

Mais les triangles semblables SPH, SpF donnent d'une part $PH : pF :: SP : Sp$, & les triangles semblables spE, sPG donnent de l'autre part $PG : pE :: sP : sp$ donc en multipliant les deux dernières proportions l'une par l'autre, ce qui donne

$PG \times PH : pE \times pF :: SP \times sP : Sp \times sp$,
on aura $\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: SP \times sP : Sp \times sp$, dans laquelle proportion les deux derniers termes sont les rectangles des abscisses correspondantes.

T H É O R È M E I I I.

748. *Dans l'Hyperbole les Quarrés des Ordonnées sont entr'eux comme les Rectangles des Abscisses correspondantes (fig. 3.).*

DÉMONST. Par la propriété du cercle on a
 $\overline{MP}^2 : \overline{mp}^2 :: PD \times PE : pC \times pB$.

Or à cause des triangles semblables SPD, SpC, on a la proportion $PD : pC :: SP : Sp$; & à cause des triangles semblables spE, spB, on a aussi $PE : pB :: sP : sp$; donc en multipliant les deux proportions l'une par l'autre, on aura

$PD \times PE : pC \times pB :: SP \times sP : Sp \times sp$;
donc on aura $\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 :: SP \times sP : Sp \times sp$, dans laquelle proportion les deux derniers termes sont les rectangles des abscisses correspondantes.

S E C T I O N I I.

Des Sections Coniques considérées sur un Plan.

LORSQU'ON envisage les sections coniques sur un plan, on peut les considérer ou absolument & en elles-mêmes, ou par comparaison. Nous allons les considérer sous ces deux points de vue.

CHAPITRE I.

Des Sections Coniques considérées en elles-mêmes.

Nous parlerons, 1°. de la parabole ; 2°. de l'ellipse ; 3°. de l'hyperbole.

ARTICLE I.

De la Parabole.

HYPOTHÈSE.

749. Si sur une droite AD, posée sur un plan, (fig. 4.) on mene une perpendiculaire AC, sur laquelle on prenne à volonté un point F, & si, par tant de points que l'on voudra de la droite AD, on mene des paralleles DM, sur chacune desquelles on prenne un point M, tel que l'on ait toujours $MD = MF$, la courbe qui passera par tous ces points M, s'appelle *Parabole*, & a les mêmes propriétés que celle que nous avons considérée dans le cône, comme nous le prouverons bientôt. La ligne AD, ou DD s'appelle *Directrice*, & le point F s'appelle *Foyer*.

Corollaire I.

750. La ligne AF est partagée en deux également au point S ; c'est-à-dire, que l'on a $SA = SF$. Car S étant un point de la courbe décrite, doit être également distant de F & de la ligne DA.

Corollaire II.

751. C'est pourquoi le point S est de tous les points de la courbe le plus proche de DA, & par cette raison est le point le plus élevé, & s'appelle le *sommet* de la parabole.

DÉFINITIONS.

I.

752. La ligne AC dans laquelle se trouve le

foyer F, & autour de laquelle on conçoit que la courbe en tournant feroit sa révolution, s'appelle l'*Axe* de la courbe; le point S où l'axe prend son origine, s'appelle le *sommet de la courbe*, ou l'*Origine de l'axe*.

I I.

753. Nous appellerons *Paramètre* de l'axe une ligne p quadruple de SA, ou quadruple de la distance de l'origine de l'axe à la directrice.

I I I.

754. Si du sommet S, origine de l'axe, ou d'un point quelconque M de la courbe, vous menez une ligne SB, ou SE, ou MT, qui touche la courbe au point S, ou au point M, cette ligne s'appelle *Tangente*, & les points S ou M s'appellent *points de contingence*.

I V.

755. Une ligne quelconque mp, MP, tirée d'un point quelconque de la courbe à l'axe, & parallèle à la tangente SE, s'appelle *Ordonnée* à l'axe; & les lignes Sp, ou SP, comprises entre le sommet & l'ordonnée, s'appellent *Abscisses*,

V.

756. Si de l'extrémité M d'une ordonnée quelconque MP, vous menez une tangente MT qui rencontre l'axe prolongé, la portion TP de l'axe comprise entre l'ordonnée & l'extrémité T de la tangente, s'appelle *Sous-Tangente*.

V I.

757. Si du point M vous menez sur l'axe une ligne MC qui soit perpendiculaire à la tangente, cette perpendiculaire s'appelle *Normale*; la portion CP de l'axe comprise entre l'ordonnée & la perpendiculaire MC, s'appelle *Sous-Perpendiculaire*, ou *Sous-Normale*.

V I I.

758. Une ligne FM menée du foyer F à un point quelconque de contingence M, s'appelle *Rayon vecteur*.

Corollaire.

759. On voit par ces définitions que l'axe est une ligne que l'on ne doit pas considérer toute seule, mais comme un terme auquel se rapportent plusieurs lignes qui en dépendent, & qui forment un système fixe & déterminé, que l'on peut appeler *Système de l'axe*. Ce système de l'axe comprend l'ordonnée & ses abscisses; la tangente & la sous-tangente; la perpendiculaire & la sous-perpendiculaire; le paramètre & le rayon vecteur.

THÉORÈME I.

760. Dans la courbe que l'on vient de décrire le Carré de l'ordonnée MP (y) est égal au rectangle de l'abscisse correspondante PS (x) par le paramètre p de l'axe (fig. 4.); c'est-à-dire, que l'on a $yy = px$.

DÉMONST. Supposant la quantité constante SA, ou SF = a , on aura MF = MD (749.) = PS + SA = $x + a$, & PF = $x - a$, ou = $a - x$, selon que le point P se trouve au-dessous, ou au-dessus du foyer F.

Or le triangle rectangle MPF donne $\overline{MF}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF}^2$, ou algébriquement.

$$aa + 2ax + xx = yy + aa - 2ax + xx:$$

donc transposant on aura $yy = 4ax$. Or (753) $4a = p$: donc $yy = px$.

Corollaire I.

761. Si l'on prend une autre ordonnée Y avec son abscisse X l'on aura de même $Y^2 = pX$, d'où l'on conclut $Y^2 : y^2 :: pX : px$, & par conséquent $Y^2 : y^2 :: X : x$. (180): c'est-à-dire, que dans la courbe qui vient d'être décrite, les carrés des ordonnées seront entr'eux comme les abscisses correspondantes. D'où il suit que la courbe qui vient d'être décrite, est une *parabole*, & est la même que celle que nous avons eue dans le cône par une section parallèle au côté.

