zij na 30 minuten elkander reeds 700 ellen voorbij waren; want dan zal de eerste, in $3\frac{13}{19}$ minuten na de ontmoeting, $3\frac{13}{19} \times 100 = 368\frac{8}{19}$, en de tweede, in dienzelfden tijd, $3\frac{13}{19} \times 90 = 331\frac{11}{19}$ ellen afgelegd hebben.

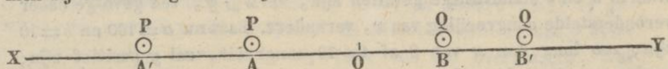
§ 166. Wilde men de voorwaarden van het vraagstuk van § 163 derwijze veranderen, dat de ligchamen zich van elkander af, dat is P in de rigting van Y naar X, en Q in de rigting van X naar Y bewogen, dan zou men, om de oplossing van het aldus veranderde vraagstuk te verkrijgen, in de formulen (α), (β) en (γ) het teeken van p, of in de formulen (α'), (β') en (γ') de teekens van p en q beide, moeten veranderen, waardoor men zal verkrijgen

$$x = a + (p+q)n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha''),$$

$$t = -\frac{a}{p+q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta''),$$

$$v = \frac{ap}{p+q} \quad \text{en} \quad w = -\frac{aq}{p+q} \quad \ldots\ldots \quad (\gamma'').$$

Uit deze formulen blijkt weder, zoo als ook met den aard der zaak overeenkomt: volgens (α''), dat x met den tijd aangroeit en altijd positief blijft; volgens (β''), dat t altijd negatief is, en bijgevolg de ligchamen bij elkander geweest zijn, vóór dat zij in A en B waren, en vol-



gens (γ''), dat v altijd positief, en w altijd negatief is, weshalve het punt O, waar de ligchamen bij elkander waren, ter regterzijde van A, maar ter linkerzijde van B moet liggen.

§ 167. Het zij aan den lezer overgelaten, om in het vraagstuk, zoo als het in § 163 is opgegeven, of zoo als het in § 165 en 166 is gewijzigd, nog de veronderstellingen in te voeren, dat de ligchamen, één van beide, of beide in rust blijven, of ook, dat gevraagd wordt, op welken afstand de ligchamen van elkander zijn n minuten vóór dat zij zich gelijktijdig in A en B bevinden; en de uitkomsten, die alsdan door de formulen opgeleverd worden, te verklaren.

§ 168. Indien men zich verbeeldt, dat een getal langzamerhand grooter of kleiner wordt, noemt men hetzelve *veranderlijk*. Elk getal, dat volgens eenen gegevenen stelkunstigen vorm van zulk een veranderlijk getal afhangt, is almede veranderlijk. Elk getal, dat ondersteld wordt, niet te veranderen, noemt men *standvastig*. Wanneer men de getallen in eenen veranderlijken toestand beschouwt, is men gewoon, de standvastige getallen door de eerste, en de veranderlijke getallen door de laatste letters van het alphabet voor te stellen.

Het veranderen van een getal kan ten gevolge hebben, dat hetzelve van positief negatief wordt; het is echter klaar, dat een positief getal van de waarde, die het heeft, tot nul toe afnemende, of tot in het oneindige toe aangroeijende, altijd positief zal blijven, en dat het dus nimmer negatief kan worden, zonder alvorens nul of oneindig geweest te zijn.

Dat een positief getal, na gedurende deszelfs verandering nul of oneindig geweest te zijn, van den positieven tot den negatieven toestand kan overgaan, blijkt uit de volgende voorbeelden:

1°. Men neme de formule

$$y = a - x,$$

waarin a een standvastig, x een veranderlijk, en dus y insgelijks een veranderlijk getal voorstelt. Stelt men nu, dat y verandert, ten gevolge van eene trapswijze aangroeijing van x, en laat, bij voorbeeld, $a = 100$ genomen worden, dan zal, zoo lang x van 0 tot 100 aangroeit, y positief blijven; zoodra $x = 100$ wordt, zal $y = 0$ zijn; maar zoodra x, door trapswijze aangroeijing, grooter dan 100 is geworden, zal y negatief geworden zijn; waaruit volgt, dat y van den positieven tot den negatieven toestand is overgegaan, en bij dien overgang nul was.

2°. Men neme ook de formule

$$y = \frac{a}{b - x},$$

waarin a en b standvastige getallen zijn, terwijl y, ten gevolge eener veronderstelde aangroeijing van x, verandert. Laat nu $a = 100$ en $b = 10$ zijn; zoo lang dan x van 0 af tot 10 aangroeit, zal y positief zijn; zoodra $x = 10$ wordt, zal $y = \infty$ wezen; maar zoodra $x > 10$ wordt, zal y negatief geworden zijn; waaruit volgt, dat y van den positieven tot den negatieven toestand is overgegaan, en bij dien overgang oneindig groot was.

Hoezeer, zoo als reeds gezegd is, een veranderlijk getal niet van den positieven tot den negatieven toestand kan overgaan, zonder alvorens nul of oneindig geweest te zijn, zou men verkeerd doen, indien men hieruit omgekeerd wilde besluiten, dat, indien een veranderlijk positief getal, gedurende deszelfs verandering nul of oneindig werd, daaruit een overgang van den positieven tot den negatieven toestand zou moeten voortvloeijen; want een veranderlijk getal kan zeer wel nul of oneindig worden, zonder van toestand te veranderen, zoo als blijkt uit de volgende voorbeelden:

1°. Men neme de formule

$$y = (a - x)^2,$$

waarin men zich y voorstelt, als veranderlijk te zijn, ten gevolge van eene trapswijze aangroeijing van x. Is nu $a = 100$, dan blijft, als x van 0 tot 100 aangroeit, y positief; wordt $x = 100$, dan wordt $y = 0$, en wordt $x > 100$, dan is y weder positief; waaruit blijkt, dat y gedurende de verandering nul geweest is, zonder van positief negatief te worden.

2°. Men neme in de formule

$$y = \frac{a}{(b-x)^2},$$

$a = 100$, $b = 10$, en late x van 0 af aangroeijen, dan is voor $x < 10$, y positief; voor $x = 10$, $y = \infty$, en voor $x > 10$, y weder positief; waaruit blijkt, dat y gedurende de verandering oneindig geweest is, zonder van positief negatief te worden.

Het is klaar, dat hetgeen omtrent den overgang der getallen van den positieven tot den negatieven toestand gezegd is, eveneens kan toegepast worden, op den overgang van den negatieven tot den positieven toestand.

Een veranderlijk getal kan ook meermalen van den eenen tot den anderen toestand overgaan, zoo als uit het volgende voorbeeld blijkt.

Laat, in de formule

$$y = \frac{(x-5)(x-11)}{x-7},$$

wederom y veranderlijk zijn, ten gevolge eener veronderstelde aangroeijing van x; zoo lang dan x tusschen 0 en 5 is, blijft y negatief; is $x = 5$, dan is $y = 0$; zoo lang x tusschen 5 en 7 blijft, is y positief; wordt $x = 7$, dan is $y = \infty$; zoo lang verder x tusschen 7 en 11 blijft, is y negatief; voor $x = 11$, is weder $y = 0$, en zoodra $x > 11$ is geworden, zal y altijd positief blijven. In dit voorbeeld is dus y driemaal van toestand veranderd; bij twee van die overgangen, was $y = 0$, en bij een' derzelve was $y = \infty$.

§ 169. Daar, zoo als in het slot van § 159 gezegd is, positieve en negatieve grootheden door positieve en negatieve getallen worden voorgesteld, is het met den overgang der grootheden van den positieven tot den negatieven toestand, of omgekeerd, eveneens gelegen als met den overgang der getallen. Het is vooral in de meetkunst, dat men daarvan veelvuldige voorbeelden aantreft.

Over de onbepaalde vraagstukken, die tot eene vergelijking van den eersten graad met ééne onbekende aanleiding geven.

§ 170. In § 147 is gezegd, dat een vraagstuk, waarin slechts ééne onbekende voorkomt, bepaald genoemd wordt, als al deszelfs voorwaarden door eene niet-identieke vergelijking kunnen worden uitgedrukt. Wanneer echter een vraagstuk met ééne onbekende in vergelijking gebragt is, en men dan bevindt, dat deze vergelijking identiek is, wordt dit vraagstuk *onbepaald* genoemd. In dit geval verkeerden de laatste vragen der §§ 155 en 156. Zijn al de voorwaarden van zulk een onbepaald vraagstuk in de identieke vergelijking, waartoe het aanleiding gaf, uitgedrukt, dan is de oplossing afgeloopen, zoodra de identiteit der vergelijking gebleken is, omdat men dan weet, dat men voor de onbekende alle willekeurige waarden kan nemen.

Bij zulke onbepaalde vraagstukken, moet echter dikwijls aan voorwaarden voldaan worden, die door geene vergelijking kunnen worden uitgedrukt, zoo als, bij voorbeeld: dat de onbekende een geheel positief getal moet wezen; dat de onbekende zekere grenzen niet mag overschrijden; dat de onbekende een even of oneven getal moet zijn, enz. In zoodanige gevallen voldoen wel alle willekeurige waarden aan de vergelijking van het vraagstuk, maar niet aan die overige voorwaarden, en dus ook niet aan het vraagstuk zelven. Om alsdan te vinden, welke waarden van de onbekende aan het vraagstuk voldoen, wordt voor elk vraagstuk op zich zelven eene afzonderlijke redenering vereischt, die zich aan geene regels laat onderwerpen. Somtijds zal uit deze redenering blijken, dat het vraagstuk voor een oneindig groot aantal antwoorden vatbaar is, maar ook somtijds zal uit dezelve volgen, dat het aantal antwoorden zeer beperkt is.

Zie hier een voorbeeld van elk dezer gevallen:

Vraagstuk. *Een onverkleinbaar gebroken te vinden, waarvan de noemer 15 meer is, dan de teller, zoodat als men dit gebroken van het getal 2 aftrekt, de rest een onverkleinbaar gebroken zij, waarvan de teller 15 meer is dan de noemer.*

Oplossing. Voor den teller van het gevraagde gebroken x stellende, zal deszelfs noemer $x+15$ zijn. Daar het gevraagde gebroken onverkleinbaar moet wezen, zal de rest, die er overblijft, als dit gebroken van 2 wordt afgetrokken, een gebroken van denzelfden noemer $x+15$ moeten zijn; de teller van dit overschietende gebroken moet dus $x+30$ wezen. Men heeft alzoo de vergelijking

$$2-\frac{x}{x+15}=\frac{x+30}{x+15},$$

welke met $x+15$ vermenigvuldigd wordende, geeft

$$x+30=x+30,$$

en alzoo blijkt identiek te zijn.

Men zou dus voor x alle willekeurige geheele getallen kunnen nemen, indien niet de voorwaarde, dat $\frac{x}{x+15}$ een onverkleinbaar gebroken moet zijn, een aantal dezer willekeurige getallen, namelijk de getallen 3 en 5 en derzelver veelvouden, uitsloot; alle andere getallen voor x genomen zullen $\frac{x}{x+15}$ tot een onverkleinbaar gebroken maken, omdat, zoo als bij het onderzoek der gemeene deelers aangetoond is, x en $x+15$ geen' gemeenen deeler kunnen hebben, zoo niet diezelfde deeler aan x en 15 gemeen is. Het gevraagde gebroken kan dus een der volgende zijn:

$$\frac{1}{16},\ \frac{2}{17},\ \frac{4}{19},\ \frac{7}{22},\ \frac{8}{23},\ \frac{11}{26}\ \frac{13}{28},\ \frac{14}{29},\ \frac{16}{31},\ enz.$$

zijnde er klaarblijkelijk zoo veel antwoorden, als men verkiest.

VRAAGSTUK. *Een getal van drie cijfers te vinden, waarvan het cijfer der eenheden het dubbel is van dat der honderdtallen, terwijl het cijfer der tientallen evenveel van elk der beide andere verschilt, zoodanig, dat als men dit getal door* 117 *deelt, het quotient gelijk zij aan het cijfer der honderdtallen.*

OPLOSSING. Stel voor het cijfer der honderdtallen x, dan is dat der eenheden $2x$, en dat der tientallen $\frac{3}{2}x$; het gevraagde getal wordt bijgevolg voorgesteld door $100\times x+10\times\frac{3}{2}x+2x$, dat is door $117x$, en alzoo heeft men de vergelijking

$$\frac{117x}{117}=x.$$

Daar deze vergelijking identiek is, zou men voor x eene willekeurige waarde kunnen nemen, indien niet, overeenkomstig den aard van het vraagstuk, elk der cijfers, dat is x, $\frac{3}{2}x$ en $2x$, een geheel positief getal, kleiner dan 10, moest wezen. Opdat $\frac{3}{2}x$ een geheel getal zij, moet x een even getal wezen; opdat $2x<10$ zij, moet $x<5$ zijn; voor x kan men dus niets anders nemen, dan de evene getallen, die kleiner dan 5 zijn, namelijk 2 en 4. Het gevraagde getal, door $117x$ voorgesteld, kan derhalve geen ander zijn, dan 234 of 468. Hieruit blijkt, dat het vraagstuk, hoezeer onbepaald zijnde, slechts twee antwoorden toelaat.

OVER DE VERGELIJKINGEN VAN DEN EERSTEN GRAAD MET TWEE ONBEKENDEN.

Onderscheiding van twee niet-identieke vergelijkingen, in onderling afhankelijke en onafhankelijke.

§ 171. Men noemt *twee vergelijkingen onderling onafhankelijk*, wanneer, beide niet-identiek zijnde, de eene niet tot de andere kan herleid worden; zoo als, bij voorbeeld,

$$a+b=7 \quad \text{en} \quad a+2b=10.$$

Twee zulke vergelijkingen worden gezegd, *met elkander in strijd* te zijn, wanneer voor die letters, welke onbepaalde getallen voorstellen, geene getallen kunnen aangewezen worden, die aan de beide vergelijkingen tevens voldoen; zoo als, bij voorbeeld,

$$x+2y=3 \quad \text{en} \quad 2x+4y=7.$$

Verschillen twee niet-identieke vergelijkingen alleen in gedaante, zoodat de eene tot de andere herleidbaar is, dan noemt men die *twee vergelijkingen onderling afhankelyk*; zoo als, bij voorbeeld,

$$2a-3b=1 \quad \text{en} \quad 2+6b=4a.$$

Van twee onderling onafhankelijke vergelijkingen kan men er ééne naar welgevallen aanzien, als diegene, waarvan de andere afhangt; de eerstgenoemde wordt dan eene onafhankelijke vergelijking genoemd. Zijn er dus twee vergelijkingen gegeven, die van elkander afhangen, dan is dit hetzelfde, als of er slechts ééne onafhankelijke gegeven was.

§ 172. Wanneer twee niet-identieke vergelijkingen onderling afhankelijk zijn, zullen alle waarden der daarin voorkomende letters, die aan de eene voldoen, ook de andere identiek maken. Het opsporen van zulke waarden vereischt dus slechts de oplossing van ééne vergelijking met ééne onbekende.

Zijn omgekeerd twee niet-identieke vergelijkingen zoodanig gesteld, dat door al de waarden der letters, die aan de eene voldoen, ook aan de andere voldaan wordt, dan moeten die vergelijkingen onderling afhankelijk wezen; want de genoemde gesteldheid der vergelijkingen vordert, dat beide, ten opzigte van eene zelfde letter opgelost wordende, eene zelfde uitkomst geven, dat dus beide tot eene zelfde vergelijking kunnen herleid worden, en bijgevolg ook, dat de eene tot de andere herleidbaar is.

§ 173. Wanneer men twee niet-identieke vergelijkingen naar welgevallen neemt, zullen dezelve doorgaans onderling onafhankelijk wezen; zoo zijn, bij voorbeeld, de vergelijkingen

$$b(a-c)=c(2b-a) \quad \text{en} \quad b(a-2c)=c(2b+a)\,, \ldots (\alpha)$$

waarschijnlijk onderling onafhankelijk.

Om voor de letters getallen te vinden, die te gelijker tijd aan de beide vergelijkingen (α) voldoen, kan men beginnen met eene der letters, bij voorbeeld a, als onbekende aan te nemen; en eene der vergelijkingen, bij voorbeeld de eerste, ten opzigte van deze letter, op te lossen, waardoor men vindt

$$a=\frac{3bc}{b+c};$$

aan deze vergelijking kan dus alleen voldaan worden door zoodanige waarden voor de letters, waarbij $a=\dfrac{3bc}{b+c}$ is.

Substitueert men dezen vorm voor a, in de tweede vergelijking, en wordt deze daardoor identiek, dan wordt door alle waarden der letters, die aan de eerste vergelijking voldoen, ook aan de tweede voldaan, en dan hangt, volgens de vorige §, de tweede vergelijking van de eerste af; door de genoemde substitutie, vindt men na behoorlijke herleiding

$$bc(b-2c) = bc(2b+5c) \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta).$$

Daar nu deze vergelijking niet identiek is, zijn de vergelijkingen (α) onderling onafhankelijk; want waren zij onderling afhankelijk, dan zou de waarde $a = \frac{3bc}{b+c}$, die aan de eerste voldoet, ook de tweede identiek moeten maken.

Omdat $a = \frac{3bc}{b+c}$ slechts aan de eerste der vergelijkingen (α) voldoet, maar de tweede in (β) doet overgaan, zal het, om aan beide vergelijkingen te voldoen, niet genoeg zijn b en c willekeurig en $a = \frac{3bc}{b+c}$ te nemen, men moet ook voor b en c zulke getallen nemen, dat aan de vergelijking (β) voldaan wordt; om zulke waarden voor b en c te vinden, moet men in (β) eene nieuwe letter, bij voorbeeld b, als onbekende aannemen, en dan vindt men, door (β) ten opzigte van b op te lossen, dat $b = -7c$ aan de vergelijking (β) voldoet. Neemt men dus voor c een willekeurig getal, $b = -7c$ en $a = \frac{3bc}{b+c} = \frac{7}{2}c$, dan zal aan de beide vergelijkingen (α) te gelijker tijd voldaan zijn. Stelt men dan ook, in de vergelijkingen (α), $a = \frac{7}{2}c$ en $b = -7c$, dan veranderen zij in

$$-7c\left(\frac{7}{2}c-c\right) = c\left(-14c-\frac{7}{2}c\right) \text{ en } -7c\left(\frac{7}{2}c-2c\right) = c\left(-14c+\frac{7}{2}c\right),$$

$$\text{of in} \quad -\frac{35}{2}c^2 = -\frac{35}{2}c^2 \quad \text{en} \quad -\frac{21}{2}c^2 = -\frac{21}{2}c^2,$$

en worden derhalve beide identiek.

Uit het bijgebragte voorbeeld blijkt, dat men, om getallen te vinden, die gelijktijdig aan twee onderling onafhankelijke vergelijkingen voldoen, twee onbekenden moet aannemen. Door hier a en b voor die onbekenden te nemen en dan te vinden, dat $a = \frac{7}{2}c$ en $b = -7c$ moest genomen worden, zijn die vergelijkingen ten opzigte van a en b opgelost. Even zoo had men echter b en c, of a en c, als onbekenden kunnen aannemen, en de oplossing ten opzigte van die letters begeeren.

Het vinden van getallen, die aan twee onderling onafhankelijke vergelijkingen voldoen, dat is, het oplossen van die vergelijkingen, is dus in het algemeen: voor twee der letters, die men als onbekenden aanneemt, stelkunstige vormen te vinden, uit de overige letters of bekenden zamengesteld, zoodanig dat die vormen, voor de onbekenden gesubstitueerd, elk der beide vergelijkingen identiek maken.

Stellen in de vergelijkingen (α) de letters b en c bepaalde getallen voor, zoodat alleen de vraag kan zijn, wat men voor a kan nemen, om aan die vergelijkingen te voldoen, dan zullen de vergelijkingen (α) of onderling afhankelijk, of met elkander in strijd zijn, naargelang die getallen b en c al of niet aan de vergelijking (β) voldoen. Was, bij voorbeeld, $b=2$ en $c=6$, welke getallen niet aan (β) voldoen, dan zouden de vergelijkingen (α) zijn

$$2(a-6) = 6(4-a) \quad \text{en} \quad 2(a-12) = 6(4+a)$$

en met elkander strijden. Was daarentegen $b=-7$ en $c=1$, welke getallen aan (β) voldoen, dan zouden de vergelijkingen (α) zijn

$$-7(a-1) = -(a+14) \quad \text{en} \quad -7(a-2) = a-14$$

en van elkander afhangen.

Twee niet-identieke vergelijkingen, met slechts ééne onbekende, moeten dus of onderling afhankelijk, of met elkander in strijd zijn.

In de tot voorbeeld gekozene vergelijkingen (α) kwamen dezelfde letters voor; is dit het geval niet, dan kan men toch altijd, om voor de letters waarden te vinden, die aan de beide vergelijkingen voldoen, twee der letters naar welgevallen tot onbekenden aannemen, mits maar, overeenkomstig § 133, in elk der vergelijkingen ten minste ééne der onbekenden voorkomt. Had men, bij voorbeeld, de vergelijkingen

$$c(a+2b) = (2a-b)e \quad \text{en} \quad d(2a+b) = 2ab \;.\;.\;.\;.\; (\gamma),$$

dan zou men c en e niet als onbekenden kunnen aannemen, omdat deze letters in de tweede vergelijking geen van beide voorkomen. Om aan de eerste vergelijking te voldoen, is het genoeg, c of e, een van beide als onbekende aan te nemen, en, tot het voldoen aan de tweede vergelijking, baat het niet, voor c of e zekere waarden te nemen. Neemt men in (γ) a en b als onbekenden aan, dan verkeeren deze vergelijkingen in hetzelfde geval, waarin de vergelijkingen (α) verkeerden. Men kan echter c en d, die elk slechts in ééne der vergelijkingen (γ) voorkomen, als onbekenden aannemen, en dan is elk dier vergelijkingen op zich zelve genoegzaam, om ééne der onbekenden, de eerste om c, de tweede om d in bekenden uitgedrukt te vinden, zonder dat men de vergelijkingen met elkander in verband behoeft te brengen. Ook kan men a en c tot onbekenden aannemen, die beide in de eerste der vergelijkingen (γ) voorkomen, maar waarvan zich alleen a in de tweede dier vergelijkingen bevindt; alsdan is de tweede vergelijking genoegzaam, om a in bekenden uitgedrukt te verkrijgen, en door de eerste kan men dan c in a en bekenden uitdrukken, waardoor dan ook c bekend wordt, zonder dat het noodig is, overigens de vergelijkingen met elkander in verband te brengen.

§ 174. Uit hetgeen in de vorige §§ gezegd is, blijkt:

1°. Dat in twee onderling afhankelijke vergelijkingen, ééne onbekende behoort, maar ook niet meer dan ééne behoeft voor te komen, en dat, zoo er zich meer letters in bevinden, die men als onbekenden heeft aangezien, men om aan die vergelijkingen te voldoen, slechts ééne dier letters als onbekende behoeft te blijven aanzien, en voor al de overige willekeurige waarden kan nemen.

2°. Dat in twee onderling onafhankelijke vergelijkingen, waaraan te gelijker tijd voldaan moet worden, twee onbekenden moeten voorkomen; dat deze onbekenden zich beide in elke vergelijking kunnen bevinden, maar dat zulks niet noodzakelijk is, indien slechts elke vergelijking ten minste ééne van die twee onbekenden bevat; dat zoo in die twee vergelijkingen slechts ééne onbekende voorkomt, de vergelijkingen met elkander in strijd zijn; maar dat, zoo er meer dan twee letters in voorkomen, die men als onbekenden heeft beschouwd, men, om aan die vergelijkingen te voldoen, slechts twee dier letters, waarvan elke vergelijking er ten minste ééne bevat, als onbekenden behoeft te blijven aanzien, en voor de overige willekeurige waarden kan nemen.

3°. Dat, wanneer men twee onderling onafhankelijke vergelijkingen op zich zelven beschouwt, en dus geenerlei vraagstuk, waaruit zij kunnen ontstaan zijn, in aanmerking neemt, twee willekeurige letters, mits elke vergelijking ten minste ééne dier letters bevat, tot onbekenden kunnen aangenomen worden; dat dus de oplossing der vergelijkingen, ten opzigte van twee zulke willekeurig gekozene letters kan begeerd worden, en dat dan al de overige letters als bekenden moeten worden aangezien.

4°. Dat, zoo niet elk der vergelijkingen de beide onbekenden bevat, derzelver oplossing eenvoudiglijk op het oplossen van vergelijkingen met ééne onbekende nederkomt.

In hetgeen verder over de vergelijkingen met twee onbekenden zal worden voorgedragen, zal, op grond van de laatste opmerking, ondersteld worden, dat de beide onbekenden in elke vergelijking voorkomen.

Herleiding en verbinding der vergelijkingen met twee onbekenden.

§ 175. De twee onbekenden, waarmede men, indien twee onderling onafhankelijke vergelijkingen de te vervullene voorwaarden aanduiden, overeenkomstig § 174, te doen heeft, worden gewoonlijk door de letters x en y voorgesteld; en die vergelijkingen worden dan herleid met het doel, om dezelve zoodanig te kunnen verbinden, dat men tot eene vergelijking geraakt, die of alleen x of alleen y bevat. Hiertoe herleidt men de vergelijkingen met twee onbekenden gewoonlijk tot eene der volgende gedaanten:

$$Nx+(Py+Q)=0,$$

$$Nx^2+(Py+Q)x+(Ry^2+Sy+T)=0,$$

$$Nx^3+(Py+Q)x^2+(Ry^2+Sy+T)x+(Uy^3+Vy^2+Wy+Y)=0,$$

enz.

waarin N, P, Q, R, S, enz. stelkunstige vormen, uit bekenden zamengesteld, verbeelden.

Naargelang eene vergelijking door herleiding eene dezer gedaanten verkrijgt, wordt zij gezegd van den eersten, tweeden, derden graad, enz. te zijn; wordende de graad der vergelijking bepaald door het grootste aantal onbekende factoren, dat in eenigen term voorkomt. In de boven opgegevene gedaanten heeft de eerste term niet, zoo als bij de vergelijkingen met éene onbekende in § 134, de eenheid tot coëfficiënt, omdat de coëfficiënt van den eersten term nul zou kunnen wezen, zonder dat daardoor de vergelijking van eenen lageren graad werd.

§ 176. De herleiding der vergelijkingen met twee onbekenden, tot deze gedaanten, geschiedt op dezelfde wijze als die der vergelijkingen met éene onbekende; alleen moet men zorg dragen, de coëfficiënten der verschillende magten van x naar de afdalende magten van y te rangschikken. Een enkel voorbeeld zal voldoende zijn, om aan te wijzen, hoe men zich bij zulk eene herleiding te gedragen hebbe.

Voorbeeld. De vergelijking $\frac{a(x+b)}{y} = \sqrt{\left(\frac{bx}{y} + x + y\right)}$ te herleiden.

Men vindt hier achtervolgens: door de vergelijking in het vierkant te brengen,

$$\frac{a^2(x+b)^2}{y^2} = \frac{bx}{y} + x + y;$$

door verdrijving der breuken,

$$a^2(x+b)^2 = bxy + xy^2 + y^3;$$

door ontwikkeling van $(x+b)^2$,

$$a^2x^2 + 2a^2bx + a^2b^2 = bxy + xy^2 + y^3,$$

en door behoorlijke verplaatsing en rangschikking der termen,

$$a^2x^2 - (y^2 + by - 2a^2b)x - (y^3 - a^2b^2) = 0,$$

welke vergelijking nu de derde der in § 175 opgegevene gedaanten heeft, zijnde hier $N = 0$, $P = 0$, $Q = a^2$, $R = -1$, $S = -b$, $T = 2a^2b$, $U = -1$, $V = 0$, $W = 0$ en $Y = a^2b^2$.

§ 177. Twee gegevene vergelijkingen worden met elkander verbonden, indien men uit die twee vergelijkingen eene nieuwe vergelijking afleidt, waaraan voldaan wordt door dezelfde waarden der onbekenden, die aan de gegevene vergelijkingen voldoen. Men kan dan tot het vinden van de waarden der onbekenden, in plaats van de beide gegevene vergelijkingen, die nieuwe vergelijking met eene der gegevene gebruiken.

§ 178. De verbinding van twee vergelijkingen kan vooreerst geschieden door toepassing van het axioma, dat gelijke getallen bij gelijke getallen opgeteld, van gelijke afgetrokken, met gelijke vermenigvuldigd, of door gelijke gedeeld wordende, gelijke sommen, verschillen, producten of quotienten opleveren. Kortheidshalve kan, overeenkomstig de reeds vroeger, in § 135 en volgende, gebruikte wijze van spreken, dit axioma vervat worden in dezen

REGEL. *Men mag twee vergelijkingen bij elkander optellen, van elkander aftrekken, met elkander vermenigvuldigen of door elkander deelen.*

Door het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en deelen van twee vergelijkingen wordt dan bedoeld het aan elkander gelijk stellen van de sommen, verschillen, producten of quotienten van de overeenkomstige leden der vergelijkingen.

Hoezeer de toepassing van dezen regel aan geene bezwaren onderhevig is, indien de leden der vergelijkingen werkelijk getallen voorstellen, moet men opletten, dat, volgens het aangevoerde in § 142, de vermenigvuldiging en deeling van vergelijkingen, indien derzelver leden nul waren of zouden kunnen zijn, eene invoering of verdonkering van waarden der onbekenden zou kunnen ten gevolge hebben; en dit zal, volgens § 142, gebeuren, indien een vermenigvuldiger, die nul zou kunnen zijn, niet tot verdrijving van gebrokens dient, of indien zulk een deeler als factor in het deeltal voorkwam.

Heeft men, bij voorbeeld, de vergelijkingen

$$4(x+y-5) = 7(x-4y) \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

en

$$x-y-1 = 3y-2x \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta),$$

dan zal men, deze vergelijkingen met elkander vermenigvuldigende, verkrijgen,

$$4(x+y-5)(x-y-1) = 7(x-4y)(3y-2x),$$

of, na herleiding,

$$18x^2-77xy+80y^2-24x+16y+20 = 0 \ldots\ldots (\gamma).$$

Aan de vergelijkingen (α) en (β) voldoen nu, zoo als men later zal leeren vinden, alleen $x=\frac{4}{3}$ en $y=\frac{3}{4}$; aan (α) en (γ) voldoen, behalve $x=\frac{4}{3}$ en $y=\frac{3}{4}$, ook nog $x=4$ en $y=1$; aan (β) en (γ) voldoen, behalve $x=\frac{4}{3}$ en $y=\frac{3}{4}$ ook nog $x=3$ en $y=2$; zoodat men, door slechts eene der vergelijkingen (α) en (β) te behouden, en, in plaats van de andere, de vergelijking (γ) te nemen, meer waarden voor de onbekenden zou vinden, dan aan de vergelijkingen (α) en (β) voldoen. Het invoeren van deze meerdere waarden komt alleen daar van daan, dat voor $x=4$ en $y=1$ elk lid der vergelijking (α), en dat voor $x=3$ en $y=2$ elk lid der vergelijking (β) nul wordt.

Had men daarentegen de vergelijkingen

$$x^2-y^2 = a(x+y)$$

en

$$b(x+y) = x^3+y^3,$$

aan elk van welke, wat men ook voor y nemen wil, voldaan zal worden, mits men slechts $x=-y$ neemt, en deelt men deze vergelijkingen in elkander, dan wordt aan de komende vergelijking

$$\frac{x-y}{b} = \frac{a}{x^2-xy+y^2}$$

door $x=-y$ niet meer voldaan, zoodat ten gevolge der deeling deze waarden van de onbekenden zijn verdonkerd geworden. De oorzaak hiervan is weder, dat de deeler $x+y$, waardoor de deeling werkelijk verrigt is, voor $x=-y$ nul wordt.

§ 179. De verbinding van twee vergelijkingen kan ten tweede plaats hebben, door de vergelijkingen zoodanig te herleiden, dat beide eenen zelfden stelkunstigen vorm in het eene lid verkrijgen, en dan de andere leden aan elkander gelijk te stellen. Had men, bij voorbeeld,

$$(x+y)^2 = a^2+y^2 \quad \text{en} \quad (x+3y)(x-y) = b^2+x^2,$$

dan zou men deze vergelijkingen kunnen herleiden tot

$$2xy = a^2-x^2 \quad \text{en} \quad 2xy = b^2+3y^2,$$

en dezelve daarna verbinden tot

$$a^2-x^2 = b^2+3y^2.$$

Wilde men nu de waarden van x en y opsporen, die aan de gegevene vergelijkingen voldoen, dan zou men daartoe ook van de laatste gebruik kunnen maken.

§ 180. De verbinding van twee vergelijkingen kan ten derde volbragt worden, door de vergelijkingen zoodanig te herleiden, dat een lid van de eene vergelijking een stelkunstige vorm is, die ergens in de andere vergelijking voorkomt, en dan, in de laatstgenoemde vergelijking, voor dien vorm den gelijkwaardigen vorm te substitueren. Had men, bij voorbeeld,

$$x+\sqrt{(x^2+y^2)} = a-y \quad \text{en} \quad \frac{a}{y+\sqrt{(x^2+y^2)}} = b+\sqrt{(x^2+y^2)},$$

dan zou men voor deze vergelijkingen kunnen schrijven

$$y+\sqrt{(x^2+y^2)} = a-x \quad \text{en} \quad \frac{a}{y+\sqrt{(x^2+y^2)}} = b-y+[y+\sqrt{(x^2+y^2)}],$$

en vervolgens de waarde van $y+\sqrt{(x^2+y^2)}$ uit de eerste in de tweede kunnen overbrengen, waardoor men zou verkrijgen

$$\frac{a}{a-x} = b-y+a-x.$$

Wanneer men nu de waarden van x en y wil vinden, die aan de opgegevene vergelijkingen voldoen, zal men daartoe mede van de laatste vergelijking, die veel eenvoudiger dan eene der opgegevene is, kunnen gebruik maken.

§ 181. Het verbinden van twee vergelijkingen met twee onbekenden geschiedt met het doel, om tot eene vergelijking te geraken, die slechts ééne onbekende bevat; de andere onbekende komt dan in die laatste vergelijking niet meer voor, en is, zoo als men dit noemt, *geëlimineerd* of *verdreven*. Eene onbekende uit of tusschen twee vergelijkingen te *elimineren*, beteekent dus, uit die vergelijkingen, door herleidingen en verbindingen, eene andere af te leiden, waarin die onbekende zich niet meer bevindt.

Heeft men eene onbekende geëlimineerd, dan is daardoor het oplossen der vergelijkingen met twee onbekenden, volgens hetgeen in § 174, 4° gezegd is, tot het oplossen van vergelijkingen met ééne onbekende teruggebragt.

Twee gegevene vergelijkingen, waaruit men eene onbekende wil elimineren moeten doorgaans eenige herleiding ondergaan, alvorens met elkander verbonden te worden; indien de nieuwe vergelijking, die door deze verbinding ontstaat, wederom beide de onbekenden bevat, moet zij weder verbonden worden, of met eene der gegevene vergelijkingen, of met eene vergelijking, die uit de twee gegevene door eene andere wijze van verbinding is afgeleid; en dit achtervolgend verbinden, waarbij telkens eenige voorafgaande herleiding noodig kan wezen, moet zoo lang worden voortgezet, tot dat men eene vergelijking verkregen heeft, die slechts ééne der onbekenden bevat.

Om bij dit achtervolgend herleiden en verbinden geenen onzekeren weg te volgen, maar altijd regtstreeks op het doel, de eliminatie eener onbekende, af te gaan, zijn er handelwijzen uitgedacht, die in het algemeen op alle vergelijkingen kunnen worden toegepast, en meestal vooraf de herleiding der vergelijkingen tot de gedaanten, in § 175 opgegeven, vorderen. Deze algemeene handelwijzen zullen, ten aanzien der vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden, in § 183 worden voorgedragen.

Het gebeurt echter dikwijls, dat men met twee vergelijkingen te doen heeft, waarbij het met een weinig nadenken, of eene kleine beproeving, ligtelijk in het oog valt, hoe men die vergelijkingen tot eenvoudiger vergelijkingen kan verbinden, en door nieuwe verbindingen, zoo die noodig zijn, tot de eliminatie eener onbekende kan geraken. Alsdan zou het volgen van algemeene handelwijzen niet verkiesselijk, en het herleiden der vergelijkingen tot de in § 175 opgegevene gedaanten overtollig wezen. Had men, bij voorbeeld, de vergelijkingen

$$x+\sqrt{(x^2-y^2)} = 2a \quad \text{en} \quad x-\sqrt{(x^2-y^2)} = 2b,$$

dan zou men, deze vergelijkingen bij elkander optellende, en met elkander vermenigvuldigende, terstond vinden

$$2x = 2a+2b \quad \text{en} \quad y^2 = 4ab;$$

en nu is door de eerste dezer verbindingen y, door de tweede x geëlimineerd, zonder dat men met eenige herleiding of met achtervolgende verbindingen heeft te doen gehad.

Oplossing van een stelsel van twee vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden, en van vraagstukken, daartoe betrekkelijk.

§ 182. De graad, waartoe de vergelijkingen met twee onbekenden opklimmen, kan wederom alleen beoordeeld worden, door die vergelijkingen tot derzelver algemeene gedaante te herleiden. Bevindt men bij die herleiding, dat eene vergelijking slechts van den eersten graad wordt, dan brengt men dezelve gewoonlijk tot de gedaante $Ax+By=C$, welke van de gedaante $Nx+(Py+Q)=0$, in § 175 opgegeven, niet wezenlijk verschilt. Om de vergelijkingen met twee onbekenden tot die gedaante te brengen, kan men gebruik maken van den volgenden

Regel. *Verdrijf de gebrokens en wortelteekens, ontwikkel de magten en producten, laat de termen die elkander vernietigen weg, en vereenig de gelijksoortige, even zoo als bij de vergelijkingen met ééne onbekende; plaats vervolgens al de termen, waarin eene der onbekenden voorkomt, in het eerste, en al de overige in het tweede lid der vergelijking, en vereenig eindelijk al de termen van het eerste lid, waarin eene zelfde onbekende voorkomt, tot eenen enkelen term, door die onbekende buiten haakjes te brengen.*

Zie hier eenige voorbeelden, tot toepassing van dezen regel:

Eerste Voorbeeld. Tot de gedaante $Ax+By=C$ te herleiden de vergelijking $3+\frac{1}{2}y\ \frac{5x+8}{x+2}=\frac{x^2+3x}{x+2}-\frac{1}{2}(2x-5y)$.

Men verkrijgt hier: door de vergelijking met $2(x+2)$ te vermenigvuldigen,

$$6(x+2)+y(5x+8)=2(x^2+3x)-(x+2)(2x-5y);$$

door de producten te ontwikkelen,

$$6x+12+5xy+8y=2x^2+6x-2x^2-4x+5xy+10y;$$

door de termen, die elkander vernietigen, weg te laten,

$$12+8y=-4x+10y;$$

door overbrenging en vereeniging van termen,

$$4x-2y=-12,$$

en eindelijk, na deeling door 2,

$$2x-y=-6.$$

Deze vergelijking heeft nu de verlangde gedaante, zijnde hier $A=2$, $B=-1$ en $C=-6$.

Tweede Voorbeeld. Tot de gedaante $Ax+By=C$ te herleiden de vergelijking $\frac{a+b}{ax-by+ab}=\frac{a-b}{ax+by-ab}$.

Men vindt hier: door de breuken te verdrijven,

$$(a+b)(ax+by-ab)=(a-b)(ax-by+ab);$$

door de producten te ontwikkelen,

$$a(a+b)x+b(a+b)y-(a+b)ab=a(a-b)x-b(a-b)y+(a-b)ab;$$

door overbrenging en vereeniging van termen,

$$[a(a+b)-a(a-b)]x+[b(a+b)+b(a-b)]y=[(a+b)+(a-b)]ab,$$

of

$$2abx+2aby=2a^2b,$$

dat is, na deeling door $2ab$,

$$x+y=a,$$

welke vergelijking weder de verlangde gedaante heeft, zijnde hier $A=1$, $B=1$ en $C=a$.

Derde Voorbeeld. Laat nog ter herleiding gegeven zijn de vergelijking $\frac{(x-a-b)^2}{(a+b)(2x-a-b)}=\frac{x^2}{\sqrt{[(a+b)^4-4(a^2-b^2)xy]}}-1.$

Om het wortelteeken te kunnen verdrijven, brenge men den term -1 in het voorste lid, en schrijve tevens gemakshalve voor $a+b$, omdat die uitdrukking herhaalde malen in de vergelijking voorkomt, eene enkele letter, dat wil zeggen, men stelle $a+b=n$, dan is $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ $=n(a-b)$; hierdoor verkrijgt de opgegevene vergelijking deze gedaante

$$\frac{(x-n)^2}{n(2x-n)}+1=\frac{x^2}{\sqrt{[n^4-4n(a-b)xy]}}.$$

Herleidt men verder het voorste lid op deze wijze:

$$\frac{(x-n)^2}{n(2x-n)}+1=\frac{(x-n)^2+n(2x-n)}{n(2x-n)}=\frac{x^2-2nx+n^2+2nx-n^2}{n(2x-n)}=\frac{x^2}{n(2x-n)},$$

dan verandert de vergelijking in

$$\frac{x^2}{n(2x-n)}=\frac{x^2}{\sqrt{[n^4-4n(a-b)xy]}};$$

dezelve alsnu door x^2 deelende, daarna de breuken en vervolgens het wortelteeken verdrijvende, vindt men

$$\frac{1}{n(2x-n)}=\frac{1}{\sqrt{[n^4-4n(a-b)xy]}},$$

$$n(2x-n)=\sqrt{[n^4-4n(a-b)xy]},$$

$$4n^2x^2-4n^3x+n^4=n^4-4n(a-b)xy;$$

de gelijke termen n^4 weglatende, en daarna door $4nx$ deelende, komt er

$$nx-n^2=-(a-b)y,$$

of, na overbrenging van termen,

$$nx+(a-b)y=n^2;$$

schrijft men nu hierin voor n weder $a+b$, dan verkrijgt men eindelijk

$$(a+b)x+(a-b)y=(a+b)^2,$$

en deze vergelijking heeft nu weder de gedaante $Ax+By=C$.

In dit laatste voorbeeld heeft de herleiding eene vergelijking van den eersten graad opgeleverd, hetgeen bij eene oppervlakkige beschouwing der gegevene vergelijking niet te vermoeden was. Men ziet hierdoor proefondervindelijk bevestigd, dat over den graad eener vergelijking niet zoo dadelijk geoordeeld kan worden, ten zij de herleidingen, die de vergelijking ondergaan moet, eenvoudig genoeg zijn, om terstond te kunnen inzien, wat er na die herleidingen komen zal.

Bij dit voorbeeld valt nog op te merken, dat er gedurende de herleiding door x^2 en door $4nx$ is gedeeld geworden, ten gevolge waarvan de waarde $x=0$, die deze deelers nul maakt, wel aan de gegevene, maar niet meer aan de, door herleiding verkregene, vergelijking voldoet. Alsmede, dat door de verdrijving van het wortelteeken de onderscheiding is verloren gegaan, of er vóór dat wortelteeken $+$ of $-$ stond, ten gevolge waarvan men nu onzeker is, of men in de gegevene vergelijking + of — vóór het wortelteeken lezen moet, opdat aan dezelve voldaan worde door de waarden van x en y, die aan de vergelijking $(a+b)x+(a-b)y=(a+b)^2$ voldoen.

§ 183. Om uit twee vergelijkingen met twee onbekenden éene der onbekenden te elimineren, en daardoor verder die vergelijkingen op te lossen, kan elk der vier volgende leerwijzen dienen.

Eerste Leerwijze. *Men lost éene der vergelijkingen ten opzigte van éene der onbekenden op; den vorm, dien men alsdan verkrijgt, substitueert men in de andere vergelijking; hierdoor zal men eene vergelijking met éene onbekende bekomen, zoodat dan de andere onbekende geëlimineerd is. Uit die laatste vergelijking lost men de onbekende op, en substitueert hare waarde in den vorm, dien men voor de andere onbekende reeds verkregen heeft, dan zullen de beide onbekenden in bekenden zijn uitgedrukt.*

Bij het volgen dezer leerwijze kan men, des goedvindende, de vergelijkingen vooraf tot den vorm $Ax+By=C$ herleiden; dit is echter niet volstrekt noodzakelijk.

Past men deze leerwijze toe op de algemeene vergelijkingen $ax+by=c$ en $a'x+b'y=c'$, dan vindt men: door de eerste ten opzigte van x op te lossen

$$x=\frac{c-by}{a};$$

door dezen vorm in de tweede te substitueren,

$$a'\frac{c-by}{a}+b'y=c';$$

door uit deze vergelijking y op te lossen,

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'},$$

en door deze waarde van y te substitueren in den vorm, die reeds voor x gevonden is,

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}.$$

Tweede Leerwijze. *Men lost elk der vergelijkingen ten opzigte van eene zelfde onbekende op, en stelt de beide vormen, die men daardoor verkrijgt, aan elkander gelijk; hierdoor zal weder eene onbekende geëlimineerd zijn; de vergelijking, die men dan heeft, lost men, ten opzigte van de onbekende, die daarin voorkomt, op, en substitueert hare waarde in een' der vormen, die men reeds voor de andere onbekende gevonden heeft, dan zullen weder de vergelijkingen opgelost zijn.*

Ook bij het volgen van deze leerwijze is het niet volstrekt noodig, de vergelijkingen vooraf tot den vorm $Ax+By=C$ te herleiden.

Past men dezelve toe op de algemeene vergelijkingen $ax+by=c$ en

$a'x+b'y=c'$, dan vindt men: door uit elk der vergelijkingen y op te lossen,

$$y=\frac{c-ax}{b} \quad \text{en} \quad y=\frac{c'-a'x}{b'};$$

door deze vormen aan elkander gelijk te stellen,

$$\frac{c-ax}{b}=\frac{c'-a'x}{b'};$$

door x uit deze vergelijking op te lossen,

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},$$

en door deze waarde van x in een' der voor y gevondene vormen te substitueren,

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Derde Leerwijze. *Men herleidt de vergelijkingen beide tot den vorm* $Ax+By=C$, *en vermenigvuldigt elk met zulk een getal, of met zulk eenen vorm, dat ééne der onbekenden in de vergelijkingen, die er komen, dezelfde coëfficiënten, of coëfficiënten, die alleen in teeken verschillen, verkrijgt. Deze vergelijkingen trekt men van elkander af, of telt ze bij elkander op, dan zal die onbekende geëlimineerd zijn. Uit de laatstverkregene vergelijking lost men de, daarin voorkomende, onbekende op. Om de waarde van de andere onbekende te vinden, handelt men op dezelfde wijze; of ook, na de waarde van éénе onbekende gevonden te hebben, substitueert men die in eene der gegevene vergelijkingen, en lost er daarna de andere onbekende uit op.*

Past men deze leerwijze toe op de algemeene vergelijkingen $ax+by=c$ en $a'x+b'y=c'$, dan vindt men: door de eerste met a', en de tweede met a te vermenigvuldigen,

$$aa'x+ba'y=ca' \quad \text{en} \quad aa'x+ab'y=ac';$$

door de laatste vergelijkingen van elkander af te trekken,

$$(ab'-ba')y=ac'-ca',$$

en door afzondering van y,

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Vervolgens vindt men, door de eerste der gegevene vergelijkingen met b', en de tweede met b te vermenigvuldigen,

$$ab'x+bb'y=cb' \quad \text{en} \quad ba'x+bb'y=bc';$$

door deze vergelijkingen van elkander af te trekken,

$$(ab'-ba')x=cb'-bc',$$

en door afzondering van x,

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}.$$

Vierde leerwijze. *Men herleidt de vergelijkingen beide tot den vorm* $Ax+By=C$, *en telt ze, na eene derzelve met een onbepaald* *getal n vermenigvuldigd te hebben, bij elkander op; daarna bepaalt men n zoodanig, dat in de verkregene vergelijking de coëfficiënt van die onbekende, welke men elimineren wil, nul wordt. Deze waarde van n in de verkregene vergelijking substituerende, komt er eene vergelijking met éene onbekende, waaruit men die onbekende oplost. Om de waarde van de andere onbekende te vinden, handelt men op dezelfde wijze; of ook, na de waarde van eene onbekende gevonden te hebben, substitueert men die in eene der gegevene vergelijkingen, en lost er daarna de andere onbekende uit op.*

Past men deze leerwijze toe op de algemeene vergelijkingen $ax+by=c$ en $a'x+b'y=c'$, dan vindt men, door de eerste met n te vermenigvuldigen, en er de tweede bij op te tellen,

$$(an+a')x+(bn+b')y=cn+c'.$$

Wil men nu x elimineren, om de waarde van y te vinden, dan stelt men $an+a'=0$, waaruit volgt $n=-\frac{a'}{a}$; wil men y elimineren, om x te vinden, dan stelt men $bn+b'=0$, waaruit volgt $n=-\frac{b'}{b}$; en door nu deze waarden van n achtervolgens in de verkregene vergelijking te substitueren, bekomt men

$$\left(-b\frac{a'}{a}+b'\right)y=-c\frac{a'}{a}+c',$$

$$\left(-a\frac{b'}{b}+a'\right)x=-c\frac{b'}{b}+c',$$

en deze vergelijkingen oplossende, vindt men, even als door elk der voorgaande leerwijzen,

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \quad \text{en} \quad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Om de uitkomsten van de oplossing der algemeene vergelijkingen $ax+by=c$ en $a'x+b'y=c'$ in het geheugen te houden, kan men het volgende opmerken: indien de letters a en b, die de coëfficiënten van de onbekenden zijn, op de beide verschillende wijzen ab en ba naast elkander geschreven worden, vervolgens tusschen deze uitdrukkingen het teeken $-$ geplaatst wordt, hetwelk geeft $ab-ba$, en daarna bij de tweede letter van elken term een accent wordt gesteld, dan zal men daardoor den noemer $ab'-ba'$ verkrijgen van de gebrokens, die de waarden van x en y voorstellen; wordt vervolgens in dien noemer de letter a, waardoor de coëfficiënten van x zijn uitgedrukt, veranderd in de letter c, waardoor de bekende termen zijn voorgesteld, terwijl de accenten onveranderd blijven staan, dan zal men den teller $cb'-bc'$ verkrijgen van het gebroken, dat de waarde van x aangeeft; zoo als ook de teller $ac'-ca'$ van de waarde van y verkregen zal worden, door even zoo in den noemer de letter b, waardoor de coëfficiënten van y zijn uitgedrukt, in c te veranderen.

§ 184. Tot het oplossen van twee gegevene vergelijkingen zou men, na elk derzelve tot de gedaante $Ax+By = C$ herleid te hebben, in de algemeene formulen, die in de vorige §, door de oplossing der vergelijkingen $ax+by = c$ en $a'x+b'y = c'$ verkregen zijn, voor a, a', b, b', c en c' de waarden kunnen substitueren, die zij in de gegevene vergelijkingen hebben; gewoonlijk echter doet men dit niet, maar past op de gegevene vergelijkingen eene der vier leerwijzen toe, waardoor die algemeene formulen gevonden zijn.

Zie hier vier voorbeelden, die elk volgens eene verschillende leerwijze behandeld zijn.

Eerste Voorbeeld. De vergelijkingen $\frac{3x-2y}{7} = \frac{7y-5x}{13} + \frac{5}{14}$ en $\frac{19}{x+y} = \frac{1}{2x-y-5}$ op te lossen.

De gegevene vergelijkingen tot hare algemeene gedaanten herleidende, zal men vinden

$$148x-150y = 65, \quad \text{en} \quad 37x-20y = 95.$$

Uit de eerste y afzonderende, verkrijgt men

$$y = \frac{148x-65}{150}.$$

Deze waarde van y in de tweede vergelijking overbrengende, komt er

$$37x - \frac{296x-130}{15} = 95.$$

Hieruit zal men vinden $x = 5$; en deze waarde van x in de voor y gevondene uitdrukking stellende, bekomt men $y = 4\frac{1}{2}$. Men zal dan ook vinden, dat de waarden $x = 5$ en $y = 4\frac{1}{2}$ in de gegevene vergelijkingen gesubstitueerd wordende, aan dezelve voldoen.

Tweede Voorbeeld. De vergelijkingen $2qx - y(p-2q) = a-x$ en $\frac{q}{x-y} - px = \frac{ay^3p+a^2x^2+x^2y^2-a^2y^2+ay-x^4-ax^2yp}{y(x^2-y^2)}$ ten opzigte van p en q op te lossen.

Uit de eerste vergelijking q afzonderende, komt er

$$q = \frac{a-x+py}{2(x+y)}.$$

De tweede vergelijking vooreerst aldus schrijvende:

$$\frac{q}{x-y} = px + \frac{ayp(y^2-x^2)+(a^2-x^2)(x^2-y^2)+ay}{y(x^2-y^2)},$$

en er dan insgelijks q uit afzonderende, zal men vinden

$$q = px(x-y) + \frac{-ayp(x^2-y^2)+(a^2-x^2)(x^2-y^2)+ay}{y(x+y)},$$

of

$$q = \frac{yp(x^2-y^2)(x-a)+(a^2-x^2)(x^2-y^2)+ay}{y(x+y)}.$$

Deze waarde van q gelijk stellende aan die, welke uit de eerste vergelijking verkregen is, bekomt men

$$\frac{a-x+py}{2(x+y)} = \frac{yp(x^2-y^2)(x-a)+(a^2-x^2)(x^2-y^2)+ay}{y(x+y)},$$

of door verdrijving der breuken,

$$ay-xy+py^2 = 2yp(x^2-y^2)(x-a)+2(a^2-x^2)(x^2-y^2)+2ay,$$

door overbrenging van termen,

$$p[y^2+2y(x^2-y^2)(a-x)] = 2(a^2-x^2)(x^2-y^2)+(a+x)y,$$

door in het eerste lid y, en in het tweede $a+x$ buiten haakjes te schrijven,

$$py[y+2(x^2-y^2)(a-x)] = (a+x)[2(a-x)(x^2-y^2)+y],$$

en door weglating van den gemeenschappelijken factor,

$$py = a+x,$$

waaruit volgt $$p = \frac{a+x}{y}.$$

Deze waarde van p substituerende in de reeds vroeger gevondene vergelijking

$$q = \frac{a-x+py}{2(x+y)},$$

vindt men $$q = \frac{a}{x+y},$$

zoodat $p = \dfrac{a+x}{y}$ en $q = \dfrac{a}{x+y}$ de waarden van p en q zijn, die aan de opgegevene vergelijkingen voldoen.

