
LIVRE PREMIER.

DES PRINCIPES DU CALCUL.

NOUS allons considérer le calcul & dans ses élémens, & dans ses progrès. Les élémens du calcul sont le calcul simple des *quantités*, & il consiste dans la combinaison simple des quantités entr'elles, & c'est ce que l'on appelle proprement *Calcul*. Le progrès du calcul est le calcul des *rappports* des quantités, & il consiste à combiner les rappports qu'ont entr'elles les quantités, & c'est ce que l'on appelle *Analogie* ou *Proportion*.

SECTION I.

Du Calcul simple des Quantités.

18. **L**E calcul proprement dit consiste à combiner des quantités homogènes, ou de même espèce; car on ne peut pas combiner & assembler des quantités hétérogènes ou de différente espèce, telles que seroient, *par ex*: des heures & des toises. Or cette combinaison se fait par la voie de l'*Addition* ou de la *Soustraction*. L'*addition* est l'assemblage de deux ou plusieurs quantités: la *soustraction* se fait en retranchant une quantité d'une autre quantité. L'*addition* & la *soustraction* peuvent se diversifier par des méthodes, d'où résultent de nouvelles opérations,

que l'on appelle *Multipliation & Division, Exaltation & Extraction.*

19. Le calcul a pour objet les quantités discrètes : les quantités discrètes sont ou déterminées ou indéterminées. Les quantités déterminées sont celles qui expriment une grandeur plutôt qu'une autre : *par ex* : le nombre 8, qui signifie une grandeur de huit parties, plutôt que de sept, ou de neuf, ou de, &c. Les quantités indéterminées sont celles qui expriment une grandeur qui n'est pas plutôt l'une que l'autre : *par ex* : la lettre *a*, laquelle ne signifie rien de fixe & de précis, n'exprime pas plutôt un mouvement qu'une étendue, un pied plutôt qu'un pouce.

20. Les quantités ou les grandeurs déterminées se représentent par les caracteres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que l'on appelle *Chiffres*, lesquels nous sont venus des Arabes, & les quantités ainsi exprimées s'appellent *Nombres*, ou quantités *numériques*. Les grandeurs indéterminées s'expriment par les lettres de l'Alphabet *a, b, c, d, e, f, g, &c.* lesquelles, ne signifiant rien par elles-mêmes, sont propres par cette raison à désigner & à représenter toutes sortes de grandeurs : or les quantités ainsi exprimées s'appellent quantités *algébriques*.

21. Le calcul des quantités déterminées s'appelle calcul des *nombres*, ou calcul *arithmétique* : celui des quantités indéterminées s'appelle calcul des *lettres*, ou calcul *algébrique*. Nous allons exposer les principes de l'un & de l'autre.



C H A P I T R E I.

Du Calcul des Nombres, ou l'Arithmétique.

D É F I N I T I O N S.

I.

22. **L**E nombre est un assemblage de plusieurs unités, ou de parties de l'unité; *par ex*: 3 est un nombre, parce qu'il est composé de trois unités; $\frac{3}{4}$ ou trois quarts font un nombre, parce que c'est l'assemblage de trois parties de l'unité; favoir, trois de ces parties, dont chacune est la quatrième partie de l'unité.

I I.

23. On appelle Nombre *entier* un assemblage de plusieurs unités, ou de plusieurs tous; tels font 4, 7, 8, 9, &c. On appelle Nombre *Fractionnaire*, ou *Fraction*, celui qui exprime des parties de l'unité; *par ex*: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, &c. Ce qui signifie une demie, un tiers, un quart, deux tiers, trois cinquièmes, &c.

I I I.

24. Dans la fraction le nombre supérieur s'appelle *Nomérateur*, & le nombre inférieur s'appelle *Dénominateur*: celui-ci s'appelle *dénominateur*; parce qu'il désigne la qualité & la grandeur des parties auxquelles on a divisé le tout, en exprimant si elles font des moitiés, ou des tiers, ou des quarts, ou, &c. Celui-là s'appelle *numérateur*, parce qu'il exprime combien l'on prend de ces parties.

I V.

25. On appelle *Numération*, l'art d'exprimer &

d'énoncer les nombres : pour cela il faut savoir combiner & arranger dix caractères, que l'on appelle *chiffres*, & qui sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui signifient *zero, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf*. La combinaison & l'arrangement de ces chiffres donne l'art d'exprimer en chiffres les nombres énoncés dans le discours, & d'énoncer dans le discours les nombres exprimés en chiffres; c'est ce que l'on appelle la *Numération*.

Principe.

26. On est convenu (& c'est ici le fondement de toute l'Arithmétique,) que lorsque des dix caractères ou chiffres dont il vient d'être parlé, il s'en trouveroit plusieurs de suite, leur valeur augmenteroit en proportion décuple, allant de droite à gauche, c'est-à-dire qu'une unité du chiffre précédent vers la gauche seroit dix fois plus grande qu'une unité du chiffre suivant vers la droite; *par ex* : dans la suite des chiffres 46527, chaque unité du chiffre 2 est dix fois plus grande que chaque unité du chiffre 7; pareillement chaque unité du chiffre 5 est dix fois plus grande que chaque unité du chiffre 2, & ainsi de suite. Zero tout seul ne signifie rien; mais étant précédé d'un chiffre, il rend sa valeur dix fois plus grande. C'est pourquoi le chiffre 1 tout seul signifie une unité, mais s'il est suivi d'un zero, on aura 10, qui signifie *dix* unités, ou une *dixaine* : s'il est suivi de deux zero, on aura 100, qui exprime dix fois dix, ou *cent* unités, ou une *centaine*, & ainsi du reste.

P R O B L Ê M E I.

27. *Exprimer en chiffres des nombres énoncés dans le Discours.*

SOLUTION. 1^o. Prenez l'unité, & ajoutez-lui toujours des zero pour augmenter sa valeur en proportion décuple, & vous aurez 1, 10, 100,

D'ARITHMÉTIQUE. ,

1000, 10000, 100000, 1000000, qui signifient un, dix, cent, mille, dix mille, cent mille, un million, &c.

II°. Prenez ces nombres déjà trouvés deux à deux, & vous trouverez des nombres intermédiaires & interceptés, en mettant successivement les neuf caracteres à la place de l'unité; *par ex* : entre 1 & 10 vous aurez 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: entre 10 & 100 vous trouverez 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, qui signifient vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix: & entre 100 & 1000 vous trouverez 200, 300, 400, 500, 600, 700, &c. qui signifient deux cens, trois cens, quatre cens, cinq cens, six cens, sept cens, &c.

III°. Ces nombres intermédiaires admettent encore d'autres nombres intermédiaires, que vous trouverez en mettant successivement les neuf caracteres à la place du zero, ou du dernier zero; *par ex* : entre 10 & 20 vous aurez 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, qui signifient onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, dix-sept, dix-huit, dix-neuf: pareillement entre 20 & 30, vous trouverez 21, 22, 23, 24, &c. qui signifient vingt-un, vingt-deux, vingt-trois, vingt-quatre, &c. entre 100 & 200, vous aurez 101, 102, 103, 104, &c. qui signifient cent-un, cent-deux, cent-trois, cent-quatre, &c.

IV°. Si au lieu de mettre successivement les neuf caracteres à la place du dernier zero, vous les eussiez mis à la place du premier, ou du second, ou du troisieme, &c. zero, vous auriez trouvé d'autres nombres intermédiaires; *par ex* : entre 1000 & 2000 substituant les neuf caracteres à la place du premier zero, vous trouverez 1100, 1200, 1300, &c. en les substituant à la place du second, vous aurez 1010, 1020, 1030, &c.

V°. Enfin, combinant toujours les nombres

qui sont au-dessous de dix (& que l'on appelle nombres *simples*) avec ceux qui sont au-dessus de neuf (& que l'on appelle nombres *composés*) & mettant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, &c. (que l'on appelle *positifs*) à la place soit du premier, soit du second, soit du troisième, &c. zero, ou même à la place de tous les zero, vous trouverez tous les nombres que vous voudrez.

Exemple.

Soit proposé d'exprimer en chiffres le nombre un million, six cens, vingt-quatre mille, huit cens, quarante-deux; lequel nombre est la même chose que un million, six cens mille, vingt mille, quatre mille, huit cens, quarante, & deux: exprimez d'abord le nombre donné par parties.

<i>Un million,</i>	1000000
<i>Six cens mille,</i>	600000
<i>Vingt mille,</i>	20000
<i>Quatre mille,</i>	4000
<i>Huit cens,</i>	800
<i>Quarante,</i>	40
<i>Deux,</i>	2

& comme dans cette suite les zero ne servent qu'à faire garder aux chiffres positifs les rangs qu'ils doivent tenir pour conserver leur valeur, supprimez les zero, & écrivez tous les chiffres positifs sur une même ligne,

1624842.

& cette suite de chiffres exprimera le nombre énoncé dans le discours. Si dans l'énoncé il se trouvoit quelques nombres intermédiaires supprimés, mettez des zero à leur place, afin de conserver aux chiffres précédens leur rang & leur valeur, *par ex: vingt mille cinquante s'exprime par 20050.*

P R O B L Ê M E I I.

¶ 28. *Énoncer dans le Discours des Nombres exprimés en Chiffres.*

D'ARITHMÉTIQUE. II

SOLUTION. Il faut remarquer :

I°. Que dans une suite de chiffres donnés, on doit distinguer plusieurs tranches, allant de droite à gauche, & que chaque tranche est composée de trois ordres ou chiffres.

II°. Que la première tranche à droite s'appelle la tranche des *unités*; la seconde, la tranche des *mille*; la troisième, la tranche des *millions*; la quatrième, la tranche des *billions*, & ainsi de suite.

III°. Que chaque tranche contient toujours trois ordres ou trois chiffres, excepté la dernière à gauche, qui quelquefois ne contient que deux chiffres, ou même un seul. Le premier ordre est celui des *unités*; le second, celui des *dixaines*; le troisième, celui des *centaines*; par ex :

}	Millions,	Mille,	Unités.	}
	3 4 5,	8 7 6,	3 2 5.	
	Centaines.	Dixaines.	Unités.	

IV°. On commence par la tranche qui est à gauche, & il ne faut énoncer le nom propre à chaque tranche, qu'à la fin de cette tranche; par ex : la suite 345876325 signifie *trois cens quatre-cinq millions, huit cens soixante seize mille, trois cens vingt-cinq*. On doit s'abstenir de nommer les ordres dans lesquels il se trouve des zero à la place des chiffres positifs; par ex : la suite des chiffres 30421 signifie *trente mille, quatre cens, vingt-un*.

L'objet de l'Arithmétique sont les opérations que l'on peut faire sur les nombres, soit entiers, soit fractionnaires : nous en allons parler.

A B R É G É
A R T I C L E I.

Des opérations sur les Nombres entiers.

Les opérations auxquelles on peut assujettir les nombres entiers, sont l'Addition & la Soustraction, la Multiplication & la Division, l'Exaltation & l'Extraction.

P A R A G R A P H E I.

De l'Addition & de la Soustraction.

D É F I N I T I O N S.

I.

29. L'Addition est une opération dans laquelle on joint ensemble plusieurs nombres donnés, pour avoir un résultat que l'on appelle *Somme*; par ex: si l'on ajoute ensemble 5 & 7, il est facile d'en trouver la somme qui est 12, ce qui s'exprime d'une manière abrégée par $5 + 7 = 12$, c'est-à-dire, 5 plus 7 égal à 12.

I I.

30. La Soustraction est une opération inverse de l'addition. Dans l'addition on ajoute un nombre à un autre, pour avoir un résultat qu'on appelle *Somme*: dans la soustraction on retranche un nombre d'un autre, pour avoir un résultat que l'on appelle *Différence*, *Reste* ou *Excès*. Si on veut soustraire 3 de 9, il reste 6 qui sera la *différence* des deux nombres, ou l'*excès*, dont le plus grand surpasse le plus petit, ce qui s'exprime simplement de cette manière, $9 - 3 = 6$, c'est-à-dire 9 moins 3 égal à 6.

P R O B L È M E I.

31. *Faire l'Addition, ou chercher la Somme de plusieurs Nombres donnés.*

SOLUTION. I°. Si les nombres donnés sont simples, il n'y a nulle difficulté, comme nous venons de le voir; par ex: $3 + 4 = 7$.

II°. Mais si les nombres donnés sont composés, il faut les écrire, les uns sous les autres ob-

D'ARITHMÉTIQUE. 13

servant de mettre les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, les centaines sous les centaines, les mille, &c.

III°. On commence par la colonne des unités, & on en cherche la somme, laquelle s'exprime ou par un nombre simple, ou par un nombre composé de deux chiffres, ou par un nombre composé de plusieurs chiffres: dans le premier cas on écrit cette somme sous la colonne des unités, & l'on passe à la colonne des dizaines, pour opérer sur elle comme on a fait sur celle des unités: dans le second cas on écrit sous la colonne des unités le dernier des chiffres du nombre composé, & on retient le premier (qui exprime des dizaines, à cause de sa valeur décuple, voyez le N° 26.) pour l'ajouter par la pensée à la colonne des dizaines, dont ensuite il faut chercher la somme & l'écrire de la même manière, comme on l'a fait pour la colonne des unités: dans le troisième cas, on écrit sous la colonne des unités le dernier des chiffres du nombre composé, & on retient les autres pour les ajouter à la colonne des dizaines, & l'on prend la somme tant des chiffres qui composent cette colonne, que de ceux que l'on a retenus, pour l'écrire comme on l'a fait dans le second cas.

IV°. On continue la même opération & de la même manière sur la colonne des centaines, des mille, & sur toutes les colonnes suivantes.

Exemples.

$$\begin{array}{r} 4382 \\ 463 \\ \underline{5370} \\ \text{Somme } 10215 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2040 \\ 3705 \\ \underline{6003} \\ \text{Somme } 11748 \end{array}$$

Dans le premier exemple commencez par la colonne des unités, & dites 0 & 3 font 3, & 2 font 5, écrivez 5 sous la colonne des unités;

passez à la colonne des dixaines , & dites 7 & 6 font 13 , & 8 font 21 , laquelle somme 21 contient 21 dixaines , ou 2 centaines & 1 dixaine (26) ; posez donc 1 sous la colonne des dixaines , & vous retiendrez 2 centaines , que vous ajouterez à la colonne des centaines , en disant , 3 & 4 font 7 , & 3 font 10 , & 2 que vous avez retenus font 12 ; j'écris donc 2 sous la colonne des centaines , & je retiens 1 (qui vaut mille) , que je transporte à la colonne des mille , & je dis 5 & 4 font 9 , & 1 de retenu font 10 ; j'écris 0 sous la colonne des mille , & j'écris 1 plus avant , n'y ayant plus de colonne à laquelle je puisse le transporter , & la somme est 10215 .

DEMONSTRATION. Il est clair qu'en suivant les règles ci-dessus l'on doit trouver la somme des nombres donnés à ajouter : car l'on prend la somme des unités , celle des dixaines , celle des centaines , & celle de toutes les autres parties qui composoient les nombres donnés ; or quand on prend toutes les parties qui composent un tout , on prend le tout lui-même , puisque le tout n'est pas distingué de toutes ses parties prises ensemble (8) , donc , &c.

P R O B L Ê M E I I .

32. *Faire la Soustraction , ou chercher la Différence de deux Nombres donnés.*

SOLUTION. I°. Si les nombres donnés sont simples , il n'y a nulle difficulté ; *par ex* : $8 - 6 = 2$.

II°. Si les nombres donnés sont composés , il faut faire l'opération par parties , comme on a fait dans l'addition , c'est-à-dire , qu'il faut soustraire les unités des unités , les dixaines des dixaines , &c. & écrire sous chaque colonne la différence des deux nombres ; *par ex* : si de la somme 897 , je veux soustraire 753 , j'opérerai de la manière suivante.

De 7 ôtez 3, il reste 4 que j'écris sous
la colonne des unités: je passe aux dixai-
nes; de 9 ôtez 5, reste 4 que je pose
sous les dizaines, & ainsi de suite.

897

753

144

III°. Lorsque le chiffre supérieur est plus petit
que l'inférieur qui est à soustraire, il faut alors
augmenter le chiffre supérieur d'une unité prise
sur le chiffre précédent, laquelle unité est une
dixaine (26) par rapport au chiffre suivant, pour
lequel on l'emprunte. Or le chiffre précédent
sur lequel on emprunte cette unité, doit être di-
minué d'autant, lorsqu'on opérera sur lui; ou
bien on peut le laisser tel qu'il est, & augmenter
le chiffre inférieur qui lui est correspondant de
cette unité: car ces deux procédés reviennent
au même; *par ex*: si de 625 je veux retrancher
453, je dirai de 5 ôtez 3, reste 2 que j'écris sous
la colonne des unités; je passe aux dizaines, de
2 ôtez 5, cela ne se peut: j'emprunte une unité
sur le chiffre précédent 6, que je mar-
que d'un point, afin de m'en souvenir,
& cette unité ajoutée à 2 fait alors 12,
dont ôtant 5, reste 7, que j'écris sous
la colonne des dizaines: je passe aux
centaines, & le point qui est au-dessus de 6 m'a-
vertissant que j'en ai emprunté une unité, il ne
vaut plus que 5, & je dis, de 5 ôtez 4, ou, ce
qui revient au même, de 6 ôtez 5, reste 1 que
j'écris sous la colonne.

625

453

172

IV°. On trouve quelquefois des zero dans le
nombre supérieur; il faut dans ce cas emprunter
une unité du premier chiffre positif à gauche, la-
quelle ajoutée à zero, fait une dixaine, & ensuite
opérer comme dans l'exemple suivant.

De 0 ôtez 1, cela ne se peut; j'em-
prunte du 3 une unité qui vaut 10; si
de 10 j'ôte 1, reste 9; ensuite de 2
ôtez 2, ou (laissant le chiffre supérieur
tel qu'il est, & augmentant le chiffre

...

45030

32621

12409

inférieur de l'unité empruntée) de 3 ôtez 3, reste rien, & je mets 0 sous la colonne; & comme le chiffre suivant dans le nombre supérieur se trouve être un 0, j'opère comme j'ai déjà fait, c'est-à-dire que j'emprunte une unité du chiffre voisin à gauche.

