
SECONDE PARTIE.

Éléments de la Géométrie Pratique.

LA Géométrie pratique est celle qui opere sur son objet. Le but de la Géométrie spéculative est de démontrer; celui de la Géométrie pratique est d'opérer & d'exécuter. On y distingue deux objets, sçavoir, 1°. le calcul; 2°. les opérations.

SECTION I.

Du Calcul de la Géométrie pratique.

LE Calcul de la Géométrie pratique consiste dans des méthodes simples & abrégées, qu'elle a introduites dans le calcul ordinaire, pour en rendre l'exécution plus facile & plus prompte. On distingue deux sortes de calculs dans la Géométrie pratique: 1°. le calcul décimal; 2°. le calcul logarithmique.

CHAPITRE I.

Du Calcul Décimal.

LE calcul décimal a été trouvé pour avoir aisément les valeurs approchées des fractions qui se trouvent quelquefois de reste après la division, & des radicaux que l'on trouve aussi souvent après l'extraction. Car par le moyen de ce calcul

on approche d'aussi près que l'on veut de la valeur de ces fractions & de ces radicaux, en sorte qu'après en avoir pris les valeurs approchées, les restes que l'on trouve, sont de peu de conséquence & peuvent être négligés sans erreur sensible.

I°. Or afin de pouvoir négliger sans inconvénient les restes qui se trouvent, lorsqu'on prend les valeurs approchées des fractions & des radicaux, les Géomètres ont imaginé une méthode pour transformer ces fractions & ces radicaux, lesquels sont ordinairement exprimés par un petit nombre de chiffres, en un nombre considérable de chiffres. Car plus les nombres que l'on divise, ou dont on extrait la racine, sont petits, moins on peut négliger les restes; *par ex*: si l'on divise 5 par 2, on aura $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, où l'on a la fraction, ou le reste $\frac{1}{2}$, qu'on ne peut négliger sans une erreur sensible, parce que cette fraction ou ce reste est une quantité de quelque conséquence par rapport à un petit nombre comme 5. Mais si l'on avoit à diviser 501 par 2, on auroit $\frac{501}{2} = 250 + \frac{1}{2}$, où l'on voit que la fraction, ou le reste $\frac{1}{2}$ peut être négligé sans erreur sensible, parce qu'elle est de peu de conséquence par rapport à un grand nombre, tel que 501. Il faut dire la même chose pour l'extraction des racines.

II°. Les Géomètres sont partis de ce principe, que *plus les parties d'un tout diminuent en grandeur, plus elles augmentent en nombre*. C'est pourquoi ils divisent la petite quantité dont ils veulent négliger les restes, par un très-grand nombre quelconque, ce qui diminue la grandeur des parties, mais en augmente considérablement le nombre, de plus ils la multiplient aussi par le même nombre qui a divisé, pour conserver à la quantité sa même valeur, ce qui la transforme en une expression composée d'un grand nombre de chiffres, d'où il résulte que les restes que laisseroit la divi-

sion, ou l'extraction, qu'on feroit, seroient de peu de conséquence.

III°. Dans la pratique il est à propos de multiplier & de diviser la quantité dont on veut changer l'expression, par un grand nombre plutôt que par un petit; parce que plus est grand le nombre par lequel on transforme la quantité, plus les parties de cette quantité deviennent petites, & les restes que l'on néglige, sont de peu de conséquence.

IV°. Il vaut mieux multiplier & diviser la quantité par un nombre décimal quelconque, 10, 100, 1000, 10000, &c. que par tout autre nombre; par la raison que la multiplication & la division par les nombres décimaux sont plus aisées & plus promptes. C'est pourquoi si je veux transformer en un grand nombre les quantités 3, 25, 48, &c. j'aurai, en multipliant & divisant par 10, les quantités $\frac{30}{10}$, $\frac{250}{10}$, $\frac{480}{10}$. Or ces fractions s'expriment d'une façon abrégée comme ceci 3·0; 25·0; 48·0, &c. en intercallant un point qui soit suivi d'autant de caractères, qu'il y a de zero dans le dénominateur décimal sous-entendu. Pareillement si je multiplie & si je divise par 100 les quantités 3, 25, 48, &c. elles deviendront $\frac{300}{100}$, $\frac{2500}{100}$, $\frac{4800}{100}$, ou 3·00; 25·00; 48·00, &c.

V°. Les quantités 3·0, 25·0, 48·0, &c. ou 3·00, 25·00, ou d'autres semblables, sont ce qu'on appelle fractions décimales: *fractions*, parce qu'elles ont un numérateur & un dénominateur; *décimales*, parce que leur dénominateur est toujours un nombre décimal, & le calcul qui opere sur ces fractions, s'appelle *calcul décimal*, ou *calcul des décimales*. Or comme dans les fractions décimales ainsi exprimées, le dénominateur est toujours sous-entendu, l'expression de la fraction se trouve changée en celle d'entiers, ce qui en rend le calcul plus aisé & plus commode.

VI°. Pour la même raison, si j'ai les fractions

$\frac{8}{10}, \frac{25}{10}, \frac{48}{10}$, &c. je puis les écrire d'une façon abrégée, comme ceci, $0.3, 2.5, 4.8$, &c. il en est de même des fractions $\frac{3}{100}, \frac{25}{100}, \frac{480}{1000}$, &c. qui sont la même chose que $0.03, 0.25, 0.050$; ce qui se fait en mettant un zero avant le point pour le rendre plus remarquable, & après le point des zero placés de façon que l'ordre & le rang des chiffres soient conservés.

Ainsi l'on voit que tout l'art du calcul décimal consiste à réduire les petits nombres en fractions décimales, transformer ces fractions décimales en l'expression d'entiers, & par ce moyen en rendre le calcul aussi aisé & aussi commode que celui des nombres entiers eux-mêmes.

PRINCIPE I.

627. Une quantité, *par ex.* 3, multipliée & divisée par différens nombres pris successivement, conserve toujours sa même valeur, *par ex.* les quantités $\frac{3}{10}, \frac{300}{100}, \frac{3000}{1000}$, &c. sont égales entr'elles, & sont chacune = 3; par conséquent les fractions $3.0, 5.00, 3.000, 3.0000$, &c. quoique différentes en apparence, sont cependant égales.

PRINCIPE II.

628. Mais une quantité, *par ex.* 3, divisée simplement par différens nombres pris successivement, ne conserve plus la même valeur, *par ex.* les quantités $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}$, ne sont point égales, & par conséquent les fractions $0.3, 0.03, 0.003$, &c. sont de différente valeur.

Corollaire.

629. Il suit de ce que nous venons de dire,

I°. Que l'expression 3.0 n'est pas la même chose que 0.3; car $3.0 = \frac{30}{10}$, & $0.3 = \frac{3}{10}$.

II°. Pareillement l'expression 0.05 n'est pas la même chose que 0.50; car la quantité $0.05 = \frac{5}{100}$ au lieu que $0.50 = \frac{50}{100}$.

III°. Lorsque dans une fraction décimale il ne se trouve que des zero après le point, la valeur de la fraction ne s'estime que par les chiffres qui

précèdent le point, & alors le nombre des zero qui suivent le point, peut être augmenté ou diminué, sans changer la valeur de la fraction: ainsi l'on a $45 \cdot 0 = 45 \cdot 00000$.

IV°. Mais lorsqu'après le point il se trouve des chiffres positifs, pour avoir la valeur de la fraction il faut avoir égard, & au nombre de ces chiffres, & au rang qu'ils tiennent; c'est pourquoi $45 \cdot 0$ n'est pas égal à $45 \cdot 3$. Car $45 \cdot 0 = \frac{450}{10}$, au lieu que $45 \cdot 3 = \frac{453}{10}$. Pareillement $45 \cdot 30$ n'est pas la même chose que $45 \cdot 03$, car $45 \cdot 30 = \frac{4530}{100}$, ou $\frac{453}{10}$, au lieu que $45 \cdot 03 = \frac{453}{100}$. Dans ce cas on ne peut, sans changer la valeur, augmenter ou diminuer que les zero qui se trouvent après tous les chiffres positifs qui suivent le point.

V°. On peut pour plus grande commodité retrancher les derniers chiffres d'une fraction décimale; mais alors il faut ajouter une unité au chiffre qui reste le dernier, lorsque le premier des chiffres qu'on néglige, surpasse 5; *par ex.*: si dans la fraction 0.4864, je néglige les deux derniers chiffres, je dois écrire 0.49, & non pas 0.48. Car $0 \cdot 49 = 0 \cdot 4900$, & $0 \cdot 48 = 0 \cdot 4800$: or 0.4900 approche plus près de la valeur 0.4864, que 0.4800.

R E G L E I.

630. Pour réduire un nombre entier en fraction décimale, il n'y a qu'à mettre après l'entier un point suivi d'autant de zero que l'on voudra; *par ex.*: l'entier 37 se transforme en $37 \cdot 0$, ou $37 \cdot 00$, ou $37 \cdot 000$, &c.

R E G L E II.

631. Si l'on a un nombre entier joint à une fraction, *par ex.*: $23 \frac{4}{10}$, que l'on veuille réduire en une fraction décimale, il est clair que puisque $\frac{4}{10} = 0 \cdot 4$, l'on aura $23 \frac{4}{10} = 23 \cdot 4$; par la même raison on aura aussi $23 \frac{4}{100} = 23 \cdot 04$; pareillement l'on a $23 \frac{4}{1000} = 23 \cdot 004$, & ainsi du reste, insérant toujours avant le 4 des zero, de façon qu'après le

le point il se trouve autant de chiffres, ou caracteres, qu'il y aura de zero au dénominateur.

R E G L E I I I.

632. Si l'on veut réduire une fraction ordinaire en une fraction décimale, il faut d'abord la réduire à un dénominateur qui soit un nombre décimal lorsque cette réduction est possible. La fraction étant devenue décimale, s'écrira suivant la méthode abrégée, en intercalant un point qui soit suivi, &c. *par ex.* $\frac{3}{4}$ se réduit en fraction décimale, en faisant $\frac{3}{4} = \frac{30}{40} = \frac{3}{10} = 0.3$.

Corollaire.

633. Il suit de ce que nous venons de dire que les chiffres qui précèdent le point, peuvent être regardés comme des nombres entiers, & que les décimales ne sont exprimées que par les chiffres qui suivent le point; *par ex.* la fraction $4.05 = 4 + \frac{5}{100}$; car $4.05 = \frac{405}{100} = 4 + \frac{5}{100} = 4 + \frac{1}{20}$.

R E G L E I V.

634. Les fractions décimales sont susceptibles des opérations de l'Arithmétique, lesquelles sont pour les fractions décimales précisément les mêmes que celles qui se font sur les nombres entiers; il y a seulement quelques précautions à prendre pour placer le point qui sépare les nombres entiers des nombres fractionnaires.

1°. L'addition des décimales se fait en écrivant les fractions les unes sous les autres, de façon que les points soient en colonne, & en prenant la somme du tout; *par ex.*

34 · 012	ou	34 · 012
242 · 71		242 · 710
3 · 8		3 · 800
280 · 522		280 · 522

La raison de cette opération s'apercevra aisément, en réduisant les fractions décimales à leur état naturel de fraction; *par ex.* la somme des frac-

tions décimales $2 \cdot 03$ & $3 \cdot 40$, doit être $5 \cdot 43$

En effet $2 \cdot 03 = 2 + \frac{3}{100} = \frac{200}{100} + \frac{3}{100} = \frac{203}{100}$;
pareillement $3 \cdot 40 = 3 + \frac{40}{100} = \frac{300}{100} + \frac{40}{100} = \frac{340}{100}$;
or la somme de $\frac{203}{100} + \frac{340}{100}$ est $= \frac{543}{100} = 5 \cdot 43$;
donc, &c.

II°. La soustraction se fait en arrangeant les quantités données de la même manière que ci-dessous, & en opérant à l'ordinaire ; *par ex* :

$$\begin{array}{r} 68 \cdot 304 \\ 36 \cdot 7 \\ \hline 31 \cdot 604 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 68 \cdot 304 \\ 36 \cdot 700 \\ \hline 31 \cdot 604 \end{array}$$

La raison de cette opération se trouvera de la même manière que pour l'addition,

III°. La multiplication se fait comme celle des nombres entiers, observant que dans le produit total il faut séparer par un point autant de chiffres sur la droite, qu'il y a de décimales, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur ; en sorte que si le produit total ne contenoit pas autant de chiffres qu'il y a de décimales dans le multiplicande & le multiplicateur, il faudroit mettre sur la gauche un nombre suffisant de zero ; *par ex* :

$$\begin{array}{r} 43 \cdot 7 \\ 13 \cdot 0 \\ \hline 00 \ 0 \\ 1311 \\ 437 \\ \hline 568 \cdot 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \cdot 7 \\ 4 \cdot 12 \\ \hline 74 \\ 37 \\ 148 \\ \hline 15 \cdot 244 \end{array}$$

La raison de cette opération se trouvera de la même manière,

IV°. La division se fait aussi de la même manière que celle des nombres entiers ; mais il faut remarquer, 1°. qu'après avoir trouvé le quotient, il faut séparer par un point autant de chiffres sur la droite

te, qu'il se trouve plus de décimales dans le dividende que dans le diviseur : 2°. s'il se trouve plus de décimales dans le diviseur que dans le dividende, alors il faut ajouter aux décimales du dividende autant de zero que l'on voudra; 3°. si l'on en ajoute précisément pour qu'il y ait autant de décimales dans le dividende que dans le diviseur, alors le quotient sera sans décimales; & si l'on en ajoute de plus, le quotient aura un nombre de décimales égale à ce surplus. Voici des exemples :

$$\frac{8 \cdot 445}{3 \cdot 22} = 2 \cdot 6;$$

$$\frac{24 \cdot 652000}{4 \cdot 5650} = 534 \cdot 20.$$

La raison de cette opération se trouvera de la même façon que pour les opérations précédentes.