Derde Voorbeeld. De waarden van x en y te vinden uit de vergelijkingen $a(ax-ay+b) = 2ab(x+y)+b^2y$ en $a^2 - \dfrac{b^2(4x+y)}{x+y} = \dfrac{a(2a+b)}{x+y}$.

Elk der gegevene vergelijkingen tot de gedaante $Ax+By = C$ herleidende, zal men vinden

$$a(a-2b)x-(a+b)^2y = -ab \quad \text{en} \quad (a^2-4b^2)x+(a^2-b^2)y = a(2a+b).$$

Wil men nu y elimineren, dan vermenigvuldigt men de eerste vergelijking met $a-b$; en de tweede met $a+b$, waardoor men bekomt

$$a(a-b)(a-2b)x-(a-b)(a+b)^2y = -ab(a-b)$$

en $$(a+b)(a^2-4b^2)x+(a-b)(a+b)^2y = a(a+b)(2a+b);$$

door deze vergelijkingen bij elkander op te tellen, verdwijnt y, en men verkrijgt dan

$$a(a-b)(a-2b)x+(a+b)(a^2-4b^2)x = a(a+b)(2a+b)-ab(a-b),$$

of door achtervolgende herleidingen,

$$x(a-2b)[a(a-b)+(a+b)(a+2b)] = a[(a+b)(2a+b)-b(a-b)],$$

$$x(a-2b)(2a^2+2ab+2b^2) = a(2a^2+2ab+2b^2),$$

$$x(a-2b) = a,$$

en $$x = \frac{a}{a-2b},$$

waardoor de waarde van x gevonden is; kunnende men nu, om die van y te vinden, deze waarde van x in eene der vergelijkingen, bij voorbeeld in $a(a-2b)x-(a+b)^2y=-ab$, substitueren, en dan y uit dezelve oplossen. Men vindt hierdoor achtervolgens:

$$a(a-2b)\frac{a}{a-2b}-(a+b)^2y=-ab,$$

$$a^2-(a+b)^2y=-ab,$$

$$(a+b)^2y=a^2+ab,$$

$$(a+b)y=a$$

en

$$y=\frac{a}{a+b}.$$

Wil men door dezelfde handelwijze x in plaats van y elimineren, dan moet men, van de vergelijkingen

$$a(a-2b)x-(a+b)^2y=-ab \text{ en } (a^2-4b^2)x+(a^2-b^2)y=a(2a+b),$$

de eerste met $a+2b$ en de tweede met a vermenigvuldigen; hierdoor bekomt men

$$a(a^2-4b^2)x-(a+b)^2(a+2b)y=-ab(a+2b)$$

en

$$a(a^2-4b^2)x+(a^2-b^2)ay=a^2(2a+b),$$

waaruit nu, door aftrekking en verder door herleiding, volgt:

$$(a^2-b^2)ay+(a+b)^2(a+2b)y=a^2(2a+b)+ab(a+2b),$$

$$y(a+b)[a(a-b)+(a+b)(a+2b)]=a[a(2a+b)+b(a+2b)],$$

$$y(a+b)(2a^2+2ab+2b^2)=a(2a^2+2ab+2b^2),$$

$$y(a+b)=a$$

en

$$y=\frac{a}{a+b};$$

alsnu is de waarde van y het eerst gevonden, en kan die van x verkregen worden, door de voor y gevondene in eene der vergelijkingen, bij voorbeeld in $a(a-2b)x-(a+b)^2y=-ab$, te substitueren, waardoor men achtervolgens hebben zal:

$$a(a-2b)x-(a+b)^2\frac{a}{a+b}=-ab,$$

$$(a-2b)x-(a+b)=-b,$$

$$(a-2b)x=a$$

en

$$x=\frac{a}{a-2b}.$$

De gevraagde waarden van x en y zijn alzoo $x=\dfrac{a}{a-2b}$ en $y=\dfrac{a}{a+b}$.

Vierde Voorbeeld. De vergelijkingen $13x-12y=18$ en $7x+5y=67$ op te lossen.

Deze vergelijkingen, reeds de gedaante $Ax+By=C$ hebbende, behoeven geene voorafgaande herleiding te ondergaan. Men vermenigvuldige de eerste met n, en telle bij de vergelijking, die hierdoor ontstaat, de tweede op, dan vindt men

$$(13n+7)x+(-12n+5)y=18n+67.$$

In deze vergelijking kan men aan n eene willekeurige waarde geven; neemt men dus die waarde zoodanig, dat $-12n+5=0$ wordt, dan verdwijnt y uit de vergelijking. Uit $-12n+5=0$, volgt $n=\frac{5}{12}$; hierdoor verandert de laatste vergelijking in

$$\left(\frac{65}{12}+7\right)x=\frac{90}{12}+67,$$

waaruit volgt $$149x=894$$
en $$x=6.$$
Brengt men nu deze waarde van x in eene der vergelijkingen, bij voorbeeld in $7x+5y=67$, over, dan vindt men

$$42+5y=67,$$
$$5y=25$$
en $$y=5.$$

Men kan ook, in de vergelijking

$$(13n+7)x+(-12n+5)y=18n+67,$$

voor n zulk eene waarde nemen, dat $13n+7=0$ wordt, waardoor x verdwijnt; hiertoe moet $n=-\frac{7}{13}$ genomen worden, dan komt er

$$\left(\frac{84}{13}+5\right)y=-\frac{126}{13}+67,$$
$$149y=745$$
en $$y=5.$$

Brengt men nu deze waarde van y in eene der vergelijkingen, bij voorbeeld in $13x-12y=18$, over, dan vindt men

$$13x-60=18,$$
$$13x=78$$
en $$x=6.$$

De oplossing der gegevene vergelijkingen verschaft dus de waarden $x=6$ en $y=5$.

§ 185. Bij de oplossing van twee vergelijkingen met twee onbekenden, hangt het van de gedaante der vergelijkingen, zoo als die gegeven zijn, af, door welke der vier opgegevene leerwijzen men de oplossing het gemakkelijkst zal verkrijgen. Wanneer de gegevene vergelijkingen den vorm $Ax+By=C$ hebben, is gewoonlijk de derde leerwijze te verkiezen, omdat bij dezelve, indien A, B en C geene gebrokens zijn, alle behandeling van breuken vermeden wordt. Indien men deze derde leerwijze wil gebruiken, om slechts éénе onbekende te elimineren, en daarna door substitutie hare waarde te vinden, is het daarenboven verkiesselijk, om die onbekende te elimineren, waartoe de eenvoudigste vermenigvuldigers vereischt worden.

§ 186. Wanneer men uit de algemeene vergelijkingen

$$ax+by=c \quad \text{en} \quad a'x+b'y=c' \;\ldots\ldots\;(\alpha)$$

éénе der onbekenden elimineert, verkrijgt men, zoo als reeds gebleken is,

$$(ab'-ba')x = cb'-bc' \ldots\ldots\ldots (\beta)$$
en
$$(ab'-ba')y = ac'-ca' \ldots\ldots\ldots (\gamma).$$

Door de vergelijking (β) wordt, zoo als uit het gezegde in § 173 blijkt, de voorwaarde uitgedrukt, die vervuld moet worden, opdat eene zelfde waarde van y gelijktijdig aan de vergelijkingen (α) kunne voldoen; terwijl de vergelijking (γ) uitdrukt, wat er vereischt wordt, om door eene zelfde waarde van x aan de vergelijkingen (α) te kunnen voldoen. Derhalve zijn, volgens hetgeen in § 146 is opgemerkt, $x = \frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$ en $y = \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$ de eenige waarden, die voor x en y genomen kunnen worden; zoodat twee vergelijkingen van den eersten graad, voor elk der twee onbekenden, slechts ééne waarde toelaten.

Zijn in de vergelijkingen (α) de bekenden zoodanig, dat in de vergelijking (β) van de twee vormen $ab'-ba'$ en $cb'-bc'$ alleen de laatste nul wordt, dan is, volgens § 152, $x = 0$ de eenige waarde van x, die aan de vergelijking (β), en dus gelijktijdig aan de vergelijkingen (α) voldoen kan. Even zoo zou $y = 0$ de eenige waarde van y zijn, die aan de vergelijking (γ), en dus gelijktijdig aan de vergelijkingen (α) zou kunnen voldoen, indien van de twee vormen $ab'-ba'$ en $ac'-ca'$ alleen de laatste nul werd.

Wordt van de twee vormen $ab'-ba'$ en $cb'-bc'$ alleen de eerste nul, dan kan, volgens § 153, geene waarde voor x aan de vergelijking (β) voldoen, en dus kan er dan geene waarde voor x aangewezen worden, die het mogelijk maakt, dat eene zelfde waarde voor y gelijktijdig aan de vergelijkingen (α) voldoet, zoodat dan deze beide vergelijkingen met elkander in strijd zijn, en $x = \frac{cb'-bc'}{0} = \infty$ wordt. Even zoo zou het strijdige der vergelijkingen (α) blijken, wanneer in (γ) van de twee vormen $ab'-ba'$ en $ac'-ca'$ alleen de eerste nul werd, waardoor $y = \frac{ac'-ca'}{0} = \infty$ zou worden. Wanneer alzoo twee vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden met elkander in strijd zijn, zal zulks daardoor ontdekt worden, dat men, na eliminatie eener onbekende, tot eene vergelijking $0 = B$ komt; of wanneer men, in plaats van die eliminatie werkelijk te verrigten, de algemeene formulen $x = \frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$ en $y = \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$ ter bepaling der onbekenden wil gebruiken, dan zal dit strijdige blijken, door dat men $x = \infty$ of $y = \infty$ vindt.

Worden in (β) de vormen $ab'-ba'$ en $cb'-bc'$ beide nul, dan zal, volgens § 154, elke waarde voor x aan de vergelijking (β) voldoen; er behoeft dus geene voorwaarde vervuld te worden, om te maken, dat door eene waarde voor y, die aan ééne der vergelijkingen (α) voldoet, ook aan de andere voldaan wordt, zoodat dan, volgens § 173, de vergelijkingen (α) onderling afhankelijk zijn. Even zoo zou het onderling afhankelijke van die vergelijkingen blijken, wanneer in (γ) de vormen $ab'-ba'$ en $ac'-ca'$ beide nul werden. Wanneer alzoo twee vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden van elkander afhangen, zal zulks daardoor ontdekt worden, dat men, na eliminatie eener onbekende, tot eene vergelijking $0=0$ komt; of wanneer men, in plaats van die eliminatie werkelijk te verrigten, de algemeene formulen $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$ en $y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$ ter bepaling der onbekenden bezigen wil, dan zal die afhankelijkheid blijken, door dat men $x=\frac{0}{0}$ of $y=\frac{0}{0}$ vindt.

Het verdient opmerking, dat zoo in de algemeene vergelijkingen $ax+by=c$ en $a'x+b'y=c'$ de grootheden a, b, c, a', b', c' geen van alle nul zijn, nimmer gelijktijdig $x=0$ en $y=0$ kan wezen; maar dat, zoo door de substitutie der waarden van a, b, c, a', b', c' gevonden wordt $x=\infty$ of $x=\frac{0}{0}$, diezelfde substitutie ook $y=\infty$ of $y=\frac{0}{0}$ zal geven. Men kan dit op de volgende wijze aantoonen:

Indien $x=0$ is, is

$$ab'-ba'> \text{ of } <0 \quad \text{en} \quad cb'-bc'=0.$$

Hieruit volgt $\frac{a}{a'}> \text{ of } <\frac{b}{b'}$ en $\frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}$,

$$\frac{a}{a'}> \text{ of } <\frac{c}{c'},$$

en

$$ac'-ca'> \text{ of } <0,$$

zoodat dan y niet gelijk nul wordt.

Indien $x=\infty$ is, is

$$ab'-ba'=0 \quad \text{en} \quad cb'-bc'> \text{ of } <0.$$

Hieruit volgt $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ en $\frac{c}{c'}> \text{ of } <\frac{b}{b'}$,

$$\frac{a}{a'}< \text{ of } >\frac{c}{c'},$$

en

$$ac'-ca'< \text{ of } >0,$$

zoodat dan ook $y=\infty$ zal gevonden worden.

Indien $x=\frac{0}{0}$ is, is

$$ab'-ba'=0 \quad \text{en} \quad cb'-bc'=0.$$

Hieruit volgt $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ en $\frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}$,

$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'},$$

en $$ac'-ca' = 0,$$
zoodat dan ook $y = \frac{0}{0}$ wordt.

Men moet wel opletten, dat, wanneer de substitutie der waarden van a, b, c, a', b', c' geeft $x = \frac{0}{0}$, en dus ook $y = \frac{0}{0}$, daarom niet gelijktijdig x en y onbepaald zijn; elk der uitdrukkingen $x = \frac{0}{0}$ en $y = \frac{0}{0}$ toont niets meer aan, dan dat de vergelijkingen van elkander afhangen, dat er dus eigenlijk slechts ééne vergelijking met twee onbekenden gegeven is, en dat men alzoo, volgens § 133, voor ééne van die onbekenden eene willekeurige waarde kan nemen.

§ 187. Wanneer tot de oplossing van eenig vraagstuk het vinden van twee onbekende getallen vereischt wordt, dan wordt hetzelve *bepaald* genoemd, indien men deszelfs voorwaarden door twee onderling onafhankelijke vergelijkingen kan uitdrukken. Tot het oplossen van zulk een vraagstuk, stelt men de onbekende getallen doorgaans door x en y voor, brengt de gegevene voorwaarden, volgens den leiddraad, in § 148 aangewezen, in vergelijkingen over, en lost daarna die vergelijkingen op. Een enkel voorbeeld zal ter opheldering genoegzaam zijn.

Vraagstuk. *Men weet zich niet te herinneren, tot welke prijzen de levering van een aantal militaire rokken en broeken is aangenomen geweest; maar men vindt opgeteekend, dat van die levering bij eene kompagnie voor* 761 *gulden* 41 *rokken en* 45 *broeken, en bij eene andere kompagnie voor* 905 *gulden* 49 *rokken en* 53 *broeken ontvangen zijn: men wil hieruit vinden, wat de prijs dezer kleedingstukken geweest is.*

Oplossing. Stel, dat elke rok x en elke broek y gulden gekost hebbe, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de volgende vergelijkingen:
$$41x+45y = 761 \quad \text{en} \quad 49x+53y = 905.$$
Trekt men deze vergelijkingen van elkander af, dan vindt men
$$8x+8y = 144,$$
of, door 8 deelende,
$$x+y = 18;$$
door vermenigvuldiging met 41, verkrijgt men de vergelijking
$$41x+41y = 738,$$
welke van
$$41x+45y = 761$$
afgetrokken wordende, geeft
$$4y = 23,$$
waaruit volgt
$$y = 5{,}75.$$
Deze waarde van y substituerende in de vergelijking
$$x+y = 18,$$
vindt men onmiddellijk
$$x = 12{,}25,$$
waaruit blijkt, dat de prijzen geweest zijn: *f* 12,25 voor elke rok en *f* 5,75 voor elke broek.

§ 188. Bij het oplossen van vraagstukken, kan men somtijds naar welgevallen ééne of twee onbekenden aannemen; de oplossing door middel van ééne onbekende verschilt dan, van die door middel van twee onbekenden, alleen daarin, dat men, bij het gebruik van ééne onbekende, door enkele redenering ééne van de onbekenden elimineert, die, bij het aannemen van twee onbekenden, in de vergelijkingen zouden zijn voorgekomen. Ter opheldering hiervan diene het volgende

VRAAGSTUK. *In water gewogen wordende, verliest het goud* $\frac{2}{39}$, *en het zilver* $\frac{2}{21}$ *van deszelfs gewigt; indien nu eene staaf, uit goud en zilver zamengesmolten*, 42 *lood weegt, en in het water gewogen slechts* 39, *hoeveel goud en zilver is er dan in die staaf?*

OPLOSSING. Stel, dat er in die staaf x lood goud en y lood zilver zij, dan heeft men terstond de vergelijking

$$x+y = 42.$$

Daar voorts, bij het wegen in water, van de x lood goud $\frac{2}{39}x$, van de y lood zilver $\frac{2}{21}y$, en van de geheele staaf 3 lood in gewigt verloren wordt, heeft men ook

$$\frac{2}{39}x + \frac{2}{21}y = 3.$$

Trekt men nu uit de eerste vergelijking $y = 42-x$, en brengt men deze waarde in de tweede vergelijking over, dan komt er

$$\frac{2}{39}x + \frac{2}{21}(42-x) = 3.$$

Deze vergelijking oplossende, vindt men

$$x = 22\frac{3}{4},$$

dus is
$$y = 42-x = 19\frac{1}{4}.$$

Er is derhalve $22\frac{3}{4}$ lood goud en $19\frac{1}{4}$ lood zilver in die staaf.

In deze oplossing zijn nu twee onbekenden gebruikt; men zou echter door ééne onbekende te gebruiken, ook kunnen geven de volgende

OPLOSSING. Stel, dat er in de staaf x lood goud zij, dan is er $42-x$ lood zilver in. Daar nu, bij het wegen in water, van het goud $\frac{2}{39}x$, van het zilver $\frac{2}{21}(42-x)$, en van de geheele staaf 3 lood verloren wordt, heeft men

$$\frac{2}{39}x + \frac{2}{21}(42-x) = 3,$$

waaruit, even als boven, volgt

$$x = 22\frac{3}{4} \quad \text{en} \quad 42-x = 19\frac{1}{4}.$$

Bij het vergelijken dezer oplossingen, ziet men dadelijk, dat het elimineren van y tusschen de beide vergelijkingen, die in de eerste oplossing voorkomen, in de tweede oplossing verrigt is, door de enkele redenering: wanneer er x lood goud is, is er $42-x$ lood zilver.

§ 189. Wanneer men door eliminatie van ééne der onbekenden, tusschen twee vergelijkingen met twee onbekenden, waartoe een vraagstuk aanleiding gegeven heeft, tot eene vergelijking van den vorm $0=A$, of $0=0$ komt, volgt hieruit, overeenkomstig hetgeen in § 186 is aangetoond: in het eerste geval, dat de voorwaarden van het vraagstuk met elkander strijdig zijn, en er dus niet aan het vraagstuk voldaan kan worden; en in het tweede geval, dat de voorwaarden, door ieder der vergelijkingen in het bijzonder uitgedrukt, hoezeer dan ook schijnbaar verschillend, in het wezen der zaak dezelfde zijn, zoodat de eene een noodzakelijk gevolg van de andere is; daar er alsdan eigenlijk slechts ééne vergelijking met twee onbekenden gegeven is, kan men, volgens § 174, aan ééne dezer onbekenden eene willekeurige waarde geven, en daarna de andere bepalen.

Wanneer voorts, bij de oplossing van een vraagstuk, waarbij twee onbekenden zijn aangenomen, die onbekenden ééne van beide of beide negatief mogten worden, is de beteekenis van deze negatieve waarde, even als bij de vraagstukken met ééne onbekende, dat, om in den eigenlijken zin aan het vraagstuk te kunnen voldoen, eene onderstelde optelling in eene aftrekking moet worden veranderd, of omgekeerd; of wel, dat de grootheid, door die onbekende voorgesteld, zich in eenen negatieven toestand bevindt.

Zie hier drie vraagstukken ten voorbeelde van hetgeen in deze § gezegd is.

Vraagstuk. *In een magazijn zijn scherpe en losse patronen; elke scherpe patroon bevat een bepaald aantal wigtjes buskruid, en elke losse patroon insgelijks; wanneer men nu weet, dat* 161 *scherpe en* 203 *losse patronen te zamen* 4 *pond buskruid bevatten, terwijl* 253 *scherpe en* 319 *losse patronen te zamen* 6 *pond buskruid inhouden, hoeveel buskruid is er dan in elke patroon?*

Oplossing. Stel, dat in elke scherpe patroon x en in elke losse y wigtjes buskruid zijn, dan heeft men, volgens de opgaaf, de vergelijkingen

$$161x+203y=4000 \qquad \text{en} \qquad 253x+319y=6000.$$

Om uit deze vergelijkingen x te elimineren, merke men op, dat de coëfficiënten van x het getal 23 tot gemeenen deeler hebben, zoodat $161=7.23$ en $253=11.23$ is, en het dus tot de eliminatie van x voldoende zal zijn, de eerste vergelijking met 11, en de tweede met 7 te vermenigvuldigen. Hierdoor bekomt men

$$1771x+2233y=44000 \qquad \text{en} \qquad 1771x+2233y=42000,$$

en door deze vergelijkingen van elkander af te trekken, komt er

$$0=2000,$$

waaruit blijkt, dat de voorwaarden van het vraagstuk met elkander strijden, zoodat het onmogelijk is, dat de opgegevene aantallen patronen de opgegevene hoeveelheden buskruid zouden bevatten.

VRAAGSTUK. *Alles als in het vorige vraagstuk zijnde, met dit verschil, dat de hoeveelheden buskruid, die de opgegevene patronen inhouden,* $3\frac{1}{2}$ *en* $5\frac{1}{2}$ *in plaats van* 4 *en* 6 *pond zijn, vraagt men weder den inhoud van elke patroon te vinden.*

OPLOSSING. Dezelfde onbekenden, als in het vorige vraagstuk, aannemende, heeft men de vergelijkingen

$$161x+203y = 3500 \quad \text{en} \quad 253x+319y = 5500.$$

Deelt men nu de eerste vergelijking door 7, en de tweede door 11, dan komt er

$$23x+29y = 500 \quad \text{en} \quad 23x+29y = 500\,;$$

trekt men vervolgens deze vergelijkingen van elkander af, dan vindt men

$$0 = 0,$$

waaruit blijkt, dat de vergelijkingen, waartoe het vraagstuk aanleiding gaf, onderling afhankelijk zijn; men kan dus voor ééne der onbekenden eene willekeurige waarde nemen, en daarna de andere onbekende bepalen.

Neemt men bij voorbeeld aan, dat elke losse patroon 7 wigtjes bevat, dan gaat de vergelijking $23x+29y = 500$ over in

$$23x+203 = 500,$$

waaruit volgt $$x = 12\frac{21}{23}.$$

Wil men echter aannemen, dat elke scherpe patroon 13 wigtjes inhoudt, dan gaat de vergelijking $23x+29y = 500$ over in

$$299+29y = 500,$$

waaruit volgt $$y = 6\frac{27}{29}.$$

Zegt men dus, dat elke scherpe patroon $12\frac{21}{23}$ en elke losse 7 wigtjes bevat, of zegt men, dat elke scherpe patroon 13 en elke losse $6\frac{27}{29}$ wigtjes inhoudt, dan zullen deze antwoorden aan het vraagstuk voldoen, even als alle andere, die men zou verkrijgen, door voor ééne der onbekenden andere willekeurige waarden aan te nemen.

VRAAGSTUK. *Iemand ontvangt eene som van* 365 *gulden, in tweeërlei geldsoorten, en bekomt daartoe van de eerste soort* 37, *en van de tweede soort* 5 *stuks. Een ander ontvangt eene som van* 408 *gulden in dezelfde geldsoorten, en bekomt daartoe van de eerste soort* 41, *en van de tweede soort* 2 *stuks: in welke geldsoorten is deze betaling geschied?*

Oplossing. Stel, dat elk stuk van de eerste soort x, en elk stuk van de tweede soort y gulden waardig zij, dan volgen uit de opgaaf de vergelijkingen

$$37x+5y=365 \quad \text{en} \quad 41x+2y=408.$$

Deze vergelijkingen oplossende, zal men vinden

$$x=10 \quad \text{en} \quad y=-1.$$

Dewijl nu eene negatieve ontvangst eene uitgaaf is, toont de negatieve waarde van y aan, dat de geldstukken van de tweede soort niet ontvangen, maar teruggegeven zijn, zoodat men, om in den eigenlijken zin aan het vraagstuk te beantwoorden, zeggen moet: dat de personen 37 en 41 stukken van 10 gulden ontvangen, en daarentegen 5 en 2 stukken van 1 gulden terug gegeven hebben.

§ 190. Indien men bij het oplossen van een vraagstuk slechts ééne onbekende heeft aangenomen, en desniettemin de voorwaarden van dat vraagstuk tot twee niet-identieke vergelijkingen aanleiding geven, moeten, zoo als in § 173 is aangetoond, die twee vergelijkingen onderling afhankelijk, of met elkander in strijd zijn. Zijn zij met elkander in strijd, dan strijden ook de opgegevene voorwaarden met elkander, zoodat het onmogelijk is, om aan het vraagstuk te beantwoorden; zijn echter de vergelijkingen onderling afhankelijk, dan is de voorwaarde, die tot eene dezer vergelijkingen gevoerd heeft, overtollig, en kan dus tot de oplossing ontbeerd worden. De oplossing, door het gebruik der andere voorwaarde verkregen, zal dan echter ook aan de niet gebruikte voorwaarde voldoen.

Over de onbepaalde vraagstukken, die aanleiding geven tot vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden.

§ 191. In § 187 is gezegd, dat een vraagstuk, waarin twee onbekenden voorkomen, bepaald genoemd wordt, indien de voorwaarden van dit vraagstuk door twee onderling onafhankelijke vergelijkingen kunnen worden uitgedrukt. Wanneer echter een vraagstuk met twee onbekenden in vergelijking gebragt wordt, en uit de opgegevene voorwaarden slechts éénе niet-identieke vergelijking opgemaakt kan worden; of ook, wanneer men bevindt, dat de vergelijkingen, die uit het vraagstuk voortvloeijen, onderling afhankelijk zijn, dan wordt zulk een vraagstuk *onbepaald* genoemd; in dit geval verkeerde het tweede vraagstuk van § 189. Indien bij dergelijke vraagstukken de oplossing niet beperkt wordt door voorwaarden, die door geene vergelijkingen kunnen worden uitgedrukt, zoo als er eenige in § 170 zijn opgegeven, dan kan men voor ééne der onbekenden eene willekeurige waarde nemen, deze in de vergelijking substitueren, en daarna de andere onbekende bepalen, zoodat er dan zooveel antwoorden op de vraag zijn, als men verkiest. Zijn er echter zulke beperkende voorwaarden, dan wordt er, even als in § 170 gezegd is, tot het vinden van de waarden der onbekenden, voor elk vraagstuk eene afzonderlijke redenering vereischt, die zich aan geene vaste regels laat binden. Somtijds zal men dan ook door zulk eene redenering bevinden, dat het vraagstuk een oneindig groot aantal antwoorden toelaat, en somtijds, dat er slechts een zeker aantal antwoorden op het vraagstuk bestaat.

§ 192. Een der meest voorkomende gevallen is, dat men slechts ééne onafhankelijke vergelijking van de gedaante $Ax+By=C$ heeft, waarin A, B en C geheele getallen voorstellen, en waaraan voldaan moet worden door geheele positieve getallen voor x en y. Uit de behandeling van een bijzonder voorbeeld zal men zien, hoe deze geheele positieve getallen voor x en y gevonden kunnen worden.

Voorbeeld. Voor x en y geheele positieve getallen te vinden, die voldoen aan de vergelijking $11x+27y=560$.

Men losse de vergelijking op ten opzigte van de onbekende, die den kleinsten coëfficiënt heeft, dan vindt men

$$x=\frac{560-27y}{11},$$

en herleide vervolgens den gebroken' vorm, dien men voor deze onbekende vindt, tot een' gemengden vorm, zoodanig, dat de getallen, die in den teller van het gebroken voorkomen, kleiner zijn, dan de noemer; hierdoor vindt men

$$x=50-2y+\frac{10-5y}{11} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (\alpha).$$

Zullen nu x en y geheele getallen zijn, dan moet ook $\frac{10-5y}{11}$ een geheel getal wezen. Stelt men dus

$$\frac{10-5y}{11}=p,$$

dan heeft men eene nieuwe vergelijking met twee onbekenden y en p, waaraan door geheele getallen voor y en p moet voldaan worden. Deze nieuwe vergelijking herleidt men tot de gedaante

$$5y+11p=10,$$

en behandelt dezelve daarna even als de opgegevene, dan verkrijgt men

$$y=\frac{10-11p}{5}$$

en

$$y=2-2p-\frac{p}{5} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (\beta).$$

Zullen nu y en p geheele getallen zijn, dan moet ook $\frac{p}{5}$ een geheel getal wezen. Stelt men dus

$$\frac{p}{5}=q,$$

waaraan alweder door geheele getallen voor p en q voldaan moet worden, en schrijft men nu voor deze vergelijking

$$p = 5q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma),$$

dan ziet men terstond, dat elk willekeurig geheel getal, voor q genomen, ook voor p een geheel getal geeft. Zijn p en q geheele getallen, dan wordt, volgens (β), ook y een geheel getal, en zijn y en p geheele getallen, dan wordt, volgens (α), ook x een geheel getal, zoodat, door een willekeurig geheel getal voor q te nemen, geheele waarden voor x en y zullen gevonden worden. Het is verder klaar, dat aan de gegevene vergelijking geene andere geheele getallen voor x en y kunnen voldoen, dan die, welke op deze wijze gevonden worden, omdat tot het vinden van die getallen, het voldoen aan de vergelijking (γ) door geheele waarden van p en q, noodzakelijk gevorderd wordt.

Tot nog toe is niet in aanmerking genomen, dat x en y positieve getallen moeten zijn; om te kunnen zien, wat men, om hieraan te voldoen, voor q nemen mag, drukt men x en y in q uit. Men vindt alsdan, door (γ) in (β) te substitueren,

$$y = 2-11q,$$

en door deze waarde van y in (α) over te brengen,

$$x = 46+27q;$$

waaruit men nu ziet, dat men, om voor x en y positieve getallen te verkrijgen, moet hebben

$$2-11q > 0 \quad \text{en} \quad 46+27q > 0,$$

dat is, $$11q < 2 \quad \text{en} \quad 27q > -46,$$

of $$q < \frac{2}{11} \quad \text{en} \quad q > -1\frac{19}{27}.$$

De eenige geheele waarden voor q, die tusschen deze grenzen liggen, zijn 0 en -1, en daar men nu heeft:

voor $q = 0$, $x = 46$ en $y = 2$,
voor $q = -1$, $x = 19$ en $y = 13$,

zoo zijn dit de eenige geheele positieve getallen voor x en y, die aan de opgegevene vergelijking voldoen.

Was er alleen gevraagd, om geheele getallen voor x en y te vinden, zoodat die getallen niet positief behoefden te zijn, dan zou men in de formulen $x = 46+27q$ en $y = 2-11q$ voor q een willekeurig positief of negatief geheel getal kunnen nemen, zoodat dan een oneindig aantal waarden voor x en y zou kunnen aangewezen worden.

Het gegeven voorbeeld volgende, zal men alle dergelijke vergelijkingen kunnen oplossen. Somtijds zal de bijzondere gesteldheid der getallen daarbij nog eenige vereenvoudiging toelaten; zoo zou men, bij voorbeeld, in plaats van (α) hebben kunnen schrijven

$$x = 50-2y+\frac{5(2-y)}{11},$$

en dan hebben kunnen stellen

$$\frac{2-y}{11} = q,$$

waaruit men terstond vinden zou

$$y = 2-11q$$

en $$x = 46+27q,$$

even als boven.

Verder zij hier nog opgemerkt, dat zoo in de vergelijking $Ax+By=C$, waarin A, B en C geheele getallen voorstellen, de getallen A en B eenen gemeenen deeler hebben, die geen deeler van C is, het onmogelijk zal zijn, voor x en y geheele getallen aan te wijzen, die aan de vergelijking voldoen; want zoo men, voor x en y geheele getallen nam, zou $Ax+By$ door den gemeenen deeler van A en B deelbaar wezen, en dus nooit gelijk kunnen zijn aan het getal C, dat volgens de onderstelling door dien gemeenen deeler niet deelbaar is.

§ 193. Om de toepassing te doen zien, die men van de leerwijze, in de vorige § opgegeven, kan maken, dienen de volgende vraagstukken.

Vraagstuk. *In een magazijn zyn scherpe patronen, die elk 13, en losse patronen, die elk 7 wigtjes buskruid bevatten: hoeveel patronen van elke soort zal men moeten nemen, om $7\frac{1}{2}$ pond buskruid te bekomen?*

Oplossing. Stel, dat men x scherpe en y losse patronen moet nemen, dan geeft het vraagstuk alleen aanleiding tot de vergelijking

$$13x+7y = 7500;$$

maar in deze vergelijking verbeelden x en y geheele positieve getallen.

Behandelt men nu deze vergelijking, volgens de opgegevene leerwijze, dan verkrijgt men achtervolgens:

$$y = \frac{7500-13x}{7} = 1071-x+\frac{3(1-2x)}{7},$$

$$\frac{1-2x}{7} = p \quad \text{of} \quad 1-2x = 7p,$$

$$x = \frac{1-7p}{2} = -3p+\frac{1-p}{2},$$

$$\frac{1-p}{2} = q, \quad \text{of} \quad 1-p = 2q,$$

en $$p = 1-2q.$$

Hierdoor wordt

$$x = 7q-3 \quad \text{en} \quad y = 1077-13q.$$

Zullen nu x en y positief zijn, dan moet men hebben

$$7q > 3 \quad \text{en} \quad 13q < 1077$$

of $$q > \frac{3}{7} \quad \text{en} \quad q < 82\frac{11}{13},$$

waaruit blijkt, dat men voor q alle geheele getallen van 1 tot 82 kan nemen, en dat er alzoo 82 antwoorden op de vraag bestaan. Neemt men $q = 29$, dan is $x = 200$ en $y = 700$, zoodat men 200 scherpe en 700 losse patronen zal kunnen nemen.

Vraagstuk. *Wanneer men eene som van 72 gulden wil betalen met dukatons en rijksdaalders, hoeveel stuks moet men dan van elk dezer geldsoorten nemen?*

Oplossing. Stel, dat men x dukatons en y rijksdaalders moet nemen, dan geeft het vraagstuk alleen aanleiding tot de vergelijking

$$315x+250y = 7200,$$

of

$$63x+50y = 1440,$$

en aan deze vergelijking moeten nu geheele getallen voor x en y voldoen.

Behandelt men deze vergelijking weder volgens de opgegevene leerwijze, dan verkrijgt men:

$$y = \frac{1440-63x}{50} = 28-x+\frac{40-13x}{50},$$

$$\frac{40-13x}{50} = p, \quad \text{of} \quad 40-13x = 50p,$$

$$x = \frac{40-50p}{13} = 3-4p+\frac{1+2p}{13},$$

$$\frac{1+2p}{13} = q, \quad \text{of} \quad 1+2p = 13q,$$

$$p = \frac{13q-1}{2} = 7q-\frac{q+1}{2},$$

$$\frac{q+1}{2} = r, \quad \text{of} \quad q+1 = 2r.$$

Hierdoor wordt

$$q = 2r-1, \quad p = 13r-7, \quad x = 30-50r, \quad y = 63r-9.$$

Een willekeurig geheel getal, voor r genomen, zal nu voor x en y mede geheele getallen geven; maar zullen x en y positieve getallen zijn, dan moet men bovendien hebben:

$$50r < 30 \quad \text{en} \quad 63r > 9$$

of

$$r < \frac{3}{5} \quad \text{en} \quad r > \frac{1}{7}.$$

Daar het nu onmogelijk is, voor r een geheel getal te nemen, dat tusschen deze grenzen ligt, kan ook eene som van 72 gulden niet in de beide genoemde geldsoorten afgepast worden.

Wil men echter voor y eene negatieve waarde toelaten, dat is, wil men de voorwaarde van het vraagstuk zoodanig veranderen, dat de betaling moet geschieden met dukatons, tegen teruggave van een aantal rijksdaalders, dan wordt r alleen door de eerste der bovenstaande grenzen beperkt, zoodat men dan $r=0$, $r=-1$, $r=-2$ enz. kan nemen. Begeert men voor x en y de kleinst mogelijke getallen, dan neemt men $r = 0$, en verkrijgt hierdoor

$$x = 30 \quad \text{en} \quad y = -9,$$

waaruit blijkt, dat de betaling kan geschieden met 30 dukatons, tegen teruggave van 9 rijksdaalders.

Wil men de betaling in rijksdaalders doen, tegen teruggave van dukatons, en dus voor x eene negatieve waarde toelaten, dan wordt r alleen door de tweede grens beperkt, zoodat men dan $r = 1$, $r = 2$, enz. kan nemen. Door $r = 1$ te nemen, verkrijgt men voor x en y weder de kleinst mogelijke getallen, te weten

$$x = -20 \quad \text{en} \quad y = 54.$$

Alzoo kan de betaling met 54 rijksdaalders, tegen teruggave van 20 dukatons plaats hebben.

OVER DE VERGELIJKINGEN VAN DEN EERSTEN GRAAD MET MEER DAN TWEE ONBEKENDEN.

Onderscheiding van drie of meer vergelijkingen in al of niet onderling onafhankelijke.

§ 194. Men noemt *drie vergelijkingen onderling onafhankelijk*, wanneer, terwijl zij geen van drieën identiek zijn, er zich ook geene onder bevindt, die door herleiding uit éene der twee andere, of door herleiding en verbinding, uit de beide andere kan worden afgeleid; zoo als, bij voorbeeld:

$$x = a+y, \quad x-b = a-y \quad \text{en} \quad 2x-b = 5y+a.$$

Drie zulke vergelijkingen worden gezegd *met elkander in strijd* te zijn, wanneer voor die letters, welke onbepaalde getallen voorstellen, geene getallen kunnen worden aangewezen, die aan die drie vergelijkingen tevens voldoen; zoo als, bij voorbeeld:

$$x+y = 4, \quad y+z = 7 \quad \text{en} \quad x+2y+z = 10.$$

Onder drie onderling onafhankelijke vergelijkingen kunnen er ook twee voorkomen, die met elkander strijdig zijn; zoo als, bij voorbeeld:

$$x+y+z = 4, \quad 2x+2y+2z = 7 \quad \text{en} \quad x-y-z = 1.$$

Of ook kunnen elke twee, van drie zulke vergelijkingen, met elkander strijden; zoo als, bij voorbeeld:

$$x+y = 2-z, \quad 2x+2y = 3-2z \quad \text{en} \quad 3x+3y = 4-3z.$$

Wanneer van drie niet-identieke vergelijkingen de eene door herleiding en verbinding uit de twee andere kan worden afgeleid, noemt men die *drie vergelijkingen onderling afhankelijk*.

Indien de twee vergelijkingen, uit welker verbinding de derde ontstaan kan, reeds onderling afhankelijk zijn, zoo als, bij voorbeeld, het geval is met de drie vergelijkingen

$$2x+4y = 6, \quad 3x+6y = 9 \quad \text{en} \quad 5x+10y = 15,$$

waarvan de laatste gevormd is, door de twee eerste bij elkander op te tellen, dan komt onder de drie onderling afhankelijke vergelijkingen slechts éene onafhankelijke voor; zijn er drie zulke vergelijkingen gegeven, dan is dit hetzelfde, als of er slechts eene onafhankelijke gegeven was; maar het is onverschillig, welke van de drie men als die onafhankelijke wil aanzien.

Indien de twee vergelijkingen, uit welker verbinding de derde ontstaan is, onderling onafhankelijk zijn, zoo als, bij voorbeeld, het geval is met de vergelijkingen

$$2x+4y=6,\quad x+y+4z=10 \quad \text{en} \quad 3x+5y+4z=16,$$

waarvan de laatste door optelling der twee eerste verkregen is, dan zullen, van de drie onderling afhankelijke vergelijkingen, er twee naar welgevallen onderling onafhankelijk zijn, en de derde zal van die twee afhangen; zijn er dus drie zulke vergelijkingen gegeven, dan is dit hetzelfde, als of er slechts twee onafhankelijke vergelijkingen gegeven waren; maar het is onverschillig, welke twee van de drie men als die onafhankelijke wil aanzien.

Men kan ook nog drie vergelijkingen hebben, waarvan er twee onderling afhankelijk zijn, terwijl de derde niet van de twee eerste afhangt, zoo als, bij voorbeeld:

$$ax-b=c,\quad 2ax-2c=2b \quad \text{en} \quad ax+c=d.$$

Zijn er drie zulke vergelijkingen gegeven, dan is dit weder hetzelfde, als of er slechts twee onafhankelijke gegeven waren; maar het is onverschillig, welke van de twee eerste men nevens de derde voor die twee onafhankelijke wil nemen. In dit geval zijn de drie vergelijkingen niet *onderling* afhankelijk, maar ook niet onderling onafhankelijk.

§ 195. Wanneer onder drie niet-identieke vergelijkingen slechts éene onafhankelijke voorkomt, zullen al de waarden voor de daarin voorkomende letters, die aan de eene voldoen, ook de twee andere identiek maken; het opsporen van zulke waarden vereischt dus slechts de oplossing van éene vergelijking met éene onbekende. Zijn omgekeerd drie niet-identieke vergelijkingen zoodanig gesteld, dat alle waarden voor de letters, die aan éene der vergelijkingen voldoen, ook de beide andere identiek maken, dan komt, blijkens het in § 172 aangevoerde, onder die drie vergelijkingen slechts éene onafhankelijke voor.

Wanneer onder drie niet-identieke vergelijkingen twee onafhankelijke voorkomen, zullen al de waarden voor de daarin voorkomende letters, die aan die twee voldoen, ook de derde identiek maken; het opsporen van zulke waarden vereischt dus slechts de oplossing van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Zijn omgekeerd drie niet-identieke vergelijkingen, waaronder twee onderling onafhankelijke voorkomen, zoodanig gesteld, dat al de waarden voor de letters, die aan die twee voldoen, ook de derde identiek maken, dan kan die derde niet onafhankelijk zijn, maar zal, of van die twee andere, of van eene van die twee afhangen. Om dit laatste aan te toonen, is het genoegzaam, te doen zien, dat, zoo door alle waarden voor de letters, die aan twee onafhankelijke vergelijkingen (α) en (β) voldoen, ook aan eene derde vergelijking (γ) voldaan wordt, en (γ) noch van (α) alleen, noch van (β) alleen afhangt, dat dan (γ) van (α) en (β) beide moet afhangen; en hiertoe dient de volgende redenering:

De genoemde gesteldheid der vergelijkingen vordert, dat men, twee onbekenden aannemende, ééne derzelve tusschen twee der vergelijkingen eliminerende, en daarna de andere onbekende afzonderende, altijd dezelfde uitkomst verkrijgt, welke twee vergelijkingen van de drie men ook nemen mag; door verbinding van (α) met (β), kan men derhalve tot eene zelfde vergelijking (δ) geraken, als door verbinding van (β) met (γ); omdat (δ) door verbinding van (β) en (γ) verkregen kan worden, kan men ook (γ) door verbinding van (β) en (δ) verkrijgen; maar (δ) kan door verbinding van (α) met (β) verkregen worden, bijgevolg (γ) door verbinding van (β) met eene vergelijking, die uit (α) en (β) wordt afgeleid, dat is, door behoorlijke verbinding van (α) en (β).

Tot een voorbeeld neme men voor (α) en (β) de vergelijkingen

$$ax-by = a^2-b^2 \; . \; . \; . \; . \; (\alpha) \quad \text{en} \quad bx+ay = 2ab \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta),$$

waaraan alleen voldaan wordt, door zulke waarden voor de letters, waarbij $x = a$ en $y = b$ is. Verder stelle men eene vergelijking (γ) zamen, die onafhankelijk van (α), en ook onafhankelijk van (β) is, waaraan $x = a$ en $y = b$ voldoet, doch die overigens geheel willekeurig is, bij voorbeeld,

$$x+y = a+b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\gamma).$$

Nu komt men, door (α) en (β) zoodanig te verbinden, dat y verdwijnt, noodwendig tot de vergelijking

$$x = a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\delta);$$

door eene dergelijke verbinding van (β) met (γ) komt men noodwendig ook tot $x = a$, en dus tot dezelfde vergelijking (δ). En past men nu verder de bovenstaande redenering van stap tot stap op deze vergelijkingen toe, dan zal men duidelijk zien, dat (γ) door verbinding van (α) en (β) moet kunnen ontstaan.

Wilde men in het gegevene voorbeeld vinden, hoe (γ) onmiddellijk uit (α) en (β) zou kunnen afgeleid worden, dan zou men, op grond van het beredeneerde, de volgende bewerkingen verrigten:

$$\begin{array}{ll}
(\alpha)\times a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & a^2x-aby = a(a^2-b^2), \\
(\beta)\times b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & b^2x+aby = 2ab^2, \\
\hline
(\alpha)\times a+(\beta)\times b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & (a^2+b^2)x = a(a^2+b^2), \\
\dfrac{(\alpha)\times a+(\beta)\times b}{a^2+b^2} = (\delta) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & x = a;
\end{array}$$

$$(\gamma)\times a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ax+ay=a^2+ab,$$
$$(\beta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad bx+ay=2ab,$$
$$(\gamma)\times a-(\beta) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a-b)x=a(a-b),$$
$$\frac{(\gamma)\times a-(\beta)}{a-b}=(\delta) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x=a;$$

vervolgens zou men stellen

$$\frac{(\alpha)\times a+(\beta)\times b}{a^2+b^2}=\frac{(\gamma)\times a-(\beta)}{a-b},$$

en daaruit (γ) afzonderende, zou men vinden

$$(\gamma)=\frac{(\alpha)\times(a-b)+(\beta)\times(a+b)}{a^2+b^2},$$

waaruit blijkt, dat de vergelijking (γ) ontstaan zal, zoo men (α) met $a-b$, en (β) met $a+b$ vermenigvuldigt, de komende vergelijkingen bij elkander optelt, en de vergelijking, die men dan verkrijgt, door a^2+b^2 deelt; hetwelk men dan ook bij de proef bevestigd zal zien.

§ 196. Wanneer men drie vergelijkingen naar welgevallen neemt, zullen dezelve doorgaans onderling onafhankelijk zijn; zoo zijn, bij voorbeeld, de vergelijkingen

$$x+y=a, \qquad bx=ac+by \qquad \text{en} \qquad 3x-2=a+y \;\ldots\; (\alpha)$$

vermoedelijk onderling onafhankelijk.

Om voor de letters getallen te vinden, die te gelijker tijd aan de drie vergelijkingen (α) voldoen, kan men beginnen met twee van die letters, bij voorbeeld x en y, als onbekenden aan te nemen, en twee der vergelijkingen, bij voorbeeld de twee eerste, ten opzigte van die letters op te lossen, waardoor men vindt

$$x=\frac{a(b+c)}{2b} \qquad \text{en} \qquad y=\frac{a(b-c)}{2b};$$

daar men bij deze oplossing op geene identieke vergelijking vervallen is, weet men volgens § 173 reeds, dat de twee eerste vergelijkingen niet van elkander afhangen. Aan deze vergelijkingen kan dus alleen voldaan worden, door zulke waarden voor de letters te nemen, waarbij $x=\frac{a(b+c)}{2b}$ en $y=\frac{a(b-c)}{2b}$ is.

Substitueert men deze vormen voor x en y in de derde vergelijking, en wordt deze daardoor identiek, dan wordt door al de waarden voor de letters, die aan de twee eerste vergelijkingen voldoen, ook aan de derde voldaan, en dan hangt, volgens de vorige §, die derde vergelijking van de twee eerste, of van ééne derzelve af; door de genoemde substitutie komt er, na behoorlijke herleiding,

$$ac=b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta).$$

Deze vergelijking nu is niet identiek, en dus hangt de derde vergelijking niet van de twee eerste of van ééne derzelve af, want hing zij daarvan af, dan zouden de vormen $x = \frac{a(b+c)}{2b}$ en $y = \frac{a(b-c)}{2b}$, die aan de twee eerste voldoen, ook aan de derde voldoen moeten; men weet dus nu, dat de vergelijkingen (α) onderling onafhankelijk zijn.

Omdat $x = \frac{a(b+c)}{2b}$ en $y = \frac{a(b-c)}{2b}$ slechts aan de twee eerste vergelijkingen voldoen, maar de derde in (β) doen overgaan, zal het, om aan alle drie de vergelijkingen te voldoen, niet genoegzaam zijn a, b en c willekeurig, $x = \frac{a(b+c)}{2b}$ en $y = \frac{a(b-c)}{2b}$ te nemen, maar voor a, b en c moeten zulke getallen genomen worden, dat aan de vergelijking (β) voldaan wordt; om zulke waarden voor a, b en c te vinden, moet men in de vergelijking (β) eene nieuwe onbekende, bij voorbeeld a, aannemen, en uit die vergelijking oplossen, waardoor men vindt $a = \frac{b}{c}$. Neemt men dus voor b en c willekeurige getallen, $a = \frac{b}{c}$, $x = \frac{a(b+c)}{2b} = \frac{b+c}{2c}$ en $y = \frac{a(b-c)}{2b} = \frac{b-c}{2c}$, dan zullen deze waarden te gelijker tijd aan de drie onderling onafhankelijke vergelijkingen (α) voldoen. Men zal dan ook bij de proef bevinden, dat door substitutie van $x = \frac{b+c}{2c}$, $y = \frac{b-c}{2c}$ en $a = \frac{b}{c}$ alle drie die vergelijkingen identiek worden.

Uit het bijgebragte voorbeeld blijkt, dat men, om getallen voor de letters te vinden, die gelijktijdig aan drie onderling onafhankelijke vergelijkingen voldoen, drie onbekenden moet aannemen, maar voor de overige letters willekeurige getallen mag nemen. Door hier x, y en a voor die onbekenden te nemen, en dan te vinden, dat $x = \frac{b+c}{2c}$, $y = \frac{b-c}{2c}$ en $a = \frac{b}{c}$ moet genomen worden, zijn die drie vergelijkingen ten opzigte van x, y en a opgelost. Even zoo had men drie andere letters als onbekenden kunnen aannemen, en de oplossing der vergelijkingen ten opzigte van die letters kunnen begeeren.

Het vinden van getallen, die aan drie onderling onafhankelijke vergelijkingen voldoen, dat is, het oplossen van die vergelijkingen, is dus in het algemeen: voor drie der letters, die men als onbekenden aanneemt, stelkunstige vormen te vinden, uit de overige letters of bekenden zamengesteld, zoodanig, dat die vormen, voor de onbekenden gesubstitueerd, elk der vergelijkingen identiek maken.

Stellen in de vergelijkingen (α) de letters a, b en c bepaalde getallen voor, zoodat alleen de vraag kan zijn, wat men voor x en y kan nemen, om aan die vergelijkingen te voldoen, dan zullen de vergelijkingen (α), of niet onderling onafhankelijk, of met elkander in strijd zijn, naargelang die getallen a, b en c al of niet aan de vergelijking (β) voldoen. Onder drie vergelijkingen met slechts twee onbekenden moeten dus of afhankelijke of strijdige voorkomen. Wanneer in drie vergelijkingen slechts ééne onbekende voorkomt, moeten, volgens hetgeen in § 173 ten aanzien van twee vergelijkingen gezegd is, elke twee, willekeurig uit die drie vergelijkingen gekozene, onderling afhankelijk, of met elkander in strijd zijn.

De in het behandelde voorbeeld tot onbekenden aangenomene letters x, y en a kwamen alle in elk der vergelijkingen (α) voor, dit is echter niet noodig; alleenlijk wordt vereischt, dat, overeenkomstig § 133, elke vergelijking ten minste ééne onbekende, en overeenkomstig § 173, elk tweetal vergelijkingen ten minste twee onbekenden bevat; hetgeen hieromtrent in § 173 ten aanzien van twee vergelijkingen gezegd is, is voldoende, om dit volkomen op te helderen.

§ 197. Den regel van § 178 mag men klaarblijkelijk tot drie, vier of meer vergelijkingen uitstrekken; niet alleen hierdoor, maar ook door herhaalde verbindingen van vergelijkingen twee aan twee, kan men drie, vier of meer vergelijkingen met elkander verbinden, dat is, eene enkele vergelijking opmaken, tot welker zamenstelling elke der te verbindene vergelijkingen heeft medegewerkt.

Dit in het oog houdende, zal men slechts, hetgeen in § 194 gezegd is, behoeven uit te breiden, om te weten, wat men door de onderlinge onafhankelijkheid, door de al of niet onderlinge afhankelijkheid, en door het in strijd zijn van vier of meer vergelijkingen verstaan moet.

Zijn eenige gegevene vergelijkingen niet onderling onafhankelijk, en verwerpt men eene willekeurige, van elk twee-, drie-, viertal enz. onderling afhankelijke, dat er zich onder bevindt, dan zal men slechts onafhankelijke vergelijkingen overhouden, en het gegeven zijn van al de vergelijkingen is dan hetzelfde, als of er slechts zooveel onafhankelijke vergelijkingen gegeven waren, als men overhoudt. Welke van de gegevene vergelijkingen men als die onafhankelijke wil aanzien, daarin heeft men de vrije keuze, in zoo verre als de willekeur in het verwerpen van deze of gene der onderling afhankelijke zulks toelaat.

Men zal, hetgeen in § 195 en 196 ten aanzien van drie vergelijkingen gezegd is, gemakkelijk kunnen uitbreiden tot het geval, dat er vier en meer vergelijkingen zijn, en dan blijkt daaruit in het algemeen:

1°. Dat, wanneer men te gelijker tijd voldoen moet aan eenige niet-identieke vergelijkingen, waaronder onderling afhankelijke voorkomen, daartoe alleen aan de onderling onafhankelijke, die er zich onder bevinden, zal behoeven voldaan te worden.

