SECONDE PARTIE.

Élémens de la Géométrie Pratique.

LA Géométrie pratique eſt celle qui opere ſur ſon objet. Le but de la Géométrie ſpéculative eſt de démontrer; celui de la Géométrie pratique eſt d'opérer & d'exécuter. On y diſtingue deux objets, ſçavoir, 1°. le calcul; 2°. les opérations.

SECTION I.

Du Calcul de la Géométrie pratique.

LE Calcul de la Géométrie pratique conſiſte dans des méthodes ſimples & abrégées, qu'elle a introduites dans le calcul ordinaire, pour en rendre l'exécution plus facile & plus prompte. On diſtingue deux ſortes de calculs dans la Géométrie pratique: 1°. le calcul décimal; 2°. le calcul logarithmique.

CHAPITRE I.

Du Calcul Décimal.

LE calcul décimal a été trouvé pour avoir aiſément les valeurs approchées des fractions qui ſe trouvent quelquefois de reſte après la diviſion, & des radicaux que l'on trouve auſſi ſouvent après l'extraction. Car par le moyen de ce calcul on approche d'aussi près que l'on veut de la valeur de ces fractions & de ces radicaux, ensorte qu'après en avoir pris les valeurs approchées, les restes que l'on trouve, sont de peu de conséquence & peuvent être négligées sans erreur sensible.

I°. Or afin de pouvoir négliger sans inconvévient les restes qui se trouvent, lorsqu'on prend les valeurs approchées des fractions & des radicaux, les Géométres ont imaginé une méthode pour transformer ces fractions & ces radicaux, lesquels sont ordinairement exprimés par un petit nombre de chiffres, en un nombre considérable de chiffres. Car plus les nombres que l'on divise, ou dont on extrait la racine, sont petits, moins on peut négliger les restes; *par ex*: si l'on divise 5 par 2, on aura $\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}$, où l'on a la fraction, ou le reste $\frac{1}{2}$, qu'on ne peut négliger sans une erreur sensible, parce que cette fraction ou ce reste est une quantité de quelque conséquence par rapport à un petit nombre comme 5. Mais si l'on avoit à diviser 501 par 2, on auroit $\frac{501}{2}=250+\frac{1}{2}$, où l'on voit que la fraction, ou le reste $\frac{1}{2}$ peut être négligé sans erreur sensible, parce qu'elle est de peu de consquence par rapport à un grand nombre, tel que 501. Il faut dire la même chose pour l'extraction des racines.

II°. Les Géométres sont partis de ce principe, que *plus les parties d'un tout diminuent en grandeur, plus elles augmentent en nombre.* C'est pourquoi ils divisent la petite quantité dont ils veulent négliger les restes, par un très-grand nombre quelconque, ce qui diminue la grandeur des parties, mais en augmente considérablement le nombre, de plus ils la multiplient aussi par le même nombre qui a divisé, pour conserver à la quantité sa même valeur, ce qui la transforme en une expression composée d'un grand nombre de chiffres, d'où il résulte que les restes que laisseroit la diviſion, ou l'extraction, qu'on feroit, ſeroient de peu de conſéquence.

III°. Dans la pratique il eſt à propos de multiplier & de diviſer la quantité dont on veut changer l'expreſſion, par un grand nombre plutôt que par un petit; parce que plus eſt grand le nombre par lequel on transforme la quantité, plus les parties de cette quantité deviennent petites, & les reſtes que l'on néglige, ſont de peu de conſéquence.

IV°. Il vaut mieux multiplier & diviſer la quantité par un nombre décimal quelconque, 10, 100, 1000, 10000, &c. que par tout autre nombre; par la raiſon que la multiplication & la diviſion par les nombres décimaux ſont plus aiſées & plus promptes. C'eſt pourquoi ſi je veux transformer en un grand nombre les quantités 3, 25, 48, &c. j'aurai, en multipliant & diviſant par 10, les quantités $\frac{30}{10}$, $\frac{250}{10}$, $\frac{480}{10}$. Or ces fractions s'expriment d'une façon abrégée comme ceci 3·0; 25·0; 48·0, &c. en intercallant un point qui ſoit ſuivi d'autant de caracteres, qu'il y a de zero dans le dénominateur décimal ſous-entendu. Pareillement ſi je multiplie & ſi je diviſe par 100 les quantités 3, 25, 48, &c. elles deviendront $\frac{300}{100}$, $\frac{2500}{100}$, $\frac{4800}{100}$, ou 3·00; 25·00; 48·00, &c.

