glied eigentlich gar nicht existirt. Deßhalb könnte man getrost diese fragmentarischen geometrischen Einleitungen ganz weglassen; sie taugen als Unterricht in der Wissenschaft, an sich betrachtet, nichts! Sie können wegen Beschränkung des Raumes nicht gründlich sein; und dann giebt es auch der Lehrbücher in allen Hülfswissenschaften wohl mehr, als gut ist. — Bei dem niederen Stande der Vorbildung aber, und ehe diese in der Masse der Gewerbsleute eine höhere Stufe einnehmen wird, muß man den Bedürftigen eine Art Realwörterbuch geben, das sich innerhalb der Grenzen hält, worin sein zweckliches Treiben sich bewegt; ein Resumé der Sätze und Sachbegriffe, die zum Verständniß und zur ausübenden Benutzung der in einer beziehlichen Schrift enthaltenen Vorschriften unentbehrlich sind.

In diesem Sinne soll nun auch hier das einleitende Capitel über Geometrie und Constructions- (Projections-) Lehre an die Spitze gestellt werden. Wer es bedarf, der versäume nicht, es zu benutzen; für die besser Unterrichteten ist es nicht geschrieben.

Geometrische Sätze, in besonderer Beziehung auf die beschreibende Geometrie.

§. 1. Die Geometrie beschäftigt sich mit dreierlei Größen, wie sich solche unserer Anschauung bieten.

Wir bemerken nämlich an den Erscheinungen im Raume die einfache Ausdehnung, welche wir Länge, Breite, Höhe, Tiefe nennen, sie ist das, was man in der Mathematik unter Linie (Längenraum) versteht. Die Begriffe von Länge und Breite, Höhe und Tiefe sind nur beziehlich, und zwar meistens auf den Standpunct, von dem aus wir die Ausdehuung betrachten. Stehen wir am Fuße eines Thurmes, so nennen wir dieselbe Hauptausdehnung „Höhe“, die wir, von dessen Spitze aus betrachtet, mit „Tiefe“ bezeichnen. Bei einem Gebäude, einem Kasten rc. ist es hergebracht, die größte Ausdehnung des Bodens „Länge“, die andere „Breite“ zu nennen. Es hindert aber nicht, diese Benennungen zu vertauschen, zumal wenn sie ziemlich gleiches Maß haben. Derselbe Kasten hat, von Außen betrachtet, die Entfernung des Bodens zum Deckel als Höhe, die wir, zum geöffneten Deckel eingesehen, Tiefe nennen; ja es ist sogar üblich, die Ausdehnung eines Gebäudes in der Richtung der Giebelseiten „Tiefe“ zu nennen.

§. 2. Jede Richtung, die wir im Gange oder mit dem Auge nach irgend einem Gegenstande verfolgen, ist eine Linie, und deren Enden sind die Endpuncte derselben oder einfach Puncte. Wir brauchen deßhalb die Spuren einer solchen Richtung oder Ausdehnung nicht zu sehen, deuten sie aber bildlich auf dem Papier oder auf dem Felde rc. durch verschiedene Hülfsmittel an, z. B. mit dem Bleistift, der Reißfeder, einer ausgespannten Schnur rc. Ebenso dürfen wir uns den Punct nicht geradezu als ein Tüpfelchen, als einen Zirkelstich rc. vorstellen; ein solches ist immer nur ein Bild des Punctes. Geht eine Linie über den einen oder andern Endpunct weiter fort, ohne daß ein eigentlicher Endpunct oder ein Ende angenommen werden kann, so entsteht eine sogenannte unendliche Linie, eine bloße „Richtung“, und je zwei in einander entfernt liegende Puncte in ihr sind „Richtpuncte“.

§. 3. Dehnt sich ein Gegenstand der Länge nach aus, zugleich aber in der Breite, so nennt man dieses Gebild eine Fläche. Eine solche ist unter andern an einem Stück Feld wahrnehmbar, weil hierbei eine dritte Ausdehnung (nach der Dicke) nicht in Betracht kommen kann.

Eine Fläche hat also zwei Ausdehnungen, Länge und Breite, und wird durch Linien begrenzt. In diesem

Falle ist es eine „begrenzte Fläche". Sind solche Grenzen aber nicht bestimmbar, dann nennt man sie eine „unbegrenzte, unendliche Fläche".

Kann man an einem Gegenstande drei Ausdehnungen wahrnehmen, nämlich Länge, Breite und Höhe (oder Dicke), so haben wir den Körper. Dieser muß aber nicht immer massiv oder durch Materie ausgefüllt gedacht werden; auch der leere Raum eines Kastens ist ein mathematischer Körper, er hat drei Ausdehnungen, nach Länge, Breite und Tiefe*).

Tafel I.

a. Von den Linien und Winkeln.

§. 4. Ist die Bewegung eines Punctes nach einem andern hin eine stete, so daß er seine Richtung in keinerlei Weise verändert, so beschreibt er eine gerade Linie, eine Gerade, deren kleinster Theil ebenfalls eine Gerade ist**), Fig. 8 a, b, c, d, Taf. I.

Findet aber eine Ablenkung von der anfänglichen Richtung Statt, so entsteht eine krumme Linie, die man auch Curve nennt, wenn sie eine stete einfache Biegung macht, wie a, b, c, Fig. 9, Taf. I.

§. 5. Die Grenze einer Linie sind zwei Puncte, die an sich, mathematisch betrachtet, keinerlei Ausdehnung haben. Die Grenzen einer Fläche sind Linien, und die eines Körpers sind Flächen.

Jede Richtung wird durch zwei Puncte, jede Ebene (ebene Fläche) durch drei Puncte, die nicht in gerader

*) Es wird in manchen mathematischen Büchern viel von „unendlichem Raume, unendlichen Linien und Flächen" gefaselt. Da wir keinen Begriff von „Unendlichkeit" haben, so sind auch dieses nur leere Worte, und wir können uns dabei nur Dinge denken, die größer sind, als ein irgend meßbares; sei es nach einer, nach mehren oder nach allen Seiten hin.

**) Unter dem einfachen Ausdruck „Linie" wird in der Folge stets eine gerade Linie verstanden.

Linie liegen, ihrer Lage und Richtung nach, vollkommen festgestellt. Sind also in dem freien Raume drei Puncte unverrückbar angenommen, und man legt durch diese drei Puncte eine Ebene, so kann diese ihre Lage nicht verändern, ohne wenigstens einen dieser Puncte zu verlassen.

§. 6. Eine Linie kann verschiedene Lagen annehmen, denen man bestimmte Benennungen beigelegt hat.

Ist ihre Lage so, daß man sie, als auf dem Spiegel einer Wasserfläche liegend, sich denken kann, so heißt sie eine **Horizontallinie**, **Horizontale**, **Wagerechte**.

In einer Zeichnung nennt man Horizontallinie eine solche, die mit der untern oder obern Randlinie in einerlei Richtung liegt, wie a b in Fig. 1, 2, 3 2c.

Läuft eine Linie in derselben Richtung, wie ein freihängendes Bleiloth, so nennt man sie eine **lothrechte Linie**; die mit der linken oder rechten Randlinie einerlei Richtung eingehet, z. B., c d, Fig. 7, 8, 1, 2 2c. Alle übrigen Linien außer diesen Lagen sind **schräge**, a und b Fig. 8, 14 2c.

§. 7. Jede Gerade, welche auf einer andern so steht, oder sie verlängert schneidet, daß sie sich weder auf die eine noch auf die andere Seite der andern Linie neigt, ist eine **Senkrechte**, **Normale**, **Perpendicularlinie**, und jede dieser beiden Linien ist in Beziehung auf die andere senkrecht; es braucht deßhalb keine dieser Linien horizontal oder lothrecht zu sein.

Eine Senkrechte ist sonach immer nur **senkrecht** in Bezug auf eine zweite; so ist c d Fig. 1, 2, 7 senkrecht auf a b, sowie o p und q r Fig. 14 senkrecht auf m n sind, obgleich weder o p und q r lothrecht, noch m n horizontal sind. Dagegen brauchen Einige den Ausdruck „**lothrecht**“ nur von solchen Linien, die mit dem Faden eines freihängeuden Bleilothes wirklich gleichlaufen, Fig. 8 c mit d.

§. 8. Zwei oder mehre Linien sind **parallel** oder **Parallellinien**, wenn sie in einer Ebene liegen und sich nie treffen, wie weit man sie auch nach beiden Seiten hin verlängern mag. Beide Bedingungen müssen gleichzeitig vorhanden sein; denn zieht man auf dem Deckel eines regelmäßigen Kastens z. B. eine Linie durch zwei Ecken, eine zweite durch die Ecken des Bodens, die nicht unter jenen liegen, so findet zwar die zweite Bedingung Statt und die Linien haben einen Anschein von Parallelismus, aber auch nur den Schein, weil die erste Bedingung fehlt. Eine Verbindungsfläche beider Linien würde keine Ebene, sondern eine windschiefe Fläche sein.

Denkt oder zieht man zwischen Parallelen eine beliebige Anzahl Senkrechte, so haben letztere alle gleiche Länge. Diese Länge nennt man den Abstand, und die Weite zwischen einem Puncte c von einer Linie a b, einer Linie c d von einer andern a b, einer Ebene von einer zweiten, kann nur auf solchen Senkrechten gemessen werden. Fig. 2, 13, 27, 33.

§. 9. Eine krumme Linie, die so um etnen Punct m, den Mittelpunct, das Centrum, bis wieder zu ihrem Anfange herumgeführt wird, daß alle Puncte auf ihr einen gleichen Abstand von dem Mittelpuncte m haben, heißt eine Kreislinie, ein Kreis, und der von dieser Linie eingeschlossene Raum eine Kreisfläche, Fig. 17 a e f b d c. Ist eine Kreislinie nicht vollkommen bis zu ihrem Anfange durchgeführt, so ist es ein Kreisbogen, Fig. 3, 7 2c. Bei dem Kreise kommen folgende bemerkenswerthe Linien vor:

Der Umfang des Kreises heißt dessen Peripherie, Umkreis; jede Linie, die von einem Puncte der Peripherie zu einem andern geht, wie a b, e f, Fig. 17, heißt eine Sehne, Chorde. Geht eine Sehne durch den Mittelpunct des Kreises wie a b, so nennt man sie einen Durchmesser, Diāmēter. Die Hälfte eines solchen Durchmessers oder jede Linie, die von dem Mittelpuncte des Kreises bis zu seiner Peripherie geht, wird ein Halbmesser, Radius, genannt, wie a, b, c Fig. 16, a m, b m Fig. 17. Da nun jeder Punct einer Kreislinie in demselben Abstande, wie ein anderer auf ihr, von dem Mittelpuncte liegt, welches aus der Entstehung der Kreislinie folgt: so müssen nothwendig deren Halbmesser, folglich auch alle Durchmesser gleiche Länge haben.

Alle Gerade außerhalb eines Kreises, welche mit der Kreislinie nur einen Punct gemein haben, sind Tangenten des Kreises, g i, g h Fig. 16, 37. Den Raum, den zwei Radien und ein Stück der Peripherie begrenzen, wie der schraffirte Theil Fig. 16, ist ein Kreisausschnitt, Sector; dagegen der schraffirte Theil Fig. 17, den eine Sehne abschneidet, ein Kreisabschnitt, Segment.

Kreise, die einen gemeinschaftlichen Mittelpunct m haben, sind concentrische, im Gegenfall excentrische Kreise. Zu ersteren gehören die Kreise a und b Fig. 18, zu den letztern die Kreise c und d.

§. 10. Der Kreis mag groß oder klein sein, so denkt man ihn in 360 gleiche Theile getheilt, welche Grade heißen; $\frac{1}{60}$ eines Grades nennt man Minute; $\frac{1}{60}$ einer Minute heißt Secunde. Die Grade bezeichnet man durch (°), z. B. 45°; die Minuten durch (′), die Secunden durch (″) und lies't 9° 20′ 30″, neun Grad, zwanzig Minuten, dreißig Secunden.

§. 11. Stoßen zwei Linien in einem Puncte aufeinander, wie in Fig. 10, 11, 12, so entsteht ein Winkel; die Linien selbst heißen die Schenkel, der Punct des Zusammentreffens ist die Spitze oder der Scheitel des Winkels. Man giebt den Winkeln, nach der verschiedenen Neigung der Schenkel, verschiedene Namen. Die Größe eines Winkels hängt nicht von der Länge der Schenkel, wohl aber von deren Annäherung gegeneinander ab.

Ein Winkel, der zwischen seinen Schenkeln einen Viertelkreis faßt, wenn man dessen Mittelpunct in der Spitze des Winkels annimmt, ist ein rechter Winkel, Fig. 10; ein Winkel, der kleiner als ein rechter ist, heißt ein spitzer, Fig. 11. und ist er größer, ein stumpfer Winkel, Fig. 12. Man bezeichnet die Winkel entweder durch drei Buchstaben, z. B. m o n Fig. 12, so daß man den Buchstaben an der Spitze stets in die Mitte setzt; oder durch einen Buchstaben innerhalb der Spitze, z. B. α. Der Winkel β oder m o n Fig. 12 ist ein erhabener Winkel.

§. 12. Man kann sich von der Größe eines Winkels einen richtigen Begriff machen, wenn man sich Anfangs beide Schenkel aufeinandergelegt denkt; der Winkel ist dann gleich Null. Dreht man den einen Schenkel um den Endpunct des andern festliegenden, wobei die einen Endpuncte sich immer decken, so wächs't der spitze Winkel allmählig, bis er zu 90° gelangt und ein rechter wird. Dreht man den beweglichen Schenkel weiter, so geht der Winkel in einen stumpfen über, bis er in 180° anlangt, wo er einen gestreckten Winkel macht und mit dem festen Schenkel eine Gerade bildet. Bis hierher sind die Winkel hohle, darüber hinaus erhabene, bis endlich der Schenkel nach vollendetem Umlauf wieder in seine uranfängliche Lage kommt und die imaginäre Größe von 360° oder 4 rechten annimmt ꝛc. Winkel, die in derselben Folge größer als 4 rechte werden, sind für uns ohne Bedeutung und schon die erhabenen entbehrlich.

Der Theil der ganzen Kreislinie, welcher zwischen den Schenkeln eines Winkels liegt, wenn man den Mittelpunct in den Scheitel setzt, mißt durch die Anzahl seiner Grade die Größe des Winkels. Die Größe des Kreises selbst ist hierbei völlig indifferent, da jeder große, wie jeder kleinere Kreis eine gleiche Anzahl, nämlich 360 Grad, enthält, wovon jeder $\frac{1}{360}$ der Kreislinie ist und daher alle, wie beschrieben, mögliche Kreisbögen zwischen den Schenkeln gleiche Bruchtheile ihrer zugehörigen Kreise sind.

Ich habe für räthlich gehalten, in die Begriffe von Linien und Winkeln etwas ausführlich einzugehen, weil dadurch mehr Helligkeit in den mathematischen Ansichten verbreitet wird.

b. Linien=Constructionen.

§. 13. Eine Senkrechte in der Mitte zweier gegebenen Puncte auf einer Linie zu zeichnen. Fig. 1, Taf. I.

Sind die Puncte a und b gegeben, so öffne man den Zirkel über die Hälfte ihres Abstandes, setze denselben mit der Spitze in a ein und beschreibe den Bogen cd; mit derselben Zirkelöffnung dann aus b einen gleichen Bogen. Verbindet man die Durchschnittspuncte durch eine Gerade op, so schneidet diese ab senkrecht, und zwar in der Mitte m zwischen den beiden Puncten. Man kann sich dieses Mittels bedienen, um eine Linie zu halbiren.

§. 14. In einem gegebenen Puncte d auf ab eine Senkrechte zu errichten. Fig. 2.

Man trage auf beide Seiten der Linie von dem gegebenen Puncte d aus gleiche Theile, öffne den Zirkel über die Hälfte von ab und beschreibe aus a und dann aus b Bögen bei c, ziehe cd, so ist die Linie senkrecht auf ab in dem gegebenen Puncte d.

