LIVRE TROISIÉME.

INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES.

SI dans le cône on fait différentes ſections par le moyen d'un plan, les lignes qui paroîtront décrites à l'extrémité de ces ſections, ſeront des courbes que l'on appelle *Sections coniques.* Ces courbes ont des propriétés remarquables & intéreſſantes pour les ſciences & les arts. C'eſt pourquoi les Géométres ſe ſont appliqués à en faire connoître la nature, à démontrer leurs différentes propriétés, & à remarquer les différens phénomènes qui en peuvent réſulter. On peut conſidérer les ſections coniques, ſoit dans le cône même où elles prennent leur origine; ſoit hors du cône, ou dans un plan ſur lequel on peut les décrire, ou les concevoir décrites. Nous allons les envisager ſous ces deux rapports.

SECTION I.

Des Sections Coniques conſidérées dans le Cône.

HYPOTHÈSE.

739. SI dans le cône on fait des ſections par le moyen d'un plan coupant, les figures, ou ſections coniques qui en réſulteront, ſeront de différente eſpéce, ſuivant la direction qu'aura ſuivi le plan, comme on va le voir.

1°. Si l'on coupe le cône par un plan qui tombe du sommet sur la base, soit perpendiculairement, soit obliquement, la section faite par ce plan sera un *Triangle*.

II°. Si l'on coupe le cône par un plan parallele à la base, la section donnera un *Cercle*.

III°. Si le plan coupant qui vient de donner le cercle, au lieu d'être parallele à la base, venoit un peu à s'incliner & à devenir oblique sur cette base, alors la section Ss (*fig.* 2.), qui en résultera, pourra être regardée comme un cercle allongé dans un sens, & rétréci dans un autre, ou comme un cercle qui auroit deux axes inégaux: cette courbe s'appelle *Ellipse*.

IV°. Si le plan coupant qui vient de donner l'ellipse, devenoit oblique sur sa base, de façon qu'il devint tout-à-fait parallele au côté AB (*fig.* 1.), alors la section pourra être regardée comme une ellipse infinie, ou dont le sommet inférieur seroit infiniment éloigné. Car le plan coupant étant parallele au côté AB du cône, ne pourra jamais couper ce côté, & donner un second sommet opposé au premier S; cette section s'appelle *Parabole*.

V°. Si le plan coupant qui vient de donner la parabole, devenoit perpendiculaire à la base du cône, ou même s'il tomboit sur cette base, de façon à être incliné sur elle, mais sans être parallele au côté du cône, alors la section donneroit une courbe infinie, comme la précédente, & on l'appelle *Hyperbole*. Telle est la courbe *mSm* (*fig.* 3.). Si au cône CAB on joignoit par le sommet A un autre cône égal au premier, & si le plan coupant étoit supposé prolongé, il rencontreroit le second cône, & y feroit une section, laquelle seroit encore une hyperbole, comme la premiere, & on l'appelle *Hyperbole-conjuguée*.

Proposition I.

740. Il n'est pas possible de faire dans un cône des sections d'où résultent d'autres figures que les

cinq que nous venons de nommer, sçavoir, le *Triangle*, le *Cercle*, l'*Ellipse*, la *Parabole*, & l'*Hyperbole*.

DÉMONST. En effet le plan coupant commence la section, ou par le sommet du cône, ou par un point de la surface du cône.

I°. Si la section commence au sommet du cône, elle donnera un *Triangle*.

II°. Si elle commence à un point de la surface du cône, ou bien le plan coupant sortira du cône, ou bien il restera en dedans du cône.

Si le plan coupant sort du cône, ou il sera parallele à la base, & alors la section donnera un *cercle*; ou il sera incliné sur la base, & alors la section donnera une *ellipse*.

Si le plan coupant reste en dedans du cône, ou il sera parallele au côté du cône, ou il sera parallele à l'axe du cône, ou il sera incliné sur la base, sans être parallele ni au côté, ni à l'axe du cône. Or dans le premier cas la section sera une *parabole*; dans le second & le troisiéme la section sera une *hyperbole*.

Proposition II.