V°. Les quantités 3·0, 25·0, 48·0, &c. ou 3·00, 25·00, ou d'autres ſemblables, ſont ce qu'on appelle fractions décimales: *fractions*, parce qu'elles ont un numérateur & un dénominateur; *décimales*, parce que leur dénominateur eſt toujours un nombre décimal, & le calcul qui opere ſur ces fractions, s'appelle *calcul décimal*, ou *calcul des décimales*. Or comme dans les fractions décimales ainſi exprimées, le dénominateur eſt toujours ſous-entendu, l'expreſſion de la fraction ſe trouve changée en celle d'entiers, ce qui en rend le calcul plus aiſé & plus commode.

VI°. Pour la même raiſon, ſi j'ai les fractions

$\frac{3}{10}$, $\frac{25}{10}$, $\frac{48}{10}$, &c. je puis les écrire d'une façon abrégée, comme ceci, 0·3, 2·5, 4·8, &c. il en est de même des fractions $\frac{3}{100}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{50}{1000}$, &c. qui sont la même chose que 0·03, 0·25, 0·050; ce qui se fait en mettant un zero avant le point pour le rendre plus remarquable, & après le point des zero placés de façon que l'ordre & le rang des chiffres soient conservés.

Ainsi l'on voit que tout l'art du calcul décimal consiste à réduire les petits nombres en fractions décimales, transformer ces fractions décimales en l'expression d'entiers, & par ce moyen en rendre le calcul aussi aisé & aussi commode que celui des nombres entiers eux-mêmes.

PRINCIPE I.

627. Une quantité, *par ex:* 3, multipliée & divisée par différens nombres pris successivement, conserve toujours sa même valeur, *par ex:* les quantités $\frac{30}{10}$, $\frac{300}{100}$, $\frac{3000}{1000}$, &c. sont égales entr'elles, & sont chacune $=3$; par conséquent les fractions 3·0, 3·00, 3·000, 3·0000, &c. quoique différentes en apparence, sont cependant égales.

PRINCIPE II.

628. Mais une quantité, *par ex:* 3, divisée simplement par différens nombres pris successivement, ne conserve plus la même valeur, *par ex:* les quantités $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{3}{1000}$, ne sont point égales, & par conséquent les fractions 0·3, 0·03, 0·003, &c. sont de différente valeur.

Corollaire.

629. Il suit de ce que nous venons de dire,

I°. Que l'expression 3·0 n'est pas la même chose que 0·3; car $3\cdot 0=\frac{30}{10}$, & $0\cdot 3=\frac{3}{10}$.

II°. Pareillement l'expression 0·05 n'est pas la même chose que 0·50; car la quantité $0\cdot 05=\frac{5}{100}$ au lieu que $0\cdot 50=\frac{50}{100}$.

III°. Lorsque dans une fraction décimale il ne se trouve que des zero après le point, la valeur de la fraction ne s'estime que par les chiffres qui précédent le point, & alors le nombre des zero qui ſuivent le point, peut être augmenté ou diminué, ſans changer la valeur de la fraction: ainſi l'on a $45\cdot 0 = 45\cdot 00000$.

IV°. Mais lorſqu'après le point il ſe trouve des chiffres poſitifs, pour avoir la valeur de la fraction il faut avoir égard, & au nombre de ces chiffres, & au rang qu'ils tiennent; c'eſt pourquoi $45\cdot 0$ n'eſt pas égal à $45\cdot 3$. Car $45\cdot 0 = \frac{450}{10}$, au lieu que $45\cdot 3 = \frac{453}{10}$. Pareillement $45\cdot 30$ n'eſt pas la même choſe que $45\cdot 03$, car $45\cdot 30 = \frac{4530}{100}$, ou $\frac{453}{10}$, au lieu que $45\cdot 03 = \frac{453}{100}$. Dans ce cas on ne peut, ſans changer la valeur, augmenter ou diminuer que les zero qui ſe trouvent après tous les chiffres poſitifs qui ſuivent le point.