§. 15. Aus einem über der Linie gegebenen Puncte c eine Senkrechte auf die Linie zu fällen. Fig. 7*).

Man setze den Zirkel in c ein und beschreibe den Bogen ab, dann in a und in b, von wo aus man

---

*) Zeichnet man eine Senkrechte von einem, auf einer Linie gegebenen Puncte aus, so sagt man: man errichtet die Senkrechte; zieht man sie von einem Puncte aus, der ober= oder unterhalb der Linie gegeben ist, so heißt dieß: eine Senkrechte fällen.

Kreuzbögen ober= oder unterhalb ab in m oder n macht, und verbinde c mit dem Durchschnitt, so ist cd senkrecht auf ab.

§. 16. Eine Senkrechte am Ende a einer gegebenen Linie zu errichten. Fig. 3.

Es sei in dem Puncte a eine Senkrechte zu errichten. Man setze in irgend einem Puncte c ein und beschreibe einen Bogen, der durch a geht. Wo derselbe die Linie in dem andern Puncte d schneidet, zieht man die Linie bc, bis sie in d den Kreis schneidet. Der Punct d liegt dann senkrecht über a, und die Linie da bildet mit ab einen rechten Winkel.

Oder nach Fig. 4 theile man auf bc fünf beliebige gleiche Theile ab, setze den Zirkel in b ein und beschreibe mit dem Halbmesser von vier solchen Theilen einen Kreisbogen; nehme nun fünf solcher Theile in den Zirkel, setze in den dritten Theilpunct d ein und schneide den Bogen in a, ziehe ab, so ist diese senkrecht auf bc.

Die eine der rechtwinkeligen Linien hält demnach 4, die andere 3 gleiche Theile und die Verbindungslinie ad deren 5. Man nennt die Figur abc ein Pythagorisches Dreieck und kann sich dessen bei'm Abstecken eines rechten Winkels auf dem Bauplatze bedienen, indem man drei Latten, denen man die Längen 3, 4 und 5 Fuß giebt, an ihren Endpuncten verbindet. Bequem ist auch folgende Construction Fig. 3a: Man setzt den Zirkel in den Fußpunct a der Senkrechten ein und beschreibt einen beliebigen Bogen cd. Auf diesen trägt man seinen Halbmesser in cm, halbirt cm in q und setzt den gleichen Halbmesser in qo, so ist o senkrecht über a auf ab.

Wenn Raum vorhanden ist, so kann man, Fig. 3b, den Halbmesser in cm und mn tragen und aus m und n Kreuzbögen bei p machen. Der Durchschnitt p liegt ebenfalls senkrecht über a.

§. 17. Eine Gerade in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen. Fig. 5.

Eine Länge versuchsweise in gleiche Theile zu zerlegen, ist sehr umständlich, zumal wenn die Anzahl der Theile ungerade oder untheilbar (eine Primzahl) ist. Folgendes Verfahren erspart Zeit und Mühe: die Linie a c sei in 9 gleiche Theile zu zerlegen: so ziehe man aus a eine Schräge a b von unbestimmter Länge, trage darauf 10 gleiche Theile, deren Größe man beliebig, ungefähr so groß wie $\frac{1}{9}$ a c, nimmt, ziehe durch die Endpuncte beider Linien die Gerade b c und schneide a c durch Parallelen mit d c, (s. §. 19.), welche man durch die Theilpuncte auf a b legt.

Diese Durchschnitte theilen die gegebene Linie in die verlangten Theile, die alle unter sich gleich sind.

§. 18. Verschiedene gegebene Linien in eine Anzahl gleicher oder verhältnißgleicher Theile zu theilen. Fig. 6.

Es sind die Linien b c d . . h z. B. in 10 gleiche Theile zu zerlegen. Man theile zuerst die Linie h in die verlangten Theile, nehme die ganze Länge h′ h″ in den Zirkel und beschreibe aus beiden Endpuncten Durchschnittsbögen bei a, ziehe dann a h′, a h″ und nach sämmtlichen Theilpuncten auf h Linien aus a. Man erhält dadurch ein gleichseitiges Dreieck a h′ h″. Nimmt man nun die zweite gegebene Linie g in den Zirkel, trägt dieß Maß von a nach g′ und zieht durch g′ eine Parallele mit h, so ist diese die Linie g, welche durch die punctirten Linien der Figur in 10 gleiche Theile geschnitten ist. Ebenso verfährt man mit den andern gegebenen Linien. Ist die Linie h in verschiedenartige Theile zerlegt, so werden auch die Linien g f . . . . in solche Theile verhältnißgleich getheilt.

§. 19. Parallelen zu ziehen. Fig. 13.

Ist mit der gegebenen Linie a b durch den Punct e eine Parallele zu ziehen, so fälle man aus e eine Senkrechte auf a b, in einiger Entfernung eine zweite, welche man der ersten e gleich macht und durch e und den Höhenpunct der andern Senkrechten eine Gerade c d legt, die parallel a b durch e sein wird. Man nimmt auch wohl nur den Abstand des Punctes e von a b, setzt beliebig in zwei Puncten auf a b ein, schlägt Bögen und zieht c d so, daß sie diese Bögen berührt.

Bei'm Zeichnen und Aufreißen zieht man Parallelen mittelst eines hölzernen oder metallenen Winkels. den man an die gegebene Linie anlegt und an einem Lineal fortbewegt; desgleichen durch das Winkelmaß, Streichmaß, Schrägmaß, die Reißschiene 2c.

Man hat noch eine Menge anderer Verfahrungsweisen, Parallelen zu ziehen. Die üblichste auf dem Papier ist die, Fig. 19: man legt ein hölzernes oder metallenes rechtwinkeliges Dreieck a e f mit der einen Kante an o p, die andere an ein Lineal m n, welches man in seiner Lage festhält. Schiebt man nun das Dreieck an dem Lineal fort, so ist jede Linie, die man an der Kante a f zieht, wie c g eine Parallele mit a f, oder o p.

Ferner: wenn durch b, Fig. 20, eine Parallele mit m q gezogen werden soll, so beschreibe man aus zwei beliebigen Puncten m, n der gegebenen Linie Bögen, wovon der eine durch b geht; nehme die Sehne b n des ersten Bogens in den Zirkel und trage sie auf den andern in d. ziehe b d, so ist diese parallel m q durch den Punct b.

c. Von den Flächen.

§. 20. Eine Fläche ist eben, eine Ebene, wenn eine Gerade die Fläche in allen Puncten berührt, man mag die Gerade nach jeder beliebigen Richtung auflegen.

Es ist daher eine sichere Prüfung, z. B. eines Tischblatts, wenn man auf dasselbe ein genaues Lineal mit seiner Kante nach verschiedenen Richtungen aufsetzt und wenn dieses überall so scharf aufsteht, daß man nirgends eine Spalte erblickt *).

Die einfachste geradlinige Figur ist die durch drei Linien begrenzte, das Dreieck. Betrachtet man diese Figur nach ihren Seiten, so hat man:

das gleichseitige Dreieck, dessen Seiten gleich lang sind, Fig. 21;

das gleichschenkliche; welches nur zwei gleiche Seiten hat, Fig. 22 und

das ungleichseitige, mit drei Seiten verschiedener Länge, Fig. 23.

In Bezug auf die Winkel giebt es:

rechtwinkelige Dreiecke, worin sich ein rechter Winkel befindet, Fig. 24;

spitzwinkelige, die drei spitze Winkel haben, Fig. 23 und

stumpfwinkelige, in denen ein stumpfer Winkel vorhanden ist, Fig. 26.

Es giebt außer den geradlinigen Dreiecken noch krummlinige, die nach gewissen Gesetzen auf der Oberfläche einer Kugel gezeichnet werden können und die man sphärische nennt; solche sind aber außer dem Bereiche eines Gewerbsmannes.

§. 21. Fügt man den drei Begrenzungslinieu eine vierte hinzu, dann hat man ein Viereck. Deren giebt es wieder verschiedene Arten:

Rechteck, Rectangel, Fig. 28, ist ein jedes Viereck worin vier rechte Winkel enthalten sind.

Eine Unterabtheilung derselben bilden die Quadrate, worin außer den vier rechten Winkeln auch vier gleiche Seiten befindlich, Fig. 27.

---

*) Wenn in Zukunft von Flächen gesprochen wird, und nicht ein Anderes dabei bemerkt ist, so werden stets ebene Flächen, Ebenen verstanden.

Geschobene Quadrate, Rauten, Rhombus, haben keinen rechten Winkel, aber vier gleiche Seiten, Fig. 29.

geschobene längliche Vierecke, längliche Rauten, Rhomboiden, haben nur paarweise gleiche Seiten und keinen rechten Winkel, Fig. 30 und 31.

Alle die genannten Vierecke haben die gegenüberliegenden Seiten parallel und heißen deßhalb Parallelogramme.

Trapeze nennt man alle Vierecke, welche vier ungleiche Seiten haben. Zuweilen versteht man aber unter Trapez, Paralleltrapez, ein Viereck, worin zwei Seiten parallel sind, wie Fig. 32 und 33, und unterscheidet dann solche, worin keine parallelen Seiten vorhanden sind, durch die Benennung Trapezoide, Fig. 34.

§. 22. Jede Figur, die durch mehr als vier Seiten begrenzt ist, gehört zu den Vielecken.

Sind in einem Vieleck die Seiten und die Winkel gleich, dann ist es ein reguläres Vieleck, und man benennt es, nach der Anzahl seiner Ecken oder Seiten, Fünfeck, Fig. 37, Sechseck, Fig. 38, Siebeneck, Fig. 35, Achteck, Fig. 36 und so fort. Die aus dem Griechischen abgeleiteten Namen kommen jetzt in Schriften selten vor, nach ihnen ist das Vieleck Polygon; das Sechseck Hexagon; das Siebeneck Heptagon; das Achteck Octogon 2c.

§. 23. Zu den bisher genannten Flächen ist noch Folgendes zu bemerken:

a) In jedem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Winkel gleich; in einem gleichschenklichen deren nur zwei.

b) Jede Seite eines Dreiecks kann als Grundlinie betrachtet werden, und dann ist der Abstand der ihr gegenliegenden Spitze, wie c d Fig. 21, die Höhe des Dreiecks, beziehlich zur angenommenen Grundlinie a b. Nimmt man in dem stumpfwinkeligen Dreieck Fig. 26 a d als Grundlinie, so ist b c die dazu gehörige Höhe; für a c als Grundlinie hat man d e als Höhe.

c) Diagonale nennt man jede Linie im Innern einer Figur aus einer Ecke in eine andere, so daß mindestens eine Ecke dazwischen liegen bleibt. Solche Diagonalen sind a b Fig. 27 und m n Fig. 34 und 36.

Bei einem Quadrat und jedem andern Rechteck sind die beiden Diagonalen gleich, woraus man nebenbei die richtige Construction einer solchen Figur erkennen kann.

d) In einem regulären Sechseck sind die Seiten gleich dem Halbmesser aus der Mitte nach den Ecken; so ist a e, e f, f b 2c. gleich a c, e c, c f 2c. Fig. 38.

e) Ein Kreis, der, wie Fig. 37, in einem regulären Vieleck so beschrieben ist, daß er alle Seiten des Vielecks berührt, heißt eingeschrieben; geht er hingegen durch die Ecken, dann ist er umschrieben, Fig. 38. Eben so spricht man von eingeschriebenen und umschriebenen Vielecken. Man bemerke, daß die neueren mathematischen Schriftsteller immer die deutschen Ausdrücke gebrauchen, wo es ohne Zwang geschehen kann, und die Namen Triangel, Cirkel, Centrum, Oblongum, Segment, Sector u. a. m. ziemlich bei Seite geschoben haben.

---

d. Flächen-Constructionen.

§. 24: Fig. 21. **Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren.**

Man setze den Zirkel mit einer Oeffnung, gleich der gegebenen Seite, in den Endpunct a, dann in den b und beschreibe Bögen bei c, Wo sich diese schneiden, ist die dritte Ecke des verlangten Dreiecks.

§. 25. Fig. 22. **Ein gleichschenkliches Dreieck zu zeichnen.**

Sind die Längen der Seiten in m n und o p gegeben, wovon o p die ungleiche Seite sein soll, so messe man m n nnd mache aus o und p die Kreuzbögen, deren Durchschnitt dann die dritte Ecke giebt.

§. 26. Fig. 23. **Ein ungleichseitiges Dreieck zu zeichnen, wenn a, b und c die gegebenen Seiten sind.**

Man nimmt eine der Seiten, z. B. a als Grundlinie uud macht m o ihr gleich. Hierauf mißt man b, macht aus m einen Bogen bei n, mißt dann c und kreuzt mit dieser Oeffnung den Bogen aus o. Verbindet man den Durchschnittspunct n mit m und o, so hat man das verlangte Dreieck.

§. 27. **Ein Quadrat**, Fig. 27, wird construirt, wenn man in dem Endpuncte c (oder b) einen rechten Winkel errichtet, den Schenkel a c der gegebenen Seite gleich b c macht und durch a und b Parallelen mit b c und a c zieht. Man gelangt auch dazu, wenn man den Schenkel a c des rechten Winkels a c b gleich b c macht und mit derselben Zirkelöffnung aus o und b Kreuzbögen bei d zieht.

§. 28. **Reguläre Vielecke zu construiren.**

Die allgemeinste Weise, ein Vieleck zu zeichnen, besteht darin, daß man einen Kreis beschreibt von der Größe, welche man dem Vieleck geben will, und die Kreislinie in so viel gleiche Theile versuchsweise theilt, als das Vieleck Ecken haben soll.

Man kann zwar mit dieser Methode ausreichen, hat aber verschiedene Constructionen, welche die Arbeit abkürzen, deren im Folgenden mehre erklärt werden sollen.

§. 29. Fig. 38. Ein reguläres Sechseck zu beschreiben.

Diese Construction zerfällt in zwei:

a) Wenn der Kreis gegeben ist, worin es beschrieben werden soll. Nach der oben angeführten Eigenschaft ist dieß sehr einfach zu bewirken, wenn man den Halbmesser des Kreises sechs Mal auf der Peripherie herumträgt und die Theilpuncte durch Linien verbindet.

b) Wenn die Seite des Sechsecks gegeben ist, z. B. e f, so nehme man diese in den Zirkel, zeichne das gleichseitige Dreieck e c f mittelst zweier Bogenschnitte in c, nehme c als Mittelpunct und beschreibe den Kreis durch f c, auf welchem man dann die Seite herumträgt.

Tafel II.

§. 30. Ein reguläres Achteck zu beschreiben. Fig. 1.

Man zeichne ein Quadrat, ziehe die Diagonalen, um dessen Mittelpunct zu erhalten, setze den Zirkel in die Ecken ein und beschreibe mit dem Abstande der Eckpuncte von dem Mittelpuncte die (punctirten) Kreisbögen.

Wo diese die Seiten des Quadrats schneiden, liegen die Ecken des verlangten Achtecks.

§. 31. Ein Fünfeck ohne Zeichnung einer Kreislinie zu bilden. Fig. 2.

Soll die Linie a b eine Seite des Fünfecks sein, so setze man den Zirkel in a ein und beschreibe mit dem Halbmesser a b einen Kreisbogen b d, dann von b aus einen gleichen a f, errichte in a eine Senkrechte a c, theile den Bogen a c in 5 gleiche Theile und trage einen Theil von c nach d, welcher eine Ecke des Fünfecks giebt. Hierauf setze man den Zirkel in b ein, öffne ihn bis d und beschreibe den Bogen d e, desgleichen mit derselben Oeffnung aus a den Bogen f e. Man erhält dadurch die Schnittpuncte f und e, welches die übrigen Ecken des Fünfecks sind.

§. 32. Einen Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen. Fig. 3.

Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit der: ein beliebiges Vieleck in einen Kreis zu construiren. Man wolle, z. B., den gegebenen Kreis in 7 gleiche Theile theilen, d. i., die Ecken eines Siebenecks bestimmen. Zu diesem Behuf theile man den Durchmesser in die verlangten (hier sieben) Theile, nehme die Länge a b des Durchmessers und beschreibe mit dieser Oeffnung des Zirkels die Bögen a c und b c. Von dem Durchschnittspuncte c ziehe man eine Gerade durch den zweiten Theilpunct und schneide mit ihr den Kreis (in d): so ist die Sehne a d eine Seite des verlangten Siebenecks, die man noch auf dem Kreise herumzutragen hat. Hat man andere Vielecke zu bilden, so muß auch der Durchmesser in eine, den Ecken entsprechende Anzahl gleicher Theile getheilt werden.

§. 33. Die Größe eines Kreises zu finden, welcher ein reguläres Polygon aufzunehmen vermag, dessen Seite a b gegeben ist. Fig. 4.

Man gehe von dem Sechseck aus, dessen Construction beschrieben und sehr einfach ist; der zugehörige Kreis ist der a b f d e. Nun theile man den Radius c d in sechs gleiche Theile, so erhält man in jedem der Theilpuncte den Mittelpunct des Kreises für ein Vieleck von der beständigen Seite a b, durch deren Endpuncte de

Kreis jedesmal gelegt werden muß. So daß man, z. B., in dem aus d beschriebenen Kreise die Seite a b 12 Mal herumtragen kann, um ein Zwölfeck zu bilden.

§. 34. Durch drei beliebig angenommene Puncte einen Kreis zu legen. Fig. 5.

Drei Puncte, die nicht in einer Richtung liegen, bestimmen immer einen, aber nur den einen Kreis. Um den Mittelpunct dieses Kreises zu finden, denke man sich die Verbindungslinien (Sehnen) a b und b c; wo es dann darauf ankommt, diese Sehnen zu halbiren und in den Halbirungspuncten Senkrechte zu errichten, welche, nach geometrischen Sätzen, stets durch den Mittelpunct des Kreises gehen, folglich in ihrem Durchschnitte diesen bestimmen. Diese verbundenen Operationen können durch eine einzige erledigt werden. Man ziehe nämlich aus b einen beliebigen Kreisbogen, dessen Radius über die Hälfte der längsten Seite reicht; und mit demselben Halbmesser Durchschnittsbögen aus a und c, als Mittelpuncten. Zieht man durch die Kreisdurchschnitte gehörig verlängerte Linien, so erhält man in deren Durchschnitt den Mittelpunct des Kreises, der die drei gegebenen Puncte aufnimmt.

§. 35. Eine Senkrechte in der Mitte und in dem Endpuncte eines Kreisbogens a c e zu legen. Fig. 6.

Es seien e und c die gegebenen Puncte. Man beschreibe den Kreisbogen c d aus e, der durch c geht, setze den Zirkel mit der nämlichen Oeffnung in c ein und beschreibe den Bogen a b e. Aus a und e schlage man Kreuzbögen bei f, so ist f c die Senkrechte auf dem Bogen a c e. Für den Punct e nehme man das Maß a b, setze den Zirkel in c ein und mache bei d einen Durchschnitt des früher mit c e aus e beschriebenen Bogens; zieht mon dann d e, so ist diese eine Senkrechte für den Bogen a c e in dem Puncte e. Diese Linien schneiden stets den Mittelpunct des Kreises, wenn man sie gehörig verlängert.

§. 36. Practische Methode, einen Kreisbogen mittelst einer Schmiege ohne Zirkel zu zeichnen. Fig. 7.

Soll man einen Kreisbogen aufreißen, der durch die Puncte a, b und c geht, so schlage man in a und c zwei Stifte, öffne die Schmiege dergestalt, daß, wenn die Schenkel an den beiden Stiften anliegen, die Spitze in b trifft. Verschiebt man nun die unveränderte Schmiege an den Stiften a und c, so giebt die Spitze so viel Puncte an, als man nöthig zu haben glaubt, um eine Curve durchlegen zu können, die dann ein Kreisbogen ist.

Mnn kann sich dieses Mittels bedienen, wenn man in einer Zeichnung Bögen zu zeichnen hat, deren Mittelpunct weit außerhalb der Zeichnung fällt, man einen Stangenzirkel nicht zu Hand hat, oder daß wegen Mangel an Raum dessen Einsetzen nicht zu bewerkstelligen ist. Man kann dann ein Stück hartgeleimten Carton nach dem Winkel a b c schneiden und mit diesem operiren.

§. 37. Eine andere Art, für solche Fälle einnen Kreisbogen aufzureißen, ist folgende. Fig. 8.

Es sei a b eine Sehne des Bogens und c d dessen Höhe und senkrechte Mittellinie. Man ziehe eine Gerade von a nach c und eine andere von b nach c; setze die Zirkelspitze in a ein und beschreibe beliebig den unbestimmten Bogen f, einen gleichen mit derselben Oeffnung aus b. Man theile dann beide Bögen in eine willkürliche Anzahl gleicher Theile bis zu den Linien a c und b c, wie es hier mit 3 Theilen geschehen ist, und trage noch eine Anzahl solcher Theile auf beide Bögen, wie e und f. Aus den Puncten a und b ziehe man nun Strahlen durch diese Theilpuncte. Diese Strahlen kreuzen sich beiläufig auf der Höhenlinie c d und geben paarweise, wie sie correspondiren, Durchgangspuncte m, n ꝛc. für den Kreisbogen, den man aus freier Hand leicht einzeichnen kann.

Diese Construction ist sehr vortheilhaft bei Absteckung großer Bögen bei Bauten, auf großen Plätzen, Gärten ꝛc. anzuwenden, welche einen zu langen Radius haben, als daß man die Puncte durch Schnuren oder Latten bestimmen könnte.

§. 38. Eine andere Methode, dergleichen Bögen zu bilden. Fig. 9.

Man entwerfe ein Parallelogramm, dem man zur Länge die Sehne a b des verlangten Bogens und zur Breite die Höhe desselben giebt, und ziehe die Mittellinie c d. Dann theile man jede Hälfte der Sehne in eine unbestimmte Anzahl gleicher Theile und in ebensoviel unter sich gleiche Theile die Seiten des Rechtecks, die man durch Linien mit c verbindet. Auf jede dieser letztern Linien fälle man aus den Theilpuncten der Sehne Senkrechte m n, o p, q r ꝛc. (welches man nur auf der einen Hälfte nöthig hat, indem man die Puncte der einen leicht in die andere Seite übertragen kann). Die Fußpuncte m, o, q dieser Senkrechten sind sämmtlich Durchgangspuncte für den zu zeichnenden Kreisbogen. Zugleich geben die Senkrechten, die man auf a c und b c in den Endpuncten der Sehne errichtet, in dem Schnittpuncte d einen Endpunct des ganzen Durchmessers, wovon c der andere ist; auch die Senkrechten der anderen Seite weisen nach dem Puncte d, welcher nöthigenfalls zur Rectification derselben dienen kann.

e. Von den Ovalen und Ellipsen und deren Construction.

§. 39. Unter einem Oval versteht man gewöhnlich einen länglich ausgedehnten Kreis und beschreibt es mit mehren Kreisbögen, die sich aber tangiren müssen, wenn man sie verlängert; dagegen nennt man Ellipse eine ähnliche Figur, deren Construction aus den Eigenschaften des Kegelschnittes abgeleitet ist. Diese letztere kann zwar auch durch Zirkel und Lineal, nicht aber durch Verbindung einzelner Kreisbögen, sondern allein durch Bestimmung einzelner Puncte der Curve construirt werden, welche man zuletzt aus freier Hand verbindet.

Jene Ovale, die in den Figuren 10 bis 14 dargestellt sind, sind ebensowenig eigentliche Ovale, Eilinien; nur der Fig. 3, Taf. III kommt diese Benengung zu, man könnte jene besser Pseudo-Ellipsen nennen.

Eine wahre Ellipse entsteht, wenn ein Cylinder oder ein Kegel schräg durch die Axe geschnitten wird. Diese in sich zurückgehenden krummen Linien haben jede zweierlei Durchmesser, die aber hier Axen heißen. Dergleichen Ellipsen zeigen die Figg. 10 bis 14 und 15 a. Die Linie a b, Fig. 15, ist die große und d g die kleinere Axe. Der Punct c führt zuweilen den Namen „gemeinschaftlicher Mittelpunct"; die Puncte f und e heißen die Brennpuncte der Ellipse, und Linien, wie e m, e o, f d 2c. Fahrstriche (Vectorlinien); der Abstand e f der beiden Brennpuncte heißt die Excentricität.

Construction von Ovalen und Ellipsen.

§. 40. Construction eines Ovals, welches nur in Bezug auf die große Axe bestimmt ist. Fig. 10.

Man theile die Axe in drei gleiche Theile, beschreibe aus den Theilpuncten a und b zwei volle Kreise, aus den Endpuncten der Axe zwei Kreisbögen, welche auf den ersteren Kreisen den Anschluß der übrigen Bögen bestimmen; setze dann in den Durchschnitten c und d der Kreise ein, öffne den Zirkel von d nach e und beschreibe den Bogen e g, aus e aber den Bogen f h, wodurch das Oval geschlossen wird.

§. 41. Ein anderes Oval zu zeichnen, dessen große Axe gegeben ist. Fig. 11.

Hier theile man die Axe in 4 gleiche Theile, zu Bestimmung der Puncte b und c. Man setze den Zirkel in b ein, öffne ihn bis a und beschreibe den Bogen a e f, und mit derselben Oeffnung auch aus a den Bogen e b f. Dasselbe mache man an dem andern Ende der Axe. Dann nimmt man den Abstand e g in den Zirkel, beschreibt aus den 4 Puncten e, g, f, h die Bögen f j, h j, g i und e i, um die Mittelpuncte für die größern Bögen zu erhalten, in welchen man einsetzt, den Zirkel bis e, g, f, h öffnet und mit Beschreibung dieser Bögen das Oval vollendet.

§. 42. Es ist ein Oval zu zeichnen, wenn keine der beiden Axen gegeben ist. Fig. 12.

Man ziehe eine Horizontale und eine sie schneidende Senkrechte, als Richtung für beide Axen uud als Diagonalrichtungen eines Quadrats a b c d, dessen Seiten man verlängert; setze in dem Eckpuncte a ein, öffne bis c und beschreibe den Kreisbogen g e und dann aus b den Bogen f h. Hierauf nehme man d und c als Mittelpuncte, aus welchen man durch die Bögen e f und g h das Oval beendet.

§. 43. Ein ähnliches Oval mit Axenbestimmung zu zeichnen. Fig. 13.

Nach Feststellung der Axen zeichne man das gleichseitige Dreieck d f g auf die halbe große Axe, setze den Zirkel in f ein und beschreibe den Bogen a c, der die Seite des Dreiecks in c schneidet; ziehe die Richtung a c bis an die zweite Seite des Dreiecks: beschreibe aus d den Bogen b e, welcher den Punct e auf der großen Axe bestimmt. Mit unveränderter Oeffnung des Zirkels ziehe man nun aus e den kleinen Bogen des Ovals und den der andern Seite und vollende dann die Figur vollends nach der Vorschrift zu Fig. 11.

§. 44. Die Ellipse, Fig. 14, zu construiren.

Nachdem die beiden Axen n 4 und m i festgestellt worden sind, setze man den Zirkel in das gemeinschaftliche Centrum a ein und beschreibe einen Viertelkreis k 1 2 3 4 auf der kleinen Axe. Man theile diesen Viertelkreis in gleiche Theile, deren Anzahl größer zu nehmen ist, wenn die Ellipse groß oder die Genauigkeit der Curve strenger gefordert wird; fälle aus jedem Theilpuncte Senkrechte auf die große Axe, schneide die verlängerte Senkrechte k e durch den Bogen, der aus a mit der halben großen Axe beschrieben wird, und ziehe a e. Die Senkrechten haben auf letzterer die Puncte b c d bestimmt, die zu Bestimmung der Curve nöthig sind und auf a i aufgetragen werden müssen, so daß a f = a b, a g = a c und a h = a d gemacht wird. Errichtet man aus diesen Puncten Senkrechte, so schneiden diese die Horizontalen, welche aus den Theilpuncten des Kreisbogens kommen, und bestimmen dadurch Puncte der elliptischen Curve in dem einen Viertel der Ellipse, nach denen die drei übrigen Viertel gezeichnet werden können, da sie vollkommen gleich und symmetrisch sind.

§. 45. Eine Ellipse zu zeichnen, wie man sie mittelst einer Schnur ausführen kann. Fig. 15.

Das Entwerfen der Ellipse nach dieser Methode beruht auf dem allgemeinen Bildungsgesetze der Ellipsen. Nach ihm ist die Summe zweier Fahrstriche, wie f m + e m, f n + e n ꝛc. der großen Axe gleich, und jeder Punct der elliptischen Curve, wenn man ihn mit beiden Brennpuncten verbindet, liegt so weit von den Brennpuncten ab, daß die Summe der Entfernung von beiden gleich der großen Axe ist. Diese Summe ist also für alle Puncte eine constante und führt darauf: daß man in die Brennpuncte e und f zwei Stifte schlägt, um jeden die Schlinge eines Fadens legt, der die Länge einer großen Axe hat, dann mit einem dritten Stifte den Faden nach seiner Mitte hin anzieht, daß er einen Winkel bildet und so, den Stift fortführend, die Ellipse aufreißt. Dieses Verfahren ist sehr practisch, um eine vollkommene Ellipse im Großen aufzureißen.

Mit dem Zirkel benutzt man dieses Gesetz bei folgender Construction: sobald die beiden Axen, Fig. 15, bestimmt worden sind, nehme man das Maß der halben großen Axe in den Zirkel, setze in d ein und schneide damit auf der Axe die beiden Brennpuncte e und f ab; nehme eine Oeffnung des Zirkels, z. B., a h, setze in e ein und mache bei o' einen kleinen Bogen; öffne dann den Zirkel in der Weite b h und schneide mit dieser Oeffnung den Bogen o' aus f. Ebenso mache man die Schnitte bei n', mittelst der Abstände a i und b i, indem man die Spitze jedesmal in die Brennpuncte e und f einsetzt, bei n' ꝛc., und zwar so, daß man mit einerlei Oeffnung jedesmal Bögen in allen vier Abtheilungen der Ellipse macht. Zuletzt zeichne man die Curve durch die Durchschnittspuncte aus freier Hand auf.

§. 46. Eine andere Methode, eine Ellipse zu entwerfen. Fig. 15. a.

Man zeichne das Rechteck m n o p mit der großen und kleinen Axe der Ellipse, theile dessen Seiten in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, doch so, daß die längeren Seiten dieselbe Anzahl Theile, wie die kürzeren, erhalten; ziehe, wie die Figur zeigt, Verbindungslinien der Theile untereinander. Man erhält durch die sich schneidenden Linien zwei verschiedene Ovale, nämlich:

1) wenn man an die zu innerst liegenden Theile dieser Linien, als Tangenten, die Curve legt und
2) wenn man letztere durch die innersten Durchschnittspuncte zieht.

Diese Construction hat für den Ebenisten das besondere Interesse, daß das Oval in einer bestimmten, unveränderlichen Beziehung zu dem Rechteck steht, welches demselben zur Grundlage dient. Je mehr Theile die Seiten des Rechtecks erhalten, desto genauer wird die Curve.

Tafel III.

§. 47. Practische Methode, eine Ellipse zu zeichnen. Fig. 1.

Man kann diese Art, eine Ellipse zu zeichnen, in Schnelligkeit bei einer Zeichnung ausführen, wo es oft darauf ankommt, eine Menge verschiedener elliptischen Curven zu entwerfen, wie, z. B., bei Projectionen der beschreibenden Geometrie, wenn man nur die beiden Axen vorher bestimmen kann.

Man nehme ein kleines Lineal, einen Kartenstreif ꝛc., gebe auf diesem die Hälfte der großen Axe an, wenn man nicht vorzieht, den Streif nach dieser Länge zu schneiden. Von dem einen Puncte b, oder von dem Ende in letztem Falle, bezeichne man auch die Hälfte der kleinen Axe, wie b a der Figur.