CHAPITRE II.

Du Calcul Logarithmique.

I°. **O**N sçait que l'addition & la soustraction sont des opérations plus simples que la multiplication & la division; pareillement que la multiplication & la division sont un calcul moins composé que l'exaltation & l'extraction. Il seroit donc avantageux de trouver une méthode qui pût changer en additions & soustractions toutes les espèces de multiplications & de divisions, qui pût pareillement substituer la multiplication & la division à la place de l'exaltation & de l'extraction, & l'on voit qu'une pareille méthode simplifieroit beaucoup les opérations, & introduiroit beaucoup de facilité dans les calculs.

II°. Or cette méthode a été trouvée par le fameux Nepper, Géomètre Ecossois, lequel a donné l'art de substituer des nombres artificiels à la place des nombres ordinaires, pour faire sur ceux-là, par voie d'addition & de soustraction, ce qu'il

faudroit faire sur ceux-ci par voie de multiplication & de division, & de faire pareillement sur les premiers par voie de multiplication & de division, ce qu'on seroit obligé de faire sur les derniers par voie d'exaltation & d'extraction.

III°. Ces nombres artificiels que l'on substitue à la place des nombres ordinaires, sont ce que l'on appelle *Logarithmes*, & l'usage qu'on en fait, s'appelle *Calcul logarithmique*, lequel est tout fondé sur la nature des deux progressions *arithmétique* & *géométrique*.

P R I N C I P E I.

635. Dans toute progression géométrique, dont les termes sont affectés d'exposans, les exposans sont en progression arithmétique, *par ex* : si j'ai la progression géométrique,

$$\overset{\text{::}}{a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : a^6 : \&c.}$$

les exposans donneront la progression arithmétique

$$\overset{\text{::}}{0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6, \&c.}$$

en sorte que si je suppose $a = 2$, j'aurai les deux progressions suivantes,

$$\overset{\text{::}}{1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64, \&c.}$$

$$\overset{\text{::}}{0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6, \&c.}$$

dont l'une est la progression des termes, & l'autre celle des exposans, & que, pour plus grande facilité, on écrit en deux colonnes, comme ceci :

0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
&c.								&c.

P R I N C I P E I I.

636. Les opérations qui se font par voie de mul-

tiplication & de division sur les termes de la progression géométrique, se font par voie d'addition & de soustraction sur les termes correspondans de la progression arithmétique; & celles qui se font par voie d'exaltation & d'extraction sur les premiers, se font par la multiplication & la division sur les derniers.

I°. Dans la progression géométrique, si je prends les quatre termes $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8$, le produit des deux moyens $2 \times 4 = 1 \times 8$, produit des extrêmes; au lieu que prenant les termes correspondans $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ dans la progression arithmétique, on a la somme des moyens $1 + 2 = 0 + 3$, somme des extrêmes.

II°. Pareillement si dans la progression géométrique, je prends le produit des moyens $4 \times 8 = 32$; & que je le divise par 2, j'aurai $\frac{32}{2} = 16$, qui est le quatrième terme de la proportion $2 : 4 :: 8 : 16$, au lieu que dans la progression arithmétique, il faut prendre la somme des moyens $2 + 3 = 5$, & en retrancher le terme 1, pour avoir le dernier terme de la proportion arithmétique correspondante $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, que j'ai prise dans la progression arithmétique.

III°. Si dans la progression géométrique j'éleve le second terme 2 à la troisième puissance, j'aurai le quatrième terme 8; mais dans la progression arithmétique, au lieu d'élever à la troisième puissance le second terme 1, je n'ai qu'à le tripler, ou le multiplier par 3, & j'aurai le quatrième terme 3 vis-à-vis de 8.

IV°. Si dans la progression géométrique je veux extraire la racine troisième du septième terme 64, j'aurai pour racine le nombre 4, qui est le troisième terme de la progression; mais dans la progression arithmétique je n'ai qu'à diviser par 3 le septième terme 6, & j'aurai le troisième terme 2 de la progression vis-à-vis de 4.

Corollaire.

637. Les termes de la progression arithmétique s'appellent les *Logarithmes* des termes de la progression géométrique, auxquels ils répondent, & dont ils peuvent être regardés comme les exposans. Il suit de tout ce que nous venons de dire;

I°. Que le produit de deux nombres répond à la somme de leurs logarithmes.

II°. Que le quotient de deux nombres répond à la différence de leurs logarithmes.

III°. Que la puissance d'un nombre répond au produit de son logarithme, multiplié par l'exposant de cette puissance.

IV°. Que la racine d'un nombre répond au quotient de son logarithme, divisé par l'exposant de cette racine.

P R I N C I P E I I I.

638. Si dans la progression géométrique $\ddot{::} a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4, \&c.$ ou $\ddot{::} 1 : 2 : 4 : 8 : 16, \&c.$ l'on inséroit des moyens proportionnels entre deux termes immédiatement consécutifs, *par ex :* entre 1 & 2, ou 2 & 4, ces moyens proportionnels auroient, ainsi que les autres termes, des exposans qui seroient leurs logarithmes.

Corollaire.

639. Donc si l'on prend des moyens proportionnels géométriques entre les termes immédiatement consécutifs de la progression géométrique, & si l'on prend aussi autant de moyens proportionnels arithmétiques entre les termes immédiatement consécutifs de la progression arithmétique, les moyens proportionnels arithmétiques seront les logarithmes des moyens proportionnels géométriques correspondans.

Or c'est sur ces principes que les Géomètres ont construit les tables des logarithmes, comme nous l'allons voir.

Proposition I.

640. Pour la construction des tables, il est libre de choisir telle progression géométrique que l'on voudra; mais il faut que la progression géométrique contienne tous les nombres naturels, autrement la table des logarithmes ne seroit point générale. Si l'on choisissoit donc la progression double, 1 : 2 : 4 : 8 : 16, &c. il faudroit insérer des moyens géométriques entre 1 & 2, 2 & 4, 4 & 8; &c. afin que dans l'intervalle qui sépare ces termes, on puisse trouver les nombres naturels intermédiaires.

Les Géomètres ont trouvé qu'il étoit plus commode de prendre la progression géométrique décuple 1 · 10 · 1000, &c. plutôt que toute autre progression; & ils ont pris pour progression arithmétique la progression des nombres naturels, commençant par zero, comme l'on voit dans les colonnes suivantes.

0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000
5	100000
&c.							&c.

Proposition II.

641. Les logarithmes des nombres 1, 10, 100, 1000, &c. de la progression décuple étant 0 · 1 · 2 · 3, &c. il s'enfuit que les logarithmes des nombres intermédiaires de la progression décuple ne peuvent être qu'entre 0 & 1, 1 & 2, 2 & 3, &c. Or on ne peut avoir que des fractions entre 0 & 1, 1 & 2, 2 & 3.

Les Géomètres, pour éviter l'inconvénient des fractions, ont réduit les logarithmes des termes de la progression décuple en fractions décimales, dont le dénominateur est 1000000, & par ce

moyen les deux colonnes précédentes se changent en celles-ci.

0	· 0000000	·	·	·	·	·	·	·	I
1	· 0000000	·	·	·	·	·	·	·	10
2	· 0000000	·	·	·	·	·	·	·	100
2	· 0000000	·	·	·	·	·	·	·	1000
4	· 0000000	·	·	·	·	·	·	·	10000

& ainsi de suite.

Corollaire.

642. Il est évident,

I°. Que les logarithmes de tous les nombres compris entre 1 & 10, commencent par zero; que les logarithmes de tous les nombres compris entre 10 & 100, commencent par 1; que les logarithmes de tous les nombres compris entre 100 & 1000, commencent par 2, &c. Ce premier chiffre 0, ou 1, ou 2, &c. qui précède toujours le point dans la fraction décimale, s'appelle la *caractéristique* du logarithme.

II°. Que le nombre qui répond à un logarithme contient autant de caractères, ou chiffres, & un de plus, qu'il y a d'unités dans la caractéristique; & par conséquent la caractéristique du logarithme servira à faire connoître de combien de caractères est composé le nombre dont il est logarithme.

III°. Que c'est une même chose d'ajouter une unité à la caractéristique d'un logarithme, ou de multiplier le nombre naturel qui lui répond par 10; d'ajouter deux unités à la caractéristique, ou de multiplier le nombre correspondant par 100, & ainsi de suite.

IV°. Que pareillement retrancher une unité, deux unités, trois unités, &c. de la caractéristique d'un logarithme, c'est diviser le nombre correspondant par 10, par 100, & par 1000, &c.

Proposition III.

643. Pour trouver les logarithmes de tous les nombres naturels, l'état de la question se réduit,

comme on voit, à chercher des moyens géométriques entre les termes consécutifs 1, 10, 100, &c. de la progression géométrique, & des moyens arithmétiques entre les termes correspondans 0.000000, 1.000000, 2.000000, &c. de la progression arithmétique. Car les nombres intermédiaires 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se trouveront après un certain nombre d'opérations, parmi les moyens géométriques, & l'on trouvera leurs logarithmes, en prenant les moyens arithmétiques qui leur sont correspondans.

Voici un exemple. Je cherche quel doit être le logarithme du nombre 9; pour le trouver, il faut entre 1 & 10 chercher des moyens proportionnels géométriques, & leurs logarithmes, jusqu'à ce que le nombre 9 se rencontre parmi les moyens géométriques.

I°. Les logarithmes des nombres 1 & 10 sont 0.000000 & 1.000000: j'ajoute ensemble ces deux logarithmes; leur somme est 1.000000, & la moitié de cette somme, sçavoir, 500000, fera le logarithme du moyen proportionnel géométrique entre 1 & 10, quel qu'il soit.

II°. Maintenant pour avoir le moyen proportionnel géométrique entre 1 & 10, il est nécessaire d'extraire la racine quarrée de 10, qui n'a point de racine juste & exacte; il faut au moins en approcher de si près que la racine que l'on trouvera, differe très-pen de la véritable. C'est pourquoy je transforme les deux nombres 1 & 10 en fractions décimales 1.000000, 10.000000, & je cherche un moyen géométrique entre ces deux nombres, en prenant leur produit & la racine quarrée de ce produit. Or cette racine est 3.1622777, dont le quarré ne differe presque point de 10: donc le nombre 3.1622777 est un premier moyen géométrique entre 1 & 10, & son logarithme est 500000, qui est un premier moyen arithmétique entre 0.000000 & 1.000000.

III°. Mais cette racine, ou ce premier moyen géométrique trouvé, n'est pas le nombre dont je cherche le logarithme; ce nombre est $9 \cdot 000000$, ou 9 plus grand que cette racine trouvée, mais plus petit que 10 , ou $10 \cdot 000000$. Je cherche donc un moyen géométrique entre cette racine $3 \cdot 1622777$, & $10 \cdot 000000$, lequel moyen se trouvera être $5 \cdot 6234132$, & c'est un second moyen géométrique, dont on trouvera par la méthode expliquée ci-dessus, le logarithme 7500000 , lequel est par conséquent un second moyen arithmétique.

IV°. Mais ce nombre $5 \cdot 6234132$ est encore plus petit que $9 \cdot 000000$; il faut donc de nouveau chercher un moyen proportionnel entre ce nombre $5 \cdot 6234132$ & $10 \cdot 000000$, & continuer ainsi de chercher entre le nombre prochainement plus petit, & le nombre prochainement plus grand que $9 \cdot 000000$, des moyens géométriques avec leurs logarithmes, & par cette méthode on approchera de plus en plus, & l'on trouvera enfin le nombre cherché $9 \cdot 000000$, ou 9 , dont le logarithme sera $0 \cdot 9542425$.

Corollaire.

644. Lorsqu'on a le logarithme de 9 , 7 , 5 , par la méthode qui vient d'être exposée, on en trouve facilement plusieurs autres. Car

I°. Ayant les logarithmes des deux nombres, 2 & 3 , la somme de ces logarithmes sera le logarithme du produit $2 \times 3 = 6$, (637).

II°. Si j'ai les logarithmes d'un produit & d'une de ses racines, ou facteurs, la différence de ces logarithmes sera le logarithme de l'autre racine.

III°. Etant donné le logarithme d'un nombre carré, la moitié de ce logarithme sera le logarithme de la racine; ainsi prenant la moitié du logarithme de 9 , j'aurai le logarithme de 3 .

IV°. Etant donné le logarithme d'un nombre

cubique, le tiers de ce logarithme sera le logarithme de la racine.

On voit donc que les Géomètres ont dans la recherche des logarithmes, des méthodes & des facilités qui abrègent beaucoup le travail. Car ils ne sont obligés de chercher immédiatement que les logarithmes des nombres premiers; & par le moyen des logarithmes de ceux-ci, ils trouvent aisément les logarithmes de tous les nombres composés, ou multiples des nombres premiers, par les méthodes exposées dans ce corollaire.

Proposition IV.

645. Sur les principes & les règles que nous venons d'exposer, les Géomètres ont construit des tables de logarithmes pour les nombres naturels depuis l'unité jusqu'à 10000; & même jusqu'à 20000. Ces tables sont partagées en trois colonnes; la première contient les nombres naturels, la seconde renferme leurs logarithmes, & dans la troisième se trouvent les différences des logarithmes; comme on le peut voir dans la table suivante, où il faut remarquer que les deux derniers chiffres de chaque logarithme sont séparés par un point, pour marquer que dans la pratique on peut les négliger sans erreur sensible.