741. La nature d'une courbe dépend de la direction qu'elle suit dans ses différens points. Il est aisé de déterminer la direction d'une *ligne droite*, parce qu'elle ne dépend que de deux points : on peut aussi déterminer facilement celle d'une *circonférence* de cercle, parce qu'elle ne dépend que de trois points. Mais la position & la direction d'une ligne courbe différente du cercle n'est pas aisée à déterminer, parce que sa courbure n'étant pas uniforme comme celle du cercle, sa position & sa direction varie dans ses différens points. Or

I°. Les Géométres pour pouvoir déterminer la position & la direction d'une courbe, & connoître par ce moyen sa nature, ont imaginé de tirer d'un point pris dans la courbe, une ligne telle que Sp, ou Ss (*fig.* 1. 2. 3.) autour de laquelle on concevroit que la courbe pût faire une révolution. Ils ont appellé cette ligne, l'*axe* de la courbe, & le point, ou les points de la courbe qui terminent cet axe, s'appellent le *sommet*, ou les *sommets* de la courbe.

II°. De plus de chaque point de la courbe les Géométres menent sur cet axe des lignes MP, *mp* (*fig.* 1. 2. 3.) tirées perpendiculairement, ou même obliquement, mais dans le même degré d'obliquité: ces lignes MP, *mp*, s'appellent *ordonnées* à l'axe de la courbe; la portion de l'axe comprise entre chaque ordonnée & le sommet S de la courbe, s'appelle *abscisse*, & la portion de l'axe comprise de l'autre côté entre la même ordonné & le sommet opposé *s*, se nomme *co-abscisse*.

III°. Or le rapport constant qui se trouve entre une certaine fonction de chaque *ordonnée*, & une certaine fonction de ses *abscisses* correspondantes, est ce qui détermine la nature de la courbe, & en fait découvrir les propriétés & les affections.

DÉFINITIONS.

I.

742. L'ordonnée & l'abscisse considérées ensemble s'appellent *co-ordonnées*, & ce sont les différens rapports que les co-ordonnées peuvent avoir entre elles, qui différencient les courbes.

II.

743. Dans le *cercle* & l'*ellipse* chaque ordonnée a son abscisse & sa co-abscisse; dans la *parabole* il n'y a point de co-abscisse; dans l'*hyperbole* la co-abscisse se trouve du même côté que l'abscisse, & se prend depuis l'ordonnée jusqu'au sommet de l'hyperbole opposée ou conjuguée.

LEMME I.

744. *Une ligne* AC *perpendiculaire à un plan est aussi perpendiculaire à toutes les droites menées sur ce plan & qui passent par le point, ou le pied* C *de la perpendiculaire* (fig. 110.)

Construction. Concevez que le triangle rectangle ACB tourne autour du côté AC, pris comme axe; & en ce cas la base CB dans la révolution décrira la surface GFEBK, &c., que l'on appelle *Plan*, & auquel sera perpendiculaire la ligne AC.

I°. On appelle donc *Plan*, une surface considérée en tant que tous ses points sont semblablement posés entre ses extrémités, c'est-à-dire, qui ne sont pas plus élevés les uns que les autres.

II°. On peut aussi définir un plan, une surface telle qu'une ligne droite qui lui est appliquée en tout sens; convient parfaitement avec elle, ou est posée toute entiere sur elle.

Démonst. Les lignes CK, CI, CH, &c. menées sur le plan par le pied C de la perpendiculaire, ne sont autre chose que les traces que laisse la ligne CB, lorsque dans la révolution du triangle rectangle ACB elle décrit le plan: or cette ligne CB pendant la révolution reste toujours perpendiculaire à la ligne CA: donc, &c.

Lemme II.

745. *La section commune* AB *de deux plans perpendiculaires sur un troisiéme plan, est perpendiculaire à ce plan* (fig. 111.).

Démonst. Si du point B ou les trois plans se rencontrent, on éléve une perpendiculaire, cette perpendiculaire sera dans le plan EF, puisque ce plan est perpendiculaire sur le troisiéme plan; elle sera aussi dans le plan GH, parce que ce plan est pareillement perpendiculaire au troisiéme plan: donc cette perpendiculaire sera dans les deux plans EF & GH; mais elle ne peut appartenir aux deux plans, sans être dans leur commune section BA: donc, &c.