Nach diesen Vorbereitungen schreite man zum Zeichnen. Man giebt dem Streifen nach und nach verschiedene Lagen, doch so, daß der Punct a immer auf der großen und der Punct oder das Ende c auf der kleinen Axe liegt; an dem Ende b aber zeichne man jedesmal den Punct an, da dieser ein Punct der Curve ist. Nach diesem System ist das Instrument (Ellipsograph) construirt, welches man, Fig. 11, Tafel IX, abgebildet sieht. Man hat verschiedene Instrumente, mit denen man Ellipsen beschreiben kann.

Sie sind zum practischen Gebrauch des Tischlers aber theils zu theuer, theils nur auf Ellipsen kleinerer Dimensionen berechnet.

§. 48. Die Bildung eines eigentlichen Ovals, (einer Eilinie). Fig. 2.

Von der Linie a b aufwärts ist die Curve ein Halbkreis, der Theil unterhalb aber eine halbe Ellipse und kann einzeln aus diesen Elementen gebildet werden

Man theile den Theil der Axe über a b in eine Anzahl gleicher Theile, ebenso den Theil unterhalb in dieselbe Anzahl, hier 4; ziehe durch die obern die Parallelen 3, 2, 1 und fälle aus diesen Puncten Senkrechte nach Unten. Zieht man auch durch die unteren Theile Parallelen durch die Puncte der gleichen Theile (von derselben Anzahl) 1′, 2′, 3′, 4′, so schneiden diese jene Senkrechten in den Puncten, wo die Eilinie aus freier Hand durchzulegen ist.

F. Verschiedene Constructionen, welche zuweilen bei'm Austragen gebraucht werden

§. 49. Von einem gegebenen Puncte a, Fig. 3, außerhalb des Kreises eine Tangente zu ziehen.

Man ziehe von a nach dem Mittelpuncte e; in dem Durchschnittspunct d errichte eine Senkrechte d b und beschreibe mit e a einen Kreisbogen, der d b in c schneiden wird; ziehe e c und verbinde den Durchschnittspunct f mit a, so ist a f die Tangente zu dem Kreise aus dem gegebenen Punct a.

§. 50. **Einen Kreisbogen zu zeichnen, an dem zwei gegebene Linien A B und A C Tangenten sind, wenn 1) gegeben ist der Halbmesser a b oder 2) ein Berührungspunct B.** Fig. 4. und 5.

1) Man verlängere, Fig. 4, die Linien zu ihrem Durchschnitt A, beschreibe mit dem gegebenen Halbmesser aus A Kreisbögen, welche die Linien A m in C und A n in B schneiden; ziehe O C parallel A n und O B parallel A m. Ihr Durchschnitt O bestimmt den Mittelpunct des Bogens D E, und die aus diesem Mittelpuncte auf die gegebenen Tangenten gefällten Senkrechten geben die Berührungspuncte D und E.

2) Man verlängere, Fig. 5, die gegebenen Linien zum Durchschnitt A, halbire den Winkel B A C und fälle aus dem gegebenen Puncte B eine Normale, die A D in O schneidet. Dieser Punct ist der Mittelpunct des gesuchten Bogens C B; und wenn man aus O eine Senkrechte O C auf A C fällt, erhält man den zweiten Berührungspunct C.

Indem man in diesen Figuren aus den Mittelpuncten O Kreisbögen G H beschreibt, deren Halbmesser kleiner, als O B ist, so bildet man Abläufe, welche um ein Plättchen B H und C G, Fig, 5, oder D g und H E vorstehen.

§. 51. **Einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Linien D C, A C und A B tangirt, die sich paarweise schneiden.** Fig. 6.

Man theilt jeden der Winkel durch C F und A E in zwei gleiche Theile. Der Durchschnittspunct O steht von allen drei gegebenen Linien gleichweit ab; zieht man daher auf eine der Linien eine Normale O D, so giebt diese den Radins zu dem tangirenden Kreise.

§. 52. Das Profil zu einem Holm (Handlatte) eines Treppengeländers, Fig. 7, zu zeichnen.

Hierbei kommen folgende beide Aufgaben in Anwendung:

1) den Kreisbogen D B zu finden, der eine gegebene Peripherie A n B, Fig. 8, tangirt, so wie die Gerade C D, deren Berührungspunct in D liegt.

Man zieht E F normal C D durch D, trägt in D F den Halbmesser B O und zieht O F. Auf deren Mitte errichtet man die Normale G E, welche E F in dem Puncte E, dem Mittelpunct des gesuchten Bogens B D, trifft. Zieht man sodann O E, so erhält man den Berührungspunct B, die Grenze dieser Kreisbögen.

2) Einen Kreisbogen zu beschreiben, der einen gegebenen Bogen A B, Fig. 9, und die beiden Linien B C und C D tangirt.

Man halbirt den Winkel B C D durch C E; aus C beschreibt man mit dem Radius A O den Bogen G H und zieht durch H die Parallele H I mit C B. Diese trifft die Verlängerung von E C in J. Man verbindet diese mit dem Mittelpuncte O; die Gerade J O trifft den Kreisbogen G H in G, worauf man C G, und dann O K parallel mit dieser zieht. Der Durchschnittspunct K mit J E ist der Mittelpunct zu dem gesuchten Bogen L M N.

§. 53. Ein Karnieß, Fig. 10 und 11, zu construiren, welcher aus tangirenden Kreisen besteht, die durch zwei gegebene Puncte A B gehen und zum Halbmesser die Hälfte der Entfernung beider Puncte haben.

Man verbindet die Puncte durch A B, auf deren Mitte man eine Senkrechte E F errichtet. Dann beschreibt man aus A und C mit dem Halbmesser A C Bögen bei G und ebenso bei H. Diese Puncte sind die Mittelpuncte der beiden gesuchten Bögen A C und B C, welche zusammen das architectonische Glied bilden, welches man Karnieß nennt.

§. 54. Kreisbögen zu zeichnen, welche durch zwei gegebene Puncte A und B gehen, einander tangiren und einen gegebenen Halbmesser A I haben. Fig. 12 und 12a.

Man theilt die Verbindungslinie A B durch Senkrechte C D, E F und G H in vier gleiche Theile; beschreibt dann mit dem Halbmesser A I (größer als $\frac{1}{2}$ A J) aus A und B Kreisbögen, welche C D in C und G H in H schneiden. C und H sind nun die Mittelpuncte der Bögen A J und J B, die in J einander tangiren.

(Nimmt man nach und nach die Halbmesser größer als A I, so erhält man auf den beziehlichen Senkrechten die Mittelpuncte von Kreisbögen, die ebenfalls die Bedingungeu erfüllen, aber flacher sind.)

Da man auch die jenseitigen Puncte L und K zu Mittelpuncten nehmen könnte, so würde dadurch eine umgekehrte Figur erhalten werden, welche die Lage von a beliebig b, Fig. 12a, hätte.

§. 55. Eine Geländersäule (Docke) mit zwei Verstärkungen zu profiliren. Fig, 13.

Diese Construction giebt zu folgender Aufgabe Anlaß; man beschreibe, Fig. 14, einen Kreisbogen b C der mit zwei gegebenen Bögen a b und C D tangirt und dessen Mittelpunct auf der Geraden b e liegen muß.

Man verlängere b e von b nach H und mache b H gleich dem Halbmesser D G des Kreises C D; ziehe G H und errichte in deren Mitte eine Normale, welche b e in e schneidet. Aus e beschreibe man mit dem Halbmesser e b den Bogen C b; die Linie G e giebt den Berührungspunct C. Der Bogen D F, welcher die Ausbauchnng der Säule vollendet und seinen Mittelpunct auf D G haben und durch den gegebenen Punct gehen muß, wird einfach durch die Senkrechte erlangt, die man inmitten der Sehne D F errichtet.

Man sieht aus Fig. 13, daß sich die Operation am unteren Theile symmetrisch wiederholt.

§. 56. **Das Profil einer einfachen Geländerdocke, Fig. 15, zu zeichnen.** Fig. 16, 17 und 18.

Die Lösung dieser Aufgabe besteht zuvörderst darin: einen Kreisbogen durch zwei Puncte A und B, Fig 16, gehen zu lassen, dessen Mittelpunct auf einer horizontalen Linie B C liegt; dann diesen Bogen mit einem andern D E zu verbinden, der durch einen Punct D geht und dessen Mittelpunct auf einer mit B C parallelen Linie D F liegt.

Man errichtet auf der Mitte von B A eine Normale, welche B C in O schneidet, und dieß ist der Mittelpunct des ersten Bogens A B E; um den Mittelpunct F des zweiten Bogens D E zu finden, der mit dem ersten verbunden wird, verfährt man wie Fig. 8.

Der Fuß der Geländersäule ist nach einem Profil ausgekehlt, welches man die Einziehung nennt.

Diese Curve wird auf verschiedene Weise gezeichnet; die einfachsten Lösuugen sind die beiden folgenden:

1) Die Curve wird durch, sich gegenseitig und mit zwei parallelen Linien A B und C D in A uud C tangirende Kreisbögen construirt, Fig. 17. Aus den Puncten A und C zieht man Senkrechte C O und A E und theilt diese letzte in drei gleiche Theile. Mit dem ersten Theile A F beschreibt man den Bogen A G H, trägt F A in C I und zieht I F, die man durch K O halbirt. Der Durchschnittspunct O der verlängerten Senkrechten C I ist der Mittelpunct des Bogens C H, der den ersten tangirt. Diese Lösung ist bei Fig. 15 angewendet.

2) In Fig. 18 ist die Einziehung A D B durch zwei Kreisbögen construirt, welche durch die beiden Puncte A, B gehen und sich tangiren.

Bei Lösung dieser Aufgabe nimmt man an, daß die Centra beider Bögen auf einer horizontalen Linie C D liegen, die parallel mit den beiden Geraden E F und B G sind und durch die beiden gegebenen Puncte gehen.

Aus dem Puncte A fällt man eine Senkrechte A I auf C D; der Punct I ist der Mittelpunct des ersten Bogens A D. Man zieht die Sehne B D, auf deren Mitte eine Normale, die C D in O schneidet, welches der Mittelpunct des gesuchten Bogens B G D ist. Diese Construction wird hauptsächlich bei der Jonischen, Corinthischen und der zusammengesetzten (composita) Ordnung ausgeführt.

§. 57. Eine Spirallinie zu zeichnen, deren Windungen unter sich in allen Puncten den Abstand gleich h k haben. Fig. 1, (Taf. IV.)

Man nennt diese Art von Spiralen „archimedische Spiralen“ und verfährt bei deren Construction folgendermaßen: wenn a der Anfangs- (erzeugende) Punct ist, der sich dem festen Puncte c bei jeder Umdrehung um die Linie $\beta\,\gamma$ nähert, theile man die Linie a o = h k in eine beliebige Anzahl, z. B. in 8, gleiche Theile und ziehe ebensoviel Radien c 1, c 2, c 3 . . . ., welche gleiche Winkel unter sich bilden; alsdann beschreibe man aus dem Puncte c acht Kreisbögen, welche durch die Theilungspuncte der Linie a o gehen, so werden aus deren Durchschnitten mit den beziehlichen Radien acht Puncte der Curve bestimmt, welche sich auf der ersten Windung befinden.

Auf gleiche Weise können auch acht Puncte der zweiten und ebensoviel Puncte der dritten Windung construirt werden.

g) Von den Körpern. Tafel III.

§. 58. Allgemeine Begriffe.

Ein Körper ist der Theil des Raumes, der drei Ausdehnungen, Länge, Breite (Dicke) und Höhe (Tiefe), hat; dessen Begrenzungen sind Flächen, und da diese eben oder krumm sein können, so hat man ebenflächige und krummflächige Körper.

1) Ebenflächige Körper.

Prismen. Ein Prisma hat stets zwei ähnlich-gleiche (congruente) Flächen zu Grundflächen, und zur seitlichen Begrenzung Parallelogramme.

Ist das Prisma ein geradstehendes, so sind die Seitenflächen Rechtecke; bei einem schrägen oder schiefstehenden, wo die Mittellinie oder Axe nicht senkrecht der Grundfläche ist, aber sind alle oder zum Theil Rhomben oder Rhomboiden.

Man benennt die Prismen nach der Anzahl der Seiten ihrer Grundflächen und hat dann: dreiseitige, vierseitige, fünfseitige (oder kantige) 2c.

Sind die Grundflächen reguläre Vielecke, so nennt man solche Prismen zuweilen reguläre Prismen.

Fig. 19 und 20 zeigen zwei vierseitige Prismen; ihre Grund- und Seitenflächen sind sechs Rechtecke; dergleichen Prismen führen auch den speciellen Namen Parallelepipeden, und wenn alle Grund- und Seitenflächen Quadrate sind, Würfel, Cuben.

Fig. 21 ist ein dergleichen schiefes;

Fig. 22, ein dreiseitiges Prisma, mit zwei Dreiecken zu Grundflächen und drei Rechtecken zu Seitenflächen;

Fig. 23, ein dergleichen schiefes;

Fig. 24, ein fünfseitiges Prisma, dessen Grundflächen Fünfecke, die Seitenflächen Rechtecke sind;

Fig. 25, ein dergleichen schiefes;

Pyramiden sind Körper, die ein Drei-, Vier- oder Vieleck zur Grundfläche und Dreiecke als Seitenflächen haben, die sich in einer Spitze vereinigen.

Man hat ebenfalls gerade und schiefe. Die Höhe einer Pyramide ist die Senkrechte, welche von der Spitze aus auf die Grundfläche oder deren Verlängerung gedacht wird. Ist die Grundfläche eine reguläre und die Pyramide eine gerade, so nennt man die Verbindungslinie ihrer Mitte mit der Spitze die Axe der Pyramide.

Fig. 26 stellt eine vierseitige gerade Pyramide dar. Sie hat als Grundfläche ein Viereck und als Seitenflächen gleichschenkelige Dreiecke;

Fig. 27, eine dergleichen schiefe;

Fig. 28, eine senkrechte dreiseitige Pyramide, deren Grundfläche ein Dreieck, jede Seitenfläche ein gleichschenkeliges Dreieck ist;

Fig. 29, eine schiefe dergleichen;

Fig. 30 ist eine gekürzte oder abgestumpfte Pyramide mit fünfseitiger Grundfläche und fünf Trapezen zu Seitenflächen. Die Grundebenen liegen stets parallel und sind ähnliche Figuren. Sind die Grundflächen nicht parallel, so heißt sie eine schiefgeschnittene Pyramide.

2) Rundflächige Körper.

Cylinder, Walzen, sind Körper, welche zwei parallele, kreisrunde oder anders gerundete Grundflächen und eine gebogene Seitenfläche haben.

Sind die Grundflächen Kreise, so heißt der Körper ein Kreiscylinder; man hat ebenfalls senkrechte oder gerade und schiefe Cylinder. Die Mittelpuncte der Grundflächen durch eine Linie verbunden, giebt die Axe. Zieht man eine Gerade auf der Außenfläche des Cylinders parallel der Axe, so nennt man diese die Erzeugungslinie des Cylinders; die Außenfläche selbst heißt der Cylindermantel.

Fig. 31 ist ein gerader Kreiscylinder;

Fig. 32, ein dergleichen schiefer. Ein gerader Kreiscylinder wird aber nicht zu einem schiefen, wenn man ihn schräg durch die Axe schneidet, wodurch der Körper eine schräge Stellung annimmt, wenn man ihn auf die so geschnittene Grundfläche stellt. Die Grundflächen eines schrägen Kreiscylinders und alle mit ihnen parallelen Schnitte bleiben immer Kreise. Ebenso mit dem Kreiskegel, nur ist die Axe geneigt gegen die Grundflächen.

Der Körper, den man Kegel nennt, hat einen Kreis oder eine in sich zurückkehrende Curve zur Grundfläche und eine gebogene Außenfläche, die sich zur Spitze schließt. Man kann ihn als eine Pyramide betrachten, deren Grundfläche ein Polygon von einer unendlichen Anzahl Seiten ist; sowie man auf gleiche Weise den Cylinder als Prisma erklären kann.