V°. Si dans le nombre supérieur il se trouvoit plusieurs zero de suite devant le chiffre pour lequel il faut emprunter, alors l'unité doit être empruntée du premier chiffre positif qui précéderoit à gauche; mais dans ce cas tous les zero interceptés entre ce chiffre positif & le chiffre pour lequel on emprunte, se changent en 9. En effet, si de 402 il falloit retrancher 3, il est évident qu'après avoir emprunté une unité du 4 pour la donner à 2, le nombre 40 qui précède, ne vaut plus que 39, & par conséquent le zero intercepté entre 4 & 2 se change en 9. Voici un exemple.

De 2 ôtez 1, reste 1. Je passe à la colonne des dixaines; de 0 ôtez 5, cela ne se peut; j'emprunte une unité du chiffre 3, & je dis de 10 ôtez 5, reste 5. Je passe à la colonne des centaines, & le zero étant changé en 9, je dis de 9 ôtez 8, reste 1. Dans la colonne suivante, je dis pareillement de 9 ôtez 2, reste 7. Enfin pour la dernière colonne, de 2 ôtez 1, reste 1.

VI°. Mais l'opération sera plus aisée en empruntant toujours l'unité sur le zero précédent (comme si ce zero étoit un chiffre positif) & en se souvenant d'augmenter de l'unité empruntée le chiffre inférieur & correspondant au zero duquel on l'aura empruntée; ainsi dans l'exemple précédent je dis, de 2 ôtez 1, reste 1. Je passe à la colonne des dixaines; de 0 ôtez 5, cela ne se peut, mais j'emprunte une unité du zero précédent, & je dis de 10 ôtez 5, reste 5. Dans la colonne des centaines je dis, de 0 ôtez 9, cela ne se peut, j'emprunte encore une unité sur le zero

précédent, & je dis de 10 ôtez 9, reste 1. Je passe à la colonne des mille, de 0 ôtez 3, cela ne se peut encore; mais empruntant une unité sur le chiffre précédent, je dis de 10 ôtez 3, reste 7. Enfin dans la dernière colonne, de 3 ôtez 2, reste 1.

DÉMONST. En suivant les règles ci-dessus, l'on a dû trouver la différence ou le reste que laisse le nombre supérieur, après en avoir soustrait le nombre inférieur: car par le procédé ci-dessus l'on trouve infailliblement la différence des unités, celle des dizaines, celle des centaines & celle de toutes les autres parties qui composoient les deux nombres donnés; donc l'on trouve la différence des deux nombres eux-mêmes; puisque chacun d'eux est égal (8) à toutes ses parties prises ensemble; donc, &c.

Corollaire I.

33. Toutes les parties de l'Arithmétique se prouvent par leurs contraires; c'est par la soustraction que l'on s'assure qu'on a bien opéré dans l'addition, & par l'addition que l'on s'assure qu'on a bien opéré dans la soustraction: si l'on veut prouver, *par ex*: que 4 & 3 font 7, on s'assurera aisément que la somme 7 est juste, en faisant voir que 3 retranché de 7 laisse 4; car $4 + 3 = 7$, parce que $7 - 3 = 4$, & réciproquement. La raison est que ces deux opérations sont opposées, & que l'une détruit ce que fait l'autre.

Corollaire II.

34. La même chose a lieu lorsque les nombres sont composés; en effet soient donnés deux nombres composés, tels que les nombres 897 & 589.

I°. Si vous les ajoutez pour en avoir la somme, sçavoir

$$\begin{array}{r} 897 \\ 589 \\ \hline 1486 \end{array}$$

& si vous voulez vous assurer que vous ne vous êtes point trompé dans l'addition, retranchez chacune des colonnes en commençant par la gauche, du chiffre ou des chiffres qui lui répondent au-dessous dans la somme trouvée; & s'il y a un reste, rejetez ce reste au chiffre suivant de la somme, & ainsi de suite: or si après avoir soustrait la dernière colonne à droite, du chiffre ou des chiffres qui lui répondent, il ne reste rien, ce sera une marque que vous avez bien opéré. Dans cet exemple prenez la somme 13 des chiffres 8 & 5 qui forment la colonne des centaines, & retranchez-la de 14 qui est le nombre qui répond à cette colonne, il reste 1, portez au chiffre suivant 8 ce reste 1 (lequel est une dizaine par rapport à 8 (26) & joint avec lui donne 18). Ensuite dites, 9 & 8 qui forment la colonne des dizaines, donnent 17, de 18 ôtez 17, reste 1, que vous portez pareillement au chiffre suivant 6, & joint avec lui donne 16; puis dites 7 & 9, donnent 16; or 16 ôté de 16, reste 0, d'où l'on conclut que la somme trouvée est la véritable: car puisqu'il est égal à toutes ses parties prises ensemble (8), il s'ensuit que, si vous retranchez du tout toutes les parties qui le composent, successivement ou les unes après les autres, il ne doit rien rester à la fin.

II°. S'il s'agit de retrancher le nombre 589 de 897 pour en avoir la différence, sçavoir

$$\begin{array}{r} 897 \\ 589 \\ \hline 308 \end{array}$$

vous vous assurerez d'avoir trouvé la véritable différence, en ajoutant ensemble la différence & le nombre inférieur: car si la somme qui en résulte, est égale au nombre supérieur, c'est une marque que la différence trouvée est la vérita-

ble. En effet le nombre supérieur est un tout dont le nombre inférieur est une partie, & la différence est l'autre partie: or le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble; donc, si la différence trouvée est la véritable, la somme faite de la différence & du nombre inférieur, doit par conséquent être égale au nombre supérieur, ou au tout.

PARAGRAPHE II.

De la Multiplication & de la Division.

DÉFINITIONS.

I.

35. Si les nombres dont il faut trouver la somme, étoient tous les mêmes; *par ex*: 4, 4, 4, au lieu d'écrire le chiffre 4, trois fois, pour avoir $4+4+4=12$, il fera plus court de ne l'écrire qu'une seule fois, & de mettre au-dessous de 4 le chiffre 3, pour marquer que le premier doit être pris trois fois: or 4 pris trois fois donne le même résultat, sçavoir, 12; & alors l'opération s'appelle *Multiplication*; le premier nombre s'appelle *Multiplicande*; le second, *Multipliateur*; & le troisième, *Produit*.

I I.

36. Multiplier, c'est donc prendre ou ajouter une quantité qu'on appelle *Multiplicande*, autant de fois qu'il y a d'unités dans une autre quantité, qu'on nomme *Multipliateur*, pour avoir un résultat, qu'on appelle produit; *par ex*: si l'on multiplie 2 par 3, l'on aura 6 pour résultat ou produit, ce qui s'exprime plus brièvement de cette manière, $2 \times 3 = 6$, c'est-à-dire, 2 par 3 égal à 6.

Corollaire.

37. Il suit de cette définition, que le produit contient le multiplicande autant de fois que le multipliateur contient l'unité; & par conséquent si le multipliateur est égal à l'unité, le produit

sera égal au multiplicande ; si le multiplicateur est plus grand que l'unité , le produit sera plus grand que le multiplicande ; & si le multiplicateur est plus petit que l'unité , le produit sera plus petit que le multiplicande ; *par ex* : on aura $2 \times 3 = 6$; $2 \times 1 = 2$; $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

P R O B L È M E I.

38. *Faire la Multiplication, c'est-à-dire, chercher le Produit d'un Nombre par un autre, lorsque le Multiplicateur est plus grand que l'unité.*

SOLUTION. Ou le multiplicande & le multiplicateur sont tous les deux des nombres simples ; ou l'un des deux est un nombre composé, & l'autre un nombre simple ; ou bien le multiplicande & le multiplicateur sont tous les deux des nombres composés.

Premier Cas.

39. Si le multiplicande & le multiplicateur sont tous les deux des nombres simples , il n'y a nulle difficulté ; *par ex* : $4 \times 3 = 12$; $5 \times 4 = 20$. Pour trouver tout d'un coup le produit de deux nombres simples, on peut s'aider de la table suivante, qui contient les produits de chaque nombre simple par tous les autres.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	B
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
	7	14	21	28	35	42	49	56	63	
	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
	9	18	27	36	45	54	63	72	81	D

Car dans cette table tous les nombres simples étant à côté les uns des autres dans la ligne AB, & au-dessous les uns des autres dans la ligne AC, si vous voulez multiplier un nombre; *par ex*: 7 pris dans la ligne AC, par un autre nombre 6, pris dans la ligne AB, vous en trouverez le produit 42 dans la case qui répondra tant au chiffre supérieur 6, qu'au nombre collatéral 7.

Second Cas.

40. Si des deux nombres que l'on multiplie, l'un étoit un nombre composé, & l'autre un nombre simple, si, *par ex*: le multiplicande est un nombre composé & le multiplicateur un nombre simple, il faudra multiplier successivement les unités, les dizaines, les centaines, &c. du multiplicande par le multiplicateur: comme on va le voir.

Multiplicande,	3421
Multiplicateur,	3
Produit	10263

Je dis 3 fois 1 font 3, j'écris 3 sous le 3; ensuite 3 fois 2 font 6, j'écris 6 sous le 2; trois fois 4 font 12, j'écris 2 sous le 4, & retient 1; 3 fois 3 font 9 & 1 de retenu font 10, que j'écris en mettant le 0 sous le 3, & avançant la dizaine.

Or ce produit contenant le produit des unités, des dizaines, &c. du multiplicande par le multiplicateur, est par conséquent le véritable produit.

Si le multiplicande étoit un nombre simple, & le multiplicateur un nombre composé, on feroit du multiplicateur le multiplicande, & du multiplicande le multiplicateur, & on opéreroit comme ci-dessus. En effet, il est indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4; 2 par 15, ou 15 par 2; car le résultat sera toujours le même, puisque $3 \times 4 = 12$, aussi bien que $4 \times 3 = 12$.

Troisième Cas.

41. Si le multiplicande & le multiplicateur sont des nombres composés, il faudra multiplier tout le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur; savoir, par les unités, par les dizaines, par les centaines, &c. du multiplicateur: or le multiplicande multiplié par les unités du multiplicateur, donnera un produit d'unités; multiplié par les dizaines du multiplicateur, donnera un produit de dizaines; multiplié par les centaines du multiplicateur, donnera un produit de centaines; & ainsi de suite: c'est pourquoi l'on aura différens produits d'unités, de dizaines, de centaines, &c. qu'il faudra écrire les uns sous les autres, observant de garder les rangs propres à chaque ordre; la somme de ces produits partiels donnera le produit total; par ex :

	234
	125
Produit	1170
{ des unités,	468
{ des dizaines,	234
{ des centaines,	29250
Produit total,	29250

Commencez par le premier chiffre du multiplicateur, & vous direz 5 fois 4 font 20, écrivez 0 sous le 5, & retenez 2; 5 fois 3 font 15, & 2 de retenus font 17, écrivez 7, & retenez 1; 5 fois 2 font 10, & 1 de retenu font 11, & vous aurez 1170, qui sera le produit des unités. Vous passerez au second chiffre 2 du multiplicateur, & vous direz 2 fois 4 font 8, qu'il faut avancer d'un rang sur la gauche, parce que le multiplicateur 2 étant au rang des dizaines, le produit 8 est un produit de dizaines. Continuez à multiplier les autres chiffres du multiplicande par ce chiffre 2 du multiplicateur, & vous aurez 468 pour produit des

dixaines. Passez ensuite au troisième chiffre 1 du multiplicateur, & dites 1 fois 4 font 4, que vous reculerez encore d'un rang vers la gauche pour le mettre au rang des centaines; continuez à multiplier les autres chiffres du multiplicande, & vous aurez 234 pour produit des centaines. Ajoutez ces trois produits, & vous aurez le produit total.

Corollaire.

42. Pour multiplier tout d'un coup un nombre quelconque; *par ex* : 24 par 10, il n'y a qu'à lui ajouter un zero; ce qui fait $24 \times 10 = 240$; pour le multiplier par 100, il n'y a qu'à lui ajouter deux zero, ce qui fait $24 \times 100 = 2400$. En un mot pour multiplier tout d'un coup par un nombre *décimal*, il n'y a qu'à ajouter au multiplicande autant de zero qu'il s'en trouve dans le nombre décimal: car ajoutant un zero, vous rendez le multiplicande dix fois plus grand, ou vous le multipliez par 10; ajoutant deux zero, vous rendez le multiplicande cent fois plus grand, ou vous le multipliez par 100: ce qui est fondé sur la valeur des chiffres, laquelle augmente en proportion décuple d'un rang à un autre. Pareillement toutes les fois qu'il se trouve des zero à la fin, soit du multiplicande, soit du multiplicateur, soit de l'un & de l'autre en même tems, on peut abrégér l'opération en multipliant les chiffres positifs du multiplicande & du multiplicateur les uns par les autres, & en écrivant à la fin du produit tous les zero qui se trouveront à la fin du multiplicande & du multiplicateur.

PROBLÈME II.

43. *Faire la Multiplication, lorsque le Multiplicateur est égal à l'unité.*

SOLUTION. Il n'y a nulle difficulté: car le produit est alors toujours égal au multiplicande (37): l'on a donc $24 \times 1 = 24$; $35 \times 1 = 35$, & ainsi du reste.

P R O B L È M E I I I.

44. *Faire la Multiplication, lorsque le multiplicateur est plus petit que l'unité.*

SOLUTION. Lorsque le multiplicateur est plus petit que l'unité, le produit doit être autant de fois plus petit par rapport au multiplicande, que le multiplicateur est plus petit par rapport à l'unité (37); *par ex.*: $12 \times \frac{1}{2} = 6$; $12 \times \frac{1}{3} = 4$; $12 \times \frac{1}{4} = 3$.

Corollaire.

45. Dans les exemples ci-dessus pour avoir le produit de 12 par $\frac{1}{2}$, par $\frac{1}{3}$, par $\frac{1}{4}$, on a pris la moitié, le tiers, le quart du multiplicande; c'est-à-dire que l'on a réellement divisé 12 par les nombres 2, 3, 4: on voit donc que lorsque le multiplicateur est une fraction qui a l'unité pour numérateur, on trouvera tout d'un coup le produit, en divisant le multiplicande par le dénominateur de la fraction.

D É F I N I T I O N S.

I.

46. Si d'un nombre donné il falloit retrancher un même nombre plusieurs fois; *par ex.*: si de 8 il falloit retrancher 2 autant de fois qu'il est possible de le faire, en faisant $8 - 2 = 6$; $6 - 2 = 4$; $4 - 2 = 2$; $2 - 2 = 0$: on verroit que 2 peut être retranché de 8, ou que 2 est contenu dans 8 quatre fois, & cette opération seroit une *soustraction* répétée quatre fois. Or il est plus court de demander tout d'un coup, en 8 combien de fois est contenu 2? On trouve qu'il y est contenu quatre fois, ce qui s'exprime d'une manière plus abrégée de cette façon, $\frac{8}{2} = 4$, c'est-à-dire 8 *divisé par 2 égal à 4*, & cette opération abrégée s'appelle *Division*; le premier nombre 8 s'appelle *Dividende*; le second 2 s'appelle *Diviseur*; & le résultat 4 se nomme *Quotient*.

I I.

47. La division est donc une opération dans laquelle on cherche combien de fois un nombre, qu'on appelle *Diviseur*, est contenu dans un autre qu'on nomme *Dividende*, & ce *combien de fois* est exprimé par un troisième nombre qui s'appelle *Quotient*.

Corollaire I.

48. Il s'ensuit que, comme la multiplication n'est qu'une addition plusieurs fois répétée, de même la division n'est qu'une soustraction plusieurs fois répétée. Comme dans la multiplication on ajoute le multiplicande à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur; de même dans la division on retranche le diviseur du dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient.

Corollaire II.

49. Comme le diviseur est contenu dans le dividende autant de fois que l'unité est contenue dans le quotient, de même le quotient est contenu dans le dividende autant de fois que l'unité est contenue dans le diviseur: c'est pourquoi si le diviseur est plus grand que l'unité, le quotient sera plus petit que le dividende: *par ex*: $\frac{12}{3} = 4$; si le diviseur est égal à l'unité, le quotient sera égal au dividende; *par ex*: $\frac{12}{1} = 12$; si le diviseur est plus petit que l'unité, le quotient sera plus grand que le dividende, $\frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$.

PROBLÈME I.

50. *Faire une Division, c'est-à-dire, chercher le Quotient d'un nombre divisé par un autre, lorsque le Diviseur est plus grand que l'unité.*

SOLUTION. Ou le dividende & le diviseur sont tous les deux des nombres simples; ou le dividende est un nombre composé, & le diviseur un nombre simple; ou le dividende est un nombre simple, & le diviseur un nombre composé; ou

le dividende & le diviseur font tous les deux des nombres composés.

Premier Cas.

51. Si le dividende & le diviseur font des nombres simples, il n'y a nulle difficulté; *par ex.* $\frac{8}{4} = 2$; $\frac{4}{2} = 2$, comme il est évident.

Second Cas.

52. Si le dividende est un nombre composé, & le diviseur un nombre simple.

I°. Prenez le premier chiffre du dividende à gauche, ou les deux premiers chiffres du dividende, (si le diviseur ne se trouve point contenu dans le premier,) & ce sera un premier *membre* de division que vous diviserez par le diviseur donné, sous lequel écrivez le quotient.

II°. Multipliez le chiffre trouvé au quotient par le diviseur, & retranchez le produit du membre de division, afin de voir si le diviseur est contenu un certain nombre de fois dans le dividende sans reste, ou avec un reste: s'il y a un reste, il sera ou plus grand que le diviseur, ou égal au diviseur, ou plus petit que le diviseur: s'il est plus grand que le diviseur, ou s'il est égal au diviseur, c'est une marque que vous n'avez pas retranché le diviseur du membre de division autant de fois qu'il y étoit contenu, & par conséquent, que le chiffre écrit au quotient est trop petit, & qu'il faut l'augmenter: si le reste est plus petit que le diviseur, abaissez à côté de ce reste le chiffre suivant du dividende, lequel augmenté de ce reste, donnera le second *membre* de division, sur lequel vous opérerez comme sur le premier.