N.	Logarithmes.	Différences.
1	000000 · 00	3010300
2	030103 · 00	1760913
3	047712 · 13	1249387
4	060206 · 00	969100
5	069897 · 00	791813
6	077815 · 13	669467
7	084509 · 80	579920
8	090309 · 00	

Or, lorsque le nombre dont on cherche le logarithme se trouve dans les tables, on en trouvera au li tout d'un coup le logarithme, lequel est à côté de ce nombre dans la colonne des logarithmes; & pareillement étant donné un logarithme qui se trouve dans les tables, il sera aisé d'avoir sa valeur, ou le nombre auquel il répond, lequel sera à côté du logarithme dans la colonne des nombres naturels.

Mais comme tous les nombres & tous les logarithmes qui peuvent résulter des différentes opérations, ne se trouvent pas dans les tables, parce que celles-ci ne contiennent ni les fractions, ni les nombres entiers au-delà de 20000, il est à propos, lorsque ces cas arrivent, de sçavoir faire usage de ces tables. On donne pour cela des règles que l'on trouve ordinairement dans les livres qui contiennent ces tables.

SECTION II.

Des Opérations de la Géométrie pratique.

Les démonstrations de la Géométrie spéculative avoient pour objet les propriétés de l'étendue; les opérations de la Géométrie pratique ont pour but de mesurer les différentes espèces de l'étendue; c'est pourquoi il est nécessaire de connoître les mesures, & de les sçavoir appliquer. Nous parlerons donc, 1°. des mesures; 2°. de l'usage & de l'application des mesures.



CHAPITRE I.

Des Mesures.

I°. **D**ANS la Géométrie spéculative les Géomètres se font servis de deux principes pour appuyer leurs démonstrations, sçavoir, de la ligne droite & de la ligne circulaire; de même dans la Géométrie pratique ils se servent, pour se diriger dans leurs opérations, de deux instrumens qui répondent à la ligne droite & à la ligne circulaire, sçavoir, de la règle & du compas: de la règle, pour tracer & mesurer des lignes: du compas, pour décrire le cercle qui sert à mesurer les angles.

II°. Mais pour que la règle & le cercle puissent devenir des mesures de quelque usage, il faut auparavant les diviser en des parties fixes & connues soit pour le nombre, soit pour la grandeur. C'est pourquoi les Géomètres ont divisé l'un & l'autre instrument en un certain nombre de parties déterminées, & cette division a été de pure convention.

ARTICLE I.

De la Division de la Règle.

I°. On distingue deux sortes de règle, la règle ordinaire & la règle géométrique, que l'on appelle aussi *Echelle géométrique*.

II°. La règle ordinaire se divise en *pieds*, le pied se divise en 12 *pouces*, le pouce en 12 *lignes*, la ligne en 12 *points*. L'usage de cette règle consiste à l'appliquer, en la portant sur toute la longueur d'une dimension quelconque de l'étendue; afin de trouver par ce moyen combien cette dimension contient de pieds, de pouces, &c. ainsi par son moyen on juge des *longueurs*, des *distances*, des *hauteurs*, des *largeurs*, &c.

III°. Mais l'usage de la règle, ou échelle géo-

métrique ne consiste pas à l'appliquer immédiatement sur l'étendue que l'on veut mesurer; mais il consiste soit à trouver, soit à désigner le nombre des parties dont cette étendue est composée, par un même nombre de parties semblables & proportionnelles, prises sur l'échelle géométrique.

IV°. Ainsi on doit regarder l'échelle géométrique comme une règle divisée, *par ex*: en 10, en 100, en 1000, en 10000, &c. parties sous divisées elles-mêmes avec un certain art en parties plus petites, pour mesurer ou pour désigner de plus grandes étendues, avec lesquelles ces parties, qui sont des petites mesures, ont une proportion connue.

P R O B L Ê M E I.

646. *Construire la Règle, ou l'Echelle géométrique (fig. 134.).*

SOLUT. I°. Tirez la droite indéfinie AB; prenez sur cette ligne un certain nombre de parties égales prises à volonté; *par ex*: six portions égales A, 6; 6, 5; 5, 4; &c. en commençant depuis A; la sixième sera 2, B; & supposez que ces divisions représentent des pieds: vous transporterez ensuite la distance AB sur toute la longueur de la ligne A 3, autant de fois qu'il vous plaira, & les divisions AB; B2; 2, 3; désigneront par conséquent des toises.

II°. Elevez au point A une perpendiculaire AC, que vous diviserez en douze parties égales A, 1; 1, 2; 2, 3; &c. Leur nombre représentera celui des parties (sçavoir, des pouces) qui sont immédiatement contenues dans le pied.

III°. De chaque point de division faite dans la perpendiculaire AC, menez des parallèles à la ligne A3, & sur la dernière parallèle C3, transportez de C en D les six parties égales, auxquelles on a divisé la ligne AB.

IV°. Joignez par des lignes droites le point à

gauche, marqué A, avec le second à droite, marqué 6; puis 6 de la gauche avec 5 de la droite, & ainsi de suite; joignez toujours les divisions de la gauche avec celles de la droite par des transversales A, 6; 6, 5; 5, 4; 4, 3; 3, 2; &c.

Il est évident que si AB est supposée être une longueur de six pieds, les portions A, 6; 6, 5; 5, 4; &c. C, 6; 6, 5; 5, 4; &c. feront chacune la longueur d'un pied: mais les portions 1, 1; 2, 2; 3, 3; comprises entre la perpendiculaire AC & la transversale A 6, & prises dans les parallèles menées entre A₃, & C₃ exprimeront des pouces; sçavoir la portion 1, 1, exprimera un pouce 2, 2, deux pouces, 3, 3, trois pouces, 4, 4, quatre pouces, de telle sorte que la dernière C6 exprimera douze pouces, ou un pied, parce que C6 = A6 par la construction.

DÉMONST. Supposant que les six parties égales de la ligne AB font six pieds, il faut démontrer que la portion 1, 1, donne un pouce; 2, 2, deux pouces; 3, 3, trois pouces, &c. ce qui est évident. Car les triangles CA6, 1A1, sont semblables: donc on aura A1 : AC :: 1, 1 : C6. Or A1 n'est que la douzième partie de AC par la construction: donc 1, 1 sera la douzième partie de C6: donc puisque C6 vaut 12 pouces, 1, 1 vaudra un pouce. On prouve de la même manière que 2, 2 vaut deux pouces, que 3, 3 donne trois pouces, &c.

Corollaire.

647. L'usage de la règle ainsi divisée est fort commode. Voulez-vous prendre en petit la valeur de 5 pieds plus 4 pouces? cherchez sur l'échelle géométrique la transversale qui forme la cinquième division, en allant de A en B, sçavoir la transversale 2, 1; cherchez aussi la parallèle qui forme la quatrième division en allant de A en C, sçavoir la parallèle 4, Z. Si sur le point X où se rencontrent la transversale & la parallèle, vous

posez une jambe du compas, & l'autre jambe sur l'extrémité 4, ou la parallèle rencontre la ligne AC, l'ouverture du compas vous donnera une longueur de 5 pieds 4 pouces. Car du point X au chiffre 4 qui se rencontre le premier dans la parallèle, il y a cinq divisions qui désignent 5 pieds; & l'intervalle 4, 4, que donne le reste de la parallèle, dénote 4 pouces, comme nous l'avons prouvé: donc, &c.

ARTICLE II.

De la Division du Cercle.

I°. En géométrie il ne suffit pas d'avoir une mesure pour juger des longueurs, des distances, &c. il en faut aussi une pour mesurer les angles. La mesure dont on se sert pour connoître les distances, est la *regle* dont nous venons de parler; celle dont on se sert pour juger de la quantité des angles, est la *circonférence du cercle*, que l'on a pour cette raison divisée en un certain nombre de parties égales, comme nous l'avons dit ailleurs.

II°. Quand on veut mesurer un angle, on suppose & l'on conçoit qu'il a son sommet au centre du cercle, & alors l'arc de circonférence intercepté entre les côtés de l'angle, est la mesure de l'angle, & l'angle sera d'autant plus grand ou plus petit, qu'il interceptera entre ses côtés un arc d'un plus grand ou d'un plus petit nombre de parties égales ou de *degrés*, ou de *minutes*, ou, &c.

III°. Il est donc important de pouvoir diviser exactement la circonférence du cercle en tous ses degrés & minutes, & c'est à quoi les Géomètres tâchent de parvenir en cherchant surtout la méthode d'inscrire à la circonférence du cercle des polygones réguliers de différente espèce, comme nous l'allons voir pour quelques-uns.

PROBLÈME I.

648. *Diviser la Circonférence du Cercle en deux également.*

SOLUT. Dans le cercle menez un diamètre; il partagera la circonférence du cercle en deux également, comme nous l'avons prouvé (282).

PROBLÈME II.

649. *Diviser la Circonférence du cercle en quatre parties égales.*

SOLUT. Dans le cercle menez deux diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre, ils partageront la circonférence en quatre parties égales, comme il est évident.

C'est par cette méthode que l'on inscrit un carré dans un cercle: car si l'on joint les extrémités des diamètres par des cordes, ces cordes formeront un carré.

PROBLÈME III.

650. *Diviser un Arc quelconque en deux également.*

SOLUT. Menez une corde par les extrémités de l'arc donné, & divisez-la en deux également par une perpendiculaire (289); l'arc sera aussi divisé en deux également (319).

Par la même méthode on divise aussi en deux également un angle quelconque. Car ayant décrit du sommet de l'angle, pris comme centre, & d'un intervalle quelconque, un arc entre les deux côtés de l'angle, la ligne qui, tirée du sommet, partagera cet arc en deux également, divisera aussi l'angle mesuré par cet arc en deux également.

Corollaire.

651. On peut toujours diviser exactement la circonférence du cercle en autant de parties égales que l'on voudra, en prenant le nombre 2 & ses multiples 4, 8, 16, &c. pour diviseurs. Ainsi on peut la diviser en 2, 4, 8, 16, 32, &c. parties égales; d'où suit la méthode d'inscrire à un cercle donné, non-seulement un carré, mais un octogone, un polygone de 16, de 32, de 64, &c. côtés.

Proposition.

652. Les Géomètres étant convenus que la circonférence du cercle seroit divisée en 360 parties égales, il est à remarquer que pour faire exactement & géométriquement cette division, le diviseur 2, & ses multiples ne fussent pas; il faudroit aussi pouvoir faire usage des diviseurs 3, 5, & de leurs multiples, c'est-à-dire qu'il faudroit pouvoir diviser la circonférence, ou un arc quelconque, en 3, en 5, en 9, en 12, en 15, &c. parties égales. Or pour diviser la circonférence du cercle en un nombre quelconque de parties égales, & en nombres multiples de 3 & de 5, la question se réduit en général à inscrire dans le cercle des polygones réguliers de différente espece, lesquels détermineront dans la circonférence des points de division, & dont les côtés seront des cordes qui contiendront des arcs d'un certain nombre de degrés.

P R O B L È M E I V.

653. *Inscrire dans le cercle un Exagone régulier, ou diviser la circonférence du Cercle en six parties égales.*

SOLUT. Portez le rayon du cercle successivement sur la circonférence, il donnera un exagone régulier inscrit, & divisera la circonférence en six parties égales. Car nous avons prouvé (423.) que le côté de l'exagone étoit égal au rayon du cercle.

Corollaire I.

654. De-là suit la méthode d'inscrire à un cercle,
I°. Un triangle équilatéral, ou de diviser la circonférence du cercle en trois parties égales, en menant des cordes qui soutiendroient des arcs doubles de ceux qui sont soutenus par les côtés de l'exagone régulier.

II°. Un dodécagone régulier; car après avoir inscrit un exagone régulier, il ne s'agit que de diviser en deux également chacun des arcs soutenus par les côtés de l'exagone.

Corollaire I I.

655. On peut diviser un angle droit, ou un arc de 90 degrés en trois parties égales (*fig. 133*), en portant successivement le côté du dodécagone sur l'arc BEDA de 90 degrés, & il le partagera en trois arcs de 30 degrés chacun.

Ou bien portez le rayon du cercle sur un arc de 90 degrés, sçavoir de B en D, & de A en E, & vous aurez la même chose. Car le rayon porté sur la circonférence, est le côté d'un exagone régulier, qui par conséquent détermine de A en E un arc de 60 degrés, & pareillement porté de B en D, déterminera un autre arc de 60 degrés: donc les arcs AD, DE, EB sont de 30 degrés chacun.

Corollaire I I I.

656. On peut aussi diviser un angle ou un arc de 45 degrés en trois parties égales. Pour cela il n'y a qu'à prendre un arc de 30 degrés, & le diviser en deux également, ce qui donnera un arc de 15 degrés, dont la corde, portée successivement sur un arc de 45 degrés, le divisera en trois arcs égaux de 15 degrés chacun.

Mais on n'a pas trouvé la méthode de diviser géométriquement par la *regle* & le *compas* un angle ou un arc quelconque donné en trois parties égales; & c'est-là le fameux problème de la *trisection* de l'angle tant cherchée par les Anciens. A plus forte raison on ne peut pas diviser un angle quelconque en 5, 7, 9, 11, &c. parties égales: c'est de-là que vient la difficulté de graduer exactement les *quarts* de cercle dont on se sert dans la Géométrie pratique.

Corollaire I V.