Corollaire II.

762. Puisque $yy = px$, il suit que $x : y :: y : p$, ou que $\frac{x}{y} : y : p$, c'est-à-dire, que le paramètre

est une troisième proportionnelle à l'abscisse & à l'ordonnée.

Corollaire III.

763. C'est sur cette propriété du paramètre qu'est fondé son usage, qui consiste à déterminer le rapport entre la longueur & la largeur de la parabole, lequel est le même que celui qui regne entre l'abscisse & l'ordonnée correspondante. En effet dans l'équation $yy = px$, supposons $p = 1$, & elle deviendra $yy = x$. Or,

I°. Si l'on suppose l'abscisse $x = \frac{1}{9}$, du paramètre, l'on aura $yy = \frac{1}{9}$, & $y = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire, que lorsque l'abscisse est un $\frac{1}{9}$ du paramètre, l'ordonnée en est le $\frac{1}{3}$, & par conséquent la parabole alors croît davantage selon la largeur que selon la longueur.

II°. Supposons l'abscisse $x = \frac{1}{4}$ du paramètre, & nous aurons $yy = \frac{1}{4}$, & $y = \frac{1}{2}$: c'est-à-dire, qu'alors l'ordonnée est la moitié du paramètre. Or le point de l'axe où l'abscisse est $\frac{1}{4}$ du paramètre, est le foyer (750); d'où l'on conclut que dans la parabole la double ordonnée qui passe par le foyer, est égale au paramètre, & que dans ce cas la parabole a encore plus de largeur que de longueur.

III°. Supposons l'abscisse $x = 1$, ou égal au paramètre, & l'on aura $yy = 1$; & $y = 1$, c'est-à-dire, que dans ce cas l'ordonnée & l'abscisse sont égales, & que la parabole a autant de longueur que de largeur.

IV°. Supposons l'abscisse $x = 4$, ou quadruple du paramètre, l'on aura $yy = 4$, & $y = 2$, c'est-à-dire, que l'ordonnée n'est que double du paramètre, & qu'alors la parabole croît plus selon la longueur que selon la largeur.

Corollaire IV.

764. Ayant mené de l'extrémité d'une ordonnée MP (*fig. 5.*), une corde MA, & une ligne MD perpendiculaire à cette corde, la portion DP de

l'axe comprise entre l'ordonnée & cette perpendiculaire sera égale au paramètre. Car à cause du triangle rectangle DMA, on aura AP:PM::

$$PM:DP, \text{ ou } x:y::y:\frac{yy}{x}=p.$$

THÉORÈME II.

765. Une perpendiculaire MT, qui divise en deux également une droite FD, tirée du foyer à la directrice, va toucher la Parabole en un point quelconque M, & est une Tangente (fig. 4.).

DEMONST. La ligne MT, divisant en deux également la base du triangle DMF, qui est isocèle (749), & étant perpendiculaire à cette base, passe nécessairement par le sommet M de l'angle DFM (319). Or ce sommet est un point de la parabole: donc la ligne MT touche la parabole au point M.

Or elle ne la coupera point; car elle passera par tous les points également distans de D & de F. Or les points de la parabole qui sont au-dessous de M s'éloignent toujours plus de D que de F, parce qu'ils sont tous à égale distance (749) du foyer & de la directrice: donc, &c.

Corollaire.

566. L'angle HMX formé par la ligne HM, parallèle à l'axe, & la tangente XMT, est égal à l'angle TMF formé par la tangente MT, & le rayon vecteur MF; car HMX=DMT=TMF.

D'où il suit qu'un rayon de lumière, dirigé suivant la ligne HM, se réfléchiroit au foyer F; & pareillement que partant du foyer F au point M, il se réfléchiroit suivant la ligne MH.

THÉORÈME III.

767. Dans la Parabole la Sous-perpendiculaire, ou Sous-normale PC est égale à la moitié du Paramètre, & son expression est $s = \frac{1}{2}p$ (fig. 4.).

DEMONST. Les lignes DF & MC sont parallèles, puisqu'elles sont perpendiculaires sur une même ligne MT. Elles sont aussi égales, puisqu'el-

les sont paralleles entre des paralleles. De plus les lignes DA & MP sont paralleles & égales: donc les triangles DFA, MCP sont équiangles & égaux: donc on aura $PC = AF$, ou $PC = \frac{1}{2}p$.

Corollaire.

768. Le triangle rectangle CPM donne aussi $\overline{MC}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PC}^2 = yy + \frac{1}{4}pp = px + \frac{1}{4}pp$: donc appellent m la perpendiculaire, ou normale MC, son expression sera $m = \sqrt{px + \frac{1}{4}pp}$.

T H É O R È M E I V.

769. Dans la parabole la Sous-Tangente PT est double de l'Abscisse, & son expression sera $PT = 2x$.

DÉMONST. Dans le triangle rectangle CTM, à cause de la perpendiculaire MP abaissée du sommet M sur l'hypothénuse CT, on a $CP : PM :: PM : PT$, ou algébriquement $2a : y :: y : PT$: donc $PT = \frac{yy}{2a}$: or $yy = 4ax$: donc $PT = \frac{4ax}{2a}$, ou $PT = 2x$.

Corollaire.

770. Le triangle rectangle TPM donne aussi $\overline{MT}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PT}^2 = yy + 4xx = px + 4xx$: donc l'expression de la tangente sera $MT = \sqrt{px + 4xx}$.

T H É O R È M E V.

771. Dans la Parabole, le rayon vecteur FM est égal à l'Abscisse, plus au quart du Paramètre de l'axe, & son expression est $r = x + \frac{1}{4}p$.

DÉMONST. On a (746) $FM = MD = AP = AS + SP = x + \frac{1}{4}p$: donc FM, ou $r = x + \frac{1}{4}p$.

Remarque.

772. La parabole a plusieurs usages applicables aux sciences & aux arts. On s'en sert,

I°. Dans la pratique du jet des bombes, pour déterminer l'élevation, la portée, & les autres circonstances du jet, comme on voit dans la Mécanique.

II°. Pour déterminer & calculer le cours & le mouvement

Mouvement des *comètes*, comme on le fait voir en *Astronomie*.

III°. Dans la *Catoptrique* & la *Dioptrique*, pour déterminer les effets & les usages des verres & des miroirs paraboliques.