III°. Continuez de même l'opération, en divisant successivement chaque chiffre du dividende, & lorsque le chiffre à diviser se trouvera plus petit que le diviseur, mettez zero au quotient, afin de conserver aux chiffres qui le composent, leur rang & leur valeur; voici un exemple:

D'ARITHMÉTIQUE. 27

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividende,} \quad 3748 \quad \left. \begin{array}{l} 4 \\ 937 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Diviseur.} \\ \text{Quotient.} \end{array} \\
 \underline{36} \\
 14 \\
 \underline{12} \\
 28
 \end{array}$$

Dites en 3 combien de fois 4; il n'y est pas contenu : mais en 37 combien de fois 4? il y est 9 fois; écrivez 9 au quotient, & multipliez 9 par 4, ce qui donne le produit 36 que vous écrirez sous 37; puis ôtez 36 de 37, reste 1, à côté duquel abaissez le chiffre 4, qui augmenté de ce reste fera 14, & dites en 14 combien de fois 4? 3 fois; écrivez 3 au quotient, & multipliez 3 par 4, ce qui fait 12, que vous écrirez sous 14: ôtez 12 de 14, reste 2, & à côté de 2 abaissez le chiffre suivant 8, ce qui fera 28, lequel divisé par 4 donnera 7 juste au quotient, qui fera 937.

Troisième Cas.

53. Si le dividende est un nombre simple & le diviseur un nombre composé, la division ne peut point s'effectuer; on ne peut dans ce cas que l'indiquer, & cette division indiquée donne alors une *fraction*, laquelle est soumise à des règles particulières dont nous parlerons dans la suite.

Quatrième Cas.

54. Si le dividende & le diviseur sont tous les deux des nombres composés, il faut faire la division par parties, comme il suit.

I°. Il faut prendre dans les premiers chiffres du dividende à gauche un nombre dans lequel soit contenu le diviseur, & ce sera le premier *membre* de division.

II°. Il faut diviser ce premier membre par le diviseur, ou pour abrégé, par le premier caractère ou chiffre du diviseur, & l'on aura un quotient, lequel peut être ou trop grand, ou trop petit, ce que l'on connoitra par l'opération suivante.

III°. Il faut multiplier le quotient trouvé par le diviseur, comme dans le second cas, & soustraire le produit du premier membre de division. Or si ce produit ne peut pas être soustrait du membre de division, c'est une marque que le quotient est trop grand, & par conséquent il faut le diminuer d'une unité, & le diminuer toujours d'une unité, jusqu'à ce que cette soustraction devienne possible. Si ce produit peut être soustrait du membre de division, & qu'il n'y ait point de reste, alors le quotient trouvé est juste, & il faut l'écrire; s'il se trouve un reste, & qu'il soit plus petit que le diviseur, le chiffre trouvé au quotient est encore bon, & il faut l'écrire: mais si le reste étoit égal au diviseur, ou plus grand que le diviseur, ce seroit une marque, comme nous l'avons déjà dit, que le diviseur seroit encore contenu dans le dividende, & qu'il en pourroit être encore retranché, & par conséquent que le chiffre trouvé pour le quotient seroit trop petit; il faudroit donc l'augmenter d'une unité, & l'augmenter toujours d'une unité, jusqu'à ce que le reste, s'il s'en trouve encore après la soustraction, soit plus petit que le diviseur.

IV°. Lorsqu'après la soustraction il se trouve un reste, il faut ajouter ce reste au chiffre suivant du dividende, ou plus commodément, il faut écrire le chiffre suivant du dividende à côté de ce reste, & l'on aura un *second membre* de division, sur lequel il faut opérer comme sur le premier, & ainsi de suite.

V°. Il faut observer de mettre 0 au quotient toutes les fois que le diviseur ne se trouve pas contenu dans le membre de division, afin de conserver l'ordre & le rang que doivent tenir les chiffres du quotient.

VI°. Lorsque le quotient n'est pas juste, mais qu'il se trouve un reste après la division, il faut écrire ce reste à côté du quotient, & le diviseur au-dessous de ce reste, ce qui donne une fraction ou une division indiquée.

D'ARITHMÉTIQUE. 29

Exemple I.

Dividende,	8428	}	24	Diviseur.
Produit,	72	}	$351 + \frac{4}{24}$	Quotient.
Reste,	12			
Second memb.	122			
Produit,	120			
Reste,	2			
Troisième memb.	28			
Produit,	24			
Reste,	4			

Exemple II.

Je veux diviser 56034030 par 30, j'opere en suivant la méthode précédente.

	56034030	}	30	
Produit,	30	}	1867801	
Reste,	26			
II. Memb.	260			
Produit,	240			
Reste,	20			
III. Memb.	203			
Produit,	180			
Reste,	23			
IV. Memb.	234			
Produit,	210			
Reste,	24			
V. Memb.	240			
Produit,	240			
Reste,	0			
VI. Memb.	030			
Produit,	30			
Reste,	0			

Dans le premier exemple, le diviseur 24 contenant deux chiffres, il faut prendre pour premier *membre* de division 84, & dire, en 8 combien de fois 2? Il y est quatre fois; mais le chiffre 4 multiplié par le diviseur 24, donne le produit 96, qui ne peut être soustrait de 84, & par conséquent il est trop grand: il faut donc le diminuer d'une unité, & prendre 3, lequel multiplié par le diviseur, donne le produit 72, qui peut être soustrait de 84; c'est pourquoi j'écris 3 au quotient, & 72 sous 84: je soustrais 72 de 84, il reste 12 que j'écris au-dessous, & à côté de ce reste j'abaisse le chiffre suivant 2 du dividende, ce qui donne 122 pour second *membre* de division. Je dis donc en 12 combien de fois 2? 6 fois. Mais pour la même raison que ci-dessus, je trouve que 6 est trop grand, mais que 5 est bon: j'écris donc 5 au quotient, & je multiplie le diviseur par ce chiffre 5, ce qui donne le produit 120, que j'écris au-dessous, & que je soustrais de 122; il reste 2, à côté duquel ayant abaissé le dernier chiffre 8, j'ai 28 pour troisième *membre* de division, & continuant à opérer comme ci-dessus, je trouve pour quotient le nombre 351, avec le reste 4, qui ne pouvant être divisé par 24, donne la fraction $\frac{4}{24}$.

Dans le second exemple, ayant pris pour premier *membre* de division les deux premiers chiffres du dividende, je dis, 3 en 5 se trouve une fois; j'écris 1 au quotient, & je multiplie 1 par 30, ce qui donne 30, lequel soustrait de 56, laisse le reste 26, à côté duquel j'abaisse 0, & j'ai 260 pour second *membre* de division. Je dis donc en 26 combien de fois 3? huit fois: je multiplie 8 par 30, & j'ai le produit 240, lequel retranché de 260, donne le reste 20: à côté de 20 j'abaisse 3, & je dis en 20 combien de fois 3? Je trouve 6, qui multiplié par 30, donne 180: 180 retranché de 203, reste 23, à côté duquel j'abaisse 4, & je dis 3 en 23 se trouve 7 fois, or 7 multiplié par 30

D'ARITHMÉTIQUE. 31

donne 210: je retranche 210 de 234, reste 24, à côté duquel j'abaisse 0, & je dis 3 en 24 se trouve 8 fois, dont le produit par 30 est 240, qui soustrait de 240, ne laisse rien. J'abaisse donc 3, & je dis 3 ne peut pas être divisé par 30; je mets donc un 0 au quotient, & à côté de 3 j'abaisse 0, ce qui donne 30 pour dernier membre de division, & je dis 3 se trouve une fois dans 3, & 1 multiplié par 30 donne 30, que je soustrais de 30, il reste 0, & l'opération est finie.

Remarque I.

55. Quand il se trouve trois chiffres au quotient, le produit du diviseur par le premier chiffre trouvé au quotient est un produit de centaines; & c'est pour cette raison que dans le premier exemple, le premier produit 72 doit être écrit sous le membre 84, de façon que le dernier chiffre 2 de 72 se trouve au rang des centaines; pareillement le produit du diviseur par le second chiffre trouvé au quotient est un produit de dizaines; & c'est pour cette raison que dans le second produit 120 le dernier caractère 0 doit être au rang des dizaines, & ainsi du reste. Il faut faire une remarque toute semblable, si le quotient étoit composé de 4, de 5, de 6, &c. chiffres.

Remarque II.

56. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient pour chaque membre de division: car si l'on pouvoit mettre 10 au quotient, il s'en suivroit que le membre de division seroit dix fois plus grand que le diviseur: or le membre de division sur lequel on opere, ne peut jamais être dix fois plus grand que le diviseur: s'il l'étoit, & si l'on avoit *par ex*: pour membre de division 3250, lorsqu'on a pour diviseur 325, retranchez le zero du membre de division, afin de le rendre dix fois plus petit; donc en ce cas vous le

rendez précisément égal au diviseur, & vous pourrez par conséquent le diviser par ce diviseur 325 : donc vous ne le pouvez prendre pour membre de division, qu'après avoir retranché le zero ; donc le membre de division ne peut jamais être dix fois plus grand que le diviseur, ou ce qui revient au même, vous ne pouvez jamais écrire 10 au quotient.

Corollaire I.

57. Il y a toujours autant de caracteres ou chiffres au quotient, qu'il y a de membres de division ; car chaque membre donne au quotient un chiffre ou un 0.

Corollaire II.

58. Le diviseur multiplié par le quotient est égal au dividende : car on a retranché le diviseur du dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient ; donc si l'on prend le diviseur autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, c'est-à-dire, si l'on multiplie le diviseur par le quotient, on aura un produit égal au dividende.

C'est pourquoi la multiplication & la division se servent réciproquement de preuve : car si l'on veut faire voir que $\frac{2}{4} = 2$, il n'y a qu'à faire voir que $4 \times 2 = 8$: car de ce que le diviseur a été retranché du dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, il s'ensuit que le diviseur pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, doit donner le dividende.

Corollaire III.

59. Pour diviser tout d'un coup par un nombre décimal, il n'y a qu'à retrancher dans le dividende sur la fin autant de caracteres ou chiffres qu'il y a de zero dans le diviseur décimal ; par ex : $\frac{240}{10} = 24$; $\frac{2400}{100} = 24$; & $\frac{341}{10} = 34 + \frac{1}{10}$; & ainsi du reste. Car lorsque vous retranchez un chiffre, vous rendez le nombre 10 fois plus petit,

ou vous le divisez par 10 ; lorsque vous retranchez deux chiffres , vous le rendez 100 fois plus petit , ou vous le divisez par 100 ; ce qui est toujours fondé sur la valeur des chiffres , laquelle croît en proportion décuple.

Remarquez que lorsque les chiffres retranchés sont positifs , la division n'est pas juste , mais que l'on a un reste exprimé par les chiffres positifs retranchés ; par ex : $\frac{2471}{100} = 24$, avec le reste 73 que l'on ne peut point diviser par 100 , mais dont on doit faire une fraction , comme nous l'allons dire ci-après.

PROBLÈME II.

60. *Faire la Division , lorsque le Diviseur est l'unité.*

SOLUTION. Il n'y a nulle difficulté ; le quotient dans ce cas est égal au dividende ; car l'unité qui multiplie ou qui divise une quantité , ne l'augmente , ni ne la diminue point : $\frac{1}{1} = 3$, $\frac{41}{1} = 41$, & ainsi du reste.

PROBLÈME III.

61. *Faire la Division , lorsque le Diviseur est plus petit que l'unité.*

SOLUTION. Le quotient doit être dans ce cas autant de fois plus grand par rapport au dividende , que le diviseur est plus petit par rapport à l'unité , suivant le principe énoncé ci-dessus (49). Ainsi 24 divisé par $\frac{1}{2}$ donne 48 ; divisé par $\frac{1}{3}$ donne 72 ; divisé par $\frac{1}{4}$ donne 96.

Corollaire.

62. On voit donc par les exemples ci-dessus , que lorsque le diviseur est une fraction dont le numérateur est l'unité , on trouvera tout d'un coup le quotient , en multipliant le dividende par le dénominateur de la fraction ; de même que dans la multiplication , lorsque le multiplicateur est une fraction , on trouve tout d'un coup le produit , en divisant le multiplicande par le dénominateur de la fraction.

Remarque.

63. La division n'est pas toujours juste, mais souvent elle laisse un reste que l'on ne peut plus diviser par le diviseur, *par ex* : si l'on avoit à diviser 19 par 3, le quotient seroit 6 avec le reste 1, qui ne peut plus être divisé par 3. Dans ce cas on doit écrire à côté du quotient ce reste, & en indiquer la division par le diviseur, ce qui donnera une fraction jointe au quotient, comme il est aisé de le voir $\frac{19}{3} = 6 + \frac{1}{3}$, d'où l'on voit que les fractions prennent leur origine dans les divisions qui ne peuvent pas se faire exactement & sans reste.

PARAGRAPH E III.

De l'Exaltation & de l'Extraction.

D É F I N I T I O N S.

I.

64. *L'exaltation* est une multiplication dans laquelle le multiplicande & le multiplicateur sont un même nombre, ou, ce qui est le même, dans laquelle on multiplie un nombre par lui-même: & alors l'opération s'appelle *Exaltation*; le produit se nomme *Puissance*; & le nombre qui multiplié par lui-même a donné cette puissance s'appelle *Racine*.

II.

65. Le produit d'un nombre multiplié par l'unité, est regardé comme première Puissance & première Racine; *par ex* : $3 \times 1 = 3$, est la première puissance & la première racine du nombre 3.

III.

66. Le produit d'un nombre multiplié une fois par lui-même s'appelle seconde Puissance, ou *Quarré*, & sa racine se nomme Racine seconde, ou *quarrée*; *par ex* : $3 \times 3 = 9$, donne 9 pour la

seconde puissance, ou *Quarré*, & 3 pour la racine seconde, ou *quarrée*.

I V.

67. Le produit d'un nombre multiplié deux fois par lui-même, s'appelle troisième Puissance, ou *Cube*, & la racine s'appelle Racine troisième, ou *cubique*; par ex: $3 \times 3 \times 3 = 27$ donne 27 pour la troisième puissance, ou le *Cube*, & 3 pour la racine troisième, ou *cubique*.

V.

68. Le produit d'un nombre multiplié trois fois par lui-même s'appelle quatrième Puissance, ou *Quarré-quarré*; la racine de cette puissance s'appelle Racine quatrième, ou *quarrée-quarrée*; par ex: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ donne 81 pour la quatrième puissance, ou le *Quarré-quarré*, & 3 pour la racine quatrième, ou *quarrée-quarrée*: il en est de même pour les autres puissances: 5^e, 6^e, 7^e, &c.

V I.

69. On appelle *Exposant* de la puissance, ou de la racine, le nombre qui exprime le degré de la puissance ou de la racine. L'exposant de la première puissance & de la première racine est 1; celui de la seconde puissance & de la seconde racine est 2; celui de la troisième puissance & de la troisième racine est 3, & ainsi du reste.

V I I.

70. *L'extraction* est une division dans laquelle le diviseur & le quotient se trouvent être un même nombre, comme il arrive, lorsque par ex: on divise 9 par 3; car $\frac{9}{3} = 3$. pareillement lorsqu'après avoir divisé le dividende, il est encore possible de diviser le premier, le second, le troisième, &c. quotient par le même diviseur, & que le dernier quotient qui résulte est le même nombre que le diviseur, comme il arrive; par ex: en divisant 64 par 4, ou 125 par 5, l'opération

s'appelle encore *Extraction* ; & dans les deux cas le dividende s'appelle *Puissance* ; & le diviseur , ainsi que le quotient ou le dernier quotient , se nomment *Racines*.

L'extraction est donc une opération par laquelle on cherche un nombre qui , multiplié un certain nombre de fois par lui-même , donne la puissance proposée.

Corollaire I.

71. Il s'agit en général de ce que nous avons dit que , pour élever un nombre à une puissance quelconque , il n'y aura qu'à le multiplier par lui-même autant de fois moins une , qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance proposée ; pour élever le nombre 3 à la troisième puissance , il n'y a qu'à le multiplier trois fois moins une , ou deux fois par lui-même , & l'on aura $3 \times 3 \times 3 = 27$. En effet nous avons dit que la troisième puissance d'un nombre étoit le produit de ce nombre multiplié deux fois par lui-même.

Corollaire II.

72. Puisqu'une puissance quelconque , par ex. la troisième puissance 27 est le produit d'un multiplicande 3 multiplié deux fois par un multiplicateur 3 ; il s'ensuit que la racine troisième de la puissance 27 doit être un quotient 3 , du dividende 27 divisé deux fois par un diviseur 3.

Corollaire III.

73. Quand on propose une puissance , par ex. 27 , pour en chercher la racine , cette racine n'est pas aisée à trouver tout d'un coup ; elle résulte d'une division dans laquelle on connoît , il est vrai , le dividende qui est la puissance proposée ; mais on ne connoît pas le diviseur , parce que ce diviseur est le même nombre que le quotient que l'on cherche , & qui est inconnu.

C'est pourquoi la règle générale pour extraire

la racine quelconque d'une puissance donnée, est de chercher un nombre tel, qu'étant multiplié par lui-même autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance proposée, ou de la racine cherchée, il devienne égal à cette puissance, ou du moins en approche le plus près qu'il soit possible.

Nous donnerons dans la suite des regles & des méthodes pour trouver les puissances, & extraire les racines des nombres & des quantités quelconques.

Corollaire I V.

74. Il s'ensuit que l'exaltation & l'extraction sont des opérations opposées, & qui se servent mutuellement de preuve; car si l'on veut s'assurer, *par ex.* que 3 est la racine quarrée de 9, il n'y a qu'à faire voir que 9 est le carré de 3; car, puisqu'il est $3 \times 3 = 9$, il suit que $3^2 = 9$.

ARTICLE II.

Des opérations sur les Fractions.

I°. L'Unité est un tout divisible en plusieurs parties, mais regardé comme simple & non encore divisé. Le nombre entier est un assemblage de plusieurs unités de même espece; la fraction est ou une partie de l'unité, comme $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. ou un assemblage de parties d'une même unité, comme $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. En effet, si l'on suppose l'unité divisée en trois parties égales, la fraction $\frac{2}{3}$ est un assemblage de deux de ces parties; si l'on suppose l'unité divisée en quatre parties égales, la fraction $\frac{3}{4}$ fera l'assemblage de trois de ces parties.