Es giebt Kreiskegel, senkrechte und schiefe.

Fig. 33, ein gerader oder senkrechter Kreiskegel;

Fig. 34, ein dergleichen schiefer;

Fig. 35, ein abgekürzter, wo der Schnitt parallel der Grundfläche geschehen. Ist letzteres nicht der Fall, so nennt man ihn einen schiefabgeschnittenen Kegel; die Schnittfläche ist dann eine Ellipse.

Fig. 36, ein Ellipsoid. Es wird durch die Bewegung einer Ellipse um eine ihrer Axen gebildet.

Tafel IV.

Fig. 4. Ist die Drehfläche ein Kreis, so entsteht die Kugel, welche als Körper die Eigenschaft hat, daß alle Puncte der äußern krummen Fläche (Kugelfläche) von einem innerhalb liegenden Puncte (Centrum, Mittelpunct) gleichen Abstand haben. Alle Durchmesser sind gleich und endigen sich an der Kugelfläche in den beziehlichen Polen. Ein Kreis, der durch zwei zusammengehörige Pole geht, heißt ein größter Kreis und die halbe Kreislinie selbst ein Meridian.

3) Außergewöhnliche Körper.

Außer diesen gemeinsten Körpern giebt es noch viele andere reguläre Körper.

Fig. 5, das Tetraëder, dessen Begrenzungsflächen aus vier gleichseitigen Dreiecken bestehen. Es ist eine Pyramide, aber eine reguläre, d. i. ein Körper, dessen sämmtliche Ecken in einerlei Kugelfläche liegen, und der deßhalb auch aus einer Kugel geschnitten werden kann, wie es mit allen nachfolgenden der Fall ist.

Fig. 6, das Hexaëder oder der Würfel, von 6 Quadraten eingeschlossen, gehört zu den Prismen; vergleiche die Erklärung zu Fig. 4.

Fig. 7, das Octaëder, mit einer Oberfläche von acht gleichseitigen Dreiecken. Es besteht aus zwei Pyramiden, deren Grundfläche Quadrate, die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.

Fig. 8, das Dodekaëder, wird von zwölf regulären Fünfecken umgrenzt.

Fig. 9, das Ikosaëder, dessen Grenzflächen aus 20 gleichseitigen Dreiecken bestehen.

Außer den genannten Polyëdern giebt es noch eine große Anzahl anderer, die theils aus congruenten Flächen gebildet sind und dann unter die regulären Körper gehören; theils auch aus mehrerlei Flächen zusammengesetzt sind, deßhalb nur symmetrische Bildung haben und unter die irregulären Körper gerechnet werden müssen, sobald ihnen die Bedingung abgeht, daß sämmtliche Ecken in einer Kugelfläche liegen. Dergleichen Körper aus dem Vollen zu schneiden, so daß sie genau diese Bedingung und die der ähnlichgleichen Begrenzungsflächen erfüllen, ist für den Tischler eine schöne, nicht leichte Aufgabe.

h. Von der Abwickelung der Körper.

§. 59. Die Abwickelung der Körperoberflächen, oder die Grundlegung der Netze ist wichtig, um daraus die Schablonen zu ihrer Anfertigung entnehmen zu können, als auch bei der Zulage einer Menge anderer Arbeiten, sowie auch, um Zeichnungen richtig zu verstehen. Diese Abwickelungen werden am Schwierigsten bei schiefstehenden und krummflächigen Körpern, zugleich aber bei solchen am Unentbehrlichsten. Einen Körper abwickeln, nennt man überhaupt das Verfahren: sämmtliche Begrenzungsflächen im Zusammenhange in einer Ebene durch Zeichnung auszubreiten. Bei ebenflächigen Körpern nennt man gewöhnlicher einen solchen Riß „das Netz".

§. 60. Abwickelung eines geraden dreiseitigen Prisma's.

Fig. 11 sei der geometrische Aufriß und Fig. 10 der Grundriß des Prisma's. Um das Netz desselben, Fig. 12, zu zeichnen, ziehe man zwei Horizontale in einem Abstande, der gleich der Höhe des Prisma's ist, trage auf selbige die drei Linien des Dreiecks im Grundriß Fig. 10 in a b c d a und errichte in diesen Puncten Senkrechte zwischen den beiden Horizontalen, womit das Netz vollendet ist.

§. 61. Abwickelung eines schiefen vierseitigen Prisma's Fig. 15.

Hat man den geometrischen Aufriß, Fig. 13, und den Grundriß, Fig. 14, entworfen, so verlängere man die untere und obere Linie des Aufrisses, ziehe in einem beliebigen Abstande die Linie a e parallel mit der Seite des Aufrisses, trage auf die Verlängerungen das Maß a b des Grundrisses und ziehe b f parallel a e. Auf a e errichtet man die Senkrechte a d, zieht mit dieser eine

Parallele durch e und zwei andere durch b und f, trägt auf die letztere das Maß b c des Grundrisses und schiebt durch c eine Parallele mit a e ab. Dann trägt man das Maß von c d des Grundrisses aus c der Abwickelung auf die Linie a d, zieht c d, durch d eine Parallele mit a e und eine andere mit c d durch den obern Punct der Linie d.

Endlich trägt man das Maß im Grundriß von a d in die Abwickelung von d nach a, auf die Linie a a und zieht noch durch a eine Parallele mit a e.

§. 62. Die Abwickelung der Oberfläche einer geraden dreiseitigen Pyramide zu zeichnen.

Die geometrische Ansicht dieser Pyramide findet sich in Fig. 16 und der Grundriß in Fig. 17. Man ziehe zuerst aus der Spitze d des Grundrisses eine Senkrechte e d mit der obern Seite d c, und senkrecht auf a d die Parallele a a.

In einigem Abstande von dem Grundrisse ziehe man a e parallel mit a d des Grundrisses, welche als Grundlinie für die Fig. 18 dient; nehme die senkrechte Höhe e d des Aufrisses, trage sie auf e d Fig. 18 und ziehe d a. Nun nehme man das Maß d a Fig. 18 in den Zirkel, setze in einen Punct d Fig. 19 ein und beschreibe den Kreisbogen a a unbestimmt, auf welchen man das Maß der Seiten a b, b c und c a trägt, wodurch sich die Kantenlinien d a, d b, d c und d a bestimmen.

§. 63. Die Abwickelung der Oberfläche einer schiefen vierseitigen Pyramide zu construiren.

Vorausgesetzt, die geometrische Ansicht Fig. 21 und der Grundriß Fig. 20 der Pyramide seien entworfen, fälle man eine Senkrechte von der Spitze f des Aufrisses auf die Axe des Grundrisses Fig. 20, ziehe aus i die Linie e f, Fig. 23, senkrecht auf b c Fig. 20, dann beliebig eine Linie g e, Fig. 23, parallel mit b c; nehme die

Höhe e f, Fig. 21, trage sie in Fig. 23 von e nach f, ziehe g f, dann nach Belieben die Linie a b, Fig. 22, und errichte auf dieser Linie die Senkrechte g f. Hierauf nehme man den Abstand g f, Fig. 23, trage ihn auf die Senkrechte, Fig. 22, aus dem Puncte g nach f, nehme auch den Abstand e b, Fig. 21, um ihn in Fig. 22 aus dem Puncte g nach b zu setzen; endlich messe man im Grundrisse den Abstand des Punctes a von b, trage ihn in Fig. 22 von b nach a und ziehe die Linien a f und b f Fig. 22. Dieses Dreieck ist eine Seite der abgewickelten Pyramide.

Man setze den Zirkel in f ein, Fig. 22, öffne ihn bis a und beschreibe unbestimmt einen Bogen, dann noch aus demselben Puncte einen Bogen b c, nehme den Abstand d a von dem Umfange des Grundrisses, Fig. 20, trage ihn in Fig. 22 von a nach d, desgleichen b c und c d, ziehe von d nach a, von b nach c und von c nach d Linien und aus den nämlichen Puncten Gerade nach f, so ist die Abwickelung gemacht.

§. 64. Die Abwickelung einer fünfseitigen gekürzten Pyramide zu zeichnen.

Fig. 24 zeigt den Grundriß*), Fig. 25 den geometrischen Aufriß und Fig. 26 das zu entwerfende Netz. Man sieht, daß das Verfahren, welches man bei Fig. 16 beobachtete, auch hier angewendet werden muß. Die Oeffnungen des Zirkels, mit denen man die Kreisbögen g und f, Fig. 26, beschrieben hat, sind die Längen h g und h f, Fig. 25, und aus dem Grundrisse sind die Linien a b, b c . . . auf den größeren Kreisbogen f der Abwickelung getragen worden, und die Kanten nach der Spitze h gezogen.

*) Der Deutlichkeit wegen ist daselbst die Spitze vollständig gezeichnet.

Tafel V.

§. 65. Die Abwickelung eines geraden Cylinders zu zeichnen.

Man sieht in Fig. 1 den Grundriß und in Fig. 2 den geometrischen Aufriß des Cylinders. Man ziehe die beiden Höhenparallelen der Abwickelung, Fig. 3 f i und a d, senkrecht auf die Erzeugungslinien des Cylinders, dann a f parallel der Erzeugungslinie, also senkrecht auf a d; theile den Umfang des Grundrisses, Fig. 1, in so viel gleiche Theile, als man zur Genauigkeit für nöthig hält, und trage diese Theile auf a d von a nach d^o, d^o e^o... Fig. 3; in jedem solchen Theilpuncte errichte man Senkrechte auf a d bis zur obern Parallele, wie d^o, e^o, b^o ... d, so ist die Abwickelung beendet*).

Eine regelmäßige um den Cylinder gewundene Linie (Schraubenlinie) wird auf der Abwickelung als schräge Gerade erscheinen und sich nach Umständen der Schraubensteigung so oft wiederholen, als die Höhe des Cylinders gestattet.

Da dergleichen Aufzeichnungen von Schraubenlinien auf einen Cylinder bei Tischlerarbeiten zuweilen vorkommen können, so möge das Folgende

§. 66 die Aufzeichnung einer Schraubenlinie nach einer bestimmten Steigung.

lehren.

Es sei z. B, der Cylinder, auf welchen die Schraubenlinie aufgerissen werden soll, 18 Zoll hoch und 2 Zoll

*) Man kann die Länge der Abwickelung genauer durch Rechnung finden, indem man sie durch die beschriebene Operation nur annähernd und stets zu klein erhält. Nimmt man auf irgend einem verjüngten Maßstab den Durchmesser der Grundfläche und multiplicirt das genommene Maß mit $3,\frac{14}{100}$, so giebt das Product die ziemlich genaue Länge von **a d**. Man reicht zuweilen schon aus, wenn man den Durchmesser dreifach nimmt und ohngefähr ein Siebentheil zugiebt.

stark: so werden sechs volle Umgänge auf diese Höhe kommen, wenn man einen jeden 3 Zoll hoch macht. Man mache nach Fig. 1—3 die Abwickelung des Cylinders; ein Theil, der Höhe nach, sei adfi, Fig. 3, so daß ad die abgewickelte Umfangslinie und ac die Höhe des Schraubenganges, gleich 3 Zoll, ist; die Gerade cd ist dann der Schraubengang selbst in der Abwickelung.

Schneidet man das Dreieck adc in festem, etwas steifem Papier aus, windet es dann um den Cylinder, so wird der Punct a auf d, und c senkrecht darüber auf d′ fallen und man kann an der Kante des Papiers die Schraubenlinie dc auf die Cylinderfläche aufzeichnen. Hiermit ist ein Umgang der Schraube beendet. Um den zweiten, dritten ꝛc aufzureißen, lasse man den Cylinder durch eine Drehbewegung um seine Axe rund laufen und zeichne um die Oberfläche die Kreislinie d′ c vor. Legt man an diese das Dreieck wieder an, so daß dessen Spitze d in d′ zu liegen kommt, so erhält man bei dessen Umwickelung den zweiten, und so fort den dritten, vierten ꝛc. Schraubengang; der letzte muß senkrecht über d und an der oberen Cylindergrundfläche schließen.

Kann man die ganze Abwickelung des Cylinders auf Papier zeichnen, die ganze Höhe in die vorgeschriebenen gleichen Theile theilen, und verbindet dann die Puncte wie dc, d′c′ . . ., so darf man nur das Papier straff aufrollen und befestigen, um die Gänge durch Nadelstiche, oder indem man auf der Schraubenlinie sofort einschneidet, genau zu erhalten.

Das Aufzeichnen mittelst Umwickeln eines parallel geschnittenen Streifen Papiers ist bei Weitem unsicherer und erfordert viel Versuche, bevor man zu dem gewünschten Resultate gelangt.

§. 67. Die Abwickelungsfläche eines schrägen Cylinders zu entwerfen.

Man theile auch hier den Grundriß Fig. 5 wieder in beliebige gleiche Theile, ziehe aus den Theilpuncten

Senkrechte nach der Grundlinie des Aufrisses, Fig. 4, und durch die Durchschnitte auf diesen Parallelen mit der Erzeugungslinie hk des Cylinders. Hierauf ziehe man die Seitenlinie ab der Abwickelung, Fig. 6, parallel mit der Erzeugungslinie des Cylinders; ziehe senkrecht mit ihr aus den Puncten h, g, f . . . b Parallelen, nehme das Maß der Theilung im Grundriß und trage es von b ab auf die zweite Parallele nach c, von c auf die dritte nach d, von da auf die vierte Parallele nach e u. s. f. von h aus aber wieder auf die Parallelen rückwärts, lege durch diese Puncte die Curve b . . . i und die Parallelen mit ab, gebe diesen sämmtlich die Länge von ab, so ergiebt sich auch die untere Curve und die Abwickelung mit ihrer Begrenzung.

§ 68. Den abgewickelten Kegelmantel zu zeichnen.

Die Abwickelung beschreibt ein Dreieck, dessen gleiche Schenkel gleich der Erzeugungslinie, die Grundlinie aber ein Kreisstück ist, wovon der Radius dieselbe Erzeugungslinie, die Länge des Bogens aber gleich der Peripherie der Grundfläche des Kegels ist. Man hat daher in letzter Beziehung wie bei dem Cylinder zu verfahren, indem man die Peripherie in beliebige gleiche Theile theilt und dieselbe Anzahl dieser Theile auf den vorher beschriebenen Bogen trägt, wie in Fig. 1 — 3 zu sehen ist.

Aus dieser Abwickelung die eines abgekürzten Kegels herzustellen, ist noch einfacher, da der Radius des kleineren Bogens gleich der Erzeugungslinie des abgeschnittenen Stückes ist.

Man sieht, daß das Verfahren bei der Abwickelung eines Kegels dasselbe wie bei der Pyramide ist, wenn man nämlich den Kegel als eine Pyramide von einer unendlichen Anzahl Seiten betrachtet, sowie den Cylinder als ein solches Prisma.

§. 69. Eine Spirale, die man regelmäßig um einen Kegel Fig. 2 legt, erhält in der Abwikkelung die Figur der Curve, Fig. 3, Taf. IV. Um eine solche (archimedische) Spirale, die Umwickelung um den Kegel und deren Abwickelung zur Ebene zu construiren, verfahre man wie folgt:

Es sei der Kreis a, 1, 2 . . . a, Fig. 1, die horizontale Projection oder die Grundfläche des Kegels, c die der Spitze. Nun hat eine dergleichen Spirale die Eigenschaft, daß der radiale Abstand von je zwei Windungen eine constante Größe, hier gleich a o, ist, daß also der Punct a, indem derselbe, sich c mehr und mehr nähernd, die Spirale beschreibt, bei jedem Umlauf um die Größe a o der Mitte c näher gerückt ist. Um dieses Näherrücken auf die ganze Curve des Umlaufs verhältnißmäßig zu vertheilen, theile man den Kreisumfang in eine beliebige Anzahl (hier 8) gleiche Theile und ziehe die Radien a c, 1 c, 2 c, ... In a o trage man die gegebene Linie, gleich dem Abstande der Windungen unter sich und theile diese in ebensoviel gleiche Theile wie den Umfang. Zieht man durch diese letzteren Theilpuncte aus dem Mittelpuncte c concentrische Kreise, welche die, mit den Theilpuncten gleichnamigen Radien schneiden, verbindet dann diese Durchschnittspuncte durch eine stete Curve, so hat man den ersten Umgang der Spirale gezeichnet. Mit dem zweiten Umgange, wo wieder o p = a o, könnte man auf gleiche Weise verfahren, wenn es nicht kürzer wäre, die Größe a o aus jedem Durchschnittspuncte der ersten Spirale so oft auf die Radien nach c hinzutragen, als es geht, ohne c zu überschreiten. Dadurch sind alle Puncte bestimmt, in welchen die Windungen der Spirale die Radien durchschneiden, und durch deren Verbindung die Spirale selbst.