2°. Dat, wanneer men n onderling onafhankelijke vergelijkingen heeft, waaraan te gelijker tijd voldaan moet worden, er in die vergelijkingen evenveel onbekenden, als er vergelijkingen zijn, en dus ook n onbekenden moeten voorkomen; dat deze onbekenden zich alle in elke vergelijking kunnen bevinden, maar dat dit niet noodzakelijk is, indien slechts die onbekenden zoodanig in de vergelijkingen verspreid zijn, dat in elke vergelijking ten minste ééne, in elk paar vergelijkingen ten minste twee, in elk drietal vergelijkingen ten minste drie van dezelve voorkomen, en, zoo vervolgens; dat, zoo er in die n vergelijkingen minder dan n onbekenden zijn, of zoo de onbekenden niet op de genoemde noodzakelijke wijze verspreid zijn, er zich onder de vergelijkingen strijdige bevinden; en dat, zoo er in deze n vergelijkingen meer dan n letters zijn, die men als onbekenden beschouwd heeft, men, om aan die vergelijkingen te voldoen, slechts van die letters n willekeurige, mits op de bovengenoemde noodzakelijke wijze in de vergelijkingen verspreid, als onbekenden behoeft te blijven aanzien, en voor de overige willekeurige waarden kan nemen.

3°. Dat, wanneer men n onderling onafhankelijke vergelijkingen, waaraan gelijktijdig voldaan moet worden, op zich zelven beschouwt, en dus geenerlei vraagstuk in aanmerking neemt, waaruit die vergelijkingen kunnen ontstaan zijn, n willekeurige letters, mits op bovengenoemde noodzakelijke wijze in de vergelijkingen verspreid, tot onbekenden kunnen aangenomen worden; dat dan de overige letters als bekenden moeten worden aangezien, en het oplossen der vergelijkingen, ten opzigte van die onbekenden, bestaat in het vinden van vormen, uit de bekenden zamengesteld, die voor de onbekenden gesubstitueerd, al de vergelijkingen identiek maken.

4°. Dat in n onafhankelijke vergelijkingen de n onbekenden zoodanig verspreid kunnen zijn, dat derzelver oplossing op het oplossen van minder vergelijkingen met minder onbekenden nederkomt.

Oplossing van een stelsel van drie of meer vergelijkingen van den eersten graad, met drie of meer onbekenden, en van vraagstukken, daartoe betrekkelijk.

§ 198. Indien de voorwaarden, waaraan eenige stelkunstige grootheden voldoen moeten, door drie, vier, of in het algemeen door n onderling onafhankelijke vergelijkingen worden uitgedrukt, en men dus, volgens de vorige §, ook met drie, vier, of met n onbekenden te doen heeft, worden die onbekenden gewoonlijk weder door de letters x, y, z, u, v, w, enz. voorgesteld. De vergelijkingen met drie of meer onbekenden worden van den eersten graad genoemd, wanneer zij, door dezelfde wijze van herleiden, die vroeger ten aanzien van vergelijkingen met twee onbekenden is aangewezen, kunnen gebragt worden tot de gedaanten

$$A x+B y+C z = D,$$
$$A x+B y+C z+D u = E,$$
$$A x+B y+C z+D u+E v = F,$$
enz.

waarin A, B, C, D, E, F, enz. getallen of uit bekenden zamengestelde stelkunstige vormen verbeelden. Het is ook hier weder eerst na de herleiding, dat men beoordeelen kan, of de vergelijkingen al of niet van den eersten graad zijn; wordende, voor zoo ver de vergelijkingen niet van den eersten graad zijn, de graad van eene vergelijking bepaald door het grootste aantal onbekende factoren, dat, na verdrijving van wortelteekens en gebrokens, in eenigen term voorkomt.

§ 199. Het oplossen van een stelsel van n onderling onafhankelijke vergelijkingen met n onbekenden komt hoofdzakelijk daarop neder, dat men uit die vergelijkingen paarsgewijze eene zelfde onbekende elimineert, om daardoor tot een stelsel van $n-1$ onderling onafhankelijke vergelijkingen met $n-1$ onbekenden te geraken. Door deze zelfde handelwijze bij herhaling toe te passen, komt men dan telkens tot een stelsel, waarbij ééne vergelijking en ééne onbekende minder voorkomt, en dus eindelijk tot ééne vergelijking met ééne onbekende. Uit deze laatste vergelijking kan men dan die ééne onbekende oplossen, en vervolgens de waarden der overige onbekenden door substitutie verkrijgen.

Bij het paren der n vergelijkingen, ter eliminatie eener zelfde onbekende, moet men opletten, dat elk van die n vergelijkingen daarbij ten minste éénmaal gebruikt moet worden, en dat dit paren slechts op $n-1$ verschillende wijzen moet plaats hebben; want liet men eene der vergelijkingen ongebruikt, dan zou men door de oplossing klaarblijkelijk geene waarden kunnen vinden, die aan die vergelijking voldoen; en paarde men de n vergelijkingen op meer dan $n-1$ verschillende wijzen, dan zou men ook meer dan $n-1$ vergelijkingen met $n-1$ onbekenden verkrijgen, die, zoo de oorspronkelijke vergelijkingen niet met elkander strijden, ook niet strijdig kunnen zijn, en dus onderling afhankelijke moeten bevatten.

§ 200. Om uit elk paar vergelijkingen eene onbekende te elimineren, maakt men gebruik van eene der drie eerste leerwijzen, die in § 183 ten aanzien van twee vergelijkingen met twee onbekenden zijn opgegeven. Het hangt van den vorm der vergelijkingen af, welke leerwijze in elk bijzonder geval te verkiezen is, en zoo niet al de onbekenden in elk der vergelijkingen mogten voorkomen, zal daardoor slechts de oplossing minder eliminatiën vereischen, en dus te gemakkelijker afloopen.

Zie hier drie voorbeelden, in elk van welke eene verschillende dezer leerwijzen gevolgd, en verder de oplossing, overeenkomstig het in de vorige § gezegde, verkregen is.

Eerste Voorbeeld. De waarden van x, y, z en u uit de vergelijkingen $\frac{3}{x+2y} = -\frac{1}{u}$, $x+\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}u = 5\frac{1}{12}$, $4y+u = x-5z$ en $x+2y+3z+4u = 1$ te vinden.

Dewijl in de eerste vergelijking z ontbreekt, behoeft men, om z te elimineren, alleen de drie laatste vergelijkingen te gebruiken. Zondert men derhalve z uit de tweede vergelijking af, waardoor men vindt $z = \frac{61-12x-6y-3u}{4}$, en brengt men deze waarde van z in de derde en vierde vergelijking over, dan verkrijgt men, na herleiding, $64x+14y+11u = 305$ en $32x+10y-7u = 179$, zoodat men nu, met de eerste der gegevene, de drie vergelijkingen

$$\frac{3}{x+2y} = -\frac{1}{u},\ 64x+14y+11u = 305,\ 32x+10y-7u = 179$$

met drie onbekenden heeft. Zondert men uit de eerste dezer vergelijkingen x af, waardoor men vindt $x = -2y-3u$, en brengt men deze waarde van x in de beide andere over, dan verkrijgt men na herleiding

$$-114y-181u = 305 \quad \text{en} \quad -54y-103u = 179,$$

zoodat men nu twee vergelijkingen met twee onbekenden heeft. Zondert men eindelijk y uit de laatste dezer twee vergelijkingen af, waardoor men vindt $y = -\frac{103u+179}{54}$, en brengt men deze waarde in de andere vergelijking over, dan komt er na herleiding

$$328u = -656.$$

Hieruit volgt nu
$$u = -2.$$

Alzoo is
$$y = -\frac{103u+179}{54} = -\frac{-206+179}{54} = \frac{1}{2},$$
$$x = -2y-3u = -1+6 = 5$$
en
$$z = \frac{61-12x-6y-3u}{4} = \frac{61-60-3+6}{4} = 1,$$

zoodat nu de waarden der onbekenden gevonden zijn.

Tweede Voorbeeld. De waarden van x, y en z te vinden uit de vergelijkingen $\frac{2x+y}{x-2y+z} = \frac{18}{11}$, $2(x-y) = 3(z+2)$ en $2x+3y+4z = 13$.

Uit elk der gegevene vergelijkingen x afzonderende, vindt men

$$x = \frac{18z-47y}{4},\quad x = \frac{2y+3z+6}{2},\quad x = \frac{13-3y-4z}{2}.$$

Stelt men nu deze eerste waarde van x gelijk aan elk der beide andere, dan verkrijgt men de twee vergelijkingen met twee onbekenden

$$\frac{18z-47y}{4}=\frac{2y+3z+6}{2} \quad \text{en} \quad \frac{18z-47y}{4}=\frac{13-3y-4z}{2}.$$

Uit deze beide vergelijkingen z afzonderende, zal men vinden

$$z=\frac{4+17y}{4} \quad \text{en} \quad z=\frac{26+41y}{26}.$$

Stelt men dus weder deze waarden van z aan elkander gelijk, dan verkrijgt men de vergelijking

$$\frac{4+17y}{4}=\frac{26+41y}{26},$$

waarin nu slechts ééne onbekende voorkomt. Deze laatste vergelijking oplossende, komt er

$$y=0,$$

dus is
$$z=\frac{4+17y}{4}=1$$

en
$$x=\frac{18z-47y}{4}=4\frac{1}{2},$$

zoodat $x=4\frac{1}{2}$, $y=0$ en $z=1$ de waarden der onbekenden zijn.

Tot opheldering van het laatste gedeelte van § 199, kan men in dit voorbeeld opmerken, dat men ook wel de tweede en derde van de drie waarden, die aanvankelijk voor x uit de gegevene vergelijkingen zijn afgeleid, aan elkander gelijk had kunnen stellen, en daardoor nog eene derde vergelijking in y en z had kunnen bekomen; maar door het op die wijze opmaken van drie vergelijkingen tusschen y en z, zou men de drie gegevene vergelijkingen op meer dan twee verschillende wijzen, ter eliminatie van x, gepaard hebben, zoodat deze drie vergelijkingen tusschen y en z niet onderling onafhankelijk kunnen zijn. Het is dan ook in het afgehandelde voorbeeld klaar, dat die derde vergelijking tusschen y en z van de twee andere zal afhangen, en dus tot de oplossing overtollig zal wezen.

Derde Voorbeeld. De vergelijkingen $2(5y-x)=3(z-1)$, $5x+y=26(z+1)$, $x+y+z+u=8-(x+6z+2u)$ en $\dfrac{x+y+2u}{z+1}=4-\dfrac{y-4u}{3(z+1)}$ op te lossen.

De gegevene vergelijkingen herleidende tot de gedaanten, in § 198 opgegeven, vindt men voor dezelve:

$$2x-10y+3z=3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
$$5x+y-26z=26 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$
$$2x+y+7z+3u=8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$
$$3x+4y-12z+2u=12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Omdat de onbekende u in de vergelijkingen (1) en (2) niet voorkomt, is het hier verkiesselijk, die onbekende tusschen de vergelijkingen (3) en (4) te elimineren; want dan zal men onmiddellijk tot een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden geraken. Hiertoe vermenigvuldigt men (3) met 2, (4) met 3, en trekt de komende vergelijkingen van elkander af, hetwelk geeft

$$4x+2y+14z+6u=16$$
$$9x+12y-36z+6u=36$$
$$\overline{5x+10y-50z\quad=20,}$$

of, na deeling door 5,

$$x+2y-10z=4 \ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

zoodat men nu heeft de drie vergelijkingen

$$2x-10y+3z=3 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
$$5x+y-26z=26 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

en

$$x+2y-10z=4 \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Alsnu zal het gemakkelijkst zijn, x te elimineren, en daartoe de vergelijkingen (1) met (5) en (2) met (5) te paren. Men trekt derhalve van (1) het dubbel van (5), en van (2) het vijfvoud van (5) af, dan verkrijgt men

$$2x-10y+3z=3$$
$$2x+4y-20z=8$$
$$\overline{-14y+23z=-5 \ldots\ldots\ldots\ldots (6),}$$

$$5x+y-26z=26$$
$$5x+10y-50z=20$$
$$\overline{-9y+24z=6}$$

of

$$-3y+8z=2 \ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

zoodat men nu heeft de twee vergelijkingen

$$-14y+23z=-5 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

en

$$-3y+8z=2 \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Uit deze vergelijkingen kan y het gemakkelijkst geëlimineerd worden. Daartoe vermenigvuldigt men (6) met 3 en (7) met 14, en trekt de komende vergelijkingen van elkander af, hetwelk geeft

$$-42y+69z=-15$$
$$-42y+112z=28$$
$$\overline{-43z=-43 \ldots\ldots\ldots\ldots (8),}$$

zoodat men nu éene vergelijking met éene onbekende heeft.

Uit de vergelijking (8) vindt men terstond $z=1$. Deze waarde van z, in eene der vergelijkingen (6) of (7), bij voorbeeld in (7), overbrengende, komt er $-3y+8=2$, waaruit volgt $y=2$. De gevondene waarden van z en y, in eene der vergelijkingen (1), (2) of (5), bij voorbeeld in (5), substituerende, verkrijgt men $x+4-10=4$, waaruit gevonden wordt $x=10$. Brengt men eindelijk de nu gevondene waarden van x, y en z, in eene der vergelijkingen (3) of (4), bij voorbeeld in (3), over, dan bekomt men $20+2+7+3u=8$, waardoor men $u=-7$ vindt.

Alzoo zijn $x=10$, $y=2$, $z=1$ en $u=-7$ de waarden, die de onbekenden in de gegevene vergelijkingen hebben.

§ 201. De vierde leerwijze, die in § 183 tot het elimineren van eene onbekende uit twee vergelijkingen is opgegeven, kan zoodanig uitgebreid worden, dat men daardoor uit n vergelijkingen van den eersten graad met n onbekenden al de onbekenden op éene na te gelijker tijd elimineert, en door die eliminatie tot een stelsel van $n-1$ vergelijkingen met $n-1$ onbekenden geraakt. Men herleidt daartoe de vergelijkingen alle tot de in § 198 opgegevene gedaanten, vermenigvuldigt ze alle op éene na, ieder in het bijzonder, met een onbepaald getal, bij voorbeeld de eerste met p, de tweede met q, de derde met r, enz., terwijl de laatste onveranderd blijft; de vergelijkingen, zoo als zij dan zijn, telt men bij elkander op, en bepaalt vervolgens de getallen p, q, r, enz. zoodanig, dat in de laatstverkregene vergelijking de coëfficiënten der onbekenden alle op éene na nul worden; tot deze bepaling verkrijgt men dan $n-1$ vergelijkingen met de $n-1$ onbekenden p, q, r, enz.

Zie hier tot opheldering, hoe de toepassing dezer leerwijze tot de oplossing voert der drie algemeene vergelijkingen met drie onbekenden

$$ax+by+cz=d,\ a'x+b'y+c'z=d' \quad \text{en} \quad a''x+b''y+c''z=d''.$$

De eerste dezer vergelijkingen met p, de tweede met q vermenigvuldigende, en de derde onveranderd latende, verkrijgt men

$$apx+bpy+cpz=dp,\ a'qx+b'qy+c'qz=d'q \text{ en } a''x+b''y+c''z=d''.$$

waaruit door optelling volgt

$$(ap+a'q+a'')x+(bp+b'q+b'')y+(cp+c'q+c'')z=dp+d'q+d'' \ . \ (\alpha).$$

Wil men nu y en z te gelijker tijd elimineren, dan behoeft men daartoe slechts aan p en q zulke waarden te geven, dat $bp+b'q+b''=0$ en $cp+c'q+c''=0$ wordt. Om zulke waarden voor p en q op te sporen, is het slechts noodig, de twee vergelijkingen

$$bp+b'q+b''=0 \quad \text{en} \quad cp+c'q+c''=0 \ \ldots\ldots (\beta)$$

ten opzigte van p en q op te lossen. Door aan p en q deze waarden te geven, verandert de vergelijking (α) in

$$(ap+a'q+a'')x = dp+d'q+d'',$$

waaruit terstond volgt

$$x=\frac{dp+d'q+d''}{ap+a'q+a''} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma),$$

in welke uitkomst nu p en q de waarden hebben, die aan de vergelijkingen (β) voldoen. Door de vergelijkingen (β) werkelijk op te lossen, vindt men voor die waarden

$$p=\frac{b'c''-c'b''}{bc'-cb'} \quad \text{en} \quad q=\frac{cb''-bc''}{bc'-cb'},$$

door welker substitutie in (γ) voor de waarde van x gevonden wordt

$$x = \frac{d \,.\, \dfrac{b'c''-c'b''}{bc'-cb'} + d' \,.\, \dfrac{cb''-bc''}{bc'-cb'} + d''}{a \,.\, \dfrac{b'c''-c'b''}{bc'-cb'} + a' \,.\, \dfrac{cb''-bc''}{bc'-cb'} + a''},$$

of, na herleiding,

$$x = \frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

zoodat nu x geheel in bekenden is uitgedrukt.

Wil men in de vergelijking (α) te gelijker tijd x en z doen verdwijnen, dan zal men moeten stellen

$$ap+a'q+a''=0 \quad \text{en} \quad cp+c'q+c''=0 \, \ldots\ldots (\beta'),$$

waardoor men verkrijgen zal

$$(bp+b'q+b'')y = dp+d'q+d''$$

of

$$y = \frac{dp+d'q+d''}{bp+b'q+b''} \, \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma'),$$

waarin nu p en q de waarden hebben, die aan de vergelijkingen (β') voldoen. Lost men dus de vergelijkingen (β') ten opzigte van p en q op, en brengt men de waarden, die men daardoor voor p en q verkrijgt, in (γ') over, dan komt er, na behoorlijke herleiding,

$$y = \frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

waardoor ook y in bekenden is uitgedrukt.

Wil men eindelijk in (α) x en y te gelijker tijd verdrijven, dan zal men moeten stellen

$$ap+a'q+a''=0 \quad \text{en} \quad bp+b'q+b''=0 \, \ldots\ldots (\beta'');$$

alsdan wordt

$$(cp+c'q+c'')z = dp+d'q+d''$$

of

$$z = \frac{dp+d'q+d''}{cp+c'q+c''} \, \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma'').$$

Hierin hebben nu p en q de waarden, die aan (β'') voldoen; deze waarden, door oplossing der vergelijkingen (β'') bepalende, en in (γ'') substituerende, komt er, na behoorlijke herleiding,

$$z = \frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

zoodat nu ook z gevonden is.

Ten aanzien van de hier verkregene waarden voor x, y en z, kan men de volgende bijzonderheid opmerken, die overeenkomt met hetgeen reeds in het slot van § 183, ten opzigte van de twee algemeene vergelijkingen met twee onbekenden, is opgemerkt geworden. Herneemt men namelijk de aldaar reeds gebruikte uitdrukkingen ab en ba, en schrijft men eerst de letter c achter, tusschen en vóór de letters a en b der eerste, en vervolgens de letter c achter, tusschen en vóór de letters b en a der tweede uitdrukking, dan verkrijgt men achtervolgens

$$abc,\quad acb,\quad cab,\quad bac,\quad bca,\quad cba,$$

zijnde dit nu, in eene geregelde volgorde, alle mogelijke verschillende wijzen, waarop de letters a, b, c, die de coëfficiënten der onbekenden zijn, naast elkander geschreven kunnen worden. Plaatst men deze uitdrukkingen met afwisselende teekens naast elkander, op deze wijze:

$$abc-acb+cab-bac+bca-cba,$$

en stelt men daarna in elken term bij de tweede letter één accent en bij de derde letter twee accenten, dan verkrijgt men den noemer

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''$$

van de gebrokens, die de waarden van x, y en z voorstellen. Wordt vervolgens in dien noemer de letter a, waardoor de coëfficiënten van x zijn uitgedrukt, veranderd in de letter d, waardoor de bekende termen zijn voorgesteld, terwijl de accenten onveranderd blijven staan, dan zal men den teller verkrijgen van het gebroken, dat de waarde van x aangeeft. Even zoo zal, door in den noemer overal d voor b te schrijven, de teller van de waarde van y, en door in den noemer overal d voor c te schrijven, de teller van de waarde van z verkregen worden.

Lost men, op dezelfde of op eenige andere wijze, de vier algemeene vergelijkingen met vier onbekenden

$$ax+by+cz+du=e,$$
$$a'x+b'y+c'z+d'u=e',$$
$$a''x+b''y+c''z+d''u=e'',$$
$$a'''x+b'''y+c'''z+d'''u=e''',$$

op, dan zal men voor de waarden der onbekenden gebrokens verkrijgen, waarvan teller en noemer, ieder in het bijzonder, uit $1.2.3.4=24$ termen, elk van 4 factoren bestaan; en men zal bevinden, dat eerst de gemeenschappelijke noemer dezer gebrokens en daarna de tellers van elk derzelve, op eene dergelijke wijze als zoo even ten aanzien van drie vergelijkingen verklaard is, uit de letters a, b, c, d en e kunnen worden zamengesteld.

In het algemeen, zal de oplossing van n algemeene vergelijkingen van den eersten graad, met n onbekenden, voor de waarden der onbekenden gebrokens geven, waarvan de tellers en noemers $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots n$ termen, elk van n factoren bevatten, en deze tellers en noemers zullen, door behoorlijke verschikkingen der letters, waardoor de bekenden zijn voorgesteld, kunnen gevonden worden.

§ 202. In § 186 is aangetoond, dat het onderling strijdig, of het onderling afhankelijk zijn, van twee vergelijkingen met twee onbekenden, daaruit blijkt, dat men, na het elimineren van eene der onbekenden, tot eene vergelijking $0=A$ of $0=0$ komt. Het is echter klaar, dat het aantal onbekenden, in de vergelijkingen voorkomende, hiertoe niets afdoet, maar dat altijd, zoo men, door eliminatie van eene onbekende tusschen twee vergelijkingen, eene vergelijking $0=A$ of $0=0$ verkrijgt, die twee vergelijkingen met elkander strijden, of van elkander afhangen zullen, omdat de voorwaarde, die vervuld moet worden, om aan beide vergelijkingen gelijktijdig te kunnen voldoen, indien zij $0=A$ is, niet vervuld kan worden, en indien zij $0=0$ is, altijd van zelve vervuld zal wezen. Zijn twee vergelijkingen, waarbij dit verschijnsel plaats vindt, door eliminatie eener onbekende uit drie andere vergelijkingen afgeleid, dan zullen zich onder deze drie vergelijkingen strijdige of afhankelijke bevinden. Zijn even zoo deze drie vergelijkingen uit vier andere afgeleid, dan moeten er zich onder die vier bevinden, die strijdig of afhankelijk zijn, en zoo vervolgens.

Past men dus op n vergelijkingen met n onbekenden het voorschrift van § 199 toe, en komt men daardoor eindelijk tot éćne vergelijking met éćne onbekende, dan zijn onder de vergelijkingen geene strijdige of afhankelijke, en dan zal men, indien de vergelijkingen van den eersten graad zijn, voor elke onbekende éćne waarde verkrijgen, om aan die vergelijkingen te kunnen voldoen. Komt men echter, bij de toepassing van het genoemde voorschrift, tot vergelijkingen van de gedaante $0=A$ of $0=0$, dan zullen de vergelijkingen, waaruit deze afgeleid zijn, strijdige of afhankelijke bevatten. In het eerste geval kan niet gelijktijdig aan al de vergelijkingen voldaan worden; in het tweede geval zal men, volgens § 197, voor zooveel onbekenden willekeurige waarden kunnen nemen, als er meer onbekenden, dan onafhankelijke vergelijkingen zijn, mits dit voor zulke onbekenden geschiede, dat de overblijvende onbekenden, op de aldaar genoemde wijze, in de vergelijkingen verspreid blijven. Men merke echter op, dat zoo het paren der vergelijkingen, ter eliminatie eener zelfde onbekende, niet op de behoorlijke, in § 199 voorgeschrevene, wijze plaats had, men tot eene vergelijking $0=0$ zou kunnen geraken, zonder dat daaruit de afhankelijkheid der gegevene vergelijkingen zou blijken.

Ingeval men de uitkomsten der algemeene oplossingen, in de vorige § voorgedragen, op bijzondere vergelijkingen wil toepassen, dan zal, indien die vergelijkingen strijdige of afhankelijke bevatten, even als in § 186, ten aanzien van twee vergelijkingen met twee onbekenden, gezegd is, dat strijdige of afhankelijke daardoor blijken, dat men voor de onbekenden $\frac{A}{0}$ of $\frac{0}{0}$ vindt.

§ 203. Wanneer tot de oplossing van een vraagstuk het vinden van n onbekende getallen vereischt wordt, dan wordt hetzelve *bepaald* genoemd, indien men de voorwaarden van dat vraagstuk door n onderling onafhankelijke vergelijkingen kan uitdrukken. Tot het oplossen van zulk een vraagstuk stelt men de onbekende getallen doorgaans door de letters x, y, z, u, enz. voor, brengt de gegevene voorwaarden in vergelijkingen over, en lost daarna die vergelijkingen op.

Het zal niet noodig zijn, voorbeelden van dergelijke vraagstukken te geven, daar men, het vorige wel begrepen hebbende, zulke vraagstukken gemakkelijk zal kunnen oplossen. Men merke echter op, dat men somtijds door geschikte redenering het aantal aan te nemene onbekenden kan verminderen; dat zoo de vergelijkingen, waartoe een vraagstuk aanleiding geeft, blijken strijdig te zijn, aan het vraagstuk niet kan beantwoord worden; dat zoo die vergelijkingen blijken niet onderling onafhankelijk te zijn, het vraagstuk niet bepaald is, en dan sommige der opgegevene voorwaarden een noodzakelijk gevolg van eene of meer der andere voorwaarden zijn, en dat, zoo men voor éene of meer der onbekenden negatieve waarden mogt verkrijgen, de beteekenis van die negatieve waarden, op dezelfde wijze als vroeger, verklaard behoort te worden.

Mogt men eindelijk, bij het in vergelijking brengen van een vraagstuk, meer vergelijkingen verkrijgen, dan men onbekenden had aangenomen, dan zouden er, volgens § 197, onder die vergelijkingen strijdige of afhankelijke moeten wezen; in het eerste geval zou het onmogelijk zijn, aan het vraagstuk te beantwoorden; in het andere geval zouden er overtollige voorwaarden gegeven zijn, die tot de oplossing ontbeerd kunnen worden.

Over de onbepaalde vraagstukken, die aanleiding geven tot vergelijkingen van den eersten graad met meer dan twee onbekenden.

§ 204. Wanneer een vraagstuk, waarbij verscheidene onbekenden moeten aangenomen worden, in vergelijking wordt gebragt, en uit de opgegevene voorwaarden zoovele vergelijkingen niet kunnen opgemaakt worden, als men onbekenden heeft moeten aannemen; of ook, wanneer men wel evenveel vergelijkingen kan zamenstellen, als er onbekenden zijn, maar bevindt, dat die vergelijkingen niet onderling onafhankelijk zijn, dan wordt zulk een vraagstuk *onbepaald* genoemd, en men kan, indien geene beperkende voorwaarden dit verhinderen, overeenkomstig § 197, voor éene of meer der onbekenden willekeurige waarden nemen. Zijn er echter beperkende voorwaarden, zoo als er eenige in § 170 zijn opgegeven, dan moet men door redeneringen, die geheel op den aard der zaak steunen, bepalen, welke waarden voor de onbekenden mogen genomen worden. Het aantal antwoorden op zulk een vraagstuk kan, niettegenstaande die beperkende voorwaarden, oneindig groot zijn, en ook kan het gebeuren, dat die voorwaarden slechts een zeker aantal antwoorden toelaten.

§ 205. Heeft men slechts éene vergelijking van den eersten graad met drie of meer onbekenden, waaraan door geheele, of geheele positieve waarden voor de onbekenden moet voldaan worden, dan kan men op eene dergelijke wijze als in § 192 te werk gaan. Tot een voorbeeld voor het geval, dat de vergelijking drie onbekenden bevat, en dus tot de gedaante $Ax+By+Cz=D$ herleidbaar is, diene het volgende

Vraagstuk. *Het gebroken* $\frac{101}{105}$, *waarvan de noemer het product der getallen* 3, 5 *en* 7 *is, te verdeelen in drie breuken, die elk een der gemelde factoren tot noemer hebben.*

Oplossing. Stel, dat de tellers der gedeeltelijke breuken x, y en z zijn, dan geeft het vraagstuk alleen aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=\frac{101}{105},$$

waarin, volgens de bedoeling der vraag x, y en z geheele positieve getallen moeten zijn.

Men vindt hier, door verdrijving der breuken

$$35x+21y+15z=101;$$

door afzondering van de onbekende, die den kleinsten coëfficiënt heeft,

$$z=\frac{101-21y-35x}{15};$$

en door herleiding van het laatste gebroken tot eenen gemengden vorm

$$z=6-y-2x+\frac{11-6y-5x}{15};$$

men stelle derhalve

$$\frac{11-6y-5x}{15}=p, \quad \text{of} \quad 11-6y-5x=15p,$$

en behandele de laatste vergelijking op dezelfde wijze als boven geschied is, dan verkrijgt men

$$x=\frac{11-6y-15p}{5}=2-y-3p+\frac{1-y}{5};$$

men stelle derhalve weder

$$\frac{1-y}{5}=q, \quad \text{of} \quad 1-y=5q,$$

dan volgt hieruit

$$y=1-5q,$$

en dus door substitutie,

$$x=1+6q-3p \quad \text{en} \quad z=3-7q+7p.$$

Neemt men nu in deze vormen willekeurige geheele getallen voor p en q, dan zal men voor x, y en z ook geheele getallen verkrijgen, die aan de oorspronkelijke vergelijking, waartoe het vraagstuk aanleiding gaf, voldoen. Neemt men, bij voorbeeld, $p=-1$ en $q=1$, dan komt er $x=10$, $y=-4$ en $z=-11$, en werkelijk is ook

$$\frac{10}{3}-\frac{4}{5}-\frac{11}{7}=\frac{101}{105}.$$

Daar echter de bedoeling van het vraagstuk is, om het gebroken in drie andere te verdeelen, zoodat de som der deelen het geheel oplevert, moeten x, y en z positief zijn; hiertoe moet men hebben

$$5q<1,\quad 3p<1+6q \quad \text{en} \quad 7p>7q-3,$$

of

$$q<\frac{1}{5},\quad p<2q+\frac{1}{3} \quad \text{en} \quad p>q-\frac{3}{7};$$

de beide laatste van deze drie voorwaarden verbindende, blijkt het, dat men ook hebben moet

$$2q+\frac{1}{3}>q-\frac{3}{7},$$

waaruit volgt

$$q>-\frac{16}{21}.$$

Aan de twee voorwaarden $q<\frac{1}{5}$ en $q>-\frac{16}{21}$, kan nu, omdat q geen gebroken zijn mag, niet anders voldaan worden, dan door $q=0$ te nemen; dus moet dan $p<\frac{1}{3}$ en $p>-\frac{3}{7}$ wezen, zoodat dan ook $p=0$ genomen moet worden. Hierdoor vindt men

$$x=1,\quad y=1 \quad \text{en} \quad z=3,$$

als de eenige positieve geheele getallen, die aan de vraag voldoen, en men zal dus hebben

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{3}{7}=\frac{101}{105}.$$

Het zal onnoodig zijn, dergelijke voorbeelden bij te brengen, voor het geval, dat de vergelijking vier, vijf of meer onbekenden bevat, omdat men daartoe slechts denzelfden weg te volgen heeft.

Alleen zij nog opgemerkt, dat zoo de coëfficiënten der onbekenden geheele getallen zijn, die alle eenen zelfden gemeenen deeler hebben, terwijl deze deeler geen factor van den geheel bekenden term is, het onmogelijk zal wezen, voor de onbekenden geheele getallen aan te wijzen, die aan de vergelijking voldoen; want ook hier geldt dezelfde redenering, die aan het slot van § 192 voorkomt.

§ 206. Wanneer bij onbepaalde vraagstukken, die minder vergelijkingen opleveren, dan men onbekenden heeft moeten aannemen, bijkomende voorwaarden vervuld moeten worden, bestaan die bijkomende voorwaarden doorgaans daarin, dat de onbekenden geheele getallen moeten zijn. Is dit het geval, dan elimineert men tusschen de gegevene vergelijkingen zooveel onbekenden als mogelijk is, waardoor men alsdan tot ééne vergelijking zal geraken, waarin een zeker aantal onbekenden is overgebleven; uit deze vergelijking bepaalt men de geheele-getallenwaarden, van die overgeblevene onbekenden, overeenkomstig § 192 en 205, in algemeene vormen; in dezelfde letters, waarin men dan deze onbekenden uitgedrukt vindt, drukt men vervolgens ook de onbekenden uit, die geëlimineerd zijn geworden, en bepaalt daarna, welke getallen men voor die letters nemen mag, opdat men ook voor de laatstgenoemde onbekenden geheele getallen verkrijge.

Zie hier tot opheldering de oplossing van een paar dergelijke vraagstukken.

VRAAGSTUK. *Men heeft bij eene batterij drie soorten van bommen, te zamen* 2100 *pond wegende; die van de eerste soort wegen elk* 21, *die van de tweede soort* 50 *en die van de derde soort* 72 *pond. Na van de eerste soort de helft, van de tweede soort het derde deel en van de derde soort drie vierde gedeelten gebruikt te hebben, bevindt men, dat de overgeblevene te zamen nog* 765 *pond wegen: hoeveel van elke soort had men er dan aanvankelijk?*

OPLOSSING. Vooreerst moet het aantal aanvankelijk voorhandene bommen van de eerste soort een even getal wezen, omdat er anders niet de juiste helft van zou kunnen gebruikt zijn; even zoo moet het aantal aanvankelijk voorhandene bommen van de tweede soort door 3, en dat van de derde soort door 4 deelbaar zijn. Stellende dus, dat er $2x$ van de eerste, $3y$ van de tweede en $4z$ van de derde soort voorhanden waren, dan verbeelden x, y en z positieve geheele getallen, en men heeft dadelijk de vergelijking

$$2x\times21+3y\times50+4z\times72=2100,$$

of, door 6 deelende,

$$7x+25y+48z=350 \dots\dots\dots\dots (1);$$

voorts zijn er gebruikt de helft van $2x$, dat is x, van de eerste soort; het derde deel van $3y$, dat is y, van de tweede soort; drie vierde gedeelten van $4z$, dat is $3z$, van de derde soort; deze gebruikte bommen wegen te zamen 2100—765, dat is 1335 pond, en dus heeft men ook de vergelijking

$$x\times21+y\times50+3z\times72=1335$$

of

$$21x+50y+216z=1335 \dots\dots\dots\dots (2).$$

Dewijl tot het zamenstellen van de vergelijkingen (1) en (2) al de voorwaarden van het vraagstuk gebruikt zijn, heeft men slechts twee vergelijkingen met drie onbekenden, en het vraagstuk is dus onbepaald; maar de waarden van x, y en z moeten positieve geheele getallen zijn.

Men eliminere nu eene der onbekenden, bij voorbeeld y, tusschen (1) en (2), dan vindt men

$$7x+120z=635 \dots\dots\dots\dots (3);$$

deze vergelijking volgens § 192 behandelende, heeft men

$$x=\frac{635-120z}{7}=90-17z+\frac{5-z}{7},$$

stellende dus $\frac{5-z}{7}=p$, of $5-z=7p$,

dan komt er $$z=5-7p \dots\dots\dots\dots (4),$$

en door substitutie $$x=5+120p \dots\dots\dots\dots (5),$$

welke waarden van x en z, waarin p een willekeurig geheel getal verbeeldt, alle geheele getallen voorstellen, die aan de vergelijking (3) voldoen.

Verder drukke men de geëlimineerde onbekende y in p uit; men heeft namelijk uit (1)

$$y = \frac{350-7x-48z}{25},$$

en door substitutie der waarden (4) en (5) na herleiding

$$y = \frac{75-504p}{25} = 3-20p-\frac{4p}{25} \ldots\ldots\ldots (6);$$

zal nu y een geheel getal zijn, dan moet $\frac{4p}{25}$ en dus ook $\frac{p}{25}$ een geheel getal wezen; men stelle dus

$$\frac{p}{25} = q \quad \text{of} \quad p = 25q,$$

dan is, volgens (5), (6) en (4),

$$x = 5+3000q, \quad y = 3-504q \quad \text{en} \quad z = 5-175q,$$

en deze waarden van x, y en z, waarin q een willekeurig geheel getal beteekent, stellen nu geheele getallen voor, die gelijktijdig aan de vergelijkingen (1) en (2) voldoen.

Daar echter x, y en z positieve getallen moeten zijn, moet

$$5+3000q>0, \quad 3-504q>0 \quad \text{en} \quad 5-175q>0$$

of

$$q>-\frac{1}{600}, \quad q<\frac{1}{168} \quad \text{en} \quad q<\frac{1}{35}$$

wezen; omdat q geen gebroken zijn mag, kan men dus alleen $q=0$ nemen, en dan wordt

$$x = 5, \quad y = 3 \quad \text{en} \quad z = 5;$$

er waren alzoo aanvankelijk 10 bommen van de eerste, 9 van de tweede, en 20 van de derde soort.

Hoezeer dus het vraagstuk tot de onbepaalde behoort, laat hetzelve slechts één antwoord toe.

Vraagstuk. *Aan eenen chef gevraagd zijnde, hoeveel manschappen zijn bataillon sterk was, antwoordde hij: het aantal mijner manschappen is ver beneden de* 1000; *deel ik hen af in pelottons, elk van* 48 *man, dan houd ik* 15 *man over; plaats ik* 42 *man in elk pelotton, dan houd ik* 3 *man over, en wil ik mijne pelottons elk slechts* 30 *man sterk maken, dan kom ik* 9 *man te kort: men vraagt hieruit te vinden, hoeveel manschappen dat bataillon telde.*

Oplossing. Stel, dat er x manschappen zijn, en dat er y, z en u pelottons gevormd worden, naargelang de sterkte dier pelottons 48, 42 en 30 man is, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijkingen

$$x = 48y+15, \quad x = 42z+3 \quad \text{en} \quad x = 30u-9;$$

men heeft dus slechts drie vergelijkingen met vier onbekenden; maar al deze onbekenden stellen geheele positieve getallen voor.

Uit de twee eerste vergelijkingen volgt

$$48y+15 = 42z+3,$$

zoodat men nu éene vergelijking met de twee onbekenden y en z heeft, weshalve de twee andere onbekenden x en u als geëlimineerd moeten worden aangezien.

Behandelt men deze laatste vergelijking volgens § 192, dan verkrijgt men achtervolgens

$$z = \frac{8y+2}{7} = y+\frac{y+2}{7},$$

$$\frac{y+2}{7} = p, \quad \text{of} \quad y+2 = 7p,$$

$$y = 7p-2,$$

en $$z = 8p-2.$$

De geëlimineerde onbekenden in deze p uitdrukkende, vindt men

$$x = 42z+3 = 336p-81$$

en $$u = \frac{x+9}{30} = \frac{56p-12}{5} = 11p-2+\frac{p-2}{5}.$$

Welk geheel getal men nu ook voor p neemt, zal x altijd een geheel getal worden; maar zal u een geheel getal wezen, dan moet $\frac{p-2}{5}$ insgelijks een geheel getal zijn; derhalve stelle men

$$\frac{p-2}{5} = q \quad \text{of} \quad p-2 = 5q,$$

dan volgt hieruit

$$p = 5q+2,$$

en men vindt dan door substitutie

$$x = 1680q+591, \quad y = 35q+12, \quad z = 40q+14 \quad \text{en} \quad u = 56q+20,$$

zoodat het nu, om voor x, y, z en u geheele getallen te verkrijgen, die aan de gegevene vergelijkingen voldoen, genoegzaam is, maar ook vereischt wordt, dat men voor q een willekeurig geheel getal neme; daar echter, volgens de opgave, x kleiner dan 1000 moet zijn, kan alleen $q=0$ genomen worden, waardoor $x=591$ wordt. Het bataillon was dus 591 man sterk.

WORTELTREKKING UIT GETALLEN.

§ 207. Reeds in § 10 is gezegd, wat men door worteltrekking verstaat, en door welke stelkunstige teekens de wortels, uit bepaalde of ook uit door letters voorgestelde getallen, worden aangeduid; in § 54 en volgende is aangetoond, voor welke herleidingen de alzoo aangeduide wortels vatbaar zijn; doch de eigenlijke bewerkingen, waardoor de wortels uit bepaalde getallen kunnen gevonden worden, zijn tot hiertoe nog niet verklaard. Alvorens tot de oplossing van vergelijkingen, die niet van den eersten graad zijn, te kunnen overgaan, zal het noodig zijn, deze bewerkingen te leeren kennen.

Over het trekken van den vierkantswortel.

§ 208. De tweede magt van een geheel getal zal klaarblijkelijk insgelijks een geheel getal zijn; de tweede magt van een gebroken of gemengd getal kan echter nimmer een geheel getal wezen, want men kan zich elk gebroken in zijnen onverkleinbaren vorm, elk gemengd getal in de gedaante van een onverkleinbaar gebroken voorstellen, en in § 90 is aangetoond, dat de tweede magt van een onverkleinbaar gebroken insgelijks zulk een gebroken moet zijn, en dus geen geheel getal kan wezen. Een geheel getal kan derhalve ook nimmer een gebroken of gemengd getal tot vierkantswortel hebben.

Een getal wordt *een volkomen vierkant*, of kortaf *een vierkant* genoemd, wanneer er een geheel, gebroken of gemengd getal bestaat, waarvan hetzelve de tweede magt is; zoo zijn, bij voorbeeld, de getallen $\frac{9}{16}$, $2\frac{7}{9}$, 49, 16129 en 16384 volkomene vierkanten, omdat zij verkregen worden door de getallen $\frac{3}{4}$, $1\frac{2}{3}$, 7, 127 en 128 tot de tweede magt te verheffen; de laatstgenoemde getallen zijn dan de vierkantswortels uit die volkomene vierkanten. Men kan dus ook zeggen, dat een volkomen vierkant zulk een getal is, dat een geheel, gebroken of gemengd getal tot vierkantswortel heeft.

Alle getallen zijn geene volkomene vierkanten; neemt men, bij voorbeeld, het getal 16340, dat tusschen de reeds genoemde getallen 16129 en 16384 inligt, dan kan deszelfs wortel, volgens het reeds aangevoerde, vooreerst geen gebroken of gemengd getal zijn; ten andere zullen de tweede magten van 127 en alle kleinere geheele getallen minder dan 16340 zijn, terwijl de tweede magten van 128 en alle grootere geheele getallen meer dan 16340 zullen wezen, zoodat de wortel uit 16340 ook geen geheel getal kan wezen. Het getal 16340 is dus geen volkomen vierkant.

Zoo men een gegeven geheel getal, dat geen volkomen vierkant is, met eene eenheid vermindert, en deze vermindering zoo dikwijls herhaalt, als noodig is, om een volkomen vierkant over te houden, noemt men dat vierkant het *grootste vierkant*, dat in het gegevene getal begrepen is; zoo is, bij voorbeeld, 16129 het grootste vierkant, dat in 16340 begrepen is. Het grootste vierkant, dat in een volkomen vierkant begrepen is, is dat vierkant zelf.

Men kan aan een getal niet altijd zoo dadelijk zien, of het al dan niet een volkomen vierkant is; men kan echter opmerken, dat een geheel getal, waarvan het cijfer der eenheden 2, 3, 7 of 8 is, of hetwelk met een oneven aantal nullen eindigt, nimmer een volkomen vierkant kan wezen, hetgeen gemakkelijk afgeleid wordt uit de wijze, waarop de vermenigvuldiging der getallen plaats heeft. Kan men het grootste vierkant vinden, dat in een gegeven geheel getal begrepen is, en blijft er, zoo men dat vierkant van het gegevene getal aftrekt, niets over, dan is het getal een volkomen vierkant, en anders is het dat niet.

Het trekken van den vierkantswortel uit een geheel getal kan, volgens het bovengezegde, eigenlijk alleen plaats hebben, indien dat getal een volkomen vierkant is; om uit eenig ander geheel getal den vierkantswortel te trekken, bepaalt men zich vooreerst tot het vinden van den vierkantswortel uit het grootste vierkant, in dat getal begrepen. Als dus G een gegeven geheel getal en W den wortel, uit het grootste vierkant in dat getal begrepen, voorstelt, komt het vraagstuk der vierkantsworteltrekking daarop neder, dat men, G gegeven zijnde, W wete te vinden. Mogt daarbij bevonden worden, dat $G-W^2=0$ is, dan, maar ook alleen dan, zal G een volkomen vierkant zijn.

Bij de behandeling van dit vraagstuk in de volgende §§, zullen de letters G en W stilzwijgend de bovengenoemde beteekenis hebben.

§ 209. Wanneer a en b twee positieve getallen verbeelden, zal, zoo $a>b$ is, $a^2>b^2$, en omgekeerd, zoo $a^2>b^2$ is, $a>b$ wezen. De eerste stelling is een onmiddellijk gevolg van het axioma, dat een product grooter wordt, indien men deszelfs beide factoren laat aangroeijen; de waarheid der omgekeerde stelling blijkt daaruit, dat zoo $b=a$ was, $b^2=a^2$, en zoo $b>a$ was, $b^2>a^2$ zou wezen, hetgeen beide tegen de onderstelling $a^2>b^2$ strijdt, zoodat $a^2>b^2$ onderstellende, noodzakelijk $b<a$ of $a>b$ moet zijn.

Omdat nu van

1, 100, 10000, 1000000, *enz.*

de vierkantswortels zijn

1, 10, 100, 1000, *enz.*

ligt, volgens de zoo even betoogde stelling,

van elk getal tusschen	1 en	100,	de wortel tusschen	1 en	10,
» » » »	100 »	10000,	» » »	10 »	100,
» » » »	1000 »	1000000,	» » »	100 »	1000,
		enz.			

Hieruit blijkt, dat

zoo er zijn 1 of 2 cijfers in G,	dan bestaat	W	uit 1 cijfer
» » » 3 » 4 » » G,	» »	W	» 2 cijfers
» » » 5 » 6 » » G,	» »	W	» 3 »
enz.			

zoodat het aantal cijfers in W altijd de helft of de grootste helft van het aantal cijfers in G is, naargelang G uit een even of oneven aantal cijfers bestaat.

§ 210. Indien G kleiner dan 100 is, zal het, tot het vinden van W, alleen noodig zijn, dat men de volkomene vierkanten tot en met 100, te weten:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,$$

en derzelver wortels

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

van buiten kent. Was, bij voorbeeld, G of het gegevene getal 73, dan is, omdat 73 tusschen 64 en 81 invalt, 64 het grootste vierkant, dat i 73 begrepen is, en W of de wortel uit dat grootste vierkant is dan 8.

Het van buiten kennen der genoemde vierkanten en hunne wortels is, tot het verrigten van de worteltrekking, volstrekt noodzakelijk.

§ 211. Indien G grooter dan 100 is, zal W meer dan eene cijfer bevatten, en men kan zich dan W voorstellen als verdeeld in tientallen en eenheden; zoodat, als p het geheel aantal tientallen en q het cijfer der eenheden van W verbeeldt, $W = 10p+q$ zal wezen.

Omdat q hier een getal van ééne cijfer voorstelt, en dus ten hoogste 9 kan zijn, is $10p+10$ ten minste ééne eenheid grooter dan $10p+q$; maar $(10p+q)^2$ stelt het grootste vierkant voor, dat in G begrepen is, dus is

$$(10p+q)^2 = \text{of} < G \quad \text{en} \quad (10p+10)^2 > G,$$

of $$100p^2+20pq+q^2 = \text{of} < G \quad \text{en} \quad 100(p+1)^2 > G;$$

hieruit volgt, dat G ten minste $100p^2$ moet, maar $100\,(p+1)^2$ niet kan bevatten, en dat alzoo p de wortel uit het grootste vierkant is, begrepen in het geheel aantal honderdtallen van G.

Ten einde dit door een voorbeeld op te helderen, kan men voor G het reeds in § 208 genoemde getal 16340 nemen, waarvan de wortel tusschen 127 en 128 ligt. Dewijl nu 127 de wortel is uit het grootste vierkant in 16340 begrepen, moet ook 12 de wortel zijn uit het grootste vierkant, dat in 163 begrepen is; want men heeft

	$127^2 < 16340$	$128^2 > 16340,$
dus zooveel te meer	$120^2 < 16340$	$130^2 > 16340,$
dat is	$14400 < 16340$	$16900 > 16340,$
waaruit volgt	$144 < 163$	$169 > 163,$
of	$12^2 < 163$	$13^2 > 163;$

de wortel uit het grootste vierkant in 163 begrepen is alzoo 12, dat is: de wortel uit het grootste vierkant, in de honderdtallen van 16340 begrepen, is het aantal tientallen van den wortel uit 16340.

§ 212. Uit de reeds aangewezene voorwaarde,

$$100p^2+20pq+q^2 = \text{of} < G \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (\alpha),$$

kan men achtervolgens afleiden:

$$20pq+q^2 = \text{of} < G-100p^2,$$

$$q+\frac{q^2}{20p} = \text{of} < \frac{G-100p^2}{20p},$$

$$q = \text{of} < \frac{G-100p^2}{20p} - \frac{q^2}{20p} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (\beta),$$

zoodat in allen gevalle

$$q < \frac{G-100p^2}{20p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

zal moeten wezen. Deze laatste voorwaarde verschaft het middel, om q te vinden, indien p bekend is.

Daar namelijk q het cijfer der eenheden verbeeldt, van den wortel uit het grootste vierkant in G begrepen, is q het grootste getal van ééne cijfer, dat aan (α) voldoet. Maar het is, buiten worteltrekking, niet mogelijk, om p gegeven zijnde, q regtstreeks uit (α) te bepalen, alzoo neemt men voor q aanvankelijk het grootste getal van ééne cijfer, dat aan (γ) voldoet, dat is, men neemt voor q het aantal geheelen, in het quotient $\frac{G-100p^2}{20p}$ begrepen, mits nooit meer dan 9, al mogt dit quotient 10 of meer geheelen bevatten. Deze waarde voor q kan, blijkens (β), niet kleiner maar wel grooter wezen, dan die, welke door (α) wordt toegelaten; dus onderzoekt men verder of, en zoo ja, hoeveel achtereenvolgende malen, deze aanvankelijk voor q genomene waarde met eene eenheid verminderd moet worden, om voor q het grootste getal van ééne cijfer te bekomen, dat aan (α) voldoet, en tot dit onderzoek is het, blijkens (α), alleen noodig te beproeven, of er, na G met $100p^2$ te hebben verminderd, genoeg overblijft, om van de rest ook nog $20pq+q^2$ of $(20p+q)q$ te kunnen aftrekken.

Ter opheldering neme men van het reeds gebruikte getal 16340 als bekend aan, dat de wortel, uit het grootste vierkant in dat getal begrepen, 12 tientallen bevat, en stelle zich voor, het cijfer der eenheden van dien wortel te vinden, dan is hier $G=16340$ en $p=12$, dus $\frac{G-100p^2}{20p}=\frac{1940}{240}=8\frac{1}{12}$; alzoo neemt men aanvankelijk $q=8$, en onderzoekt of, $q=8$ zijnde, $G-100p^2=1940$ groot genoeg is, om er $(20p+q)q=248\times8=1984$ van te kunnen aftrekken; daar het blijkt, dat dit niet zoo is, neemt men $q=7$, en beproeft of, $q=7$ zijnde, $(20p+q)q=247\times7=1729$ klein genoeg is, om van $G-100p^2=1940$ afgetrokken te kunnen worden; en daar dit zoo is, is 7 het begeerde cijfer der eenheden; en bij gevolg 127 de wortel uit het grootste vierkant in 16340 begrepen.

§ 213. Hetgeen in de vier voorgaande §§ gezegd is, is toereikend, om de worteltrekking uit een willekeurig gegeven geheel getal te kunnen verrigten. Laat bij voorbeeld de vraag zijn, om den wortel te vinden uit het grootste vierkant, dat in 23456789 begrepen is, dan weet men vooreerst, volgens § 209, dat die wortel een getal van vier cijfers is; volgens § 212 kan het cijfer der eenheden van dien wortel gevonden worden, indien men het geheel aantal tientallen kent, dat dezelve bevat; volgens § 211 is dit aantal tientallen de wortel uit het grootste vierkant in 234567 begrepen, en de vraag is dus vooreerst teruggebragt tot het vinden van den laatstgenoemden wortel. Het vinden van dezen wortel wordt, door dezelfde redenering ten aanzien van het getal 234567 te herhalen, teruggebragt tot het vinden van den wortel uit het grootste vierkant, dat 2345 bevat; het vinden van dien wortel wordt even zoo teruggebragt tot het vinden van den wortel uit het grootste vierkant, in 23 begrepen, en deze laatste wortel kan, volgens § 210, onmiddellijk gevonden worden.

Om dus den begeerden wortel te vinden, gaat men op de volgende wijze te werk:

1°. Neemt men . . . . $G = 23$,
dan is, volgens § 210, $W = 4$ en . . . . $W^2 = 16$
dus . . . . $G - W^2 = 7.$

2°. Neemt men . . . . $G = 2345$,
dan is, volgens 1°, $p = 4$, en . . . . $100p^2 = 1600$
dus . . . . $G - 100p^2 = 745.$

Nu is hier $\frac{G-100p^2}{20p} = \frac{745}{80} = 9,..$; men begint dus met $q = 9$ te nemen, dan wordt $(20p+q)q = 89 \times 9 = 801$; daar nu 801 te groot is, om van 745 te kunnen afgetrokken worden, vermindert men de eerstgenomene waarde voor q met eene eenheid, en neemt alzoo $q = 8$, dan wordt $(20p+q)q = 88 \times 8 = 704$; daar dit getal nu kleiner dan 745 is, is werkelijk $q = 8$, en derhalve $W = 10p + q = 48$. Om te vinden, hoeveel nu $G - W^2$ is, behoeft men slechts . . . . $(20p+q)q = 704$
van het daarbovenstaande getal af te trekken, want dan vindt men, door in aanmerking te nemen, dat $G - 100p^2 - (20p+q)q = G - (10p+q)^2 = G - W^2$ is, . . $G - W^2 = 41.$

3°. Neemt men . . . . $G = 234567$,
dan is, volgens 2°, $p = 48$, en . . . . $100p^2 = 230400$
dus . . . . $G - 100p^2 = 4167.$

Alsnu is $\frac{G-100p^2}{20p} = \frac{4167}{960} = 4,\ldots$; men neemt dus $q = 4$, dan wordt $(20p+q)q = 964 \times 4 = 3856$, en daar dit getal kleiner dan 4167 is, heeft men terstond de juiste waarde $q = 4$ gevonden; derhalve is nu $W = 10p + q = 484$. Trekt men vervolgens . . . . . . $(20p+q)q = 3856$
van het daarbovenstaande getal af, dan vindt men . . $G - W^2 = 311.$

Eindelijk 4°. neemt men . . . . $G = 23456789$,
dan is, volgens 3°., $p = 484$, en . . . . $100p^2 = 23425600$
dus . . . . $G-100p^2 = 31189$.