657. Il suit évidemment de tout ce que nous venons de dire, que pour inscrire un polygone régulier quelconque à un cercle, il ne s'agit que de déterminer le côté de ce polygone, en cherchant le rapport qu'a ce côté avec le rayon du

cercle auquel on veut inscrire le polygone. Car le rayon du cercle est toujours une quantité connue & donnée. Dans ce cas on doit regarder le côté du polygone régulier que l'on veut inscrire, comme une corde qui soutient dans le cercle un arc d'un certain nombre de degrés, & dont on cherche le rapport avec le rayon du cercle. La question se réduit donc en dernier lieu à connoître & à déterminer le rapport de chaque corde du cercle avec le rayon. Ce rapport est fixe & connu pour quelques cordes; mais il en est plusieurs autres dont on ne peut pas trouver le rapport avec le rayon du cercle, & par cette raison on ne peut trouver la valeur juste & exacte de la plupart des cordes du cercle, mais seulement par approximation. De-là vient la difficulté d'inscrire à la circonférence du cercle toutes sortes de polygones réguliers, ou de diviser géométriquement la circonférence du cercle en un nombre quelconque de parties égales; c'est pourquoi cette division en bien des cas ne se peut faire que par voie d'approximation & de tâtonnement.

C H A P I T R E I I.

Usage & Application des Mesures.

L'USAGE & l'application des mesures se fait, lorsqu'on veut connoître & déterminer les dimensions plus ou moins grandes des corps. Dans le corps il y a trois dimensions, qui sont la *longueur*, la *largeur*, & la *profondeur*, d'où naissent trois especes d'étendue, qui sont la *ligne*, la *surface* & le *solide*. L'objet de la Géométrie spéculative étoit de les soumettre à la démonstration; celui de la Géométrie pratique est de les

assujettir à la mesure. De-là naissent différens procédés de la Géométrie pratique, qui peuvent tous se réduire à trois especes analogues à celles de l'étendue; sçavoir, la *longimétrie*, ou la mesure des lignes; la *planimétrie*, ou la mesure des surfaces; & la *stéréométrie*, ou la mesure des solides.

ARTICLE I.

La Longimétrie.

La longimétrie est la pratique des lignes, des angles & des figures. Elle donne l'art & la méthode de les tracer, de les diviser & de les comparer.

Des Lignes.

PROBLÈME I.

658. Sur une ligne donnée CD (fig. 9.) mener une Perpendiculaire.

SOLUT. Des extrémités C & D, prises comme centres, & de l'intervalle CD décrivez deux circonférences de cercles, qui s'entrecouperont aux points A & B; joignez les points d'intersection A & B par une ligne droite AB: cette ligne AB, ou AI sera perpendiculaire sur la ligne donnée CD, comme nous l'avons fait voir (288 & 289): ou, plus simplement, il n'y a qu'à décrire (fig. 10.) des extrémités A & B, prises comme centres, & d'une même ouverture de compas, des arcs qui s'entrecoupent aux points C, E, & joindre les sections par une ligne droite CE; car cette pratique est la même que la précédente, mais abrégée.

Corollaire.

659. De là suit la méthode,

I°. De diviser une ligne droite donnée CD (fig. 9.) en deux également. Car la perpendiculaire AB partage la ligne CD en deux parties égales au point I, & l'on a $CI = ID$.

II°. De construire sur une ligne donnée CD (fig. 9.) un triangle équilatéral, en décrivant des

extrémités C & D, prises comme centres, & de l'intervalle CD des arcs qui s'entrecoupent au point A, & en menant les lignes AC, AD; ce qui donnera le triangle ACD équilatéral. Car $DA = DC$, parce qu'ils sont rayons d'un même cercle, & $CD = CA$ par la même raison.

III°. De construire pareillement sur une ligne donnée CD (fig. 9.) un triangle isocèle; ce qui se fait en prenant une ouverture de compas plus grande que l'intervalle CD, & en faisant le reste comme pour le triangle équilatéral.

PROBLÈME I.

660. D'un point donné C dans une ligne AB, élever une Perpendiculaire sur cette ligne (fig. 135.).

SOLUT. Du point donné C déterminez avec le compas les portions égales CD, CE, & des points C, E pris comme centres, & d'une ouverture de compas prise à volonté, mais restant la même, décrivez des arcs qui s'entrecoupent au point F: enfin menez la droite CF, & elle sera la perpendiculaire demandée.

Car par la construction on a $DF = EF$, & $DC = CE$: donc la ligne CF ne s'incline pas plus d'un côté que de l'autre: donc (288.) la ligne CF est perpendiculaire sur AB.

PROBLÈME III.

661. D'un point donné C hors d'une ligne AB, abaisser une Perpendiculaire sur cette ligne (fig. 136.).

SOLUT. Du point C, comme centre, décrivez un arc qui coupe la ligne donnée AB en deux points tels que D, E, desquels vous tracerez de la même ouverture de compas des arcs qui s'entrecoupent au point F; posez ensuite la règle sur les points C, F, pour mener la ligne CO, qui sera la perpendiculaire demandée, comme il est évident par ce qui a été dit ci-dessus.

PROBLÈME IV.

662. Elever une Perpendiculaire à l'extrémité A d'une ligne donnée AB (fig. 137.).

SOLUT. I°. Si la ligne donnée peut être prolongée par cette extrémité d'où il faut élever la perpendiculaire, prolongez-la, & vous menerez la perpendiculaire demandée suivant la méthode du second problème.

II°. Si la ligne donnée ne peut pas être prolongée par cette extrémité, au-dessus de la ligne AB prenez à volonté un point C, duquel comme centre & de l'intervalle CA, décrivez une circonférence de cercle: menez le diamètre DE & la ligne FA; celle-ci est la perpendiculaire demandée. Car l'angle FAD appuyé sur le diamètre est droit: donc FA est perpendiculaire sur AD, ou AB.

PROBLÈME V.

663, *Mener une Parallele à une ligne donnée CD* (fig. 15.).

SOLUT. Des extrémités C, D, ou de deux autres points quelconques E, F, pris à volonté dans la ligne CD, décrivez de la même ouverture de compas des arcs qui s'entrecoupent à un point quelconque O; sur ces arcs prenez avec le compas des portions égales EG, FH, & par les points G, H, menez la ligne AB, laquelle sera parallele à ligne donnée CD.

Car si des points G & H vous abaissez des perpendiculaires sur la ligne CD, ces perpendiculaires seront égales; parce que les arcs étant continués, & les perpendiculaires étant prolongées jusqu'à la rencontre des circonférences, elles seront les moitiés de cordes qui soutiendront des arcs égaux, dans des circonférences égales, & elles seront par conséquent égales: donc les distances mesurées par ces perpendiculaires seront aussi égales, c'est-à-dire, que les lignes AB, CD seront paralleles.

PROBLÈME VI.

664, *D'un point I donné hors d'une ligne mener une Parallele à cette ligne* (fig. 16.).

SOLUT. Soit donnée la ligne CD; du point I; & d'une ouverture de compas prise à volonté, décrivez l'arc indéfini FBK, & du point F & de la même ouverture de compas décrivez l'arc IE: prenez ensuite sur l'arc indéfini FBK une portion FB=IE, & la ligne AB qui passe par les points I, B, sera parallèle à la ligne donnée CF.

Car ayant mené IF, les angles alternes internes FIB, IFE seront égaux, puisqu'ils sont mesurés par les arcs IE, FB, égaux par la construction: donc les lignes AB, CF sont parallèles.

Remarque.

665. Quand on veut tracer des lignes parallèles, on se sert ordinairement de la *double règle*, qui est un instrument de l'étui de Mathématique, & qui consiste en deux règles parallèles AB, CD (*fig. 140.*) jointes ensemble par deux lignes GE, HF, égales, parallèles & mobiles, par le mouvement desquelles les deux règles peuvent être ou approchées, ou éloignées l'une de l'autre, en conservant toujours leur parallélisme.

Corollaire.

666. On peut toujours sur une ligne donnée construire, soit un parallélogramme, soit un rectangle. Car si sur les extrémités d'une ligne donnée FG (*fig. 101.*) on élève des perpendiculaires égales FA, GD, & qu'on joigne les extrémités A, D, par une ligne droite, on aura le rectangle FADG; ou si l'on élève deux obliques BA, ED, égales & également inclinées, & que l'on mene la droite AD, on aura le parallélogramme BADE.

PROBLÈME VII.

667. *Diviser une ligne droite donnée AB en trois parties égales* (*fig. 138.*).

SOLUT. Par le point A menez la ligne indéfinie AZ qui fasse avec la ligne AB un angle quelconque; & prenant une ouverture de compas à volonté, prenez sur la ligne AZ trois parties égales

égales AE, EF, FG; joignez les points G, B, & des points F, E, menez les lignes FD, EC, parallèles à GB; ces parallèles diviseront la ligne AB en trois parties égales.

Car à cause des triangles semblables ACE, ADF, ABG, on aura $AE : AC :: EF : CD :: FG : DB$; dans laquelle proportionnalité les antécédens sont égaux par la construction: donc les conséquens sont aussi égaux; c'est-à-dire, que les parties divisées de la ligne AB sont égales entr'elles.

Corollaire.

668. On peut par la même méthode diviser une ligne donnée en autant de parties égales que l'on voudra, en portant le compas sur la ligne indéfinie AZ le nombre de fois requis, & faisant le reste comme ci-dessus.

PROBLÈME VIII.

669. *Diviser une Ligne donnée AB en des parties semblables & proportionnelles à celles d'une autre Ligne donnée AC (fig. 141.)*

SOLUT. Joignez les deux lignes par leur extrémité A, de façon qu'elles forment un angle: de plus joignez les extrémités C & B en menant CB, & par les points de division D, E, F, tirez des parallèles à la ligne CB; & elles diviseront la ligne AB en des parties semblables ou proportionnelles à celles de la ligne AC. Car les triangles AGD, AHE, AIF, ABC, sont semblables, & donnent.

$$AD : AG :: DE : GH :: EF : HI :: FC : IB,$$

dans laquelle proportionnalité les antécédens sont les portions de la ligne AC, & les conséquens sont les portions correspondantes dans la ligne AB: donc les dernières sont proportionnelles aux premières.

Ce problème peut aussi s'exécuter en posant la ligne donnée AB (fig. 148.) parallèlement à la ligne divisée CD, & en joignant leurs extrémi-

tés par des lignes droites, qui se rencontreront en un point quelconque O, d'où si vous menez des lignes aux points de division E, F, G, ces lignes diviseront AB en parties proportionnelles à celles de la ligne CD.

P R O B L È M E I X.

670. *Diviser un Arc en deux également.*

SOLUT. Joignez les extrémités de cet arc par une corde; coupez cette corde en deux également par une perpendiculaire, & l'arc se trouvera aussi divisé en deux parties égales. Car toute perpendiculaire qui divise une corde en deux également, divise aussi en deux portions égales l'arc soutenu par la corde (319).

P R O B L È M E X.

671. *Une Circonférence de Cercle étant donnée, en trouver le centre (fig. 144.).*

SOLUT. Menez les deux cordes AC, AB, & divisez-les chacune en deux également par des perpendiculaires; le point O, où ces perpendiculaires se coupent, sera le centre du cercle. Car chacune de ces perpendiculaires divisant en deux également une corde du cercle, passe par conséquent par le centre (319): donc le point O où ces perpendiculaires se rencontrent, sera le centre du cercle.

Corollaire I.

672. On peut toujours continuer un arc de cercle donné. Car menant sur cet arc deux cordes, & les divisant chacune en deux également par des perpendiculaires, on trouvera le centre de cet arc. Or posant l'une des pointes du compas sur le centre, & l'autre sur l'arc, on pourra, en tournant le compas, continuer & achever la circonférence du cercle.

Corollaire II.

673. Il est toujours possible de faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés C, A, B (fig. 144) & non posés en ligne droite. Car

ayant joint les trois points donnés par des lignes droites, il ne s'agit que de trouver le centre O par la méthode précédente.

PROBLÈME XI.

674. Trouver une Ligne quatrième proportionnelle à trois lignes données AB, AE, AD (fig. 143.).

SOLUT. I°. Faites un angle quelconque, dont les côtés soient indéfinis, *par ex*: l'angle MAN.

II°. Sur le premier côté AM prenez une portion égale à la première ligne AB, & sur le second une portion égale à la seconde ligne AE, & menez la ligne BE.

III°. Sur le premier côté prenez encore une portion égale à la troisième ligne donnée AD, & menez la parallèle DC; la ligne AC fera la quatrième ligne proportionnelle cherchée.

DÉMONST. Car à cause des triangles semblables BAE, DAC, on aura la proportion $AB : AE :: AD : AC$; donc la ligne AC est la quatrième ligne proportionnelle cherchée.

Remarque.

675. Au lieu de faire l'angle MAN (fig. 143.) les Géomètres se servent ordinairement du compas de proportion (fig. 142), lequel représente cet angle, & est un des principaux instrumens de l'étui de mathématiques. Il a différens usages: on s'en sert surtout beaucoup pour trouver les lignes proportionnelles, les cordes des différens arcs dans un cercle donné, & pour faire des angles de tel nombre de degrés que l'on voudra, & voici comment.

CONSTRUCTION. L'on suppose un cercle, ou un demi-cercle, qui ait été divisé le plus exactement qu'il a été possible, en ses degrés depuis un degré jusqu'à 180. Ensuite prenant deux lignes mobiles autour d'un point A pris pour centre du compas de proportion, l'on transporte toutes les cordes du cercle divisé sur les deux lignes mo-

biles de part & d'autre, *par ex.* la longueur de la corde A30, qui est une corde de 30 degrés, se transporte de A en D; la corde A 60 se transporte de A en E, & ainsi du reste.