II°. Les fractions peuvent être considérées ou en général, ou dans leurs différentes espèces; on appelle fraction en général toute quantité qui est ou partie de l'unité, ou assemblage de parties de l'unité. Les différentes espèces de fractions sont les parties de différentes unités, comme du cercle, de la toise, de l'heure, &c. soit qu'elles

soient représentées sous l'expression de *fractions* ;
ou sous celle d'*entiers*.

P A R A G R A P H E I.

Des Fractions considérées en général.

I°. La *fraction* est une division seulement indiquée : ce que l'on appelle *dividende* & *diviseur* dans la division, s'appelle *numérateur* & *dénominateur* dans la fraction. Comme la division donne un résultat que l'on appelle *quotient*, de même la fraction donne un résultat que l'on appelle *valeur* ou *exposant* de la fraction.

II°. Dans la division on trouve le *quotient* en divisant le dividende par le diviseur, ce qui est toujours possible, parce que le dividende est plus grand que le diviseur ; de même dans la fraction on trouve la *valeur* en divisant le numérateur par le dénominateur, lorsque la division est possible ; mais lorsque la division n'est pas possible, comme il arrive dans toute fraction proprement dite, où le numérateur est toujours plus petit que le dénominateur, on trouve alors la *valeur*, ou l'*exposant* de la fraction, en réduisant la fraction à ses plus simples termes, comme nous le dirons ci-après.

III°. Les fractions considérées en général sont susceptibles de toutes les opérations que l'on fait sur les nombres entiers. Mais pour pouvoir être assujetties eu calcul, elles ont quelquefois besoin d'être préparées par des opérations qui leur sont propres, & que l'on appelle par cette raison *préliminaires*.

Des opérations préliminaires sur les Fractions.

Les opérations préliminaires sur les fractions sont différens changemens qu'on leur fait subir, sans en changer la valeur, pour en rendre le calcul & la comparaison plus facile & plus commode ; ces opérations s'appellent *transformations*.

PRINCIPE I.

75. La valeur d'une fraction ne change pas ; soit qu'on multiplie , soit qu'on divise ses deux termes par une même troisième quantité : si vous multipliez , *par ex* : les deux termes de la fraction $\frac{1}{2}$ par 3 , vous aurez la fraction $\frac{3}{6}$, qui est la même chose que $\frac{1}{2}$: pareillement , si vous divisez les deux termes de la fraction $\frac{3}{6}$ par 3 , vous aurez la fraction $\frac{1}{2}$, qui est la même chose que $\frac{1}{2}$.

PRINCIPE II.

76. Une fraction est d'autant plus grande ou plus petite , qu'elle approche plus ou moins de l'unité , ou qu'elle contient plus ou moins de parties de l'unité dont elle est fraction.

Corollaire.

77. D'où il suit que , lorsque deux fractions ont le même dénominateur , la plus grande est celle dont le numérateur est plus grand , parce qu'elle contient plus de parties de l'unité , *par ex* : $\frac{3}{7} > \frac{2}{7}$; & lorsqu'elles ont le même numérateur , la plus grande est celle dont le dénominateur est plus petit : *par ex* : $\frac{2}{7} > \frac{2}{9}$; en effet plus le dénominateur est petit , le numérateur restant le même , plus il est contenu ou approche d'être contenu dans le numérateur , & par conséquent la fraction approche plus d'être égale à l'unité.

R È G L E I.

La première espèce de transformation se fait par le changement , ou d'une fraction en une autre fraction , ou d'un entier en fraction , ou d'une fraction en entier.

78. *Premier Cas.* On peut transformer une fraction en une autre fraction.

1°. En multipliant par une même quantité le numérateur & le dénominateur de la fraction ; *par ex* : au lieu de la fraction $\frac{1}{2}$, on peut avoir , en se servant du multiplicateur 2 , les fractions

$\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{16}{32}$, &c. lesquelles ont différentes expressions; mais conservent la même valeur (75).

II°. En divisant par une même quantité le numérateur & le dénominateur de la fraction, lorsque cette division se peut faire sans reste; *par ex*: au lieu de la fraction $\frac{4}{12}$, on peut avoir, en se servant du diviseur 2, les fractions $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$. Cette opération réduit la fraction à une expression plus simple, & par cette raison s'appelle *réduction des fractions à de plus simples termes*.

79. *Second Cas*. On transforme un entier en fraction en multipliant & divisant l'entier par le dénominateur que l'on veut donner à la fraction; *par ex*: on aura $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{16}{8}$, &c. Or l'entier sous ces différentes expressions conserve toujours la même valeur; parce qu'étant multiplié & divisé par une même quantité, la division détruit ce qu'avoit fait la multiplication, & réciproquement.

80. *Troisième Cas*. On transforme une fraction en entier, en divisant le numérateur par le dénominateur, lorsque la division est possible; $\frac{8}{4} = 2$.

Corollaire.

81. On peut réduire tout d'un coup une fraction à ses plus *simples termes*, ou à la plus simple expression qu'il soit possible, en divisant le numérateur & le dénominateur de la fraction par leur plus grand commun diviseur; c'est-à-dire, par le plus grand nombre qui puisse diviser l'un & l'autre exactement & sans reste, *par ex*: divisant les deux termes de la fraction $\frac{4}{8}$ par leur plus grand commun diviseur qui est 4, elle deviendra $\frac{1}{2}$. Or une fraction ainsi réduite est la valeur ou l'*exposant* de la fraction qui étoit à réduire.

R E G L E I I.

La seconde espèce de transformation se fait en réduisant les fractions, soit à un dénominateur commun, soit à un dénominateur quelconque.

D'ARITHMÉTIQUE. 41

82. *Premier Cas.* La réduction des fractions à un dénominateur commun se fait, en multipliant les termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre fraction, s'il n'y a que deux fractions; ou par le produit des dénominateurs des autres fractions, s'il y en a plusieurs; *par ex*: les fractions $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$ se réduisent à $\frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$, & $\frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$.

Le but & l'usage de cette réduction est de transformer les fractions en des quantités homogènes ou de même espèce, pour les rendre susceptibles de comparaison & de calcul. Car lorsque des fractions ont un même dénominateur elles sont entr'elles comme leur numérateurs; & l'on peut ainsi supprimer leur dénominateur commun, en le sous-entendant, & opérer sur ces fractions de la même manière que sur les entiers.

83. *Second Cas.* On réduit une fraction; *par ex*: $\frac{1}{2}$ à un dénominateur quelconque, tel que 4; 1°. en multipliant les termes de la fraction par le dénominateur donné 4, ce qui donne $\frac{4}{8}$; 2°. en divisant ensuite les deux termes de la fraction nouvelle par le dénominateur 2 de la première fraction, ce qui donnera la fraction réduite $\frac{2}{4}$, dont le dénominateur est devenu 4.

Cette réduction s'appelle *évaluation*, & sert à évaluer les fractions en parties connues; *par ex*: les fractions ou parties de livres en sols, ou en parties *vingtièmes*, qui sont des parties connues; car le sol est la $\frac{1}{20}$ partie de la livre. C'est pourquoi étant donné; *par ex*: les $\frac{1}{2}$ d'une livre, si je veux savoir combien cette fraction vaut de sols, ou de parties *vingtièmes* de la livre, je n'ai qu'à réduire la fraction $\frac{1}{2}$ au dénominateur 20 suivant la règle prescrite ci-dessus, & j'aurai la fraction réduite $\frac{10}{20}$ qui signifie quinze *vingtièmes* parties de la livre, ou quinze sols.

Corollaire.

84. De deux fractions dans lesquelles la diffé-

rence du numérateur au dénominateur est la même, la plus grande est celle qui est exprimée par de plus grands nombres; *par ex*: l'on a $\frac{3}{7} < \frac{3}{4}$. Car réduisant au même dénominateur, ou aura $\frac{3}{7} = \frac{4}{14}$, & $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$; or $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$.

Du Calcul des Fractions.

Le calcul des fractions consiste dans les opérations ordinaires d'addition & de soustraction, de multiplication & de division; d'exaltation, &c.

R E G L E I.

85. L'addition & la soustraction des fractions ne souffrent aucune difficulté, lorsqu'elles ont le même dénominateur; il est évident que $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$; que $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}$; c'est-à-dire, que l'on trouve la somme ou la différence des fractions qui sont de même dénomination, en prenant la somme ou la différence des numérateurs.

Mais lorsque les fractions sont de différente dénomination; 1°. on doit les réduire à un même dénominateur; 2°. il faut prendre la somme ou la différence des numérateurs des fractions réduites; *par ex*: $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$.

R E G L E I I.

86. La multiplication des fractions consiste à multiplier ou une fraction par une fraction, ou une fraction par un entier, ou un entier par une fraction.

I°. La multiplication d'une fraction par une autre fraction se fait *en multipliant les numérateurs par les numérateurs, & les dénominateurs par les dénominateurs*; *par ex*: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$; car $\frac{2}{3} = 3$, & $\frac{4}{5} = 2$; or $3 \times 2 = 6$; pareillement on aura $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{8}$; car $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, & $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$; or $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ par la raison contraire à ce que $3 \times 2 = 6$.

II°. Lorsqu'on multiplie une fraction par un entier; *par ex*: $\frac{2}{7}$ par 3, l'entier peut être regardé

comme une fraction qui a pour dénominateur l'unité (78); ainsi l'on aura, en suivant le principe ci-dessus, $\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2}{7} \times \frac{3}{1} = \frac{2 \times 3}{7 \times 1} = \frac{6}{7}$: c'est-à-dire, que pour avoir le produit d'une fraction par un entier, il n'y a qu'à multiplier le numérateur de la fraction par l'entier donné.

III°. Si l'on multiplie un entier par une fraction, par ex: 3 par $\frac{2}{7}$, il est évident par ce qui vient d'être dit, que l'on aura $3 \times \frac{2}{7} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{1 \times 7} = \frac{6}{7}$: c'est-à-dire, qu'il faut multiplier l'entier par le numérateur de la fraction, & conserver le même dénominateur.

Corollaire.

87. Si le numérateur d'une fraction est plus grand que l'unité, la fraction pourra toujours être décomposée en deux facteurs, dont l'un sera un nombre entier, & l'autre une fraction; par ex: $\frac{2}{3}$, ou $\frac{2 \times 1}{3}$ fera la même chose que $\frac{2}{3} \times 1$, ou $\frac{1}{3} \times 2$; comme on le voit évidemment après ce qui a été dit (86). D'où il suit que ce sera la même chose de prendre les deux tiers d'un tout simple, ou le tiers d'un tout double; par ex: les deux tiers d'un écu, ou le tiers de deux écus, de même que pour avoir le produit $2 \times 3 = 6$, c'est la même chose de prendre le double de 3, ou le triple de 2.

R E G L E I I I.

88. La division des fractions consiste à diviser ou une fraction par une fraction, ou une fraction par un entier, ou un entier par une fraction.

I°. La division d'une fraction par une autre fraction se fait en multipliant le numérateur de la première fraction par le dénominateur de la seconde, & le dénominateur de la première par le numérateur de la seconde; & on l'indique par cette marque X, que l'on interpose entre la fraction dividende & la fraction qui sert de diviseur, (ce qui s'appelle multiplier en croix, ou en sautoir) par ex: $\frac{1}{2}$ divisé par $\frac{3}{7}$, ou $\frac{1}{2} \times \frac{7}{3}$ donnera pour quotient $\frac{1 \times 7}{2 \times 3} = \frac{7}{6}$: car

$\frac{2}{3} = 6$, & $\frac{4}{3} = 2$: or $\frac{6}{3} = 3$. Pareillement $\frac{1}{2}$ divisé par $\frac{1}{6}$, ou $\frac{1}{12} \times \frac{1}{6}$ donnera pour quotient $\frac{2 \times 6}{12 \times 3} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; car $\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$, & $\frac{6}{6} = 1$; or $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, par la raison contraire à ce que $\frac{6}{3} = 3$.

II°. Si l'on veut diviser une fraction par un entier, l'entier peut être regardé comme une fraction qui a pour dénominateur l'unité (79); ainsi en suivant le principe ci-dessus, $\frac{4}{7}$ divisé par 3 sera $\frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4 \times 1}{7 \times 3} = \frac{4}{21}$; c'est-à-dire, que pour diviser une fraction par un entier, il n'y a qu'à multiplier le dénominateur de la fraction par l'entier.

III°. Si l'on divise un entier par une fraction, il est évident par ce qui vient d'être dit, que, par ex: 4 divisé par $\frac{1}{3}$ sera $\frac{4}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{4 \times 3}{1 \times 1} = \frac{12}{1}$; c'est-à-dire, qu'on doit multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction, & le diviser par le numérateur.

R E G L E I V.

89. L'exaltation d'une fraction à une puissance quelconque se fait, en élevant le numérateur & le dénominateur, chacun à la puissance proposée; par ex: le carré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$; car le carré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$ (86): pareillement le cube de $\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.

L'extraction des fractions se fait, en prenant la racine, tant du numérateur que du dénominateur; par ex: $\frac{2}{9}$ est la racine carrée de $\frac{4}{9}$, & la racine cubique de $\frac{8}{27}$.

Corollaire.

90. Les fractions décroissent dans l'exaltation; & croissent dans l'extraction; c'est-à-dire, que dans les fractions la racine est plus grande que la puissance, au lieu que dans les nombres entiers la puissance est plus grande que la racine; par ex: la fraction $\frac{1}{2}$ est plus grande que son carré $\frac{1}{4}$, que son cube $\frac{1}{8}$, &c. comme il est évident.

D'où l'on conclut qu'un nombre entier ne peut avoir pour racine une fraction: car une fraction

racine est toujours plus grande que sa puissance; or dans les nombres entiers la puissance au contraire est toujours plus grande que la racine.

N O M B R E I I.

Des Fractions considérées dans leurs espèces.

91. Les différentes espèces de fractions ne sont autre chose que les parties auxquelles on divise & on soudivise les mesures que l'on est obligé d'employer dans l'usage ordinaire, ces parties divisées & soudivisées prennent différens noms selon la mesure dont on fait usage. La mesure est regardée comme étant l'unité ou le tout, & les parties auxquelles on la divise, en font des fractions. Les mesures qui se rencontrent le plus souvent, sont par ex :

Le cercle qui se divise en 360 parties égales, qu'on appelle *degrés*; le degré se divise en 60 *minutes*; chaque minute en 60 *secondes*; chaque seconde en, &c.

Le tems qui se divise en *jours*; chaque jour se divise en 24 parties égales, qu'on appelle *heures*; chaque heure en 60 *minutes*; chaque minute en 60 *secondes*, &c.

La distance qui se mesure par des *toises*; la toise contient 6 *pieds*; le pied se divise en 12 *pouces*; le pouce en douze *lignes*, &c.

La monnoie qui se divise en *livres*; la livre contient 20 *sols*; le sol 12 *deniers*.

Le poids qui s'exprime par des *livres*; la livre contient 16 *onces*; l'once 8 *gros*; le gros 72 *grains*. Il en est de même de toutes les autres mesures. Or

I^o. Les parties de ces mesures sont autant d'espèces de fractions, qui se rencontrent souvent dans le calcul & qu'il faut combiner soit entr'elles, soit avec les mesures elles-mêmes. Car le cercle, par ex : étant divisé en 360 *degrés*, un degré, deux degrés, trois degrés, &c. sont $\frac{1}{360}$, $\frac{2}{360}$, $\frac{3}{360}$, &c. parties, où sont des fractions d'un

cercle : le degré étant divisé en 60 minutes, une minute, deux minutes, &c. sont $\frac{1}{60}$, $\frac{2}{60}$ parties, où sont des fractions d'un degré : la monnoie étant divisée en livres ; la livre en 20 sols ; le sol en 12 deniers, un sol, deux sols, trois sols, &c. sont $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{20}$, &c. parties, où sont des fractions de la livre, & un denier, quatre deniers, &c. sont, $\frac{1}{12}$, $\frac{4}{12}$ parties, où sont des fractions d'un sol ; & ainsi du reste.

II°. D'où il suit que les parties d'une mesure quelconque, qui auront un même nom, ou seront de même dénomination, seront des fractions qui auront un même dénominateur : or ce dénominateur étant commun, peut par conséquent être sous-entendu dans la pratique. C'est pourquoi on exprime ces parties ou fractions par des nombres entiers ; ainsi au lieu de dire $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{20}$ de livres, on dit 1 sol, 2 sols ; au lieu de dire $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, de sols, on dit 2 deniers, 5 deniers ; & ainsi du reste.

III°. Or le calcul de ces fractions souffre quelque difficulté, lorsqu'on combine des fractions de différente dénomination soit entr'elles, soit avec des entiers ; & ce sont ces fractions de différente dénomination qui étant exprimées de la même manière que les entiers donnent les nombres que l'on appelle complexes.

P R O B L Ê M E I.

92. Ajouter ensemble des nombres complexes ; c'est-à-dire, des Fractions de différente dénomination, par ex : des Livres, des Sols & des Deniers.

SOLUTION. 1°. Il faut disposer ces fractions en colonne, chacune selon leur dénomination ; c'est-à-dire, les deniers sous les deniers, les sols sous les sols, les livres sous les livres. 2°. Il faut prendre la somme de chaque colonne, allant de droite à gauche, & diviser cette somme par le dénominateur commun. 3°. S'il y a un reste, il faut écrire

D'ARITHMÉTIQUE. 47

ce reste sous la colonne, & garder le quotient pour l'ajouter à la colonne suivante.

	3 25 liv.	17 fols	4 den.
	15	11	6
	25	15	9
Somme,	367	4	7

PROBLÈME II.

93. Faire la Soustraction des Quantités ou Nombres complexes.

SOLUTION. I°. Il faut écrire la quantité que l'on veut soustraire au-dessous de celle dont on veut soustraire, de façon que les parties de même dénomination se trouvent les unes sous les autres; les deniers sous les deniers, les fols sous les fols, &c.

II°. A chaque colonne il faut soustraire le nombre inférieur du nombre supérieur à l'ordinaire, & écrire le reste ou la différence sous la colonne.

III°. Lorsque le nombre inférieur est plus grand que le nombre supérieur, il faut emprunter une unité de la colonne précédente pour l'ajouter à ce nombre supérieur trop petit, (laquelle unité est toujours égale au dénominateur de ce nombre supérieur) *par ex*: si de 8 deniers il faut retrancher 9 deniers, il faudra emprunter sur la colonne des fols une unité, c'est-à-dire, un fol que l'on évalue à 12, qui est le dénominateur commun des deniers, & qui doit être ajouté à 8 deniers, ce qui fait 20, dont retranchant 9, il reste 11 deniers, que l'on écrit sous la colonne des deniers.