ARTICLE II.

De l'Ellipse.

HYΠΟΤΗΕΣ.

773. Ayant mené sur un plan une ligne AB (*fig.* 7.) dans laquelle on détermine deux points F, f, également distans chacun des extrémités A, B; si vous prenez hors de cette droite des points M, G, &c. tels que la somme des distances de chacun de ces points aux deux points F, f, soit constante, & toujours égale à la droite AB, la courbe qui passera par ces points M, G, &c. s'appelle une *Ellipse*, & est la même que celle que nous avons considérée dans le cône, comme nous l'allons prouver.

DÉFINITIONS.

I.

774. La ligne AB s'appelle le *grand Axe* de cette courbe; la ligne perpendiculaire MN, qui partage en deux également le grand axe, s'appelle le *petit Axe*, ou l'*Axe conjugué*; on les appelle aussi *premier & second axes*: le point C, où les deux axes se coupent, s'appelle le *Centre*.

II.

775. Une troisième proportionnelle aux deux axes est nommé le *Paramètre* de l'axe, qui fait le premier terme de la proportion; en sorte que si l'on a $AB : MN :: MN : p$, la quantité p sera le paramètre du grand axe.

III.

776. Les points F, f, s'appellent *Foyers*, & la somme des distances de ces foyers à chaque point

P

de la courbe est toujours une quantité constante, laquelle est égale au grand axe; sçavoir, l'on a toujours $MF + Mf$, ou $GF + Gf = AB$.

I V.

777. Chacun des axes a ses ordonnées & ses abscisses. Les *Ordonnées* sont des lignes menées de différens points de la courbe sur l'axe, & parallèles à l'axe conjugué. Les *Abscisses* se prennent depuis l'origine de l'axe jusqu'aux ordonnées.

T H É O R È M E I.

778. Dans cette courbe le petit demi-Axe est moyen proportionnel entre les distances d'un des foyers aux deux extrémités du grand Axe (fig. 6.), c'est-à-dire, l'on a $FA : MC :: MC : FB$.

DÉMONST. A cause du triangle rectangle MCF, on aura $\overline{MC}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{FC}^2$. Donc si l'on nomme c la distance du centre au foyer, a le grand demi-axe, & b le petit demi-axe, on aura algébriquement $bb = aa - cc$: d'où l'on tire la proportion $a - c ; b :: b : a + c$, ou $FA : MC :: MC : FB$.

T H É O R È M E I I.

779. Dans la courbe qui vient d'être décrite, le carré de l'ordonnée au grand axe est au produit de ses abscisses, comme le carré du petit axe est au Carré du grand axe (fig. 8.).

DÉMONST. La somme des deux distances, ou des rayons vecteurs $fM + FM$ soit appelée $2a$, & leur différence $2z$; par conséquent l'on aura $(2z) fM = a + z$, & $fM = a - z$.

Supposons la distance PC del'ordonnée au centre = x , & l'on aura l'abscisse $AP = a - x$, & la co-abscisse $Pa = a + x$.

Soit aussi l'excentricité $FC = c$, & l'on aura $FP = c - x$, & $Pf = c + x$. Cela étant,

I°. Le triangle rectangle PMF donnera $\overline{PM}^2 = \overline{MF}^2 - \overline{PF}^2$, ou algébriquement $yy = aa - 2az + zz - cc + 2cx - xx$.

II°. Pareillement le triangle rectangle PMf donnera $PM^2 = fM^2 - Pf^2$, ou algébriquement $yy = aa + 2az + zz - cc - 2cx - xx$.

III°. Prenant la valeur de yy dans la première équation, & la substituant à la place de yy dans la seconde équation, celle-ci deviendra $aa - 2az + zz - cc + 2cx - xx = aa + 2az + zz - cc - 2cx - xx$; & réduisant $4az = 4cx$: donc $z = \frac{cx}{a}$.

IV°. Substituant cette valeur de z à la place de z dans la première équation, elle deviendra $yy = aa - 2cx + \frac{ccxx}{aa} - cc + 2cx - xx$; & multipliant

par aa , l'on aura $aayy = a^4 - 2aacx + ccxx - aacc + 2aacx - aaxx = \frac{aa-xx}{aa} \times \frac{aa-cc}{aa}$: donc

$$aayy = \frac{aa-xx}{aa} \times \frac{aa-cc}{aa}$$

Or (778) $aa - cc = bb$. Donc divisant le premier membre par bb , & le second par $aa - cc$, on aura

$\frac{aa}{bb} yy = aa - xx$; d'où l'on tire cette proportion

$yy : aa - xx :: bb : aa$; c'est-à-dire, que dans cette courbe le carré de l'ordonnée est au produit de ses abscisses, comme, &c.

Corollaire.

780. Si nous prenons une autre ordonnée quelconque $MP = Y$, l'on prouvera de même que $Y^2 : aa - XX :: bb : aa$; d'où l'on conclut $Y^2 : y^2 :: aa - XX : aa - xx$; c'est-à-dire, que les carrés des ordonnées sont entr'eux comme les produits des abscisses, & par conséquent que cette courbe est une ellipse, & la même que la section conique à laquelle nous avons donné ce nom.

THÉORÈME III.

781. Ayant prolongé la ligne fM , de façon que $Mm = MF$, & ayant tiré la ligne mF , je dis qu'une ligne MT qui divisera en deux également la ligne mF , sera Tangente au point M de l'ellipse (fig. 8.).

DÉMONST. Ayant mené du point M de l'ellipse une ligne quelconque MT qui divise en deux également la ligne mF, il n'y aura que le seul point M de la ligne MT qui soit de l'ellipse; tous les autres points seront hors de l'ellipse. Car la somme de leurs distances, par ex. : des distances du point D aux foyers F, f sera plus grande que Aa, ou fm. En effet concevant que l'on ait joint par des lignes les points f, D, & D, m, ces lignes fD, & Dm seroient les deux côtés d'un triangle dont fm sera le troisième côté: donc fD + Dm seroient plus grands que fm. Or fm = Aa: donc la somme fD + Dm seroit plus grande que le grand axe Aa.

Corollaire,

782. Les droites tirées des foyers aux points de contingence, (lesquels s'appellent *rayons vecteurs* de l'ellipse,) forment avec la tangente des angles fMD, FMT égaux. Car fMD = TMm = TMF (fig. 8.). D'où il suit qu'un rayon de lumière allant d'un des foyers f à la circonférence de l'ellipse, se réfléchiroit à l'autre foyer F.