SOLUT. Soit maintenant donné un cercle à volonté, & dont le rayon soit nommé EF, & qu'il soit proposé de trouver dans ce cercle un arc de 40 degrés; j'ouvre les deux branches du compas de proportion, de façon que le rayon EF soit porté de 60 en 60: ensuite cherchant l'intervalle qui se trouve entre 40 & 40, je le porte sur le cercle à diviser, & j'ai une corde de 40 degrés: & par conséquent si du point A, pris comme centre, & de l'intervalle AO je décris un arc entre les branches du compas de proportion, cet arc sera de 40 degrés, & l'angle formé par les deux branches du compas sera de 40 degrés; ce qui donne la méthode de faire aisément un angle de tel nombre de degrés que l'on voudra.

DÉMONSTR. A cause des deux triangles semblables AOM & AEF, on a la proportion

$$AE : EF :: AO : OM.$$

Or dans cette proportion le premier terme est le rayon sur lequel a été construit le compas de proportion, parce que la corde de 60 degrés est égale (423) au rayon; le second terme est le rayon du cercle à diviser; le troisième terme est la corde de 40 degrés du premier cercle: donc le quatrième terme sera la corde de 40 degrés du second cercle. Car dans les cercles inégaux nous avons prouvé que les cordes des arcs semblables sont entr'elles comme les rayons.

PROBLÈME XII.

676. Trouver une Ligne moyenne proportionnelle entre deux Lignes données AB, BC (fig. 146.).

SOLUT. 1°. Joignez par les extrémités les deux lignes données AB, BC de sorte qu'elles ne fassent plus qu'une seule & même ligne.

II°. Divisez leur somme en deux également

(659) & du point du milieu O, & de l'intervalle OA, ou OC, décrivez une circonférence de cercle.

III°. Du point de réunion B élevez (660) la perpendiculaire BD jusqu'à la rencontre de la circonférence, elle fera la moyenne proportionnelle cherchée, comme nous l'avons prouvé (442).

PROBLÈME XIII.

677. Trouver une troisième Ligne x proportionnelle à deux Lignes données AB & BD, en sorte qu'on ait la proportion $AB : BD :: BD : x$.

SOLUT. Joignez les deux lignes AB, BD (fig. 146.), de façon que BD soit perpendiculaire sur l'extrémité de AB: prolongez BD, de façon que l'on ait $BE = BD$: par les trois points A, D, E, faites passer (673) une circonférence de cercle, & prolongez AB jusqu'à la rencontre de la circonférence; & la ligne BC sera la troisième proportionnelle cherchée. Car par la propriété du cercle (442) l'on a $AB : BD :: BD : BC$.

Corollaire.

678. Etant donnée la corde DE, & la hauteur BC d'un arc (fig. 146.), il sera facile, par la méthode précédente, de trouver le diamètre AC, & par conséquent le centre du cercle. Car cherchez une troisième proportionnelle à BC & BD pour avoir BA, & ajoutez BA à la hauteur BC, & vous aurez le diamètre AC; lequel divisé en deux également, donnera le centre O, & le rayon OC.

Ce problème est en usage dans l'Architecture, quand il s'agit de construire des ouvrages en forme d'arc.

PROBLÈME XIV.

679. D'un point donné dans la circonférence du cercle mener une Tangente.

SOLUT. Du centre menez un rayon à ce point de la circonférence, & sur l'extrémité du rayon élevez (662) une perpendiculaire à ce rayon, elle

sera la tangente demandée. Car toute ligne qui est perpendiculaire à l'extrémité du rayon, est tangente par rapport à la circonférence (323).

PROBLÈME XV.

680. D'un point donné A hors de la circonférence du cercle, mener une Tangente à la circonférence (fig. 147.).

SOLUT. I°. Du point A menez au centre du cercle la droite AC, que vous diviserez en deux également (659) au point O.

II°. Du point O, comme centre, & de l'intervalle OA, décrivez une circonférence, laquelle coupera la première en deux points B, D.

III°. Si du point A vous menez une ligne à l'un ou à l'autre des deux points d'intersection B, D, cette ligne sera tangente au cercle. Car ayant mené le rayon CB, on aura l'angle CBA appuyé sur le diamètre CA: donc cet angle sera droit: donc la ligne AB est perpendiculaire à l'extrémité du rayon: donc (323) elle est tangente.

PROBLÈME XVI.

681. Un Angle étant donné, en trouver la valeur.

SOLUT. Du sommet de l'angle pris comme centre, décrivez un arc entre les côtés, cherchez le nombre de degrés que contient cet arc, & vous aurez la mesure de l'angle.

On trouve la mesure de cet arc par le moyen du rapporteur, qui est un des instrumens de l'écrui de Mathématique. Le rapporteur est un demi-cercle (fig. 139.) divisé le plus exactement qu'il a été possible, en degrés & en minutes. Or mettant le centre du rapporteur au sommet de l'angle, les côtés de l'angle, prolongés (s'il est nécessaire), intercepteront un arc du rapporteur qui donnera le nombre de degrés que contient l'arc que vous avez décrit, parce que ces deux arcs sont semblables, & contiennent par conséquent un même nombre de degrés.

PROBLÈME XVII.

682. *Faire un Angle de tel nombre de degrés que l'on voudra, par ex: de 50 degrés (fig. 139.).*

SOLUT. Placez le centre du rapporteur sur le point C, qui doit être le sommet de l'angle: marquez les points B & D, qui interceptent un arc de 50 degrés; du centre C menez par les points B & D les lignes CF, CE, & vous aurez l'angle requis.

PROBLÈME XVIII.

683. *Faire un Angle égal à un Angle donné BAC (fig. 145.).*

SOLUT. 1°. Du sommet A comme centre, décrivez l'arc BC; menez la ligne indéfinie ax , & du point a comme centre, & de l'intervalle $ac = AB$, décrivez l'arc indéfini cbd . 2°. Sur l'arc indéfini cbd , prenez avec le compas la portion $bc = BC$, & joignez par une droite les points a, b , & vous aurez l'angle $bac = BAC$, comme il est évident.

Corollaire.

684. C'est par cette méthode que l'on peut faire

I°. Un triangle égal à un autre triangle donné BAC (fig. 71.). Car ayant mené $ab = AB$, faites en a & en b des angles égaux aux angles correspondans A & B, & prolongez-en les côtés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, & vous aurez le triangle $abc = ABC$ (403).

II°. Un triangle semblable à un autre triangle (fig. 155.). Car tirant la ligne $cb <$ ou $>$ CB, & faisant le reste comme ci-dessus, vous aurez le triangle abc semblable au triangle ABC (446).

PROBLÈME XIX.

685. *Faire sous un angle donné à un Parallélogramme égal à un autre Parallélogramme donné AEDC (fig. 149.).*

SOLUT. Dans le parallélogramme donné AEDC, menez la ligne BC qui fasse sur la base l'angle

$BCD = a$; menez la parallèle DF , & prolongez AE , & vous aurez le parallélogramme $BCDF$ fait sous l'angle donné a & égal au parallélogramme donné $ACDE$, parce qu'ils ont tous deux même base & même hauteur.

P R O B L Ê M E X X.

686. Faire sous un angle donné a , & sur une ligne donnée DF , un Parallélogramme égal à un autre Parallélogramme donnée (fig. 150.).

SOLUT. I°. Construisez sous l'angle donné a , par la méthode du problème précédent, un parallélogramme égal au parallélogramme donné, & soit $ABOC$ ce parallélogramme ainsi construit.

II°. Prolongez AB de manière que l'on ait $BG = DF$, menez la ligne indéfinie GOD , & prolongez AC jusqu'à la rencontre de GD .

III°. Achevez le parallélogramme $ADIG$, & prolongez BO & CO ; le parallélogramme cherché sera $EOHI$, dont l'angle $OEI = BOH = ACH$ (356) $= a$, angle donné, & dont la base $EI = BC = DF$, ligne donnée.

DÉMONST. La raison est que le parallélogramme $EOHI$ est égal au parallélogramme $ACOB$. Car la diagonale GD partage le parallélogramme $ADIG$ en deux triangles égaux GDA , GDI (477). Or si de ces deux triangles égaux vous retranchez d'une part le triangle GOB , & de l'autre le triangle $GOH = GOB$ (477); si de plus vous retranchez d'une part le petit triangle ODC , & de l'autre le triangle $ODE = ODC$ (477); les restes seront égaux, c'est-à-dire, que vous aurez le parallélogramme $EOHI = ACOB$.

Corollaire I.

687. Dans tout parallélogramme ou une diagonale GD (fig. 150.) est coupée en un point quelconque O par deux lignes parallèles aux côtés, les portions $EOHI$, $ACOB$ s'appellent les complémens du parallélogramme, & ces complémens sont toujours des parallélogrammes égaux.

Corollaire II.

688. Si le parallélogramme étoit un carré AGID (*fig. 151.*) les complémens seroient alors des parallélogrammes non seulement égaux, mais semblables. C'est pourquoy

¶ Prenant dans le carré la somme des complémens, & y ajoutant le carré COED, vous aurez la figure ADIHOB, laquelle s'appelle *Gnomon*, ou *Equerre*; d'où vient l'instrument de l'étui de Mathématique, qui porte ce nom, & dont l'usage est de mener des lignes perpendiculaires, de former des angles droits, de construire des carrés, des rectangles, & autres figures à angles droits.

II°. A l'usage de l'équerre on ajoute souvent celui de la *ligne d'aplomb*, qui se trouve aussi dans l'étui de Mathématique, & qui n'est autre chose qu'un fil à l'extrémité duquel on a attaché un plomb. L'usage de ce fil est de déterminer les directions perpendiculaires à l'horison, de juger de la position des plans, de leur parallélisme, de leur inclinaison, plus ou moins grande par rapport à l'horison. Pour cet effet on suspend la ligne d'aplomb par une de ses extrémités au sommet de l'angle formé par les deux branches de l'équerre, entre lesquelles on adapte aussi un quart de cercle gradué (*fig. 152.*). Or si l'on pose sur un plan quelconque les points B, C de l'équerre, de façon que le fil AF puisse se mouvoir librement le long du quart de cercle, on jugera si le plan est perpendiculaire, ou incliné plus ou moins sur l'horison, suivant que le fil répondra au point O, milieu du quart de cercle, ou qu'il s'en écartera plus ou moins.

Corollaire III.

689. Supposant le point O autre que le milieu de la diagonale, si d'un carré ADIG on retranche les complémens ACOB, EOHI (*fig. 151.*), il restera deux autres parallélogrammes GBOH,

OCDE (*fig. 153.*), que l'on peut appeller les *Supplémens* du parallélogramme. Or ces supplémens sont toujours des parallélogrammes semblables, mais inégaux.

Si l'on suppose que dans cette figure le point O étant fixe, tous les autres points B, G, H, C, D, E, soient mobiles, alors substituant des regles à la place des côtés de la figure, il en résultera un instrument (*fig. 154.*) dans lequel les points G, D, extrémités de la diagonale commune, pourront s'approcher ou s'éloigner du point fixe O, tandis que les points collatéraux B, H & C, E s'éloigneront ou s'approcheront, dans la même proportion, de la diagonale GD. Or dans ce mouvement les deux parallélogrammes changeront d'espèce, mais resteront toujours semblables. D'où il suit que si le point G, pendant le mouvement décrit, une figure quelconque, le point opposé D décrira en même tems un figure plus petite, mais toute semblable.

C'est pourquoi l'on se sert de cet instrument pour réduire les figures, les plans & les cartes, soit de grand en petit, soit de petit en grand.

A R T I C L E I I.

La Planimétrie.

I°. L'objet de la planimétrie est la mesure des surfaces. Pour mesurer une surface, il faut souvent, sur-tout lorsqu'elle est irrégulière, la partager en triangles par des diagonales, ou des rayons, ou autres lignes semblables, & la mesure de tous ces triangles donne la mesure totale de la surface. Le but important dans la planimétrie est donc de bien sçavoir mesurer les triangles.

II°. On mesure aisément la surface d'un triangle, dont on connoît la hauteur & la base (478). Mais il est souvent impossible de déterminer ces deux dimensions, parce que l'on ne peut point y appliquer immédiatement la mesure. Dans ce cas, pourvu qu'il y ait de certaines conditions

données, ou pourvu que des différentes parties qui composent le triangle, sçavoir, trois côtés & trois angles, il y en ait un certain nombre de connues, les Géomètres ont l'art & la méthode de connoître & de déterminer toutes les autres, & c'est ce que l'on appelle *Solution des Triangles*, ou *Trigonométrie*.

III°. La Trigonométrie en donnant la mesure des triangles, procure en même tems le moyen non-seulement d'évaluer une surface quelconque donnée, mais aussi de déterminer des hauteurs, des distances, &c. inconnues, comme nous le verrons; d'où l'on peut juger quelle est son utilité dans l'application des mesures. Nous parlerons donc, 1°. de la mesure des surfaces en général; 2°. de la mesure des triangles en particulier, ou de la Trigonométrie.

PARAGRAPH E I.

De la Mesure des Surfaces en général.

PROBLÈME I.

690. *Trouver l'aire ou la surface d'un Carré, d'un Rectangle & d'un Triangle.*

SOLUT. I°. Mesurez l'un des côtés du carré, & multipliez-le par lui-même, le produit sera l'aire du carré. Si le côté est de quatre pieds, vous aurez $4 \times 4 = 16$ pieds pour la surface du carré.

II°. Multipliez la base du rectangle par sa hauteur, & vous aurez l'aire du rectangle. Si la base est de 5 pieds & la hauteur de 3, vous aurez $3 \times 5 = 15$ pieds pour la surface du rectangle.