Hier is nu $\dfrac{G-100p^2}{20p} = \dfrac{31189}{9680} = 3, \ldots$; men neemt
dus $q=3$, dan wordt $(20p+q)q = 9683\times3 = 29049$, en
dit getal kleiner dan 31189 zijnde, is werkelijk $q=3$,
derhalve $W = 10p+q = 4843$; en nu weder . . . . . . $(20p+q)q = 29049$
aftrekkende, vindt men . . . . $G-W^2 = 2140$.

De wortel uit het grootste vierkant, in 23456789 begrepen, is derhalve 4843; dit grootste vierkant zelf is dus $(4843)^2 = 23454649$, en bijgevolg 2140 minder dan het gegevene getal. Wil men zich nog nader overtuigen, dat $(4843)^2$ werkelijk het grootste vierkant is, dan berekene men de waarde van $(4844)^2$, waarvoor men 23464336, en dus meer dan het gegevene getal zal verkrijgen.

§ 214. Bij de vier gedeeltelijke bewerkingen, die in de voorgaande § voorkwamen, wordt het getal G van elke bewerking verkregen, indien men van het getal G der volgende bewerking de twee laatste cijfers weglaat; daarom is men bij de worteltrekking gewoon, het gegevene getal, van achteren af beginnende, door streepjes in afdeelingen van twee cijfers te verdeelen. Voorts was in elke bewerking p het getal, dat in de voorgaande bewerking door W was aangeduid, waaruit volgt, dat het getal $G-100p^2$ van elke bewerking verkregen wordt, indien men achter het getal $G-W^2$ van de voorgaande bewerking de twee eerstvolgende cijfers van het gegevene getal plaatst. Verder is het duidelijk, dat men, in plaats van $G-100p^2$ door $20p$ te deelen, slechts $2p$ behoeft te deelen in hetgeen $G-100p^2$ zijn zou, zoo men er het achterte cijfer van wegliet. Eindelijk is het klaar, dat $20p+q$ altijd verkregen wordt, door achter het getal $2p$ het cijfer te schrijven, dat voor q gevonden is. Al deze opmerkingen brengen eenig gemak in de bewerkingen aan, zoodat diensvolgens de worteltrekking op deze wijze te staan komt.

			$23\vert 45\vert 67\vert 89\}\ 4843.$
		$4\times4 = \ldots$	16
			745
$2\times4 = 8$;	$74:8 = 9$, *enz.*	$89\times9 = 801$	
		$88\times8 = \ldots\ldots$	704
			4167
$2\times48 = 96$;	$416:96 = 4$, *enz.*	$964\times4 = \ldots\ldots$	3856
			31189
$2\times484 = 968$;	$3118:968 = 3$, *enz.*	$9683\times3 = \ldots\ldots$	29049
			2140.

§ 215. Het kan gebeuren, dat men, bij eene der gedeeltelijke bewerkingen, die tot het vinden van den wortel dienen, $q=0$ vindt; alsdan wordt ook $(20p+q)q=0$, en men behoeft alzoo, bij die gedeeltelijke bewerking, van $G-100p^2$ niets af te trekken, om $G-W^2$ te bekomen, zoodat het getal $G-100p^2$ voor de volgende bewerking verkregen wordt, door achter het getal $G-100p^2$ van de voorgaande bewerking de twee eerstvolgende cijfers van het gegevene getal te schrijven. Voorts merke men op: dat, zoo het gegevene getal een oneven aantal cijfers bevat, de eerste der afdeelingen, waarin men het getal verdeelt, slechts uit éénе cijfer bestaat; dat zoo er ergens, na de aftrekking van $(20p+q)q$, niets van het gegevene getal meer overblijft, het gegevene getal een volkomen vierkant zal zijn, en anders ook niet; dat eindelijk, zoo er ergens, na de aftrekking van $(20p+q)q$, niets overblijft, en er dan in het gegevene getal nog nullen mogten volgen, die ongebruikt gebleven waren, dit aantal nullen altijd even zal wezen, en men dan, achter den tot daartoe gevondenen wortel, de helft van dit aantal nullen zal moeten plaatsen.

Al deze bijzonderheden zullen zich voordoen, indien de vraag is, om den wortel te vinden van het grootste vierkant, dat in 43681000000 begrepen is. De worteltrekking komt dan op de volgende wijze te staan:

$$\begin{array}{lr} & 4|36|81|00|00|00 \;\big\}\; 209000 \\ & 2\times2=\ldots\ 4 \\ & 3681 \\ 2\times2=4;\quad 3:4=0,enz. & \\ 2\times20=40;\ 368:40=9,enz.\quad 409\times9=\ldots & \underline{3681} \\ & 0. \end{array}$$

Waaruit blijkt, dat het gegevene getal een volkomen vierkant, en 209000 deszelfs wortel is.

§ 216. Wanneer een gegeven getal geen volkomen vierkant, en dus deszelfs vierkantswortel geen geheel, gebroken of gemengd getal is, kan die wortel niet anders, dan door het gebruik van een wortelteeken (of, wat hetzelfde is, van een gebroken' exponent) naauwkeurig worden uitgedrukt. Deze worteluitdrukking zal men wel, volgens de vroeger gegevene regels, kunnen herleiden, maar door deze herleiding zal nooit het wortelteeken (of de gebroken exponent) kunnen verdreven worden; want kon dit geschieden, dan zou men voor den wortel een geheel, gebroken of gemengd getal verkrijgen, en alzoo het gegevene getal een volkomen vierkant zijn. Den vierkantswortel uit een onvolkomen vierkant kan men dus slechts ten naastenbij door een geheel, gebroken of gemengd getal uitdrukken; elk getal, dat ten naastenbij zulk eenen wortel uitdrukt, noemt men eenen *benaderden wortel*, terwijl men dan in tegenstelling den wortel, zoo als die door het gebruik van een wortelteeken volkomen naauwkeurig wordt voorgesteld, den *waren wortel* noemt. De woorden wortel en ware wortel hebben dus volmaakt dezelfde beteekenis, en de bijvoeging van het woord »ware" komt alleen dan te pas, wanneer men, van eenen wortel sprekende, uitdrukkelijk wil te kennen geven, dat men geenszins eenen benaderden wortel bedoelt. Een benaderde wortel wordt gezegd naauwkeuriger te zijn, naargelang dezelve minder van den waren wortel verschilt; en het is klaar, dat het kennen van eenen benaderden wortel weinig nut kan aanbrengen, indien men niet tevens zijnen *graad van naauwkeurigheid* kent, dat is, indien men niet weet te zeggen, dat de benaderde wortel minder dan deze of gene bepaalde waarde van den waren wortel verschilt.

§ 217. Wanneer een geheel getal een volkomen vierkant is, zal men, door de worteltrekking volgens § 214 te verrigten, den waren wortel uit dat getal bekomen; is echter een geheel getal geen volkomen vierkant, dan zal men door deze worteltrekking slechts eenen benaderden wortel uit dat getal verkrijgen; maar die benaderde wortel, de wortel uit het grootste in het getal begrepene vierkant zijnde, zal zeker minder dan eene eenheid van den waren wortel afwijken, en men kent dus den graad van deszelfs naauwkeurigheid.

Zoo is, bij voorbeeld, volgens de in § 214 verkregene uitkomst, 4843 een benaderde wortel uit het getal 23456789, die geene eenheid van den waren wortel afwijkt. De ware wortel, die alleen door $\sqrt{23456789}$ kan uitgedrukt worden, is echter eenigzins grooter, zoodat men niet mag schrijven $\sqrt{23456789}=4843$, tenzij men op eene of andere wijze doe blijken, dat er aan het getal 4843 nog iets ontbreekt, en dus bij voorbeeld schrijve $\sqrt{23456789}=4843,\ldots$

§ 218. Het is doorgaans noodig, den wortel uit een getal, dat geen volkomen vierkant is, naauwkeuriger dan in eenheden te benaderen; dat wil zeggen, eenen benaderden wortel te vinden, die men weet, dat van den waren wortel minder dan slechts een zeker gedeelte der eenheid verschilt. Gewoonlijk zoekt men dan zulk eenen benaderden wortel, die van den waren wortel zeker minder dan $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, enz. verschilt, en dit noemt men dan den wortel tot in tiende, honderdste, duizendste deelen enz., of, met andere woorden, in tiendeelige breuken benaderen.

Om den vierkantswortel uit een geheel getal G in tiendeelige breuken te benaderen, heeft men de volgende formulen, die op vroeger geleerde herleidingen steunen:

$$\sqrt{G}=\frac{\sqrt{100\,G}}{10},\quad \sqrt{G}=\frac{\sqrt{10000\,G}}{100},\quad \sqrt{G}=\frac{\sqrt{1000000\,G}}{1000},\ .$$

of in het algemeen, zoo n eenig geheel getal verbeeldt,

$$\sqrt{G}=\frac{\sqrt{10^{2n}\,G}}{10^{n}}.$$

Neemt men nu voor $\sqrt{100\,G}$ den wortel uit het grootste vierkant, dat in 100 G begrepen is, dan wijkt men, in het gebroken $\frac{\sqrt{100\,G}}{10}$, wat de waarde van den teller betreft, minder dan 1, en dus, wat de waarde van het gebroken aangaat, minder dan $\frac{1}{10}$ van de waarheid af, zoodat dan $\sqrt{G} = \frac{\sqrt{100\,G}}{10}$ tot in tiende deelen naauwkeurig zal wezen; neemt men voor $\sqrt{10000\,G}$ den wortel uit het grootste vierkant, in 10000 G begrepen, dan zal even zoo $\sqrt{G} = \frac{\sqrt{10000\,G}}{100}$ tot in honderdste deelen naauwkeurig zijn, en zoo vervolgens. Wil men dus, bij voorbeeld, den vierkantswortel uit 270 tot in duizendste deelen naauwkeurig benaderen, dan kan men eerst schrijven

$$\sqrt{270} = \frac{\sqrt{270000000}}{1000},$$

daarna volgens § 214 den wortel zoeken uit het grootste vierkant, dat in 270000000 begrepen is, waardoor men zal vinden

$$\sqrt{270000000} = 16431, \ldots$$

en hierdoor heeft men verder

$$\sqrt{270} = \frac{16431, \ldots.}{1000} = 16{,}431 \ldots.,$$

welke waarde voor $\sqrt{270}$ nu tot in duizendste deelen naauwkeurig is, omdat het getal 16431 geene eenheid van $\sqrt{270000000}$ afwijkt.

Het benaderen van den vierkantswortel uit een gegeven geheel getal in tiendeelige breuken, komt dus daarop neder, dat men achter het getal een even aantal nullen plaatst; op het getal, zoo als het dan is, de worteltrekking volgens § 214 toepast, en vervolgens van den daardoor verkregen' wortel, half zoo veel decimaalcijfers afsnijdt, als men nullen achter het getal geplaatst heeft. In plaats van die nullen dadelijk achter het getal te plaatsen, kan men dezelve eerst daar, waar men ze bij de gedeeltelijke bewerkingen noodig heeft, paarsgewijze achter de resten der voorgaande gedeeltelijke bewerkingen plaatsen, en dan moeten zooveel decimaalplaatsen van den verkregen' wortel worden afgesneden, als door het aantal keeren, dat men een paar nullen achter de resten gevoegd heeft, wordt aangewezen. Zie hier, hoe diensvolgens de worteltrekking uit het getal 270, tot in duizendste deelen naauwkeurig, te staan komt.

$$
\begin{array}{llrr}
 & & 2\vert 70 & \big\}\,16{,}431 \\
 & & 1\times 1 = \ldots\ 1 & \\
 & & \overline{170} & \\
2\times 1 = 2; & 17:2 = 8,\mathit{enz.} & 28\times 8 = 224 & \\
 & & 27\times 7 = 189 & \\
 & & 26\times 6 = \ldots\ 156 & \\
 & & \overline{1400} & \\
2\times 16 = 32; & 140:32 = 4,\mathit{enz.} & 324\times 4 = \ldots\ 1296 & \\
 & & \overline{10400} & \\
2\times 164 = 328; & 1040:328 = 3,\mathit{enz.} & 3283\times 3 = \ldots\ldots\ 9849 & \\
 & & \overline{55100} & \\
2\times 1643 = 3286; & 5510:3286 = 1,\mathit{enz.} & 32861\times 1 = \ldots\ldots\ 32861 & \\
 & & \overline{22239.} &
\end{array}
$$

§ 219. In plaats van den vierkantswortel uit een geheel getal in tiendeelige breuken te benaderen, kan men ook eenen benaderden wortel in gewone breuken begeeren, die tot in bepaalde deelen der eenheid naauwkeurig is. Verlangt men namelijk den wortel uit G tot in m^{de} deelen der eenheid naauwkeurig te vinden, dan kan men schrijven

$$\sqrt{G} = \frac{\sqrt{m^2 G}}{m};$$

neemt men nu voor $\sqrt{m^2G}$ den wortel uit het grootste vierkant, dat in m^2G begrepen is, dan wijkt men in het gebroken $\frac{\sqrt{m^2G}}{m}$, wat de waarde des tellers betreft, minder dan 1, en dus wat de waarde van het gebroken aangaat, minder dan $\frac{1}{m}$ van de waarheid af, zoodat dan $\sqrt{G} = \frac{\sqrt{m^2G}}{m}$ tot in m^{de} deelen naauwkeurig zal wezen. Wil men, bij voorbeeld, den vierkantswortel uit het getal 2, tot in 17^{de} deelen der eenheid naauwkeurig benaderen, dan schrijve men

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{17^2.2}}{17} = \frac{\sqrt{578}}{2};$$

nu vindt men 24 voor den wortel uit het grootste vierkant, dat 578 bevat, en bijgevolg wijkt $\frac{24}{17}$ of $1\frac{7}{17}$ zeker minder dan $\frac{1}{17}$ van den waren wortel uit 2 af.

§ 220. Tot dus verre is slechts van de worteltrekking uit geheele getallen gesproken; om de wortels uit gebrokene of gemengde getallen te vinden, brengt men, door toepassing der in § 91 aangewezene herleidingen, het vinden van die wortels tot de worteltrekking uit geheele getallen terug.

Begeert men, bij voorbeeld, den vierkantswortel uit $12\frac{3}{7}$ te vinden, dan herleidt men dien wortel op de volgende wijze

$$\sqrt{12\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{87}{7}} = \sqrt{\frac{87 \times 7}{7^2}} = \frac{1}{7}\sqrt{609},$$

benadert vervolgens den wortel uit 609 zoo naauwkeurig als men goedvindt, en deelt dien gevonden' wortel door 7, dan zal het quotient, dat er komt, een benaderde wortel uit $12\frac{3}{7}$ zijn; in hoe verre deze benaderde wortel naauwkeurig is, hangt af van den graad van naauwkeurigheid, waartoe men den wortel uit 609 benaderd heeft. Dewijl 609 geen volkomen vierkant is, en dus $\sqrt{609}$, alsmede $\frac{1}{7}\sqrt{609}$ niet volkomen naauwkeurig in geheele of gebrokene getallen kan worden uitgedrukt, kan klaarblijkelijk ook $\sqrt{12\frac{3}{7}}$ niet naauwkeurig in geheele of gebrokene getallen uitgedrukt worden, en is alzoo $12\frac{3}{7}$ geen volkomen vierkant; zijnde het even duidelijk, dat, indien 609 een volkomen vierkant ware, ook $12\frac{3}{7}$ zulks zou wezen.

Een gebroken of gemengd getal zal derhalve al of niet een volkomen vierkant zijn, naargelang men, het vinden van deszelfs wortel tot de worteltrekking uit een geheel getal terugbrengende, voor dat geheele getal al of niet een volkomen vierkant verkrijgt.

§ 221. Wanneer een gegeven getal een tiendeelig gebroken is, of een gemengd getal, dat uit geheelen en tiendeeligen bestaat, wordt het vinden van deszelfs vierkantswortel tot de worteltrekking uit een geheel getal teruggebragt door de formule

$$\sqrt{G} = \frac{\sqrt{10^{2n} G}}{10^n},$$

waarin n eenig geheel getal voorstelt, groot genoeg, om $10^{2n}G$ tot een geheel getal te maken. Deze formule is dezelfde, die in § 218 tot het benaderen van eenen vierkantswortel in tiendeelige breuken is gebruikt, alleen met dit verschil, dat G in § 218 een geheel getal voorstelde, terwijl hier G een tiendeelig gebroken, of een getal, dat uit geheelen en tiendeeligen bestaat, beteekent. Men kan derhalve, tot het trekken van den vierkantswortel uit een gegeven getal, dat in tiendeeligen is uitgedrukt, denzelfden weg volgen, die in § 218 is opgegeven; mits men maar elk paar nullen, dat aldaar gebruikt werd, vervange door het paar decimaalcijfers, dat hier de plaats dier nullen bekleedt, en, om hierbij geene misslagen te begaan, verdeelt men ook de tiendeeligen van het getal, waaruit de wortel moet getrokken worden, van de decimaalcomma beginnende, in afdeelingen elk van twee cijfers. Blijft er, na al de decimaalcijfers van het gegevene getal op die wijze gebruikt te hebben, geene rest over, dan is, overeenkomstig de opmerking aan het slot der vorige §, het gegevene getal een volkomen vierkant, en anders niet; en zoo het geen volkomen vierkant is, kan men, door telkens een paar nullen achter de resten te plaatsen, de benadering in tiendeelige breuken verder voortzetten.

Zie hier drie voorbeelden ter opheldering van het gezegde.

Eerste Voorbeeld. Den vierkantswortel uit 16,431 te trekken.

Men heeft hier de volgende bewerkingen:

		16,43|1	} 4,053
	$4 \times 4 = \ldots\ldots$	16	
		4310	
$2 \times 4 = 8$; $\quad 4:8 = 0$,*enz.*			
$2 \times 40 = 80$; $\quad 431:80 = 5$,*enz.*	$805 \times 5 = \ldots\ldots$	4025	
		28500	
$2 \times 405 = 810$; $\quad 2850:810 = 3$,*enz.*	$8103 \times 3 = \ldots\ldots$	24309	
		4191.	

Alzoo is $\sqrt{16,431} = 4,053 \ldots\ldots$, welke waarde tot in duizendste deelen naauwkeurig is.

Tweede Voorbeeld. Den vierkantswortel te trekken uit 54,0225.

Hier komt de worteltrekking aldus te staan:

		54,02|25	} 7,35
	$7 \times 7 = \ldots\ldots$	49	
		502	
$2 \times 7 = 14$; $\quad 50:14 = 3$,*enz.*	$143 \times 3 = \ldots\ldots$	429	
		73 25	
$2 \times 73 = 146$; $\quad 732:146 = 5$,*enz.*	$1465 \times 5 = \ldots\ldots$	73 25	
		0.	

Derhalve is $\sqrt{54,0225} = 7,35$.

Derde Voorbeeld. Uit 0,00144 den vierkantswortel te trekken.

Hier is de bewerking deze:

		0,00|14|4	} 0,0379
	$3 \times 3 = \ldots\ldots$	9	
		5 40	
$2 \times 3 = 6$; $\quad 54:6 = 9$	$68 \times 8 = 544$		
	$67 \times 7 = \ldots\ldots$	4 69	
		7100	
$2 \times 37 = 74$; $\quad 710:74 = 9$,*enz.*	$749 \times 9 = \ldots\ldots$	6741	
		359.	

Men heeft dus $\sqrt{0,00144} = 0,0379 \ldots$, welke waarde tot in tienduizendste deelen naauwkeurig is.

§ 222. Indien men, door de kenmerken, die in § 208 ten aanzien van geheele getallen, in § 220 ten aanzien van gewone gebrokens of gemengde getallen, en in § 221 ten aanzien van tiendeelige gebrokens, met of zonder voorafgaande geheelen, zijn aangewezen, bij de worteltrekking uit een gegeven getal bevindt, dat hetzelve geen volkomen vierkant is, kan men de benadering van den wortel in tiendeelige breuken zoo ver voortzetten, als men verkiest, en dus altijd eenen benaderden wortel aanwijzen, die van den waren wortel minder dan een willekeurig te geven gebroken, hoe klein ook, verschilt. Door die benadering zal men echter nooit den waren wortel kunnen bekomen; want kon de ware wortel in tiendeelige breuken naauwkeurig gevonden worden, dan zou het gegevene getal, volgens de bepaling in § 208 opgegeven, tegen de onderstelling, een volkomen vierkant zijn. De worteltrekking uit een onvolkomen vierkant kan dus nimmer ten einde loopen; altijd zal men resten overhouden, waarop volgende bewerkingen kunnen worden toegepast, en zelfs zal men in den wortel geene repeterende tiendeelige breuk kunnen verkrijgen; want was dit het geval, dan zou men die repeterende tiendeelige breuk tot een gewoon gebroken kunnen herleiden, daardoor zou dan de wortel naauwkeurig in een gewoon gebroken of gemengd getal zijn uitgedrukt, en dus weder het gegevene getal, tegen de onderstelling, een volkomen vierkant zijn.

Bij de worteltrekking uit een onvolkomen vierkant getal is men dus verpligt, de bewerking ergens af te breken; men doet dit dan, als de wortel naauwkeurig genoeg benaderd is, om aan het oogmerk der berekening, waartoe die worteltrekking behoort, te kunnen voldoen; alzoo verwaarloost men de decimaalcijfers, die bij eene verdere benadering in den wortel zouden voorkomen, en om bij dit verwaarloozen zoo na mogelijk aan de waarheid te blijven, neemt men, zoo de eerste verwaarloosde decimaalcijfer 5 of meer is, de voorgaande cijfer eene eenheid hooger. Wilde men alzoo, in het laatste voorbeeld der vorige §, den wortel uit 0,00144 slechts tot in honderdste deelen naauwkeurig hebben, dan zou men voor dien wortel nemen 0,04; en dien wortel tot in duizendste deelen naauwkeurig begeerende, zou men nemen 0,038.

§ 223. De vierkantswortel uit elk onvolkomen vierkant en de eenheid zijn onderling onmeetbaar, of hebben geene gemeene maat, zoodat er geene getallenwaarde, hoe klein ook, zijn kan, die te gelijker tijd een geheel aantal malen in dien wortel en een geheel aantal malen in de eenheid begrepen is. Laat, om deze eigenschap der wortels uit onvolkomene vierkanten te bewijzen, ondersteld worden, dat $\sqrt{G}$ en 1 onderling meetbaar zijn, en dat hunne gemeene maat m malen in $\sqrt{G}$ en n malen in 1 begrepen zij, als wanneer m en n geheele getallen voorstellen, dan heeft men, volgens de eigenschappen der evenredigheden

$$\sqrt{G} : 1 = m : n$$

en dus ook $$\sqrt{G} = \frac{m}{n};$$

daar nu m en n geheele getallen zijn, is $\sqrt{G}$ in een geheel, gebroken of gemengd getal uitgedrukt, en dus G een volkomen vierkant; uit de onderstelling derhalve, dat $\sqrt{G}$ en 1 onderling meetbaar zijn, volgt, dat G een volkomen vierkant is; bijgevolg moeten, zoo G geen volkomen vierkant is, $\sqrt{G}$ en 1 onderling onmeetbaar wezen.

§ 224. Men noemt getallen kortaf *meetbaar* (*rationaal*) of *onmeetbaar* (*irrationaal*), naargelang zij al of niet eene gemeene maat met de eenheid hebben; de vierkantswortels uit onvolkomene vierkanten zijn dus onmeetbare of irrationale getallen. Er komen in de stelkunst, vooral in hare hoogere deelen, velerlei soort van onmeetbare getallen voor, onder welke men de onmeetbare vierkantswortels als de eenvoudigste soort kan aanzien. Alle meetbare getallen zijn geheele, gebrokene of gemengde getallen; want zoo M een meetbaar getal voorstelt, moet men hebben $M : 1 = m : n$, waarin m en n geheele getallen zijn, en dan zal $M = \frac{m}{n}$ wezen; omgekeerd zijn alle geheele, gebrokene of gemengde getallen meetbaar, want M een willekeurig geheel, gebroken of gemengd getal zijnde, zal men hetzelve altijd in de gedaante $\frac{m}{n}$ kunnen schrijven, waarin m en n geheele getallen verbeelden, en dan zal uit $M = \frac{m}{n}$ volgen $M : 1 = m : n$; onmeetbare getallen kunnen dus nooit geheele, gebrokene of gemengde getallen zijn.

§ 225. Bij het trekken van eenen vierkantswortel, wordt hetgeen in § 212 is aangetoond herhaaldelijk toegepast; deze herhaalde toepassing komt in het algemeen daarop neder, dat men, het grootste deel van den wortel kennende, ten naastenbij bepaalt hoeveel hieraan ontbreekt, en zoo doende een grooter deel van den wortel vindt; dat men daarna weder ten naastenbij bepaalt hoeveel er dan nog aan ontbreekt, en zoo vervolgens; want indien G het gegevene getal voorstelt, a het grootste deel van den wortel, en b hetgeen er aan dat grootste deel ontbreekt, om den wortel volkomen te maken, dan is

$$\sqrt{G} = a+b, \quad \text{of} \quad G = (a+b)^2,$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$b = \frac{G-a^2}{2a} - \frac{b^2}{2a} \quad \text{en} \quad b < \frac{G-a^2}{2a},$$

welke laatste voorwaarde met (γ) van § 212 overeenkomt.

Deze voorwaarde kan dienen, om, als men voor a eene waarde kent, b en dus ook $a+b$ ten naastenbij te bepalen; hierdoor verkrijgt men eene nauwkeurigere waarde voor het grootste deel van den wortel, dan men eerst had; neemt men nu voor a deze nieuwe waarde, zoo kan men door dezelfde voorwaarde onderzoeken, wat alsdan b ten naastenbij zijn moet, en zoo vervolgens.

Wil men zich van deze algemeene leerwijze bedienen, om de worteltrekking, even als in § 213 en 214, uit te voeren, dan neemt men voor b alleen de waarde in aanmerking, die door het cijfer van den hoogsten rang, dat b bevat, wordt uitgedrukt. Deze leerwijze in diervoege op het trekken van den vierkantswortel uit 23456789 toegepast wordende, zal dan ook tot dezelfde bewerkingen voeren, die in § 213 en 214 voorkomen. Hier is namelijk $G = 23456789$, en aanvankelijk $a = 4000$; men heeft dus,

$$\text{voor } a = 4000, \quad \frac{G-a^2}{2a} = \frac{7456789}{8000} = 900 \text{ ruim.}$$

Neemt men nu $b = 900$, dan is $a+b = 4900$; maar men zal vinden, dat $(4900)^2 > 23456789$ is, dus neemt men $b = 800$, dan is $a+b = 4800$, en $(4800)^2 < 23456789$ zijnde, is 4800 het nieuw gevondene grootste deel van den wortel. Nu is,

$$\text{voor } a = 4800, \quad \frac{G-a^2}{2a} = \frac{416789}{9600} = 40 \text{ ruim.}$$

Neemt men dus $b = 40$, dan is $a+b = 4840$, en $(4840)^2 < 23456789$ zijnde, is 4840 alweder eene nadere waarde voor het grootste deel van den wortel. Verder is,

$$\text{voor } a = 4840, \quad \frac{G-a^2}{2a} = \frac{31189}{9680} = 3 \text{ ruim.}$$

Men neemt dus $b = 3$, dan is $a+b = 4843$ en $(4843)^2 < 23456789$ zijnde, is 4843 het grootste deel van den begeerden wortel, tot in eenheden naauwkeurig.

Men kan deze zelfde leerwijze wel toepassen, zonder zich te bepalen tot de waarden van b, die door het cijfer van den hoogsten rang worden uitgedrukt; maar dan zal men den wortel verkrijgen door geheel andere bewerkingen, dan die van § 213 en 214, terwijl dan ook de graad van naauwkeurigheid van den verkregen' benaderden wortel niet zoo gemakkelijk kan beoordeeld worden. Neemt men namelijk, om den wortel uit 23456789 te vinden, vooreerst weder $a = 4000$, dan heeft men,

$$\text{voor } a = 4000, \quad \frac{G-a^2}{2a} = \frac{7456789}{8000} = 932, \ldots.$$

Men neemt dus $b = 932$ en $a+b = 4932$, dan is dit voor den wortel eene naauwkeuriger benaderde waarde dan 4000. Verder heeft men,

$$\text{voor } a = 4932, \quad \frac{G-a^2}{2a} = \frac{-867835}{9864} = -87, \ldots.$$

Men neemt dus $b = -88$ en $a+b = 4844$, hetwelk nu weder eene naauwkeurigere waarde is dan de laatstgevondene, en hiermede kan men voortgaan, zoover als men goedvindt.

Over het trekken van hoogeremagtswortels.

§ 226. Het zal onnoodig zijn, hier op te geven: welke getallen men volkomene en onvolkomene n^{de} magten noemt, wat men door de grootste n^{de} magt, die in eenig geheel getal begrepen is, verstaat, als ook wat een benaderde n^{de}magtswortel is; want deze opgave zou slechts eene herhaling kunnen zijn van hetgeen vroeger ten aanzien der tweede magten en tweedemagtswortels gezegd is. Dit vroeger gezegde zal tevens toereikend zijn, om te doen inzien: dat een geheel getal geen gemengd of gebroken getal tot n^{de}magtswortel kan hebben; dat het trekken van eenen n^{de}magtswortel eigenlijk alleen uit volkomene n^{de} magten kan plaats hebben; dat de n^{de}magtswortels uit onvolkomene n^{de} magten wel bij benadering, maar nooit geheel naauwkeurig kunnen gevonden worden, en bijgevolg onmeetbare getallen zijn.

§ 227. Het trekken van den n^{de}magtswortel uit een gegeven getal kan verrigt worden, door dezelfde leerwijze, die in § 225, voor het trekken van den vierkantswortel is opgegeven. Zij namelijk G het gegevene getal, a het grootste deel van den wortel, en b hetgeen daaraan ontbreekt, dan is

$$\sqrt[n]{G} = a+b, \quad \text{of} \quad G = (a+b)^n,$$

en dus, door toepassing van de in § 53 voorkomende formule (39),

$$G = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + enz.$$

waaruit volgt

$$a^n + na^{n-1}b < G \quad \text{en} \quad b < \frac{G-a^n}{na^{n-1}},$$

welke laatste voorwaarde dienen kan, om, zoo men voor a eene waarde gevonden heeft, b ten naastenbij te bepalen, en daardoor, op dezelfde wijze als in § 225, telkens naauwkeuriger waarden voor a te vinden. Het trekken van den n^{de}magtswortel is dus teruggebragt tot het vinden van eene aanvankelijke waarde, voor het grootste deel van den wortel. Om zulk eene aanvankelijke waarde te vinden, moet men de n^{de} magten der getallen, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 kennen. Verdeelt men dan het gegevene getal, van de eenheden af beginnende, in afdeelingen van n cijfers, dan zal de voorste afdeeling, als een getal op zich zelven beschouwd, noodzakelijk kleiner dan 10^n, en dus de n^{de}magtswortel uit dezelve kleiner dan 10 zijn, zoodat die wortel, door het kennen der magten van de getallen 1 tot 9, terstond in eenheden naauwkeurig gevonden kan worden; plaatst men achter dien wortel zooveel nullen, als er nog afdeelingen in het getal volgen, dan zal men hierdoor klaarblijkelijk het grootste deel van den wortel verkregen hebben, dat men dan in

$$b < \frac{G-a^n}{na^{n-1}}$$

aanvankelijk voor a nemen kan. Bij het bepalen van b, neemt men alleen het cijfer van den hoogsten rang, dat b bevat, in aanmerking, vermindert, zoo noodig, dit cijfer met eene of meer eenheden, opdat de waarde, die men alsdan voor $(a+b)^n$ zou verkrijgen, kleiner dan G blijve; de alzoo verkregene waarde voor $a+b$ neemt men dan als eene nieuwe waarde voor a aan, bepaalt daarna weder b; en zoo vervolgens.

§ 228. Om den derdemagtswortel te trekken, moet men weten, dat

$$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729$$

de derde magten zijn van

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

en, volgens de vorige §, gebruik maken van de voorwaarde

$$b < \frac{G-a^3}{3a^2}.$$

Laat, bij voorbeeld, gevraagd worden den derdemagtswortel uit 78402752 te trekken, dan deele men dit getal aldus af: 78|402|752. Omdat nu het getal 78, waaruit de voorste afdeeling bestaat, tusschen 64 en 125 invalt, is 4, tot in eenheden naauwkeurig, de derdemagtswortel uit 78, en dus 400 het grootste deel van den begeerden wortel, in honderdtallen naauwkeurig. Nu is hier $G = 78402752$, en dus,

$$\text{voor } a = 400, \quad \frac{G-a^3}{3a^2} = \frac{78402752-64000000}{480000} = 30 \text{ ruim.}$$

Men zou alzoo $b = 30$ en $a+b = 430$ moeten nemen, maar bevindt dan, dat $430^3 > 78402752$ is; derhalve neemt men $b = 20$ en $a+b = 420$, en bevindt nu, dat $420^3 < 78402752$ is, zoodat 420 het grootste deel van den wortel is, tot in tientallen naauwkeurig. Verder is,

$$\text{voor } a = 420, \quad \frac{G-a^3}{3a^2} = \frac{78402752-74088000}{529200} = 8 \text{ ruim.}$$

Men neemt dus $b = 8$ en $a+b = 428$; daar men nu bevinden zal, dat $428^3 = 78402752$ is, zoo blijkt, dat het gegevene getal eene volkomene derde magt, en 428 deszelfs wortel is.

Ten einde het onnoodig gebruik van nullen te vermijden, en tevens over de bewerkingen een geregeld overzigt te houden, plaatst men dezelve aldus:

$$\begin{array}{lll}
 & & 78|402|752\,\}\,428. \\
 & & 4^3 = \,.\,.\,.\,\underline{64} \\
 & & \qquad\quad \overline{14402} \\
3.4^2 = 48; & 144:48 = 3,enz. & 43^3 = 79507 \\
 & & 42^3 = \,.\,.\,.\,\underline{74088} \\
 & & \qquad\quad \underline{4314752} \\
3\times 42^2 = 5292; & 43147:5292 = 8,enz. & 428^3 = \,.\,.\,.\,\underline{78402752} \\
 & & \qquad\qquad 0.
\end{array}$$

§ 229. Om den vijfdemagtswortel te trekken, moet men weten, dat

1, 32, 243, 1024, 3125, 7776, 16807, 32768, 59049

de vijfde magten zijn van

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

en, volgens § 227, gebruik maken van de voorwaarde

$$b < \frac{G - a^5}{5a^4}.$$

Wil men, bij voorbeeld, den vijfdemagtswortel uit 34867890123456 trekken, dan moet men dit getal aldus afdeelen: 3486|78901|23456; daar nu de voorste afdeeling 3486, als een getal op zich zelven beschouwd, tusschen de vijfde magten van 5 en 6 gelegen is, is 5 de wortel uit de grootste vijfde magt, in 3486 begrepen, en dus 500 het grootste deel van den wortel, in honderdtallen naauwkeurig. Nu is hier $G = 34867890123456$, en dus,

$$\text{voor } a = 500, \quad \frac{G - a^5}{5a^4} = \frac{34867890123456 - 31250000000000}{312500000000} = 10 \text{ ruim.}$$

Men neemt dus $b = 10$ en $a + b = 510$; en daar men nu, de waarde van 510^5 berekenende, bevinden zal, dat deze waarde kleiner dan G is, zoo is 510 het grootste deel van den wortel, tot in tientallen naauwkeurig. Verder is,

$$\text{voor } a = 510, \quad \frac{G - a^5}{5a^4} = \frac{34867890123456 - 34502525100000}{338260050000} = 1 \text{ ruim.}$$

Dus neemt men nu $b = 1$ en $a + b = 511$, en zal dan bevinden, dat $511^5 < G$ is, zoodat 511 de benaderde wortel is, tot in eenheden naauwkeurig.

De, in deze § verklaarde, bewerking komt weder aldus te staan:

$$
\begin{array}{lr}
 & 3486|78901|23456\,\}\,511 \\
 & 5^5 = \underline{3125} \\
 & \overline{361\ 78901} \\
5.5^4 = 3125; \quad 3617 : 3125 = 1, \textit{enz.} & 51^5 = \underline{3450\ 25251} \\
 & \overline{36\ 53650\ 23456} \\
5.51^4 = 33826005; \quad 36536502 : 33826005 = 1, \textit{enz.} & 511^5 = \underline{3484\ 21142\ 63551} \\
 & 2\ 57758\ 59905.
\end{array}
$$

§ 230. Wil men den n^{de} magtswortel uit een geheel getal in tiendeelige breuken benaderen, of wil men uit een tiendeelig gebroken, of uit een gemengd getal, dat geheelen en tiendeeligen bevat, den n^{de} magtswortel trekken, dan volgt men denzelfden weg, die in § 218 en 221 ten opzigte der vierkantswortels is aangewezen; met dit onderscheid, dat men overal de n^{de}, in plaats van de 2^{de} magten der getallen 10, 100, 1000 enz. gebruikt. Men heeft namelijk:

$$\sqrt[n]{G} = \frac{\sqrt[n]{10^n G}}{10}; \quad \sqrt[n]{G} = \frac{\sqrt[n]{100^n G}}{100}; \quad \sqrt[n]{G} = \frac{\sqrt[n]{1000\ G}}{1000}; \textit{ enz.}$$

Zie hier eenige voorbeelden tot toepassing van deze formulen.

Eerste Voorbeeld. Den derdemagtswortel uit 3, tot in honderdste deelen te benaderen. Men heeft

$$\sqrt[3]{3} = \frac{\sqrt[3]{3000000}}{100} = \frac{144, \ldots}{100} = 1{,}44 \ldots$$

Hier is door de handelwijze van § 228 gevonden, dat $\sqrt[3]{3000000} = 144, \ldots$ tot in eenheden naauwkeurig is; bijgevolg is $\sqrt[3]{3} = 1{,}44 \ldots$ tot in honderdste deelen naauwkeurig.

Tweede Voorbeeld. Den vijfdemagtswortel te trekken uit 3450,25251. Hier heeft men

$$\sqrt[5]{3450{,}25251} = \frac{\sqrt[5]{3450{,}25251 \times 10^5}}{10} = \frac{\sqrt[5]{345025251}}{10} = \frac{51}{10} = 5{,}1\,;$$

zijnde volgens de vorige § gevonden, dat $\sqrt[5]{345025251} = 51$ is.

Derde Voorbeeld. Den derdemagtswortel uit 0,065 tot in drie decimalen te berekenen.

Men zal hier hebben

$$\sqrt[3]{0{,}065} = \frac{\sqrt[3]{0{,}065 \times 1000^3}}{1000} = \frac{\sqrt[3]{65000000}}{1000} = \frac{402, \ldots}{1000} = 0{,}402 \ldots$$

Door de handelwijze van § 228 namelijk is $\sqrt[3]{65000000} = 402, \ldots$ tot in eenheden naauwkeurig gevonden, zoodat dan ook $\sqrt[3]{0{,}065} = 0{,}402 \ldots$ naauwkeurig is tot in de derde decimaal.

§ 231. Wil men, in plaats van den n^{de}magtswortel uit eenig getal in tiendeelige breuken te benaderen, dien wortel tot in m^{de} deelen van de eenheid naauwkeurig vinden, dan handelt men weder op eene dergelijke wijze, als in § 219, ten opzigte van den vierkantswortel, is aangewezen. Men heeft namelijk

$$\sqrt[n]{G} = \frac{\sqrt[n]{m^n G}}{m}.$$

Moest men, bij voorbeeld, den derdemagtswortel uit 2 tot in vierde deelen van de eenheid naauwkeurig berekenen, dan zou men, in de bovenstaande formule $n = 3$, $G = 2$ en $m = 4$ nemen, en daardoor verkrijgen

$$\sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{4^3 . 2}}{4} = \frac{\sqrt[3]{128}}{4} = \frac{5, \ldots}{4} = 1\frac{1}{4} \text{ nagenoeg.}$$

Deze gevondene waarde verschilt nu zeker minder dan $\frac{1}{4}$ van den waren wortel, omdat 5 minder dan eene eenheid afwijkt van $\sqrt[3]{128}$.

Wanneer eindelijk de n^{de}magtswortels uit gebrokene of gemengde getallen getrokken moeten worden, brengt men, door toepassing der in

§ 91 aangewezene herleidingen, het vinden van die wortels tot de worteltrekking uit geheele getallen terug, zoodat het voorgedragene genoegzaam is, om elken wortel uit een willekeurig getal te kunnen berekenen. Tot het benaderen van derde-, vierde-, of hoogeremagtswortels, maakt men echter gewoonlijk gebruik van de logarithmen, waardoor men, zoo als nader blijken zal, spoediger dan door de hier verklaarde leerwijze, de wortels berekenen kan; en in die gevallen, waarin het gebruik der logarithmen den verlangden wortel niet met de vereischte naauwkeurigheid zou leeren kennen, verschaft het binomium van Newton daartoe een vermogend hulpmiddel.

§ 232. Indien de aanwijzer eener worteltrekking een deelbaar getal is, kan het trekken van den wortel, door toepassing der formule (76), teruggebragt worden tot twee of meer achtervolgende worteltrekkingen van lagere aanwijzers. Om, bij voorbeeld, den vierdemagtswortel uit 270 te trekken, zou men, volgens de formule (76) en de voorbeelden, die in § 218 en 221 voorkomen, hebben,

$$\sqrt[4]{270} = \sqrt{(\sqrt{270})} = \sqrt{16,431\ldots.} = 4,053\ldots$$

Wilde men, in het algemeen, uit eenig getal G den vierde-, zesde-, achtste-, negende-, tiende-, twaalfdemagtswortel enz. trekken, dan zou men hebben

$$\sqrt[4]{G}=\sqrt{(\sqrt{G})};\quad \sqrt[6]{G}=\sqrt{(\sqrt[3]{G})}=\sqrt[3]{(\sqrt{G})};\quad \sqrt[8]{G}=\sqrt{(\sqrt[4]{G})}=\sqrt{(\sqrt{(\sqrt{G})})};$$

$$\sqrt[9]{G}=\sqrt[3]{(\sqrt[3]{G})};\quad \sqrt[10]{G}=\sqrt{(\sqrt[5]{G})}=\sqrt[5]{(\sqrt{G})};\quad \sqrt[12]{G}=\sqrt{(\sqrt{(\sqrt[3]{G})})}=\sqrt[3]{(\sqrt{(\sqrt{G})})};$$

door welke formulen wordt aangewezen, hoe deze worteltrekkingen tot eenvoudiger teruggebragt kunnen worden.

Toepassing van het binomium op de worteltrekking.

§ 233. Wanneer men voor den n^{de}magtswortel uit eenig willekeurig getal, hetzij door beproeving, hetzij volgens § 231, hetzij op eenige andere wijze, eene waarde gevonden heeft, die niet zoo naauwkeurig is als men verlangt, kan men de in § 53 opgegevene formule (39) toepassen, om dien wortel naauwkeuriger te benaderen.

Laat namelijk voor den n^{de}magtswortel uit eenig getal G eene waarde a gevonden zijn, die niet zoo naauwkeurig is als men verlangt, dan zal men hebben

$$G = a^n + v,$$

waarin, omdat a^n niet gelijk aan G is, v het positieve of negatieve getal beteekent, waardoor het verschil tusschen G en a^n wordt aangewezen.

Hieruit volgt, dat men dan ook heeft

$$\sqrt[n]{G} = \sqrt[n]{(a^n+v)} = \sqrt[n]{a^n\left(1+\frac{v}{a^n}\right)} = a\sqrt[n]{\left(1+\frac{v}{a^n}\right)} = a\left(1+\frac{v}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Door toepassing der formule (39) verkrijgt men verder

$$\left(1+\frac{v}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{\frac{1}{n}}{1}\cdot\frac{v}{a^n}+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\,.\,2}\cdot\left(\frac{v}{a^n}\right)^2+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\left(\frac{v}{a^n}\right)^3$$

$$+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cdot\left(\frac{v}{a^n}\right)^4+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)\left(\frac{1}{n}-4\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\cdot\left(\frac{v}{a^n}\right)^5+enz.$$

of, na behoorlijke herleiding,

$$\left(1+\frac{v}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}\cdot\frac{v}{a^n}-\frac{1\,.(n-1)}{n\,.\,2n}\cdot\left(\frac{v}{a^n}\right)^2+\frac{1\,.(n-1)(2n-1)}{n\,.\,2n\,.\,3n}\cdot\left(\frac{v}{a^n}\right)^3$$

$$-\frac{1.(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,4n}\cdot\left(\frac{v}{a^n}\right)^4+\frac{1.(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,4n\,.\,5n}\cdot\left(\frac{v}{a^n}\right)^5-enz.$$

Stelt men nu, ter bekorting,

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{v}{a^n}=A,\qquad \frac{1.(n-1)}{n\,.\,2n}\cdot\left(\frac{v}{a^n}\right)^2=B,$$

$$\frac{1.(n-1)(2n-1)}{n\,.\,2n\,.\,3n}\cdot\left(\frac{v}{a^n}\right)^3=C,\qquad \frac{1.(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,4n}\cdot\left(\frac{v}{a^n}\right)^4=D,$$

$$\frac{1.(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,4n\,.\,5n}\cdot\left(\frac{v}{a^n}\right)^5=E,\ enz.,$$

dan is

$$\left.\begin{array}{lll} A=\frac{1}{n}\cdot\frac{v}{a^n}, & B=\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{v}{a^n}\cdot A, & C=\frac{2n-1}{3n}\cdot\frac{v}{a^n}\cdot B, \\ D=\frac{3n-1}{4n}\cdot\frac{v}{a^n}\cdot C, & E=\frac{4n-1}{5n}\cdot\frac{v}{a^n}\cdot D,\ enz. & \end{array}\right\}(\alpha),$$

$$\left(1+\frac{v}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}=1+A-B+C-D+E-\ enz.\ \ldots\ldots\ (\beta),$$

en

$$\sqrt[n]{G}=a(1+A-B+C-D+E-\ enz.)\ \ldots\ldots\ (\gamma).$$

Indien nu a weinig van den waren wortel uit G, en dus ook a^n weinig van G verschilt, zal v zeer klein ten opzigte van a^n, en bijgevolg $\frac{v}{a^n}$ een klein gebroken zijn. De reeks (β) zal dus convergeren, en wel des te sterker, naargelang het gebroken $\frac{v}{a^n}$ kleiner is, dat is, naargelang a minder van den waren wortel uit G verschilt. De getallen A, B, C, D, enz. zullen dus achtervolgens kleiner worden, en van dezelve kan men derhalve diegenen verwaarloozen, welke geen invloed kunnen uitoefenen op de decimaalcijfers, tot in welke men $\sqrt[n]{G}$ door de formule (γ) naauwkeurig wil berekenen.

§ 234. Om hetgeen in de vorige § gezegd is, door een voorbeeld op te helderen, stelle men zich voor, den vierkantswortel uit 5 te benaderen, dan weet men dadelijk, dat 2 ten naastenbij de waarde van $\sqrt{5}$ is, en hier gaat dus de algemeene formule

$$G = a^n + v \quad \text{over in} \quad 5 = 2^2+1,$$

zoodat nu $n = 2$, $G = 5$, $a = 2$, $v = 1$ en $\frac{v}{a^n} = \frac{1}{4}$ is. Substitueert men deze waarden in de formulen (α), dan vindt men:

$$A = \frac{1}{8} \quad = 0{,}125$$

$$B = \frac{1}{16}A = 0{,}00781$$

$$C = \frac{1}{8}B = 0{,}00098$$

$$D = \frac{5}{32}C = 0{,}00015$$

$$E = \frac{7}{40}D = 0{,}00003$$

enz.

Door behoorlijke optelling en aftrekking, vindt men nu de waarde van de reeks (β) als volgt:

$$\begin{aligned}
1 &= 1{,}00000 \\
A &= \underline{0{,}125} \\
1+A &= 1{,}12500 \\
B &= \underline{0{,}00781} \\
1+A-B &= 1{,}11719 \\
C &= \underline{0{,}00098} \\
1+A-B+C &= 1{,}11817 \\
D &= \underline{0{,}00015} \\
1+A-B+C-D &= 1{,}11802 \\
E &= \underline{0{,}00003} \\
1+A-B+C-D+E &= 1{,}11805.
\end{aligned}$$

Hier de bewerking stakende, heeft men ten naastenbij

$$1+A-B+C-D+E-enz. = 1{,}11805;$$

in welke waarde men echter op de naauwkeurigheid der laatste decimaal niet rekenen kan. Volgens (γ) is verder

$$\sqrt{5} = 2 \times 1{,}11805\ldots. = 2{,}23610\ldots.$$

en in deze uitkomst kan men nu alleen op de naauwkeurigheid der drie eerste decimalen rekenen.

Het gebroken $\frac{v}{a^n}$ was hier $\frac{1}{4}$, en dus te groot, om de reeks (β) sterk te doen convergeren; neemt men echter voor a eene waarde, die minder van den waren wortel afwijkt, dan zal men eene sterker convergerende reeks verkrijgen. Zoekt men, bij voorbeeld, voor $\sqrt{5}$ eene waarde, in vierde deelen der eenheid naauwkeurig, dan heeft men

$$\sqrt{5}=\sqrt{\frac{5.16}{16}}=\frac{\sqrt{80}}{4}=\frac{9}{4} \text{ nagenoeg.}$$

Men kan alzoo $a=\frac{9}{4}$ nemen, dan gaat

$$G=a^n+v \quad \text{over in} \quad 5=\left(\frac{9}{4}\right)^2-\frac{1}{16},$$

en dan is, $n=2$, $G=5$, $a=\frac{9}{4}$, $v=-\frac{1}{16}$ en $\frac{v}{a^n}=-\frac{1}{8}$.

Door substitutie dezer waarden in (α) vindt men dan:

$$A=-\frac{1}{162} \qquad =-0{,}0061728395$$
$$B=-\frac{1}{324}A= \quad 0{,}0000190520$$
$$C=-\frac{1}{162}B=-0{,}0000001176$$
$$D=-\frac{5}{648}C= \quad 0{,}0000000009$$

enz.

Alzoo is

$$\begin{aligned}
1 &= 1{,}0000000000\\
A &= -\,0{,}0061728395\\
1+A &= 0{,}9938271605\\
B &= 0{,}0000190520\\
1+A-B &= 0{,}9938081085\\
C &= -\,0{,}0000001176\\
1+A-B+C &= 0{,}9938079909\\
D &= 0{,}0000000009\\
1+A-B+C-D &= 0{,}9938079900.
\end{aligned}$$

Hier de bewerking stakende, heeft men

$$\sqrt{5}=\frac{9}{4}\times 0{,}99380799\ldots\ldots=2{,}2360679775\ldots\ldots,$$

welke waarde tot in de laatste decimaal naauwkeurig is, hoezeer men, op grond van de bovenstaande bewerking, slechts van de naauwkeurigheid der acht eerste decimalen zeker is.

§ 235. In de vorige § zijn, tot het berekenen van den wortel, de formulen (α), (β) en (γ) van § 233 gebruikt; in plaats daarvan kan men, in ieder bijzonder geval, op den begeerden wortel dezelfde herleidingen toepassen, die in § 233 ten opzigte van $\sqrt[n]{G}$ verrigt zijn.

Moest, bij voorbeeld, de derdemagtswortel uit 3 getrokken worden, dan zou men, voor eene eerste onnaauwkeurige waarde van dien wortel het getal 1 nemende, hebben

$$\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{(1+2)}=1+\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1\,.\,2}\,2^2+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,2^3+\textit{enz.}$$

$$=1+\frac{1}{3}.2-\frac{1}{9}.2^2+\frac{5}{81}.2^3-\textit{enz};$$

Daar echter deze reeks volgens de magten van het getal 2 opklimt, convergeert zij niet, en is dus ter berekening van den wortel onbruikbaar.

Neemt men voor eene eerste onnaauwkeurige waarde van $\sqrt[3]{3}$, hetgeen men verkrijgen zou, wanneer men dezen wortel tot in halve eenheden naauwkeurig zocht, dan zal men hebben

$$\sqrt[3]{3}=\frac{\sqrt[3]{3\,.\,2^3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{24}=\frac{3}{2}\text{ nagenoeg},$$

en vervolgens

$$\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{3}{8}\right\}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3^3-3)}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{3^3\left(1-\frac{1}{9}\right)}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{9}\right)}$$

$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2-\frac{5}{81}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3-\textit{enz.}\right\}.$$

Deze reeks convergeert nu reeds vrij sterk, zoodat men, door berekening van de bovenstaande termen, vinden zal

$$\sqrt[3]{3}=1{,}4422598\ \ldots\ ,$$

welke waarde tot in vier decimalen naauwkeurig is.

Neemt men voor eene eerste onnaauwkeurige waarde van $\sqrt[3]{3}$

$$\sqrt[3]{3}=\frac{\sqrt[3]{3.3^3}}{3}=\frac{\sqrt[3]{81}}{3}=\frac{4}{3}\text{ nagenoeg},$$

dan zal men hebben

$$\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^3+\frac{17}{27}\right\}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(4^3+17)}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{4^3\left(1+\frac{17}{64}\right)}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{\left(1+\frac{17}{64}\right)}$$

$$=\frac{4}{3}\left(1+\frac{17}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\left\{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{17}{64}-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{17}{64}\right)^2+\frac{5}{81}\cdot\left(\frac{17}{64}\right)^3-\textit{enz.}\right\},$$

welke reeks, omdat het gebroken $\frac{17}{64}$ veel grooter dan het gebroken $\frac{1}{9}$ is, veel minder dan de vorige convergeert, en dus, ter berekening van den wortel, minder geschikt is.