V°. On peut pour plus grande commodité retrancher les derniers chiffres d'une fraction décimale; mais alors il faut ajouter une unité au chiffre qui reſte le dernier, lorſque le premier des chiffres qu'on néglige, ſurpaſſe 5; *par ex:* ſi dans la fraction $0\cdot 4864$, je néglige les deux derniers chiffres, je dois écrire $0\cdot 49$, & non pas $0\cdot 48$. Car $0\cdot 49 = 0\cdot 4900$, & $0\cdot 48 = 0\cdot 4800$: or $0\cdot 4900$ approche plus près de la valeur $0\cdot 4864$, que $0\cdot 4800$.

Regle I.

630. Pour réduire un nombre entier en fraction décimale, il n'y a qu'à mettre après l'entier un point ſuivi d'autant de zero que l'on voudra; *par ex:* l'entier 37 ſe transforme en $37\cdot 0$, ou $37\cdot 00$, ou $37\cdot 000$, &c.

Regle II.

631. Si l'on a un nombre entier joint à une fraction, *par ex:* $23\,\frac{4}{10}$, que l'on veuille réduire en une fraction décimale, il eſt clair que puiſque $\frac{4}{10} = 0\cdot 4$, l'on aura $23\,\frac{4}{10} = 23\cdot 4$; par la même raiſon on aura auſſi $23\,\frac{4}{100} = 23\cdot 04$; pareillement l'on a $23\,\frac{4}{1000} = 23\cdot 004$, & ainſi du reſte, inſérant toujours avant le 4 des zero, de façon qu'après

le

le point il se trouve autant de chiffres, ou caracteres, qu'il y aura de zero au dénominateur.

Regle III.

632. Si l'on veut réduire une fraction ordinaire en une fraction décimale, il faut d'abord la réduire à un dénominateur qui soit un nombre décimal lorsque cette réduction est possible. La fraction étant devenue décimale, s'écrira suivant la méthode abrégée, en intercalant un point qui soit suivi, &c. *par ex :* $\frac{2}{4}$ se réduit en fraction décimale, en faisant $\frac{2}{4}=\frac{20}{40}=\frac{5}{10}=0 \cdot 5$.

Corollaire.

633. Il suit de ce que nous venons de dire que les chiffres qui précédent le point, peuvent être regardés comme des nombres entiers, & que les décimales ne sont exprimées que par les chiffres qui suivent le point; *par ex :* la fraction $4 \cdot 05$ $=4+\frac{5}{100}$; car $4 \cdot 05=\frac{405}{100}=4+\frac{5}{100}=4+\frac{1}{20}$.

Regle IV.

634. Les fractions décimales sont susceptibles des opérations de l'Arithmétique, lesquelles sont pour les fractions décimales précisément les mêmes que celles qui se font sur les nombres entiers; il y a seulement quelques précautions à prendre pour placer le point qui sépare les nombres entiers des nombres fractionnaires.

I°. L'addition des décimales se fait en écrivant les fractions les unes sous les autres, de façon que les points soient en colonne, & en prenant la somme du tout; *par ex :*

34 · 012		34 · 012
242 · 71	ou	242 · 710
3 · 8		3 · 800
280 · 522		280 · 522

La raison de cette opération s'appercevra aisément, en réduisant les fractions décimales à leur état naturel de fraction; *par ex :* la somme des fractions décimales 2·03 & 3·40, doit être 5·43: En effet $2\cdot03 = 2 + \frac{3}{100} = \frac{200}{100} + \frac{3}{100} = \frac{203}{100}$; pareillement $3\cdot40 = 3 + \frac{40}{100} = \frac{300}{100} + \frac{40}{100} = \frac{340}{100}$: or la ſomme de $\frac{203}{100} + \frac{340}{100}$ eſt $= \frac{543}{100} = 5\cdot43$: donc, &c.

II°. La ſouſtraction ſe fait en arrangeant les quantités données de la même maniere que ci-deſſous, & en opérant à l'ordinaire ; *par ex :*

```
  68 · 304            68 · 304
  36 · 7       ou     36 · 700
  ────────            ────────
  31 · 604            31 · 604
```

La raiſon de cette opération ſe trouvera de la même maniere que pour l'addition.