IV°. Il faudra diminuer d'une unité le nombre dont on aura emprunté, ou bien augmenter le nombre qui lui est inférieur, de cette unité.

	655 liv.	3 fols	4 den.
	30	4	6
	624	18	10
Reste,	624	18	10

P R O B L È M E I I I.

94. *Faire la Multiplication des Nombres complexes,*

SOLUTION. I°. Le principe d'où dépend cette opération, est que le produit contient toujours le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient l'unité. Or cette unité doit être bien considérée & déterminée dans l'opération.

II°. Qu'on propose cet exemple, sçavoir, combien doit coûter un ouvrage de 4 toises, 5 pieds, 8 pouces, à trois liv. 2 sols, 4 den. la toise. Pour résoudre la question, il faut multiplier 4 toises 5 pieds 8 pouces, par 3 liv. 2 sols 4 den. Or il est clair que l'unité que l'on doit considérer dans le multiplicande, est la toise; car c'est la toise, & non le pied, ou le pouce, qui est supposée coûter 3 liv. 2 sols 4 deniers. Maintenant pour faire cette opération, il faut réduire les termes, tant du multiplicande que du multiplicateur, à leurs plus petites espèces; c'est-à-dire, il faut tout réduire en deniers, s'il s'agit de livres, sols & deniers; il faut tout réduire en pouces, s'il s'agit de toises, pieds & pouces: on aura donc dans l'exemple précédent pour multiplicande & pour multiplicateur,

356 pouces,
748 deniers.

III°. Il faut multiplier l'un par l'autre, le multiplicande & le multiplicateur ainsi réduits: & l'on aura un produit exprimé en la plus petite espèce du multiplicateur, sçavoir, en deniers; ce produit sera 266238 deniers.

IV°. Il faudra diviser le produit trouvé par le nombre de fois que la plus petite espèce du multiplicande est contenue dans la plus grande; c'est-à-dire, dans l'exemple précédent par le nombre 72, qui exprime combien de fois le pouce est contenu dans la toise, & l'on aura le quotient 3698, avec le reste $\frac{32}{72}$, que l'on peut négliger, parce qu'il ne vaut pas un denier.

V°.

D'ARITHMÉTIQUE. 49

V. Comme le produit ainsi divisé est exprimé en deniers, il faut le réduire en sols, puis en livres; ce qui se fait en divisant la somme des deniers par le nombre de fois que le denier est contenu dans le sol, & la somme des sols par le nombre de fois que le sol est contenu dans la livre.

DÉMONSTRATION. La raison de toutes ces opérations est claire; il ne peut y avoir de difficulté que pour le quatrième article, & dont voici la raison. Puisque l'unité que l'on considère dans le multiplicande est la toise, il s'ensuit que le nombre 356, qui exprime des pouces, n'exprime que des parties ou fractions de l'unité, sçavoir, de la toise; donc le multiplicande 356, selon son expression naturelle, doit être $\frac{356}{72}$: or $\frac{356}{72} \times 748 = \frac{266288}{72} = 3698$; donc, &c.

PROBLÈME IV.

95. *Faire la division des Nombres complexes.*

SOLUTION. I°. Le principe de cette opération est que le quotient est toujours contenu dans le dividende, autant de fois que l'unité est contenue dans le diviseur (49); d'où il suit que lorsque le diviseur est plus grand, ou égal, ou plus petit que l'unité, alors le quotient est plus petit, ou égal, ou plus grand que le dividende.

II°. Qu'on propose cet exemple, 7 marcs & 2 onces d'argent ayant coûté 346 liv. 18 sols 6 deniers; à combien revient le marc? Pour résoudre la question, il faut diviser 346 livres 18 sols 6 den. par 7 marcs & 2 onces. Or il est évident que l'unité que l'on doit considérer dans le diviseur, est le marc; car c'est le prix du marc & non de l'once, ou de &c. que l'on cherche. Cela posé, il faut réduire le diviseur à la plus petite espèce qu'il contient, c'est-à-dire, en onces; & commençant la division par les plus grandes espèces du dividende, on aura le quotient 5 livres, 19 sols, 7 deniers.

liv.	fols.	den.	
346	18	6	58 onces.
			liv. fols. den.
			5 19 7

avec le reste $\frac{12}{18}$, que l'on peut négliger, parce qu'il ne vaut pas un denier.

III°. Il faut multiplier le quotient par le nombre qui exprime combien de fois la plus petite espèce du diviseur est contenue dans la plus grande, & le produit qui en résultera, sera le véritable quotient.

DÉMONSTRATION. La raison de ces opérations ne peut souffrir aucune difficulté, si ce n'est par rapport au troisième article, & dont voici la raison: si j'ai à diviser, *par ex*: 3 liv. 12 sols par un marc & 4 onces; ou, (réduisant le dividende & le diviseur à leurs plus petites espèces) si j'ai à diviser 72 sols par 12 onces; il est clair que le quotient 6 qui en résulte, doit être multiplié par 8, (lequel nombre exprime combien de fois l'once est contenue dans le marc) pour avoir le résultat 48 sols, lequel exprimera le prix du marc. Car puisque l'unité que l'on considère dans le diviseur est le marc; il s'ensuit que le diviseur 12 n'exprime que des parties ou fractions de cette unité: donc le diviseur, selon son expression naturelle, doit être $\frac{12}{8}$; or (88) 72 divisé par $\frac{12}{8} = \frac{72 \times 8}{12} = \frac{576}{12} = 48$: donc, &c.

Remarque.

96. Lorsqu'après avoir divisé une espèce du dividende, il se trouve un reste; il faut réduire ce reste aux petites espèces que contient immédiatement le dividende, & diviser ce reste ainsi réduit par le diviseur. Dans l'exemple ci-dessus après avoir divisé 346 livres par 58 onces, on trouve le reste 56 livres; lequel ne pouvant être divisé par 58, doit être réduit en *sols*, auxquels ajoutant les 18 *sols* du dividende, il vient 1138 *sols*, qu'il faut diviser par le diviseur; & ainsi du reste.

CHAPITRE II.

Du Calcul des Lettres, ou l'Algèbre.

L'ALGÈBRE est un Calcul qui a pour objet les quantités indéterminées, de même que l'Arithmétique est le calcul qui a pour objet les quantités déterminées. Les quantités ou grandeurs déterminées sont représentées, comme nous l'avons dit, par les caractères ou chiffres 1, 2, 3, &c. auxquels on a donné des valeurs précises & qu'il n'est plus permis de changer. Mais les grandeurs indéterminées sont représentées par des caractères qui n'ont aucune valeur fixe, & qui n'ont que celle qu'on leur donne pour le moment & dans l'opération actuelle, pouvant en avoir une toute différente & même opposée dans une autre opération.

P R I N C I P E.

97. Si j'avois à combiner, *par ex* : les grandeurs 3 & 4, pour en avoir la somme $3 + 4 = 7$, il est clair :

I°. Qu'il m'est permis de représenter les grandeurs 3, 4, 7, par tels autres signes, ou caractères qu'il me plaira, différens des chiffres, *par ex* : par les lettres a, b, c , & qu'en ce cas la somme $3 + 4 = 7$ sera représentée sous un autre expression, sçavoir, $a + b = c$.

II°. Que les lettres a, b, c , pourroient aussi bien représenter les quantités 5, 7, 12, que les quantités 3, 4, 7, & par conséquent que l'expression $a + b = c$ peut indifféremment représenter, soit la somme $3 + 4 = 7$, soit la somme $5 + 7 = 12$, soit telle autre somme que l'on voudra.

III°. Que toutes ces suppositions sont possibles, & qu'elles sont fondées sur ce que les lettres a, b, c, d , &c. n'ayant aucune valeur, & ne signifiant rien par elles-mêmes, je puis leur donner telle valeur & telle signification que je voudrai. C'est pourquoi l'expression $a + b = c$, représente bien une somme plutôt qu'une différence ou un produit, ou &c.; mais une somme de quantités dont la valeur n'est pas précise, mais a besoin d'une détermination particulière, laquelle est différente suivant l'exigence des cas.

D É F I N I T I O N S,

I.

98. Les grandeurs qui sont représentées par les lettres de l'alphabet, a, b, c, d, e, f , &c. ou par tel autre signe de cette nature, s'appellent *Grandeurs indéterminées*: les lettres de l'alphabet qui représentent ces grandeurs, & qui en sont comme le symbole & l'expression, s'appellent *Quantités algébriques*; & le calcul qui opère sur les grandeurs ainsi exprimées, s'appelle *Algèbre*, ou *Calcul Algébrique*.

I I,

99. Lorsque les grandeurs sur lesquelles on opère, sont connues, on les représente par les premières lettres a, b, c, d , &c. Lorsqu'elles sont inconnues, on les représente par les dernières lettres x, y, z . Or les lettres de l'alphabet combinées les unes avec les autres par le moyen des signes $+$ & $-$, & d'autres dont nous allons parler, donnent en Algèbre des *Termes*, des *Sommes*, des *Différences*, des *Produits*, des *Quotiens*, de même que les nombres en Arithmétique,

I I I,

100. On appelle *Terme algébrique* une lettre, ou même plusieurs lettres jointes ensemble, mais sans interposition des signes $+$ ou $-$; par ex. a, b ,

ab , abc , &c. sont des termes algébriques. On appelle Termes *positifs* ceux qui sont précédés du signe $+$, & Termes *negatifs* ceux qui sont précédés du signe $-$. Dans la quantité $a + ab - abc - bc + acd$, il y a trois termes positifs, & deux termes négatifs.

Lorsqu'un terme n'est précédé d'aucun signe, alors il est censé avoir le signe $+$.

I V.

101. On appelle Quantités simples ou complexes celles qui n'ont qu'un terme, & Quantités complexes, celles qui ont plusieurs termes, comme $ab - bc$; $a - b + abc$; &c. La quantité simple s'appelle autrement *Monôme*, la quantité complexe s'appelle ou *Binôme*, ou *Trinôme*, ou *Quadrinôme*, &c. suivant qu'elle est composée ou de deux, ou de trois, ou de quatre termes, &c. En général on appelle *Polynôme* une quantité composée de plusieurs termes.

V.

102. On appelle Termes *semblables*, ceux dans lesquels toutes les lettres de l'un se trouvent précisément dans l'autre, ou dans les autres, & écrites chacune un même nombre de fois; *par ex.*: dans la quantité $ab - ab + 3ab + abcd + 2bc$, les trois premiers termes sont semblables.

Remarque I.

103. Observez que les termes négatifs sont appelés tels, non parce que ce seroient de pures négations, ou des zero, mais parce qu'ils ont des fonctions opposées à celle des termes positifs: la fonction de ceux-ci consistant à être ajoutés, celle de ceux-là à être retranchés, ce qui est représenté par les signes contraires $+$ & $-$.

En effet, *par ex.*: si l'on imprime à un même corps 12 degrés de vitesse vers l'orient, & 8 degrés vers l'occident, la vitesse vers l'orient étant

exprimée par $+ 12$, la vitesse vers l'occident, étant en sens opposé, fera par conséquent $- 8$, ce qui donnera $+ 12 - 8 = + 4$ degrés de vitesse vers l'orient; si la première étant $+ 12$, la seconde eut été $- 12$, on auroit eu $+ 12 - 12 = 0$, c'est-à-dire, que la vitesse eut été nulle, ou que le corps seroit resté en repos: si la vitesse vers l'orient étant $+ 12$, la vitesse vers l'occident étoit $- 18$, on auroit $+ 12 - 18 = - 6$ degrés de vitesse vers l'occident, où il faut remarquer que la quantité négative détruit toujours dans la positive une portion égale à elle-même, & réciproquement, d'où il résulte que le contraste des quantités positives & négatives rend la grandeur quelquefois plus grande, quelquefois égale, quelquefois plus petite que 0, selon que les quantités positives sont ou plus grandes, ou égales, ou plus petites que les négatives.

Or les quantités négatives servant, comme on le voit, à diminuer les quantités positives, sont par conséquent des quantités réelles & non des zéro: car zéro ajouté ou retranché n'augmente ni ne diminue la grandeur, puisque $3 + 0 = 3$, & $3 - 0 = 3$: les signes $+$ & $-$ qui affectent les quantités algébriques ne désignent donc pas des grandeurs de différente nature, mais seulement des fonctions opposées de ces grandeurs; ainsi le mouvement vers l'occident étant exprimé dans le troisième cas par $- 6$, sera une quantité négative par rapport au mouvement vers l'orient, non parce qu'il n'est pas mouvement réel, mais parce qu'il est mouvement en sens opposé.

Remarque I I.

104. Les lettres ne pouvant se combiner les unes avec les autres, comme les chiffres; on est obligé, pour abrégé le discours, de se servir de quelques signes, qui sont:

Le signe $+$, ou d'addition, qui signifie *plus*,

par ex : $a + b$, signifie *a plus b*, ou que la quantité b est ajoutée à la quantité a .

Le signe $-$, ou de soustraction, qui signifie *moins*, par ex : $a - b$, signifie *a moins b*, ou que b est retranché de la quantité a .

Le signe \times , ou de multiplication, qui signifie *multipliant*, par ex : $a \times b$, signifie *a multipliant b*, ou que b est multiplié par a .

Le signe $:$, ou de division, lequel signifie *divisé par*, $a : b$, signifie que a est divisé par b ; au lieu de $a : b$, on met aussi $\frac{a}{b}$.

Le signe $=$, ou d'égalité, qui signifie *égal à*, par ex : $a = b$, signifie que a est égal à b .

Le signe $<$, qui signifie *moindre que*, par ex : $a < b$, signifie que a est moindre que b .

Le signe $>$, qui signifie *plus grand que*, ainsi $a > b$, signifie que a est plus grand que b .

Le signe ∞ , qui signifie *infini*, par ex : ∞a , signifie que la quantité a est infinie.

Le signe radical $\sqrt{\quad}$, qui signifie *la racine de*, par ex : \sqrt{a} signifie la racine de a .

Les lettres de l'alphabet n'ayant par elles-mêmes aucune valeur, il est libre de faire signifier à ces lettres telles grandeurs ou quantités que l'on voudra; mais il faut observer que lorsqu'on a une fois donné à une lettre une valeur ou une signification dans une opération, il faut toujours la lui conserver dans la suite de cette opération.

Les quantités algébriques sont susceptibles des mêmes opérations que les quantités numériques; nous en allons parler.

ARTICLE I.

De l'Addition & de la Soustraction Algébrique.

RÈGLE I.

105. Les Géomètres ajoutent les quantités algébriques, en les écrivant à côté les unes des au-

tres, sans rien changer aux signes dont elles sont affectées. Pour ajouter $+a$ & $+b$, on écrit simplement $a + b$; pour ajouter abc , $+ab$, $-acd$, on écrit $abc + ab - acd$, & ainsi du reste.

Corollaire.

106. Dans l'addition il se fait quelquefois une véritable soustraction; *par ex*: quand on ajoute ensemble la quantité positive $+ab$, & la négative $-bc$, pour avoir la somme $ab - bc$, on soustrait réellement la quantité bc de la quantité ab ; d'où il suit qu'en Algèbre c'est une même chose d'ajouter une quantité négative, ou de retrancher une quantité positive.

R E G L E I I.

107. La soustraction algébrique se fait en écrivant les quantités algébriques à côté l'une de l'autre, & en changeant les signes de la quantité que l'on soustrait, les $+$ en $-$, & les $-$ en $+$; *par ex*: pour soustraire $+a$ de $+b$, on écrit $b - a$; pour soustraire $-b$ de $+c$, on écrit $c + b$; pour soustraire $ab - cd$ de la quantité $bc + cd$, on écrit $bc + cd - ab + cd$: la raison en est, que

I°. Lorsqu'on soustrait une quantité positive $+b$, d'une grandeur quelconque $+a$, celle-ci est diminuée de toute la quantité que l'on soustrait; on doit donc écrire $a - b$.

II°. Celui qui soustrait une quantité négative $-b$ d'une grandeur quelconque $+a$, augmente cette dernière de toute la quantité b ; on doit donc écrire $a + b$.

Corollaire I.

108. La soustraction algébrique est quelquefois une véritable addition; car lorsque la quantité que l'on soustrait est négative, on ajoute réellement une quantité positive; *par ex*: si de ab on soustrait $-bc$, pour avoir la différence $ab + bc$, on ajoute réellement la quantité bc à la quantité

ab : d'où il suit qu'en Algèbre c'est une même chose de soustraire une quantité négative, ou d'ajouter une quantité positive.

Corollaire I I.

109. En général c'est une même chose en Algèbre de soustraire $+$, ou de donner $-$; de soustraire $-$, ou de donner $+$.

R È G L E I I I.

110. Pour abrégér l'expression algébrique, au lieu de $a + a$, on écrit $2a$: car comme dans les nombres, $4 + 4$ est la même chose que deux fois 4, ou $2 \times 4 = 8$; de même pour les lettres, $a + a$ est la même chose que deux fois a , ou $2 \times a = 2a$. Par la même raison, au lieu de $a + a + a$, on écrit plus brièvement $3a$; on aura de même $+3a + a = 4a$; on a aussi $4a + 3a = 7a$; $b + b + b - ac - ac = 3b - 2ac$; & ainsi des autres.

Ce chiffre qui précède un terme algébrique, s'appelle *Coefficient*, & sert à exprimer combien de fois le même terme doit être écrit, soit avec le signe $+$, soit avec le signe $-$; ou plutôt combien de fois il doit être, ou ajouté, ou retranché. Cette méthode d'abrégér les expressions algébriques s'appelle *Réduction*, & elle a lieu toutes les fois que les termes sont semblables. De-là

I°. Il suit que $2a + 4a$ se réduisent à $6a$; pareillement que $-a - 2a - 5a$ se réduisent à la quantité $-8a$: c'est pourquoi, lorsque les signes des termes semblables sont les mêmes, la réduction se fait en ajoutant les coefficients.