III°. D'un des angles du triangle abaissez une perpendiculaire sur le côté opposé, (que vous regarderez comme la base du triangle), & cette perpendiculaire sera la hauteur du triangle: multipliez la base par la hauteur, & prenez la moitié du produit, & vous aurez (478) la surface du triangle. La base étant de 5 pieds, & la hauteur

de 4, vous aurez $\frac{1 \times 4}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 10$ pieds pour la surface du triangle.

P R O B L È M E I I.

691. *Trouver la surface d'un Parallélogramme.*

SOLUT. Du sommet d'un des angles du Parallélogramme abaissez une perpendiculaire sur le côté opposé, (prolongé, s'il est nécessaire,) & que vous prendrez pour base: cette perpendiculaire sera la hauteur du parallélogramme, laquelle multipliée par la base, donnera la surface du parallélogramme (471).

P R O B L È M E I I I.

692. *Trouver l'aire ou la surface d'un Polygone quelconque.*

SOLUT. Réduisez le polygone en triangles par des diagonales menées du sommet d'un des angles à tous les autres (fig. 64 & 65.); cherchez l'aire de chacun de ces triangles par la méthode ci-dessus (690); la somme des aires triangulaires donnera l'aire du polygone.

Corollaire.

693. Si le polygone est régulier, menez du centre du polygone des rayons obliques, lesquels partageront le polygone en autant de triangles égaux qu'il y a de côtés dans le polygone: cherchez la surface d'un de ces triangles, & multipliez-la par le nombre des côtés du polygone, & vous aurez la surface du polygone. Ou tout d'un coup multipliez le rayon droit du polygone par la moitié du périmètre, & le produit donnera la surface du polygone régulier (482).

P R O B L È M E I V.

694. *Trouver l'aire ou la surface d'un cercle, dont on connoît la circonférence.*

SOLUT. Cherchez le diamètre de ce cercle, lequel est à la circonférence à-peu-près dans le rapport de 7 à 22, ou de 100 à 314, (ce dernier rapport est un des plus exacts que l'on ait trouvé); multipliez la circonférence par le rayon, & la

moitié de ce produit, donnera l'aire, ou la surface du cercle (485).

Corollaire.

695. On trouvera la surface d'un secteur de cercle, en multipliant l'arc du secteur par la moitié du rayon.

PARAGRAPHÉ II.

De la Mesure des Triangles, ou de la Trigonométrie.

I°. La Trigonométrie est l'art de résoudre les triangles, c'est-à-dire, de connoître les parties inconnues du triangle par le moyen de celles qui sont connues.

II°. Dans tout triangle il y a cinq choses à considérer, comme nous l'avons dit ailleurs, sçavoir, trois côtés & deux angles. Or lorsque de ces cinq choses trois sont connues, la Trigonométrie donne l'art & la méthode de connoître les autres.

III°. Si l'on a le triangle ABC (*fig. 155.*) dont on connoisse déjà trois choses, sçavoir, l'angle A, & les deux côtés AB, AC autour de cet angle; on pourra connoître le troisième côté & les autres angles, (que l'on suppose ne pouvoir être mesurés immédiatement), on pourra, dis-je, les connoître en traçant un triangle moindre, mais semblable au premier. Car si l'on fait l'angle $a = A$, & les côtés ab, ac , proportionnels aux côtés AB, AC du grand, & que l'on mene le troisième côté bc , le petit triangle abc fera semblable au grand, comme nous l'avons prouvé (448). Or tous les côtés & tous les angles du petit triangle peuvent être mesurés immédiatement: ils feront donc connoître ceux des angles, ou des côtés du grand triangle qui étoient inconnus. Cette méthode de résoudre les triangles s'appelle la Trigonométrie par les *triangles semblables*, & est toute fondée sur la similitude des triangles.

IV°. Mais on peut aussi résoudre immédiatement le grand triangle ABC, par le moyen des

sinus, *tangentes* & *secantes* des angles, lesquels ont un rapport géométrique avec les côtés du triangle, & font connoître les parties inconnues du triangle par le moyen de celles qui sont connues. Or cette méthode de résoudre les triangles, s'appelle Trigonométrie par les *sinus*, *tangentes* & *secantes*; & c'est celle que nous allons exposer. Nous parlerons, 1°. de la théorie des *sinus*, *tangentes* & *secantes*; 2°. de la résolution des triangles; 3°. de l'application de la Trigonométrie à la pratique.

N O M B R E I.

Théorie des Sinus, Tangentes & Secantes.

D É F I N I T I O N S.

I.

696. On appelle *Sinus-droit* d'un arc AE, ou d'un angle ACE, mesuré par cet arc, une ligne AB (fig. 157.) tirée de l'extrémité de l'arc perpendiculairement sur le rayon, ou diamètre, qui passe par l'autre extrémité du même arc.

I I.

697. La ligne BE, qui est la partie du rayon comprise entre le sinus droit & la circonférence, s'appelle *Sinus-verse* du même arc AE, ou de l'angle ACE.

I I I.

698. La ligne CB, qui est la portion du rayon comprise entre le centre du cercle & le sinus droit, s'appelle *Co-sinus*, ou *Sinus de complément* de l'arc AE, ou de l'angle ACE, parce que CB est toujours égal à FA, lequel est le sinus droit de l'angle ACF, qui est le complément de l'angle ACE.

I V.

699. Le rayon du cercle au centre duquel on conçoit qu'est posé le sommet de l'angle, s'appelle *Sinus-total*.

V.

700. On appelle *Tangente* d'un arc, ou d'un angle, une ligne EH perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par une extrémité de l'arc, & terminée par la rencontre du rayon prolongé CA, qui passe par l'autre extrémité du même arc.

V I.

701. On appelle *Sécante* d'un arc, ou d'un angle, le rayon prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente, sçavoir, la ligne CH.

Corollaire I.

702. Le *sinus-droit* d'un arc, ou d'un angle, est toujours la moitié de la corde qui soutient un arc double; *par ex*: le sinus AB de l'arc AE est moitié de la corde AD, laquelle soutient l'arc AED, double de AE, comme il est évident.

Corollaire II.

703. Le sinus de l'angle droit, ou de l'arc de 90 degrés, est toujours le *rayon*. Car l'arc double de celui de 90 degrés est la demi-circonférence; la corde qui la soutient est le diamètre, dont la moitié est le rayon.

Le plus grand de tous les sinus est le sinus de l'angle droit, ou le *rayon*; & c'est pour cette raison qu'on l'appelle *Sinus-total*.

Corollaire III.

704. Un arc, ou un angle ACE étant donné, & ayant mené son sinus droit AB, le *sinus-verse* sera toujours la différence du *rayon* & du *co-sinus*; & pareillement le *co-sinus* sera toujours la différence du *rayon* & du *sinus-verse*.

Corollaire IV.

705. Dans un triangle rectangle HCE, si l'on prend pour rayon le côté CE, il est clair que l'hypothénuse CH sera la *sécante*, & l'autre côté HE sera la *tangente* de l'angle HCE. Mais si l'on prend pour rayon l'hypothénuse CH, il est évident que le côté HE sera le *sinus-droit*, & que l'autre côté

CE sera le *co-sinus* de l'angle HCE. C'est pour-
quoi une même ligne HE peut faire la fonction de
sinus ou de tangente, selon que l'on prend pour
rayon l'hypothénuse CH, ou le côté CE.

Corollaire V.

706. L'angle droit, *par ex*: FCE, & à plus forte
raison l'angle obtus, n'a ni tangente, ni sécante.
Car la tangente est une ligne perpendiculaire à
l'extrémité du rayon, & prolongée jusqu'à la ren-
contre de la sécante. Or dans l'angle droit & l'an-
gle obtus la tangente & la sécante ne peuvent se
rencontrer, mais sont parallèles dans l'un, &
divergentes dans l'autre: donc, &c.

Corollaire VI.

707. L'angle obtus n'a point d'autre sinus que
celui de l'angle aigu son supplément. Car si de
l'extrémité de l'arc qui mesure l'angle obtus, on
tire perpendiculairement une ligne sur le rayon
qui passe par l'autre extrémité de l'arc, cette ligne
tombera hors de l'angle, & sera le sinus de l'angle
de *supplément*. Ainsi ce sont les sinus des angles de
supplément qui servent dans la Trigonométrie à
faire connoître les angles obtus.

T H É O R È M E I.

708. Dans tout Triangle les Sinus des Angles sont
proportionnels aux côtés opposés à ces angles (fig. 156.).

DÉMONST. Les moitiés sont proportionnelles
aux tous: or les sinus des angles sont les moitiés
des côtés opposés aux angles. Car si l'on inscrit
le triangle ABC dans un cercle, l'angle A étant
inscrit, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel
il est appuyé. Or le sinus de la moitié de l'arc CB,
& par conséquent de l'angle A est la moitié de la
corde BC (702) laquelle corde est le côté opposé
à l'angle A. De même l'angle C étant inscrit, a
pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est ap-
puyé. Or le sinus de la moitié de l'arc AB, & par
conséquent de l'angle C, est la moitié de la corde
AB, laquelle est le côté opposé à l'angle C. Il

faut dire la même chose de l'angle B: donc, &c.

Remarque.

709. Le Théorème sera toujours vrai, soit que le triangle soit *Obliquangle*, soit qu'il soit *Rectangle*, soit qu'il soit *Obtusangle*. Mais observez que le sinus de l'angle *obtus* est le même que le sinus de son supplément, comme nous l'avons dit; & que ce sinus du supplément est toujours la moitié du côté opposé à l'angle obtus.

Corollaire I.

710. Dans tout triangle rectangle, comme CAB (*fig. 157.*), le sinus-total, ou le rayon est au sinus de l'un ou l'autre des angles aigus, comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle aigu. En effet CA est en même tems sinus total & hypothénuse; AB est en même tems sinus de l'angle C, & côté opposé à cet angle. Or l'on a évidemment

$$CA : AB :: CA : AB$$

Corollaire II.

711. Dans tout triangle rectangle CHE, le sinus-total est à la tangente de l'un des angles aigus, comme le côté adjacent à cet angle est au côté opposé au même angle, ou l'on aura

$$CE : EH :: CE : EH.$$

Car CE est en même tems sinus total & côté adjacent de l'angle C, & EH est en même tems tangente de l'angle C, & côté opposé à cet angle.

Corollaire III.

712. Dans tout triangle rectangle le sinus total, ou le rayon est à la sécante de l'un des angles aigus, comme le côté adjacent à cet angle est à l'hypothénuse, ou l'on a

$$CE : CH :: CE : CH;$$

parce que CE est en même tems sinus total & côté adjacent de l'angle C, & CH est en même tems sécante de l'angle C & hypothénuse.

Remarquez que les proportions que donnent les trois corollaires précédens, sont fondées sur

ce que dans un triangle rectangle chaque côté peut faire double fonction, comme nous l'avons dit (705).

T H É O R È M E I I.

713. Dans tout Triangle scalène ABC (fig. 158.) si du plus grand angle B on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, le plus grand côté AC sera à la somme des deux autres BC, BA, comme la différence de ces côtés est à la différence des segmens CE, EA, faits par la perpendiculaire abaissée BE.

CONSTRUCTION. Du centre B, & de l'intervalle du petit côté CB, décrivez une circonférence, & prolongez AB jusqu'en G, pour avoir AG, somme des deux côtés, & HA leur différence; abaissez la perpendiculaire BE pour avoir les segmens CE, EA, dont la différence sera $DA = EA - EC$, comme il est évident, puisque (319) $CE = ED$.

DÉMONST. Les parties extérieures AH, AD des deux sécantes AG, AC, sont réciproquement proportionnelles aux sécantes entières, comme nous l'avons prouvé (443): donc on aura

$$AC : AG :: AH : AD,$$

dans laquelle proportion le premier terme AC est le plus grand côté du triangle; le second terme AG est la somme des deux autres côtés BA, BC; & HA est leur différence; & DA est la différence des deux segmens.

T H É O R È M E I I I.

714. Dans tout triangle scalène la somme de deux côtés quelconques BA, BC est à leur différence DC, comme la tangente de la demi-somme des angles A & C opposés à ces côtés, est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles (fig. 159.).

CONSTRUCTION. Du point B, comme centre & de l'intervalle du petit côté BA, décrivez un cercle; menez la droite DA & la parallèle CF; prolongez CB jusqu'en E, & menez la ligne EAF,

laquelle sera perpendiculaire aux lignes AD & FC, à cause de l'angle droit EAD. Or

I°. On aura la ligne $CE = CB + BA$, somme des côtés, & DC leur différence.

II°. L'angle ECF est égal à la demi-somme des angles BAC, & BCA. Car l'angle ECF = EDA, parce qu'ils sont correspondans. Or l'angle inscrit EDA est sous-double de l'angle central EBA (371); lequel étant extérieur au triangle ABC, est par conséquent égal à la somme des deux angles intérieurs opposés BAC + BCA, donc l'angle EDA, ou son égal ECF, est la moitié de la somme des angles BAC + BCA.

III°. L'angle ACF est égal à la demi-différence des deux mêmes angles BAC, BCA. Car le plus grand angle BAC = BAD + DAC : or DAC = ACF, parce qu'ils sont alternes internes : donc BAC = BAD + ACF. Mais BAD = BDA, à cause du triangle ABD isocèle : donc on aura BAC = BDA + ACF. Or dans cette équation BAC est le plus grand des deux angles, & BDA est la moitié de la somme des angles : donc ACF est la moitié de leur différence; puisque de deux quantités inégales, la plus grande (237) est toujours égale à la moitié de la somme, plus à la moitié de la différence.