Diese wird nun auf gewöhnliche Weise in die geometrische Verticalprojection oder den Aufriß, Fig. 2 übergetragen. Man zieht nämlich aus den Fußpuncten a, 1, 2, 3 . . . Fig. 2, Erzeugungslinien nach der Spitze z des Kegels. Da nun jeder Radius in Fig. 1 in senkrechter Ebene mit der gleichbezifferten Erzeugungslinie liegt, so muß auch jeder Durchschnittspunct auf ersteren senkrecht unter dem Puncte liegen, wo die Spirale durch letztere geht, und läßt sich durch eine Normale mit x y leicht auf diese übertragen.

(Man beachte hierbei, daß die punctirten Stücke der Curve auf der Hinterseite des Kegels liegen, daher nicht sichtbar sind.)

§. 70. Es ist die Spirale noch in die Abwickelung des Kegels überzutragen.

Angenommen, die Abwickelung sei bereits nach der früheren Anweisung geschehen, der Kreis der Grundfläche in die beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, welche mit denen der Abwickelung übereinstimmen: so hat man in den Radien, Fig. 3, die Größe der Erzeugungslinie, in den Radien, Fig. 1, aber die Grundlinie eines Dreiecks c h 3, worin 3 g : h i = m g : k i = m n : k l, d. i. die erst genannten Stücke der Kreisradien stehen mit denen, die mit ihnen auf der Erzeugungslinie h c zwischen gleichen Parallelen liegen, in demselben Verhältniß, wie der Radius in Fig. 1 (horizontale Projection der Erzeugungslinie) zu der Erzeugungslinie selbst. Wenn man daher die Theile h i, i k, k l, Fig. 1, auf den Radius 3 c in Fig. 3 trägt, erhält man so viel Durchgangspuncte der Spirale in der Abwickelung.

Verfährt man auf gleiche Weise auch mit den andern Radien und den zugehörigen Durchschnittspuncten, so kann man die Curven der Windungen in der Abwickelung leicht einzeichnen.

Man bemerke auch hier, daß die Zeichnung sehr vereinfacht dadurch wird, daß die Abstände a o, o p, p q, = a' o', o' p' . . . . = i k', k' l' . . . . sind, daher einfach durch bloßes Umschlagen gewonnen werden können, sobald man die erste Curve a i 6' o' gefunden hat. Diese ist aber ebenso auch zu finden, wenn man wie in Fig. 1 verfährt, den Proportionaltheil i k = k l in a o, Fig. 3, setzt, in (8) gleiche Theile theilt und damit die Durchschnitte auf sämmtlichen Radien bestimmt; oder, was dasselbe ist: man setze in 11′ einen solchen Theil, in 22′ zwei, in 33′ drei solcher Theile u. s. f.

§. 71. Die abgewickelte Oberfläche eines schiefen Kegels zu zeichnen. Taf. V.

Der Grundriß, Fig. 7, ist ein Kreis und in Fig. 8 ist der Kegel im Aufriß dargestellt. Man ziehe nach Gefallen die Linie h g a aus der Spitze des Aufrisses Fig. 8, aus jedem Theilpuncte des Grundrisses Senkrechte nach der Grundlinie des Aufrisses, und aus jedem Schnittpuncte Erzeugungslinien nach der Spitze. In der Spitze h setze man den Zirkel ein und beschreibe auch aus denselben Schnittpuncten Bögen a, b . . . g bis zur Linie h g; von dieser Linie ab aber errichte man in den Durchschnitten dieser Bögen kurze Senkrechte, nehme aus dem Grundrisse der Längen i, j, k, l und m, und trage sie von a h ab in 1, 1; 2, 2; 3, 3 . . . . Zu der Abwickelung nehme man nun die Länge a h und beschreibe, Fig. 9, aus n den Bogen o; für die andern Bögen aber nehme man zu Halbmessern die Länge h 1, h 2, h 3 . . . . h g; ziehe eine beliebige Gerade n o und trage die Theilung des Grundrisses, Fig. 7, von o auf den 2. Kreis, von da auf den 3., von diesem auf den 4ten u. s. f., von dem letzten Kreise aber wieder rückwärts, wie man bei dem schrägen Cylinder verfahren hat. Zieht man durch diese Puncte eine Curve und, nach Befinden, noch die Erzeugungslinien nach n, so ist die Abwickelung fertig.

Auch hier gilt die Bemerkung, wie bei'm Cylinder gemacht worden ist; ein schrägstehender Kegel ist noch kein schiefer. Letzterer hat einen Kreis zur eigentlichen Grundfläche, die Fläche, worauf jener steht, ist aber durch schrägen Schnitt zu einer Ellipse geworden.

§. 72. Das Netz eines Tetraëders zu entwerfen. Taf. IV.

Diese Abwickelung ist sehr einfach, indem man nur Fig. 27 und 28 das Dreieck mit der doppelten Kantenlänge des Tetraëders gleichseitig zu zeichnen und die Mitten der Seiten durch Linien zu einem vierten gleichseitigen Dreieck zu verbinden hat. Eben so einfach ist,

§. 73, das Netz eines Hexaëders, Fig. 11, Taf. V.

in seine sechs Quadrate, welche die Seitenflächen bilden.

§. 74. Das Netz eines Octaëders, Fig. 12 und 13, Taf. V,

ist die doppelte Figur der Abwickelung eines Tetraëders, und die Verbindung nach der 12. Figur zu zeichnen. Ebenso bedarf

§. 75, das Netz eines Dodekaëders, Fig. 14 und 15, Taf. V,

keiner weitern Erläuterung, als die Figur in Bezug auf die Zusammenstellung der 12 Fünfecke giebt.

§. 76, Das Netz eines Ikosaëders, Fig. 1 und 2, Taf. VI,

in seine 20 gleichseitigen Dreiecke ist nicht schwieriger als die Abwickelung der vorigen Körper, und bedarf keiner Erklärung. Mehr Schwierigkeiten macht

§. 77, das Netz der Kugel, Fig. 17 — 21, Taf. V.

Diese Abwickelung kann durch Kugelzweiecke oder auch durch Parallelzonen geschehen.

Nach der ersten Methode theilt man die Peripherie des Grundrisses, Fig. 18, in eine Anzahl gleicher Theile, trägt diese auf die Linie a b, Fig. 20, und beschreibt auf der Linie a b zwei Kreise, die sich außen berühren und die Puncte a und b aufnehmen. Ueber diese Kreise legt man als Tangenten die Linien e f und c d, die mit a b parallel sein werden. In den Theil auf a b halbirt man durch eine Senkrechte, in deren Endpuncten auf c d und e f sich die, näher zu beschreibenden Kreisbogen schneiden. Man suche nämlich zu den 3 Puncten m n a den Mittelpunct, welcher gegen o fallen wird, so daß a o der Halbmesser für alle Bögen ist.

Es ist ersichtlich, daß a b nach beiden Seiten hin verlängert werden muß, um den Einsatz für die Bögen zu erhalten, die näher den Enden liegen.

Die andere Methode, Abwickelung in Zonen, gewährt die wahre Kugelgestalt in ihrer Zusammensetzung noch weniger, als die erstere. Man muß sich dabei die Kugel vorstellen, als wäre sie aus abgekürzten Kegeln, einem Mittelcylinder und zwei Polflächen (Kreisen), zusammengesetzt; die Linie f e d, Fig. 18, stellt die Axe eines eingebildeten Kegels vor, von dem die Linie f b a Erzeugungslinie ist. Die Linie e c b ist dagegen die Erzeugungslinie eines andern Kegels. Man setze den Zirkel in den Punct f ein, öffne ihn bis a, Fig. 18 und beschreibe mit dieser Oeffnung den Bogen g, Fig. 19; man nehme dann die Weite f b, Fig. 18 und beschreibe den Bogen h, Fig. 19, trage von der Mittellinie f j aus auf jede Seite des Bogens g die Theilung des Grundrisses, so daß der Bogen der Hälfte des Kreises im Grundrisse gleich wird, setze den Zirkel in den Punct j der Curve, Fig. 19, ein, öffne ihn bis an ein Ende der Curve und beschreibe den Kreisbogen, in welchen die andern Zonen eingeschlossen sind; für den Bogen i nehme man b e, für den k, e c und für den m den Radius d c, Fig. 18.

Hiermit ist die Operation beendigt und das Netz, Fig. 19, giebt den vierten Theil der Kugelfläche nach Zonen.

i) Von den Schnitten eines Cylinders.

§. 78. Wenn man einen Cylinder senkrecht seiner Axe schneidet, so ist die Schnittfläche ein Kreis, welcher denen der Grundflächen vollkommen gleicht; schneidet man ihn aber schräg durch seine Axe, so wird die Schnittfläche eine Ellipse, wie Fig. 21. Die Ellipse dehnt sich länger, je schräger der Schnitt geführt wird. Bei einem geraden Cylinder sind alle Schnitte parallel der Axe Rechecke; nicht so bei schrägen.

§. 79. Den schrägen Schnitt eines Cylinders zu zeichnen

Hat man den Grundriß, Fig. 22 und den Aufriß des Cylinders, Fig. 21, gezeichnet, so lege man die Schnittlinie a g durch den Aufriß; theile den Kreis des Grundrisses in so viel gleiche Theile, als man will; ziehe durch die Theilpuncte Senkrechte auf die Grundlinie h i bis zur Schnittlinie a g im Aufriß, auf der dadurch die Puncte b, c, d, e, f bestimmt werden. Aus jedem dieser Puncte ziehe man Senkrechte mit der Linie a g, nehme in dem Grundrisse die Länge der Linien g, f, e, d, c zwischen dem horizontalen Durchmesser a b und der Peripherie, und trage sie auf jede der correspondirenden Senkrechten im Aufriß zu beiden Seiten der Linie a g; man erhält so die Puncte für den Durchgang der Ellipse.

Eine solche Curve bildet die Wange einer Wendeltreppe, die sich in vollem Kreise windet, und ist deren Verstreckung, wovon die Zeichnung in Folgendem häufig vorkommen wird.

§. 80. Die Abwickelung eines Cylindermantels, wovon der schräge Schnitt abfällt, aufzutragen.

Man nehme die Theilung des Kreises im Grundriß (Fig. 22), trage sie in gleicher Anzahl auf hi (Fig. 23) und errichte in jedem Puncte eine Senkrechte; nehme nun die Länge ia (Fig. 21), trage sie in Fig. 23 auf die beiden Normalen ha und ia; verfahre ebenso mit den übrigen beziehlichen Linien und zeichne durch die Höhenpuncte die Abwickelungscurve abc . . . a.

k. Von den Kegelschnitten.

§. 81. Ein Kegel kann geschnitten werden:

a) parallel mit der Grundfläche; dann ist der Schnitt ein Kreis) der kleiner wird, je näher der Schnitt nach der Spitze zu geschieht;
b) schräg mit der Grundfläche und durch die Axe entsteht, wie bei dem Cylinder, eine Ellipse, wie Fig. 15;
c) parallel mit der Erzeugungslinie, wie in Fig. 8, wo cd die schneidende Ebene ist. Der Schnitt ist dann eine Parabel (Parabole); und
d) senkrecht auf die Grundfläche oder parallel der Axe; dieser Schnitt heißt dann eine Hyperbel.

Die Schnitte unter c und d haben für den Arbeiter kein practisches Interesse; über die Ellipse ist schon früher das Nöthige gesagt worden.

Tafel VI.
Von der Ausmessung und Berechnung einfacher Flächen und Körper.

A. Von den Maßstäben.

§. 82. Das Zeichnen und der Gebrauch der verjüngten Maßstäbe beruht auf den geometrischen Sätzen von der Proportionalität der Linien und von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

Man zeichnet verschiedene Arten von verjüngten Maßstäben, je nachdem der Gegenstand eine genauere oder wenig genauere Eingehung in die Details verlangt, oder ein weniger abweichendes Verhältniß des Gegenstandes zu der natürlichen Größe es fordert. Für den Gewerbsmann ist es aber wichtig, sich mit dem Gebrauche der verschiedenen Arten bekannt zu machen:

1) der einfachste, unter den mancherlei Arten von dergleichen Maßstäben ist eine Gerade a b, Fig. 1, worauf man die Einheit des Maßes mit seinen Unterabtheilungen aufträgt, so oft als es die Größe des Gegenstandes erfordert, um das längste Maß darauf abnehmen zu können, ohne an den Maßstab ansetzen zu müssen.

Wäre, z. B. der zwölftheilige Fuß (Werkfuß) die Einheit, so kann man entweder in a c zehn solcher Einheiten und dann das Zehnfache derselben, d. i. die Länge a c nach d, e, b . . . tragen; oder man trägt 12 dieser Einheiten von a nach c und ein solches 12faches von c nach d . . . . Im ersten Falle lassen sich immer n • 10 + a, z. B., 30 + 4 Fuß abnehmen; im zweiten Falle ist die Einheit höherer Gattung die Ruthe, und man kann n Ruthen + m Fuß zwölftheiliges Maß abmessen.

Der Gebrauch dieses Maßstabes ist sonach einfach, seine Theilung dem Bedürfnisse nach aber sehr verschieden. Er ist nur da anzuwenden, wo es gestattet werden kann, Bruchtheile der Einheit schätzungsweise abzunehmen: z. B., bei einfachen Baurissen, Modellen u. dergl., oder wenn man das Maßverhältniß einer Zeichnung bezeichnen, dem Benutzer aber überlassen will, sich zum speciellen Gebrauche einen vollkommenern Maßstab zu zeichnen.

2) Vollkommener im mindern oder höhern Grade sind die verschiedenen Arten der sogenannten Transversal-Maßstäbe, Fig 2—7.

Fig. 2 gewährt vor der Fig. 1 den Vortheil, daß man die einzelnen Theile von a bis c nicht aufzutragen hat, welcher besonders dann vortritt, wenn die Länge der zehnfachen Einheit so klein ist, daß deren Theilung unsicher werden würde.

Das Maß einer Linie m n würde nach ihm gleich 10 + 6 = 16 Einheiten sein.

Kleinere Unterabtheilungen der Einheit können auf ihm auch nur schätzungsweise gemessen werden. Die Einfachheit seiner Construction empfiehlt ihn. Weniger gebräuchlich sind die Constructionen Fig. 3 u. 4. Den letzten Maßstab findet man zuweilen auf Zeichnungen architectonischer Ordnungen, wobei ab gleich der halben untern Säulenstärke (Model) gemacht, in vier Theile getheilt wird und vier Parallelen gezogen werden. Die Theile zwischen a, b sind dann die 32 Partes.

In dem letztgenannten Falle bedient man sich auch der Form Fig. 7. Hier nimmt man ab gleich dem Model, trägt von b nach c 32 gleiche beliebige Theile, zieht die Diagonale ac und die Parallelen durch die Theilpuncte. Die Länge mn, z. B., ist hier gleich 14 Partes.

Fig. 6 ist ebenfalls in vielen Fällen bequem; vor allen aber verdient Fig. 5 den Vorzug.