Théorême I.

746. *Dans la parabole les Quarrés des Ordonnées sont entr'eux comme les Abscisses* (fig. 1.).

Démonst. Concevez que par le point E passe le plan d'un cercle parallele à la base. Si par le sommet A on conçoit faite une section triangulaire BAC perpendiculaire à la base, & que par le point S il soit fait une section parabolique mSm, perpendiculaire sur le plan du triangle ; le plan du cercle EDE, (il faut dire la même chose du plan du cercle BCB,) & le plan de la parabole se couperont & feront les sections MM, ou mm. Or le plan du cercle & le plan de la parabole sont chacun perpendiculaires sur le plan du triangle : donc leur commune section PM sera perpendiculaire (745) au plan du triangle : donc PM sera aussi perpendiculaire (744) tant au diamétre ED du cercle, qu'à l'axe Sp de la parabole (il faut dire la même chose de pm,) donc les lignes PM, pm, sont des ordonnées communes au cercle & à la parabole.

Or on a par la propriété du cercle (442).

$$\overline{PM^2} : \overline{pm^2} :: PD \times PE : pC \times pB;$$

& à cause des paralleles AB, Sp, qui donnent PE $= pB$, on aura $\overline{PM^2} : \overline{pm^2} :: PD : pC$. Mais à cause des triangles semblables SPD, SpC ; on a $PD : pC :: SP : Sp$; donc $\overline{PM^2} : \overline{pm^2} :: SP : Sp$, c'est-à-dire, que les quarrés des ordonnées PM, pm, sont entr'eux comme les abscisses correspondantes.

Théorême II.

747. *Dans l'Ellipse les Quarrés des Ordonnées sont entr'eux comme les Rectangles des Abscisses correspondantes* (fig. 2.).

Démonst. Ayant fait passer deux plans paralleles à la base du cône, on aura deux cercles EmF, GMH, qui couperont le plan de la section elliptique ; & on verra, comme ci-dessus, que PM & pm sont des ordonnées communes au cercle & à la section elliptique.

Or on a (442) par la propriété du cercle.

$$\overline{PM^2} : \overline{pm^2} :: PG \times PH : pE \times pF.$$

Mais les triangles ſemblables SPH, SpF donnent d'une part PH : pF :: SP : Sp, & les triangles ſemblables spE, sPG donnent de l'autre part PG : pE :: sP : sp donc en multipliant les deux dernieres proportions l'une par l'autre, ce qui donne

PG × PH : pE × pF :: SP × sP : Sp × sp,

on aura $\overline{PM^2} : \overline{pm^2}$ :: SP × sP : Sp × sp, dans laquelle proportion les deux derniers termes ſont les rectangles des abſciſſes correſpondantes.

Théorême III.

748. *Dans l'Hyperbole les Quarrés des Ordonnées ſont entr'eux comme les Rectangles des Abſciſſes correſpondantes* (fig. 3.).

Démonst. Par la propriété du cercle on a

$\overline{MP^2} : \overline{mp^2}$ :: PD × PE : pC × pB.

Or à cauſe des triangles ſemblables SPD, SpC, on a la proportion PD : pC :: SP : Sp; & à cauſe des triangles ſemblables sPE, spB, on a auſſi PE : pB :: sP : sp; donc en multipliant les deux proportions l'une par l'autre, on aura

PD × PE : pC × pB :: SP × sP : Sp × sp;

donc on aura $\overline{PM^2} : \overline{pm^2}$ :: SP × sP : Sp × sp, dans laquelle proportion les deux derniers termes ſont les rectangles des abſciſſes correſpondantes.

SECTION II.

Des Sections Coniques conſidérées ſur un Plan.

Lorsqu'on enviſage les ſections coniques ſur un plan, on peut les conſidérer ou abſolument & en elles-mêmes, ou par comparaiſon. Nous allons les conſidérer ſous ces deux points de vue.