T H É O R È M E I V.

783. Dans l'Ellipse l'expression du Rayon vecteur FM mené du foyer au point de contingence, est $r = \frac{aa - cx}{a}$.

DÉMONST. Le triangle rectangle FMP donne $FM^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PF}^2$. Or $MP = y$, & $PF = c - x$: donc on aura $FM^2 = yy + cc - 2cx + xx$. Or nous avons vu (779) que $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$: donc substituant on aura $FM^2 = bb - \frac{bbxx}{aa} + cc - 2cx + xx$. Nous avons vu aussi (778) que $bb = aa - cc$: donc substituant encore, on aura $FM^2 = aa - cc - xx + \frac{ccxx}{aa} + cc$

$- 2cx + xx$; & réduisant, $\frac{FM^2}{aa} = aa - 2ccx + \frac{ccxx}{aa}$, ou $\frac{FM^2}{aa} = \frac{a^4 - 2aacx + ccxx}{aa}$: donc FM, ou

$$r = \frac{ac - cx}{a}.$$

THÉORÈME V.

784. L'expression de la Sous-perpendiculaire PE est $\frac{bbx}{aa}$, ou $\frac{px}{2a}$.

DÉMONST. Ayant mené EM perpendiculaire sur MT, & parallèle à Fm, on aura $fm : fF :: Mm : FE$, ou $2a : 2c :: \frac{aa - cx}{a} : FE$; donc $FE = \frac{aac - ccx}{aa}$: donc retranchant $PF = c - x$ de la quantité précédente, le reste fera

$$PE = \frac{aac - ccx}{aa} - c + x = \frac{aax - ccx}{aa} = x \times \frac{aa - cc}{aa}.$$

Or (778) $aa - cc = bb$: donc substituant, on aura pour l'expression de la sous-perpendiculaire PE $\frac{bbx}{aa}$, ou $\frac{px}{2a}$.

THÉORÈME VI.

785. L'expression de la Sous-tangente PT est $\frac{aa - xx}{x}$.

DÉMONST. Le triangle rectangle EMT, dans lequel la ligne MP est une perpendiculaire abaissée du sommet sur l'hypothénuse, donne $EP : PM :: PM : PT$, ou algébriquement $\frac{bbx}{aa} : y :: y : PT$;

donc $PT = \frac{aayy}{bbx}$, & substituant à la place de yy sa

valeur, on aura $PT = \frac{aabb - bbxx}{bbx}$; & divisant

par bb , $PT = \frac{aa - xx}{x}$.

Remarque.

786. On fait usage de l'ellipse dans la *Dioptrique* & la *Catoptrique*, pour la construction des verres & des miroirs ardents; dans l'*Architecture*, pour la construction des voûtes; dans l'*Acoustique*, pour la direction du son; dans l'*Astronomie*, pour déterminer & calculer le cours des planètes.

ARTICLE III.

De l'*Hyperbole*.

H Y P O T H È S E.

787. Si sur une droite Aa (fig. 9.) on prend deux points F, f , également éloignés du milieu C , & que dans le plan sur lequel la droite est posée, on prenne tant de points que l'on voudra, comme M , tels que la différence de leurs distances FM, fM aux points F, f , soit constante & toujours égale à la ligne Aa , la courbe qui passera par tous ces points M , s'appelle *Hyperbole*, & est la même que celle que nous avons considérée dans le cône, comme nous l'allons voir; & comme vous pouvez prendre du côté opposé des points semblables, la courbe qui passera de même par tous ces points, s'appelle *Hyperbole conjuguée*.

D É F I N I T I O N S.

I.

788. La droite Aa se nomme le *premier Axe*; les points A, a , sont les *Sommets*; les points F, f , les *Foyers*; le point C s'appelle le *Centre*; la droite Bb (fig. 9.) perpendiculaire au premier axe Aa , passant par le centre, & terminée en B, b par des sections d'arcs de cercle décrits des points A & a avec un rayon égal à l'excentricité CF , ou Cf , s'appelle le *second Axe*.

I I.

789. Une troisième proportionnelle aux deux

axes, s'appelle le *Paramètre* du premier terme de la proportion.

I I I.

790. Si dans cette courbe, comme dans l'ellipse, on suppose le premier demi-axe $CA = a$, le second demi-axe $CB = b$, le paramètre du premier axe $= p$, l'ordonnée $MP = y$, la distance de l'ordonnée au centre $= x$, l'excentricité $CF = c$, on aura par conséquent $AP = x - a$, & $aP = x + a$; l'on aura aussi $FP = x - c$, & $fP = x + c$.

T H É O R È M E I.

791. Le second demi-Axe est moyen proportionnel entre les distances d'un des Foyers aux deux sommets de la Courbe que l'on vient de décrire, c'est-à-dire, que $FA : CB :: CB : Fa$, ou algébriquement $c - a : b :: b : c + a$.

DÉMONST. Le triangle rectangle BAC (fig. 9.) donne $BC^2 = AB^2 - CA^2$, ou algébriquement $bb = cc - aa$, d'où l'on tire la proportion $c - a : b :: b : c + a$.

T H É O R È M E I I.

792. Dans cette même courbe le Carré de l'ordonnée au premier Axe est au produit de ses Abscisses, comme le Carré du second Axe est au Carré du premier Axe (fig. 9.).

DÉMONST. Nous avons la différence $fM - FM = 2a$; soit donc la somme $fM + FM = 2z$, & l'on aura par conséquent $(237) fM = z + a$, & $FM = z - a$. Or

I°. Le triangle rectangle PMF donne $\overline{MP^2} = \overline{FM^2} - \overline{FP^2}$, ou algébriquement $yy = zz - 2az + aa - xx + 2cx - cc$.

II°. Le triangle rectangle PMf donne aussi $\overline{MP^2} = \overline{Mf^2} - \overline{Pf^2}$, ou algébriquement $yy = zz + 2az + aa - xx - 2cx - cc$.

III°. Comparant ces deux valeurs de $\overline{MP^2}$, ou yy , on aura $zz - 2az + aa - xx + 2cx - cc = zz +$

$2az + aa - xx - 2cx - cc$: donc on aura $4cx =$

az : donc $z = \frac{cx}{a}$.