II°. Mais les termes $+a - a$ se détruisent & deviennent zero, parce qu'une grandeur retranchée d'elle-même, devient nulle; d'où il suit que $5a - 2a$ se réduisent à $3a$; que $9ab - 5ab$ se réduisent à $4ab$; que $-5ac + ac$ deviennent $-4ac$; c'est pourquoi, lorsque les signes des termes semblables sont différens, la réduction se fait en retranchant le plus petit coefficient du plus grand.

Remarque I.

111. Tout terme algébrique qui n'a point de coefficient, est toujours censé avoir l'unité pour coefficient.

Remarque II.

112. Observez qu'après l'addition & la soustraction, & généralement après toute opération algébrique, il faut réduire les termes semblables, s'il s'en trouve, afin d'abrégier l'expression.

ARTICLE II.

De la Multiplication & de la Division algébrique.

R E G L E I.

113. La multiplication algébrique se fait en joignant le multiplicande & le multiplicateur par le signe de multiplication: pour multiplier a par b , on écrit $a \times b$, ou plus simplement ab ; car en Algèbre $a \times b$ est la même chose que ab ; parce qu'en Algèbre on est convenu que, lorsque deux ou plusieurs lettres se trouveroient écrites à côté les unes des autres sans interposition de signes, elles seroient censées multipliées les unes par les autres: pareillement $ab \times ab = aabb$; observant pour l'ordre & la clarté de ranger les lettres suivant l'ordre alphabétique. Or:

I°. Si le multiplicande & le multiplicateur sont des quantités complexes; il n'y a nulle difficulté, comme nous venons de le voir.

II°. Si le multiplicande est une quantité complexe, & le multiplicateur une quantité complexe, il faudra multiplier chaque terme du multiplicande par le multiplicateur; par ex: $a + b$ multiplié par c donne le produit $ac + bc$, laquelle opération s'indique & s'effectue de cette manière, $\overline{a+b} \times c = ac + bc$.

La ligne qui est au-dessus de la quantité $a + b$ signifie que tous les termes qui sont joints par cette ligne, sont soumis à la même opération;

c'est-à-dire, que dans cet exemple ils doivent être multipliés tous deux par le terme c .

III°. Si le multiplicande & le multiplicateur sont des quantités complexes, on opere comme dans les nombres; c'est-à-dire, on multiplie tout le multiplicande par chaque terme du multiplicateur: *par ex*: $a + b$ multiplié par $a + b$ donne le produit $aa + ab + ab + bb$; ce qui s'exprime en style algébrique de cette maniere $\overline{a+b} \times \overline{a+b} = aa + ab + ab + bb = aa + 2ab + bb$; dans laquelle expression on doit remarquer que le premier membre est l'opération indiquée, le second est l'opération effectuée, & le troisième est l'opération réduite.

R È G L E I I.

114. Si les termes que l'on multiplie sont affectés de coefficients, on multiplie les coefficients les uns par les autres; *par ex*: $3a$ multiplié par $2b$, donne $6ab$, ou, ce qui est le même, $3a \times 2b = 6ab$; la raison en est que $3a = a + a + a$, comme on l'a dit (110), pareillement $2b = b + b$; or, $\overline{a+a+a} \times \overline{b+b}$ donne $ab + ab + ab + ab + ab + ab = 6ab$, (110) donc, &c.

Corollaire.

115. Si on multiplie une quantité par elle-même; *par ex*: a par a , on aura $a \times a = aa$, & pour abrégér, au lieu de aa on écrit a^2 . Ce chiffre 2. que l'on met au-dessus de la lettre à droite, s'appelle *Exposant*, & sert à marquer combien de fois la même lettre doit être écrite à côté d'elle-même; pareillement au lieu de aaa on écrit a^3 ; on aura par la même raison $bb = b^2$; $aabbbcc = a^2 b^3 c^2$, & ainsi du reste.

Remarquez qu'il y a de la différence entre le coefficient & l'exposant; *par ex*: entre $4a$ & a^4 ; car $4a = a + a + a + a$ (110) ce qui donne une somme, au lieu que $a^4 = aaaa$ ce qui donne un produit (113). Le coefficient dénote une addition,

& l'exposant une multiplication ou une exaltation.

Remarquez aussi que dans les quantités algébriques toute lettre qui n'a point d'exposant, est censée avoir l'unité pour exposant.

R E G L E I I I.

116. Si les quantités que l'on multiplie, sont exprimées par les mêmes lettres affectées d'exposans, on abrège l'opération, en ajoutant les exposans; *par ex*: $a^3 \times a^2$ donne a^5 ; la raison est que $a^3 = aaa$ & $a^2 = aa$, or $aaa \times aa = aaaaa = a^5$.

R E G L E I V.

117. Lorsque les signes du multiplicande & du multiplicateur sont les mêmes, le produit doit avoir le signe +, & lorsqu'ils sont différens, le produit doit avoir le signe —; en effet

I°. Si le multiplicande & le multiplicateur ont tous les deux le signe +, le produit doit avoir le signe +, *par ex*: $+a \times +b = +ab$; car une quantité positive multipliée par une quantité positive doit donner un produit positif, comme il est évident, ou $+ \times + = +$.

II°. Si le multiplicande a le signe +, & le multiplicateur le signe —, le produit doit avoir le signe —, *par ex*: $+a \times -b = -ab$: la raison en est sensible dans les nombres; car, *par ex*: $\frac{5}{3} \times 6 = 30 - 18$, ce qui donne 12, & non pas $= 30 + 18$, ce qui donneroit 48; car le multiplicande $\frac{5}{3} = 2$, or $2 \times 6 = 12$.

Ce seroit la même chose si le multiplicande avoit le signe — & le multiplicateur le signe +; car dans la multiplication l'une ou l'autre des quantités que l'on multiplie peut être indifféremment prise, soit pour multiplicande, soit pour multiplicateur; c'est pourquoi $- \times +$, ou $+ \times -$.

III°. Si le multiplicande & le multiplicateur

D'A L G E B R E.

ont tous les deux le signe $-$, le produit doit avoir le signe $+$; *par ex* : $-a \times -b = +ab$: la raison est sensible dans les nombres ; car $\frac{6-2}{4-2} \times \frac{4-2}{4-2} = 2 \times 4 = 8 = 12 + 4$, ce qui donne 8, où l'on voit que le produit de -2 par -2 donne $+4$, & non pas -4 ; en effet le multiplicande $6 - 2 = 4$, de même le multiplicateur $4 - 2 = 2$: or $4 \times 2 = 8$.

R E G L E V.

118. La division est une opération inverse de la multiplication ; c'est pourquoi, si le dividende & le diviseur sont des quantités complexes.

I°. Comme dans la multiplication, pour avoir le produit de deux quantités complexes, on écrit les lettres du multiplicateur à côté de celles du multiplicande : au contraire dans la division, il faut effacer dans le dividende les lettres qui lui sont communes avec le diviseur, & celles qui y restent donneront le quotient ; *par ex* : l'on a dans la multiplication $a \times b = ab$, & l'on aura au contraire dans la division $\frac{ab}{a} = b$.

II°. Si le dividende & le diviseur sont affectés de coefficients, il faut diviser les coefficients pour une raison contraire à celle pour laquelle on les multiplie dans la multiplication ; *par ex* : $\frac{6ab}{2a} = 3b$.

III°. Si le dividende & le diviseur sont exprimés par les mêmes lettres affectées d'exposans, il faut soustraire les exposans par une raison contraire à celle pour laquelle on les ajoute dans la multiplication ; c'est pourquoi $\frac{a^6}{a^2} = a^6 - 2 = a^4$.

En effet le dividende $a^6 = aaaaaa$, & le diviseur $a^2 = aa$; or effaçant les lettres communes au dividende & au diviseur, il restera pour le quotient $aaaa = a^4 = a^6 - 2$, ce qui se voit d'un

seul coup d'œil dans les expressions suivantes

$$\frac{a^6}{a^2} = \frac{aaaaaa}{aa} = aaaa = a^4 = a^6 - 2.$$

IV°. Si le dividende & le diviseur sont affectés des mêmes signes, le quotient doit avoir le signe +; s'ils ont différens signes, le quotient doit avoir le signe —; comme il est aisé de le voir par

ce seul exemple: $\frac{+ba}{-a} = -b$, & non pas $+b$; car

le quotient doit être tel, qu'étant multiplié par le diviseur, il donne le dividende juste: or pour cela il faut que le quotient soit $-b$.

Remarque.

119. Lorsque le dividende & le diviseur n'ont point de lettres communes, on ne peut point effectuer la division, mais seulement l'indiquer; *par ex.*: on ne peut point effectuer la division de a par b , mais on l'indique seulement, en écrivant

$\frac{a}{b}$. Pareillement si l'on avoit ab à diviser par c , on

écriroit $\frac{ab}{c}$.

Ces divisions indiquées sont autant de fractions algébriques, lesquelles de même que les fractions numériques, prennent leur origine dans la division, comme il est aisé de le voir. Or on fait sur ces fractions algébriques les mêmes opérations & de la même manière que sur les fractions numériques; on peut les transformer, les ajouter, les soustraire, &c. en observant précisément les mêmes règles qui ont été données ci-devant, en parlant des fractions.

Corollaire I.

120. Si le dividende & le diviseur sont des quantités incomplexes, & sont les mêmes lettres affectées d'exposans, il peut arriver,

I°. Que l'exposant du dividende soit plus grand

que l'exposant du diviseur, & alors l'exposant du quotient sera positif; par ex: $\frac{a^5}{a^2} = a^3$, parce que

$$\frac{a^5}{a^2} = a^5 - 2 = a^3.$$

II°. Que l'exposant du dividende & celui du diviseur soient égaux, & dans ce cas l'exposant du quotient sera zero; par ex: $\frac{a^3}{a^3} = a^0$, parce

$$\frac{a^3}{a^3} = a^3 - 3 = a^0.$$

III°. Que l'exposant du dividende soit plus petit que celui du diviseur, & alors l'exposant du quotient sera négatif; par ex: $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$, car

$$\frac{a^2}{a^5} = a^2 - 5 = a^{-3}.$$

R E G L E V I.

121. Si le dividende est une quantité complexe, & le diviseur une quantité incomplète, il faut diviser chaque terme du dividende par la quantité incomplète, & chaque fois écrire le quotient, lequel doit être multiplié aussi chaque fois par le diviseur pour en retrancher le produit du dividende, comme dans la division numérique, afin de connoître le reste, s'il y en a un; par ex: si j'ai la quantité $8abbc - 12abcc + 4bbcf$ à diviser par $4bc$.

$$\left. \begin{array}{r} 8abbc - 12abcc + 4bbcf \\ \hline - 8abbc + 12abcc - 4bbcf \end{array} \right\} \frac{4bc}{2ab - 3ac + bf}$$

I°. Je divise le premier terme $8abbc$ par le diviseur $4bc$, & effaçant les lettres communes à l'un & à l'autre j'ai pour quotient $2ab$. Je multiplie le quotient trouvé par le diviseur, & j'ai le produit

+ $8abc$, que je soustrais du dividende, en changeant son signe de + en -; puis faisant la réduction, j'efface les deux termes $8abc$ & $-8abc$, qui se détruisent, ce que je désigne en écrivant 0 au-dessus de ces termes.

II°. Je divise le second terme $-12abc$ par le diviseur $4bc$, & faisant les mêmes opérations que ci-dessus, j'ai pour quotient $-3ac$, & après la réduction des termes semblables, il ne reste plus que $-4bbcf$.

III°. Divisant ce terme $+4bbcf$ par le diviseur, j'ai pour quotient $+bf$, & après la réduction il ne reste rien, & l'opération est finie.

R E G L E V I I.

122. Si le dividende & le diviseur sont tous les deux des quantités complexes, on opere comme dans la division numérique, observant seulement de plus qu'il faut employer la réduction des termes semblables chaque fois que l'on a opéré sur un membre de division; par ex. si l'on veut diviser $6abb - 2bbc - 3aab + abc$ par $2b - a$, après avoir disposé les quantités comme il suit;

$$\begin{array}{r} \overset{\circ}{6}abb - \overset{\circ}{2}bbc - \overset{\circ}{3}aab + \overset{\circ}{abc} \\ \hline \mp \overset{\circ}{6}abb \pm \overset{\circ}{3}aab \pm \overset{\circ}{2}bbc \mp \overset{\circ}{abc} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{r} 2b - a \\ \hline 3ab - bc \end{array}$$

Il faut :

I°. Diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, & on aura le quotient $3ab$, qu'il faut écrire sous le diviseur.

II°. Multiplier le quotient trouvé $3ab$ par le diviseur $2b - a$, ce qui donne le produit $6abb - 3aab$, qu'il faut écrire sous le dividende.

III°. Soustraire du dividende le produit que l'on vient d'écrire, en changeant les signes, ce qui donne $-6abb + 3aab$.

IV°. Faire la réduction des termes qui se trouvent semblables dans le dividende & dans le pro-

duit soustrait, & effacer les termes qui se détruisent, ou mettre un point ou un zero dessus.

V°. Cela fait, il reste dans cet exemple les termes $-2bbc + abc$ au dividende, qui font le second membre de division, sur lequel on doit opérer comme sur le premier; & comme après la réduction des termes semblables il ne reste plus rien, la division est achevée.

ARTICLE III.

De l'Exaltation & de l'Extraction algébrique.

L'Exaltation algébrique, de même que la numérique, est une opération, dans laquelle on élève une quantité à une puissance quelconque. L'extraction algébrique est une opération, dans laquelle on cherche la racine d'une puissance algébrique proposée. Nous parlerons 1°. de l'exaltation & de l'extraction pour les quantités complexes: 2°. de l'exaltation & de l'extraction pour les quantités complexes.

PARAGRAPHE I.

De l'Exaltation & de l'Extraction des Quantités complexes.

RÈGLE I.

123. Pour élever une quantité algébrique complexe à une puissance quelconque, il faut la multiplier (71) par elle-même autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance; *par ex.*: pour avoir la seconde, la troisième, la quatrième, &c. puissance de a , il faut multiplier a par lui-même une fois, deux fois, trois, &c. & l'on aura la seconde puissance aa , ou a^2 ; la troisième aaa , ou a^3 ; la quatrième $aaaa$, ou a^4 .

Corollaire.

124. D'où il suit évidemment;

1°. Que l'on peut élever tout d'un coup une quantité algébrique complexe qui n'a point d'exposant écrit, à une puissance quelconque, en

l'affectant d'un exposant qui exprime le degré de la puissance, *par ex* : la sixième puissance de a est a^6 ; de ab est $a^6 b^6$; de cd est $c^6 d^6$.

II°. Que pour élever à une puissance quelconque une quantité affectée d'un exposant, il n'y a qu'à multiplier l'exposant de la quantité par l'exposant de la puissance ; *par ex* : pour élever a^2 , à la troisième puissance, l'on écrit $a^{2 \times 3} = a^6$; la raison en est que la troisième puissance de a^2 est, comme nous venons de le dire, $a^2 \times a^2 \times a^2$; or $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2}$ (116) $= a^6$.

III°. Qu'en général pour élever à une puissance quelconque une quantité incomplexes, affectée, ou non, d'un exposant, la règle sera toujours de multiplier l'exposant de la quantité par l'exposant de la puissance : car une quantité telle que a qui n'a point d'exposant écrit, a cependant l'unité pour exposant, & est a^1 ; c'est pourquoi, lorsque pour l'élever à la deuxième, troisième, &c. puissance, vous écrivez a^2 , a^3 , &c. c'est la même chose que si vous écriviez $a^{1 \times 2}$, $a^{1 \times 3}$, &c. ce qui donne a^2 , a^3 , &c.

R È G L E I I.

125. L'extraction des racines est une opération inverse de l'exaltation : c'est pourquoi, puisque pour élever une quantité à une puissance, il n'y a qu'à multiplier son exposant par l'exposant de la puissance ; pour extraire une racine quelconque, il n'y aura au contraire qu'à diviser l'exposant de la puissance donnée par l'exposant de la racine que l'on cherche ; *par ex* : la troisième puissance de a , ou a^3 , est $a^{1 \times 3} = a^3$; & au contraire la racine troisième de a^3 , sera $a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$; pareillement la racine seconde de a^3 sera $a^{\frac{3}{2}}$, & ainsi du reste.

Corollaire I.

126. Il suit de ce que nous venons de dire, que,

comme les puissances sont indiquées ou représentées par des exposans qui sont des nombres entiers, de même les racines peuvent être indiquées ou représentées par des exposans fractionnaires; par *ex*: les racines première, seconde, troisième, &c. de a , ou a^1 , seront $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{5}}$, $a^{\frac{1}{6}}$, &c.

On peut aussi indiquer ou représenter les racines, en se servant simplement du signe radical $\sqrt{\quad}$, & en affectant ce signe de l'exposant de la racine; par *ex*: les racines première, seconde, troisième, &c. de la quantité a , ou a^1 , peuvent se représenter par

$$\sqrt[1]{a}, \sqrt[2]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}, \sqrt[6]{a}, \sqrt[7]{a}, \&c.$$

Remarquez 1°. que lorsque le signe radical n'est affecté d'aucun exposant, il indique alors toujours la seconde puissance.

Remarquez 2°. que la première méthode d'exprimer les racines est plus commode, parce qu'elle les assujettit au calcul, de même que les quantités ordinaires.

Corollaire I I.

127. Comme il est permis de représenter une racine de deux manières; savoir, ou en donnant à la quantité un exposant fractionnaire, ou en lui donnant le signe radical avec un exposant qui soit un nombre entier; de même on pourra aussi représenter une puissance de deux manières; savoir, ou en lui donnant un exposant qui soit un nombre entier, ou en lui donnant le signe radical affecté d'un exposant fractionnaire: ainsi l'on peut exprimer la suite de toutes les puissances consécutives de a , ou a^1 , en commençant par la puissance zero, dans cet ordre.

$a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, \&c.$
ou bien,

$$\sqrt[0]{a}, \sqrt[1]{a}, \sqrt[2]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}, \sqrt[6]{a}, \sqrt[7]{a}, \sqrt[8]{a}, \&c.$$

128. Lorsqu'on ne peut pas extraire la racine juste d'une quantité donnée telle que a , on se contente de l'indiquer en affectant la quantité du signe radical $\sqrt{\quad}$ affecté lui-même de l'exposant de la racine cherchée. Dans ce cas les quantités qui sont affectés du signe $\sqrt{\quad}$, s'appellent quantités *radicales*, ou simplement *radicaux*; or l'on voit évidemment que les radicaux prennent leur origine dans l'extraction, de même que les fractions dans la division. C'est pourquoi les radicaux sont par rapport à l'extraction, ce que les fractions sont par rapport à la division; c'est-à-dire, que les radicaux sont ou des extractions indiquées, ou des restes après l'extraction, de même que les fractions sont des divisions indiquées, ou des restes après la division.