III°. La multiplication ſe fait comme celle des nombres entiers, obſervant que dans le produit total il faut ſéparer par un point autant de chiffres ſur la droite, qu'il y a de décimales, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur ; en ſorte que ſi le produit total ne contenoit pas autant de chiffres qu'il y a de décimales dans le multiplicande & le multiplicateur, il faudroit mettre ſur la gauche un nombre ſuffiſant de zero ; *par ex ;*

```
    43 · 7              3 · 7
    13 · 0              4 · 12
  ────────            ────────
     00 0                 74
   1311                  37
   437                 148
  ────────            ────────
   568 · 10            15 · 244
```

La raiſon de cette opération ſe trouvera de la même maniere.

IV°. La diviſion ſe fait auſſi de la même maniere que celle des nombres entiers ; mais il faut remarquer, 1°. qu'après avoir trouvé le quotient, il faut ſéparer par un point autant de chiffres ſur la droite, qu'il se trouve plus de décimales dans le dividende que dans le diviseur : 2°. s'il se trouve plus de décimales dans le diviseur que dans le dividende, alors il faut ajouter aux décimales du dividende autant de zero que l'on voudra; 3°. si l'on en ajoute précisément pour qu'il y ait autant de décimales dans le dividende que dans le diviseur, alors le quotient sera sans décimales; & si l'on en ajoute de plus, le quotient aura un nombre de décimales égale à ce surplus. Voici des exemples :

$$\frac{8 \cdot 445}{3 \cdot 22} = 2 \cdot 6; \qquad \frac{24 \cdot 652000}{4 \cdot 5600} = 534 \cdot 20.$$

La raison de cette opération se trouvera de la même façon que pour les opérations précédentes.

CHAPITRE II.

Du Calcul Logarithmique.

I°. ON sçait que l'addition & la soustraction sont des opérations plus simples que la multiplication & la division; pareillement que la multiplication & la division sont un calcul moins composé que l'exaltation & l'extraction. Il seroit donc avantageux de trouver une méthode qui pût changer en additions & soustractions toutes les espéces de multiplications & de divisions, qui pût pareillement substituer la multiplication & la division à la place de l'exaltation & de l'extraction, & l'on voit qu'une pareille méthode simplifieroit beaucoup les opérations, & introduiroit beaucoup de facilité dans les calculs.

II°. Or cette méthode a été trouvée par le fameux Nepper, Géométre Ecossois, lequel a donné l'art de substituer des nombres artificiels à la place des nombres ordinaires, pour faire sur ceux-là, par voie d'addition & de soustraction, ce qu'il faudroit faire ſur ceux-ci par voie de multiplication & de diviſion, & de faire pareillement ſur les premiers par voie de multiplication & de diviſion, ce qu'on ſeroit obligé de faire ſur les derniers par voie d'exaltation & d'extraction.

III°. Ces nombres artificiels que l'on ſubſtitue à la place des nombres ordinaires, ſont ce que l'on appelle *Logarithmes*, & l'uſage qu'on en fait, s'appelle *Calcul logarithmique*, lequel eſt tout fondé ſur la nature des deux progreſſions *arithmétique* & *géométrique*.

PRINCIPE I.

635. Dans toute progreſſion géométrique, dont les termes ſont affectés d'expoſans, les expoſans ſont en progreſſion arithmétique, *par ex :* ſi j'ai la progreſſion géométrique,

$$\div\!\!\div\; a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : a^6 : \&c.$$

les expoſans donneront la progreſſion arithmétique $\div\; 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$, &c.
enſorte que ſi je ſuppoſe $a = 2$, j'aurai les deux progreſſions ſuivantes,

$$\div\!\!\div\; 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64, \&c.$$
$$\div\; 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6, \&c.$$

dont l'une eſt la progreſſion des termes, & l'autre celle des expoſans, & que, pour plus grande facilité, on écrit en deux colonnes, comme ceci:

0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
&c.	&c.

PRINCIPE II.

636. Les opérations qui ſe font par voie de mul-

tiplication & de diviſion ſur les termes de la progreſſion géométrique, ſe font par voie d'addition & de ſouſtraction ſur les termes correſpondans de la progreſſion arithmétique; & celles qui ſe font par voie d'exaltation & d'extraction ſur les premiers, ſe font par la multiplication & la diviſion ſur les derniers.

I°. Dans la progreſſion géométrique, ſi je prends les quatre termes $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8$, le produit des deux moyens $2 \times 4 = 1 \times 8$, produit des extrêmes; au lieu que prenant les termes correſpondans $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ dans la progreſſion arithmétique, on a la ſomme des moyens $1 + 2 = 0 + 3$, ſomme des extrêmes.