IV°. Substituant cette valeur de z à la place de z dans la premiere équation, elle deviendra $yy = \frac{ccxx}{aa} - 2cx + aa - xx + 2cx - cc$, ou $aayy = ccxx - 2aacx + a^4 - aaxx + 2aacx - aacc$, & réduisant $aayy = ccxx + a^4 - aaxx - aacc$.

V°. Or nous avons vu (791) que $bb = cc - aa$; donc divisant dans cette équation le premier membre par bb , & le second par $cc - aa$, l'on aura $\frac{aa}{bb}yy = xx - aa$. D'où l'on conclut $yy : xx - aa :: bb : aa$; c'est-à-dire, que le quarré del'ordonnée est au rectangle de ses abscisses, comme le quarré du second axe est au quarré du premier axe.

Corollaire I.

793. Il suit que dans cette courbe les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les rectangles des abscisses correspondantes, & par conséquent que cette courbe est une *Hyperbole*, & la même que celle que nous avons considérée dans le cône.

Corollaire I. I.

794. L'on avoit pour l'ellipse la proportion $yy : aa - xx :: bb : aa$, & l'on a pour l'hyperbole $yy : xx - aa :: bb : aa$. Ces deux courbes ont donc les mêmes propriétés, & il n'y a de différence que dans les signes + & -, qui affectent la quantité x , lesquels donnent pour les abscisses de l'ellipse les expressions $a+x$, $a-x$, & pour celles de l'hyperbole $x+a$, $x-a$.

T H É O R È M E I I I.

795. Si d'un point quelconque M de l'hyperbole & de l'intervalle MF on décrit un Arc de cercle entre les deux rayons vecteurs MF, Mf, une droite MT qui divisera

cet Arc en deux également, sera tangente à l'hyperbole au point M (fig. 6.).

DÉMONST. La droite MT n'aura que le seul point M commun avec l'hyperbole; tout autre point tel que D sera hors de l'hyperbole; en effet si du point D on mene aux foyers F, f, les lignes DF, Df, on verra que leur différence sera toujours plus petite que le grand axe; car du point D, comme centre & de l'intervalle DF, ayant décrit un arc entre DF & Df, cet arc coupera Df en o, & Mf en x; or l'on aura toujours la différence des lignes DF, Df, laquelle est fo plus petite que fn = Aa, différence entre MF & Mf: car de deux sécantes extérieures fx, fo menées d'un même point f à l'arc convexe Fo décrit du centre D, la plus courte (316) est la ligne fo, qui prolongée passe par le centre D: donc fo < fx, donc à plus forte raison fo < fn, & par conséquent fo < Aa; donc le point D n'est point à l'hyperbole.

T H É O R È M E I V.

796. Dans l'hyperbole l'expression du rayon vecteur FM mené du foyer au point de contingence M, est $r = \frac{cx - aa}{a}$ (fig. 9.).

DÉMONST. Le triangle rectangle FMP donne $FM^2 = PM^2 + PF^2$; or $PM = y$ & $PF = x - c$: donc on aura $FM^2 = yy + xx - 2cx + cc$: maintenant si nous substituons à la place de yy sa valeur prise dans l'équation de l'hyperbole, laquelle valeur est $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$, & si à la place de bb on substitue aussi sa valeur qui est (791) $bb = cc - aa$, nous trouverons après les substitutions & les réductions FM, où $r = \frac{cx - aa}{a}$.

797. L'expression de la Sous-perpendiculaire PE est

$$PE = \frac{bbx}{aa} \text{ ou } \frac{px}{2a} \text{ (fig. 9.)}$$

DÉMONST. Ayant mené EM perpendiculaire sur MT, & parallèle à Fm, les deux triangles semblables fEm, fFn donneront fn : fF :: Mn : FE ; or l'on a dans l'hyperbole la différence des rayons vecteurs, sçavoir, fn = 2a ; la distance fF = 2c ; la portion Mn = MF = $\frac{cx-aa}{a}$: donc substituant

on aura la proportion 2a : 2c :: $\frac{cx-aa}{a}$: FE ; donc

$$FE = \frac{cx-aa}{a} ; \text{ donc retranchant } PF = x - c \text{ de la}$$

quantité précédente, on trouvera d'une manière

semblable que pour l'ellipse, $PE = \frac{px}{aa}$, ou par-

ce que $\frac{bb}{2a} = p$, l'on aura aussi $PE = \frac{px}{2a}$.

THÉORÈME VI.

798. Dans l'hyperbole l'expression de la Sous-tangente PT appartenante au grand axe est $PT = \frac{xx-aa}{a}$.

DÉMONST. Elle est entièrement semblable à celle de l'ellipse, en observant seulement de prendre la valeur de yy dans l'hyperbole, au lieu de la prendre dans l'ellipse.

Remarque.

799. L'hyperbole a son usage & ses applications dans la Dioptrique & dans la Catoptrique, pour la construction & l'usage des verres & des miroirs. Si l'on suppose, par ex. une surface hyperbolique formée par la révolution d'une hyperbole AMD (fig. 9.), & qu'un rayon de lumière tombe sur la convexité de cette hyperbole dans

une direction VM, laquelle prolongée, aboutiroit au foyer F, ce rayon se réfléchira au foyer *f* de l'hyperbole conjuguée. Car, puisque l'angle de réflexion doit être égal à l'angle d'incidence, selon les loix de la Physique, le rayon VM fera réfléchi dans la direction *Mf*, laquelle, suivant la nature de l'hyperbole, forme avec la tangente DMT l'angle FMT égal à l'angle d'incidence VMD.

CHAPITRE II.

Des Sections Coniques comparées.

ON peut considérer les sections coniques, dans leur description; dans leurs équations, & dans leurs affections.

ARTICLE I.

Des Sections coniques comparées dans leur Description.

DÉFINITIONS.

I.

800. La description d'une courbe est ou *géométrique* ou *mécanique*. On appelle description géométrique celle dans laquelle on assigne plusieurs points par lesquels passe la courbe. On appelle description *mécanique*, ou *organique*, celle dans laquelle on décrit la courbe d'un mouvement continu à l'aide des instrumens.

II.

801. Lorsqu'on considère les sections coniques sur un plan, on appelle *Section conique* toute ligne qui est telle que les deux distances de chacun de ses points, l'une MF à un même point F, l'autre MG à une même droite GA (*fig. 10, 11 & 12.*), soient toujours en même raison, ou dans un rap-

port constant, *par ex* : dans le rapport de $a : p$

I I I.