Remarque.

129. Lorsqu'on trouve dans le calcul des quantités affectées du signe $\sqrt{\quad}$, ces quantités s'appellent quantités *radicales*, ou simplement *radicaux*, comme nous venons de le dire. Les quantités qui suivent le signe $\sqrt{\quad}$, s'appellent grandeurs *sous le signe*; & celles qui précèdent le signe, s'appellent *coefficiens* du signe; le nombre qui est au-dessus du signe $\sqrt{\quad}$, s'appelle *exposant* du radical: si ce nombre est entier, la quantité affectée du signe $\sqrt{\quad}$ est une racine; & si ce nombre est fractionnaire, la quantité est une puissance.

PARAGRAPH E II.

De l'Exaltation & de l'Extraction des Quantités complexes.

Nous allons parler, 1°. De la formation des puissances des quantités complexes; 2°. De l'extraction de leurs racines.

NOMBRE I.

De la Formation des Puissances des Quantités complexes.

I°. Si l'on veut seulement indiquer la puissance d'une quantité complexe, par ex : $a + b$, on écrit simplement $\overline{a+b}^2$ pour la seconde puissance, $\overline{a+b}^3$ pour la troisième puissance, & ainsi du reste.

II°. Si l'on veut atteindre à la puissance réelle de la quantité, il faudra multiplier cette quantité par elle-même autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance, comme le prescrit (123) la règle générale.

C'est pourquoi la première puissance de $a + b$ est $a + b$, ou $\overline{a+b} \times 1 = a + b$.

La seconde puissance de $a + b$ est $\overline{a+b} \times \overline{a+b} = a^2 + 2ab + b^2$.

La troisième puissance de $a + b$ est $\overline{a+b} \times \overline{a+b} \times \overline{a+b} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & ainsi du reste.

III°. Mais, sans avoir recours à ces multiplications répétées, on peut former immédiatement, & trouver tout d'un coup les différentes puissances d'une quantité complexe; & pour cela il ne s'agit que de connaître les parties & les circonstances qui concourent à la formation de la puissance, lesquelles sont le nombre des termes, les signes, les exposans, & les coefficients. Or les propositions & les règles suivantes nous donneront la méthode, que nous allons appliquer à une binôme quelconque $a + b$.

IV°. On pourra raisonner des autres quantités complexes, trinômes, quaternômes, &c. comme du binôme $a + b$; car toute quantité complexe, telle que le trinôme $a + b + c$, peut être regardée comme binôme, ou comme n'étant composée que de deux termes, dont le premier seroit $\overline{a+b}$, & le second $+c$.

RÈGLE I.

130. Toute puissance contient autant de ter.

mes, & un de plus, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance; la seconde puissance $a^2 + 2ab + b^2$ de $a + b$, contient trois termes; la troisième puissance $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ en contient quatre; la quatrième puissance $a^4 + 4a^3b$, &c. en contient cinq, & ainsi du reste.

La raison en est que dans toute puissance considérée comme *produit*, le nombre des termes est égal au produit du nombre des *facteurs* multiplians, par le nombre des *facteurs* multipliés; mais dans la puissance considérée comme *quantité algébrique*, la réduction des termes semblables diminue le nombre des termes & le réduit dans la seconde puissance à trois, sçavoir, $a^2 + 2ab + b^2$; dans la troisième puissance à quatre $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; dans la quatrième puissance, &c.

Corollaire I.

131. Dans toute puissance, si l'on ordonne les termes par rapport à une lettre, *par ex* : à la lettre a , le nombre des termes sera déterminé par les puissances consécutives de cette lettre a ; comme on le voit évidemment,

dans le quarré, $a^2 + 2ab + a^0 b^2$

dans le cube, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^0 b^3$;

& de même dans toutes les autres puissances du binôme $a + b$.

Corollaire II.

132. Par conséquent, lorsqu'on a la puissance d'une quantité complexe quelconque, soit *binôme*, soit *trinôme*, soit, &c. on peut, en ordonnant les termes par rapport à une même lettre a , écrire les uns sous les autres tous les termes dans lesquels la lettre a se trouvera élevée à une même puissance, *par ex* : la puissance $a^2 + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$ s'écrira de cette manière :

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + bb \\ + 2ac + cc \\ + 2bc. \end{array}$$

Car les termes où la lettre a se trouve élevé à une même puissance, ne sont censés former qu'un seul & même terme a , ou a^2 , ou a^3 , ou &c. lequel est multiplié par une quantité complexe, qui s'appelle le coefficient de ce terme a , ou a^2 , ou a^3 , ou, &c. Dans l'exemple ci-dessus la quantité $2ab + 2ac$ n'est autre chose que le terme a multiplié par le coefficient $2b + 2c$. Il faut dire la même chose de tous les autres termes.

R E G L E I I.

133. Lorsque les termes du binôme racine sont tous les deux affectés du signe $+$, ou que l'on a, *par ex* : $a + b$, tous les termes de la puissance sont affectés du signe $+$; car $+ \times + \times + \times +$, &c. $= +$.

Lorsqu'ils sont affectés, l'un du signe $+$, & l'autre du signe $-$, ou que l'on a, *par ex* : $a - b$; alors les termes de la puissance sont alternativement affectés des signes $+$ & $-$; car les puissances de la lettre b étant alternativement paires & impaires, tous les termes où ces puissances seront paires, auront le signe $+$; car $- \times - = +$; & tous les termes où ces puissances seront impaires, auront le signe $-$: car $- \times - \times - = -$.

Lorsqu'ils sont tous les deux affectés du signe $-$; alors les puissances paires de la racine auront à tous leurs termes le signe $+$, & les puissances impaires à tous leurs termes le signe $-$.

R E G L E I I I.

134. La première puissance de $a + b$ est $\sqrt{a+b} \times \sqrt{a+b}$; or cette première puissance peut être représentée par $a^1 + b^1$; elle peut aussi être représentée par $a^1 b^0 + a^0 b^1$.

La seconde puissance, ou le carré de $a + b$ est $a^2 + 2ab + b^2$; cette seconde puissance par la même raison peut être représentée par $a^2 b^0 + 2a^1 b^1 + a^0 b^2$.

Il faut faire une remarque semblable pour toutes les autres puissances : d'où il suit

I°. Que l'on trouvera aisément les exposans de tous les termes d'une puissance quelconque d'un binôme, parce que ces exposans croissent & décroissent régulièrement; *par ex* : la sixième puissance de $a + b$ fera

$$a^6b^0 + a^5b^1 + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + a^1b^5 + a^0b^6,$$

où il est à remarquer que dans chaque terme la somme des exposans des deux lettres est toujours égale au degré de la puissance.

II°. Que pour trouver les exposans des termes d'une puissance quelconque, il n'y a qu'à diminuer toujours d'une unité l'exposant de la lettre a , lequel dans le premier terme est égal au degré de la puissance, jusqu'à ce qu'il devienne nul, ou $= 0$, & augmenter celui de b , qui est nul, ou $= 0$, dans le premier terme, jusqu'à ce qu'il devienne égal au degré de la puissance.

R E G L E I V.

135. La première puissance $a + b$ se peut représenter par $1a + 1b$, parce que toute quantité qui n'a pas de coefficient, est censée avoir pour coefficient l'unité; par conséquent les coefficients des termes de la première puissance sont $1 + 1$; la seconde puissance $a^2 + 2ab + b^2$ a pour coefficients $1 + 2 + 1$, la troisième puissance $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ a pour coefficients $1 + 3 + 3 + 1$, & ainsi du reste.

136. Or si l'on ordonne les termes des puissances par rapport à une lettre, *par ex* : a , & si l'on écrit les puissances consécutives les unes sous les autres de cette manière,

I. Puiss.	$1a^1 + 1a^0$
II.	$1a^2 + 2a^1 + 1a^0$
III.	$1a^3 + 3a^2 + 3a^1 + 1a^0$
IV.	$1a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a^1 + 1a^0$
V.	$1a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a^1 + 1a^0$

&c

& ainsi de suite; il est à remarquer que l'on trouvera *par ex* : le coefficient 3 du second terme de la troisième puissance, en ajoutant ensemble les coefficients du second & du premier terme de la seconde puissance, lesquels sont $2+1=3$; on trouvera le coefficient 1 du quatrième terme de la même troisième puissance, en ajoutant le coefficient du quatrième terme de la seconde puissance (lequel terme est zero) au coefficient de son troisième terme qui est 1, ce qui donne $0+1=1$: pareillement on trouvera le coefficient 6 du troisième terme de la quatrième puissance, en prenant la somme des coefficients du troisième & du second terme de la troisième puissance, laquelle somme est $3+3=6$; & ainsi de suite, l'on trouvera toujours le coefficient d'un terme quelconque, en prenant le coefficient du terme qui répond au-dessus & l'ajoutant à celui du terme qui le précède immédiatement vers la gauche.

Cette règle est fondée sur les observations faites des circonstances qui arrivent dans l'exaltation d'un même binôme à ses différentes puissances consécutives.

N O M B R E I I.

De l'extraction des Racines complexes.

Nous allons parler de l'extraction des racines complexes, 1°. pour les quantités algébriques, 2°. pour les quantités numériques.

De l'Extraction des Racines complexes algébriques.

D É F I N I T I O N S.

I.

136. On appelle puissance *parfaite*, celle dont on peut extraire la racine juste, exacte & sans reste: la puissance est dite *imparfaite*, lorsqu'on ne peut point en extraire la racine juste & exacte, mais qu'il se trouve un reste après l'extraction. Nous parlerons sur-tout des puissances parfaites.

D

I I.

137. Toute puissance est en même-tems un *Produit* & une *Somme*. Elle est *produit* en tant qu'elle résulte de la multiplication de racines égales, ou d'une racine multipliée par elle-même un certain nombre de fois. Elle est *somme*, parce que les racines en se multipliant, ont formé un tout composé de parties assemblées, *par ex* : le carré $a^2 + 2ab + b^2$ est le produit des racines $a + b$ & $a + b$, & est la somme des quantités a^2 , $2ab$, b^2 .

I I I.

138. Extraire la racine d'une puissance, c'est décomposer une puissance, ou chercher les parties dont elle est composée comme *produit*, & pour les trouver, il faut connoître les parties dont elle est composée comme *somme*.

I V.

139. Les parties dont une puissance est composée en tant que somme, sont les termes qui combinés avec les signes $+$ & $-$, donnent la puissance : or

I°. La seconde puissance, ou le carré d'un binôme quelconque $a + b$, sçavoir, $a^2 + 2ab + b^2$ renferme trois choses; a^2 , carré du premier terme de la racine; b^2 carré du second terme; & $2ab$ double produit du premier terme de la racine par le second.

II°. La troisième puissance, ou le cube d'un binôme $a + b$, qui est $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, renferme quatre parties; sçavoir a^3 cube du premier terme de la racine, b^3 cube du second terme; $3a^2b$ triple produit du second terme par le carré du premier, & $3ab^2$ triple produit du premier terme par le carré du second.

III°. On peut faire une remarque toute semblable pour les autres puissances, en élevant un binôme quelconque $a + b$ à ses différentes puissances consécutives,

IV°. Ce que nous venons de dire d'un binôme, peut être appliqué à un polynôme quelconque $a+b+c$, pourvu qu'il soit considéré comme étant un binôme $\overline{a+b}+c$: c'est-à-dire que son quarre par ex: renfermera 1°. le quarre du premier terme $\overline{a+b}$, lequel est $a^2+2ab+b^2$; 2°. le quarre du second terme, favoir, c^2 ; 3°. le double produit du premier terme $\overline{a+b}$ par le second c , lequel est $2ac+2bc$.

PROBLÈME.

140. Extraire la Racine quelconque d'une Puissance algébrique.

SOLUTION. Après avoir ordonné les termes de la puissance par rapport à une des lettres, élevez un binôme quelconque, par ex: $a+b$, à une puissance de même degré que celle dont on veut extraire la racine: les puissances de ce binôme $a+b$, lesquelles sont

Seconde... $a^2+2ab+b^2$

Troisième... $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Quatrième... $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$,

& ainsi de suite, serviront de formules, & indiqueront les diviseurs dont il faudra se servir pour trouver chacun des termes de la racine: c'est de l'attention faite à ces formules (dont on connoît les racines) que tout dépend, & nous en allons déduire les règles suivantes.

I°. Pour trouver le premier terme de la racine, il faudra extraire du premier terme de la puissance donnée (qui est ici le dividende) la racine proposée, soit quarrée, soit cubique, soit &c. & l'écrire au quotient. Si le premier terme du dividende n'étoit pas une puissance parfaite, il faudroit prendre la plus grande puissance parfaite contenue dans ce terme, & en extraire la racine, pour l'écrire au quotient.

II°. Pour trouver les autres termes de la racine,

il faudra, 1°. élever le quotient déjà trouvé au degré de la puissance donnée, & le retrancher du dividende pour avoir le reste, s'il y en a un, & ajouter ce reste au terme suivant de la puissance pour en faire un second membre de division. 2°. On divisera ce second membre, ou le second terme de la puissance, (lequel second terme sera quelquefois une quantité incomplexé, comme dans les exemples ci-dessus, & quelquefois une quantité complexé, comme dans l'exemple (n°. 132) on le divisera, dis-je, par l'exposant de la puissance; & encore par la puissance du terme déjà trouvé au quotient, moindre d'un degré que la puissance proposée; c'est-à-dire, que l'on divisera le second membre par l'exposant 2, si on cherche la racine quarrée; par l'exposant 3, si on cherche la racine cubique; par l'exposant 4, si on cherche, &c. & de plus on le divisera encore, ou par la première, ou par la seconde, ou par la troisième, &c. puissance du terme déjà trouvé pour la racine, si l'on opere sur une seconde, sur une troisième, sur une quatrième, &c. puissance; & le quotient qui résultera de cette division, donnera le terme, ou les termes qui restoient à trouver pour la racine.

III°. Ou si l'on veut diviser le second membre tout d'un coup & par une seule opération; le diviseur dont on doit se servir, sera le produit fait de l'exposant de la puissance proposée, par la puissance du terme déjà trouvé, moindre d'un degré que la puissance proposée, & ce diviseur est représenté dans la seconde puissance par $2a$; dans la troisième par $3a^2$; dans la quatrième par $4a^3$, &c. comme on le voit dans les formules ci-dessus.

IV°. Il faudra élever au degré de la puissance donnée toute la quantité trouvée à la racine, pour la soustraire du dividende; & si après la soustraction il ne reste rien, c'est une marque

que la puissance donnée étoit parfaite, & que la racine trouvée est juste & exacte.

Exemple.

La puissance donnée pour en extraire la racine soit le cube

$$\begin{array}{r} 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 \\ + 12a^2c + 6ac^2 + c^3 \\ + 12abc + 3bcc \\ + 3bbc \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \hline 2a + b + c \end{array}$$

dont il faille extraire la racine troisième ou cubique. Après avoir ordonné les termes par rapport à la lettre *a*, comme on voit ci-dessus, j'éleve le binôme *a + b* à la troisième puissance, & je l'écris à côté du dividende, ou de la puissance donnée, pour qu'elle me dirige & me serve de formule: or

I°. Si je voulois extraire la racine cubique de la formule, je trouverois la première racine *a*, en prenant immédiatement la racine cubique du premier terme *a³*; ce qui m'avertit d'extraire immédiatement la racine cubique du premier terme *8a³*, laquelle est *2a*, que j'écris au quotient ou à la racine.

II°. J'éleve au cube le terme déjà trouvé pour la racine, & je le soustrais de la puissance donnée, pour avoir le reste, s'il y en a, & l'ajouter au terme suivant. Il ne s'en trouve point dans cet exemple. Maintenant si je voulois trouver l'autre terme *b* de la racine dans la formule, il est évident que je n'ai qu'à diviser le second terme *3a²b* par *3*, qui est le degré de la puissance, & encore par *a²* qui est la puissance du terme déjà trouvé à la racine, mais moindre d'un degré que la puissance donnée, ou tout d'un coup par *3a²*; ce qui m'indique que je dois diviser le second terme de la puissance donnée & par *3*, qui est le degré de la puissance, & par *4a²*, qui est la seconde puissance du terme déjà trouvé à la racine, ou la puissance moindre d'un degré que celle sur

laquelle on opère; c'est-à-dire, que je dois diviser par $3 \times 4a^2$, ou $12a^2$: or le second terme de la puissance donnée est (131) & (132) la quantité complexe $12a^2b + 12a^2c$, laquelle divisée par $12a^2$ donnera au quotient $b + c$, que j'écris à la racine.

III°. Ayant élevé à la troisième puissance la quantité $2a + b + c$ trouvée à la racine, & l'ayant soustraite du dividende, ou de la puissance donnée, il ne reste rien; ce qui dénote que l'opération est finie, & que le quotient trouvé est la racine juste & exacte de la puissance donnée.

Démonstration.

Il est évident que pour trouver la première racine $2a$, on doit extraire immédiatement la racine cubique du premier terme $8a^3$; il n'y a nulle difficulté. Après avoir trouvé la première racine $2a$, il est aisé d'appercevoir qu'on trouvera les autres racines $b + c$, en divisant le second terme $12a^2b + 12a^2c$ de la puissance par 3, qui est le degré de la puissance, & par $4a^2$, qui est la première racine élevée à un degré moindre que la puissance proposée, ou en divisant tout d'un coup par $12a^2$; la raison en est que dans une troisième puissance, *par ex*: le premier terme est toujours le cube de la racine par rapport à laquelle on a ordonné les termes de la puissance; le second terme est la somme des autres racines multipliées tant par le degré de la puissance, que par le carré de la première racine: car dans l'exemple précédent le second terme est $12a^2b + 12a^2c$ (132), lequel, comme on le voit, est la même chose que $12a^2 \times \overline{b+c}$: donc en suivant la méthode prescrite ci-dessus, je dois trouver tous les termes qui composent la racine proposée.