IV°. Puisque l'angle F est droit, si on prend CF pour rayon, & que du point C, comme centre, on décrive une circonférence, la ligne FE sera la tangente de l'angle ECF, demi-somme des angles; & FA sera la tangente de l'angle ACF, demi-différence de ces mêmes angles.

DÉMONST. Les deux triangles EFC, EAD sont semblables par la construction : donc on aura

$$EC : DC :: EF : AF,$$

dans laquelle proportion le premier terme EC est la somme des côtés BC, BA; le second est la différence des mêmes côtés; le troisième est la tangente de la demi-somme des angles, & le quatrième

me est la tangente de la demi-différence des mêmes angles : donc , &c.

N O M B R E I I.

De la Résolution des Triangles.

I°. Pour pouvoir résoudre par le moyen des sinus, tangentes & sécantes, un triangle quelconque donné dans lequel on ne connoitroit que trois choses des cinq qui sont à considérer, sçavoir trois côtés & deux angles, il faut connoître les valeurs des sinus, tangentes & sécantes de tous les angles depuis une minute jusqu'à 90 minutes ou un degré, & depuis un degré jusqu'à 90 degrés, afin que par leur moyen on puisse connoître les côtés inconnus du triangle, avec lesquels ils ont un rapport connu.

II°. Les sinus, co-sinus, tangentes, &c. ayant un rapport avec le rayon du cercle au centre duquel le sommet de l'angle seroit supposé placé, les Géomètres ont conclu que par le moyen de ce rapport on pourroit déterminer les valeurs des sinus, co-sinus, tangentes, &c. C'est pourquoi ils supposent que le rayon du cercle au centre duquel est placé le sommet de l'angle, est divisé en un très-grand nombre de parties, *par ex* : en 1000000 parties. Or les sinus, tangentes, &c. contiendront toujours un certain nombre de ces parties, selon qu'ils seront plus grands ou plus petits, & c'est le nombre de ces parties que contient un sinus, ou une tangente, ou, &c. qui en donnera la valeur.

III°. Les sinus des angles étant les moitiés des cordes qui soutiennent des arcs doubles, pour trouver la valeur des sinus, la question se réduit à trouver celle de toutes les cordes du cercle. C'est pourquoi les Géomètres ont cherché la valeur de toutes les cordes du cercle depuis la corde d'un arc de deux minutes, jusqu'à celle d'un arc de 90 degrés, & l'ont trouvée par le rapport que ces cordes ont avec le rayon du cer-

cle, soit exactement pour quelques cordes, soit par voie d'approximation pour les autres. Par le moyen des cordes, ils ont trouvé les sinus; par le moyen des sinus, ils ont trouvé les tangentes, sécantes, co-sinus, co-tangentes & co-sécantes.

IV°. De plus après avoir trouvé les sinus, co-sinus, tangentes, &c. de tous les arcs du quart de cercle les Géomètres en ont dressé une table partagée en différentes colonnes, qui, prises de haut en bas, donnent les sinus, co-sinus, tangentes, &c. de tous les angles par degrés & minutes jusqu'à 45 degrés; & prises de bas en haut, donnent les sinus, co-sinus, tangentes, &c. pour les angles depuis 45 degrés jusqu'à 90; comme on peut le voir par cet exemple, dans lequel on suppose le rayon divisé en 1000000 de parties, & où nous représentons seulement la colonne des sinus & co-sinus pour quelques angles.

1 Degré.

M.	Sinus.	Co-Sinus.	
0	1745 · 24	99984 · 77	60
10	2036 · 08	99979 · 27	50
20	2326 · 90	99972 · 92	40
30	2617 · 69	99965 · 73	30
40	2908 · 47	99957 · 69	20
50	3299 · 22	99948 · 81	10
60	3489 · 95	99939 · 08	0
	Co-Sinus.	Sinus.	M.

88 Degrés.

Il est clair qu'étant donné un angle quelconque par ex: d'un degré 30 minutes, & cherchant dans

la premiere colonne à gauche, qui appartient à l'angle d'un degré, le nombre 30 de minutes de cet angle, vous trouverez à côté le sinus 2617.69, & le co-sinus 99965.73. pareillement si l'on donne un sinus, & qu'il faille trouver à quel nombre de degrés & minutes il appartient, il faut chercher ce sinus dans la colonne des sinus; & si l'on ne l'y trouve pas précisément, s'arrêter à celui qui en approche le plus, & prendre les degrés & minutes qui lui répondent.

V°. Cela posé, lorsqu'on veut résoudre un triangle, il faut distinguer quatre cas: sçavoir, dans un triangle, ou bien l'on connoît deux côtés & un angle opposé à l'un des côtés connus; ou bien l'on connoît deux angles & le côté compris; ou bien l'on connoît les trois côtés; ou bien l'on connoît deux côtés & l'angle compris.

P R O B L È M E I.

715. Résoudre un Triangle quelconque ABC (fig. 155.) dans lequel on connoît deux côtés AB & BC, & un angle A opposé à l'un des côtés connus.

SOLUT. I°. Faites la proportion; le côté BC est au sinus de l'angle opposé A, comme le côté AB est au sinus de l'angle opposé C (708), ou

$$BC : S \cdot A :: BA : S \cdot C,$$

& par ce moyen on connoîtra un second angle dans le triangle ABC; & par conséquent le troisième angle sera aussi connu.

II°. De plus le troisième côté AC se connoîtra facilement, en faisant une proportion semblable dans laquelle le côté cherché soit le quatrième terme; sçavoir, le sinus de l'angle A est au côté opposé BC, comme le sinus de l'angle B est au côté opposé AC, ou $S \cdot A : BC :: S \cdot B : AC$.

III°. C'est pourquoi supposant l'angle en A de 35 degrés 40 minutes, le côté opposé BC de 336 toises, & que le triangle soit rectangle en B, on trouvera dans les tables que le sinus d'un angle de 35 degrés 40 minutes est 58306.87, & que le

finus de l'angle droit, ou le sinus total, est 10000000; ainsi la proportion précédente deviendra $58306 \cdot 87 : 336 :: 10000000 : x$ ou en retranchant les deux derniers chiffres dans les nombres qui expriment les sinus, suivant la règle que nous avons donnée en parlant (629) des fractions décimales, l'on aura $58307 : 336 :: 100000 : x$, & le quatrième terme x , ou le côté cherché AC, qui est l'hypothénuse, se trouvera être $x = 576$.

IV°. Les Géomètres pour abrégér les calculs de la trigonométrie, ont construit une table des logarithmes pour les sinus, co-sinus, tangentes, &c. des différens angles, & en conséquence on pourra, à la place des sinus des angles, substituer leurs logarithmes, & à la place des nombres naturels qui représentent les côtés connus, substituer aussi leurs logarithmes, & dans ce cas la proportion ci-dessus deviendra $976571 \cdot 97 : 252633 \cdot 93 :: 100000000 : x$, dans laquelle on trouvera le quatrième terme x par la voie d'addition & de soustraction, au lieu de la multiplication & de la division qu'il eût fallu employer dans la précédente proportion.

PROBLÈME II.

716. Résoudre un Triangle quelconque ABC (fig. 155.) dont on connoît deux angles B & C, & le côté compris BC.

SOLUT. Les deux angles B & C étant connus, le troisième angle A est par conséquent connu; c'est pourquoi faisant la proportion

$$S \cdot A : BC :: S \cdot C : AB,$$

on connoîtra le second côté AB; & faisant la proportion

$$S \cdot A : BC :: S \cdot B : AC,$$

on connoîtra le troisième côté AC, & le triangle ABC deviendra par-là parfaitement connu.

PROBLÈME III.

717. Résoudre un Triangle quelconque scalène CBA (fig. 158.), dont on connoît les trois côtés.

SOLUT. Il faudra diviser le triangle donné en deux triangles rectangles par une perpendiculaire BE, abaissée du plus grand angle sur le côté opposé.

II°. Faire la proportion (713), le grand côté AC est à la somme AG des deux autres côtés, comme la différence AH de ces deux côtés est à la différence DA des segmens CE, EA, faits par la perpendiculaire, ou

$$AC : AG :: AH : DA.$$

III°. Connoissant le côté CA, sa moitié est aussi connue : donc si à cette moitié vous ajoutez la moitié de la différence DA, vous aurez le plus grand segment EA qui est égal (237) à la moitié de la somme, plus la moitié de la différence de ces segmens inégaux.

IV°. C'est pourquoi dans le triangle rectangle BEA, vous connoissez maintenant les côtés EA, BA, & l'angle droit en E : donc faisant

$$BA : S \cdot E :: EA : S \cdot B,$$

vous connoîtrez un second angle B, & par conséquent le troisième angle A.

V°. Maintenant dans le triangle BCA, vous connoissez les trois côtés & un angle A opposé à l'un de ces côtés : donc il sera facile de connoître les autres angles par la méthode du premier problème.

P R O B L Ê M E I V.

718. Résoudre un Triangle quelconque scalèrne ABC (fig. 159.), dans lequel on connoît deux côtés AB, BC, & l'angle compris B.

SOLUT. I°. Il faut chercher un des angles opposés aux côtés connus, en faisant (714) la proportion : la somme des deux côtés connus $CB + BA = CE$ est à leur différence DC, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés aux côtés connus est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

II°. Le quatrième terme de cette proportion fera

fera connoître la différence des deux angles opposés aux côtés connus. Mais on en connoît la somme par l'hypothèse : donc prenant la moitié de la somme, plus la moitié de la différence de ces angles, on connoît le plus grand des angles, sçavoir A ; ou prenant la moitié de la somme, moins la moitié de la différence, on connoît le plus petit des angles, sçavoir C : donc dans le triangle ABC on connoît maintenant les trois angles.

III°. On connoît le troisième côté AC par la méthode du premier problème.

N O M B R E I I I.

Usage & Application de la Trigonométrie.

I°. L'usage de la Trigonométrie consiste à mesurer sur le terrain des angles & des lignes. Les lignes se mesurent par le moyen de la *perche*, de la *toise* ou du *pied* ; les angles se mesurent par le moyen du *graphomètre*.

II°. La *Toise* est une mesure qui contient 6 pieds ; la *perche* de Paris contient 3 toises ; 2000 toises font la petite lieue ; 2282 toises font la lieue commune.

III°. Le *Graphomètre* est un cercle, ou demi-cercle exactement divisé en ses degrés & minutes, & accompagné d'une alidade & de deux pinnules (fig. 162.). L'alidade est un diamètre roulant sur le centre. Les pinnules sont deux platines de métal perpendiculairement élevées aux deux extrémités de l'alidade, & percées pour diriger le rayon visuel vers l'objet que l'on cherche.

P R O B L Ê M E I.

720. Mesurer sur le terrain un angle ; par ex : l'angle ABC, dont le sommet B est supposé accessible (fig. 160.).

SOLUT. I°. Posez le centre du graphomètre au sommet B de l'angle à mesurer, & plantez des

○

piquets sur chacun des deux côtés de l'angle, par ex : aux points A & C.

II°. Dirigez l'alidade vers le piquet A, en regardant par les fentes des deux pinnules; faites ensuite tourner l'alidade, pour la diriger vers le piquet C.

III°. Comptez ensuite sur le graphomètre les degrés & minutes compris entre les deux directions BC & BA de l'alidade, & vous aurez la mesure de l'angle proposé.

P R O B L Ê M E I I.

721. *Mesurer sur le terrain un Angle saillant BCD, dont le sommet C est supposé inaccessible (fig. 166.).*

SOLUT. I°. Posez le graphomètre horizontalement, & tournez l'alidade de façon qu'elle aligne le côté CD, & plantez un piquet à un point quelconque *b* de l'alignement.

II°. Par le moyen du graphomètre alignez aussi le côté BC, & plantez un piquet à un point quelconque *d* de l'alignement.

III°. Aux points *b* & *d* mesurez immédiatement les angles *Cbd*, & *Cdb*, & vous connoîtrez le troisième angle *bCd* = BCD opposé au sommet.

P R O B L Ê M E I I I.

722. *Mesurer sur le terrain un Angle rentrant ABC, dont le sommet B est supposé inaccessible (fig. 167.).*

SOLUT. I°. Alignez, comme dans le problème précédent, les côtés AB & BC de l'angle, & plantez des piquets dans des points quelconques *a* & *c*, pris dans les alignemens des côtés.

II°. Aux points *a* & *c* mesurez immédiatement les angles *Bac*, & *Bca*, & vous connoîtrez le troisième angle *ABc*, qui est le supplément des deux autres.

P R O B L Ê M E I V.

723. *Mesurer une hauteur accessible par le pied, par ex: la hauteur perpendiculaire AB d'une Tour (fig. 161.).*

SOLUT. I°. Prenez un point de station D, d'où vous viferez par le moyen de l'alidade du graphomètre les points A & B, pour mefurer l'angle ADB.

II°. Mefurez la diftance, ou ligne DB, qui eft la bafe du triangle ADB, lequel eft rectangle en B, & dont l'angle B eft par conféquent connu.

III°. Dans le triangle ADB vous connoiffez deux angles D & B, & le côté compris DB: vous connoîtrez donc le côté AB, ou la hauteur perpendiculaire de la tour, en faifant la proportion, le finus de l'angle A eft au côté oppofé & connu DB, comme le finus de l'angle D eft au côté cherché AB, ou,

$$S \cdot A : DB :: S \cdot D : AB.$$

PROBLÈME V.

724. *Mefurer une Hauteur inaccessible par le pied, par ex: la hauteur perpendiculaire d'une Tour AB (fig. 161.) dont le point B eft fuppofé inaccessible.*

SOLUT. I°. Prenez deux points de station C & D, & mefurez la diftance CD.