II°. Pareillement ſi dans la progreſſion géométrique, je prends le produit des moyens $4 \times 8 = 32$; & que je le diviſe par 2, j'aurai $\frac{32}{2} = 16$, qui eſt le quatriéme terme de la proportion $2 : 4 :: 8 : 16$, au lieu que dans la progreſſion arithmétique, il faut prendre la ſomme des moyens $2 + 3 = 5$, & en retrancher le terme 1, pour avoir le dernier terme de la proportion arithmétique correſpondante $1 \cdot 2 \because 3 \cdot 4$, que j'ai priſe dans la progreſſion arithmétique.

III°. Si dans la progreſſion géométrique j'éleve le ſecond terme 2 à la troiſiéme puiſſance, j'aurai le quatriéme terme 8; mais dans la progreſſion arithmétique, au lieu d'élever à la troiſiéme puiſſance le ſecond terme 1, je n'ai qu'à le tripler, ou le multiplier par 3, & j'aurai le quatriéme terme 3 vis-à-vis de 8.

IV°. Si dans la progreſſion géométrique je veux extraire la racine troiſiéme du ſeptiéme terme 64, j'aurai pour racine le nombre 4, qui eſt le troiſiéme terme de la progreſſion; mais dans la progreſſion arithmétique je n'ai qu'à diviſer par 3 le ſeptiéme terme 6, & j'aurai le troiſiéme terme 2 de la progreſſion vis-à-vis de 4.

Corollaire.

637. Les termes de la progreſſion arithmétique s'appellent les *Logarithmes* des termes de la progreſſion géométrique, auxquels ils répondent, & dont ils peuvent être regardés comme les expoſans. Il ſuit de tout ce que nous venons de dire ;

I°. Que le produit de deux nombres répond à la ſomme de leurs logarithmes.

II°. Que le quotient de deux nombres répond à la différence de leurs logarithmes.

III°. Que la puiſſance d'un nombre répond au produit de ſon logarithme, multiplié par l'expoſant de cette puiſſance.

IV°. Que la racine d'un nombre répond au quotient de ſon logarithme, diviſé par l'expoſant de cette racine.

PRINCIPE III.

638. Si dans la progreſſion géométrique $\div\!\!\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4$, &c. ou $\div\!\!\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16$, &c. l'on inſéroit des moyens proportionnels entre deux termes immédiatement conſécutifs, *par ex:* entre 1 & 2, ou 2 & 4, ces moyens proportionnels auroient, ainſi que les autres termes, des expoſans qui ſeroient leurs logarithmes.

Corollaire.

639. Donc ſi l'on prend des moyens proportionnels géométriques entre les termes immédiatement conſécutifs de la progreſſion géométrique, & ſi l'on prend auſſi autant de moyens proportionnels arithmétiques entre les termes immédiatement conſécutifs de la progreſſion arithmétique, les moyens proportionnels arithmétiques ſeront les logarithmes des moyens proportionnels géométriques correſpondans.

Or c'eſt ſur ces principes que les Géométres ont conſtruit les tables des logarithmes, comme nous l'allons voir.

Proposition I.

640. Pour la construction des tables, il est libre de choisir telle progression géométrique que l'on voudra; mais il faut que la progression géométrique contienne tous les nombres naturels, autrement la table des logarithmes ne seroit point générale. Si l'on choisissoit donc la progression double, 1 : 2 : 4 : 8 : 16, &c. il faudroit insérer des moyens géométriques entre 1 & 2, 2 & 4, 4 & 8; &c. afin que dans l'intervalle qui sépare ces termes, on puisse trouver les nombres naturels intermédiaires.

Les Géométres ont trouvé qu'il étoit plus commode de prendre la progression géométrique décuple 1 · 10 · 1000, &c. plutôt que toute autre progression; & ils ont pris pour progression arithmétique la progression des nombres naturels, commençant par zero, comme l'on voit dans les colonnes suivantes.

0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000
5	100000
&c.	&c.

Proposition II.

641. Les logarithmes des nombres 1, 10, 100 1000, &c. de la progression décuple étant 0 · 1 · 2 · 3, &c. il s'ensuit que les logarithmes des nombres intermédiaires de la progression décuple ne peuvent être qu'entre 0 & 1, 1 & 2, 2 & 3, &c. Or on ne peut avoir que des fractions entre 0 & 1, 1 & 2, 2 & 3.