802. La ligne droite AG s'appelle *Directrice*, ou *Génératrice* de la section; le point F s'appelle le *Foyer*.

I V.

803. La section est une *Ellipse*, si $MF < MG$ (fig. 12.); une *Hyperbole*, si $MF > MG$ (fig. 11.); une *Parabole*, si $MF = MG$ (fig. 10.); un *Cercle*, si MG est infini par rapport à MF; car dans ce dernier cas la ligne MF n'ayant plus de rapport avec MG, reste seule pour déterminer la distance de chaque point M au foyer F, laquelle distance par cette raison se trouve toujours égale dans tous les points de la courbe. Ainsi la section est une ellipse, une hyperbole, une parabole, ou un cercle, suivant que dans le rapport $a : p$, on aura $a < p$, ou $a > p$, ou $a = p$, ou $\infty a = p$.

P R O B L É M E I.

804. La *Directrice* GG étant donnée de position, étant donné le foyer F, & le sommet S, trouver tant de points que l'on voudra d'une Section conique, & par conséquent décrire géométriquement une Section conique (fig. 10, 11 & 12.).

SOLUT. Du sommet S élevez perpendiculairement à l'axe une ligne SB=SF; par les points A & B menez la ligne indéfinie ABD, & ayant mené tant de droites PD, PD, &c. que l'on voudra, perpendiculaires à l'axe, il faut marquer sur chacune de ces droites un point M, tel que chaque MF soit égale à chaque PD.

DÉMONST. Car si de l'un de ces points on éleve à la directrice la perpendiculaire MG, à cause des triangles semblables ASB, APD, on aura $PD : PA :: SB : SA$, ou ce qui est le même, $MF : MG :: SF : SA :: a : p$; donc, &c.

Corollaire I.

805. La ligne SB, ou la distance SF du sommet

de la section au foyer, est par rapport à SA, distance du sommet à la directrice, égale dans la parabole, plus petite dans l'ellipse, plus grande dans l'hyperbole.

Corollaire I I.

806. L'angle SAB dans la parabole est de 45 degrés, parce que $SB = SA$; il est plus petit dans l'ellipse, parce que $SB < SA$; il est plus grand dans l'hyperbole, parce que $SB > SA$.

T H É O R È M E.

807. Dans une Section conique l'intervalle Ff des deux foyers est au grand Axe Ss dans la raison de $a : p$: c'est-à-dire, $Ff : Ss :: a : p$, ou $2c : 2a :: a : p$.

DÉMONST. Nous avons prouvé (804) que $sF : sA :: SB : SA :: a : p$; donc $sF - SB = sA - SA :: a : p$. Or par la construction (804) $SB = SF = sf$, & par conséquent $sF - SB = Ff$; pareillement $sA - SA = sS$: donc on aura $fF : sS :: a : p$.

Corollaire I.

808. Dans le cercle la quantité a est infiniment petite par rapport à la quantité p : donc l'intervalle fF des foyers est infiniment petit par rapport à l'axe, c'est-à-dire, qu'il est nul. Dans la parabole $a = p$, & par conséquent on y aura $fF = sS$: c'est-à-dire, que l'intervalle des foyers est égal à l'axe, & par conséquent infini. Dans l'ellipse $a < p$, d'où il suit que l'intervalle des foyers fF sera plus petit que l'axe. Dans l'hyperbole $a > p$, d'où il suit que l'intervalle des foyers sera plus grand que l'axe.

Corollaire I I.

809. Il suit que le cercle peut être regardé comme une section, dont les foyers se réunissent en un seul & même point C, qui est le centre; que l'ellipse peut être regardée comme un cercle dont les foyers se sont éloignés du centre d'une quantité finie, laquelle s'appelle excentricité; que la

parabole est une ellipse dont les foyers se sont éloignés infiniment l'un de l'autre ; que l'*hyperbole* est une ellipse dont les foyers se sont éloignés plus qu'à l'infini l'un de l'autre, & se sont posés à contre-sens.

Comme le centre est toujours placé entre les deux foyers, il arrive que dans la *parabole* il n'y a point de centre ; que dans le *cerole* & l'*ellipse* il est en dedans de la courbe ; & que dans l'*hyperbole* il est en dehors de la courbe, placé entre les sommets des hyperboles conjuguées.

P R O B L Ê M E I I.

810. *Décrire mécaniquement, ou par un mouvement continu une Section conique sur un plan* (fig. 13, 14 & 15.).

SOLUT. I°. Pour le *Cerole*, il n'y a point de difficulté. Il se décrit, comme l'on sçait, en fixant une des pointes du compas, & en faisant tourner l'autre, gardant toujours la même ouverture : ou bien l'on prend un point quelconque C que l'on appelle *centre*, & où se réunissent les deux foyers ; on y plante un piquet dans lequel on engage une corde, dont les deux bouts sont réunis, & l'on fait tourner autour de ce centre une pointe ou filet qui tiennent toujours la corde tendue ; cette pointe dans son mouvement trace la circonférence d'un cercle.

II°. Comme l'*Ellipse* a deux foyers qui sont distingués du centre, il faut concevoir que les foyers qui étoient réunis au centre C dans la description du cercle, s'en sont éloignés, & sont devenus les points F, f (fig. 14.) ; par conséquent pour décrire l'ellipse, au lieu d'un piquet, il en faut planter deux aux points F, f, autour desquels sera engagée la corde ci-dessus, & la pointe M, qui tiendra cette corde tendue, décrira par son mouvement une ellipse. Car il est évident que la somme des distances de chaque point de la

courbe aux deux foyers F , f est constante, & qu'elle est égale à toute la quantité de cette corde prise des deux foyers, laquelle quantité mesure le grand axe.

III°. Si l'ellipse étoit infinie, ou devenoit une *Parabole*, elle auroit par conséquent ses foyers infiniment éloignés l'un de l'autre, & en ce cas la portion Mf de la corde ne couperoit point l'axe, si ce n'est à une distance infinie, & deviendroit par conséquent parallèle à l'axe. Donc pour décrire une parabole d'un mouvement continu, il n'y a qu'à faire en sorte que la portion Mf de la corde devienne & reste toujours parallèle à l'axe, & pour cela on se sert de deux regles, l'une droite & immobile BAB (*fig. 13.*), & l'autre EDC mobile & en forme d'équerre. Alors tenant toujours le fil tendu & assujetti à la règle mobile par le moyen d'un stilet que l'on fera couler le long de la règle mobile, & faisant mouvoir cette règle en l'éloignant toujours de l'axe parallèlement, ce stilet décrira une ellipse infinie, ou une parabole.