II°. Du point C vifez les points A & D pour mefurer l'angle ACD, & du point D vifez les points A & C, pour mefurer l'angle ADC.

III°. Cela pofé, vous connoiffez dans le triangle ACD deux angles & le côté compris, le troifième angle fera par conféquent connu: c'eft pourquoi vous pourrez connoître le côté AD, en faifant la proportion

$$S \cdot A : CD :: S \cdot C : AD.$$

IV°. Au point de station D vifez les points A & B, pour mefurer l'angle ADB. D'ailleurs on connoît l'angle en B qui eft droit; dans le triangle ABD vous connoiffez donc tous les angles & un côté, c'eft pourquoi vous connoîtrez le côté AB, en faifant la proportion

$$S \cdot B : AD :: S \cdot D : AB.$$

725. *Mesurer une hauteur oblique & inaccessible par le pied, par ex: la pente AB d'une montagne, dont le point B est supposé inaccessible (fig. 163.).*

SOLUT. I°. Prenez, comme ci-devant, deux points de station C & D, & résolvez par la méthode ci-dessus le triangle ACD, pour connoître le côté AD.

II°. Au point de station D mesurez l'angle ADB d'un second triangle ADB, dans lequel vous connoîtrez par conséquent deux choses, sçavoir le côté AD, & l'angle ADB.

III°. Maintenant si l'on pouvoit mesurer immédiatement le côté BD du second triangle, ce triangle seroit aisé à résoudre, parce que l'on y connoitroit deux côtés & l'angle compris; mais ce côté ne peut pas être mesuré immédiatement, à cause du point B inaccessible.

IV°. Il faut donc prendre un troisième point de station E, duquel visant les points D & B, vous formerez par les rayons visuels un troisième triangle dans lequel vous connoîtrez les angles en E & D en les mesurant par le graphomètre, & le côté ED que l'on peut mesurer immédiatement; la solution de ce triangle BED fera connoître le côté cherché BD.

V°. Cela posé, dans le triangle ADB vous connoissez trois choses, sçavoir, les deux côtés AD, BD, & l'angle compris ADB. Il faut donc maintenant chercher la valeur d'un des angles opposés à l'un des côtés connus, en faisant la proportion (714).

La somme des deux côtés connus AD + DB est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés, est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

Cette proportion fera connoître les angles du triangle ABD, lesquels étant connus, vous con-

noîtrez facilement le côté AB, en faisant la proportion. $S : A : BD :: S : D : AB$.

PROBLÈME VII.

726. *Mesurer sur le terrain une distance accessible par une seule de ses extrémités, par ex: la largeur d'une Riviere.*

SOLUT. La largeur de la riviere soit représentée par la ligne AB (fig. 155.) : pour la mesurer prenez deux points de station B & C, & mesurez leur distance CB; de plus à l'autre bord de la riviere choisissez un objet visible, par ex: A, que vous puissiez viser des deux points de station B & C. Or au point de station B mesurez l'angle ABC, & au point de station C mesurez l'angle ACB: donc dans le triangle ACB vous connoîtrez deux angles & le côté compris: donc vous connoîtrez le côté AB, en faisant la proportion (708). $S : A : BC :: S : C : AB$.

PROBLÈME VIII.

727. *Mesurer la distance de deux objets inacessibles, tels que C & D (fig. 160.).*

SOLUT. I°. Prenez deux points de station A & B, & mesurez leur distance AB.

II°. Du point A mesurez l'angle CAB, & du point B mesurez l'angle CBA, & résolvez le triangle CBA pour connoître le côté BC.

III°. Résolvez de la même maniere le triangle ABD pour connoître le côté BD.

IV°. Si dans le triangle CBD vous mesurez l'angle CBD, vous y connoîtrez trois choses, sçavoir, les deux côtés BD & BC, & l'angle compris B.

V°. Pour résoudre le triangle CBD, il faut de plus chercher l'un des angles opposés aux côtés connus par la méthode donnée au sixième problème (725).

VI°. Connoissant par-là tous les angles de ce triangle, il sera aisé de trouver le côté CD, en fai-

fant la proportion $S \cdot C : BD :: S \cdot B : CD$.

P R O B L Ê M E I X.

728. *Mesurer la distance de plusieurs objets considérés comme inaccessibles, ou lever une Carte Géographique (fig. 168.).*

SOLUT. I°. Prenez une base MN, dont vous vérifierez la longueur le plus exactement qu'il sera possible. Posez le graphomètre au point de station M, & visez successivement les points A, B, C, D, pour mesurer les angles NMD, NMC, NMB, NMA, (on doit passer l'angle NME, parce qu'il est trop aigu, & l'angle NML, parce qu'il est trop obtus.) Ensuite transportez le graphomètre au point de station N & visez successivement les mêmes points A, B, &c, pour mesurer les angles MND, MNC, MNB, MNA.

II°. Les rayons visuels partis des extrémités M & N formeront les triangles MAN, MBN, MCN, MDN, dont la solution vous donnera la position des points A, B, C, D. Car dans le triangle MAN, connoissant la base MN, & les angles formés sur cette base, vous connoîtrez évidemment par la Trigonométrie les côtés AM & AN, & vous aurez conséquemment la position du point A. Pareillement dans le triangle MBN connoissant la base MN & les angles sur cette base, vous aurez les côtés BM, BN, & par conséquent la position du point B, & ainsi de suite.

III°. Maintenant du point N visez les points K, H, G, F, pour mesurer les angles MNK, MNH, MNG, MNF; & pareillement de l'extrémité M visez les mêmes points K, H, &c. pour mesurer les angles NMK, NMH, NMG, NMF, ce qui vous donnera comme ci-devant, des triangles dont vous connoîtrez les côtés, & conséquemment la position des points K, H, G, &c. Car, *par ex*: dans le triangle MNK, connoissant la base MN & les angles sur cette base, vous trouverez

les côtés NK & MK, & conséquemment la position du point K. Il faut dire la même chose pour les points H, G, F.

IV°. Pour avoir les points E & L, prenez dans les triangles déjà résolus des côtés quelconques connus pour servir de bases ; *par ex :* pour avoir le point L prenez pour base le côté connu AM. Or si du point M vous mesurez l'angle AML, & du point A l'angle LAM, vous connoîtrez dans le triangle AML la base AM, & les deux angles sur cette base : donc vous connoîtrez aisément les côtés AL, & ML, & par conséquent la position du point L.

ARTICLE III.

La Stéréométrie.

PROBLÈME I.

729. *Trouver la solidité d'un Cube.*

SOLUT. Mesurez un côté du cube, & multipliez-le par lui-même, le produit sera la base : multipliez cette base par la hauteur du cube, ou par le côté, (qui n'est pas distingué de la hauteur,) ce second produit donnera la solidité du cube. *Par ex :* si le côté du cube est de 4 pieds, vous aurez $4 \times 4 = 16$, & c'est la base : faites ensuite $16 \times 4 = 64$, & c'est la solidité du cube.

PROBLÈME II.

730. *Trouver la solidité d'un Prisme.*

SOLUT. Cherchez la base du prisme, en multipliant l'un par l'autre les deux produifans, d'où résulte cette base ; multipliez ensuite la base par la hauteur du prisme, & vous en aurez la solidité. *Par ex :* si la base du prisme est un exagone régulier, dont chaque côté soit de 5 pieds, & dont la circonférence sera par conséquent de 30 pieds, cherchez-en le rayon droit, que je suppose être de 4 pieds ; & vous aurez $4 \times 30 = 120$, dont la moitié 60 sera (482) la base du prisme : multipliez

cette base par la hauteur, que je suppose être de 8 pieds, & vous aurez $60 \times 8 = 480$, pour la solidité du prisme.

Corollaire.

731. La pyramide étant (599) le tiers d'un prisme de même hauteur & de même base, vous trouverez la solidité de la pyramide, en cherchant celle d'un prisme de même hauteur & de même base, & que vous diviserez par 3.

P R O B L È M E I I I.

732. *Trouver la solidité d'un Cylindre.*

SOLUT. Cherchez la surface du cercle qui est la base du cylindre, en multipliant le rayon par la demi-circonférence, & multipliez cette base par la hauteur du cylindre; le produit sera la solidité du cylindre.

Corollaire.

733. Le cône étant le tiers (603) d'un cylindre de même base & de même hauteur, vous trouverez la solidité du cône en cherchant celle d'un cylindre de même base & de même hauteur, & dont vous prendrez le tiers.

P R O B L È M E I V.

734. *Trouver la solidité d'un Cône tronqué CADF* (fig. 125.).

SOLUT. I°. Cherchez la hauteur du cône entier CIF par le moyen des deux triangles semblables CGA, CBI, lesquels donnent la proportion, CG, différence des rayons CB & Ao, est à GA, hauteur du cône tronqué, comme le plus grand rayon CB est à la hauteur BI du cône entier; ou $CG : GA :: CB : BI$.

II°. Connoissant la hauteur BI du cône entier CIF, cherchez-en la solidité en prenant le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

III°. Retranchez la hauteur oB du cône tronqué de la hauteur IB du cône entier, & vous aurez la hauteur du petit cône AID.

IV°. Connoissant la hauteur du petit cône, dont vous connoissez aussi la base, à cause du rayon Ao qui est connu, cherchez - en la solidité.

V°. Enfin retranchez la solidité du petit cône AID, de celle du cône entier CIF, & le reste sera la solidité du cône tronqué.

PROBLÈME V.

735. Trouver la solidité d'une Sphere, dont le diamètre est donné.

SOLUT. I°. Cherchez la circonférence d'un grand cercle de la sphère, en vous servant du rapport 100 . 314, qui est un des rapports les plus exacts du diamètre à la circonférence, & multipliez cette circonférence par le diamètre donné; le produit sera (585) la surface de la sphère.

II°. Multipliez cette surface par la sixième partie du diamètre, ou par le tiers du rayon, & le produit sera (605) la solidité de la sphère.

PROBLÈME VI.

736. Mesurer la capacité d'un vase circulaire, par ex: la capacité d'un Tonneau (fig. 164.).

SOLUT. Comme le tonneau forme un ventre vers le milieu, & que de ce milieu il va toujours en diminuant vers ses deux extrémités, on a coutume de le considérer comme un cylindre, dont la base est un cercle moyen proportionnel arithmétique entre le cercle qui forme le fond & celui qui forme le ventre.

II°. C'est pourquoi mesurez l'aire ou la surface d'un des fonds AB, & celui du plus grand cercle CD; prenez-en la somme, & la moitié de cette somme multipliée par la longueur EF du tonneau, donnera à-peu-près la capacité du tonneau. Car ce produit donnera un cylindre, qui aura pour hauteur la longueur du tonneau, & pour base un cercle moyen arithmétique entre le plus petit & le plus grand cercle du tonneau.

737. Lorsque l'on connoît la capacité d'un vase cylindrique, ou la quantité de fluide qu'il peut contenir, il est facile de déterminer celle d'un autre vase cylindrique de même hauteur, mais de différent diamètre. Car les cylindres de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Mais les bases étant des cercles, sont entr'elles comme les quarrés de leurs diamètres; & par conséquent les capacités de deux vases cylindriques qui ont même hauteur, sont entr'elles comme les quarrés de leurs diamètres.

Corollaire II.

738. De ce principe les Géomètres déduisent une méthode facile & ingénieuse de mesurer la capacité d'un vase cylindrique quelconque, étant connue celle d'un vase cylindrique plus petit & semblable.

I°. Soit (*fig. 165.*) AB le diamètre d'un vase cylindrique donné, & qui soit supposé contenir une mesure: sur l'extrémité A élevez une perpendiculaire indéfinie, sur laquelle prenez $A_1 = AB$, & menez B_1 ; B_1 sera le diamètre d'un vase qui contiendra deux mesures, mais qui a la même hauteur que le premier.

II°. Faites $A_2 = B_1$; B_2 sera le diamètre d'un vase qui contiendra trois mesures, mais qui aura encore la même hauteur que le premier. On trouve de cette manière les diamètres B_3 , B_4 , ou A_4 , A_5 , &c. de plusieurs autres vases plus grands.

III°. Si vous portez sur une verge de bois ou de fer, d'un côté les divisions trouvées A_1 , A_2 , A_3 , &c. & sur l'autre côté, autant de fois qu'il sera possible, la hauteur d'un cylindre qui ne contient qu'une mesure; cette verge s'appelle *Jauge*, & sert à mesurer les capacités des vaisseaux cylindriques.

IV°. La raison en est que deux cylindres de même

me hauteur (laquelle soit celle d'une mesure,) étant entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres (737), le quarré du diamètre d'un vase qui contient deux, trois, quatre, &c. mesures, sera par conséquent double, triple, quadruple, &c. du quarré du diamètre d'un vase qui n'en contient qu'une. Or le quarré de B_1 , ou de A_2 , est le double; le quarré de B_2 , ou de A_3 , est le triple du quarré de AB , ou de A_1 , (513): donc A_2 sera le diamètre d'un vase qui contient deux mesures, A_3 , celui d'un vase qui contient trois mesures, &c.

V°. Si vous appliquez donc au diamètre d'un vase cylindrique le côté de la *jauge* où sont marquées les divisions A_1, A_2, A_3 , &c. vous verrez tout d'un coup combien ce diamètre donne de mesures; & multipliant ce diamètre (ou le nombre de mesures indiqué par ce diamètre) par la hauteur du vase, le produit sera la quantité de mesures que tout le vase peut contenir: ainsi le diamètre étant A_5 & la hauteur 8, vous aurez $5 \times 8 = 40$ mesures.