Berekent men $\sqrt[3]{3}$ tot in negende deelen der eenheid naauwkeurig, dan zal men verkrijgen

$$\sqrt[3]{3}=\frac{\sqrt[3]{3\,.\,9^3}}{9}=\frac{\sqrt[3]{2187}}{9}=\frac{13}{9}\text{ nagenoeg}.$$

Gebruikt men nu het binomium, om eene naauwkeurigere waarde voor den wortel te vinden, dan heeft men

$$\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{\left\{\left(\frac{13}{9}\right)^3-\frac{10}{729}\right\}}=\frac{1}{9}\sqrt[3]{(13^3-10)}=\frac{1}{9}\sqrt[3]{13^3\left(1-\frac{10}{2197}\right)}=$$

$$\frac{13}{9}\left(1-\frac{10}{2197}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{13}{9}\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{2197}-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{10}{2197}\right)^2-\frac{5}{81}\cdot\left(\frac{10}{2197}\right)^3-\textit{enz.}\right\}.$$

Begeert men nu $\sqrt[3]{3}$ tot in zeven decimalen naauwkeurig te berekenen, dan kan men, van deze laatste reeks, den term $\frac{5}{81}\cdot\left(\frac{10}{2197}\right)^3$ en al de volgende termen verwaarloozen, en dan zal men, door berekening der voorgaande termen vinden

$$\sqrt[3]{3} = 1,4422496\ldots$$

Bij de berekening der wortels door het binomium, is het eene hoofdzaak, om voor den wortel zulk eene aanvankelijke waarde te vinden, dat men eene reeks verkrijgt, die sterk genoeg convergeert; zoowel dit, als de wijze, waarop zulk eene aanvankelijke waarde voor den wortel gevonden wordt, is uit het bijgebragte voorbeeld gebleken.

Gebruik der worteltrekking tot het oplossen van zuivere vergelijkingen.

§ 236. Door *zuivere vergelijkingen* verstaat men zulke, waarin, na behoorlijke herleiding, behalve geheel bekende termen, slechts termen voorkomen, die eene zelfde magt van de onbekende als factor bevatten, en dus herleidbaar zijn tot de gedaanten

$$Ax^2 = B,\ Ax^3 = B,\ Ax^4 = B,\ enz.,$$

welke gedaanten van die, in § 134 opgegeven, niet wezenlijk verschillen, en alle begrepen zijn in de algemeene vergelijking

$$Ax^n = B.$$

Uit deze vergelijking volgt onmiddellijk

$$x = \sqrt[n]{\frac{B}{A}},$$

zoodat het kunnen trekken van den n^de^magtswortel toereikend is, om de waarde van de onbekende te vinden. Men moet echter opmerken, dat, zoo in deze vergelijking n een even getal is, men volgens § 144 zal hebben

$$x = \pm\sqrt[n]{\frac{B}{A}},$$

en dat dan, zoo $\frac{B}{A}$ negatief mogt zijn, de waarde van de onbekende, volgens § 54, onbestaanbaar is.

Indien men, bij de oplossing van een vraagstuk, zulk eene onbestaanbare waarde voor eene onbekende mogt vinden, zal dit aanduiden, dat er iets onmogelijks gevraagd is.

Zie hier een voorbeeld van zulk een

VRAAGSTUK. *Twee getallen te vinden, waarvan het product 40 is, zoodanig, dat het eene zooveel meer dan 6, als het andere minder dan 6 is.*

OPLOSSING. Zij x de overmaat van het grootste getal boven 6, dan is het grootste getal $6+x$, en het kleinste $6-x$. Men heeft dus de vergelijking

$$(6+x)(6-x) = 40,$$

of
$$36-x^2 = 40,$$

waaruit volgt
$$x^2 = -4,$$

en
$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm2\sqrt{-1};$$

daar nu deze waarden van x onbestaanbaar zijn, is het onmogelijk getallen te vinden, die aan de vraag voldoen; men merke echter op, dat de substitutie van $x=+2\sqrt{-1}$, of $x=-2\sqrt{-1}$ de vergelijking $(6+x)(6-x)=40$ identiek zal maken.

§ 237. Ten aanzien van de vergelijking $Ax^n = B$ valt nog aan te merken, dat er in het algemeen n uitdrukkingen zijn, die, voor x gesubstitueerd, aan deze vergelijking voldoen. Onder deze uitdrukkingen zijn, zoo n oneven is, $x = \sqrt[n]{\frac{B}{A}}$, zoo n even en $\frac{B}{A}$ positief is, $x = \pm\sqrt[n]{\frac{B}{A}}$ de eenige bestaanbare, terwijl al de overige onbestaanbaar zijn; en is n even en $\frac{B}{A}$ negatief, dan zijn zij alle onbestaanbaar. Het onderzoek naar deze onbestaanbare uitdrukkingen staat echter met de theorie der hoogeremagtsvergelijkingen in een te naauw verband, om hier reeds eene plaats te kunnen vinden.

OVER DE VERGELIJKINGEN VAN DEN TWEEDEN GRAAD MET ÉÉNE ONBEKENDE,

Oplossing der vierkantsvergelijkingen.

§ 238. Reeds in § 134 is gezegd, dat men door eene vierkantsvergelijking zulk eene vergelijking met ééne onbekende verstaat, die door herleiding tot de gedaante $x^2+Px+Q=0$ kan gebragt worden, waarin P en Q getallen, of uit bekenden zamengestelde stelkunstige vormen, verbeelden.

Zijn in zulk eene vergelijking P en Q beide gelijk nul, dan heeft men $x^2 = 0$, waaraan alleen door $x = 0$ kan voldaan worden.

Is, in de vergelijking $x^2+Px+Q = 0$, alleen $P = 0$, dan heeft men $x^2+Q = 0$; in dit geval behoort de vergelijking tot diegenen, waarvan in § 236 gesproken is, zoodat aan die vergelijking door de waarden $x = +\sqrt{-Q}$ en $x = -\sqrt{-Q}$ voldaan wordt. Deze waarden van x zullen klaarblijkelijk alleen bestaanbaar zijn, indien Q een negatief getal voorstelt.

Is, in de vergelijking $x^2+Px+Q = 0$, alleen $Q = 0$, dan heeft men $x^2+Px = 0$; deze vergelijking door x deelende, vindt men $x+P = 0$, waaraan alleen $x = -P$ voldoet; maar, omdat men door x gedeeld heeft, zal volgens § 142 ook $x = 0$ aan de vergelijking $x^2+Px = 0$ voldoen, zoodat aan deze vergelijking door $x = 0$ en $x = -P$ voldaan wordt.

Zijn P en Q, in de vergelijking $x^2+Px+Q=0$, geen van beide nul, dan eerst wordt deze vergelijking eene *volkomene vierkantsvergelijking* genoemd.

§ 239. Om de volkomene vierkantsvergelijking

$$x^2+Px+Q=0$$

op te lossen, tracht men dezelve vatbaar te maken, om door den regel van § 144 te kunnen vereenvoudigd worden; daartoe zoekt men dezelve zoodanig te herleiden, dat de vierkantswortel uit het eerste lid zonder wortelteeken kan voorgesteld worden, terwijl in het tweede lid slechts bekenden voorkomen. Laat men hiertoe vooreerst alleen de termen, waarin de onbekende voorkomt, in het eerste lid blijven, dan heeft men

$$x^2+Px=-Q;$$

daar men verder weet, dat aan x^2+2ax de term a^2 ontbreekt, om eene ontwikkelde tweede magt te hebben, ziet men, door $2a=P$ of $a=\frac{1}{2}P$ te stellen, dat tot hetzelfde einde aan x^2+Px de term $\left(\frac{1}{2}P\right)^2$ ontbreekt; hierom telt men bij de laatste vergelijking $\left(\frac{1}{2}P\right)^2=\frac{1}{4}P^2$ op, hetwelk geeft

$$x^2+Px+\left(\frac{1}{2}P\right)^2=\frac{1}{4}P^2-Q$$

of

$$\left(x+\frac{1}{2}P\right)^2=\frac{1}{4}P^2-Q;$$

past men hierop den regel van § 144 toe, dan komt er

$$x+\frac{1}{2}P=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)}$$

of

$$x=-\frac{1}{2}P\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)};$$

zoodat aan de vergelijking $x^2+Px+Q=0$ door de beide waarden

$$x=-\frac{1}{2}P+\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)} \text{ en } x=-\frac{1}{2}P-\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)}$$

voldaan wordt. Men zal dan ook bevinden, dat door substitutie van elk dezer waarden de vergelijking identiek wordt. Mogten P en Q een van beide of beide nul zijn, dan blijven de gevondene waarden voor x wel onveranderd doorgaan, maar dan is het gemakkelijker de vorige § te volgen.

Tot het oplossen eener vierkantsvergelijking heeft men, volgens het aangevoerde, dezen

Regel. *Herleid de vergelijking tot de gedaante* $x^2+Px+Q=0$, *dan is de onbekende gelijk aan den halven coëfficiënt, die hare eerste magt in de vergelijking heeft, met het tegengestelde teeken genomen, vermeerderd of verminderd met den vierkantswortel uit den vorm, dien men verkrijgt, door achter het vierkant van den genoemden* *halven coëfficiënt den geheel bekenden term met het tegengestelde teeken te schrijven.* Na dezen regel te hebben toegepast, moet men de gevondene waarden voor de onbekende tot den eenvoudigsten vorm herleiden.

Zie hier eenige voorbeelden:

Eerste Voorbeeld. De vergelijking $\frac{3x+2}{2x+3}=\frac{1+5x}{5-2x}$ op te lossen.

De opgegevene vergelijking herleidende, vindt men achtervolgens:

$$(3x+2)(5-2x) = (1+5x)(2x+3),$$
$$15x+10-6x^2-4x = 2x+3+10x^2+15x,$$
$$-16x^2-6x+7 = 0,$$
$$16x^2+6x-7 = 0,$$
$$x^2+\frac{3}{8}x-\frac{7}{16} = 0,$$

waardoor nu de vergelijking tot den vorm $x^2+Px+Q=0$ herleid is; past men verder op deze vergelijking den regel toe, en herleidt men de verkregene vormen tot hunne eenvoudigste gedaante, dan komt er

$$x=-\frac{3}{16}\pm\sqrt{\left\{\left(\frac{3}{16}\right)^2+\frac{7}{16}\right\}}=-\frac{3}{16}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{16^2}+\frac{7\times16}{16^2}\right)}=-\frac{3}{16}\pm\sqrt{\frac{9+112}{16^2}}$$
$$=-\frac{3}{16}\pm\sqrt{\frac{121}{16^2}}=-\frac{3}{16}\pm\frac{11}{16}=\left\{\frac{8}{16}\text{ of }-\frac{14}{16}\right\}=\left\{\frac{1}{2}\text{ of }-\frac{7}{8}\right\};$$

alzoo zijn $x=\frac{1}{2}$ en $x=-\frac{7}{8}$ de waarden van de onbekende, die aan de opgegevene vergelijking voldoen.

Tweede Voorbeeld. De vergelijking $\frac{2x}{2x-1}-\frac{3x}{3x+1}=7$ op te lossen.

Door herleiding verandert men deze vergelijking achtervolgens in:

$$2x(3x+1)-3x(2x-1) = 7(2x-1)(3x+1),$$
$$6x^2+2x-6x^2+3x = 42x^2-7x-7,$$
$$42x^2-12x-7 = 0,$$

en

$$x^2-\frac{2}{7}x-\frac{1}{6} = 0,$$

hierop den regel toepassende, en de uitkomst behoorlijk herleidende, verkrijgt men

$$x=\frac{1}{7}\pm\sqrt{\left\{\frac{1}{49}+\frac{1}{6}\right\}}=\frac{1}{7}\pm\sqrt{\frac{55}{6\times49}}=\frac{1}{7}\pm\sqrt{\frac{330}{36\times49}}$$
$$=\frac{1}{7}\pm\frac{1}{42}\sqrt{330}=\frac{6\pm\sqrt{330}}{42}.$$

Aan de gegevene vergelijking voldoen dus $x=\frac{6+\sqrt{330}}{42}$ en $x=\frac{6-\sqrt{330}}{42}$; men kan zich van de juistheid dezer gevondene waarden overtuigen, door dezelve in de gegevene vergelijking voor x te substitueren, als wanneer men bevinden zal, dat die vergelijking identiek wordt. Deze substitutie is eene alles afdoende proef, om de deugdelijkheid der bewerkingen te doen blijken, en is tevens eene zeer geschikte oefening tot het verkrijgen van vaardigheid in het herleiden van vormen.

Berekent men $\sqrt{330}$ tot in drie decimalen naauwkeurig, dan zal men vinden $\sqrt{330}=18,166\ldots$; hierdoor verkrijgt men

$$x=\frac{6+18,166\ldots}{42}=0,575\ldots \text{ en } x=\frac{6-18,166\ldots}{42}=-0,289\ldots;$$

maar deze waarden zijn nu niet volkomen naauwkeurig, en voldoen dus ook slechts ten naastenbij aan de opgegevene vergelijking. De waarden van x, die volkomen aan de vergelijking voldoen, kunnen, omdat 330 geen volkomen vierkant is, niet zonder wortelteeken uitgedrukt worden, en zijn dus onmeetbaar.

Derde Voorbeeld. De waarden van x te vinden uit de vergelijking $2bx-\frac{(b-6)ax}{a-x}=\frac{3a^2}{a-x}$.

Men herleide de vergelijking als volgt:

$$2bx(a-x)-(b-6)ax=3a^2,$$
$$2abx-2bx^2-abx+6ax=3a^2,$$
$$-2bx^2+abx+6ax-3a^2=0,$$
$$2bx^2-a(b+6)x+3a^2=0,$$
$$x^2-\frac{a(b+6)}{2b}x+\frac{3a^2}{2b}=0;$$

en passe vervolgens den regel toe, dan komt er

$$x=\frac{a(b+6)}{4b}\pm\sqrt{\left\{\frac{a^2(b+6)^2}{16b^2}-\frac{3a^2}{2b}\right\}}$$

of, door herleiding,

$$x=\frac{a(b+6)}{4b}\pm\sqrt{\frac{a^2(b+6)^2-24a^2b}{16b^2}}=\frac{a(b+6)}{4b}\pm\frac{a\sqrt{[(b+6)^2-24b]}}{4b}$$
$$=\frac{a(b+6)\pm a\sqrt{(b^2-12b+36)}}{4b}=\frac{a(b+6)\pm a(b-6)}{4b};$$

het bovenste teeken gebruikende, verkrijgt men

$$x=\frac{ab+6a+ab-6a}{4b}=\frac{2ab}{4b}=\frac{a}{2}=\frac{1}{2}a,$$

en het onderste teeken nemende, verkrijgt men

$$x=\frac{ab+6a-ab+6a}{4b}=\frac{12a}{4b}=\frac{3a}{b}.$$

Alzoo zijn $x=\frac{1}{2}a$ en $x=\frac{3a}{b}$ de waarden van x, die aan de opgegevene vergelijking voldoen.

Vierde Voorbeeld. De vergelijking $\frac{y}{\sqrt{b}}+\frac{ab\sqrt{b}}{y}=a+b$, ten opzigte van y op te lossen.

In deze vergelijking komen wel wortelteekens voor, maar de onbekende y staat nergens onder die wortelteekens, daarom is het, tot de oplossing der vergelijking, onnoodig, die wortelteekens te verdrijven. Men vermenigvuldige dus de vergelijking met $y\sqrt{b}$, en herleide dezelve, dan komt er

$$y^2+ab^2=(a+b)y\sqrt{b}$$

en

$$y^2-y(a+b)\sqrt{b}+ab^2=0;$$

door verder den regel hierop toe te passen, vindt men

$$y=\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{b}\pm\sqrt{\left\{\frac{1}{4}(a+b)^2b-ab^2\right\}},$$

en door herleiding

$$y=\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{b}\pm\sqrt{\frac{1}{4}b\left\{(a+b)^2-4ab\right\}}=\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{b}\pm\sqrt{\frac{1}{4}b(a-b)^2}$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{b}\pm\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{b};$$

het bovenste teeken nemende, is

$$y=\frac{1}{2}\left\{(a+b)+(a-b)\right\}\sqrt{b}=a\sqrt{b},$$

en het benedenste teeken gebruikende, is

$$y=\frac{1}{2}\left\{(a+b)-(a-b)\right\}\sqrt{b}=b\sqrt{b},$$

weshalve $y=a\sqrt{b}$ en $y=b\sqrt{b}$ de waarden van y zijn, waardoor aan de opgegevene vergelijking voldaan wordt.

§ 240. Somtijds kan men uit eene vergelijking van den tweeden graad, door den regel van § 144 toe te passen, onmiddellijk twee vergelijkingen van den eersten graad afleiden; waar men ziet, dat dit plaats kan hebben, is het niet verkiesselijk, de algemeene leerwijze der vorige § te volgen.

Laat, bij voorbeeld, gevraagd worden de waarden van x te vinden uit de evenredigheid

$$(a-x)^2:x^2=p:q,$$

dan zal men, de algemeene leerwijze volgende, achtervolgens verkrijgen:

$$a^2-2ax+x^2:x^2=p:q,$$

$$a^2q-2aqx+qx^2=px^2,$$

$$x^2(q-p)-2aqx+a^2q=0,$$

$$x^2-\frac{2aq}{q-p}x+\frac{a^2q}{q-p}=0,$$

$$x=\frac{aq}{q-p}\pm\sqrt{\left\{\frac{a^2q^2}{(q-p)^2}-\frac{a^2q}{q-p}\right\}}=\frac{aq}{q-p}\pm\sqrt{\frac{a^2q^2-a^2q(q-p)}{(q-p)^2}}=\frac{aq\pm a\sqrt{pq}}{q-p}.$$

Deze waarden van x kunnen nu nog op de volgende wijze herleid worden: neemt men namelijk het bovenste teeken, dan is

$$x=\frac{aq+a\sqrt{pq}}{q-p}=a\,\frac{q+\sqrt{pq}}{q-p}=a\,\frac{(\sqrt{q}+\sqrt{p})\sqrt{q}}{(\sqrt{q}+\sqrt{p})(\sqrt{q}-\sqrt{p})}=\frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{q}-\sqrt{p}};$$

en neemt men het onderste teeken, dan is

$$x=\frac{aq-a\sqrt{pq}}{q-p}=a\,\frac{q-\sqrt{pq}}{q-p}=a\,\frac{(\sqrt{q}-\sqrt{p})\sqrt{q}}{(\sqrt{q}-\sqrt{p})(\sqrt{q}+\sqrt{p})}=\frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{q}+\sqrt{p}}.$$

Volgt men hier echter de algemeene leerwijze niet, maar leidt men uit de gegevene evenredigheid de vergelijking

$$q(a-x)^2 = px^2$$

af, en past men op deze vergelijking den regel van § 144 toe, dan vindt men terstond

$$(a-x)\sqrt{q} = x\sqrt{p} \quad \text{en} \quad (a-x)\sqrt{q} = -x\sqrt{p},$$

$$a\sqrt{q}-x\sqrt{q} = x\sqrt{p} \quad \text{en} \quad a\sqrt{q}-x\sqrt{q} = -x\sqrt{p},$$

$$a\sqrt{q} = x(\sqrt{q}+\sqrt{p}) \quad \text{en} \quad a\sqrt{q} = x(\sqrt{q}-\sqrt{p}),$$

$$x = \frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{q}+\sqrt{p}} \quad \text{en} \quad x = \frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{q}-\sqrt{p}},$$

hetgeen dezelfde waarden van x zijn, die boven op eene meer omslagtige wijze gevonden waren.

Eigenschappen der vierkantsvergelijkingen.

§ 241. De beide waarden der onbekende, die aan eene vierkantsvergelijking voldoen, worden de *wortels der vergelijking* genoemd. Het woord wortel heeft dus hier eene geheel andere beteekenis, dan wanneer er van wortels uit magten gesproken wordt. Volgens § 239 zijn alzoo

$$-\frac{1}{2}P+\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)} \quad \text{en} \quad -\frac{1}{2}P-\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)}$$

de wortels der vergelijking

$$x^2+Px+Q = 0.$$

Deze wortels hebben merkwaardige eigenschappen. Stelt men kortheidshalve die wortels door m en n voor, zoodat men heeft

$$m = -\frac{1}{2}P+\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)} \quad \text{en} \quad n = -\frac{1}{2}P-\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)},$$

dan vindt men door optelling en vermenigvuldiging

$$m+n = \left\{-\frac{1}{2}P+\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)}\right\} + \left\{-\frac{1}{2}P-\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)}\right\} = -P,$$

$$\text{en} \quad mn = -m\times-n = \left\{\frac{1}{2}P-\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)}\right\}\left\{\frac{1}{2}P+\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)}\right\} = Q;$$

de som der beide wortels is dus gelijk aan den coëfficiënt, dien de eerste magt der onbekende in de vergelijking heeft, met het tegengestelde teeken genomen; en het product der beide wortels is gelijk aan den geheel bekenden term, die in de vergelijking voorkomt, met zijn eigen teeken genomen.

§ 242. Indien m en n de wortels zijn der vergelijking

$$x^2+Px+Q = 0,$$

is, volgens de vorige §, $P=-(m+n)$ en $Q=mn$, zoodat men dan voor die vergelijking schrijven kan

$$x^2-(m+n)x+mn = 0,$$

dat is

$$x^2-mx-nx+mn = 0,$$

of

$$(x-m)(x-n) = 0.$$

Hieruit blijkt, dat men, door andere waarden dan m en n voor x te nemen, niet aan de vergelijking voldoen kan; want nam men voor x eene waarde, die noch gelijk m, noch gelijk n was, dan zouden $x-m$ en $x-n$ geen van beide nul zijn, zoodat dan ook het product $(x-m)(x-n)$ niet gelijk nul zou kunnen wezen. Neemt men echter, of $x=m$, of $x=n$, dan wordt aan de vergelijking voldaan.

Eene vierkantsvergelijking laat dus twee, maar ook niet meer dan twee, waarden voor de onbekende toe.

§ 243. Volgens hetgeen in de beide vorige §§ is aangetoond, kan men gemakkelijk eene vergelijking zamenstellen, die vooraf bepaalde wortels heeft. Begeert men, bij voorbeeld, eene vergelijking te vinden, waarvan de wortels zijn $\frac{a}{b}$ en $\frac{b}{a}$, dan vindt men voor de som der wortels $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$, en voor derzelver product $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$, zoodat dan, volgens § 241, de begeerde vergelijking zal wezen

$$x^2-\frac{a^2+b^2}{ab}x+1=0.$$

Volgens § 242 zou men voor de begeerde vergelijking ook tersfond kunnen schrijven $$\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{b}{a}\right)=0,$$

en deze verschilt van de vorige alleen in gedaante. Door herleiding veranderen beide in

$$abx^2-a^2x-b^2x+ab=0,$$

en lost men nu deze vergelijking volgens den regel van § 239 op, dan zal men voor de wortels $x=\frac{a}{b}$ en $x=\frac{b}{a}$ vinden.

Begeert men eene vierkantsvergelijking, waarvan de wortels 2 en -3 zijn, dan zal men voor die vergelijking op dezelfde wijze verkrijgen

$$x^2-(2-3)x+(2\times-3)=0, \text{ of } (x-2)(x+3)=0$$

en dus na ontwikkeling $$x^2+x-6=0,$$

welke vergelijking, volgens den regel opgelost, de waarden $x=2$ en $x=-3$ zal opleveren.

X

§ 244. Om onmiddellijk te kunnen zien, hoe het van de getallenwaarden, die P en Q in de vergelijking $x^2+Px+Q=0$ hebben, afhangt, of de wortels van die vergelijking al of niet bestaanbaar zijn, merke men op, dat, onverschillig of P negatief dan wel positief zijn moge, toch altijd $\frac{1}{4}P^2$ positief zal wezen.

Is nu Q positief en grooter dan $\frac{1}{4}P^2$, zoo is $\frac{1}{4}P^2-Q$ negatief, derhalve is dan $\sqrt{(\frac{1}{4}P^2-Q)}$ en bijgevolg ook elk der beide wortels van de vergelijking onbestaanbaar. Had men, bij voorbeeld, $x^2-10x+29=0$, waarin $P=-10$, $\frac{1}{4}P^2=25$, $Q=+29$, en dus Q positief en grooter dan $\frac{1}{4}P^2$ is, dan zou men, volgens den regel van § 239, vinden

$$x=5\pm\sqrt{(25-29)}=5\pm\sqrt{-4}=5\pm2\sqrt{-1},$$

welke waarden, $5+2\sqrt{-1}$ en $5-2\sqrt{-1}$, beide onbestaanbaar zijn.

Is Q positief en gelijk aan $\frac{1}{4}P^2$, dan is $\sqrt{(\frac{1}{4}P^2-Q)} = 0$, en dan zijn de wortels der vergelijking bestaanbaar, en ieder in het bijzonder $-\frac{1}{2}P$. Hoezeer er nu geene twee verschillende waarden voor x zijn, die aan de vergelijking voldoen, heeft de vierkantsvergelijking toch altijd hare twee wortels, maar deze zijn nu onderling gelijk. In dit geval is het voorste lid der vergelijking altijd eene ontwikkelde tweede magt, waarvan men zich kan overtuigen, door $Q=\frac{1}{4}P^2$ in de vergelijking $x^2+Px+Q=0$ te substitueren; want dan verandert die vergelijking in $x^2+Px+\frac{1}{4}P^2=0$, waarvoor men schrijven kan $(x+\frac{1}{2}P)^2=0$. Had men, bij voorbeeld, $x^2-1\frac{1}{3}\,x+\frac{4}{9}=0$, waarin $P=-1\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}P=-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}P^2=\frac{4}{9}$, $Q=+\frac{4}{9}$, en dus Q positief en gelijk aan $\frac{1}{4}P^2$ is, dan zou men, volgens § 239, vinden $$x=\frac{2}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)}=\frac{2}{3}\pm 0=\frac{2}{3},$$ zoodat nu de beide wortels der vergelijking onderling gelijk en ieder $\frac{2}{3}$ zijn; men kan dan ook voor die vergelijking schrijven $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=0$.

Is Q positief, en kleiner dan $\frac{1}{4}P^2$, of is Q negatief, dan is $\frac{1}{4}P^2-Q$ positief, en dus $\sqrt{(\frac{1}{4}P^2-Q)}$, als mede elk der wortels van de vergelijking, bestaanbaar. De vierkantsvergelijking $x^2+Px+Q=0$ heeft dus twee onbestaanbare, twee gelijke bestaanbare, of twee ongelijke bestaanbare wortels, naargelang $\frac{1}{4}P^2-Q$ negatief, nul of positief is.

Door alle mogelijke onderstellingen, ten aanzien van het positief of negatief zijn van P en Q, aan te nemen, kan men de vier volgende gevallen hebben, waarin p en q positieve getallen verbeelden:

$$x^2+px+q=0,\ \text{waaruit volgt}\ x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}\ \ldots(\alpha),$$
$$x^2-px+q=0,\quad\text{»}\quad\text{»}\quad x=+\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}\ \ldots(\beta),$$
$$x^2+px-q=0,\quad\text{»}\quad\text{»}\quad x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}\ \ldots(\gamma),$$
$$x^2-px-q=0,\quad\text{»}\quad\text{»}\quad x=+\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}\ \ldots(\delta).$$

In de gevallen (α) en (β) zullen er twee ongelijke bestaanbare, twee gelijke bestaanbare, of twee onbestaanbare wortels zijn, naargelang $\frac{1}{4}p^2>q$, $\frac{1}{4}p^2=q$ of $\frac{1}{4}p^2<q$ is; zijn deze wortels bestaanbaar, dan zullen zij in het geval (α) beide negatief, en in het geval (β) beide positief zijn; want vooreerst moeten de beide wortels hetzelfde teeken hebben, omdat, volgens § 241, hun product het positieve getal q moet opleveren, en ten andere moet, volgens § 241, hunne som in het geval (α) gelijk aan $-p$ en in het geval (β) gelijk aan $+p$ zijn.

In de gevallen (γ) en (δ) zijn er altijd twee ongelijke bestaanbare wortels, en van deze is de eene positief, de andere negatief, omdat, volgens § 241, hun product het negatieve getal $-q$ moet opleveren. Voorts is het klaar, dat de bestaanbare wortels, onafhankelijk van hunnen positieven of negatieven toestand, meetbaar of onmeetbaar zullen zijn, naargelang de getallenwaarde van $\frac{1}{4}p^2\pm q$ al of niet een volkomen vierkant is.

Zie hier tot opheldering een aantal voorbeelden, waarvan de vier eerste in het geval (α), de vier volgende in het geval (β), de twee dan volgende in het geval (γ), en de beide laatste in het geval (δ) verkeeren.

1°. De vergelijking zij $x^2+6x+12=0$; hier is $\frac{1}{4}p^2=9$ kleiner dan $q=12$; de wortels der vergelijking zijn dus onbestaanbaar; men vindt voor dezelve $x=-3\pm\sqrt{-3}$.

2°. De vergelijking zij $x^2+6x+9=0$; hier is $\frac{1}{4}p^2=9$ gelijk aan $q=9$; de vergelijking heeft dus twee gelijke bestaanbare wortels; deze wortels zijn beide negatief; men vindt voor dezelve $x=-3$.

3°. De vergelijking zij $x^2+4x+3=0$; hier is $\frac{1}{4}p^2=4$ grooter dan $q=3$; de wortels zijn dus ongelijk, bestaanbaar, en omdat $\frac{1}{4}p^2-q$ een volkomen vierkant is, ook meetbaar; beide zijn negatief; men vindt voor dezelve $x=-1$ en $x=-3$.

4°. De vergelijking zij $x^2+10x+20=0$; hier is $\frac{1}{4}p^2=25$ grooter dan $q=20$; de wortels zijn dus ongelijk en bestaanbaar, maar omdat $\frac{1}{4}p^2-q$ geen volkomen vierkant is, onmeetbaar; beide zijn negatief; men vind voor dezelve $x=-5\pm\sqrt{5}$.

5°. De vergelijking zij $x^2-4x+5=0$; hier is $\frac{1}{4}p^2=4$ kleiner dan $q=5$; de wortels zijn dus onbestaanbaar; men vindt voor dezelve $x=2\pm\sqrt{-1}$.

6°. De vergelijking zij $x^2-4x+4=0$; hier is $\frac{1}{4}p^2=4$ gelijk aan $q=4$; de vergelijking heeft dus twee gelijke bestaanbare wortels; deze wortels zijn positief; men vindt voor dezelve $x=2$.

7°. De vergelijking zij $x^2-10x+16=0$; hier is $\frac{1}{4}p^2=25$ grooter dan $q=16$ en $\frac{1}{4}p^2-q$ een volkomen vierkant; de vergelijking heeft dus twee ongelijke, bestaanbare en meetbare wortels; beide zijn positief; men vindt voor dezelve $x=8$ en $x=2$.

8°. De vergelijking zij $x^2-4x+2=0$; hier is $\frac{1}{4}p^2=4$ grooter dan $q=2$, maar $\frac{1}{4}p^2-q$ is geen volkomen vierkant; er zijn dus twee ongelijke, bestaanbare, maar onmeetbare wortels; beide zijn positief; men vindt voor dezelve $x=2\pm\sqrt{2}$.

9°. De vergelijking zij $x^2+4x-5=0$; omdat de laatste term van het voorste lid negatief is, zijn de wortels bestaanbaar en verschillen in teeken; omdat voorts $\frac{1}{4}p^2+q$ een volkomen vierkant is, zijn de wortels ook meetbaar; men vindt voor dezelve $x=+1$ en $x=-5$.

10°. De vergelijking zij $x^2+4x-1=0$; even als in het vorige voorbeeld, moeten de wortels bestaanbaar, de eene positief en de andere negatief zijn, maar daar nu $\frac{1}{4}p^2+q$ geen volkomen vierkant is, zijn zij onmeetbaar; men vindt voor dezelve $x=-2\pm\sqrt{5}$.

11°. De vergelijking zij $x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{9}=0$; ook hier moeten de wortels, wegens den negatieven toestand van den derden term, bestaanbaar, van verschillende teekens, en omdat $\frac{1}{4}p^2+q$ hier een volkomen vierkant is, meetbaar zijn; men vindt voor dezelve $x = \frac{5}{3}$ en $x = -\frac{1}{3}$.

12°. De vergelijking zij $x^2-2x-20=0$; hier is weder een positieve en een negatieve bestaanbare wortel, omdat de term 20 het teeken — vóór zich heeft; maar deze wortels zijn onmeetbaar, omdat $\frac{1}{4}p^2+q$ geen volkomen vierkant is; men vindt voor de wortels dezer laatste vergelijking $x=1\pm\sqrt{21}$.

§ 245. Omdat de vormen $x=-\frac{1}{2}P+\sqrt{(\frac{1}{4}P^2-Q)}$ en $x=-\frac{1}{2}P-\sqrt{(\frac{1}{4}P^2-Q)}$ de vergelijking $x^2+Px+Q=0$ identiek maken, zullen de uitdrukkingen, die men door oplossing eener vierkantsvergelijking voor de onbekenden vindt, altijd aan die vergelijking voldoen, onverschillig, of die uitdrukkingen al dan niet bestaanbaar zijn. Heeft men echter, bij het herleiden eener gegevene vergelijking, die vergelijking tot verdrijving van wortelteekens, volgens den regel van § 143, één- of meermalen tot eene evene magt verheven, en is men daardoor tot eene vergelijking van den vorm $x^2+Px+Q=0$ geraakt, dan zullen de uitdrukkingen, die men voor x vindt, wel aan de herleide vergelijking $x^2+Px+Q=0$ voldoen, maar niet altijd aan de oorspronkelijke vergelijking, omdat, zoo als in § 143 is aangemerkt, door de magtsverheffing het onderscheid is verloren gegaan, of in die oorspronkelijke vergelijking het teeken + of — vóór de verdrevene wortelteekens stond.

Had men, bij voorbeeld, de vergelijking

$$x-\sqrt{(10+x)}=2,$$

dan zou men, deze vergelijking herleidende, achtervolgens verkrijgen

$$x-2=\sqrt{(10+x)},$$
$$x^2-4x+4=10+x,$$
$$x^2-5x-6=0.$$

Deze vergelijking oplossende, vindt men $x=6$ en $x=-1$, en hoezeer nu deze waarden van x aan de laatste vergelijking voldoen, voldoet alleen $x=6$, maar geenszins $x=-1$, aan de gegevene vergelijking; de waarde $x=-1$ voldoet echter aan de vergelijking $x+\sqrt{(10+x)}=2$, die, na herleiding, dezelfde vergelijking zal opleveren als de opgegevene.

Was, om een ander voorbeeld te nemen, de gegevene vergelijking

$$\sqrt{(x+4)}-\sqrt{(3x+1)}=7,$$

dan zou men, door achtervolgende herleiding, verkrijgen:

$$4+x-2\sqrt{(x+4)(3x+1)}+3x+1=49,$$
$$4x-44=2\sqrt{(x+4)(3x+1)},$$
$$2x-22=\sqrt{(x+4)(3x+1)},$$
$$4x^2-88x+484=3x^2+13x+4,$$
$$x^2-101x+480=0.$$

Deze vergelijking oplossende, zal men vinden $x=96$ en $x=5$, en hoezeer nu deze waarden van x aan de laatste vergelijking voldoen, voldoen zij geen van beide aan de oorspronkelijke vergelijking; de waarde $x = 96$ voldoet echter aan de vergelijking

$$-\sqrt{(x+4)}+\sqrt{(3x+1)} = 7,$$

en de waarde $x = 5$ voldoet aan de vergelijking

$$\sqrt{(x+4)}+\sqrt{(3x+1)} = 7,$$

welke beide vergelijkingen, door behoorlijke herleiding, dezelfde vergelijking zullen opleveren, die boven uit de gegevene vergelijking is afgeleid.

Volgens hetgeen in deze § is aangevoerd, zal men, indien de oplossing eener vergelijking hare verheffing tot eene evene magt vereischt heeft, altijd door substitutie moeten beproeven, of de waarden, die men voor de onbekende gevonden heeft, aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen.

§ 246. Wanneer de wortels m en n der vergelijking $x^2+Px+Q = 0$ gevonden zijn, kan volgens § 242 voor het eerste lid dier vergelijking $(x-m)(x-n)$ geschreven worden. Deze opmerking verschaft het middel, om elken stelkunstigen vorm, die ten opzigte van zekere letter van den tweeden graad is, te kunnen ontbinden in twee factoren, die ten opzigte van diezelfde letter elk van den eersten graad zijn.

Daartoe rangschikt men den te ontbinden vorm naar de afdalende magten der genoemde letter; indien de coëfficiënt van de hoogste, dat is de tweede, magt van de rangletter niet de eenheid is, deelt men den vorm door dien coëfficiënt; den vorm, dien men dan verkrijgt, ziet men aan als het eerste lid eener op nul herleide vierkantsvergelijking, waarin de rangletter de onbekende is; door deze vergelijking op te lossen, vindt men hare wortels, en dus ook de factoren van haar eerste lid, die nu ten opzigte der rangletter van den eersten graad zijn; en het product van deze factoren met den coëfficiënt, waardoor men aanvankelijk mogt gedeeld hebben, zal klaarblijkelijk gelijk aan den te ontbinden vorm wezen. Verder zal men dan, hetzij om gebrokens te verdrijven, hetzij om aan de verkregene ontbinding eene andere gedaante te geven, den genoemden coëfficiënt met een' der beide andere factoren kunnen vermenigvuldigen, of die vermenigvuldiging over de beide factoren kunnen verdeelen. Zie hier eenige voorbeelden:

Eerste Voorbeeld. Den vorm $a^2+c^2+ab-bc-2ac$ in factoren te ontbinden.

Rangschikkende dezen vorm naar de afdalende magten van a, dan verkrijgt men $a^2+(b-2c)a-bc+c^2$;

daar hier de hoogste magt van a de eenheid tot coëfficiënt heeft, komt er geene deeling door dien coëfficiënt te pas; men ziet dus den laatsten vorm als het eerste lid eener op nul herleide vierkantsvergelijking aan, waarin a de onbekende is, dan heeft men

$$a^2+(b-2c)a-bc+c^2 = 0,$$

en hieruit a oplossende, vindt men

$$a = c-b \quad \text{en} \quad a = c.$$

De factoren van het eerste lid der vergelijking zijn dus

$$a-(c-b) \quad \text{en} \quad a-c,$$

en daar dit eerste lid juist de opgegevene vorm is, heeft men voor de gevraagde ontbinding

$$a^2+(b-2c)a-bc+c^2 = (a+b-c)(a-c).$$

Tweede Voorbeeld. Den vorm $36+9x-x^2$ in factoren te ontbinden.

Dezen vorm naar de afdalende magten van x gerangschikt, is

$$-x^2+9x+36;$$

omdat nu de hoogste magt van x niet de eenheid, maar -1 tot coëfficiënt heeft, deelt men den vorm door -1, en stelt de uitkomst gelijk nul, dan komt er $\quad x^2-9x-36 = 0;$ hieruit x oplossende, zal men vinden $x = 12$ en $x = -3$; voor het eerste lid der vergelijking kan men dus schrijven

$$(x-12)(x+3),$$

en dewijl dit eerste lid, met -1 vermenigvuldigd, den opgegeven' vorm moet opleveren, heeft men voor de gevraagde ontbinding

$$36+9x-x^2 = -(x-12)(x+3) = (12-x)(3+x).$$

Derde Voorbeeld. Den vorm $12m^2+64m+45$ in factoren te ontbinden.

Deze vorm reeds naar de afdalende magten van m gerangschikt zijnde, deelt men denzelven terstond door 12, en stelt het quotient gelijk nul, dan heeft men $\quad m^2+\frac{16}{3}m+\frac{15}{4} = 0;$

hieruit m oplossende, verkrijgt men $m = -\frac{5}{6}$ en $m = -\frac{9}{2}$. Het eerste lid der vergelijking is dus hetzelfde, als

$$\left(m+\frac{5}{6}\right)\left(m+\frac{9}{2}\right);$$

wegens de aanvankelijke deeling door 12, moet dit eerste lid met 12 vermenigvuldigd worden, om den opgegeven' vorm te verkrijgen; men heeft dus $\quad 12m^2+64m+45 = 12\left(m+\frac{5}{6}\right)\left(m+\frac{9}{2}\right);$

verdeelt men nu de vermenigvuldiging met 12 over de beide andere factoren zoodanig, dat de eerste met 6, en de laatste met 2 vermenigvuldigd wordt, dan verkrijgt men

$$12m^2+64m+45 = (6m+5)(2m+9).$$

Vierde Voorbeeld. Den vorm $abcx^2-a^2b^2x+c^4x-abc^3$ in factoren te ontbinden.

Men neme x voor rangletter aan, deele den vorm door abc, en stelle het quotient gelijk nul, dan verkrijgt men de vergelijking

$$x^2+\frac{c^4-a^2b^2}{abc}x-c^2 = 0,$$

waaruit gevonden wordt $x = \frac{ab}{c}$ en $x = -\frac{c^3}{ab}$; het eerste lid der vergelijking kan dus voorgesteld worden door

$$\left(x-\frac{ab}{c}\right)\left(x+\frac{c^3}{ab}\right),$$

en het product dezer factoren met abc vermenigvuldigende, komt er voor de gevraagde ontbinding

$$abcx^2-a^2b^2x+c^4x-abc^3=abc\left(x-\frac{ab}{c}\right)\left(x+\frac{c^3}{ab}\right)=(cx-ab)(abx+c^3).$$

Vijfde Voorbeeld. Den vorm a^2+b^2 in factoren te ontbinden.

Men stelle $a^2+b^2=0$, en neme a als onbekende aan, dan zal men, door oplossing der vergelijking vinden $a=+b\sqrt{-1}$ en $a=-b\sqrt{-1}$. Hieruit volgt voor de gevraagde ontbinding

$$a^2+b^2=(a-b\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1}).$$

Uit het laatste voorbeeld ziet men, dat stelkunstige vormen, hoezeer anders voor geene ontbinding in factoren vatbaar zijnde, desniettemin eene ontbinding in onbestaanbare factoren kunnen toelaten.

Over de vergelijkingen, waarop de leerwijze der vierkants-vergelijkingen kan toegepast worden.

§ 247. Wanneer eene gegevene vergelijking met ééne onbekende, tot de in § 134 opgegevene gedaante herleid zijnde, behalve den geheel bekenden term, slechts twee termen met verschillende magten van de onbekende bevat, en de exponent van eene dezer magten het dubbel is van den exponent der andere, zoodat die vergelijking door herleiding den vorm

$$x^{2n}+Ax^n+B=0$$

verkrijgt, wordt dezelve eene *hoogeremagtsvergelijking van den tweedemagtsvorm* genoemd. Hoezeer zulk soort van vergelijkingen, even als die van den vorm $Ax^3=B$, $Ax^4=B$, enz., wezenlijk hoogeremagtsvergelijkingen zijn, bedoelt men, van hoogeremagtsvergelijkingen sprekende, gewoonlijk zulke, die tot geen' dezer bijzondere vormen behooren. De leerwijze der vierkantsvergelijkingen kan dienen, om de oplossing der hoogeremagtsvergelijkingen van den tweedemagtsvorm terug te brengen tot het geval, waarvan in § 236 gesproken is. Voor de vergelijking $x^{2n}+Ax^n+B=0$ kan men namelijk schrijven

$$(x^n)^2+A(x^n)+B=0;$$

alsdan x^n als de onbekende aanziende, is deze vergelijking eene gewone vierkantsvergelijking, zoodat men, door toepassing van den regel van § 239, terstond vindt

$$x^n=-\frac{1}{2}A+\sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2-B\right)} \text{ en } x^n=-\frac{1}{2}A-\sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2-B\right)},$$

en nu zullen de waarden van x gevonden worden, door op elk dezer laatste vergelijkingen toe te passen, hetgeen in § 236 ten aanzien der zuivere vergelijkingen gezegd is. Zie hier eenige voorbeelden:

Eerste Voorbeeld. De vergelijking $x^4-25x^2+144=0$ op te lossen.

In deze vergelijking x^2 tot onbekende aannemende, heeft men, door toepassing van den regel van § 239, onmiddellijk

$$x^2=\frac{25}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{625}{4}-144\right)},$$

waarvoor men, na herleiding, vinden zal

$$x^2=16 \quad \text{en} \quad x^2=9;$$

waaruit nu, volgens § 236, volgt

$$x=4,\quad x=-4,\quad x=3 \quad \text{en} \quad x=-3,$$

welke vier waarden van x alle aan de opgegevene vergelijking voldoen.

Tweede Voorbeeld. De vergelijking $\frac{1}{x^3}-x^3=6$ op te lossen.

Deze vergelijking herleidende, zal men vinden

$$x^6+6x^3-1=0,$$

waaruit, x^3 als onbekende aannemende, volgt

$$x^3=-3\pm\sqrt{(9+1)};$$

men heeft dus

$$x^3=-3+\sqrt{10} \quad \text{en} \quad x^3=-3-\sqrt{10},$$

zoodat $x=\sqrt[3]{(-3+\sqrt{10})}$ en $x=-\sqrt[3]{(3+\sqrt{10})}$ de eenige bestaanbare waarden voor x zijn, die aan de vergelijking voldoen.

Derde Voorbeeld. De vergelijking $x^8-2x^4-1=0$ op te lossen.

Hier x^4 als onbekende aannemende, vindt men, door toepassing van den regel van § 239,

$$x^4=1\pm\sqrt{2},\ \text{dus is}\ x=\pm\sqrt[4]{(1\pm\sqrt{2})};$$

van deze vier waarden, voor x gevonden, zijn alleen bestaanbaar

$$x=+\sqrt[4]{(1+\sqrt{2})} \quad \text{en} \quad x=-\sqrt[4]{(1+\sqrt{2})}.$$

§ 248. Somtijds kan het ook gebeuren, dat men op eene vergelijking met ééne onbekende, zonder die vergelijking tot hare algemeene gedaante te herleiden, door eenen stelkunstigen vorm, waarin de onbekende voorkomt, als onbekende aan te nemen, de leerwijze der vierkantsvergelijkingen kan toepassen, om daardoor de oplossing tot die van eenvoudiger vergelijkingen terug te brengen. Zie hier eenige voorbeelden:

Eerste Voorbeeld. Gegeven zijnde $(x^2+a^2)^2=c^2-2b(x^2+a^2)$, zal men voor deze vergelijking kunnen schrijven

$$(x^2+a^2)^2+2b(x^2+a^2)-c^2=0,$$

en hierin x^2+a^2 als onbekende aannemende, vindt men uit de gegevene vergelijking de twee nieuwe vergelijkingen

$$x^2+a^2=-b+\sqrt{(b^2+c^2)} \quad \text{en} \quad x^2+a^2=-b-\sqrt{(b^2+c^2)},$$

waaruit de waarden van x gemakkelijker gevonden worden, dan door de gegevene vergelijking vooraf tot den algemeenen vorm te herleiden.

Tweede Voorbeeld. Gegeven zijnde de vergelijking $x-\sqrt{x}=6$, zal men, door $\sqrt{x}$ tot onbekende aan te nemen, terstond vinden

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}+6\right)}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}=3 \text{ of } -2,$$

en $$x=9 \quad \text{of} \quad 4.$$

De waarde $x=9$ voldoet aan de vergelijking, maar $x=4$ voldoet niet aan dezelve, tenzij men $\sqrt{x}=-2$ neme, zoo als uit de oplossing duidelijk is. Had men uit de gegevene vergelijking het wortelteeken verdreven, en dezelve daarna opgelost, dan zou men ook wel $x=9$ en $x=4$ gevonden hebben, maar dan zou uit de oplossing niet zoo duidelijk gebleken zijn, waarom $x=4$ niet aan de vergelijking voldoet.

Derde Voorbeeld. Gegeven zijnde $x^2+\sqrt{(x^2+1)}=1$, zou men voor deze vergelijking kunnen schrijven

$$x^2+1+\sqrt{(x^2+1)}-2=0,$$

en $\sqrt{(x^2+1)}$ als onbekende kunnen aannemen, dan zou men verkrijgen

$$\sqrt{(x^2+1)}=1 \quad \text{of} \quad \sqrt{(x^2+1)}=-2,$$

dus is $$x^2+1=1 \quad » \quad x^2+1=4,$$

$$x^2=0 \quad » \quad x^2=3,$$

en $$x=0 \quad » \quad x=\pm\sqrt{3}.$$

De waarden $x=\pm\sqrt{3}$ zullen, blijkens de oplossing, niet aan de vergelijking kunnen voldoen, tenzij men $x^2-\sqrt{(x^2+1)}=1$, in plaats van de opgegevene wilde nemen.

Oplossing van vraagstukken, die tot vierkantsvergelijkingen met éene onbekende aanleiding geven.

§ 249. Heeft men tot de oplossing van een vraagstuk éene onbekende aangenomen, heeft men verder, volgens den leiddraad van § 148, dat vraagstuk in vergelijking gebragt, en bevindt men, dat die vergelijking herleidbaar is tot één' der vormen

$$Ax^n=B, \quad x^2+Ax+B=0 \quad \text{of} \quad x^{2n}+Ax^n+B=0,$$

dan is het voorgedragene toereikend, om het vraagstuk te kunnen oplossen, dewijl daartoe, volgens § 147, nog slechts het oplossen der vergelijking gevorderd wordt.

Het zou dus onnoodig zijn, over de oplossing van zulke vraagstnkken meer te zeggen, ware het niet van belang, na te gaan, welke besluiten men uit de oplossing eener vierkantsvergelijking moet trekken, ten aanzien van het vraagstuk, waaruit die vergelijking is ontstaan.

§ 250. Zijn de beide wortels eener vierkantsvergelijking onbestaanbaar, dan moet men hieruit besluiten, dat het vraagstuk, waaruit die vergelijking is opgemaakt, iets onmogelijks onderstelt, en uit dien hoofde niet opgelost kan worden; want is de oplossing mogelijk, dan moet uit de vergelijking die bestaanbare waarde voor de onbekende gevonden worden, welke tot de mogelijke oplossing behoort. Zie hier een voorbeeld.

Vraagstuk. *Hoe lang en breed is een regthoek, waarvan de omtrek 20 ellen, en de inhoud 30 vierkante ellen is?*

Oplossing. Stel, dat de regthoek x ellen lang is, dan is deszelfs breedte $\frac{30}{x}$ ellen, omdat het product van lengte en breedte den inhoud moet opleveren; de omtrek wordt dus in ellen uitgedrukt door den vorm $2\left(x+\frac{30}{x}\right)$, en daar de omtrek gelijk 20 ellen gegeven is, heeft men de vergelijking

$$2\left(x+\frac{30}{x}\right)=20,$$

waaruit men door oplossing vinden zal

$$x=5\pm\sqrt{-5};$$

daar nu deze voor x gevondene uitdrukkingen onbestaanbaar zijn, blijkt hieruit, dat er geen regthoek zijn kan, die 20 ellen omtrek en 30 vierkante ellen inhoud heeft. In de opgave is ondersteld, dat er zulk een regthoek zou kunnen zijn, en er is dus iets onmogelijks ondersteld.

Stelt men in de oplossing de gegevens door letters voor, zoodat, alles in dezelfde soort van eenheden uitdrukkende, a de omtrek, b^2 de inhoud, x de lengte, en bijgevolg $\frac{b^2}{x}$ de breedte van den regthoek is, dan heeft men de vergelijking

$$2\left(x+\frac{b^2}{x}\right)=a,$$

waaruit door oplossing gevonden wordt

$$x=\tfrac{1}{4}\,a\pm\sqrt{\left\{(\tfrac{1}{4}a)^2-b^2\right\}};$$

hieruit ziet men, dat er altijd iets onmogelijks gevraagd zal worden, indien men eenen regthoek begeert, waarvan de inhoud grooter is, dan het vierkant op een vierde gedeelte van zijn' omtrek beschreven.

§ 251. Zijn de wortels eener vierkantsvergelijking bestaanbaar en beide positief, en leveren die positieve wortels ook voor geene andere, in het vraagstuk voorkomende, grootheden of getallen negatieve waarden op, dan wordt het vraagstuk, waaruit die vergelijking ontstaan is, door elk dier wortels in den eigenlijken zin opgelost. In dit geval verkeert het volgende

Vraagstuk. *Iemand verkoopt een kleed voor 24 gulden, en bevindt, dat hij op den inkoopsprijs zooveel ten honderd verliest, als het kleed guldens gekost heeft: hoeveel was de inkoopsprijs?*

Oplossing. Stel, dat de inkoopsprijs x gulden is, dan is het verlies x ten honderd, en wordt alzoo in guldens uitgedrukt door den vierden term der evenredigheid $100:x=x:\ldots;$ dit verlies is dus $\frac{x^2}{100}$ gulden.

Daar nu de inkoopsprijs, verminderd met het verlies, den verkoopsprijs moet opleveren, heeft men de vergelijking

$$x - \frac{x^2}{100} = 24,$$

waaruit men door oplossing vinden zal

$$x = 60 \quad \text{en} \quad x = 40;$$

de inkoopsprijs kan dus 60 of 40 gulden geweest zijn.

§ 252. Mogt eene vierkantsvergelijking twee gelijke positieve wortels opleveren, dan is er op het vraagstuk, waaruit die vergelijking voortvloeit, klaarblijkelijk slechts één antwoord; maar al levert eene vierkantsvergelijking twee verschillende positieve wortels op, dan nog kan het gebeuren, dat deze wortels geene verschillende antwoorden op het vraagstuk geven. Dit heeft bij voorbeeld plaats in het volgende

VRAAGSTUK. *Eenen regthoek te vinden, waarvan de omtrek* 20 *ellen, en de inhoud* 16 *vierkante ellen is.*

OPLOSSING. De lengte van den regthoek door x voorstellende, vindt men, door in de formule van § 250, $a = 20$ en $b^2 = 16$ te nemen,

$$x = 8 \quad \text{en} \quad x = 2;$$

neemt men de eerste waarde van x, dan heeft men

$$\text{voor de lengte } x = 8, \text{ en voor de breedte } \frac{16}{x} = 2;$$

neemt men de tweede waarde van x, dan heeft men

$$\text{voor de lengte } x = 2, \text{ en voor de breedte } \frac{16}{x} = 8;$$

maar de beide hierdoor gevondene regthoeken zijn niet wezenlijk verschillend, zoodat er slechts één antwoord op het vraagstuk is.