Les Géométres, pour éviter l'inconvénient des fractions, ont réduit les logarithmes des termes de la progression décuple en fractions décimales, dont le dénominateur est 1000000, & par ce moyen les deux colonnes précédentes ſe changent en celles-ci.

0 · 0000000 · · · · · ·	1
1 · 0000000 · · · · ·	10
2 · 0000000 · · · · ·	100
2 · 0000000 · · · · ·	1000
4 · 0000000 · · · ·	10000

& ainſi de ſuite.

Corollaire.

642. Il eſt évident,

I°. Que les logarithmes de tous les nombres compris entre 1 & 10, commencent par zero; que les logarithmes de tous les nombres compris entre 10 & 100, commencent par 1; que les logarithmes de tous les nombres compris entre 100 & 1000, commencent par 2, &c. Ce premier chiffre 0, ou 1, ou 2, &c. qui précéde toujours le point dans la fraction décimale, s'appelle la *caractériſtique* du logarithme.

II°. Que le nombre qui répond à un logarithme contient autant de caracteres, ou chiffres, & un de plus, qu'il y a d'unités dans la caractériſtique; & par conſéquent la caractériſtique du logarithme ſervira à faire connoître de combien de caracteres eſt compoſé le nombre dont il eſt logarithme.

III°. Que c'eſt une même choſe d'ajouter une unité à la caractériſtique d'un logarithme, ou de multiplier le nombre naturel qui lui répond par 10; d'ajouter deux unités à la caractériſtique, ou de multiplier le nombre correſpondant par 100, & ainſi de ſuite.

IV°. Que pareillement retrancher une unité, deux unités, trois unités, &c. de la caractériſtique d'un logarithme, c'eſt diviſer le nombre correſpondant par 10, par 100, & par 1000, &c.

Propoſition III.

643. Pour trouver les logarithmes de tous les nombres naturels, l'état de la queſtion ſe réduit,

comme on voit, à chercher des moyens géométriques entre les termes conſécutifs 1, 10, 100, &c. de la progreſſion géométrique, & des moyens arithmétiques entre les termes correſpondans 0·0000000, 1·0000000, 2·0000000, &c. de la progreſſion arithmétique. Car les nombres intermédiaires 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ſe trouveront après un certain nombre d'opérations, parmi les moyens géométriques, & l'on trouvera leurs logarithmes, en prenant les moyens arithmétiques qui leur ſont correſpondans.

Voici un exemple. Je cherche quel doit être le logarithme du nombre 9; pour le trouver, il faut entre 1 & 10 chercher des moyens proportionnels géométriques, & leurs logarithmes, juſqu'à ce que le nombre 9 ſe rencontre parmi les moyens géométriques.

I°. Les logarithmes des nombres 1 & 10 ſont 0·0000000 & 1·0000000: j'ajoute enſemble ces deux logarithmes; leur ſomme eſt 1·0000000, & la moitié de cette ſomme, ſçavoir, 5000000, ſera le logarithme du moyen proportionnel géométrique entre 1 & 10, quel qu'il ſoit.

II°. Maintenant pour avoir le moyen proportionnel géométrique entre 1 & 10, il eſt néceſſaire d'extraire la racine quarrée de 10, qui n'a point de racine juſte & exacte; il faut au moins en approcher de ſi près que la racine que l'on trouvera, differe très-peu de la véritable. C'eſt pourquoi je transforme les deux nombres 1 & 10 en fractions décimales 1·0000000, 10·0000000, & je cherche un moyen géométrique entre ces deux nombres, en prenant leur produit & la racine quarrée de ce produit. Or cette racine eſt 3·1622777, dont le quarré ne differe preſque point de 10: donc le nombre 3·1622777 eſt un premier moyen géométrique entre 1 & 10, & ſon logarithme eſt 5000000, qui eſt un premier moyen arithmétique entre 0·0000000 & 1·0000000.

III°. Mais cette racine, ou ce premier moyen géométrique trouvé, n'eſt pas le nombre dont je cherche le logarithme; ce nombre eſt 9·0000000, ou 9 plus grand que cette racine trouvée, mais plus petit que 10, ou 10·0000000. Je cherche donc un moyen géométrique entre cette racine 3·1622777, & 10·0000000, lequel moyen ſe trouvera être 5·6234132, & c'eſt un ſecond moyen géométrique, dont on trouvera par la méthode expliquée ci-deſſus, le logarithme 75000000, lequel eſt par conſéquent un ſecond moyen arithmétique.