Il est facile d'appliquer les règles & la démonstration que nous venons de donner à toute autre puissance quelconque donnée, parce qu'elles

font générales & fondées sur la nature & la formation des puissances.

Corollaire.

141. Une puissance quelconque étant donnée pour en extraire la racine, il fera aisé de connoître tout d'un coup de combien de termes doit être composée la racine que l'on cherche; car cette racine doit avoir autant de termes & un de plus qu'il y a de parties qui composent le second terme de la puissance. En effet le second terme d'une puissance quelconque est toujours celle des racines qui a ordonné les termes de la puissance, ou un degré de cette racine multiplié par la somme de toutes les autres racines. Ce second terme n'a donc qu'une seule partie, lorsqu'il y a deux racines; il contient deux parties, lorsqu'il y a trois racines, & ainsi de suite.

De l'Extraction des Racines complexes numériques.

Les principes & les règles que nous venons de donner pour l'extraction des racines des puissances algébriques, s'appliquent aussi à l'extraction des racines des puissances numériques. Avant d'en faire l'application, il est à propos de connoître les quarrés & les cubes des dix premiers nombres; sçavoir,

Racines, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
 Quarrés, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.
 Cubes, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 243, 512, 729, 1000.

On peut continuer cette table tant que l'on voudra.

Proposition I.

142. De la table précédente il est aisé de déduire les propriétés suivantes: sçavoir,

1°. Un nombre quelconque ne peut jamais avoir à son quarré plus que le double du nombre des chiffres de la racine; car si parmi les nom-

bres composés de deux chiffres, *par ex* : l'on prend le plus grand nombre possible, sçavoir 99, son carré 9801 ne contiendra que le double précisément du nombre des chiffres de la racine.

II°. Un nombre quelconque ne peut jamais avoir à son cube plus que le triple du nombre des chiffres de la racine; car entre les nombres composés de deux chiffres, *par ex* : prenant le plus grand nombre possible, sçavoir 99, son cube 970299 ne contiendra précisément que le triple du nombre des chiffres de la racine.

III°. On doit raisonner de la même manière des autres puissances; c'est-à-dire, qu'une quantité composée d'un certain nombre de chiffres ne pourra jamais avoir à sa quatrième puissance, plus que le quadruple; à sa cinquième puissance plus que le quintuple du nombre de ses chiffres; & en général que le nombre des chiffres qui composent une puissance quelconque, ne peut jamais être plus grand que le produit de l'exposant de la puissance par le nombre des chiffres de la racine: de sorte qu'appellant γ le nombre des chiffres de la puissance, n celui des chiffres de la racine, & p l'exposant de la puissance, on aura quelquefois $\gamma < np$; & $\gamma = np$; mais jamais $\gamma > np$.

Corollaire.

143. Donc si l'on partage une puissance donnée en tranches allant de droite à gauche, de façon que chaque tranche contienne autant de chiffres qu'il est marqué par l'exposant de la puissance; sçavoir, deux chiffres pour la seconde puissance, trois chiffres pour la troisième puissance, & ainsi du reste, (excepté la première tranche à gauche, qui peut en contenir moins; sçavoir, lorsque $\gamma < np$) la racine aura toujours autant de caractères ou chiffres, qu'il y aura de tranches dans la puissance.

Proposition I I.

144. Le carré d'un nombre renferme les mêmes parties que celui d'une quantité algébrique; sçavoir,

I°. Le carré d'un nombre composé de deux chiffres contient le carré du premier chiffre, plus le double produit du premier chiffre par le second, & le carré du second; c'est ce que l'on voit dans 625, carré de $25 = 20 + 5$, dans lequel on trouve 400 carré de 20, 200 double produit de 20 par 5, & 25 carré de 5; car $400 + 200 + 25 = 625$: & c'est ce qui est représenté par la formule $a^2 + 2ab + b^2$, carré du binôme $a + b$.

II°. Si le nombre est composé de trois chiffres, tel quel 125, on peut considérer les deux premiers chiffres, (ou, si l'on veut, les deux derniers chiffres) comme ne faisant qu'un seul terme, & alors le carré du nombre 125 contiendra le carré du premier terme 12, (lequel terme 12 étant composé de deux chiffres, aura à son carré toutes les parties dont nous venons de parler ci-dessus) plus il contiendra le double produit du premier terme 12 par le second 5, & le carré du second terme 5; c'est ce qui est encore représenté par la formule $a^2 + 2ab + b^2$.

III°. Ce sera la même chose, si la racine est composée de 4, de 5, de 6, &c. caracteres ou chiffres. De sorte qu'en général le carré d'une racine composée d'un nombre quelconque de chiffres, contiendra toujours le carré du premier chiffre, plus le double produit du premier chiffre par le second, avec le carré du second: plus le double produit des deux premiers chiffres par le troisième, avec le carré du troisième: plus le double produit des trois premiers chiffres par le quatrième, avec le carré du quatrième; & ainsi du reste.

Proposition I I I.

145. Le cube d'un nombre quelconque renferme toutes les mêmes parties que celui d'une quantité algébrique; ſçavoir,

I°. Le cube d'un nombre composé de deux chiffres contient le cube du premier chiffre, plus le triple produit du quarré du premier chiffre par le ſecond, plus le triple produit du premier chiffre par le quarré du ſecond, & le cube du ſecond chiffre; c'eſt ce qui eſt représenté par la formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

II°. Si le nombre eſt composé de trois chiffres, tel que 435, on peut conſidérer les deux premiers chiffres, (ou, ſi l'on veut, les deux derniers) comme ne faiſant qu'un ſeul terme; & en conféquence l'on doit faire ici une remarque toute ſemblable à celle que nous avons faite pour le quarré.

III°. On doit dire la même choſe, ſi la racine eſt composée de 4, de 5, de 6, &c. caracteres ou chiffres. De ſorte qu'en général le cube d'une quantité composée d'un nombre quelconque de chiffres renfermera, 1°. le cube du premier chiffre, plus le triple produit du quarré du premier chiffre par le ſecond, plus le triple produit du premier chiffre par le quarré du ſecond, avec le cube de ce ſecond chiffre. 2°. Il contiendra le triple produit du quarré des deux premiers chiffres par le troiſième, plus le triple produit des deux premiers chiffres par le quarré du troiſième, avec le cube de ce troiſième chiffre. 3°. Il renferme auſſi le triple produit du quarré des trois premiers chiffres par le quatrième, plus le triple produit des trois premiers chiffres par le quarré du quatrième, avec, &c.

Proposition I V.

146. On peut déterminer d'une maniere toute ſemblable les parties qui compoſent la quatriè-

me, la cinquième, la sixième, en un mot la puissance quelconque d'une racine composée de deux, de trois, de quatre, ou en général d'un nombre quelconque de chiffres. Mais nous nous arrêtons ici principalement aux secondes & troisièmes puissances.

Corollaire I.

147. Si l'on partage en tranches un carré dont la racine est composée de plusieurs chiffres; la première tranche à gauche renferme le carré du premier chiffre; le reste de la première tranche, (s'il y en a un, après en avoir ôté le carré du premier chiffre) joint à la seconde tranche, renferme le double produit du premier chiffre par le second, avec le carré du second; le reste de la seconde tranche, (s'il y en a un, après avoir soustrait le carré des deux premiers chiffres) joint à la troisième tranche, contient le double produit des deux premiers chiffres par le troisième, avec le carré du troisième.

Corollaire II.

148. Pareillement, si l'on partage en tranches un cube dont la racine contienne plusieurs chiffres; la première tranche à gauche renfermera le cube du premier chiffre; le reste de la première tranche, (s'il y en a un, après en avoir ôté le cube du premier chiffre) joint à la seconde tranche, contiendra le triple produit du carré du premier chiffre par le second, plus le triple produit du premier chiffre par le carré du second, avec le cube du second chiffre; le reste de la seconde tranche, (s'il y en a un, après avoir soustrait des deux premières tranches le cube des deux premiers chiffres) joint à la troisième tranche, renfermera le triple produit du carré des deux premiers chiffres par le second, plus, &c.

Remarque.

149. Toutes ces parties qui composent une

puissance, sont distinguées en Algèbre par l'interposition des signes + & -; mais on les distingue dans les nombres par le rang que tiennent les chiffres dans la puissance; *par ex*: dans le carré d'un nombre composé de trois chiffres, & qui aura par conséquent, trois tranches (143), le carré du premier chiffre sera dans la première tranche à gauche; le double produit du premier chiffre par le second sera au premier rang de la seconde tranche, & le carré du second chiffre au second rang de la même tranche; le double produit des deux premiers chiffres par le troisième sera au premier rang de la troisième tranche, & le carré du troisième chiffre au second rang de la même tranche. C'est ce que l'on peut voir dans le carré 294849 du nombre 543, dans lequel vous trouverez tous les produits ci-dessus dénommés, de façon qu'ils avancent tous les uns sur les autres d'un rang sur la droite:

Carré de 5	25	}	I.	}	tranches.
Doub. prod. de 5 × 4.	40		I. & II.		
Carré de 4	16		II.		
Doub. prod. de 5 × 3	32		II. & III.		
Carré de 3	9	III.			
		294849 carré de 543			

R E G L E S.

150. De tout ce que nous avons dit on peut déduire les règles suivantes :

I°. Pour trouver le premier chiffre de la racine d'une puissance donnée, il n'y a qu'à extraire immédiatement de la première tranche la racine proposée.

II°. On trouvera le second chiffre de la racine, en divisant le reste de la première tranche, (s'il y en a un, après en avoir soustrait le carré du premier chiffre déjà trouvé) joint au premier

chiffre de la seconde tranche, par l'exposant de la puissance, & puis en le divisant encore par le chiffre déjà trouvé à la racine, mais élevé à un degré moindre d'une unité que celui de la puissance; ou tout d'un coup, par le produit fait de l'exposant de la puissance proposée, par la puissance du terme déjà trouvé, moindre d'un degré que la proposée.

III°. Pour trouver le troisième chiffre de la racine, on doit diviser le reste des deux premières tranches, (s'il y en a un, après en avoir soustrait le carré des deux chiffres déjà trouvés) joint au premier chiffre de la troisième tranche, & par l'exposant de la puissance, & par les deux chiffres déjà trouvés & élevés à une puissance moindre d'un degré que la puissance donnée.

IV°. On trouvera le quatrième, le cinquième, & tous les termes suivans par la même méthode.

Remarque I.

151. Lorsqu'on ne peut pas soustraire des tranches sur lesquelles on a opéré, la puissance requise du chiffre ou des chiffres trouvés à la racine; c'est une marque que le dernier chiffre écrit à la racine est trop grand: en ce cas il faut le diminuer d'une unité, & le diminuer toujours d'une unité, jusqu'à ce que cette soustraction devienne possible.

Remarque II.

152. Dans l'extraction des racines, si le membre de division sur lequel on opere ne peut pas être divisé par le diviseur dont on se sert; il faut écrire zero à la racine, comme on l'écrit au quotient dans la division; afin de faire garder aux chiffres le rang qu'ils doivent avoir.

P R O B L È M E I.

153. Extraire la Racine carrée d'un Nombre donné
214369.

SOLUTION. Partagez le nombre donné en tran-

ches de deux chiffres chacune; vous aurez trois tranches: il y aura donc trois chiffres à la racine.

$$\begin{array}{r}
 21' \ 43' \ 69 \ } a^2 + 2ab + b^2 \\
 \underline{16} \qquad \qquad \qquad \} 463 \\
 \hline
 5' \ 4 \\
 21 \ 16 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 27' \ 6 \\
 \underline{21 \ 43 \ 69} \\
 \hline
 \circ \circ \circ \circ \circ \circ
 \end{array}$$

I°. Cherchez le plus grand carré contenu dans la première tranche 21, lequel est 16 dont la racine est 4; écrivez 4 au quotient, & retranchez le carré 16 de 21 pour avoir le reste 5.

II°. A côté du reste 5 abaissez le premier chiffre 4 de la tranche suivante, & vous aurez pour membre de division 54: divisez 54 par l'exposant 2 de la puissance & par la première puissance du chiffre 4 déjà trouvé à la racine; ou plutôt, divisez 54 par $2 \times 4 = 8$; & le quotient est 6. Or pour s'assurer que le chiffre 6 trouvé pour la racine est bon, il ne suffit pas de l'éprouver selon la méthode propre à la division; c'est-à-dire, qu'il ne suffit pas que le produit du quotient 6 par le diviseur 8 puisse être soustrait du membre de division 54; mais il faut l'éprouver suivant la méthode propre à l'extraction des racines, qui consiste à élever au carré les deux chiffres 46 déjà trouvés pour la racine, & à retrancher leur carré 2116 des deux premières tranches; la soustraction est ici possible: écrivez donc 6 à la racine, & le reste 27 sous le carré 2116.

III°. A côté du reste 27 abaissez le premier chiffre 6 de la troisième tranche, & divisez 276 par l'exposant 2 de la puissance, & encore par la première puissance du nombre 46 déjà trouvé à

la racine ; ou plutôt, divisez par $2 \times 46 = 92$, en disant, en 27 combien de fois 9 ? trois fois : écrivez 3 au quotient ; ensuite élevez le nombre trouvé 463 au quarré pour le soustraire des trois tranches ; après la soustraction il ne reste rien : ce qui dénote que le chiffre 3 est bon, & que la racine trouvée est la véritable.

Remarque.

154. La solution précédente est une application de la méthode générale que nous avons donnée ci-dessus. On peut la simplifier pour l'extraction des racines quarrées de cette manière :

$$\begin{array}{r}
 21' \ 43' \ 69 \ } \ a^2 + 2ab + b^2 \\
 16 \ } \ \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 \hspace{1.5cm} 463 \\
 \hline
 5' \ 43 \\
 \hspace{1.5cm} 86 \\
 \hline
 5' \ 16 \\
 \hspace{1.5cm} 27' \ 69 \\
 \hspace{3.5cm} 9 \ 23 \\
 \hline
 \hspace{3.5cm} 2769 \\
 \hline
 \hspace{3.5cm} 0000
 \end{array}$$

Après avoir trouvé 4 à la racine & soustrait le quarré 16 de la première tranche, ce qui donne le reste 5 :

1°. A côté du reste 5 abaissez la seconde tranche toute entière, & vous aurez pour membre de division 543, qu'il faut diviser par $2 \times 4 = 8$, comme nous venons de le dire ; écrivez le diviseur 8 sous le premier chiffre de la tranche abaissée, & dites : en 54 combien de fois 8 ? six fois ; écrivez 6 à la racine, & à côté du diviseur 8 ; puis multipliez 86 par 6, & vous aurez 516 ; (ce produit 516 renferme, comme il est aisé de le voir, le double produit du premier chiffre 4 par le second 6, plus le quarré de 6 plus avancé d'un

rang vers la droite ; c'est-à-dire , que $86 \times 6 = 480 + 36 = 516$) retranchez ce produit du membre de division , & il restera 27.

II°. A côté du reste 27 abaissez la troisième tranche, & prenez pour diviseur $2 \times 46 = 92$, c'est-à-dire , le double du nombre 46 déjà trouvé à la racine ; écrivez le diviseur 92 sous le membre à diviser, de façon que le dernier chiffre 2 du diviseur réponde au premier chiffre 6 de la tranche abaissée, & dites : en 27 combien de fois 92 trois fois ; écrivez 3 au quotient , & à côté du diviseur , & faites le reste comme ci-dessus.

P R O B L Ê M E I I.

155. *Extraire la Racine cubique d'un nombre donné*
47437928.

SOLUTION. Je partage le nombre donné en tranches qui contiennent chacune trois chiffres (excepté la première à gauche, qui peut en contenir moins) : il y a trois tranches, il y aura donc trois chiffres à la racine.

$$\begin{array}{r}
 47' \ 437' \ 928 \ } a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 \underline{27} \qquad \qquad \qquad \} 362 \\
 20' \ 4 \\
 46' \ 656 \\
 \qquad \qquad \qquad 781, \ 9 \\
 \underline{47437928} \\
 \text{oooooooo}
 \end{array}$$

I°. Je cherche le plus grand cube contenu dans 47, c'est 27, dont la racine cubique est 3 ; je l'écris au quotient, & je soustrais 27 de 47 ; reste 20, à côté duquel j'abaisse le premier chiffre de la seconde tranche ; ce qui me donne le nouveau membre de division 204.

II°. Je divise ce membre & par l'exposant 3 de la puissance, & par la seconde puissance 9 de la racine 3 déjà trouvée, (laquelle puissance est

moindre d'un degré que la proposée) ou, ce qui revient au même, je divise par $3 \times 9 = 27$, disant en 204 combien de fois 27, ou en 20 combien de fois 2: il y est 9 fois: mais le 9 n'est pas bon suivant la division; car le produit $27 \times 9 = 243$ ne peut pas être soustrait du dividende 204. Le 8 n'est pas bon pour la même raison. Le 7 est bon suivant la division; car le produit $27 \times 7 = 189$ peut être soustrait du dividende 204; mais il n'est pas bon selon l'extraction des racines: car le cube des deux chiffres 37 qui se trouveroient à la racine, ne pourroit pas être soustrait des deux premières tranches. Mais je trouve que le 6 est bon; je l'écris donc à la racine, & j'éleve au cube le quotient 36 déjà trouvé, & je soustrais ce cube (qui est 46656) des deux premières tranches; le reste est 781, à côté duquel j'abaisse le premier chiffre 9 de la troisième tranche; ce qui me donne 7819 pour membre de division.

III°. Je divise ce nouveau membre & par l'exposant 3 de la troisième puissance donnée, & par la seconde puissance 1296 des deux chiffres 36 déjà trouvés à la racine; ou plutôt, par le triple du carré de 36, ou par $3 \times 1296 = 3888$, disant en 7819 combien de fois 3888, ou en 7 combien de fois 3: deux fois. J'écris à la racine le chiffre 2, lequel est bon, & selon la division; car le produit 2×3888 peut être soustrait du dividende: & selon l'extraction des racines; car élevant au cube tout le quotient trouvé pour la racine, & retranchant ce cube de la puissance donnée, il ne reste rien: ce qui dénote que la racine trouvée est juste, & que l'opération est finie.

La démonstration de toutes ces règles est aisée à appercevoir, après ce que nous avons dit ci-dessus de l'extraction des racines, laquelle est une *décomposition* des puissances, & dont les règles se déduisent de la nature & de la *composition* même des puissances.