§ 253. Het kan gebeuren, dat eene, uit een vraagstuk opgemaakte, vierkantsvergelijking wel twee positieve wortels heeft, maar dat eene waarde, hierdoor voor de onbekende verkregen, andere, in het vraagstuk voorkomende, getallen of grootheden negatief doet worden; zoowel in dit geval, als in het geval, dat de wortels der vergelijking een van beide of beide negatief zijn, behoort men die negatieve uitkomsten even zoo te verklaren, als reeds in § 157 en volgende is aangewezen.

Stellen de onbekenden slechts getallen voor, die aan zekere voorwaarden voldoen moeten, dan zullen de negatieve uitkomsten niet in den eigenlijken zin aan het vraagstuk voldoen, ten zij men hetzelve zoodanig wijzige, dat éene of meer ondersteldе optellingen of aftrekkingen in aftrekkingen of optellingen veranderd worden. Om deze wijziging te vinden, moet men nagaan, wat er vereischt zou worden, om de verkregene negatieve uitkomst van teeken te doen veranderen; somtijds kan echter het vinden van zulk eene wijziging vrij ingewikkeld worden, zoodat men zich dan vergenoegt, met die negatieve uitkomsten te beschouwen als beantwoordende aan een ander vraagstuk, dat met het oorspronkelijke in een zeker verband staat.

Stellen echter de onbekenden grootheden voor, die in getallen zijn uitgedrukt, dan verklaart men de negatieve uitkomsten, door den positieven en negatieven toestand dier grootheden behoorlijk in acht te nemen, en dan zal men doorgaans gemakkelijk de vraagstukken, indien zij niet reeds zoo opgegeven zijn, in zulke algemeene bewoordingen kunnen opgeven, dat de negatieve, zoowel als de positieve uitkomsten, in den eigenlijken zin aan de vragen beantwoorden.

Ter opheldering van het gezegde, zal het geschiktst zijn eenige vraagstukken tot voorbeelden te nemen.

Vraagstuk. *Twee werklieden verdienen ieder een verschillend weekloon; de eerste, die een zeker aantal weken gewerkt heeft, ontvangt* 96 *gulden; de tweede, die* 7 *weken korter gewerkt heeft, ontvangt slechts* 54 *gulden. Had de eerste zoo lang gewerkt als de tweede, en de tweede zoo lang als de eerste, dan zouden zij ieder evenveel ontvangen hebben: hoeveel weken hebben zij ieder gewerkt, en tegen welk loon?*

Oplossing. Stel, dat de eerste x weken gewerkt heeft, dan heeft de tweede $x-7$ weken gewerkt; het weekloon van den eersten is dus $\frac{96}{x}$, en dat van den tweeden $\frac{54}{x-7}$ gulden. Had nu de eerste $x-7$, en de tweede x weken gewerkt, dan zou de eerste ontvangen hebben $(x-7)\,\frac{96}{x}$, en de tweede $x\,.\,\frac{54}{x-7}$ gulden, en daar zij in dit geval evenveel zouden ontvangen hebben, heeft men de vergelijking

$$(x-7)\,\frac{96}{x} = x\,.\,\frac{54}{x-7}, \quad \text{of} \quad 16(x-7)^2 = 9x^2\,;$$

uit deze vergelijking, die van den tweeden graad is, volgen onmiddellijk de twee eerstemagtsvergelijkingen

$$4(x-7) = 3x \quad \text{en} \quad 4(x-7) = -3x,$$

uit welke gevonden wordt

$$x = 28 \quad \text{en} \quad x = 4,$$

zoodat de vergelijking twee positieve wortels heeft.

De eerste waarde voor x nemende, heeft de eerste gewerkt $x = 28$ weken, tegen een loon van $\frac{96}{x} = 3\frac{3}{7}$ gulden, en de tweede $x-7 = 21$ weken, tegen een loon van $\frac{54}{x-7} = 2\frac{4}{7}$ gulden; hierdoor is het vraagstuk in den eigenlijken zin opgelost. De tweede waarde voor x nemende, heeft de eerste gewerkt $x = 4$ weken, tegen een loon van $\frac{96}{x} = 24$ gulden, en de tweede $x-7 = -3$ weken, tegen een loon van $\frac{54}{x-7} = -18$ gulden, en dit is nu geen eigenlijk antwoord op het vraagstuk.

Men ziet hieruit, dat het, om eigenlijke antwoorden te bekomen, niet genoeg is, dat de wortels der vergelijking positief zijn, maar dat ook alle andere, van die wortels afhangende, waarden positief moeten blijven.

Dat voor $x = 4$ het weekloon van den tweeden werkman negatief gevonden wordt, is een bloot gevolg daarvan, dat het getal weken $x-7$ negatief is. Om dus het negatieve antwoord te kunnen toepassen, zou men het vraagstuk slechts zoo moeten wijzigen, dat $x-7$ van teeken veranderde, of in $7-x$ overging, en hiertoe behoeft men slechts te zeggen, dat 7 weken de som en niet het verschil der tijden is, gedurende welke zij gewerkt hebben. Het vraagstuk, aldus gewijzigd, luidt dan als volgt: *Twee werklieden verdienen ieder een verschillend weekloon; na ieder een zeker aantal weken gewerkt te hebben, zoodat de som dier werktijden in het geheel 7 weken is, ontvangt de eerste 96, en de tweede 54 gulden. Had de eerste, enz.* Stelt men nu weder, dat de eerste x weken gewerkt heeft, dan zal men dezelfde vergelijking als boven, en dus ook de waarden $x = 28$ en $x = 4$ verkrijgen; maar nu zal $x = 4$ een eigenlijk en $x = 28$ een oneigenlijk antwoord op het gewijzigde vraagstuk geven.

Vraagstuk. *Eenige personen hebben 36 gulden gelijkelijk onder elkander te verdeelen; maar twee van dezelve zien van hun aandeel af, waardoor elk der andere 3 gulden meer bekomt, dan anders het geval zou geweest zijn: hoeveel deelgeregtigde personen waren er aanvankelijk?*

Oplossing. Stel, dat er aanvankelijk x personen waren, dan zou elks aandeel $\frac{36}{x}$ gulden geweest zijn; maar daar er twee van hun aandeel afzien, en dus de verdeeling onder $x-2$ personen plaats heeft, bekomt elk voor zijn aandeel $\frac{36}{x-2}$ gulden; daar voorts dit aandeel 3 gulden meer dan het vorige is, heeft men de vergelijking

$$\frac{36}{x-2} = \frac{36}{x} + 3;$$

deze vergelijking tot de gewone gedaante herleidende en oplossende, vindt men:

$$x^2-2x-24 = 0,$$

$$x = 6 \text{ en } x = -4;$$

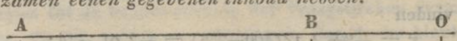
alleen de eerste waarde van x lost het vraagstuk in den bedoelden zin op, en toont aan, dat er aanvankelijk zes deelgeregtigde personen waren.

Om te zien, welke wijziging het vraagstuk moet ondergaan, om den negatieven wortel te kunnen gebruiken, schrijve men in de vergelijking, zoo als dezelve uit de opgave is opgemaakt, $-x$ in plaats van x, dan verandert zij in $\frac{36}{-x-2} = \frac{36}{-x} + 3$, of, al de termen van teeken veranderende,

$$\frac{36}{x+2} = \frac{36}{x} - 3,$$

en nu blijkt, dat men de vraag aldus wijzigen moet: *Eenige personen meenen* 36 *gulden te deelen; maar vóór dat zij de deeling hebben bewerkstelligd, komen er nog twee personen bij, die mede in de deeling begrepen moeten worden, hierdoor wordt elks aandeel* 3 *gulden minder dan anders, enz.* Stelt men nu weder het aantal personen, dat er aanvankelijk was, door x voor, dan zal men tot de vergelijking $x^2+2x-24=0$ geraken, die van de vorige alleen door het teeken van den term $2x$ verschilt, en uit deze vergelijking zal men nu $x=4$ en $x=-6$ vinden. Alsnu zal alleen $x=4$ in den eigenlijken zin voldoen, zoodat er aanvankelijk vier personen waren. Men ziet, dat het oorspronkelijke en het gewijzigde vraagstuk wel even groote waarden voor de onbekende opleveren, maar met tegengestelde teekens.

Vraagstuk. *Eene regte lijn* AB, *waarvan de lengte gegeven is, begeert men aan den kant van* B *te verlengen, en op dat verlengde een punt* O *te vinden, zoodat de vierkanten, op* AO *en* BO *beschreven wordende, te zamen eenen gegevenen inhoud hebben.*



Oplossing. Om het begeerde punt O te vinden, zal men slechts een' der afstanden AO of BO behoeven te bepalen. Men neme dus een' derzelve, bij voorbeeld BO, tot onbekende aan, en stelle, alles in dezelfde soort van eenheden uitdrukkende, $AB=a$, $AO^2+BO^2=b$ en $BO=x$, dan zijn a en b de bekende getallen, waaruit het onbekende getal x moet berekend worden. Omdat $BO=x$ is, is $AO=AB+BO=a+x$, en dus verschaft de voorwaarde, dat $AO^2+BO^2=b$ moet zijn, onmiddellijk de vergelijking

$$(a+x)^2+x^2=b;$$

deze vergelijking oplossende, vindt men, na behoorlijke herleiding,

$$x=-\tfrac{1}{2}a\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(2b-a^2)};$$

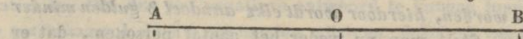
hierdoor kan de waarde van $BO=x$ berekend worden, en deze waarde, van B af, op het verlengde van AB uitzettende, zal het begeerde punt O gevonden zijn. In hoeverre nu deze waarden van x het vraagstuk in den bedoelden zin zullen oplossen, hangt van de gegevens af.

1°. Is $2b<a^2$, dan zijn de waarden van x onbestaanbaar, zoodat het dan onmogelijk is, aan de vraag te voldoen. Was, bij voorbeeld, $AB=16$ ellen, dan zou het onmogelijk zijn, een punt O te vinden, zoodat $AO^2+BO^2=100$ vierkante ellen was; want voor $a=16$ en $b=100$, zou men vinden $x=-8\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(200-256)}=-8\pm\sqrt{-14}$.

2°. Is $2b=a^2$, dan heeft de vergelijking twee gelijke wortels $x=-\tfrac{1}{2}a$, en er kan dus slechts één antwoord op de vraag zijn; dit antwoord lost de vraag echter niet in den bedoelden zin op, want de negatieve waarde van x toont aan, dat het punt O ter linkerzijde van B moet vallen; voorts valt bij dit oneigenlijke antwoord het punt O juist midden tusschen A en B. Was, bij voorbeeld, $AB = 16$ ellen, en moest $AO^2 + BO^2 = 128$ vierkante ellen zijn, dan zou men, voor $a = 16$ en $b = 128$, vinden

$$x = -8 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(256-256)} = -8;$$

het punt O zou dus op 8 ellen afstand ter linkerzijde van B moeten ge-

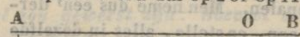


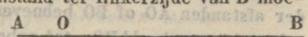
nomen worden, en dan is $AO^2 = 64$, $BO^2 = 64$ en dus naar behooren $AO^2 + BO^2 = 128$ vierkante ellen.

3°. Is $2b > a^2$, maar $b < a^2$, dan heeft de vergelijking twee verschillende bestaanbare wortels, en er zijn dus twee antwoorden op de vraag; maar geen van beide lossen de vraag in den bedoelden zin op; want uit $b < a^2$, volgt $2b < 2a^2$, $2b - a^2 < a^2$, $\sqrt{(2b-a^2)} < a$ en $\tfrac{1}{2}\sqrt{(2b-a^2)} < \tfrac{1}{2}a$, dus zijn de beide wortels negatief, en voor beide zal alzoo het punt O ter linkerzijde van B vallen; voorts vallen, bij deze twee oneigenlijke antwoorden, de punten O ergens tusschen A en B, even ver van de uiteinden der lijn AB. Was, bij voorbeeld, $AB = 16$ ellen, en moest $AO^2 + BO^2 = 200$ vierkante ellen wezen, dan zou men voor $a = 16$ en $b = 200$ vinden

$$x = -8 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(400-256)} = -2 \text{ of } -14;$$

het punt O zou dus op 2 of op 14 ellen afstand ter linkerzijde van B moe-





ten genomen worden, en dus is in het eerste geval $AO^2 = 196$ en $BO^2 = 4$, in het tweede geval $AO^2 = 4$ en $BO^2 = 196$, maar in beide gevallen naar behooren $AO^2 + BO^2 = 200$ vierkante ellen.

4°. Is $b = a^2$, dan vindt men voor de wortels der vergelijking,

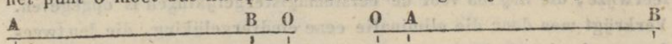
$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(2a^2 - a^2)} = 0 \text{ of } -a;$$

in dit geval zijn er weder twee antwoorden op de vraag, maar die geen van beide in den bedoelden zin voldoen; want het punt O zou, voor $x = 0$, in B, en voor $x = -a$, in A vallen.

5°. Is $b > a^2$, dan heeft de vergelijking weder twee bestaanbare wortels, zoodat er ook weder twee antwoorden op de vraag zijn. Uit $b > a^2$, volgt $2b > 2a^2$, $2b - a^2 > a^2$, $\sqrt{(2b-a^2)} > a$ en $\tfrac{1}{2}\sqrt{(2b-a^2)} > \tfrac{1}{2}a$, dus is nu een der wortels positief en de andere negatief. Voor den negatieven wortel valt het punt O ter linkerzijde, voor den positieven ter regterzijde van B, zoodat alleen door den laatsten het vraagstuk in den bedoelden zin wordt beantwoord, en er dus nu een eigenlijk en een oneigenlijk antwoord is. Voorts vallen de punten O, tot deze antwoorden behoorende, ergens buiten A en B, even ver van de uiteinden der lijn AB. Was, bij voorbeeld, $AB = 16$ ellen, en moest $AO^2 + BO^2 = 290$ vierkante ellen wezen, dan zou men voor $a = 16$ en $b = 290$ vinden

$$x = -8 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(580-256)} = 1 \text{ of } -17;$$

het punt O moet dus nu op 1 el afstand ter regterzijde, of op 17 ellen



afstand ter linkerzijde van B genomen worden, en dan is, in het eerste geval, $AO^2 = 289$ en $BO^2 = 1$, in het tweede geval $AO^2 = 1$ en $BO^2 = 289$, maar in beide gevallen naar behooren $AO^2 + BO^2 = 290$ vierkante ellen.

De oneigenlijke antwoorden, die op dit vraagstuk gevonden zijn, zijn alleen oneigenlijk, omdat er een punt O op het verlengde van AB, aan den kant van B, begeerd werd, terwijl door die antwoorden het punt O, of op AB zelve, of op het verlengde aan den anderen kant, of in de uiteinden A en B zou komen. Wil men dus het vraagstuk in zulke algemeene bewoordingen opgeven, dat ook de oneigenlijke antwoorden regtstreeks aan hetzelve voldoen, dan zal men slechts behoeven te vragen: *Op eene in lengte gegevene lijn* AB, *of op haar verlengde, een punt* O *te vinden, zoodat de vierkanten op* AO *en* BO *beschreven, te zamen eenen gegeven inhoud hebben.*

§ 254. Uit de hier bijgebragte voorbeelden is alweder gebleken, hoe men vraagstukken in vergelijking brengt, en uit de oplossing dier vergelijkingen tot de beantwoording der vraagstukken geraakt. Bij vraagstukken, die tot andere vergelijkingen, dan de tot hiertoe behandelde, aanleiding geven, geschiedt het in vergelijking brengen op dezelfde wijze, en wordt ook op dezelfde wijze uit de oplossing der vergelijkingen het besluit opgemaakt, dat ter beantwoording der vragen strekt; hierom zal het onnoodig zijn, bij hetgeen verder over het oplossen van andere vergelijkingen, dan de tot hiertoe behandelde, gezegd zal worden, telkens gewag te maken van vraagstukken, die zulke vergelijkingen opleveren.

OVER DE VERGELIJKINGEN VAN WILLEKEURIGE GRADEN MET TWEE OF MEER ONBEKENDEN, WELKER OPLOSSING TOT GEENE HOOGEREMAGTSVERGELIJKINGEN VOERT.

Gevallen, in welke de oplossing van twee of meer vergelijkingen met evenveel onbekenden kan plaats hebben, door eene dergelijke eliminatie als bij de eerstemagtsvergelijkingen.

§ 255. Hetgeen in § 199 over de oplossing van een stelsel van n vergelijkingen met n onbekenden gezegd is, is geheel onafhankelijk van den graad der vergelijkingen. Wanneer derhalve die vergelijkingen, hetzij alle, hetzij gedeeltelijk den eersten graad te boven gaan, komt het er, even als bij de eerstemagtsvergelijkingen, op aan: ten eerste, om door eliminatie tot ééne vergelijking met ééne onbekende te geraken, welke vergelijking men dan de *eindvergelijking* van het stelsel noemt; ten tweede, om die eindvergelijking op te lossen; en ten derde, om de waarden der geëlimineerde onbekenden te bepalen.

In vele gevallen nu, kan de eliminatie verrigt worden door de eerste leerwijze, die in § 183 voor de eerstemagtsvergelijkingen is opgegeven. Verkrijgt men door die eliminatie eene eindvergelijking, die den tweeden graad niet te boven gaat, den tweedemagtsvorm heeft, of eene zuivere vergelijking is, en vervalt men ook bij de bepaling van de waarden der geëlimineerde onbekenden op geene hoogeremagtsvergelijkingen, dan is het tot hiertoe verhandelde genoegzaam, om het stelsel vergelijkingen te kunnen oplossen.

§ 256. De eliminatie eener onbekende kan altijd door de eerste leerwijze van § 183 geschieden, indien eene der vergelijkingen van het stelsel, ten opzigte van de te elimineren onbekende, van den eersten graad is, onverschillig van welke graden overigens de vergelijkingen mogen zijn. Zie hier een paar voorbeelden.

Eerste Voorbeeld. De vergelijkingen $x^2+xy=40$ en $x^2+y^2=34$ op te lossen.

De eerste vergelijking, hoezeer van den tweeden graad zijnde, is ten opzigte van y slechts van den eersten graad; uit dezelve alzoo y oplossende, vindt men $y=\frac{40-x^2}{x}$. Dezen vorm voor y in de tweede vergelijking substituerende, komt er, na herleiding,

$$x^4-57x^2+800=0,$$

en deze vergelijking, volgens § 247 oplossende, vindt men

$$x^2=32 \quad \text{of} \quad x^2=25,$$

waaruit volgt $\quad x=\pm 4\sqrt{2} \quad$ of $\quad x=\pm 5.$

Elk dezer vier waarden van x in den voor y gevondenen vorm substituerende, verkrijgt men

$$y=\pm\sqrt{2} \quad \text{en} \quad y=\pm 3.$$

Hier valt echter op te merken, dat bij elke waarde van x slechts éene overeenkomstige waarde voor y gevonden wordt. Men heeft dus: $x=4\sqrt{2}$ en $y=\sqrt{2}$; $x=-4\sqrt{2}$ en $y=-\sqrt{2}$; $x=5$ en $y=3$; of $x=-5$ en $y=-3$.

Tweede Voorbeeld. De vergelijkingen $x^2=z-y^2$, $4z^2-17y^2=4zx^2$ en $z^2=x^4-2xy+y^4$ op te lossen.

Uit de eerste vergelijking volgt $z=x^2+y^2$; deze waarde voor z in de beide andere vergelijkingen substituerende, komt er, na herleiding,

$$4x^2y^2+4y^4=17y^2 \quad \text{en} \quad 2x^2y^2=-2xy,$$

of, door y^2 en $2xy$ deelende,

$$4x^2+4y^2=17 \quad \text{en} \quad xy=-1.$$

Uit de laatste vergelijking volgt $x=-\frac{1}{y}$, door substitutie waarvan de voorlaatste vergelijking, na herleiding overgaat in

$$y^4-\frac{17}{4}y^2+1=0.$$

Deze vergelijking volgens § 247 oplossende, vindt men

$$y^2 = 4 \quad \text{of} \quad y^2 = \tfrac{1}{4},$$

dus is

$$y = \pm 2 \quad \text{of} \quad y = \pm \tfrac{1}{2}.$$

Daar nu $x = -\frac{1}{y}$ en $z = x^2 + y^2$ is, verkrijgt men voor de waarden der onbekenden, die aan de opgegevene vergelijkingen voldoen: $y = 2$, $x = -\frac{1}{2}$ en $z = 4\frac{1}{4}$; $y = -2$, $x = \frac{1}{2}$ en $z = 4\frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{2}$, $x = -2$ en $z = 4\frac{1}{4}$; of $y = -\frac{1}{2}$, $x = 2$ en $z = 4\frac{1}{4}$.

Uit de verrigte deelingen door y^2 en $2xy$, zal men gemakkelijk afleiden, dat $y = 0$ en $z = x^2$, wat men dan ook voor x nemen moge, waarden zijn, die insgelijks aan de opgegevene vergelijkingen voldoen.

§ 257. Tot welke graden de vergelijkingen van eenig stelsel ook mogen opklimmen, kan de eerste leerwijze van § 183 altijd nog ter eliminatie eener onbekende gevolgd worden, indien eene der vergelijkingen van dat stelsel, ten opzigte van de te elimineren onbekende, van den tweeden graad is; maar men zal dan, om die vergelijking ten opzigte van die onbekende op te lossen, van de leerwijze der vierkantsvergelijkingen gebruik moeten maken. De beide vormen, die men daardoor voor de te elimineren onbekende verkrijgt, behooren ieder op zich zelven in de overige vergelijkingen gesubstituëerd te worden, zoodat daardoor de oplossing van n vergelijkingen met n onbekenden tot het oplossen van twee verschillende stelsels van $n-1$ vergelijkingen met $n-1$ onbekenden wordt teruggebragt. De waarden, uit een dezer stelsels voor de overige onbekenden gevonden wordende, mogen dan, om de waarde der geëlimineerde onbekende te vinden, alleen in dien vorm gesubstituëerd worden, welke tot het verkrijgen van dat stelsel gediend heeft. Zie hier een paar voorbeelden:

Eerste Voorbeeld. De vergelijkingen $2x^2+y^2+2x = 3xy+y$ en $8x^3-y^3 = 2x-6$ op te lossen.

De eerste vergelijking ten opzigte van x oplossende, zal men vinden $x = \frac{1}{2}y$ en $x = y-1$; door deze waarden voor x in de tweede vergelijking te substituëren, wordt x geëlimineerd, en daardoor geraakt men tot twee vergelijkingen in y, die elk behooren tot die waarde van x, welke men ter eliminatie gebruikt heeft.

Voor $x = \frac{1}{2}y$, gaat de tweede vergelijking onmiddellijk over in

$$y = 6, \quad \text{en dan is} \quad x = \tfrac{1}{2}y = 3.$$

Voor $x = y-1$, gaat de tweede vergelijking over in

$$7y^3-24y^2+22y = 0,$$

waaruit men vinden zal

$$y = 0, \quad y = \frac{12+\sqrt{-10}}{7}, \quad y = \frac{12-\sqrt{-10}}{7},$$

waarmede nu $x = -1$, $x = \dfrac{5+\sqrt{-10}}{7}$, $x = \dfrac{5-\sqrt{-10}}{7}$.

overeenstemt. Er zijn alzoo vier overeenkomstige waarden voor de onbekenden gevonden, die aan de gegevene vergelijkingen voldoen.

Tweede Voorbeeld. De waarden van x, y en z te vinden uit de vergelijkingen $y^2+x^3z^2=z^4+x^3y$, $x^3y^3-(x+y)=x^3z^6-12$ en $x^2-xy+y^2=3z^4$.

De eerste vergelijking ten opzigte van y oplossende, zal men vinden $y=z^2$ en $y=x^3-z^2$; deze waarden voor y in de beide andere vergelijkingen substituërende, elimineert men y, en daardoor geraakt men tot twee stelsels van twee vergelijkingen in x en z.

Voor $y=z^2$, zal men, na behoorlijke herleiding, verkrijgen

$$x+z^2=12 \quad \text{en} \quad x^2-xz^2=2z^4.$$

Voor $y=x^3-z^2$, zal men verkrijgen

$$x^3(x^3-z^2)^3-(x-x^3+z^2)=x^3z^6-12 \quad \text{en} \quad x^2-x(x^3-z^2)+(x^3-z^2)^2=3z^4.$$

Om de twee vergelijkingen van het laatste stelsel op te lossen, vervalt men in hoogeremagtsvergelijkingen; die van het eerste stelsel kunnen echter opgelost worden, door uit de eerste vergelijking x af te zonderen, en de waarde $x=12-z^2$ in de tweede te substituëren; want door die substitutie zal men onmiddellijk vinden $z^2=4$, waaruit volgt

$$z=\pm 2, \qquad x=12-z^2=8 \qquad \text{en} \qquad y=z^2=4.$$

Behalve deze waarden van de onbekenden, moeten aan de opgegevene vergelijkingen ook nog diegenen voldoen, welke in het tweede stelsel voor x, z en $y=x^3-z^2$ liggen opgesloten.

§ 258. Verkeeren de vergelijkingen van een stelsel in de gevallen der vorige §, dan zal het dikwijls gebeuren, dat in de vormen, die men voor de te elimineren onbekende verkrijgt, andere onbekenden onder het wortelteeken komen, en dat dit wortelteeken na herleiding niet wegvalt; alsdan verschillen de twee stelsels van vergelijkingen, die men na de eliminatie verkrijgt, van elkander in niets anders, dan in de teekens + of —, die vóór dat wortelteeken staan, zoodat, volgens § 143, die stelsels, na verdrijving der wortelteekens, niet van elkander zullen verschillen. In zulke gevallen is de eliminatie, zoo als zij in de vorige § is bewerkstelligd, niet verkiesselijk, omdat de verdrijving der wortelteekens een te omslagtige arbeid is, die door eene nog niet verklaarde algemeenere leerwijze te volgen, kan ontweken worden.

Gevallen, waarin de oplossing van twee of meer vergelijkingen, met evenveel onbekenden, door kunstgrepen kan plaats hebben.

§ 259. Reeds in § 181 is opgemerkt, dat men in sommige gevallen tot de eliminatie eener onbekende kan geraken, zonder daartoe eenige algemeene leerwijze te volgen; kan men langs dezen weg de oplossing van gegevene vergelijkingen verkrijgen, dan worden zij gezegd, door kunstgrepen te zijn opgelost. Zoo zou men, in het tweede voorbeeld van § 256, voor de twee eerste vergelijkingen kunnen schrijven

$z-x^2=y^2$ en $4z(z-x^2)=17y^2$, en daarna die twee vergelijkingen in elkander kunnen deelen; daardoor zou men dadelijk vinden $4z=17$, of $z=4\frac{1}{4}$. Door substitutie dezer waarde van z, gaan de aldaar gegevene vergelijkingen over in

$$x^2+y^2=4\tfrac{1}{4} \quad \text{en} \quad x^4-2xy+y^4=(4\tfrac{1}{4})^2;$$

de tweede vergelijking van het vierkant der eerste aftrekkende, komt er, na deeling door $2xy$,

$$xy+1=0, \quad \text{of} \quad xy=-1,$$

en op deze wijze voortgaande, zou men dezelfde waarden voor de onbekenden verkrijgen, die aldaar gevonden zijn.

§ 260. Het is alleen door zich op vele voorbeelden te oefenen, dat men vaardigheid in het aanwenden van dergelijke kunstgrepen zal verkrijgen. Zie hier een aantal voorbeelden van vergelijkingen, die op deze wijze kunnen opgelost worden, met eene korte aanwijzing, hoe dit geschieden kan.

N°. 1. Zij gegeven $x+y=a$ en $x-y=b$. Men neme de halve som en het halve verschil dezer vergelijkingen, dan zullen de onbekenden gevonden zijn.

N°. 2. Zij gegeven $x+y=a$ en $xy=b$. Men trekke het viervoud van de tweede vergelijking van het vierkant der eerste af, dan zal $(x-y)^2$, en dus ook $x-y$ bekend worden, waardoor de oplossing tot N°. 1 is teruggebragt.

N°. 3. Zij gegeven $x-y=a$ en $xy=b$. Men telle het viervoud van de tweede vergelijking bij het vierkant van de eerste op, en handele verder als bij N°. 2.

N°. 4. Zij gegeven $x^2+y^2=a$ en $xy=b$. Men vermeerdere en verminderc de eerste vergelijking met het dubbel van de tweede, dan zal $(x+y)^2$ en $(x-y)^2$, en dus ook $x+y$ en $x-y$, bekend worden; men komt dus op N°. 1 terug.

N°. 5. Zij gegeven $x^2+y^2=a$ en $x\pm y=b$. Men trekke de eerste vergelijking van het vierkant der tweede af, dan is de oplossing tot N°. 4 teruggebragt.

N°. 6. Zij gegeven $x^2-y^2=a$ en $x\pm y=b$. Men deele de eerste vergelijking door de tweede, dan wordt de oplossing tot N°. 1 teruggebragt.

N°. 7. Zij gegeven $x^2-y^2=a$ en $xy=b$. Men telle bij het vierkant van de eerste vergelijking viermaal het vierkant van de tweede op, dan wordt daardoor $(x^2+y^2)^2$, en dus ook x^2+y^2, bekend; omdat nu x^2+y^2 en x^2-y^2 bekend zijn, kan men, denzelfden weg, als in N°. 1 volgende, x^2 en y^2, en dus ook x en y vinden.

N°. 8. Zij gegeven $x^3+y^3=a$ en $x+y=b$. Men deele de eerste vergelijking door de tweede, dan wordt x^2-xy+y^2 bekend; men brenge vervolgens de tweede vergelijking in het vierkant, dan wordt $x^2+2xy+y^2$

bekend; door aftrekking zal dan ook $3xy$ en bijgevolg xy bekend worden; deze bekende waarde van xy aftrekkende van de vroeger gevondene voor x^2-xy+y^2, zal $(x-y)^2$, en alzoo $x-y$ bekend worden, waardoor de oplossing tot N°. 1 teruggebragt is.

N°. 9. Zij gegeven $x^3-y^3=a$ en $x-y=b$. Men kan deze vergelijkingen op eene dergelijke wijze als die van N°. 8 behandelen.

N°. 10. Zij gegeven $x^4+x^2y^2+y^4=a$ en $x^2+xy+y^2=b$. Men deele de eerste vergelijking door de tweede, dan komt er $x^2-xy+y^2=a:b$; deze laatste vergelijking van $x^2+xy+y^2=b$ aftrekkende, wordt $2xy$ en bijgevolg xy bekend; deze bekende waarde optellende bij $x^2+xy+y^2=b$ en aftrekkende van $x^2-xy+y^2=a:b$, worden $(x+y)^2$ en $(x-y)^2$, en bijgevolg $x+y$ en $x-y$ bekend; men handele dus verder als in N°. 1.

N°. 11. Zij gegeven $x^2+y^2+ax+ay=b$ en $xy=c$. Het dubbel der laatste vergelijking bij de eerste optellende, zal men de komende vergelijking onder de gedaante $(x+y)^2+a(x+y)=b+2c$ kunnen schrijven; deze vergelijking als eene vierkantsvergelijking aanziende, waarin $x+y$ de onbekende is, kan men de waarden van $x+y$ vinden, waardoor de oplossing tot N°. 2 teruggebragt is.

N°. 12. Zij gegeven $x^4+y^4=a$ en $x+y=b$. De eerste vergelijking aftrekkende van de vierde magt der tweede, komt er onmiddellijk $4x^3y+6x^2y^2+4xy^3=b^4-a$; door bij elk lid dezer vergelijking $2x^2y^2$ op te tellen, zal men vinden $4x^3y+8x^2y^2+4xy^3=b^4-a+2x^2y^2$, of $4xy(x+y)^2=b^4-a+2x^2y^2$; hierin $x+y=b$ substituërende, verkrijgt men $4b^2xy=b^4-a+2x^2y^2$; uit deze laatste vergelijking kan men xy als uit eene vierkantsvergelijking oplossen, en daardoor is het vinden van de waarden der onbekenden tot N°. 2 teruggebragt.

N°. 13. Zij gegeven $x+y=a$, $y+z=b$ en $z+x=c$. Men neme de halve som dezer drie vergelijkingen, dan zal men $x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c)$ vinden; van deze laatste, elk der gegevene vergelijkingen aftrekkende, zal men de waarden der onbekenden verkrijgen.

N°. 14. Zij gegeven $x+y+z=a$, $y+z+u=b$, $z+u+x=c$ en $u+x+y=d$. Men neme een derde van de som dezer vier vergelijkingen, en handele verder als in N°. 13.

N°. 15. Zij gegeven $xy=a$, $yz=b$ en $zx=c$. Men vermenigvuldige deze drie vergelijkingen met elkander, en trekke uit het product den vierkantswortel, dan zal men vinden $xyz=\sqrt{abc}$; deze laatste vergelijking door elk der gegevene deelende, zal men de waarden der onbekenden verkrijgen.

N°. 16. Zij gegeven $xyz=a$, $yzu=b$, $zux=c$ en $uxy=d$. Men vermenigvuldige deze vier vergelijkingen met elkander, trekke uit het product den derdemagtswortel, en handele verder als in N°. 15.

N°. 17. Zij gegeven $a(x+y)=a'xy$, $b(y+z)=b'yz$ en $c(z+x)=c'zx$. Men deele de eerste vergelijking door axy; de tweede door byz en de derde door cxz, dan zal men verkrijgen $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{a'}{a}$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{b'}{b}$ en $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{c'}{c}$; in deze vergelijkingen $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ en $\frac{1}{z}$ als de onbekenden aanziende, kunnen de waarden van die onbekenden, even als in N°. 13 handelende, gevonden worden, en daardoor worden dan ook x, y en z bekend.

N°. 18. Zij gegeven $x(y+z)=a$, $y(z+x)=b$ en $z(x+y)=c$. Men neme de halve som dezer vergelijkingen, dan vindt men terstond $xy+yz+zx=\frac{1}{2}(a+b+c)$; hiervan elk der gegevene vergelijkingen in het bijzonder aftrekkende, wordt elk der producten xy, yz en xz bekend, en dus de oplossing tot N°. 15 teruggebragt.

N°. 19. Zij gegeven $xy+n(x+y)=a$, $yz+n(y+z)=b$ en $zx+n(z+x)=c$. Bij elk der leden van deze vergelijkingen n^2 optellende, kan men derzelver voorste leden in factoren ontbinden, waardoor men verkrijgt $(x+n)(y+n)=a+n^2$, $(y+n)(z+n)=b+n^2$ en $(z+n)(x+n)=c+n^2$; uit deze vergelijkingen kunnen de waarden van $x+n$, $y+n$ en $z+n$, even als in N°. 15 handelende, gevonden worden, en daardoor worden dan ook x, y en z bekend.

N°. 20. Zij eindelijk gegeven $x+y+z+u=a$, $x+2y+4z+8u=b$, $x+3y+9z+27u=c$ en $x+4y+16z+64u=d$. In deze vergelijkingen zijn achtervolgens: de coëfficiënten van x de 0de magten, die van y de 1ste magten, die van z de 2de magten en die van u de 3de magten van de getallen 1, 2, 3, 4. De oplossing van die vergelijkingen kan door eenvoudige aftrekking geschieden: trekt men namelijk elke vergelijking van de daarop volgende af, dan vindt men $y+3z+7u=b-a$, $y+5z+19u=c-b$ en $y+7z+37u=d-c$; handelt men met deze drie laatste vergelijkingen op dezelfde wijze, dan komt er $2z+12u=c-2b+a$ en $2z+18u=d-2c+b$; trekt men nu nogmaals deze laatste van elkander af, dan verkrijgt men $6u=d-3c+3b-a$; hierdoor wordt u bekend, en de overige onbekenden moeten nu door substitutie gevonden worden.

§ 261. Wanneer eene vergelijking zoodanig gesteld is, dat men de letters, waardoor de onbekenden zijn voorgesteld, met elkander verwisselen kan, zonder dat daardoor de vergelijking verandert, wordt zulk eene vergelijking gezegd *symmetriek* ten opzigte van die onbekenden te zijn. Zoodanige vergelijkingen zijn: $x+y=a$, $xy=a$, $xyz=a$, $x^2+xy+y^2=a$, $x^2+y^2+z^2=r^2$, enz. Verkeeren de vergelijkingen van een op te lossen stelsel alle in dit geval, dan kunnen de waarden, die voor ééne onbekende gevonden zijn, klaarblijkelijk ook voor de andere onbekenden genomen worden; maar men moet dan uit de vergelijkingen opsporen, welke waarden voor de verschillende onbekenden bij elkander behooren. Was, bij voorbeeld, gegeven $x^3+y^3=9$ en $xy=2$, dan vindt men, deze vergelijkingen oplossende, geene andere bestaanbare waarden voor x, dan $x=1$ en $x=2$; bijgevolg kan men ook niet anders hebben, dan $y=1$ en $y=2$; maar nu blijkt uit de vergelijking $xy=2$ terstond, dat $x=1$ bij $y=2$, en $x=2$ bij $y=1$ behoort.

§ 262. Zijn de vergelijkingen van een stelsel zoodanig gesteld, dat men door eene regelmatige verandering van de letters, waardoor de onbekenden en bekenden zijn voorgesteld, hetzelfde stelsel behoudt, hoezeer door die verandering de eene vergelijking in de andere overgaat, dan zijn die vergelijkingen *symmetriek* ten opzigte van elkander; in dit geval verkeeren de vergelijkingen in § 260, van N°. 13 tot N°. 19 voorkomende. Verandert men, bij voorbeeld, in de vergelijkingen van N°. 19, x in y, y in z, z in x, a in b, b in c en c in a, dan zal men hetzelfde stelsel van vergelijkingen behouden hebben. Daar zulk eene verandering der letters het op te lossen stelsel niet verandert, zal die verandering van letters klaarblijkelijk in al de vergelijkingen mogen geschieden, die uit de gegevene zijn afgeleid, zoodat men, de waarde van ééne onbekende gevonden hebbende, door dergelijke verandering der letters, de waarden voor de andere onbekenden kan vinden. Men vindt, bij voorbeeld, uit de vergelijkingen in § 260, onder N°. 17 opgegeven,

$$x=\frac{2abc}{a'bc-ab'c+abc'};$$

daar nu het stelsel vergelijkingen hetzelfde blijft, als men x in y, y in z, z in x, a in b, b in c, c in a, a' in b', b' in c' en c' in a' verandert, zal men dezelfde verandering van letters in de vergelijking

$$x=\frac{2abc}{a'bc-ab'c+abc'}$$

mogen bewerkstelligen, en daardoor zal men vooreerst vinden

$$y=\frac{2abc}{b'ca-bc'a+bca'};$$

op de laatste vergelijking mag men nogmaals dezelfde verandering van letters toepassen, waardoor men verder vindt

$$z=\frac{2abc}{c'ab-ca'b+cab'}.$$

In deze laatste vergelijking mag men wel weder de letters veranderen, maar komt hierdoor op de reeds voor x gevondene waarde terug.

Over de onbepaalde vraagstukken, aanleiding gevende tot vergelijkingen met twee of meer onbekenden, die den eersten graad te boven gaan.

§ 263. Hetgeen in § 191 en § 204 over de onbepaaldheid van vraagstukken gezegd is, is geheel onafhankelijk van den graad der vergelijkingen, welke uit die vraagstukken voortvloeijen. Al gaan dus die vergelijkingen den eersten graad te boven, dan nog kan men, indien geene beperkende voorwaarden zulks verhinderen, voor sommige onbekenden, volgens § 197, willekeurige waarden nemen; maar dan zal het dikwijls gebeuren, dat men voor de andere onbekenden onmeetbare waarden, of zelfs onbestaanbare uitdrukkingen verkrijgt. In zulke gevallen wordt echter doorgaans gevorderd, dat al de onbekenden meetbare getallen zijn. Het voldoen aan deze beperkende voorwaarde, dat dikwijls niet eens mogelijk is, vereischt in elk geval bijzondere redeneringen en kunstgrepen, die geheel op den aard der zaak steunen. De verklaring van hetgeen te dezen aanzien kan verrigt worden, maakt een afzonderlijk gedeelte der stelkunst uit, dat men de *Analysis van* Diophantes, of het *rationaalmaken*, noemt. Het bestek dezer beginselen laat niet toe, over dit onderwerp in bijzonderheden te treden. Zie hier echter eenige zeer eenvoudige voorbeelden, om een denkbeeld te geven van de oplossing der hier bedoelde vraagstukken.

Vraagstuk. *Twee geheele positieve getallen te vinden, zoodanig, dat er 54 komt, als men bij hun product driemaal het grootste en tweemaal het kleinste getal optelt.*

Oplossing. Het grootste getal door x, en het kleinste door y voorstellende, moet men hebben

$$xy+3x+2y=54,$$

en hierin moeten x en y geheele getallen zijn; telt men bij elk lid dezer vergelijking 6 op, dan kan het voorste lid in twee factoren ontbonden worden, en men verkrijgt dus

$$(x+2)(y+3)=60.$$

Hieruit volgt, dat $x+2$ en $y+3$ twee factoren moeten zijn, waarin 60 moet kunnen ontbonden worden. Men kan nu 60 ontbinden in:

$$60\times1,\quad 30\times2,\quad 20\times3,\quad 15\times4,\quad 12\times5 \quad \text{of} \quad 10\times6;$$

dewijl $x>y$ moet wezen, kan $x+2$ niet kleiner dan $y+3$ zijn; men moet dus bij elke ontbinding den grootsten factor voor $x+2$, en den kleinsten voor $y+3$ nemen; maar zal y een positief getal zijn, dan kan men de drie eerste ontbindingen niet gebruiken; derhalve moet men hebben:

$x+2=15$ en $y+3=4$, waaruit volgt $x=13$ en $y=1$;
of $x+2=12$ en $y+3=5$, » » $x=10$ en $y=2$;
of $x+2=10$ en $y+3=6$, » » $x=8$ en $y=3$.

De begeerde getallen zijn dus 13 en 1, 10 en 2, of 8 en 3.

Vraagstuk. *Twee volkomene vierkanten in geheele getallen te vinden, waarvan het verschil 48 is.*

Oplossing. De begeerde getallen door x^2 en y^2 voorstellende, moet men hebben

$$x^2-y^2=48,$$

en hierin moeten x en y geheele getallen zijn. Voor deze vergelijking schrijvende

$$(x+y)(x-y)=48,$$

ziet men, dat vooreerst $x+y$ en $x-y$ twee factoren moeten zijn, waarin

48 moet kunnen ontbonden worden; ten andere ziet men, dat $x=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)$ en $y=\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{2}(x-y)$ geen geheele getallen zullen wezen, ten zij de factoren $x+y$ en $x-y$ gelijktijdig evene of onevene getallen zijn. Daar nu 48 kan ontbonden worden in 48×1, 24×2, 16×3, 12×4 en 8×6, kan men stellen:

$x+y=24$ en $x-y=2$, waaruit volgt $x=13$ en $y=11$;
of $x+y=12$ en $x-y=4$, » » $x=8$ en $y=4$;
of $x+y=8$ en $x-y=6$, » » $x=7$ en $y=1$.

De begeerde getallen zijn dus 169 en 121, 64 en 16, of 49 en 1.

Vraagstuk. *Voor x zulk een meetbaar getal te vinden, dat $3x^2+4$ een volkomen vierkant wordt.*

Oplossing. Hier moet aan de vergelijking $y=\sqrt{(3x^2+4)}$ voldaan worden, waarin y den wortel uit het begeerde vierkant voorstelt, en dus, zoowel als x, een meetbaar getal moet wezen. Uit de vergelijking is duidelijk, dat $y>2$ moet zijn; men kan dus $y=zx+2$ stellen, als wanneer z eene nieuwe onbekende is, die ook meetbaar moet wezen. De vergelijking gaat dan over in $(zx+2)=\sqrt{(3x^2+4)}$, en wordt na herleiding van den eersten graad ten opzigte van x; men kan dus dadelijk x uit dezelve oplossen, en verkrijgt dan

$$x=\frac{4z}{3-z^2} \text{ en } \sqrt{(3x^2+4)}=\sqrt{\left\{\frac{48z^2}{(3-z^2)^2}+4\right\}}=\frac{6+2z^2}{3-z^2};$$

neemt men dus voor z een willekeurig meetbaar getal, dan zullen ook x en $\sqrt{(3x^2+4)}$ meetbaar zijn. Zoo is, bij voorbeeld, voor $z=1$, $x=2$ en $\sqrt{(3x^2+4)}=4$.

Vraagstuk. *Twee volkomene vierkanten te vinden, waarvan de som insgelijks een vierkant is.*

Oplossing. De wortels der vierkanten door x, y en z voorstellende, moet men meetbare getallen voor deze onbekenden vinden, die voldoen aan de vergelijking $z^2=x^2+y^2$, of $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$. Omdat blijkbaar z grooter dan x is, kan men $z=x+\frac{p}{q}y$ stellen, waarin $\frac{p}{q}$ een onbekend meetbaar gebroken verbeeldt, aanwijzende welk gedeelte van y men bij x moet optellen, om z te verkrijgen. Hierdoor verandert de vergelijking in

$$\left(x+\frac{p}{q}y\right)^2=x^2+y^2.$$

Uit deze vergelijking y oplossende, vindt men

$$y=\frac{2pq}{q^2-p^2}x, \text{ en dus } z=\sqrt{\left\{x^2+\frac{4p^2q^2x^2}{(q^2-p^2)^2}\right\}}=\frac{q^2+p^2}{q^2-p^2}x.$$

Neemt men nu voor x, p en q willekeurige meetbare getallen, mits $p<q$, dan zal men voor y en z ook meetbare getallen verkrijgen, en deze zullen aan de vergelijking $z^2=x^2+y^2$ voldoen. Voor $x=1$, $p=1$ en $q=2$, vindt men $x=1$, $y=\frac{4}{3}$ en $z=\frac{5}{3}$; bij de proef blijkt dan ook, dat $\left(\frac{5}{3}\right)^2=1^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2$ is.

Begeert men voor x, y en z geheele getallen, dan kan men $x = q^2 - p^2$ nemen; hierdoor heeft men

$$x = q^2 - p^2, \quad y = 2pq \quad \text{en} \quad z = q^2 + p^2,$$

en dit zijn nu drie stelkunstige vormen, die, onafhankelijk van de getallenwaarden, welke men aan p en q wil geven, aan de vergelijking $z^2 = x^2 + y^2$ voldoen. Door voor p en q geheele getallen te nemen, zal men ook voor x, y en z geheele getallen verkrijgen.

Dit vraagstuk leert de zijden eens regthoekigen driehoeks in geheele getallen bepalen.

OVER DE LOGARITHMEN.

Eigenschappen der Logarithmen.

§ 264. Tot dusverre is nog van geene vergelijkingen gesproken, waarin zich eene onbekende als exponent bevindt. Niets verhindert echter, om ook zulke vergelijkingen aan te nemen, en naar de waarden der onbekenden te vragen, welke aan die vergelijkingen voldoen.

Laat $$y = a^x$$
eene dergelijke vergelijking met twee onbekenden x en y zijn, waarin a een gegeven positief getal, grooter dan 1, verbeeldt, dan zal men, om aan deze vergelijking te voldoen, voor eene der onbekenden, bij voorbeeld voor x, een willekeurig getal kunnen nemen, en daarna de getallenwaarde van de andere onbekende moeten bepalen. Indien men de willekeurig voor x te nemene waarden, van nul af, met geheele eenheden laat aangroeijen, dat is, indien men achtervolgens $x=0$, $x=1$, $x=2$ enz. neemt, dan zullen, omdat $a>1$ is, ook de waarden, die men voor y verkrijgt, dat is, $y=a^0=1$, $y=a^1=a$, $y=a^2$, enz. aangroeijen; laat men echter de voor x te nemene waarden, van nul af, met geheele eenheden afnemen, dat is, stelt men $x=0$, $x=-1$, $x=-2$ enz., dan zullen ook de waarden, die men voor y verkrijgt, dat is, $y=a^0=1$, $y=a^{-1}=\frac{1}{a}$, $y=a^{-2}=\frac{1}{a^2}$ enz. afnemen. Stelt men zich voor, dat x niet met geheele eenheden, maar langzamerhand aangroeit, en dus achtervolgens alle mogelijke waarden, van $x=0$ af tot $x=\infty$ toe, verkrijgt, dan zal ook y langzamerhand aangroeijen, en alle mogelijke waarden, van $y=a^0=1$ af tot $y=a^{\infty}=\infty$ toe, verkrijgen; stelt men zich even zoo voor, dat x langzamerhand van $x=0$ tot $x=-\infty$ afneemt, dan zal ook y langzamerhand, van $y=a^0=1$ tot $y=a^{-\infty}=\frac{1}{a^{\infty}}=0$ afnemen. Het is klaar, dat x in dien veranderlijken toestand, niet slechts alle geheele of gebrokene, maar ook alle onmeetbare waarden verkrijgt, en het is alleen, door zich een' expo-

nent in dien toestand voor te stellen, dat men een denkbeeld van onmeetbare exponenten kan verkrijgen.

In de vergelijking $y = a^x$, de getallen x en y in den opgegeven veranderlijken toestand beschouwende, wordt elke waarde van x de *logarithmus* genoemd van de overeenkomstige waarde van y, en omgekeerd noemt men y het *getal*, dat tot x als logarithmus behoort. Ofschoon hier y meer bijzonder »het getal« genoemd wordt, moet men wel opmerken, dat x, of de logarithmus van dat getal, ook niets anders dan een getal is, en wel een ander getal, dat van het eerste door de vergelijking $y = a^x$ afhangt.

De waarden van x, die voor eene zelfde waarde van a, tot alle verschillende waarden van y behooren, maken een *logarithmenstelsel* uit en het getal a wordt het *grondtal* van dat stelsel genoemd. Door verschillende waarden voor a te nemen, ontstaan er zooveel verschillende logarithmenstelsels, als men goedvindt. Wilde men echter $a = 1$ nemen, dan zou, voor alle waarden van x, $y = a^x = 1^x = 1$ zijn; voor $a = 1$ kan er dus geen logarithmenstelsel bestaan. Wilde men $a < 1$ nemen, dan zou men wel een logarithmenstelsel verkrijgen, maar dan zouden de logarithmen afnemen, als de getallen aangroeijen, en omgekeerd; daarom neemt men $a > 1$.

§ 265. Er zijn twee logarithmenstelsels in gebruik. Bij het eene, dat in de hoogere deelen der wiskunde gebruikt wordt, is a een onmeetbaar getal, tusschen 2 en 3 inliggende; de logarithmen van dat stelsel worden, naar hunnen uitvinder NEPER, de *Neperiaansche*, of ook wel de *hyperbolische* logarithmen genoemd. Bij het andere stelsel is $a = 10$ genomen, alzoo het een groot gemak aanbrengt, een logarithmenstelsel te gebruiken, waarvan het grondtal hetzelfde is als dat van het gewone talstelsel; de logarithmen van dit stelsel zijn het eerst door BRIGGS berekend, en worden diensvolgens de *Briggiaansche* of ook de *gewone* logarithmen genoemd.

§ 266. Volgens het gezegde is, in elk logarithmenstelsel, de logarithmus van een gegeven getal niets anders, dan de exponent van de magt, waartoe het grondtal van dat stelsel moet verheven worden, om het gegevene getal te verkrijgen. De gewone logarithmus van een gegeven getal is dus de exponent van de magt, waartoe men het getal 10 moet verheffen, om het gegevene getal te bekomen.

Om uit te drukken, dat een getal p de logarithmus is van een getal q, schrijft men $p = log.q$. Voor een stelsel, waarvan a het grondtal is, drukken dus, volgens de gegevene bepaling, de vergelijkingen

$$p = log.q \quad \text{en} \quad q = a^p$$

volkomen hetzelfde uit. Voor het gewone stelsel hebben even zoo de vergelijkingen

$$p = log.q \quad \text{en} \quad q = 10^p$$

volkomen dezelfde beteekenis.

§ 267. De logarithmen van elk willekeurig stelsel hebben de volgende eigenschappen:

1°. *De logarithmus van de eenheid is nul.*

Want stelt men in de vergelijkingen $p = log.q$ en $q = a^p$, dat $p = 0$ is, dan volgt uit dezelve $0 = log.q$ en $q = a^0 = 1$, dus ook $0 = log.1$.

2°. *De logarithmus van het grondtal des stelsels is de eenheid.*

Want in dezelfde vergelijkingen $p = 1$ stellende, komt er $1 = log.q$ en $q = a^1 = a$, waaruit volgt $1 = log.a$.

3°. *De logarithmus van een product is gelijk aan de som van de logarithmen der factoren; en de logarithmus van een quotient is gelijk aan den logarithmus van het deeltal, verminderd met den logarithmus des deelers.*

Want laat p en p' de logarithmen der getallen q en q' zijn, dan is, volgens de vorige §,

$$p = log.q, \quad p' = log.q', \quad q = a^p \quad \text{en} \quad q' = a^{p'};$$

door nu de beide laatste vergelijkingen met elkander te vermenigvuldigen en in elkander te deelen, vindt men

$$qq' = a^{p+p'} \quad \text{en} \quad \frac{q}{q'} = a^{p-p'},$$

dus is, volgens de bepaling der logarithmen,

$$p+p' = log.qq' \quad \text{en} \quad p-p' = log.\frac{q}{q'},$$

$$\text{of} \quad log.q + log.q' = log.qq' \quad \text{en} \quad log.q - log.q' = log.\frac{q}{q'};$$

wat den logarithmus van een gedurig product betreft, is het klaar, dat men even zoo hebben zal

$$log.q + log.q' + log.q'' = log.qq'q'',$$

enz.