Um einen dergleichen Transversalmaßstab zu zeichnen, trägt man auf eine Gerade ab die Längeneinheit, z. B. Fuß, zehn Mal, wenn es Decimaltheilung, oder zwölf Mal, wenn es Duodecimaltheilung sein soll, von a nach b; dann die Länge von 10 solchen Einheiten, d. i. 1 Ruthe von b nach c, d.., errichtet in a, b, c... Normalen und setzt von a nach h 10 (oder 12) gleiche beliebige Theile, durch welche Theilpuncte man mit ad Parallelen zieht. Verbindet man noch 9h und legt mit dieser Verbindungslinie Parallelen durch 8, 7, 6, 5....0, so ist der Maßstab gezeichnet.

Diese Art Maßstäbe werden bei Feldvermessungen und überhaupt da jedesmal angewendet, wo es darauf ankommt, Unterabtheilungen der Maßeinheit genauer zu haben.

Sind Fig. 5 die Theile von a bis b Ruthen, so hat man auf den Parallelen des Dreiecks omg 1, 2, 3, 4... 10 Fuß, und weil b, 1 = mg, so geben die Parallelen des Vierecks bgn1, von Unten auf gerechnet, 10 + 1, 10 + 2, 10 + 3 ... 10 + 10 Fuß, die bis zur nächsten Transversale 10 + 10 + 1 =

21, 22 . . . Fuß, so daß eine Länge x y gleich 14 Ruthen 7 Fuß ist. Wären die Theile von a bis b Fuß, so wäre x y gleich 1 Ruthe 4 Fuß 7 Zoll Decimalmaß u. s. w.

§. 83. Von einem gut gezeichneten Maßstabe fordert man:

a) ein richtiges Verhältniß der verjüngten Einheit zur wirklichen;
b) die größte Genauigkeit der Theilung, den vollkommensten Parallelismus der Linien und deren möglichste Feinheit;
c) daß die Anordnung der Theilung bequem sei und nicht ein Zusammensetzen abgenommener Maße nöthig mache, und
d) daß dabei bemerkt sei, von welcher Art eines natürlichen Maßes die Verjüngung sein soll.

Soll man einen Riß oder dergleichen im verkleinerten oder vergrößerten Verhältnisse copiren, so gewährt eine Art Maßstab, wie Fig. 8, viel Bequemlichkeit.

Gewöhnlich geschieht dieses Uebertragen mittelst Quadraten, die man von beliebiger Größe über das Original und von verhältnißgleicher über die zu zeichnende Copie legt. Das Verjüngungsverhältniß ist also in den Seiten dieser Quadrate bestimmt. Es bleibt aber nöthig, das man den Abstand der Durchschnitte von Linien, welche die Seiten der Quadrate schneiden, bis zu einer Ecke des Quadrats genauer bestimmen könne, als es das Augenmaß vermag.

Man trage daher, Fig. 8, die Seiten der Verhältniß-Quadrate von a nach c und von c nach f, errichte in a eine Normale und verbinde einen beliebigen Punct d auf ihr mit c und f, zwischen a und d aber ziehe man beliebige Parallelen mit f c.

Man sieht aus der Figur, daß, wenn n o ein Maß des Originals ist, das verhältnißgleiche kleinere in m n gegeben ist, und daß man zu einem Maß des Originals nur diejenige Parallele aufzusuchen hat, die ihm gleich ist, um in dem Dreieck a c d auf dieser Parallele das verhältnißgleiche kleinere Maß aufzufinden.

Die Anordnung eines solchen Proportionalmaßstabes kann auf verschiedene Weise geschehen, stets auf die Aehnlichkeit der Dreiecke begründet.

Da mit dieser die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen in enger Verbindung steht, auch in dem Folgenden die Kenntniß der letztern unentbehrlich ist, so müssen wir hier Einiges darüber einschalten.

§. 84. B. Von den Verhältnissen und Proportionen.

a) Wenn eine Linie A etwa 3 Maßeinheiten, eine andere B etwa 4 dergleichen lang ist, so ist A $\frac{3}{4}$ von B oder B $\frac{4}{3}$ von A; welches man auch durch 3 : 4 oder 4 : 3 ausdrückt. Diese Quotienten oder Brüche nennt man in letzterer Form Verhältnisse und man sagt, A steht zu B in dem Verhältnisse von 3 zu 4.

Der mathematische Ausdruck dafür ist:

$$A : B = 3 : 4;$$

er wird gelesen:

A verhält sich zu B wie 3 zu 4,

und erhält den Namen „Proportion".

Besteht eine solche Proportion, so ändert sich dieselbe nicht, auch wenn man die Linien mit einem doppelt-, drei- oder mehrfach größern oder kleinern Maßstabe mißt, denn es ist $\frac{3}{4}$ stets gleich $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$ ꝛc. und umgekehrt; daher auch $3 : 4 = 6 : 8 = 12 : 16$ ꝛc.

b) Zieht man in einem Dreiecke A C E, Fig. 22 eine Parallele mit einer der Seiten, z. B. B D, so verhält sich:

1) $AB : BC = AD : DE$,
2) $AC : AB = AE : AD$,
3) $AC : BC = AE : DE$,

Desgleichen:

4) $AE : AD = CE : BD$,
oder 5) $AC : AB = CE : BD$,
und 6) $AE : CE = AD : BD$,
7) $AC : CE = AB : BD$.

c) Sind zwei Gerade AD, EH Fig. 23 von mehren Parallelen durchschnitten, so verhalten sich zwei beliebige Stücke der einen jener beiden Linien, wie die beiden Stücke der andern, welche zwischen denselben Parallelen liegen.

Es ist z. B.

8) AB : CD = EF : GH,

9) CI : BD = GK : FH ꝛc.

Die Nutzanwendung dieser Sätze bei dem Gebrauche der obenbeschrieben Maßstäbe, können wir dem Scharfsinne des Lesers überlassen.

Beispiele.

Es sei, Fig. 22, BD parallel CE, AB = 6 Fuß, BC = 3 Fuß, AD = 7 Fuß, so ist DE (nach 1.)

6 : 3 = 7 : BD

woraus folgt: BD = $\frac{21}{6}$ = $3\frac{1}{2}$ Fuß.

Ferner sei:

AB, Fig 23, = 7 Fuß, EF = 9 Fuß, CD = 15 Fuß, wie groß ist GH?

Es ist (nach 8.)

7 : 15 = 9 : GH

und daraus

$$\frac{15 \cdot 9}{7} = 19\tfrac{2}{7} \text{ Fuß}$$

= 19 Fuß 3 Zoll $5\frac{1}{7}$ Linie zwölftheiliges Maß.

Wer sich in dem Besitz eines Proportionalzirkels befindet,*) kann sich desselben anstatt des Maßstabes Fig. 10 bedienen. Er besteht aus zwei Regeln A und B, die sich im Gewinde C bewegen, von dessen Axenpunkt o aus zwei Linien ko und io in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt sind. Soll er angewandt werden, um eine Zeichnung nach einem gewissen Verhältniß einer andern gegebenen zu fertigen, und zwar, daß die

*) Sie werden jetzt wenig mehr gefertigt.

Linien der einen zu den gleichnamigen der andern sich verhalten wie ef : gh, so nimmt man gh in den Zirkel und der Theilpunkt (m) bemerkt, wo die andere Spitze von a aus eintrifft. Hierauf nimmt man ef, setzt in m ein und öffnet den Proportionalzirkel so weit, bis die andere Spitze in den gleichnamigen Punct (n) genau trifft. In dieser Stellung muß das Instrument unverrückt bleiben.

Nun ist z. B.

am : mn = ar : rs = a7 : 7,7 = a19 : 19,19 ꝛc. im Allgemeinen: wie jede beliebige Linie der Originalzeichnung zu der gleichliegenden der Copie.

C. Berechnung des Inhalts einiger der am Meisten vorkommenden Figuren*).

a. Flächenberechnung. (Taf. 1).

§. 85. Ein **Dreieck** wird berechnet, wenn man eine seiner Seiten mit der ihr zugehörigen Höhe multiplicirt und das Resultat (Product) halbirt. Ist z. B.,

---

*) Für diejenigen Leser welche mit den mathematischen Zeichen nicht vertraut sind, dienen folgende Notizen:

+ (**plus**) ist das Zeichen der Addition. Es bedeutet z. B. 3 + 7, daß 7 zu 3 addirt werden soll.

— (**minus**), Zeichen der Subtraction. 10 — 6 zeigt an, daß man von 10 die Zahl 6 abziehen soll.

× oder . bezeichnet die Multiplication. 3 × 5 oder 3 . 5 verlangt die Multiplication von 3 und 5. Man lies't 3 mal 5.

8 : 2 oder $\frac{8}{2}$ schreibt man, wenn 8 durch 2 dividirt (getheilt) werden soll und lies't: 8 getheilt (dividirt) durch 2.

= zwischen zwei Größen gestellt, bedeutet deren Gleichheit. Man lies't 2 . 3 = 6, 2 mal 3 gleich 6.

Noch bemerke man, daß der Ausdruck 4^2 so viel wie 4 . 4 = 16 ist, und daß man ihn „die 2. Potenz von 4 oder das Quadrat von 4 nennt; und so mit jeder andern Zahl. Es bedeutet daher auch $\mathbf{a}^2$, daß der Zahlenwerth von **a** mit sich selbst multiplicirt werden soll.

die Seite (Grundlinie) 10 Zoll, die auf ihr senkrechte Höhe 8 Zoll, so hält das Dreieck $\frac{10 \cdot 8}{2} = 40$ Quadratzoll, oder, da 144 Quadratzoll = 1 Quadratfuß, so hält das berechnete Dreieck $\frac{40}{144} = \frac{5}{18}$ Quadratfuß.

Wenn man Fig. 26 ad als Grundlinie annimmt, so fällt die Höhenlinie cb auf die Verlängerung. Nimmt man aber ac als Grundlinie, so ist de die zugehörige Höhe. Im ersten Falle ist $\frac{ad \cdot bc}{2}$, im zweiten $\frac{ac \cdot de}{2}$ der Inhalt; beide Resultate sind aber immer gleich.

§. 86. Ein Rechteck berechnet man, indem man das Maß zweier anliegenden Seiten, z. B. ac und bc, Fig. 28 ineinander multiplicirt. Sind die Seiten nach Fußen gemessen, so drückt sich der Inhalt durch Quadratfuß aus; sind es Zolle, durch Quadratzolle.

Ist das Rechteck ein Quadrat, Fig. 27, so ist es immer dasselbe, man hat dann nur zwei gleiche Maße ineinander zu multipliciren.

Ist eine Seite 4 Fuß, so ist der Inhalt des Quadrates $4 \cdot 4 = 16$ Quadratfuß, welches auch durch 4^2 ausgedrückt werden kann. Es können nämlich in diese Fläche 16 Quadrate eingepaßt werden, deren jedes 1 Fuß zu Seitenlängen hat.

§. 87. Ein Rhombus und Rhomboid, wie Fig. 30, 31, berechnet man, daß man eine Seite, z. B. ab, mit der zugehörigen senkrechten Höhe cd multiplicirt. Ein Rhombus, welches 3 Fuß 4 Zoll zur Seitenlänge hat, und dessen senkrechte Höhe 2 Fuß 3 Zoll beträgt, enthält $7\frac{1}{2}$ Quadratfuß.

Man kann die Berechnung, wenn Unterabtheilungen von Fußen vorkommen, auf doppelte Weise führen.

1) Da 4 Zoll = $\frac{1}{3}$ Fuß, und 3 Zoll = $\frac{1}{4}$ Fuß, so setze man

$$3\tfrac{1}{3} \times 2\tfrac{1}{4}$$

d. i. $\frac{10}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{10}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{30}{4}$ oder $7\frac{1}{2}$ Quadratfuß;

2) 3 Fuß 4 Zoll = 40 Zoll; 2 Fuß 3 Zoll = 27 Zoll.

Es ist daher 40 × 27 = 1080 Quadratzoll, und diese betragen nach Maßtabelle A, wenn man mit 144 dividirt,

$\frac{1080}{144} = 7\frac{72}{144} = 7\frac{1}{2}$ Quadratfuß als Inhalt des Rhombus, wie vorher.

§. 88. Ein Trapez wird dem Inhalte nach gefunden, wenn man die beiden parallelen Seiten addirt, die Summe halbirt und das Resultat mit dem senkrechten Abstande der parallelen Seiten multiplicirt.

In Fig. 32 hat man $\frac{ab + cd}{2} \times ac$, und in Fig. 33 $\frac{ab + cd}{2} \times mn$ zu dem Inhalte. Es sei z. B., Fig. 23 ab = 7 Fuß $3\frac{1}{2}$ Zoll; cd = 8 Fuß $6\frac{1}{2}$ Zoll; ac = 9 Fuß oder 108 Zoll: so ist ab + cd = 15 Fuß 10 Zoll, und $\frac{ab + cd}{2}$ = 7 Fuß 11 Zoll = 95 Zoll, folglich der Inhalt

95 × 108 = 10260 Quadratzoll

d. i. 71 Quadratfuß, 36 Quadratzoll oder

$71\frac{1}{4}$ Quadratfuß.

§. 89. Ein Trapezoid muß durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, jedes besonders berechnet, und die beiden Inhalte müssen dann addirt werden, wie Fig. 34 zeigt. Ist z. B. die gemeinschaftliche Grundlinie 9 Zoll, die Höhe or = $2\frac{3}{4}$ Zoll, die pq = $4\frac{1}{2}$ Zoll, so ist

$$\triangle\, mon = \frac{9 \times 2\frac{3}{4}}{2} = \frac{9 \cdot 11}{2 \cdot 4} = \frac{99}{8} = 12\frac{3}{8}$$

Quadratzoll,

$$\triangle\, mnp = \frac{9 \times 4\frac{1}{2}}{2} = \frac{9 \cdot 9}{2 \cdot 2} = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$$

Quadratzoll,

daher der Inhalt des Trapezoides = $12\frac{3}{8} + 20\frac{1}{4}$ = $32\frac{5}{8}$ Quadratzoll.

§. 90. Das reguläre Polygon, sowie auch jedes irreguläre, wird ebenfalls durch Diagonalen in Dreiecke getheilt und findet seinen Inhalt in der Summe aller Dreiecke.

Bei einem regulären nimmt man die Zertheilung besser durch Dreiecke vor, deren Spitzen in dem Mittelpuncte zusammenfallen. Man braucht dann nur ein Dreieck zu berechnen und dessen Inhalt mit der Anzahl der Seiten zu multipliciren. Die Zerlegung sieht man in Fig. 38.

§. 91. Bei einem Kreise findet man:

1) die Peripherie, wenn der Durchmesser mit $3\frac{14}{100}$, oder weniger genau mit 3 multiplicirt und dann ohngefähr $\frac{1}{7}$ Durchmesser zugegeben wird.
2) Den Inhalt der Kreisfläche giebt folgendes Verfahren: man multiplicire den Halbmesser mit sich selbst, und das Resultat noch mit $3\frac{14}{100}$. (Die Zahl $3\frac{14}{100}$ wird als Decimalbruch durch 3,14 ausgedrückt und allgemein durch den griechischen Buchstaben π bezeichnet).

Die Berechnung mittelst der Zahl π oder 3,14 geschieht wie folgt: Ist ad 1 der Durchmesser oder der doppelte Radius $= 5\frac{3}{8}$ Fuß, so ist die Peripherie $= 5\frac{3}{8} \times 3{,}14 = \frac{43}{8} \times 3\frac{14}{100}$ (d. i. $\frac{314}{100} = \frac{13502}{800} = 16\frac{702}{800}$ Fuß oder 16 Fuß $10\frac{53}{100}$ Zoll, wofür man im Practischen wohl 16 Fuß $10\frac{1}{2}$ Zoll setzen kann.

Wenn ad der Halbmesser = 6 Zoll ist, so ist die Kreisfläche

$$6 \times 6 \times 3{,}14 = 113\frac{1}{25} \text{ Quadratzoll.}$$

Zusatz. Ist r der Halbmesser, d der Durchmesser, p die Peripherie und k der Inhalt eines Kreises, so ergiebt sich immer eine dieser Größen aus einer der andern durch folgende Gleichungen:

1) $d = 2r$
2) $p = 2\pi r = d\pi$
3) $k = \pi r^2$

$$4)\ r = \frac{d}{2}$$

$$5)\ p = \pi d$$

$$6)\ k = \frac{\pi d^2}{4} \text{*)}$$

b. Körper- oder cubische Berechnungen.