IV°. Si l'ellipse étoit allongée plus qu'à l'infini, auquel cas elle seroit une *Hyperbole*, il arriveroit que l'un de ses foyers étant au point F (*fig. 15.*), l'autre se trouveroit placé à contresens au point f ; d'où il suit que la règle DE (*fig. 13.*), qui étoit parallèle à l'axe, & dont l'extrémité E étoit censée tendre au second foyer de la parabole infiniment éloigné, mais dans le même sens, doit se replier pour fixer cette extrémité E au foyer f de l'hyperbole. C'est pourquoi, pour décrire l'hyperbole par un mouvement continu, il n'y aura qu'à fixer une des extrémités de la règle au foyer f (*fig. 15.*), & assujettir à cette règle le fil, ou le cordon qui part du foyer F . Car faisant mouvoir cette règle, en l'éloignant toujours de l'axe, le stilet qui tiendra la corde tendue, & coulera le long de la règle mobile.

d'écrira l'hyperbole EAE; & par le moyen d'une seconde regle fixée par son extrémité à l'autre foyer F, & à laquelle on fixeroit un fil, ou un cordon qui partiroit du point f, on décrira de la même maniere l'hyperbole conjugée eae.

ARTICLE II.

Des Sections coniques comparées dans leurs Equations.

Proposition I.

811. Dans le triangle une ordonnée quelconque mo (*fig. 17.*) est à son abscisse mA , comme une autre ordonnée quelconque CD est à son abscisse CA ; car les deux triangles semblables Amo , ACD donnent la proportion $mo : mA :: CD : CA$; c'est pourquoi faisant $mo = y$, $mA = x$, $CD = a$, & $CA = b$, la proportion deviendra $y \cdot x :: a \cdot b$; d'où l'on déduit l'équation $yb = ax$, ou $y = \frac{ax}{b}$, laquelle est l'équation du triangle.

Proposition II.

812. Dans le cercle une ordonnée quelconque EG (y) (*fig. 16.*) est moyenne proportionnelle entre les abscisses, ou segmens du diamètre, de sorte que nommant l'abscisse x , le diamètre $2a$, la co-abscisse sera $2a - x$, & l'on aura la proportion $x : y :: y : 2a - x$, d'où l'on déduit l'équation $yy = 2ax - xx$, qui est l'équation du Cercle.

Corollaire.

813. Si l'on prend l'ordonnée DC égale au rayon (a), l'abscisse sera $CB = a$, & la co-abscisse $CA = a$. Par conséquent si l'on compare les deux ordonnées EG , DC , on aura par la propriété du cercle $\frac{EG^2}{DC^2} :: GB \times GA : CB \times CA$ ou algébriquement $yy : aa :: 2ax - xx : aa$; d'où l'on conclut $\frac{aa}{aa} yy = 2ax - xx$, qui est encore l'équation du

cercle, & laquelle ne diffère de la précédente que par le coefficient $\frac{aa}{aa}=1$, qui exprime l'égalité des axes, ou diamètres du cercle.

Proposition III.

814. Si l'on suppose que les axes du cercle deviennent inégaux, auquel cas le *cercle* se change en *ellipse*, alors le premier axe étant exprimée par a , le second doit être exprimé par b , & la fraction $\frac{aa}{aa}$ se changera en $\frac{aa}{bb}$; ainsi l'équation précédente deviendra $\frac{aa}{bb}yy = 2ax - 2xx$, & c'est l'équation de l'*Ellipse*, laquelle ne diffère de celle du cercle que par la fraction $\frac{aa}{bb}$, laquelle exprime l'inégalité des deux axes de l'*ellipse*.

Proposition IV.

815. Si dans l'*ellipse* on suppose que le grand axe $2a$ soit prolongé à l'infini, auquel cas l'*ellipse* se change en *Parabole*, alors dans l'équation $\frac{aa}{bb}yy = 2ax - 2xx$, le terme $-2xx$ fera infiniment petit, & par conséquent nul par rapport au terme $2ax$; & alors l'équation de l'*ellipse* deviendra $\frac{aa}{bb}yy = 2ax$, & en simplifiant $yy = \frac{2bbx}{a}$; & faisant la quantité connue & constante $\frac{2bb}{a} = p$, on aura $yy = px$, & c'est l'équation de la *Parabole*.

Proposition V.

816. Si dans l'équation de l'*ellipse* $\frac{aa}{bb}yy = 2ax$

— xx , on suppose que les sommets A, a , & les foyers F, f , soient placés à contre-sens, auquel cas l'ellipse devient une *Hyperbole*; alors la co-abscisse qui étoit $2a - x$, se trouvera placée dans le même sens que l'abscisse, & sera par conséquent $2a + x$: donc le rectangle des abscisses alors sera $2ax + xx$, & l'équation précédente se changera en $\frac{aa}{bb} = 2ax + xx$; & c'est l'équation de l'*Hyperbole* appelée *elliptique*, c'est-à-dire, de l'*Hyperbole* dont les deux axes sont inégaux, & qui par cette raison est dite dériver de l'ellipse.

Si dans cette dernière équation on suppose $a=b$, ou si l'on suppose que les deux axes de l'*Hyperbole* soient égaux, alors on aura $\frac{aa}{bb} = \frac{aa}{aa} = 1$; & l'équation se changera en celle-ci, $yy = 2ax + xx$; & c'est l'équation de l'*Hyperbole* appelée *circulaire*, c'est-à-dire, de l'*Hyperbole* dont les deux axes sont égaux, & qui par cette raison est dite dériver du cercle.

Corollaire I.

817. Il suit que les équations de l'*Hyperbole* soit circulaire, soit elliptique, ne diffèrent des équations du cercle & de l'ellipse, que par le signe + qui affecte le terme xx pour les hyperboles, au lieu que le signe — affecte le même terme xx pour le cercle & l'ellipse.

Corollaire II.