4°. *De logarithmus van de n^{de} magt van een getal is gelijk aan n maal den logarithmus van dat getal; en de logarithmus van den n^{de} magtswortel uit een getal is gelijk aan het n^{de} gedeelte van den logarithmus van dat getal.*

Want zoo p de logarithmus van een getal q is, en men dus heeft

$$p = log.q \quad \text{en} \quad q = a^p,$$

vindt men, door magtsverheffing en worteltrekking,

$$q^n = a^{np} \quad \text{en} \quad \sqrt[n]{q} = a^{\frac{p}{n}};$$

dus is, volgens de bepaling der logarithmen, weder

$$np = log.q^n \quad \text{en} \quad \frac{p}{n} = log.\sqrt[n]{q}$$

$$\text{of} \quad n\ log.q = log.q^n \quad \text{en} \quad \frac{1}{n}\ log.q = log.\sqrt[n]{q}.$$

5°. *De logarithmen van een gebroken en deszelfs omgekeerde zijn even groot, maar verschillen in teeken.*

Want uit eene der reeds bewezene eigenschappen volgt terstond:

$$log.\frac{q}{q'} = log.q - log.q' = -(log.q' - log.q) = -log.\frac{q'}{q}.$$

6°. *De logarithmen van getallen grooter dan 1 zijn positieve getallen; de logarithmen van getallen kleiner dan 1 zijn negatieve getallen; en negatieve getallen hebben geene logarithmen.*

Want zoo men, in de vergelijking $y=a^x$, de exponent x, van 0 tot ∞, laat aangroeijen, groeit y van 1 tot ∞ aan, en zoo men x, van 0 tot $-\infty$, laat afnemen, neemt y van 1 tot 0 af, zonder dat y ooit negatief wordt.

7°. *De logarithmus van een oneindig groot getal is zelf oneindig groot, en de logarithmus van 0 is een oneindig groot negatief getal.*

Dit volgt onmiddellijk uit hetgéen zoo even, omtrent de overeenkomstige aangroeijingen in de vergelijking $y=a^x$, gezegd is.

Tot voorkoming van verkeerde begrippen, is het nuttig op te merken, dat de logarithmus van de som, of van het verschil van twee getallen, niet op eene dergelijke wijze, als de logarithmus van het product of quotient der getallen, in de afzonderlijke logarithmen der getallen zelven kan worden uitgedrukt. Voor den logarithmus van $a+b$ of $a-b$ schrijft men dus $log.(a+b)$, $log.(a-b)$, en voor deze logarithmen bestaan nu zulke ontwikkelingen niet, als voor $log.ab$ en $log.\frac{a}{b}$.

§ 268. De gewone logarithmen, die in het verder voor te dragene altijd stilzwijgend zullen bedoeld worden, hebben behalve de algemeene eigenschappen, die in de vorige § bewezen zijn, nog deze bijzondere eigenschappen:

1°. *De logarithmen van alle meetbare getallen moeten of geheele of onmeetbare getallen zijn, en kunnen dus nimmer meetbare breuken wezen.*

Want onderstelt men, dat $log.q$ een meetbaar, positief of negatief, gebroken is, dan zal men hebben $log.q = \frac{m}{n}$, of $log.q = -\frac{m}{n}$, waarin m en n geheele positieve en onderling ondeelbare getallen verbeelden; hieruit zal volgen

$$q = 10^{\frac{m}{n}} \quad \text{of} \quad q = 10^{-\frac{m}{n}}, \quad \text{dat is} \quad q = \sqrt[n]{10^m} \quad \text{of} \quad q = \frac{1}{\sqrt[n]{10^m}}.$$

Nu is 10^m de eenheid gevolgd van m nullen; de $n$demagtswortel uit zulk een getal kan alleen getrokken worden, indien dat aantal nullen een veelvoud van n is; dit is hier het geval niet, omdat m en n onderling ondeelbaar zijn; derhalve is $\sqrt[n]{10^m}$ en bijgevolg ook q onmeetbaar.

Uit de onderstelling, dat $log.q$ een meetbaar gebroken is, volgt alzoo, dat q onmeetbaar is; dus kan, indien q meetbaar is, $log.q$ geen meetbaar gebroken zijn.

2°. *Alle getallen, die door de eenheid, gevolgd van één of meer nullen, worden uitgedrukt, hebben geheele logarithmen; en alle andere geheele getallen hebben onmeetbare logarithmen.*

Want stelt men in de vergelijkingen $p = log.q$ en $q = 10^p$, die volgens § 266 hetzelfde beteekenen, achtervolgens $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$, *enz.*, dan zal men vinden

$$log.10 = 1,\ log.100 = 2,\ log.1000 = 3,\ log.10000 = 4,\ enz.$$

Voorts moeten de logarithmen van de andere getallen tusschen deze logarithmen 1, 2, 3, 4 *enz.* invallen; zij kunnen echter, volgens het zoo even betoogde, geene meetbare breuken zijn, en moeten dus onmeetbaar wezen.

Het is hierom, dat de logarithmen altijd in geheelen en tiendeeligen, en wel alle tot in evenveel decimalen naauwkeurig, berekend worden.

3°. *Het aantal geheelen, dat de logarithmus van een geheel getal bevat, is altijd ééne eenheid minder, dan het aantal cijfers, waaruit dat getal bestaat.*

Voor de getallen 10, 100, 1000, *enz.* is dit uit het zoo even gezegde duidelijk. Overigens liggen alle getallen van 1 cijfer tusschen 1 en 10, dus liggen hunne logarithmen tusschen $log.$ 1 en $log.$ 10, dat is, tusschen 0 en 1; de logarithmen der getallen van 1 cijfer bevatten dus 0 geheelen. Even zoo liggen de getallen van 2 cijfers tusschen 10 en 100, dus hunne logarithmen tusschen $log.10$ en $log.100$, dat is, tusschen 1 en 2; de logarithmen der getallen van 2 cijfers bevatten dus ééne geheele eenheid. Desgelijks liggen de getallen van 3 cijfers tusschen 100 en 1000, dus hunne logarithmen tusschen $log.100$ en $log.1000$, dat is, tusschen 2 en 3; de logarithmen der getallen van 3 cijfers bevatten dus 2 geheelen. En zoo vervolgens.

4°. *Wanneer een getal het tien- honderd- duizendvoud, enz. of het tiende, honderdste, duizendste gedeelte, enz. van een ander getal is, verschillen de logarithmen van die getallen alleen in de geheelen, maar niet in de decimalen; mits men de negatieve logarithmen in den vorm van een verschil schrijve, waarin de af te trekkene term een geheel getal is.*

Men heeft namelijk voor elk getal, volgens de eigenschappen der vorige §,

$$log.10^n A = log.A + log.10^n = log.A + n$$

en

$$log.\frac{A}{10^n} = log.A - log.10^n = log.A - n,$$

uit welke vergelijkingen, zoo men aanneemt, dat n een geheel getal is, het gestelde onmiddellijk volgt.

§ 269. Uit de laatstgenoemde eigenschappen blijkt, hoeveel gemak het aanbrengen moet, om het grondtal 10 van het gewone talstelsel te kiezen tot grondtal van het logarithmenstelsel, dat men gebruiken wil. Vooreerst weet men dadelijk, hoeveel geheelen de logarithmus van een geheel getal bevat, ten andere kan de logarithmus van een getal, dat uit geheelen en tiendeeligen, of alleen uit tiendeeligen bestaat, gevonden worden, indien men de logarithmen van de geheele getallen kent.

Wilde men, bij voorbeeld, den logarithmus van het getal 2345 kennen, dan weet men dadelijk, dat die logarithmus uit 3 geheelen en eene tiendeelige breuk bestaat; en wist men nu verder, dat $log. 2345 = 3,37014$ was, dan zou daaruit volgen:

$$
\begin{aligned}
log.\ 2345000 &= log.\ 2345 + log.\ 1000 = 3,37014+3 = 6,37014,\\
log.\ 234500 &= log.\ 2345 + log.\ 100 = 3,37014+2 = 5,37014,\\
log.\ 23450 &= log.\ 2345 + log.\ 10 = 3,37014+1 = 4,37014,\\
log.\ 234,5 &= log.\ 2345 - log.\ 10 = 3,37014-1 = 2,37014,\\
log.\ 23,45 &= log.\ 2345 - log.\ 100 = 3,37014-2 = 1,37014,\\
log.\ 2,345 &= log.\ 2345 - log.\ 1000 = 3,37014-3 = 0,37014,\\
log.\ 0,2345 &= log.\ 2345 - log.10000 = 3,37014-4 = 0,37014-1,\\
log.\ 0,02345 &= log.\ 2345 - log.100000 = 3,37014-5 = 0,37014-2.
\end{aligned}
$$

enz. *enz.*

§ 270. Een logarithmus, hetzij positief, hetzij negatief, kan, zoo als ten overvloede door het bovenstaande voorbeeld wordt opgehelderd, als de som van twee deelen worden aangezien, waarvan het eene een positief tiendeelig gebroken en het andere een positief of negatief geheel getal is; het laatstgenoemde deel wordt het *wijzergetal* of de *wijzer* van den logarithmus genoemd. Zoo is 4 de wijzer van $log.$ 23450; 0 de wijzer van $log.$2,345; —2 de wijzer van $log.$ 0,02345; *enz.*

Bij positieve logarithmen maken de geheelen van den logarithmus den wijzer uit; schrijft men echter negatieve logarithmen, niet in den vorm, die bij de vierde eigenschap van § 268 gevorderd is, dan missen zij niet alleen die eigenschap, maar dan zijn de geheelen, die zij bevatten, ook niet meer hunne wijzers. Zoo is, volgens het bovenstaande voorbeeld,

$$log.\ 0,02345 = 0,37014-2 = -1,62986;$$

maar de decimalen 62986 zijn niet meer dezelfde als die van $log.$ 2345, hoezeer 2345 het 100000 voud van 0,02345 is; en —1 is ook niet de wijzer van $log.$0,02345. Het is hierom verkiesselijk, de negatieve logarithmen in den genoemden vorm te schrijven; zelfs heeft men als maatregel van orde aangenomen, om dien vorm zoo te kiezen, dat het af te trekken getal altijd 10 is. Zoo schrijft men, bij voorbeeld,

$$log.0,02345 = 8,37014-10.$$

§ 271. Uit het aangevoerde volgen onmiddellijk deze

REGELS. 1°. *De wijzer van den logarithmus van een geheel getal, of van een getal, dat uit geheelen en tiendeeligen bestaat, is positief, en één minder dan het aantal cijfers, waardoor de geheelen van het getal worden uitgedrukt.*

2°. *De wijzer van den logarithmus van een tiendeelig gebroken is negatief, en even groot als het aantal nullen, waarmede dat tiendeelig gebroken begint, de nul der geheelen medere kenende.*

3°. *De logarithmus van een gegeven geheel getal is, op den wijzer na, gelijk aan den logarithmus van het getal, waarin het gegevene overgaat, door er één of meer nullen achter te plaatsen.*

4°. *De logarithmus van een gegeven geheel getal, dat op één of meer nullen eindigt, is, op den wijzer na, gelijk aan den logarithmus van het getal, waarin het gegevene overgaat, door één of meer van de achteraankomende nullen weg te laten. En*

5°. *De logarithmus van een gegeven getal, dat uit geheelen en tiendeeligen bestaat of alleen tiendeeligen bevat, is, op den wijzer na, gelijk aan den logarithmus van het geheele getal, waarin het gegevene door weglating der decimaalcomma overgaat.*

Aanwijzing, hoe uit de tafels de logarithmen, die tot gegevene getallen, en de getallen, die tot gegevene logarithmen behooren, gevonden worden.

§ 272. De logarithmen van de geheele getallen zijn berekend geworden, en in tafels gebragt, die men *Logarithmentafels* noemt. Hoe men deze berekening heeft kunnen bewerkstelligen, kan hier geen punt van onderzoek worden; alleen zij opgemerkt, dat de berekening van de logarithmen der ondeelbare getallen geschied zijnde, de logarithmen der deelbare getallen daaruit door optelling gevonden kunnen worden. Ook kunnen de logarithmen der ondeelbare getallen 2 en 5 uit elkander worden afgeleid. Zoo is, bij voorbeeld, volgens de bewezene eigenschappen,

$log.180 = log.(10 \times 2 \times 3^2) = log.10 + log.2 + log.3^2 = 1 + log.2 + 2 log.3$, of, omdat $log.5 + log.2 = log.2 \times 5 = log.10 = 1$, en dus $log.2 = 1 - log.5$ is,

$$log.180 = 2 - log.5 + 2\, log.3.$$

Om den logarithmus van 180 te kunnen berekenen, is het dus genoegzaam, de logarithmen van 2 en 3, of die van 5 en 3 te kennen.

Dewijl voorts uit de getallen zelven onmiddellijk blijkt, wat de wijzers van hunne logarithmen zijn, zijn in de meeste tafels die wijzers weggelaten, zoodat men er alleen de decimalen der logarithmen vindt opgegeven.

§ 273. Er zijn groote en kleine logarithmentafels; de kleine tafels, welker gebruik bij de volgende aanwijzingen en berekeningen ondersteld wordt, bevatten, met of zonder voorafgaande wijzers, de logarithmen der geheele getallen, hetzij van 1 tot 10000, hetzij van 1000 tot 10000. Men behoeft dus slechts de inrigting van zulk eene tafel te kennen, om de logarithmen van alle geheele getallen, die uit vier cijfers bestaan, onmiddellijk te kunnen vinden. Zoo is, bij voorbeeld:

$$log.8705 = 3{,}93977\,;\quad log.6810 = 3{,}83315\,;\quad log.7005 = 3{,}84541.$$

Kan een gegeven geheel getal, door bijvoeging of weglating van achteraankomende nullen, of een gegeven getal, dat uit tiendeeligen met of zonder voorafgaande geheelen bestaat, door weglating der decimaal-comma, in een geheel getal van vier cijfers veranderd worden, dan kan men, door toepassing der regels van § 271, den logarithmus van het gegevene getal nog onmiddellijk in de tafels vinden. Zie hier eenige voorbeelden van de toepassing dezer regels:

A. Voor een geheel getal van minder dan vier cijfers; dit komt alleen te pas, als de tafel, die men gebruikt, eerst met 1000 begint.

1°. Te vinden *log*.7. Van *log*.7 is de wijzer 0; men zoekt in de tafel *log*.7000, en vindt voor de decimalen van dien logarithmus 84510; *log*.7 en *log*.7000 verschillen alleen in den wijzer; alzoo is *log*.7 = 0,84510.

2°. Te vinden *log*.690. De wijzer is hier 2; men zoekt in de tafel *log*.6900, en vindt voor de decimalen 83885; derhalve is *log*.690 = 2,83885.

3°. Te vinden *log*.309. De wijzer is hier 2; men zoekt *log*.3090; en vindt voor de decimalen 48996; dus is *log*.309 = 2,48996.

B. Voor een getal van meer dan vier cijfers, op nullen eindigende.

4°. Te vinden *log*.876000. De wijzer is 5; de decimalen zijn die van *log*.8760, en dus volgens de tafel 94250; alzoo is *log*.876000 = 5,94250.

5°. Te vinden *log*.30080. De wijzer is 4; de decimalen zijn die van *log*.3008; deze in de tafel opzoekende, vindt men *log*.30080 = 4,47828.

C. Voor een getal, dat uit geheelen en tiendeeligen bestaat.

6°. Te vinden *log*.6,208. De wijzer is 0; *log*.6,208 en *log*.6208 verschillen alleen in den wijzer; men zoekt dus in de tafel *log*.6208, en vindt daardoor *log*. 6,208 = 0,79295.

7°, Te vinden *log*.50,09. De wijzer is 1; de decimalen zijn die van *log*.5009; men vindt derhalve *log*.50,09 = 1,69975.

D. Voor een tiendeelig gebroken, zonder geheelen.

8°. Te vinden *log*.0,205. De wijzer is —1, waarvoor men schrijven kan 9,00000—10; de decimalen zijn dezelfde als die van *log*.2050; men zoekt dus in de tafel *log*.2050, en vindt daardoor *log*.0,205 = 9,31175—10.

9°. Te vinden *log*.0,0003478. De wijzer is —4; de decimalen zijn die van *log*.3478; men vindt alzoo *log*.0,0003478 = 6,54133—10.

10°. Te vinden *log*.0,001. De wijzer is —3; de decimalen zijn die van *log*.1 of van *log*.1000, dat is: 00000; men heeft alzoo *log*.0,001 = 7,00000—10.

§ 274. De logarithmus van een geheel getal van vijf cijfers, waarvan de laatste geene nul is, kan niet onmiddellijk uit de tafel genomen worden. In dit geval, moet men den te vinden logarithmus tusschen die, welke in de tafel staan, *interpoleren*; daartoe neemt men vooreerst den logarithmus van het gegeven getal, als of de laatste cijfer eene nul ware, en berekent vervolgens, hoeveel deze logarithmus moet verhoogd worden, om tot het gegeven getal te behooren. Daarbij onderstelt men, dat de aangroeijingen van de getallen en van hunne logarithmen met elkander evenredig zijn. Deze onderstelling wijkt wel van de waarheid af, maar omdat men dezelve slechts uitstrekt over de niet groote aangroeijingen, waarmede de logarithmen elkander in de tafel opvolgen, is de afwijking van de waarheid te gering, dan dat zulks op de vijf decimalen, waarin de logarithmen uitgedrukt worden, invloed zou hebben. Voorts kan deze zelfde interpolatie ook nog gebruikt worden, om den logarithmus van een getal van zes cijfers zoo naauwkeurig te bekomen, als de tafel toelaat. Zie hier eenige voorbeelden:

1°. Te vinden *log*.23456. Men vindt, volgens de vorige §,

$$log.23450 = 4{,}37014 \quad \text{en} \quad log.23460 = 4{,}37033;$$

het verschil dezer beide getallen is 10, dat hunner logarithmen, in eenheden van den rang der laatste decimaalcijfer is 19. Nu zegt men: als het getal 23450 met 10 verhoogd wordt, wordt deszelfs logarithmus 19 der genoemde eenheden grooter; als dus 23450 met 6 verhoogd wordt, moet de logarithmus $\frac{6\times19}{10}$ zulke eenheden grooter worden. Van $\frac{6\times19}{10}$ is 11 de naaste geheele getallenwaarde; men voegt dus 11 bij 37014, en vindt daardoor $log.23456 = 4{,}37025.$

De waarde van $\frac{6\times19}{10}$ naauwkeuriger dan in het naaste geheele getal te berekenen, zou zonder beteekenis wezen, omdat men toch niet weet, wat de volgende cijfers van den logarithmus 4,37014 zijn zouden, indien de logarithmentafel tot in meer dan vijf decimalen berekend was.

2°. Te vinden *log*.81007. Men vindt vooreerst

$$log.81000 = 4{,}90849 \quad \text{en} \quad log.81010 = 4{,}90854;$$

men ziet hieruit, dat, het getal met 10 aangroeijende, de logarithmus, in eenheden der laatste decimaalcijfer, met 5 aangroeit; het getal met 7 aangroeijende, moet alzoo de logarithmus met $\frac{5\times7}{10}$ aangroeijen; voor deze breuk neemt men de naastbij komende geheele eenheden, en dus 4; deze 4 voegt men bij 90849, en vindt alzoo

$$log.81007 = 4{,}90853.$$

3°. Te vinden *log*.210247. Men vindt vooreerst

$$log.210200 = 5{,}32263 \quad \text{en} \quad log.210300 = 5{,}32284;$$

als hier het getal met 100 aangroeit, groeit de logarithmus in eenheden van het laatste cijfer met 21 aan; het getal met 47 aangroeijende, moet dus de logarithmus met $\frac{21\times47}{100}$ of 10 aangroeijen; alzoo is

$$log.210247 = 5{,}32273.$$

Omdat men bij deze interpolatiën telkens de verschillen van twee, in de tafel op elkander volgende, logarithmen noodig heeft, zijn deze verschillen in de tafel, naast de decimalen der logarithmen, afzonderlijk opgegeven.

Voor meer dan zes cijfers, kan de interpolatie geen nut aanbrengen, omdat de zevende cijfer van een getal geen' invloed meer hebben kan op de vijfde decimaal van deszelfs logarithmus. Gebruikt men dus de kleine tafels, dan moeten de zevende en volgende cijfers van de getallen, in het bepalen van de decimalen der logarithmen, verwaarloosd, of liever als nullen beschouwd worden.

§ 275. Gaat een gegeven geheel getal, dat op één of meer nullen eindigt, door weglating van die nullen; of een getal, dat uit tiendeeligen, met of zonder voorafgaande geheelen, bestaat, door weglating van de decimaalcomma, in een geheel getal van meer dan vier cijfers over, zoo wordt het vinden van deszelfs logarithmus, door de regels van § 271, tot de gevallen der vorige § teruggebragt. Moest, om een enkel voorbeeld te geven, de logarithmus van 160,807 gezocht worden, dan zou men vooreerst vinden

$$log.160,8 = 2,20629 \text{ en } log.160,9 = 2,20656\,;$$

hieruit blijkt, dat als het getal 160,8 met 0,1 wordt vermeerderd, deszelfs logarithmus 27 eenheden van den rang der laatste cijfer grooter wordt; wordt dus het getal 160,8 met 0,007 vermeerderd, dan moet de logarithmus $\frac{0,007 \times 27}{0,1}$ of 2 zulke eenheden grooter worden; derhalve is

$$log.160,807 = 2,20631.$$

Begeert men den logarithmus van een gewoon gebroken te vinden, dan kan men hetzelve, of eerst tot een tiendeelig gebroken herleiden, of de derde eigenschap van § 267 toepassen. Zoo is, bij voorbeeld:

$$log.\tfrac{1}{2} = log.0,5 = 9,69897-10,$$

of ook $\quad log.\frac{1}{2} = log.1 - log.2 = 0,-0,30103 = 9,69897-10.$

Terwijl men eindelijk, om den logarithmus van een gemengd getal te verkrijgen, hetzelve vooraf in geheelen en tiendeeligen zal moeten uitdrukken, of tot een gewoon gebroken herleiden, en daarna van de zoo even genoemde eigenschap gebruik maken.

§ 276. In § 269 is gebleken, dat alleen van de cijfers, waaruit een getal bestaat, en van de orde, waarin die cijfers op elkander volgen, de decimalen van den logarithmus van het getal afhangen, terwijl de wijzer alleen afhangt van de waarde, die het getal door den rang van deszelfs cijfers, heeft. Wanneer men derhalve in de tafels het getal wil zoeken, dat tot eenen gegevenen logarithmus behoort, zal men omgekeerd alleen de decimalen van den logarithmus noodig hebben, om de cijfers van het getal in hunne behoorlijke volgorde te vinden, terwijl men uit den wijzer van dien logarithmus zal moeten opmaken, wat de rang dier cijfers zijn moet. Is nu een logarithmus gegeven, en begeert men het getal, tot dien logarithmus behoorende, te vinden, dan zoekt men in de tafel de decimalen van dien logarithmus zoo na mogelijk op; staan de decimalen van den logarithmus juist in de tafel, dan vindt men de vier eerste cijfers van het begeerde getal, en kan voor de volgende slechts nullen nemen; staan de decimalen van den logarithmus niet juist in de tafel, dan neemt men de vier eerste cijfers van het getal, als of de decimalen van den gegevenen logarithmus de naastkleinere waren, die in de tafel staan, en bepaalt verder één of twee volgende cijfers, door te berekenen, hoeveel het genomene getal, op grond van hetgeen in § 274 gezegd is, zou moeten verhoogd worden, om tot den gegevenen logarithmus te behooren; meer dan twee cijfers kan men hierdoor niet berekenen, dewijl men in de meeste gevallen reeds op de naauwkeurigheid der zesde cijfer geen staat kan maken; zijn op deze wijze de cijfers van het getal gevonden, dan moet, naar aanleiding van den wijzer, bepaald worden, wat het getal zelf zijn moet. Voorts zij nog opgemerkt, dat men, om de decimalen van eenen gegevenen logarithmus zoo na mogelijk te vinden, in de tafels, waar de getallen van 1 tot 10000 voorkomen, alleen dat gedeelte der tafels gebruiken moet, hetwelk de getallen van 1000 tot 10000 bevat. Zie hier een paar voorbeelden:

1°. Het getal te vinden, dat 1,74958 tot logarithmus heeft.

Men zoeke in de tafel de decimalen 74958 zoo na mogelijk op; deze decimalen staan juist in de tafel, en worden gevonden bij het getal 5618; men kent dus nu de cijfers, in derzelver volgorde, waaruit het begeerde getal bestaat; daar voorts de wijzer 1 is, moet het getal 2 cijfers in geheelen bevatten, derhalve is

$$1{,}74958 = \mathit{log}.56{,}18.$$

2°. Het getal te vinden, bij den logarithmus 8,53803—10 behoorende.

Men vindt in de tafel de decimalen 53803 niet; maar wel 53794 en 53807, waartusschen 53803 inligt en waarbij de getallen 3451 en 3452 voorkomen; begeert men nu slechts vier cijfers in het gevraagde getal, dan neemt men voor die cijfers 3452, omdat 53803 digter bij 53807 dan bij 53794 komt; voorts blijkt uit den wijzer —2, dat het gevraagde getal een tiendeelig gebroken zijn moet, dat met twee nullen, waaronder die der geheelen begrepen is, begint; derhalve heeft men, slechts vier cijfers nemende,

$$8{,}53803-10 = \mathit{log}.0{,}03452.$$

Begeert men echter in het gevraagde getal een vijfde cijfer, dan ziet men uit de tafel, dat, als 53794 tot 53807 en dus met 13 aangroeit, het getal 3451 met 10 eenheden van den rang der begeerde cijfer toeneemt; hieruit volgt, dat als 53794 tot 53803 en dus met 9 aangroeit, het getal 3451 met $\frac{10\times 9}{13}$ of 7 zulke eenheden moet toenemen; bij de decimalen 53803 behoort dus het getal, dat uit de cijfers 34517 bestaat; den wijzer in aanmerking nemende, heeft men dus

$$8{,}53803-10 = \mathit{log}.0{,}034517.$$

Begeert men in het gevraagde getal zes cijfers, dan blijkt even zoo, dat, in evenredigheid van de aangroeijing van den logarithmus, het getal

3451 met $\frac{100\times9}{13}$ of 69 eenheden van den rang der zesde cijfer moet toenemen, waardoor men dan heeft

$$8,53803-10=log.0,0345169.$$

Op de naauwkeurigheid der alzoo verkregene zesde cijfer kan men doorgaans weinig rekenen, en het zou dus zonder beteekenis zijn, meer volgende cijfers op eene dergelijke wijze te bepalen.

§ 277. Wanneer men bij eenen gegevenen logarithmus het getal moet zoeken, en dit getal, naar aanleiding van den wijzer, een geheel getal van meer cijfers zou moeten zijn, dan men uit de tafel heeft kunnen bepalen, behooren die ontbrekende cijfers aangevuld te worden, door nullen achter de gevondene cijfers te schrijven; deze nullen vervangen alsdan de plaats van cijfers, die men niet kent, en ook door het gebruik der logarithmentafel niet vinden kan. Zoo zoude men, de voorbeelden der vorige § gebruikende, vinden

$$7,74958=log.56180000 \quad \text{en} \quad 10,53803=log.34516900000.$$

Indien dus deze logarithmen gegeven waren, zoude men alleen kunnen zeggen, dat de daarbij behoorende getallen, getallen zijn van acht en elf cijfers, waarvan men slechts eenige der eerste cijfers kent.

Wanneer eindelijk een gegeven negatieve logarithmus niet in den vorm geschreven was, die bij de vierde eigenschap, in § 268 opgegeven, gevorderd is, dan zou men dien logarithmus, alvorens het getal, dat daarbij behoort, in de tafel te kunnen opzoeken, in den genoemden vorm moeten schrijven. Was, bij voorbeeld, gegeven $log.x=-2,00732$, dan zou men schrijven $log.x=10-2,00732-10=7,99268-10$, en vervolgens in de tafel vinden $x=0,0098328$. Was gegeven $log.x=1,23456-4,33333$, dan zou men schrijven $log.x=-3,09877=10-3,09877-10=6,90123-10$, en vervolgens in de tafel vinden $x=0,00079658$.

Gebruik der logarithmen in berekeningen.

§ 278. Uit de derde en vierde eigenschap der logarithmen, in § 267 opgegeven, blijkt:

dat uit	$x=ab$,	volgt	$log.x=log.a+log.b$;
» »	$x=\frac{a}{b}$,	»	$log.x=log.a-log.b$;
» »	$x=a^n$,	»	$log.x=n.log.a$;
» »	$x=\sqrt[n]{a}$,	»	$log.x=\frac{1}{n}\,log.a$.

Moet nu, in een dezer vier gevallen, de getallenwaarde van x uit de gegevene getallenwaarden der overige letters berekend worden, dan kan men, in plaats van de vermenigvuldiging, deeling, magtsverheffing of worteltrekking op de gewone wijze uit te voeren, de noodige logarithmen der gegevene getallen in de tafel opzoeken, daaruit $log.x$ berekenen, en vervolgens weder in de tafel het getal x zoeken, dat tot *log.x* behoort. Hierdoor wordt dan elke vermenigvuldiging tot eene optelling, elke deeling tot eene aftrekking, elke magtsverheffing tot eene vermenigvuldiging en elke worteltrekking tot eene deeling teruggebragt. Zie hier voor elk dezer vier gevallen een voorbeeld tot opheldering; zijnde nevens de verklaringen dier voorbeelden aangewezen, hoe men gewoon is, de bewerkingen te plaatsen.

1°. Te vermenigvuldigen 32,91 met 0,21807; dat is, de waarde van $x = ab$ te vinden, als $a = 32{,}91$ en $b = 0{,}21807$ is.

Men zoeke in de tafel de logarithmen van 32,91 en van 0,21807, en telle deze logarithmen bij elkander op, dan vindt men den logarithmus van het begeerde product; dit product zelf wordt dus gevonden, door in de tafel het getal te zoeken, dat tot den laatstgenoemden logarithmus behoort.

$$\begin{aligned} log.x &= log.a + log.b \\ log.a &= 1{,}51733 \\ log.b &= 9{,}33860-10 \\ \hline log.x &= 10{,}85593-10 \\ \text{of } log.x &= 0{,}85593 \\ x &= 7{,}1768. \end{aligned}$$

Door de gegevene getallen werkelijk met elkander te vermenigvuldigen, zal men zien, dat de laatste cijfer reeds niet volkomen naauwkeurig is.

2°. Te deelen 0,758 door 1,983; dat is, de waarde van $x = a : b$ te berekenen, als $a = 0{,}758$ en $b = 1{,}983$ is.

Men zoeke in de tafel de logarithmen van 0,758 en van 1,983, en trekke den laatsten logarithmus van den eersten af, dan vindt men den logarithmus van het begeerde quotient; in de tafel het getal opzoekende, dat tot dezen logarithmus behoort, zal alzoo het begeerde quotient zelf gevonden zijn.

$$\begin{aligned} log.x &= log.a - log.b \\ log.a &= 9{,}87967-10 \\ log.b &= 0{,}29732 \\ \hline log.x &= 9{,}58235-10 \\ x &= 0{,}38225. \end{aligned}$$

3°. Tot de derde magt te verheffen 0,234; dat is, de waarde van $x = a^3$ te berekenen, $a = 0{,}234$ zijnde.

Men zoeke den logarithmus van 0,234, en vermenigvuldige dezen logarithmus met 3, dan vindt men den logarithmus der begeerde derde magt; deze derde magt wordt dus gevonden, door het getal in de tafel te zoeken, dat bij den laatsten logarithmus behoort.

$$\begin{aligned} log.x &= 3\ log.a \\ log.a &= 9{,}36922-10 \\ log.x &= 28{,}10766-30 \\ \text{of } log.x &= 8{,}10766-10 \\ x &= 0{,}012813. \end{aligned}$$

4°. Den vijfdemagtswortel uit 17 te trekken; dat is, de waarde van $x = \sqrt[5]{a}$ te berekenen, $a = 17$ zijnde.

Men zoeke in de tafel den logarithmus van 17, neme daarvan het vijfde gedeelte, en zoeke het getal, waarvan dit vijfde gedeelte de logarithmus is, dan zal dit getal de begeerde wortel zijn.

$$\begin{aligned} log.x &= \tfrac{1}{5}\ log.a \\ log.a &= 1{,}23045 \\ log.x &= 0{,}24609 \\ x &= 1{,}7623. \end{aligned}$$

§ 279. Wanneer tot eene deeling van twee getallen de aftrekking van derzelver logarithmen vereischt wordt, en, met voorbijgang van den term -10, die zich in den gewonen vorm der negatieve logarithmen bevindt, de af te trekken logarithmus het grootst mogt wezen, is men gewoon, bij den logarithmus, waarvan de aftrekking moet plaats hebben, vooraf den vorm $10-10$ op te tellen. Hierdoor verandert de waarde van den logarithmus niet, en men verkrijgt dan de rest der aftrekking altijd in zulk eenen vorm, dat in die rest slechts positieve decimalen voorkomen.

Zie hier drie voorbeelden met de bewerking:

1°. Te berekenen $x = \dfrac{21{,}874}{0{,}815}$.

$$\begin{aligned} log.21{,}874 &= 1{,}33993 = 11{,}33993-10 \\ log.\ 0{,}815 &= \ldots\ldots\ldots\ 9{,}91116-10 \\ \hline log.x &= 1{,}42877 \\ x &= 26{,}839. \end{aligned}$$

2°. Te berekenen $x = \dfrac{34567}{76543}$.

$$\begin{aligned} log.34567 &= 4{,}53866 = 14{,}53866-10 \\ log.76543 &= \ldots\ldots\ldots\ 4{,}88391 \\ \hline log.x &= 9{,}65475-10 \\ x &= 0{,}4516. \end{aligned}$$

3°. Te berekenen $x = \dfrac{0{,}08542}{0{,}25763}$.

$$\begin{aligned} log.0{,}08542 &= 8{,}93156-10 = 18{,}93156-20 \\ log.0{,}25763 &= \ldots\ldots\ldots\ 9{,}41100-10 \\ \hline log.x &= 9{,}52056-10 \\ x &= 0{,}33156. \end{aligned}$$

§ 280. Wanneer tot eene worteltrekking, de aanwijzer dier worteltrekking in eenen negatieven logarithmus, die in den gewonen vorm geschreven staat, moet gedeeld worden, is men gewoon, bij dezen logarithmus vooraf zulk eenen vorm $10-10$, $20-20$, $30-30$, enz. op te tellen, dat de negatieve term, dien men na de deeling in de uitkomst verkrijgt, -10 wordt. Zie hier een paar voorbeelden met de bewerking:

1°. Te berekenen $x = \sqrt[3]{0{,}05619}$.

$$\begin{aligned} log.0{,}05619 &= 8{,}74966-10 = 28{,}74966-30 \\ log.x = \tfrac{1}{3}\,log.0{,}05619 &= 9{,}58322-10 \\ x &= 0{,}38302. \end{aligned}$$

2°. Te berekenen $x = \sqrt[7]{0{,}6}$.

$$\begin{aligned} log.0{,}6 &= 9{,}77815-10 = 69{,}77815-70 \\ log.x = \tfrac{1}{7}\,log.0{,}6 &= 9{,}96831-10 \\ x &= 0{,}92963. \end{aligned}$$

§ 281. Wanneer men de waarde van eenen vorm te berekenen heeft, en daartoe niet slechts eene enkele vermenigvuldiging, deeling, magtsverheffing of worteltrekking, maar verscheidene dezer bewerkingen zou moeten verrigten, met uitsluiting echter van optellingen en aftrekkingen, dan kan men altijd, door achtervolgende toepassing van de derde en vierde eigenschap, in § 267 opgegeven, den logarithmus van den te berekenen vorm, in de logarithmen der gegevene getallen uitdrukken. Zoo zal, bij voorbeeld, uit $x = \frac{abc}{de}$ en $y = \frac{a\sqrt[3]{b}}{c^2\sqrt{d}}$ volgen

$$log.x = log.abc - log.de = log.a + log.b + log.c - (log.d + log.e),$$

en $$log.y = log.a\sqrt[3]{b} - log.c^2\sqrt{d} = log.a + log.\sqrt[3]{b} - (log.c^2 + log.\sqrt{d})$$
$$= log.a + \tfrac{1}{3}\,log.b - (2\,log.c + \tfrac{1}{2}\,log.d).$$

Men kan in zulke gevallen, even als in § 278, de logarithmen der gegevene getallen uit de tafel nemen, daaruit vervolgens den logarithmus van het te berekenen getal afleiden, en eindelijk dat getal zelf in de tafel opzoeken.

Om bij voorbeeld de waarde van $\frac{0{,}312\sqrt[4]{(812\sqrt[3]{0{,}8})^5}}{812\sqrt{(1{,}08 \times 3{,}14159)}}$ te berekenen, stelle men gemakshalve dien vorm door x, en de gegevene getallen door andere letters voor; zij dus $0{,}312 = a$, $812 = b$, $0{,}8 = c$, $1{,}08 = d$ en $3{,}14159 = \pi$, dan heeft men

$$x = \frac{a\sqrt[4]{(b\sqrt[3]{c})^5}}{b\sqrt{d\pi}};$$

hieruit volgt, door toepassing van de eigenschappen der logarithmen,

$$log.x = log.a\sqrt[4]{(b\sqrt[3]{c})^5} - log.b\sqrt{d\pi},$$

$$log.x = log.a + log.\sqrt[4]{(b\sqrt[3]{c})^5} - (log.b + log.\sqrt{d\pi}),$$

$$log.\sqrt[4]{(b\sqrt[3]{c})^5} = \tfrac{1}{4}log.(b\sqrt[3]{c})^5 = \tfrac{5}{4}log.b\sqrt[3]{c} = \tfrac{5}{4}(log.b + log.\sqrt[3]{c}) = \tfrac{5}{4}(log.b + \tfrac{1}{3}log.c),$$

$$log.\sqrt{d\pi} = \tfrac{1}{2}\,log.d\pi = \tfrac{1}{2}(log.d + log.\pi),$$

en dus $$log.x = log.a + \tfrac{5}{4}(log.b + \tfrac{1}{3}\,log.c) - [log.b + \tfrac{1}{2}(log.d + log.\pi)],$$

of $$log.x = log.a + \tfrac{1}{4}\,log.b + \tfrac{5}{12}\,log.c - \tfrac{1}{2}(log.d + log.\pi),$$

welke zelfde uitkomst nog gemakkelijker verkregen wordt, indien men, alvorens tot logarithmen over te gaan, de herleiding

$$x = \frac{a\sqrt[4]{(b\sqrt[3]{c})^5}}{b\sqrt{d\pi}} = \frac{ab^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{12}}}{b(d\pi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ab^{\frac{1}{4}}c^{\frac{5}{12}}}{(d\pi)^{\frac{1}{2}}}$$

bewerkstelligt. Om nu de waarde van x te berekenen, heeft men, overeenkomstig de voor $log.x$ gevondene uitdrukking, deze bewerking:

$$log.a = 9{,}49415 - 10$$

$log.b = 2{,}90956$; $\quad \tfrac{1}{4}\,log.b = 0{,}72739$

$log.c = 9{,}90309 - 10$; $\quad 5\,log.c = 49{,}51545 - 50$

of $5\,log.c = 119{,}51545 - 120$; $\quad \tfrac{5}{12}\,log.c = 9{,}95962 - 10$

opt. $0{,}18116$

$log.d = 0{,}03342$

$log.\pi = 0{,}49715$

$log.d + log.\pi = 0{,}53057$; $\quad \tfrac{1}{2}(log.d + log.\pi) = 0{,}26528$

aft.

$$log.x = 9{,}91588 - 10$$

$$x = 0{,}82392.$$

§ 282. Komen in eenen vorm, welks waarde berekend moet worden, ééne of meer optellingen of aftrekkingen voor, dan kan men den logarithmus van dien vorm niet in de logarithmen der gegevene getallen uitdrukken; dit blijkt uit hetgeen reeds aan het slot van § 267 is opgemerkt. Zijn nu de op te tellen en af te trekken getallen onmiddellijk gegeven, dan moeten die optellingen en aftrekkingen verrigt worden, alvorens men de logarithmen gebruiken kan, en hierdoor wordt de bewerking niet lastiger. Zijn echter de getallenwaarden der op te tellen en af te trekken termen niet onmiddellijk gegeven, dan kan men wel de waarden van die termen, door het gebruik der logarithmen, even als in de vorige § berekenen, maar dan moet men voor elk dier termen van de logarithmen tot de getallen terugkeeren, ten einde de optellingen en aftrekkingen van die getallen zelven te kunnen verrigten; daarna kan men op nieuw de logarithmen gebruiken, om de berekening voort te zetten.

Heeft men, bij voorbeeld, te berekenen $x = \sqrt{(a+b)}$, dan moet men eerst a en b optellen en daarna x berekenen door de formule $log.x = \frac{1}{2}\,log.(a+b)$, zoodat hier het overgaan tot logarithmen en het terugkeeren tot het getal, dat bij eenen logarithmus behoort, maar éénmaal plaats heeft.

Heeft men echter te berekenen $x = \sqrt{(a^2+b^2)}$, dan is ook wel $log.x = \frac{1}{2}\,log.(a^2+b^2)$, maar dit kan tot de berekening niet baten, zoolang men a^2 en b^2 niet berekend heeft; derhalve moet men eerst a^2 en b^2 door de formulen $log.a^2 = 2\;log.a$ en $log.b^2 = 2\;log.b$ berekenen, vervolgens deze berekende waarden van a^2 en b^2 optellen en eindelijk de waarde van x door de formule $log.x = \frac{1}{2}\,log.(a^2+b^2)$ berekenen; hierbij is men dan driemaal van getallen tot logarithmen overgegaan en van logarithmen tot getallen teruggekeerd.

Een vorm wordt ongeschikter voor de logarithmen genoemd, naargelang de berekening van dien vorm meermalen vereischt, dat men van eenen logarithmus tot deszelfs getal terugkeere. Alleen de vormen, waarbij dit slechts éénmaal, en dat is dan aan het einde der berekening, behoeft te geschieden, worden volkomen geschikt voor de logarithmen genoemd.

De vormen, waarvan in de vorige § gesproken is, bezitten deze volkomene geschiktheid. Om door een voorbeeld te doen zien, hoe de berekening afloopt bij vormen, die deze volkomene geschiktheid missen, strekke de volgende berekening van $x = \frac{\sqrt[3]{(a^2b-c^2d)}}{\sqrt{(a^2b+c^2d)}}$, $a = 12{,}748$, $b = 3{,}408$, $c = 114$ en $d = 0{,}01$ zijnde. Hier heeft men de formulen

$$log.x = \tfrac{1}{3}\,log.(a^2b-c^2d) - \tfrac{1}{2}\,log.(a^2b+c^2d),$$

$$log.a^2b = 2\,log.a + log.b \quad \text{en} \quad log.c^2d = 2\,log.c + log.d,$$

en men zal dus met behulp der tafels vinden:

$$\begin{array}{rl} log.a = & 1,10544 \\ 2\,log.a = & 2,21088 \\ log.b = & 0,53250 \\ & \text{opt.} \\ log.a^2b = & 2,74338 \\ a^2b = & 553,84 \\ c^2d = & 129,96 \\ & \text{aft.} \\ a^2b-c^2d = & 423,88 \\ log.(a^2b-c^2d) = & 2,62724; \\ log.(a^2b+c^2d) = & 2,83493; \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} log.c = & 2,05690 \\ 2\,log.c = & 4,11380 \\ log.d = & 8,00000-10 \\ & \text{opt.} \\ log.c^2d = & 2,11380 \\ c^2d = & 129,96 \\ a^2b = & 553,84 \\ & \text{opt.} \\ a^2b+c^2d = & 683,80 \\ \frac{1}{3}\,log.(a^2b-c^2d) = & 0,87575 \\ \frac{1}{2}\,log.(a^2b+c^2d) = & 1,41747 \\ & \text{aft.} \\ log.x = & 9,45828-10 \\ x = & 0,28726. \end{array}$$

§ 283. Behalve dat het altijd raadzaam is, de vormen, welker waarde berekend moet worden, vooraf tot hunne eenvoudigste gedaante te herleiden, kunnen doorgaans zulke vormen, die voor de logarithmen niet zeer geschikt zijn, door eene of andere herleiding geschikter voor dezelve gemaakt worden. Te dien einde behoeft men slechts hetgeen tot hiertoe verklaard is, met een weinig oordeel te gebruiken.

Is, b. v., gegeven $x=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$, dan schrijve men $x=\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{(a+c)(a-c)}}$; in deze laatste gedaante is de vorm volkomen geschikt voor de logarithmen, want men heeft nu dadelijk

$$log.x=\tfrac{1}{2}\left\{log.(a+b)+log.(a-b)-[log.(a+c)+log.(a-c)]\right\}.$$

Is gegeven $x=\sqrt{(a^2+b^2)}$, dan schrijve men $x=a\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}$; in de eerste gedaante zou deze vorm drie afzonderlijke berekeningen: eene voor a^2, eene voor b^2, en daarna eene voor x vereischen; in de tweede gedaante behoeft men slechts twee afzonderlijke berekeningen: eene voor $\frac{b^2}{a^2}$, en daarna nog eene voor x te doen; de tweede gedaante is dus voor de logarithmen geschikter dan de eerste.

Is gegeven $x=\sqrt{(a^2b^2-c^2d^2)}$, dan kan men wel $x=\sqrt{(ab+cd)(ab-cd)}$ schrijven, maar dit maakt de formule niet geschikter voor de logarithmen; men schrijve dus hier $x=ab\sqrt{\left(1-\frac{c^2d^2}{a^2b^2}\right)}$, of $x=cd\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2d^2}-1\right)}$, waardoor men weder ééne afzonderlijke berekening minder heeft.

Zie hier nog, hoe het voorbeeld, in de vorige § behandeld, voor eene geschiktere berekening vatbaar is. Men heeft

$$x=\frac{\sqrt[3]{(a^2b-c^2d)}}{\sqrt{(a^2b+c^2d)}}=\frac{\sqrt[3]{a^2b\left(1-\frac{c^2d}{a^2b}\right)}}{\sqrt{a^2b\left(1+\frac{c^2d}{a^2b}\right)}}=\frac{\sqrt[3]{\left(1-\frac{c^2d}{a^2b}\right)}}{\sqrt{\left(1+\frac{c^2d}{a^2b}\right)}\sqrt[6]{a^2b}};$$

stellende gemakshalve $\frac{c^2d}{a^2b} = y$, dan is $x = \frac{\sqrt[3]{(1-y)}}{\sqrt{(1+y)}\sqrt[6]{a^2b}}$, alzoo

$$log.y = 2\ log.c + log.d - (2\ log.a + log.b)$$

en $$log.x = \tfrac{1}{3}\ log.(1-y) - [\tfrac{1}{2}\ log.(1+y) + \tfrac{1}{3}\ log.a + \tfrac{1}{6}\ log.b],$$

zoodat de berekening wordt als volgt:

$log.c = 2{,}05690$

$2\ log.c = 4{,}11380$

$log.d = 8{,}00000-10$ opt.

$2\ log.c + log.d = 12{,}11380-10$

$log.a = 1{,}10544$

$2\ log.a = 2{,}21088$

$log.b = 0{,}53250$ opt.

$2\ log.a + log.b = 2{,}74338$

$2{,}74338$ aft.

$log.y = 9{,}37042-10$

$y = 0{,}23465.$

$1-y = 0{,}76535$; $log.(1-y) = 9{,}88386-10$; $\tfrac{1}{3}log.(1-y) = 9{,}96129-10$

$1+y = 1{,}23465$; $log.(1+y) = 0{,}09155$; $\tfrac{1}{2}log.(1+y) = 0{,}04578$

$log.a = 1{,}10544$; $\tfrac{1}{3}log.a = 0{,}36848$

$log.b = 0{,}53250$; $\tfrac{1}{6}log.b = 0{,}08875$ opt.

$0{,}50301$ aft.

$log.x = 9{,}45828-10$

$x = 0{,}28726.$

§ 284. Zijn vermenigvuldigers of deelers kleine getallen, dan zou het klaarblijkelijk overtollige moeite wezen, om de logarithmen, tot het uitvoeren van zulk eene vermenigvuldiging of deeling te gebruiken. Moet, bij voorbeeld, $x = 250(1+\frac{1}{25})^{20}$ berekend worden, dan kan men de deeling van 1 door 25 dadelijk uitvoeren, en alzoo schrijven $x = 250(1{,}04)^{20}$; men zal dan hebben $log.x = log.250 + 20\ log.1{,}04$, waaruit men x gemakkelijk kan berekenen.

Moeten daarentegen logarithmen met groote getallen vermenigvuldigd, of er door gedeeld worden, dan kan men het omslagtige van zulke bewerkingen weder door het gebruik der logarithmen ontwijken, maar dan komt men in het geval, om logarithmen van logarithmen te moeten nemen. Heeft men, bij voorbeeld, te berekenen $x = \sqrt[p]{a^q}$, dan is

$$log.x = \frac{q}{p}\ log.a;$$

zijn nu p en q groote getallen, dan neemt men weder de logarithmen van de beide leden der laatste vergelijking, en vindt daardoor

$$log.log.x = log.log.a + log.q - log.p;$$

heeft men verder volgens deze vergelijking $log.log.x$ berekend, en zoekt men in de tafel het getal tot $log.log.x$ behoorende, dan zal dit getal $log.x$ zijn; om x te vinden, moet men dus in de tafel weder het getal zoeken, dat tot $log.x$ behoort. Zie hier een voorbeeld in getallen, ter berekening der waarde van $x = \sqrt[p]{a^q}$, $a = 25$, $p = 3450$ en $q = 3179$ zijnde:

$$log.a = 1,39794; \quad log.log.a = 0,14549$$
$$log.q = 3,50229$$
$$\overline{} \text{ opt.}$$
$$3,64778$$
$$log.p = 3,53782$$
$$\overline{} \text{ aft.}$$
$$log.log.x = 0,10996$$
$$log.x = 1,28812$$
$$x = 19,414.$$

§ 285. **Het kan gebeuren**, dat men, ter berekening van de waarde van eenen vorm, den voorgeschreven' weg volgende, den logarithmus van een negatief getal zou moeten nemen; negatieve getallen hebben echter, zoo als reeds vroeger gezegd is, geene logarithmen. De zwarigheid, die hierdoor zou ontstaan, wordt ontweken, door op te merken, dat de teekens der factoren, die in teller of noemer van den te berekenen' vorm voorkomen, alleen op den positieven of negatieven toestand, maar geenszins op de hoegrootheid der getallenwaarde van dien vorm invloed hebben. Om dus de waarde van zulk eenen vorm te vinden, kan men van de logarithmen gebruik maken, even als of die factoren positief waren, mits men slechts daarna uit de teekens der factoren bepale, of de verkregene waarde positief of negatief moet wezen. Heeft men, bij voorbeeld, te berekenen $x = \frac{a^2-b^2}{c} = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$, en is in dezen vorm $b>a$, dan is $a-b$ een negatieve factor; berekent men dus de waarde van x, als of $a-b$ positief ware, dan zal men de alzoo voor x gevondene waarde negatief moeten nemen.

In zulke gevallen kan men, door op te merken, dat, p een negatief getal zijnde, $-p$ een positief getal is, en dus $log.(-p)$ in de tafels zal kunnen gezocht worden, den opgegeven' vorm in logarithmen overbrengen, zonder tot logarithmen van negatieve getallen te vervallen. Men kan, bij voorbeeld, in plaats van

$$x = \frac{(a+b)(a-b)}{c} \quad \text{en} \quad log.x = log.(a+b) + log.(a-b) - log.c,$$

$$-x = \frac{(a+b)(b-a)}{c} \quad \text{en} \quad log.(-x) = log.(a+b) + log.(b-a) - log.c$$

schrijven. Is nu $a>b$, dan komen in de eerste, maar is $a<b$, dan komen in de tweede formule, geene logarithmen van negatieve getallen voor.

Tot voorbeeld van eene berekening, waarbij men, den gewonen weg volgende, tot den logarithmus van een negatief getal (en wel van eenen negatieven logarithmus) zou vervallen, stelle men zich voor, de waarde te berekenen van $x = \sqrt[p]{a^q}$, $a = 0,25$, $p = 3450$ en $q = 3179$ zijnde.

Hier heeft men $$log.x = \frac{q}{p}\, log.a\,;$$

Omdat nu $a<1$ is, is $log.a$ negatief, en dus kan van $log.a$ geen logarithmus genomen worden; men schrijft alzoo in plaats van de laatste

vergelijking $$-log.x = \frac{q}{p}\,(-log.a)\,;$$

nu van de leden dezer vergelijking de logarithmen nemende, heeft men
$$log.(-log.x) = log.(-log.a) + log.q - log.p\,,$$
en volgens deze laatste vergelijking heeft men dan de volgende bewerking:

$$\begin{array}{ll}
log.a = 9{,}39794-10 = -0{,}60206\,; & log.(-log.a) = 9{,}77964-10 \\
-log.a = 10-9{,}39794 = \;\;0{,}60206\,; & log.q = 3{,}50229 \\
& \overline{\hspace{4em}}\ \text{opt.} \\
& 13{,}28193-10 \\
& log.p = 3{,}53782 \\
& \overline{\hspace{4em}}\ \text{aft.} \\
& log.(-log.x) = 9{,}74411-10 \\
& -log.x = 0{,}55476 \\
& log.x = -0{,}55476 = 9{,}44524-10 \\
& x = 0{,}27877.
\end{array}$$

Gebruik der logarithmen tot het oplossen van exponentiale vergelijkingen.

§ 286. Door *exponentiale* vergelijkingen verstaat men zulke, waarin eene onbekende als exponent voorkomt, of waarin een exponent de onbekende bevat. De eenvoudige exponentiale vergelijking $a = 10^x$, waarin a een gegeven positief getal verbeeldt, is door de zamenstelling der logarithmentafels eens en voor altijd opgelost, want de waarde van x is die, welke men in de tafels voor $log.a$ vindt.