§. 92. Da ein Körper durch die drei Dimensionen Länge, Breite und Höhe, entsteht, so sind dieß auch bei seiner Berechnung die Factoren, die den Inhalt geben, wenn sie auch zuweilen unter andern Richtungen auftreten.

Wenn bei Linien die Größe in Längenmaßen, bei Flächen der Inhalt in Quadratmaßen ausgedrückt wurde, so ist es bei den Körpern das Cubikmaß, welches ihren Inhalt ausdrückt. Das heißt: man denkt sich einen Würfel, z. B. von einem Zoll, Fuß, Ruthe 2c. Kantenlänge, so oft in den zu messenden Körper hineingelegt, als es dessen Größe zuläßt.

§. 93. Ein Würfel (als Maßeinheit aller Körperberechnungen) wird seinem Inhalte nach gefunden, wenn man die Länge, Breite und Höhe ineinander multiplicirt. Da bei einem Würfel aber diese drei Dimensionen (Ausdehnungen) gleich sind, so ist, wenn z. B. eine Kante 3 Fuß enthält, der Inhalt des Würfels = $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Cubikfuß. Das Multipliciren von drei gleichen Factoren drückt man auch durch 3^3 aus, nennt diese Form den Cubus oder die dritte Potenz von 3 und zeigt damit weiter nichts an, als die Zahl 27. Ebenso bedeutet a^3 oder m^3 2c., daß der Zahlenwerth von a oder m drei Mal mit sich selbst multiplicirt werden soll; nämlich $a \cdot a \cdot a$ oder $m \cdot m \cdot m$.

§. 94. Ein Parallelepipedum, Fig. 19 und 20, Taf. III., wo die Ausdehnungen verschieden sind, wird

---

*) der Ausdruck π bezeichnet nämlich das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie. Es ist nämlich $d : p = 1 : 3{,}14 \ldots$

seinem körperlichen Inhalte nach gefunden durch Multiplication der drei Dimensionen; so hält eines dergleichen von 7″ Länge, 4″ Breite und 5″ Stärke 140 Cubikzoll, d. i. $\frac{35}{432}$ Cubikfuß*).

Im Allgemeinen kann man sich ausdrücken, daß man den Inhalt einer Grundfläche mit der Höhe auf ihr zu multipliciren habe, um den körperlichen Inhalt zu finden.

Steht daher ein Parallelepipedum schief auf seiner Grundfläche, so hat man den Inhalt der letztern mit dem senkrechten Abstande der beiden Grundflächen zu multipliciren; d. i. nach Fig. 21 mit dem Maße der Linie ab.

Die Berechnung eines jeden Prisma's ist also auf den zuletzt ausgesprochenen Satz zurückzuführen, seine Bildung mag sein, welche sie wolle.

§. 95. Eine Pyramide ist stets der dritte Theil eines Prisma's, mit dem sie einerlei Grundfläche und gleiche senkrechte Höhe hat. Daher man bloß das Product der Grundfläche in die Höhe, oder den Inhalt des vollen Prisma's, durch 3 zu dividiren hat.

Die Berechnung einer gekürzten Pyramide ist etwas verwickelter, vereinfacht sich aber, wenn man durch Zeichnung die Pyramide ergänzt, oder deren ganze Höhe aufsucht und dieses genügt für den practischen Gewerbsmann. Man hat dann die vollständige und die kleine abgeschnittene Pyramide, jede besonders, zu berechnen und den Inhalt der letztern von dem der erstern abzuziehen.

§. 96. Ein Cylinder, er mag senkrecht oder schief stehen, wird ebenfalls als Prisma berechnet, indem

*) Man erinnere sich, daß die Bezeichnungen lang, breit, hoch nicht eigentlich bestimmte Richtungen anzeigen, zumal wenn der Körper seine Stellung verändern kann, und daß immer die eine für die andere genommen werden kann.

man den Flächeninhalt eines der Kreise (Grundflächen) aufsucht und diesen mit der senkrechten Höhe multiplicirt.

§. 97. Ein gleiches Verfahren liegt der Berechnung eines Kegels unter. Da ein solcher aber der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe ist: so berechne man einen jeden Kegel als Cylinder und dividire das Resultat durch 3.

Bei einem gekürzten Kegel wendet man an, was bei der gekürzten Pyramide gesagt worden.

Die Inhaltsberechnung der Kugel beruht zwar auf demselben allgemeinen Satze, nur liegt derselbe nicht so klar vor Augen. Ihr körperlicher Inhalt ist gefunden, wenn man den Cubus (Würfel) des Halbmessers mit 3,14 und das Product dann durch $\frac{4}{3}$ multiplicirt.

§. 98. Numerische Beispiele.

1) Die Kanten eines Würfels seien jede 6 Zoll. Man kann sich vorstellen, es läge auf der untern Fläche eine Schicht kleiner Würfel, deren jeder 1 Zoll zur Kante hat, in einer Reihe also $6 \cdot 6$ oder 36; da aber auch in der Höhe 6 solcher Schichten übereinander liegen, so enthält dieser ganze Würfel $6 \cdot 6 \cdot 6 = 36$ kleinere, jeder zu 1 Cubikzoll. Der ganze Inhalt ist sonach $6 \cdot 6 \cdot 6 = 36$ Cubikzoll.

Diese Ansicht der Körpermessung ist stets im Auge zu behalten.

2) Ein Würfel ist in der Kante 1 Fuß 4 Zoll, so ist 1 Fuß 4 Zoll $= 1\frac{1}{3}$ Fuß $= 16$ Zoll und der Inhalt gleich $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{64}{27}$ Cubikfuß $= 2\frac{10}{27}$ Cubikfuß; oder nach Zollen $16 \cdot 16 \cdot 16 = 4096$ Cubikzoll, welches mit Obigem stimmt, wenn man es mit 1728 (dem Inhalt eines Cubikfußes an Cubikzollen) dividirt.

3) Die Grundfläche eines Parallelepiped's sei $3\frac{1}{4}$ Zoll lang, $2\frac{1}{2}$ Zoll breit, die senkrechte Höhe $8\frac{3}{4}$ Zoll. Hieraus folgt der körperliche Inhalt:

$$3\tfrac{1}{4} \cdot 2\tfrac{1}{2} \cdot 8\tfrac{3}{4} = \frac{13 \cdot 5 \cdot 35}{4 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{2275}{32} = 71\tfrac{3}{32}$$

Cubikzoll.

4) Eine Bohle sei $2\frac{1}{2}$ Zoll stark, 10 Zoll breit, 12 Fuß lang, so hält sie:

$\frac{5}{24} \cdot \frac{10}{12} \cdot 12 = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$ Cubikfuß = 2 Cubikfuß 144 Cubikzoll.

5) Die Grundfläche einer Pyramide ist 9 Zoll lang, 8 Zoll breit, die Höhe gleich 4 Fuß. Deren körperlicher Inhalt ist:

$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4) = \frac{2}{3}$ Cubikfuß, = 1152 Cubikzoll welches auch erhalten wird durch

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 48}{3} = 1152.$$

6) Ein Cylinder habe 5 Zoll Durchmesser (Dicke) und 15 Zoll Höhe.

Die Grundfläche ist (nach §. 91, 2)

$$\tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{5}{2} \cdot 3\tfrac{14}{100} = \frac{157}{8} \text{ Quadratzoll.}$$

und der Inhalt

$$\frac{157}{8} \cdot 15 = \frac{2355}{8} = 294\tfrac{3}{8} \text{ Cubikzoll.}$$

7) Die Grundfläche (Kreis) eines Kegels habe zum Halbmesser 4 Zoll = $\frac{1}{3}$ Fuß und die senkrechte Höhe sei 8 Fuß.

So ist der Inhalt des Cylinders

$$\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 3\tfrac{14}{100} \cdot 8 = 2\tfrac{791}{1000} \text{ Cubikfuß.}$$

und der Inhalt des Kegels $\frac{93}{100}$ Cubikfuß = $1607\frac{1}{25}$ Cubikzoll.

8) Bei einem abgekürzten Kegel sei der untere Durchmesser D = 8 Fuß; der obere d = 4 Fuß und die Höhe h = 12 Fuß, so beträgt der Inhalt:

$$D^2 + d^2 + d \cdot D) \cdot h \cdot 0{,}2618^{*}), \text{ also}$$

$$64 + 16 + 32, \text{ d. i. } 112 \text{ und}$$

$$112 \cdot 12 \cdot 0{,}2618 = 351\tfrac{8592}{10000} = 351\tfrac{537}{625} \text{ Cubikfuß.}$$

9) Der Halbmesser einer Kugel ist zu 8 Zoll gegeben, so ist deren Inhalt (nach §. 97):

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 3{,}14 \cdot \tfrac{3}{4} = 113\tfrac{1}{25} \text{ Cubikzoll.}$$

c. Berechnung der Oberflächen von Körpern.

§. 99. Die Berechnung der Oberflächen von Körpern (Mantelflächen) läßt sich auf die Berechnung der abgewickelten Flächen (Netze) zurückführen. Es würde aber umständlich sein, wollte man stets eine Abwickelung dazu zeichnen; doch ist es bei schwierigen Fällen anzurathen.

Die Oberfläche eines Würfels besteht aus 6 gleichen Quadraten; multiplicirt man daher eine seiner Kanten mit sich selbst und nimmt das Product 6-fach, so ist die Oberfläche gefunden.

Bei einem Parallelepipedum hat man gewöhnlich dreierlei Seitenflächen zu berechnen. Man nimmt jede doppelt und addirt die doppelten Producte. Diese beiden Berechnungen werden sonach auf die des Rechtecks zurückgeführt.

Es ist leicht, diese Berechnung auf Körper anzuwenden, die lauter verschiedene Grenzflächen haben und überhaupt auf alle prismatischen Körper.

Bei einer senkrechten Pyramide mit regulärer Grundfläche, hat man eines der Dreiecke zu berechnen, dessen Flächeninhalt mit der Anzahl der Seiten zu mul-

---

*) D. i. $\frac{2618}{10000}$. — Wir fügen diese Formel hier bei, die nur eine Abkürzung des in §. 97 angegebenen Verfahrens ist.

tipliciren und zu dem Producte den Inhalt der Grundfläche zu addiren.

Eine schräge Pyramide erfordert, daß man die verschiedenen Dreiecke einzeln berechne, addire und die Grundfläche dazu rechne.

Die Seiten einer gekürzten Pyramide sind Trapeze, deren Summe, nebst den beiden Grundflächen, die Oberfläche geben.

Die Oberfläche eines senkrechten Cylinders wird gefunden, wenn man die Kreislinie der Grundfläche aufsucht, indem man den Durchmesser mit 3,14 und diesen dann noch mit der Höhe (Erzeugungslinie) multiplicirt, dazu aber den Flächeninhalt der beiden Kreise addirt.

Unter Mantelfläche versteht man nur die gewölbte Außenfläche ohne die Grundflächen.

Die Mantelfläche eines Kegels kann man als ein Dreieck betrachten, dessen Grundlinie der abgewickelte Kreis der Grundfläche, dessen Höhe aber die Erzeugungslinie ist.

Man berechne sonach die Peripherie der Grundfläche multiplicire diese mit der Seitenhöhe des Kegels und dividire das Product durch 2.

Dagegen hat man die Mantelfläche eines gekürzten Kegels als Trapez zu berechnen. Man berechne nämlich die untere und obere Kreislinie, addire sie und dividire durch 2, das Resultat aber multiplicire man mit der Seitenhöhe.

Die Oberfläche einer Kugel ist das Vierfache eines Kreises, der zum Durchmesser den Durchmesser der Kugel hat, woraus dann die Kugelfläche leicht gefunden werden kann.

Die Oberfläche aller ebenflächig begrenzten Körper, die den hier genannten nicht angehören, werden berechnet, daß man jede Fläche, wenn nicht gleiche unter ihnen sind, besonders berechnet und sie addirt.

§. 99[1]. D. Ueber einige am Häufigsten vorkommende Maße.

Um den häufigen Irrungen im Längen-, Quadrat- und Cubikmaß zu begegnen, wenn zumal Unterabtheilungen in's Spiel kommen, wollen wir hier eine kurze Uebersicht der Maßverhältnisse mittheilen und dabei das preußische, welches mit dem rheinländischen vollkommen übereinstimmt, und das französische, als diejenigen Maße, die überall gelten und bekannt sind, zu Grunde legen.

Im Preußischen ist der Fuß als Einheit angenommen, der auch unter dem Namen „rheinländischer" 139,13 Pariser Linien altes Maß oder 313,85 Millimeter neues Maß, und 1,02 englische Fuß enthält. Zwölf solcher Fuß machen eine preußische Ruthe (die immer dieselbe bleibt, wenn sie auch der Geometer in 10 Theile abtheilt, die er auch Fuß nennt).

Ein solcher Fuß heißt auch der Werkfuß und gilt für alle technischen Beziehungen; der Fuß der Geometer, also $\frac{1}{10}$ Ruthe, heißt Decimalfuß. Dieser Fuß ist größer als der Werkfuß; hingegen bleibt die Ruthe der Feldmesser immer gleich der Werkruthe.

Der Decimalfuß wird in 10 Zoll, der Zoll in 10 Linien ꝛc. eingetheilt.

A. Preußisches (rheinländisches) Maß.

1) Längenmaß.

Ruthe.	Fuß.	Zoll.	Linien
1	12	144	1728
	1	12	144
		1	12

2) Flächen= (Quadrat=) maß.

Preuß. □Ruthe.	□Fuß.	□Zoll	□Linien.
1	144	20736	2985984
	1	144	20736
		1	144

3) Körper= (Cubik=) maß.

Cubikfuß.	Cubikzoll.	Cubiklinien.
1	1728	2985984
	1	1728

B. Altfranzösisches Maß (Längenmaß).

Toise.	Fuß.	Zoll.	Linien.
1	6	72	864
	1	12	144
		1	12

C. Neufranzösisches Maß.

1) Längenmaß.

Myriameter.	Kilometer.	Hectometer.	Decameter.	Meter.
1	10	100	1000	10000
	1	10	100	1000
		1	10	100
			1	10

Meter.	Decimeter.	Centimeter.	Millimeter.
1	10	100	1000
	1	10	100
		1	10

2) Flächenmaß.

1 Mètre carré (Quadratmeter) = 10,15 preuß. □Fuß.

3) Körpermaß.

1 Stère = 1 Kiloliter = 1 Mètre cube.
1 Hectoliter . . . = $\frac{1}{10}$ " "
1 Decaliter . . . = $\frac{1}{100}$ " "
1 Liter = 1 Décimètre cube = $\frac{1}{1000}$ Mètre cube = 55,893 preuß. Cubikzoll = $\frac{7}{8}$ Quart.
1 preuß. Fuß = 139,13 alt-pariser Linien.
— — = 0,966 — — Fuß.
— — = 313,85 Millimeter.
— — = 0,313 Meter.
— — = 1,02 englischen Fuß.
1 Meter = 3,186 preuß. Fuß.
— = 3,07 alt-pariser Fuß.
1 Decimeter = 3,82 preuß. Zoll.
1 Centimeter = 4,50 preuß. Linien.
1 Millimeter = 0,450 — —
1 französischer (neuer) Fuß = $\frac{1}{3}$ Meter, hält 1,062 rheinländische Fuß.
1 altfranzösischer Fuß (pied du roi) = 1,035 rheinländische Fuß. Hiernach stimmen 43 Mètres fast mit 137 rheinländischen Fuß.
1 englischer foot (Fuß) hält 11,65 rheinländische Zoll oder 0,97 rheinländische Fuß.
Hiernach sind annähernd:
35 englische Fuß = 34 rheinländischen Fuß.

Der rheinländische Fuß hält 13,334 sächsische Linien oder es gleichen annähernd 10 rheinländische Fuß (oder Zoll) 9 sächsischen Fuß (oder Zoll) Werkmaß.