818. On voit par ce qui vient d'être dit, que les équations des sections coniques dérivent toutes d'une équation primitive, sçavoir, de l'équation du cercle; & par conséquent que la nature des sections coniques peut être représentée par une équation générale, qui pourra s'appliquer à chaque section en particulier, en la modifiant suivant les différences qu'admettent les sections

en particulier par rapport aux axes, aux abscisses, aux co-abscisses, &c. Cette équation générale sera $\frac{aa}{bb}yy = 2ax \pm xx$ ou $yy = \frac{2bbx}{a} \pm \frac{bbxx}{aa}$, que l'on appelle l'équation généralissime à l'axe des sections coniques, & de laquelle on peut déduire l'équation à l'axe de chaque section en particulier. Car

I°. Si l'on suppose $a = b$, & qu'on prenne dans le second membre le signe —, alors de l'équation générale $\frac{aa}{bb}yy = 2ax \pm xx$, on déduira l'équation $yy = 2ax - xx$, qui est celle du *Cercle*.

II°. Si l'on suppose $a > b$, & qu'on prenne dans le second membre le signe —, on aura $\frac{aa}{bb}yy = 2ax - xx$, qui est l'équation de l'*Ellipse*.

III°. Si l'on suppose $a = \infty b$, le terme — xx sera nul par rapport à $2ax$, & on aura $\frac{aa}{bb}yy = 2ax$, ou $yy = \frac{2bbx}{a}$, pour l'équation de la *Parabole*.

IV°. Si l'on prend le signe + dans le second membre, & qu'on laisse tout le reste, on aura $\frac{aa}{bb}yy = 2ax + xx$, & c'est l'équation de l'*hyperbole Elliptique*; & supposant $a = b$, on aura $yy = 2ax + xx$, pour l'équation de l'*hyperbole Circulaire*.

ARTICLE III.

Des Sections coniques comparées dans leurs affections.

THÉORÈME I.

819. *Dans une section conique le Paramètre est égal à la double ordonnée qui passe par le foyer.*

DÉMONST. Si l'on appelle x la distance du cen-

tre à l'ordonnée y , alors l'équation généralissime
 $\frac{aa}{bb} yy = 2ax \pm xx$, deviendra $\frac{aa}{bb} yy = \mp aa \pm xx$.

Or lorsqu'on prend l'ordonnée qui passe par le
 foyer, alors la distance de l'ordonnée au centre
 sera la même que celle du foyer au centre, & l'on
 aura $x=c$: donc mettant c à la place de x , l'équa-
 tion généralissime se changera en $\frac{aa}{bb} yy = \mp aa \pm$

cc . Or $aa \pm cc = bb$: donc $\frac{aa}{bb} yy = bb$: donc $aayy$

$= b^4$, & divisant par aa , $yy = \frac{b^4}{aa}$: donc $y = \frac{bb}{a}$

$= \frac{p}{2}$, & $2y = \frac{2bb}{a} = p$; c'est-à-dire, que la double
 ordonnée $2y$ qui passe par le foyer d'une section
 conique, est égale au paramètre.

THÉORÈME II.

820. *Le Paramètre d'une Section conique est par rapport à la distance du sommet au plus proche foyer, quadruple dans la Parabole, moins que quadruple dans l'Ellipse, plus que quadruple dans l'Hyperbole.*

DÉMONST. Nous venons de prouver que l'or-
 donnée y qui passe par le foyer, est $y = \frac{p}{2}$: donc

$yy = \frac{pp}{4}$. Or substituant cette valeur de yy dans

l'équation au paramètre des sections coniques,
 laquelle est $yy = px \pm \frac{p^2x}{2a}$, & que l'on déduit de

l'équation généralissime en supposant $\frac{2bb}{a} = p$,

comme nous l'avons dit, cette équation de-
 viendra $\frac{pp}{4} = px \pm \frac{p^2x}{2a}$: donc divisant par p , on

aura $\frac{p}{4} = x \pm \frac{xx}{2a}$: donc $p = 4x \pm \frac{2xx}{a}$ Or la quantité x exprime ici la distance du sommet au plus proche foyer ; d'où il s'ensuit

I°. Que dans la parabole a étant infini , le terme $\frac{2xx}{a}$ devient infiniment petit , & par conséquent nul par rapport à $4x$: donc dans la parabole on aura $p = 4x$; c'est-à-dire , que le paramètre p est quadruple de la distance du foyer au sommet.

II°. Dans l'ellipse on a $p = 4x - \frac{2xx}{a}$; c'est-à-dire , que le paramètre est moins que quadruple par rapport à la distance x , de toute la quantité $\frac{2xx}{a}$.

III°. Dans l'hyperbole on a $p = 4x + \frac{2xx}{a}$; c'est-à-dire , que p est plus que quadruple par rapport à x , de toute la quantité $\frac{2xx}{a}$.

THÉORÈME III.

821. Dans toute Section conique la Sous-tangente est par rapport à l'abscisse , double dans la Parabole , plus que double dans l'Ellipse , moins que double dans l'Hyperbole.

DÉMONST. I°. Dans la parabole l'abscisse est x , & la sous-tangente est (779) $PT = 2x$: donc , &c.

II°. Dans l'ellipse l'abscisse est $a - x$, & la sous-tangente est $PT = \frac{aa - xx}{x}$: donc on a $PT : a - x$

:: $a + x : x$. Or dans l'ellipse a est toujours plus grand que x : donc $a + x$ est plus que double de x : donc aussi PT est plus que double de l'abscisse $a - x$.

III°. Dans l'hyperbole l'abscisse est $x - a$, & la

sous-tangente est $PT = \frac{xx - aa}{x}$: donc $PT : x - a$
 :: $x + a : x$. Or dans l'hyperbole a est toujours
 plus petit que x : donc $x + a$ est moins que double
 de x : donc PT est aussi moins que double de
 l'abscisse $x - a$.

T H É O R È M E I V.

822. *Dans toute Section conique la Sous-perpendi-
 culaire est par rapport à la moitié du Paramètre, égale
 dans la Parabole, moindre dans l'Ellipse, plus grande
 dans l'Hyperbole.*

DÉMONST. I°. Dans la parabole le paramètre
 est $4a$. Or la sous-perpendiculaire est $PC = 2a$
 (fig. 4.) : donc, &c.

II°. Dans l'ellipse, & dans l'hyperbole la sous-
 perpendiculaire (fig. 8 & 9.) est $PE = \frac{px}{2a}$: donc
 $PE : \frac{1}{2}p :: x : a$. Or x est toujours plus petit que a
 dans l'ellipse, & est plus grand que a dans l'hy-
 perbole : donc $PE < \frac{1}{2}p$ dans l'ellipse, & $> \frac{1}{2}p$
 dans l'hyperbole.

F I N.