Is eene andere exponentiale vergelijking herleidbaar tot den vorm $A = B^x$, waarin A en B positieve getallen of stelkunstige vormen voorstellen, die uit bekenden zijn zamengesteld, en eene positieve waarde hebben, dan kan de oplossing van die vergelijking terstond tot de oplossing der vergelijking $a = 10^x$, dat is: tot het nemen der logarithmen van bekende getallen, teruggebragt worden; want, omdat gelijke getallen gelijke logarithmen hebben, volgt uit

$$A = B^x,\quad log.A = log.B^x,\quad log.A = x\,log.B \ \text{ en }\ x = \frac{log.A}{log.B},$$

zoodat nu x in de bekenden is uitgedrukt.

Wil men, om de laatste deeling uit te voeren de logarithmen gebruiken, dan heeft men nog
$$log.x = log.log.A - log.log.B.$$

Tot een voorbeeld, waarbij men met zulk eene exponentiale vergelijking te doen heeft, strekke de oplossing van het volgende

VRAAGSTUK. *Hoeveel jaren moet een kapitaal, tegen 4 ten 100 's jaars op zamengestelden interest staan, eer de waarde van dat kapitaal verdubbeld is?*

OPLOSSING. Omdat de interest van elken gulden 4 cents in het jaar bedraagt, zal elke gulden gedurende een geheel jaar 1,04 gulden waardig geworden zijn. Om alzoo de waarde van het kapitaal bij het einde van elk jaar te vinden, zal men deszelfs waarde bij het begin van dat jaar met 1,04 moeten vermenigvuldigen. Zij nu A het uit te zetten kapitaal, dan is deszelfs waarde, na verloop van één jaar, $(1,04)A$, na verloop van 2 jaren, $(1,04)^2A$; na verloop van 3 jaren, $(1,04)^3A$, en in het algemeen, na verloop van n jaren, $(1,04)^nA$. Stelt men dus, dat het kapitaal A gedurende x jaren moet uitgezet worden, om eene dubbele waarde te verkrijgen en dus 2A te worden, dan heeft men de vergelijking $(1,04)^xA = 2A$ of, door A deelende, en de logarithmen nemende,

$$(1,04)^x = 2, \quad x\,log.1,04 = log.2 \quad \text{en} \quad x = \frac{log.2}{log.1,04},$$

zoodat x gevonden wordt, als men $log.2$ door $log.1,04$ deelt. Om deze deeling te verrigten, kan men de logarithmen gebruiken, en heeft dus

$$log.x = log.log.2 - log.log.1,04,$$

waaruit met behulp der tafels de volgende bewerking voortvloeit:

$$\begin{array}{ll} log.2 \quad = 0,30103; & log.log.2 \quad = 9,47861-10 \\ log.1,04 = 0,01703; & log.log.1,04 = 8,23121-10 \\ & \overline{} \text{ aft.} \\ & \quad log.x = 1,24740 \\ & \qquad x = 17,68 \end{array}$$

Omdat de vergelijking $(1,04)^x = 2$ opgemaakt is in de onderstelling, dat x een geheel getal jaren is, kan men uit deze uitkomst alleen besluiten, dat het kapitaal langer dan 17 en korter dan 18 jaren op interest moet staan; begeert men het gedeelte van het 18de jaar te kennen, dat bij de eerste 17 jaren moet gevoegd worden, om de vraag volledig te beantwoorden, dan merke men op, dat het kapitaal A in 17 jaren aangroeit tot $(1,04)^{17}A$, dat de interest hiervan gedurende het 18de jaar $0,04 \times (1,04)^{17}A$ en dus gedurende $\frac{1}{p}$ deel van dat jaar $\frac{0,04 \times (1,04)^{17}A}{p}$ is, en dat men alzoo heeft de vergelijking

$$(1,04)^{17}A + \frac{0,04 \times (1,04)^{17}A}{p} = 2A, \text{ waaruit volgt } p = \frac{0,04 \times (1,04)^{17}}{2-(1,04)^{17}} = \frac{779}{524},$$

zoodat het kapitaal $17 + \frac{1}{p} = 17\frac{524}{779}$ jaren op zamengestelden interest staan moet, om in waarde te verdubbelen.

§ 287. Mogten, in de vergelijking $A = B^x$, A en B beide of een van beide negatief zijn, dan kan het gebruik der logarithmen niet dienen, om de waarde van x te vinden, omdat negatieve getallen geene logarithmen hebben. In zulke gevallen is er dan ook gewoonlijk geene waarde voor de onbekende bestaanbaar.

Zijn echter A en B beide of een van beide kleiner dan 1, en bijgevolg *log*.A en *log*.B beide of een van beide negatief, dan kan men in de berekening het nemen van de logarithmen dier negatieve logarithmen, op dezelfde wijze als in § 285, ontwijken. Zie hier een paar voorbeelden:

1°. De waarde van x te vinden uit $(0,032)^x = 12$.

Hier is $x\ log.0{,}032 = log.12$ en $x = \frac{log.12}{log.0{,}032}$;

Omdat *log*.0,032 negatief is, schrijft men, in plaats van de laatste vergelijking $-x = \frac{log.12}{-log.0{,}032}$,

en nu weder de logarithmen nemende, bekomt men

$$log.(-x) = log.log.12 - log.(-log.0{,}032).$$

Overeenkomstig deze vergelijking heeft men dus de volgende bewerking:

$log.12 = 1{,}07918$ $\qquad log.log.12 = 0{,}03309$

$log.0{,}032 = 8{,}50515-10 = -1{,}49485;$ $\qquad log.(-log.0{,}032) = 0{,}17460$ aft.

$log.(-x) = 9{,}85849-10$

$x = -0{,}72192.$

2°. De waarde van x te vinden uit $(0{,}02)^x = 0{,}03$.

Hier is $x\ log.0{,}02 = log.0{,}03$, $x = \frac{log.0{,}03}{log.0{,}02} = \frac{-log.0{,}03}{-log.0{,}02}$,

dus $log.x = log.(-log.0{,}03) - log.(-log.0{,}02)$,

en men kan, overeenkomstig deze laatste vergelijking, de bewerking verrigten, zonder eenige zwarigheid te ontmoeten.

§ 288. Is eene gegevene exponentiale vergelijking, niet tot den vorm $A = B^x$, maar wel tot den vorm $A = B^X$ herleidbaar, waarin X een stelkunstige vorm verbeeldt, die uit bekenden en eene onbekende x is zamengesteld, terwijl weder A en B positieve bekende waarden hebben, dan kan men, even als in § 286, uit die vergelijking afleiden $log.A = X\ log.B$, en zal dus de onbekende x kunnen vinden, indien slechts die onbekende in de uitdrukking X zoodanig voorkomt, dat de oplossing der vergelijking $log.A = X\ log.B$ geene zwarigheden oplevert. Zie hier eenige voorbeelden:

1°. De vergelijking $a^{(b^x)} = c$ ten opzigte van x op te lossen.

Van de beide leden der vergelijking de logarithmen nemende, heeft men vooreerst $b^x\ log.a = log.c$; nu nogmaals de logarithmen nemende, verkrijgt men $x\ log.b + log.log.a = log.log.c$, waaruit volgt

$$x = \frac{log.log.c - log.log.a}{log.b}.$$

2°. De vergelijking $a^{2x}+b=a^x$ ten opzigte van x op te lossen.

Men kan voor deze vergelijking schrijven $a^{2x}-a^x+b=0$, en dezelve dan aanzien als eene vierkantsvergelijking, waarin a^x de onbekende is, hierdoor vindt men

$$a^x=\tfrac{1}{2}+\sqrt{(\tfrac{1}{4}-b)} \quad \text{en} \quad a^x=\tfrac{1}{2}-\sqrt{(\tfrac{1}{4}-b)},$$

en elk dezer vergelijkingen kan men verder volgens § 286 behandelen.

3°. De waarde van x te vinden uit de vergelijking $a\dfrac{b-1}{b^x-1}=\dfrac{c}{b^{x-1}}$.

Men herleide de vergelijking als volgt:

$$a(b-1)b^{x-1}=c(b^x-1),$$
$$ab^x-ab^{x-1}=cb^x-c,$$
$$c=cb^x-ab^x+ab^{x-1},$$
$$c=(bc-ab+a)b^{x-1},$$
$$c=[bc-a(b-1)]b^{x-1},$$
$$\frac{c}{bc-a(b-1)}=b^{x-1},$$

en stelle vervolgens de logarithmen van elk der leden aan elkander gelijk, dan vindt men

$$log.c-log.[bc-a(b-1)]=(x-1)log.b,$$

waaruit dadelijk volgt

$$x-1=\frac{log.c-log.[bc-a(b-1)]}{log.b}$$

of
$$x=\frac{log.c-log.[bc-a(b-1)]}{log.b}+1.$$

§ 289. Wanneer in eene vergelijking een of meer exponenten voorkomen, die de onbekende bevatten, en deze vergelijking niet tot de bovengenoemde vormen $A=B^x$ of $A=B^X$ herleidbaar is, kan de waarde van die onbekende ook niet door de verklaarde leerwijze gevonden worden.

Zoo zal men, bij voorbeeld, de waarde van x, uit de vergelijking $4^x+x=10$ niet regtstreeks kunnen bepalen. Door beproeving ziet men echter dadelijk, dat het eerste lid dezer vergelijking voor $x=1$ kleiner dan 10, en voor $x=2$ grooter dan 10 wordt, men besluit dus, dat er voor x eene waarde tusschen 1 en 2 is, die aan de vergelijking voldoet; begeert men die waarde nader te kennen, dan beproeft men $x=\frac{3}{2}$, en ziet, dat voor $x=\frac{3}{2}$ het eerste lid kleiner dan 10 wordt, men besluit dus, dat de juiste waarde van x tusschen $\frac{3}{2}$ en 2 ligt; beproeft men dus $x=\frac{7}{4}$, dan vindt men, dat het eerste lid grooter dan 10 wordt, en besluit dus, dat de waarde van x tusschen $\frac{3}{2}$ en $\frac{7}{4}$ moet vallen, en hiermede kan men voortgaan, om telkens naauwere grenzen voor x te vinden, tot dat deze grenzen minder van elkander verschillen, dan de graad van naauwkeurigheid, waarin men x berekend wil hebben; alsdan zal men eene dezer grenzen, of liever nog eene gemiddelde waarde tusschen deze grenzen, voor de waarde van x kunnen nemen.

OVER DE REKEN- EN MEETKUNSTIGE REEKSEN.

§ 290. Door eene *rekenkunstige reeks* verstaat men eene rij van getallen, die met gelijke verschillen opklimmen of afdalen. Zoo is, bij voorbeeld,

3, 7, 11, 15, 19, 23, *enz.* eene opklimmende,
en 97, 91, 85, 79, 73, 67, *enz.* eene afdalende

reeks. De getallen, waaruit zulk eene reeks bestaat, noemt men derzelver *termen*, en het getal, dat men bij elken term moet voegen, om den daaropvolgenden term te verkrijgen, noemt men het *verschil* der reeks.

Den eersten term a en het verschil v noemende, zal men elke rekenkunstige reeks, zoo wel eene afdalende, als eene opklimmende, in het algemeen kunnen voorstellen door

$$a,\ a+v,\ a+2v,\ a+3v,\ a+4v,\ a+5v,\ enz.;$$

zullende de alzoo voorgestelde reeks opklimmende of afdalende zijn, naargelang v positief of negatief is.

In elken term is de coëfficiënt van v één minder, dan het getal, dat aanwijst de hoeveelste term het is, de n^{de} term zal dus zijn $a+(n-1)v$, zoodat men, dezen term door t voorstellende, heeft

$$t=a+(n-1)v,$$

en deze uitdrukking wordt de *algemeene term* eener rekenkunstige reeks genoemd, omdat men, door achtervolgens $n=1$, $n=2$, $n=3$, *enz.* te nemen, den 1^{sten}, 2^{den}, 3^{den} *enz.* term der reeks zal verkrijgen. Indien a en v gegeven zijn, kan men dus eenen willekeurigen term der reeks vinden, zonder dat het noodig zij, al de vorige termen uit te schrijven.

Om, bij voorbeeld, den 15^{den} term van elk der bovenstaande reeksen te vinden, heeft men:

in de eerste, $a=3$, $v=4$, en dus voor $n=15$, $t=3+14.4=59$,
in de tweede, $a=97$, $v=-6$, en dus voor $n=15$, $t=97-14.6=13$;

de 15^{de} term der eerste reeks is dus 59, en die van de tweede is 13.

§ 291. Wanneer men van eene rekenkunstige reeks een bepaald aantal, bij voorbeeld n, termen neemt, zal de laatste term tevens de n^{de} zijn, zoodat men, dien laatsten term l noemende, zal hebben

$$l=a+(n-1)v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha).$$

Even als men uit elken term, door er v bij optetellen, den volgenden vindt, kan men ook, door er v af te trekken, den voorgaanden vinden. Kent men dus den laatsten term en het verschil, dan kan men de termen der reeks, van achteren af aan beginnende, uitschrijven. Eene reeks van n termen kan dus algemeen worden voorgesteld door

$$a,\ a+v,\ a+2v,\ a+3v,\ enz.\ a+(n-4)v,\ a+(n-3)v,\ a+(n-2)v,\ a+(n-1)v,$$

of door

$$a,\ a+v,\ a+2v,\ a+3v,\ enz.\quad l-3v,\quad l-2v,\quad l-v,\quad l.$$

Op welke dezer beide wijzen men de reeks wil voorstellen, blijkt er terstond uit, dat de som der uiterste termen gelijk is aan de som van elke twee andere termen, die even ver van de uiterste afstaan. Is het aantal termen der reeks oneven, dan is er een middelste term; het getal $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$ drukt dan uit de hoeveelste term dit is, bijgevolg wordt die middelste term voorgesteld door $a+(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}-1)v=a+\frac{1}{2}(n-1)v$, en is dus gelijk aan de halve som der beide uiterste termen.

§ 292. Om de som eener rekenkunstige reeks van n termen te vinden, stelle men die som door s voor, dan is:

$$s=a+(a+v)+(a+2v)+(a+3v)+enz.\,.+(l-3v)+(l-2v)+(l-v)+l,$$

of $s=l+(l-v)+(l-2v)+(l-3v)+enz.\,.+(a+3v)+(a+2v)+(a+v)+a.$

Door optelling dezer beide vergelijkingen, vindt men

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+(a+l)+enz.\,.+(a+l)+(a+l)+(a+l)+(a+l);$$

omdat de reeks uit n termen bestaat, komt in het tweede lid der laatste vergelijking n maal $a+l$ voor, derhalve is

$$2s=n(a+l) \text{ of } s=\frac{1}{2}n(a+l) \ldots\ldots\ldots (\beta).$$

De som der reeks wordt dus gevonden, door de som der uiterste termen te vermenigvuldigen met de helft van het aantal termen.

Wil men, bij voorbeeld, de som van de 15 eerste termen vinden der reeksen, die in het begin van § 290 zijn opgegeven, dan heeft men:

voor de eerste, $a=3$, $l=59$, $n=15$, en dus $s=\frac{15}{2}(3+59)=465$,

voor de tweede, $a=97$, $l=13$, $n=15$, en dus $s=\frac{15}{2}(97+13)=825$.

§ 293. De vraagstukken, die men zich omtrent de rekenkunstige reeksen voorstelt, komen gewoonlijk daarop neder, dat men, van de vijf grootheden s, v, a, l en n, drie gegeven zijnde, eene der beide andere moet bepalen. Elimineert men beurtelings a, l en n tusschen (α) en (β), dan zal men vinden:

$$s=ln-\frac{1}{2}n(n-1)v \ldots\ldots\ldots (\gamma),$$

$$s=an+\frac{1}{2}n(n-1)v \ldots\ldots\ldots (\delta),$$

en

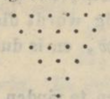
$$2vs=(l-a+v)(l+a) \ldots\ldots\ldots (\varepsilon),$$

zoodat men de vijf vergelijkingen (α), (β), (γ), (δ) en (ε) heeft, in elk van welke eene der grootheden s, v, a, l en n ontbreekt; men behoeft dus, in elk geval, uit deze vijf vergelijkingen slechts diegene te kiezen, waarin de drie gegevene grootheden en de te vindene voorkomen, en daaruit deze laatste op te lossen.

Daar zich in elk dezer vergelijkingen vier grootheden bevinden, die ieder op hare beurt als onbekende kunnen voorkomen, is het klaar, dat men twintig zulke verschillende vraagstukken zal kunnen opgeven.

Tot een enkel voorbeeld diene het volgende

VRAAGSTUK. *Een aantal kogels zijn in de gedaante van eenen gelijkzijdigen driehoek gerangschikt, zoo als in de onderstaande figuur is aangewezen; indien men nu weet, hoeveel er in elke zijde liggen, begeert men het geheele aantal kogels te vinden.*



OPLOSSING. Stel, dat er a kogels in elke zijde des driehoeks en x kogels in den geheelen driehoek liggen, dan is uit de figuur duidelijk, dat x de som is der rekenkunkunstige reeks 1, 2, 3, 4, *enz.* tot en met a. De eerste term dezer reeks is 1, de laatste a en het aantal termen insgelijks a; men heeft dus, volgens de formule (β), terstond

$$x = \tfrac{1}{2}a(a+1).$$

Voor $a=100$, zou $x=50\times101=5050$ zijn. Lagen er dus 100 kogels in elke zijde, dan zou de geheele driehoek 5050 kogels bevatten.

§ 294. Door eene *meetkunstige reeks*, verstaat men zulk eene rij van getallen, waarvan ieder evenveel malen in het daarop volgend getal begrepen is, zoo als, bij voorbeeld,

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ enz.$$

of

$$128,\ 96,\ 72,\ 54,\ 40\tfrac{1}{2},\ 30\tfrac{3}{8},\ enz.;$$

in de eerste dezer reeksen is elke term 2 maal, en in de tweede is elke term $\frac{3}{4}$ maal in den onmiddellijk volgenden begrepen. Het getal, dat aanwijst hoe dikwijls elke term in den volgenden begrepen is, wordt de *reden* der reeks genoemd. Naargelang de reden grooter of kleiner dan 1 is, is de reeks eene opklimmende of afdalende. In de eerste der twee bovenstaande reeksen is de reden 2, dus is de reeks eene opklimmende; in de tweede reeks is de reden $\frac{3}{4}$, die reeks daalt dus af.

Den eersten term a, en de reden r noemende, zal men elke meetkunstige reeks, in het algemeen, kunnen voorstellen door

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ ar^5,\ enz.$$

In elken term is de exponent van r één minder dan het getal, dat aanwijst de hoeveelste term het is; den n^{den} of algemeenen term door t voorstellende, zal men dus hebben

$$t = ar^{n-1}.$$

Indien a en r gegeven zijn, kan men dus eenen willekeurigen term der reeks vinden, zonder dat het noodig zij, al de voorgaande termen uit te schrijven.

Om, bij voorbeeld, den tienden term van elk der bovenstaande reeksen te vinden, heeft men:

in de eerste, $a=3$, $r=2$, en dus, voor $n=10$, $t=3.2^9=1536$,

in de tweede, $a=128$, $r=\frac{3}{4}$, en dus, voor $n=10$, $t=128.(\frac{3}{4})^9=9\frac{1251}{2048}$.

De tiende term der eerste reeks is dus 1536, en die der tweede is $9\frac{1251}{2048}$.

§ 295. Wanneer men van eene meetkunstige reeks een bepaald aantal, bij voorbeeld n, termen neemt, zal de laatste term tevens de n^{de} zijn, zoodat men, dien laatsten term l noemende, zal hebben

$$l = ar^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

Even als men uit elken term, door denzelven met r te vermenigvuldigen, den volgenden term vindt, kan men ook, door er r in te deelen, den voorgaanden term vinden. Kent men dus den laatsten term en de reden, dan kan men de reeks, van achteren af aan beginnende, uitschrijven. Eene meetkunstige reeks van n termen kan dus algemeen worden voorgesteld door

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ enz. \ldots\ldots ar^{n-4},\ ar^{n-3},\ ar^{n-2},\ ar^{n-1},$$

of door

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ enz. \ldots\ldots \frac{l}{r^3},\ \frac{l}{r^2},\ \frac{l}{r},\ l.$$

Op welke dezer beide wijzen men de reeks wil voorstellen, blijkt er terstond uit, dat het product der uiterste termen gelijk is aan het product van elke twee andere termen, die even ver van de uiterste afstaan. Is het aantal termen der reeks oneven, dan is er een middelste term; het getal $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$ drukt dan uit de hoeveelste term dit is; bijgevolg wordt die middelste term voorgesteld door $ar^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}-1} = ar^{\frac{1}{2}(n-1)}$, en dezelve is dus gelijk aan den vierkantswortel uit het product der beide uiterste termen.

§ 296. Om de som eener meetkunstige reeks van n termen te vinden, stelle men die som door s voor, dan is

$$s = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \text{enz.} \ldots\ldots\ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1},$$

of $s = a(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \text{enz.} \ldots\ldots\ldots + r^{n-2} + r^{n-1})$;

daar nu uit de formule (29) van § 49, door in die formule $x = 1$ en $y = r$ te stellen, blijkt, dat

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \text{enz.} \ldots\ldots + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{r^n-1}{r-1}$$

is, heeft men

$$s = a.\frac{r^n-1}{r-1}, \quad \text{of} \quad s = a.\frac{1-r^n}{1-r} \ldots\ldots\ldots (\beta),$$

door welke formule men de som der reeks berekenen kan, indien de eerste term, de reden en het aantal termen gegeven zijn. Men is gewoon, deze formule in de eerste of tweede gedaante te schrijven, naargelang r grooter of kleiner dan 1 is.

Wil men, bij voorbeeld, de som van de tien eerste termen vinden der reeksen, die in het begin van § 294 zijn opgegeven, dan heeft men:

voor de eerste, $a = 3$, $r = 2$, $n = 10$, en dus $s = 3.\frac{2^{10}-1}{2-1} = 3069$,

voor de tweede, $a = 128$, $r = \frac{3}{4}$, $n = 10$, en dus $s = 128.\frac{1-(\frac{3}{4})^{10}}{1-\frac{3}{4}} = 483\frac{343}{2048}$.

§ 297. De vraagstukken, die men zich omtrent de meetkunstige reeksen voorstelt, komen gewoonlijk daarop neder, dat men, van de vijf grootheden s, l, a, n en r drie gegeven zijnde, eene der beide andere moet bepalen. Elimineert men beurtelings a, n en r tusschen (α) en (β), dan zal men vinden:

$$l(r^n-1) \quad = s(r^n-r^{n-1}) \ldots\ldots\ldots (\gamma),$$
$$r(s-l) \quad = s-a \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta),$$
$$l(s-l)^{n-1} = a(s-a)^{n-1} \ldots\ldots\ldots (\varepsilon);$$

zoodat men de vijf vergelijkingen (α), (β), (γ), (δ) en (ε) heeft, in elk van welke eene der grootheden s, l, a, n en r ontbreekt. Men kan dus, in elk geval, even zoo handelen, als in § 293 ten aanzien der rekenkunstige reeksen gezegd is. Ook hier is in de opgegevene formulen de oplossing van twintig verschillende vraagstukken begrepen, waarvan sommige niet zonder behulp der logarithmen kunnen opgelost worden, terwijl sommige andere tot hoogeremagtsvergelijkingen zullen voeren.

§ 298. Men kan een gebroken $\frac{p}{q}$, waarvan de teller kleiner dan de noemer is, altijd tot eene zoo hooge magt verheffen, dat de uitkomst kleiner wordt, dan het kleinste gebroken $\frac{t}{u}$, dat men zou willen opgeven; want stelt men zich voor, n zoodanig te bepalen, dat $\left(\frac{p}{q}\right)^n < \frac{t}{u}$ worde, dan moet $\left(\frac{q}{p}\right)^n > \frac{u}{t}$ zijn. Hieruit volgt, dat men dan ook zal moeten hebben

$$n.log.\frac{q}{p} > log.\frac{u}{t}, \quad \text{of} \quad n(log.q-log.p) > log.u-log.t.$$

Daar nu, volgens de onderstelling, $q>p$, dus ook $log.q>log.p$, en $log.q-log.p$ positief is, zal men, de laatste ongelijkheid door $log.q-log.p$ deelende, vinden
$$n > \frac{log.u-log.t}{log.q-log.p}.$$
Neemt men alzoo n groot genoeg, om aan deze voorwaarde te voldoen, dan zal $\left(\frac{p}{q}\right)^n < \frac{t}{u}$ zijn. Hieruit volgt verder, dat men n zoo groot zal kunnen nemen, dat $\left(\frac{p}{q}\right)^n$ minder dan eenige te gevene waarde van nul verschilt.

§ 299. Uit hetgeen in de vorige § is aangetoond, volgt, dat men van eene afdalende meetkunstige reeks altijd zooveel termen zal kunnen nemen, dat r^n minder dan eenige te gevene waarde van nul verschilt, en dus ook de som der reeks minder dan eenige te gevene waarde van

$$s = a.\frac{1}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$

Deze laatste uitdrukking is dus eene limiet, waartoe de som van eene afdalende meetkunstige reeks onophoudelijk nadert, indien men meer en meer termen van die reeks neemt, doch welke limiet die som nimmer zal kunnen bereiken, hoeveel termen men ook nemen mag. Gewoonlijk drukt men dit uit, door te zeggen, dat $s=\frac{a}{1-r}$ de som van een oneindig aantal termen der reeks is.

Voor de som van een oneindig aantal termen der afdalende reeks, in § 294 opgegeven, zal men vinden

$$s=\frac{a}{1-r}=\frac{128}{1-\frac{3}{4}}=512.$$

Hoeveel termen men ook van die reeks neemt, zal de som der reeks altijd kleiner dan 512 blijven, maar door een genoegzaam aantal termen te nemen, zal men die som zoo nabij 512 kunnen brengen, als men goedvindt.

§ 300. Neemt men de logarithmen van de termen der algemeene meetkunstige reeks

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ enz.,$$

dan verkrijgt men

$log.a$, $log.a+log.r$, $log.a+2log.r$, $log.a+3log.r$, $log.a+4log.r$, *enz.*; waaruit nog deze merkwaardige eigenschap blijkt, dat wanneer eenige getallen eene meetkunstige reeks uitmaken, de logarithmen dezer getallen eene rekenkunstige reeks zullen daarstellen, zoodanig, dat de logarithmus van de reden der meetkunstige reeks het verschil is van de rekenkunstige reeks.

BEREKENING DER KOGELSTAPELS.

§ 301. Bij de artillerie worden de kogels, bommen en granaten in regelmatige stapels geplaatst. Er zijn drieërlei soort van stapels in gebruik, als: 1°. de vierhoekige piramidale, waarvan het grondvlak een vierkant is; 2°. de driehoekige piramidale, waarvan het grondvlak een gelijkzijdige driehoek is, en 3°. de langwerpige, waarvan het grondvlak een regthoek is. Het is van belang, dat men wete te berekenen, hoeveel kogels zulk een stapel bevat, indien men slechts geteld heeft, hoeveel er in de zijden van het grondvlak liggen.

De formulen, die tot deze berekening kunnen dienen, worden gemakkelijk gevonden, indien men de som van de vierkanten der natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, *enz.*, tot en met n kent. Om deze som te vinden, stelle men zich aanvankelijk voor, de som te vinden van de vierkanten der termen eener rekenkunstige reeks, indien de eerste term, het verschil en het aantal termen gegeven zijn.

Laat hiertoe $\qquad a,\ b,\ c,\ d,\ enz.\ .\ .\ .\ h,\ k,\ l$
zulk eene reeks van n termen verbeelden, welker verschil v is, dan telle men de n volgende vergelijkingen bij elkander op, te weten:

$$(a+v)^3 = a^3+3a^2v+3av^2+v^3,$$
$$(b+v)^3 = b^3+3b^2v+3bv^2+v^3,$$
$$(c+v)^3 = c^3+3c^2v+3cv^2+v^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(h+v)^3 = h^3+3h^2v+3hv^2+v^3,$$
$$(k+v)^3 = k^3+3k^2v+3kv^2+v^3,$$

en
$$(l+v)^3 = l^3+3l^2v+3lv^2+v^3;$$

omdat, volgens de eigenschappen der rekenkunstige reeksen,

$$a+v=b,\ b+v=c,\ c+v=d,\ enz.\ .\ .\ .\ .\ .\ h+v=k,\ k+v=l,$$

en dus het eerste lid van elke vergelijking gelijk is aan den eersten term van het tweede lid der daarop volgende vergelijking, kan men bij die optelling deze gelijke termen dadelijk weglaten, en verkrijgt dan voor de som der vergelijkingen,

$$(l+v)^3 = a^3+3(a^2+b^2+c^2+..+h^2+k^2+l^2)v+3(a+b+c+..+h+k+l)v^2+nv^3;$$

Stelt men nu $a^2+b^2+c^2+\ldots+h^2+k^2+l^2=x$, en $a+b+c+\ldots+h+k+l=s$, dan heeft men
$$(l+v)^3 = a^3+3xv+3sv^2+nv^3,$$
waaruit terstond gevonden wordt
$$x = \frac{(l+v)^3-3sv^2-(nv^3+a^3)}{3v};$$
zijn dus a, v en n gegeven, dan zal men door deze formule x, of de som van de vierkanten der termen kunnen berekenen, indien men slechts vooraf l en s berekent, door de in § 291 en 293 opgegevene formulen
$$l = a+(n-1)v \quad \text{en} \quad s = an+\tfrac{1}{2}(n-1)v.$$

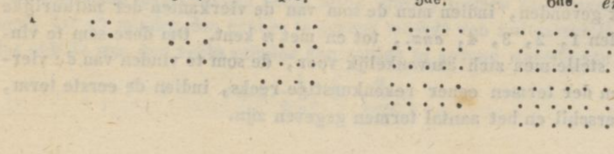
De som van de vierkanten der natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, *enz.*, tot en met n, en ook de som dier getallen zelven, zal uit de bovenstaande formulen gevonden worden, door $a=1$ en $v=1$ te nemen; men verkrijgt dan $l=n$, $s=\frac{1}{2}n(n+1)$, en na behoorlijke herleiding $x=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; derhalve is

$$1+2+3+4+\text{enz.}\ .\ .\ .\ .+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

en
$$1^2+2^2+3^2+4^2+\text{enz.}\ .\ .\ .\ .+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

§ 302. De achtervolgende lagen, die een vierhoekige piramidale kogelstapel bevat, worden, van den top naar het grondvlak voortgaande, aldus voorgesteld:

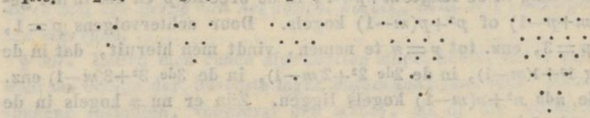
1ste. 2de. 3de. 4de. 5de. 6de. *enz.*



Het is hieruit klaar, dat, uit hoeveel lagen de stapel ook bestaan mag, elke zijde van het grondvlak altijd evenveel kogels bevat, als er lagen zijn. Liggen er dus n kogels in elke zijde van het grondvlak, dan zijn er ook n lagen, en het geheele aantal kogels van den stapel is dan klaarblijkelijk de som der getallen 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, *enz.* tot en met n^2, zoodat men, dit geheele aantal kogels door S voorstellende, volgens de vorige § hebben zal $\quad S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

§ 303. De achtervolgende lagen, die een driehoekige piramidale stapel bevat, worden, van den top naar het grondvlak voortgaande, aldus voorgesteld:

1ste. 2de. 3de. 4de. 5de. 6de. *enz.*



Hier zijn klaarblijkelijk ook altijd evenveel lagen, als er kogels in elke zijde van het grondvlak liggen, terwijl in het algemeen de p^{de} laag een driehoek is, welks zijden p kogels bevatten. Alzoo liggen er, volgens het vraagstuk van § 293, in de p^{de} laag $\frac{1}{2}p(p+1)$ of $\frac{1}{2}(p^2+p)$ kogels. Neemt men dus achtervolgens $p=1$, $p=2$, $p=3$, $p=4$, enz. tot $p=n$, dan vindt men: dat er in de 1ste laag $\frac{1}{2}(1^2+1)$, in de 2de laag $\frac{1}{2}(2^2+2)$, in de 3de laag $\frac{1}{2}(3^2+3)$, in de 4de laag $\frac{1}{2}(4^2+4)$ enz., en eindelijk in de n^{de} laag $\frac{1}{2}(n^2+n)$ kogels liggen. Bevat nu elke zijde des grondvlaks n kogels, dan zijn er ook n lagen, zoodat men, het geheele aantal kogels van den stapel S noemende, zal hebben

$$S=\tfrac{1}{2}(1^2+1)+\tfrac{1}{2}(2^2+2)+\tfrac{1}{2}(3^2+3)+\tfrac{1}{2}(4^2+4)+ \textit{enz.}\ .\ +\tfrac{1}{2}(n^2+n),$$

of $\quad S=\frac{1}{2}\left\{(1^2+2^2+3^2+4^2+ \textit{enz.}\,.\,+n^2)+(1+2+3+4+ \textit{enz.}\,,\,+n)\right\}$;

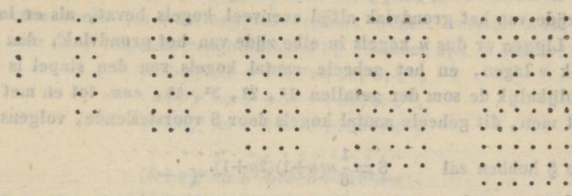
hierin voor $1^2+2^2+3^2+$ *enz.* $.+n^2$ en voor $1+2+3+$ *enz.* $.+n$ de in § 301 gevondene uitdrukkingen substituerende, verkrijgt men

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\},$$

of, na herleiding, $\quad S=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

§ 304. Bij den langwerpigen kogelstapel, bestaat de bovenste laag niet, zoo als bij de piramidale stapels, uit een' enkelen kogel, maar uit eene rij van kogels, die men den rug van den stapel noemt; van dezen rug naar het grondvlak voortgaande, kan men de lagen aldus voorstellen:

1ste. 2de. 3de. 4de. 5de. 6de. *enz.*



zijnde in deze figuren het bijzondere geval genomen, dat er vijf kogels in den rug liggen. Hoeveel kogels er echter in den rug mogen liggen, bevat altijd elke laag, en in de lengte en in de breedte, één kogel meer dan de voorgaande laag. Liggen er dus m kogels in den rug, dan bevat de p^{de} laag in de lengte $m+p-1$, in de breedte p en dus in het geheel $p(m+p-1)$ of $p^2+p(m-1)$ kogels. Door achtervolgens $p=1$, $p=2$, $p=3$, enz. tot $p=n$ te nemen, vindt men hieruit, dat in de 1ste laag $1^2+1(m-1)$, in de 2de $2^2+2(m-1)$, in de 3de $3^2+3(m-1)$ enz. en in de n^{de} $n^2+n(m-1)$ kogels liggen. Zijn er nu n kogels in de kortste zijde des grondvlaks, dan zijn er ook n lagen, en men heeft dus, weder door S het geheele aantal kogels van den stapel voorstellende,

$$S=1^2+1(m-1)+2^2+2(m-1)+ \textit{ enz.} \ldots . +n^2+n(m-1),$$

of $S=(1^2+2^2+3^2+ \textit{ enz.} \ldots . +n^2)+(1+2+3+ \textit{ enz.} \ldots +n)(m-1)$;

hierin voor $1^2+2^2+3^2+ \textit{ enz.} \ldots . +n^2$, en voor $1+2+3+ \textit{ enz.} \ldots +n$ weder de in § 301 gevondene uitdrukkingen stellende, verkrijgt men

$$S=\frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}\,n(n+1)(m-1),$$

of, na behoorlijke herleiding,

$$S=\frac{1}{6}\,n(n+1)(3m+2n-2).$$

§ 305. Dewijl de p^{de} laag van den langwerpigen stapel in de lengte $m+p-1$ kogels bevat, zal de n^{de} laag, dat is het grondvlak, $m+n-1$ kogels in de lengte bevatten; stellende dus, dat er in de langste zijde des grondvlaks N kogels liggen, zoo is $m+n-1=N$, of $m=N-n+1$. Deze waarde voor m in de formule der vorige § substituerende, heeft men ook nog

$$S=\frac{1}{6}\,n(n+1)(3N-n+1);$$

door deze formule wordt het aantal kogels van den stapel gevonden, indien men weet hoeveel kogels in de zijden des grondvlaks liggen; terwijl de formule der vorige § het aantal kogels leert berekenen, indien men weet hoeveel er zich in den rug en in de kortste zijde des grondvlaks bevinden.

§ 306. Ten einde de bovengevondene formulen, ter berekening der kogelstapels, gemakkelijker in het geheugen te houden, merke men vooreerst op, dat in alle de factor $\frac{1}{6}n(n+1)$ voorkomt, dat elk der stapels ten minste twee onderling gelijke driehoekige zijvlakken heeft, en dat de factor $\frac{1}{6}n(n+1)$ juist een derde gedeelte is van het aantal kogels, die zulk een driehoekig zijvlak uitmaken. Ten tweede merke men op, dat de overblijvende factor, in de formule voor den langwerpigen stapel, juist de som is van de getallen kogels, in de drie evenwijdige ribben van dien stapel gelegen, en dat ditzelfde met de formulen voor de piramidale stapels zal plaats hebben, indien men slechts, om drie evenwijdige ribben te bekomen, de ontbrekende vervangt door enkele kogels, die in de hoekpunten der stapels gelegen zijn. Op grond dezer opmerkingen heeft men, voor elk der drie behandelde soorten van kogelstapels, den volgenden

Regel. *Het aantal kogels van den geheelen stapel wordt gevonden door het aantal, dat in een driehoekig zijvlak ligt, te vermenigvuldigen met een derde van het aantal kogels, in de drie evenwijdige ribben begrepen.*

§ 307. Indien men eenen afgeknotten stapel heeft, dat is zulk eenen, waaraan eenige der bovenste lagen ontbreken, kan men, door de gevondene formulen, vooreerst den stapel, als of die voltooid ware, daarna het ontbrekende deel, en eindelijk door aftrekking den afgeknotten stapel, berekenen.

§ 308. Wanneer men uit een gegeven aantal kogels eenen driehoekigen of vierhoekigen piramidalen stapel moet zamenstellen, en daartoe begeert te weten hoeveel kogels men in de zijden van het grondvlak zal moeten plaatsen, is in de vergelijkingen

$$S=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \quad \text{en} \quad S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

S gegeven en n de onbekende. Het vinden van de waarde dezer onbekende zou in beide gevallen de oplossing eener derdemagtsvergelijking vereischen; maar dit kan, omdat uit den aard der zaak geene gebrokene waarde voor n bruikbaar is, ontweken worden. Herleidt men namelijk de vergelijkingen tot

$$n^3+3n^2+2n=6S \quad \text{en} \quad n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n=3S,$$

dan ziet men terstond, dat in de eerste

$$n^3<6S,\ n<\sqrt[3]{6S},\ (n+1)^3>6S,\ n+1>\sqrt[3]{6S} \text{ en } n>\sqrt[3]{6S}-1,$$

en in de tweede

$$n^3<3S,\ n<\sqrt[3]{3S},\ (n+1)^3>3S,\ n+1>\sqrt[3]{3S} \text{ en } n>\sqrt[3]{3S}-1$$

moet wezen. Hierdoor heeft men genoegzaam naauwkeurige grenzen, om door éene of twee beproevingen dadelijk te kunnen vinden, welk geheel getal men voor n nemen moet, om uit de gegevene kogels zulk eenen stapel te vormen, dat men er zoo weinig mogelijk overhoudt, of te kort komt.

Om, bij voorbeeld, uit 1000 kogels een' driehoekigen stapel te bouwen, heeft men $6S = 6000$ en $\sqrt[3]{6S} = 18, \ldots$, dus is $n < 18, \ldots$ en $n > 17, \ldots$; beproeft men nu $n = 18$ te nemen, dan vindt men

$$S = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) = \frac{1}{6} \times 18 \times 19 \times 20 = 1140,$$

en komt dus 140 kogels te kort, om een' voltooiden stapel te kunnen bouwen; neemt men derhalve $n = 17$, dan komt er

$$S = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) = \frac{1}{6} \times 17 \times 18 \times 19 = 969,$$

en men houdt dus 31 kogels over.

Om van 1100 kogels een' vierhoekigen piramidalen stapel zamen te stellen, heeft men $3S = 3300$, $\sqrt[3]{3S} = 14, \ldots$, dus is $n < 14, \ldots$ en $n > 13, \ldots$; beproeft men nu $n = 14$ te nemen, dan vindt men

$$S = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} \times 14 \times 15 \times 29 = 1015,$$

en houdt in dat geval 85 kogels over; begeert men dus al de kogels in den stapel te bergen, dan moet men $n = 15$ nemen; hierdoor wordt

$$S = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} \times 15 \times 16 \times 31 = 1240,$$

zoodat men dan, om een' voltooiden stapel te verkrijgen, 140 kogels te kort komt.

§ 309. Wanneer men eindelijk uit een gegeven aantal kogels eenen langwerpigen stapel moet zamenstellen, is S gegeven in de vergelijking

$$S = \frac{1}{6} n(n+1)(3N - n + 1),$$

waarin nu de twee onbekenden N en n voorkomen. Men kan dus eene der onbekenden willekeurig aannemen, en daarna de andere bepalen. Neemt men alzoo n willekeurig aan, dan wordt N dadelijk gevonden, door uit de laatste vergelijking af te leiden

$$N = \frac{2S}{n(n+1)} + \frac{1}{3}(n-1).$$

Men moet echter zorg dragen, n klein genoeg te nemen, opdat naar behooren $N > n$ zij, en kan klaarblijkelijk, zoo de formule voor N eene gebrokene waarde oplevert, alleen het naastkleinere of naastgrootere geheele getal nemen, naargelang men begeert kogels over te houden, of alle in een' niet voltooiden stapel te bergen.

Om, bij voorbeeld, van 1200 kogels eenen langwerpigen stapel te bouwen, zou men $n=10$ kunnen nemen, dan zou men vinden $N=24\frac{9}{11}$; neemt men nu, $n=10$ zijnde, $N=24$, dan vindt men

$$S=\frac{1}{6}n(n+1)(3N-n+1)=\frac{1}{6}\times10\times11\times63=1155,$$

en houdt 45 kogels over; neemt men nevens $n=10$, $N=25$, dan vindt men

$$S=\frac{1}{6}n(n+1)(3N-n+1)=\frac{1}{6}\times10\times11\times66=1210,$$

en komt dus 10 kogels te kort, om eenen voltooiden stapel te bekomen.

ERRATA.

bl. 12 reg. 8 v. b. *staat:* dan geeft *lees:* geeft

» 14 » 1 » » » eenen zelfden » eene zelfde

» » » 1 v. o. » a^8 » a^3

» 32 » 7 v. b. » $a^2+3ab+b^2$ » $a^2+3ab+2b^2$

» » » 9 » » in den eersten teller, *staat:* $a^2+3ab+b^2$ *lees:* $a^2+3ab+2b^2$

» » » 14 v. o. *staat:* $\pm y^{2n}$ *lees:* $+y^{2n}$

» 35 » 7 v. b. » der vorige § » van § 51

» 41 » 5 » » » uit zes » uit vier, vijf of zes

» » » 6 » » » twee- vier- of vijfledige *lees:* tweeledige

» 50 » 5 » » » kun- *lees:* kunnen

» » » 6 » » » ben, » hebben,

» 55 » 10 » » in den laatsten teller, *staat:* $1\frac{1}{3}ab^2$ *lees:* $1\frac{2}{3}ab^2$

» 56 » 17 v. o. in den derden teller, » $-4a^4$ » $+4a^4$

» » » 16 » » in den eersten teller, » $+4a^4$ » $-4a^4$

» 57 » 12 » » in den laatsten noemer, » b^3 » b^2

» 58 » 16 v. b. in den laatsten teller, » $10y^3z^2$ » $10y^2z^3$

» 61 » 5 v. o. *staat:* 3^2 *lees:* $3b^2$

» » » 4 » » tusschen de beide laatste breuken moet het teeken = geplaatst worden.

» 65 » 2 » » in den vóórlaatsten teller, *staat:* a^3x *lees:* a^2x

» 68 » 14 » » *staat:* $\sqrt{\frac{a^nb}{c^nd}}$ *lees:* $\sqrt[n]{\frac{a^nb}{c^nd}}$

» 77 » 5 » » » $b\sqrt{}$ » $\sqrt{b}$

» 85 » 2 v. b. » $(\sqrt{}(6-2\sqrt{5})$ » $\sqrt{}(6-2\sqrt{5})$

» 90 » 7 » » » $\frac{a}{a^q}$ » $\frac{a}{a^q}$

» 93 » 9 » » in het tweede wortelteeken moet de aanwijzer r geplaatst worden.

» 94 » 7 » » *staat:* $2^{\frac{7}{6}}3^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{7}{6}}c^{\frac{7}{12}}$ *lees:* $2^{\frac{7}{6}}3^{\frac{1}{4}}a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{7}{6}}c^{\frac{7}{12}}$

» » » 7 v. o. » $\sqrt[3]{}(3a\sqrt[4]{}2ab)^3$ » $\sqrt[3]{}(3a\sqrt[4]{}2ab^3)$

» » » 5 » » » $\sqrt[4]{}2a\sqrt[3]{}2a)$ » $\sqrt[4]{}(2a\sqrt[3]{}2a)$

» 95 » 5 » » » $q^{\frac{1}{4}}$ » $q^{\frac{3}{4}}$

» 102 » 12 » » » moet, » behoort,

» 119 » 20 v. b. » zulke bepaalde vraagstukken *lees:* zulk een bepaald vraagstuk

» 217 » 7 » » » $\frac{1}{8}$. *lees:* $\frac{1}{81}$.

» 219 » 18 » » » niet wezenlijk verschillen, *lees:* bijzondere gevallen uitmaken,

» 240 » 19 v. o. » dus *lees:* dan

» 255 » 8 » » » voor elk getal, *lees:* voor elk getal A,

Onder de opgegevene errata zijn er eenige, die slechts in sommige exemplaren voorkomen.

MEERTEN, geb. SCHILPEROORT, (A. B. VAN) Fabelkunde voor jonge lieden. Verrijkt met 6 gegraveerde platen, titel en vignet. In 2 deelen compleet. In carton. . . . . *f* 3,60.

Nieuwe Stellen Figuren, in blik vervaardigd, behoorende tot de Ligging en Snijding der vlakken; voorkomende in het tweede deel, eerste afdeeling van *Lacroix*, Beginselen der Meetkunst. In een doos. . . . . *f* 5,50.

ROORDA VAN EYSINGA, (P. P.) Aardrijksbeschrijving van Neêrlandsch Indië, ook ten dienste van hen, die zich tot de lessen bij de Koninklijke Militaire Akademie voorbereiden, om eenmaal naar Nederlandsch Indië te vertrekken. Met eene kaart . . . . *f* 3,50.

RAMAKERS, de Cirkel en hare voornaamste Eigenschappen, enz. Met eene plaat. . . . . *f* 0,90.

SLUYTERS, (H.) Aardrijkskundige Beschrijving van de Provincie Zeeland, ten dienste der scholen . . . . *f* 0,35.
Dito op best papier met eene kaart van Zeeland . . . . » 0,80.

Télémaque, (Le Petit) ou le précis des aventures de ce Héros: augmenté d'un vocabulaire des termes difficiles, dans les langues Hollandaise, Allemande et Anglaise . . . . *f* 0,70.

Verzameling van Uitgewerkte Voorstellen en Opgeloste Vragen, betreffende *de Stel- en Meetkunst*, ten dienste van Zelf-oefenaars, 4 deeltjes . . . . *f* 4,—.

Verzameling van uitgewerkte Voorstellen en Opgeloste vragen, betreffende *de Rekenkunst*, ten dienste van Zelf-oefenaars. 7 deeltjes . . . . *f* 4,20.

Uebungsaufgaben über den rechten Gebrauch der verschiedenen Sprachtheile, wie auch Orthographische Uebungsstücke; mit versteckten Sprach-und Schreibfehlern zur Beförderung des Unterrichts in der deutschen Sprachlehre und Rechtschreibung, besonders für die Niederländische Jugend . . » . . . . *f* 0,80.

WEIFFENBACH, (W.) S. M. C. Sammlung auserlesener Fabeln, Anekdoten, kleiner Geschichten und Erzählungen. Ein lehrreiches unterhaltendes Lesebuch für solche, welche die deutsche Sprache erlernen wollen; nebst einem Deutsch-Holländischen Wörterbüchlein. Zweite verbesserte Auflage. . . . . *f* 1,—.

ALMANAK DER KONINKLIJKE MILITAIRE AKADEMIE. Eerste Jaargang, 1830. . . . . *f* 1,—.
Idem, Tweede Jaargang, 1838. . . . . » 0,90.

MEER ge
lieden. 2
deelen c 0.
Nieuw de
Ligging l,
eerste en
doos. 0.
ROOF r-
landsch de
Konink e-
derland 50.
RAM nz.
Met ee 90.
SLUY n-
cie Zee 35.
Dito o 80.
Télér os:
augme ues
Hollan 70.
Verz en,
betreff ars.
4 deelt —.
Verz en,
betreff 7
deeltj 20.
Uebu nen
Sprach ver-
steckt chts
in den für
die Ni 80.
WE eln,
Anekc ches
unter che
erlern ich-
lein. —.

ALI erste
Jaarg —.
Ide 9,90.

eld

en-Verbandes

$\frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3$

$\frac{\ldots)(n-3)}{\ldots 4} a^{n-4} b^4 \pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} a^{n-5} b^5$

+ etc.

n 190

$2ab + b^2$

$2ab + b^2$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \ldots + \text{etc.}$

$a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$\frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3$

$)^{2n}$

$a)^{2n+1}$

$)^{2n}$

$)^{2n+1}$

e Krefeld

s

en Frauen-Verbandes

$$(a\pm b)^n = a^n \pm \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} a^{n-4} b^4 \pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} a^{n-5} b^5$$
+ enz.

Krefeld, den 190

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \ldots + \text{enz.}$$
$$(a\pm b)^n = a^n \pm \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3$$
$$(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$$
$$(a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}$$
$$(-a-b)^{2n} = +(a+b)^{2n}$$
$$(-a-b)^{2n+1} = -(a+b)^{2n+1}$$

130,4
53
3912
6520
6911,2

130,4
29
11736
2608
3781,6

130,4
25
6520
2608
3260,0

400000

11

4600000.–

N° 119

pas vous le
Non content de l'avoir trahi, ~~il~~ l'osez calomnier
bien
Il s'est rendu coupable de ~~beaucoup~~ des fautes. Cette réponse
digne distantes
est bien ~~mérite~~ d'un sot. Ces deux villes ne sont que huit
lieues pas
~~milles distant~~ de l'une de l'autre. N'êtes vous enchanté ~~par~~
trait telle
d'une pareille ~~aventure~~ ? Étonné d'une ~~pareille~~ audace, je ne
pus pas lui répondre sur le champ. Son cœur n'est point
exempt de faiblesse. C'est un pauvre homme, faible de
corps et d'esprit. Il est épris de cette femme. Vous êtes
de aujourd'hui
fort ~~par~~ ma faiblesse. Il est fou de musique. Il extait
furieux de cette résistance. Ils sont très gonflé ~~de~~ la
ont d'eux même
bonne opinion, qu'ils ~~avaient de soi~~. Elle avait les yeux
gros de larmes. Le présent est gros de l'avenir. Il est heureux
obtenu, tout
d'avoir ~~gagné~~ votre amitié. Il est ~~entièrement~~ honteux
de
de sa faiblesse. Il est moins honteux, de convenir ses tort,
que de chercher à les justifier. Cette mère est idolâtre de ses
tel
enfants. Je suis incapable d'un ~~pareil~~ procédé. Il est
est
absolument incapable d'exercer son emploi. Chacun ~~fait~~
de
inconsolable cette perte. Je suis très impatient de savoir, ce
arrivera rendu digne
qu'il en ~~viendra~~. Ils s'est ~~fait~~ ~~incapable~~ de vos bienfaits
est indigne
~~Il est ne mérite pas~~ de vivre. Il est innocent du crime, ~~dont~~
fut
on l'accuse. Je suis inquiet de son sort.

4

N° = 120

Il est ivre de ~~bonheur~~ joie. Le remords est ~~indivisible~~ inséparable du crime. Il
est jaloux de son ombre. Une femme doit être jalouse de son
honneur, jusqu'au scrupule. Jaloux de son père, Alexandre
voulut le ~~surmonter~~ surpasser. Cette province est limitrophe de l'Allem
~~La lumière~~ Le sage est ~~ménage~~ ménager du temps. Il est malade d'un mal
incurable. Il est plus malade de l'esprit que de corps. Il est ~~très~~ fort mécon
de vous. Je suis ~~très~~ fort mécontent de la conduite de son
Il est orgueilleux de ~~ses~~ son succès. Les Francs qui conquirent les
Gaules étaient originaires de ~~la~~ Germanie. Elle était ~~blanche~~ pâle
de ~~peur~~ colère. Il ~~est tout~~ n'est prodigue que de promesses. Il était raide de froid.
Il est ~~très~~ fort reconnaissant des services que vous lui avez rendus. J'en
suis reconnaissant. Il est sain de corps et d'esprit. Il est soigneux de son
honneur. Il est sûr de son fait. Ce passage est ~~interpréta~~ susceptible
~~de plusieurs~~ d'interprétations différentes. La Moldavie est tributaire du Grand Seigneur.
La chrétienté était tributaire au chef de pirates. Il est
triste de la mort de son ~~fils~~ ami. Il est triste de son naturel.
La raison n'est pas toujours victorieuse des passions. ~~On~~
~~peut on~~ attendrir un coeur vide de ~~tout~~ bon sentiment. Ces
terres sont trop voisines du grand ~~route~~ chemin. La colline est
~~près~~ voisine de la mer.

6

P P P P