IV°. Mais ce nombre 5·6234132 eſt encore plus petit que 9·0000000; il faut donc de nouveau chercher un moyen proportionnel entre ce nombre 5·6234132 & 10·000000, & continuer ainſi de chercher entre le nombre prochainement plus petit, & le nombre prochainement plus grand que 9·0000000, des moyens géométriques avec leurs logarithmes, & par cette méthode on approchera de plus en plus, & l'on trouvera enfin le nombre cherché 9·0000000, ou 9, dont le logarithme ſera 0·9542425.

Corollaire.

644. Lorſqu'on a le logarithme de 9, 7, 5, par la méthode qui vient d'être expoſée, on en trouve facilement pluſieurs autres. Car

I°. Ayant les logarithmes des deux nombres, 2 & 3, la ſomme de ces logarithmes ſera le logarithme du produit $2 \times 3 = 6$, (637.).

II°. Si j'ai les logarithmes d'un produit & d'une de ſes racines, ou facteurs, la différence de ces logarithmes ſera le logarithme de l'autre racine.

III°. Etant donné le logarithme d'un nombre quarré, la moitié de ce logarithme ſera le logarithme de la racine; ainſi prenant la moitié du logarithme de 9, j'aurai le logarithme de 3.

IV°. Etant donné le logarithme d'un nombre cubique, le tiers de ce logarithme ſera le logarithme de la racine.

On voit donc que les Géométres ont dans la recherche des logarithmes, des méthodes & des facilités qui abrégent beaucoup le travail. Car ils ne ſont obligés de chercher immédiatement que les logarithmes des nombres premiers; & par le moyen des logarithmes de ceux-ci, ils trouvent aiſément les logarithmes de tous les nombres composés, ou multiples des nombres premiers, par les méthodes expoſées dans ce corollaire.

Propoſition IV.

645. Sur les principes & les regles que nous venons d'expoſer, les Géométres ont conſtruit des tables de logarithmes pour les nombres naturels depuis l'unité juſqu'à 10000; & même juſqu'à 20000. Ces tables ſont partagées en trois colonnes; la premiere contient les nombres naturels, la ſeconde renferme leurs logarithmes, & dans la troiſiéme ſe trouvent les différences des logarithmes; comme on le peut voir dans la table ſuivante, où il faut remarquer que les deux derniers chiffres de chaque logarithme ſont ſéparés par un point, pour marquer que dans la pratique on peut les négliger ſans erreur ſenſible.

N.	*Logarithmes.*	*Différences.*
1	000000 · 00	
		3010300
2	030103 · 00	
		1760913
3	047712 · 13	
		1249387
4	060206 · 00	
		969100
5	069897 · 00	
		791813
6	077815 : 13	
		669467
7	084509 · 80	
		579920
8	090309 · 00	

Or, lorsque le nombre dont on cherche le logarithme se trouve dans les tables, on en trouvera aussi tout d'un coup le logarithme, lequel est à côté de ce nombre dans la colonne des logarithmes; & pareillement étant donné un logarithme qui se trouve dans les tables, il sera aisé d'avoir sa valeur, ou le nombre auquel il répond, lequel sera à côté du logarithme dans la colonne des nombres naturels.

Mais comme tous les nombres & tous les logarithmes qui peuvent résulter des différentes opérations, ne se trouvent pas dans les tables, parce que celles-ci ne contiennent ni les fractions, ni les nombres entiers au-delà de 20000, il est à propos, lorsque ces cas arrivent, de sçavoir faire usage de ces tables. On donne pour cela des régles que l'on trouve ordinairement dans les livres qui contiennent ces tables.

SECTION II.

Des Opérations de la Géométrie pratique.

LEs démonstrations de la Géométrie spéculative avoient pour objet les propriétés de l'étendue; les opérations de la Géométrie pratique ont pour but de mesurer les différentes espéces de l'étendue; c'est pourquoi il est nécessaire de connoître les mesures, & de les sçavoir appliquer. Nous parlerons donc, 1°. des mesures; 2°. de l'usage & de l'application des mesures.