LIVRE TROISIÉME.

INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES.

SI dans le cône on fait différentes ſections par le moyen d'un plan, les lignes qui paroîtront décrites à l'extrémité de ces ſections, ſeront des courbes que l'on appelle *Sections coniques*. Ces courbes ont des propriétés remarquables & intéreſſantes pour les ſciences & les arts. C'eſt pourquoi les Géométres ſe ſont appliqués à en faire connoître la nature, à démontrer leurs différentes propriétés, & à remarquer les différens phénomènes qui en peuvent réſulter. On peut conſidérer les ſections coniques, ſoit dans le cône même où elles prennent leur origine; ſoit hors du cône, ou dans un plan ſur lequel on peut les décrire, ou les concevoir décrites. Nous allons les envisager ſous ces deux rapports.

SECTION I.

Des Sections Coniques conſidérées dans le Cône.

Hypothèse.

739. SI dans le cône on fait des ſections par le moyen d'un plan coupant, les figures, ou ſections coniques qui en réſulteront, ſeront de différente eſpéce, ſuivant la direction qu'aura ſuivi le plan, comme on va le voir.

1°. Si l'on coupe le cône par un plan qui tombe du sommet sur la base, soit perpendiculairement, soit obliquement, la section faite par ce plan sera un *Triangle.*

II°. Si l'on coupe le cône par un plan parallele à la base, la section donnera un *Cercle.*

III°. Si le plan coupant qui vient de donner le cercle, au lieu d'être parallele à la base, venoit un peu à s'incliner & à devenir oblique sur cette base, alors la section S*s* (*fig.* 2.), qui en résultera, pourra être regardée comme un cercle allongé dans un sens, & rétréci dans un autre, ou comme un cercle qui auroit deux axes inégaux: cette courbe s'appelle *Ellipse.*

IV°. Si le plan coupant qui vient de donner l'ellipse, devenoit oblique sur sa base, de façon qu'il devint tout-à-fait parallele au côté AB (*fig.* 1.), alors la section pourra être regardée comme une ellipse infinie, ou dont le sommet inférieur seroit infiniment éloigné. Car le plan coupant étant parallele au côté AB du cône, ne pourra jamais couper ce côté, & donner un second sommet opposé au premier S; cette section s'appelle *Parabole.*

V°. Si le plan coupant qui vient de donner la parabole, devenoit perpendiculaire à la base du cône, ou même s'il tomboit sur cette base, de façon à être incliné sur elle, mais sans être parallele au côté du cône, alors la section donneroit une courbe infinie, comme la précédente, & on l'appelle *Hyperbole.* Telle est la courbe *mSm* (*fig.* 3.). Si au cône CAB on joignoit par le sommet A un autre cône égal au premier, & si le plan coupant étoit supposé prolongé, il rencontreroit le second cône, & y feroit une section, laquelle seroit encore une hyperbole, comme la premiere, & on l'appelle *Hyperbole-conjuguée.*

Proposition I.

740. Il n'est pas possible de faire dans un cône des sections d'où résultent d'autres figures que les

cinq que nous venons de nommer, sçavoir, le *Triangle*, le *Cercle*, l'*Ellipse*, la *Parabole*, & l'*Hyperbole*.

DÉMONST. En effet le plan coupant commence la section, ou par le sommet du cône, ou par un point de la surface du cône.

I°. Si la section commence au sommet du cône, elle donnera un *Triangle*.

II°. Si elle commence à un point de la surface du cône, ou bien le plan coupant sortira du cône, ou bien il restera en dedans du cône.

Si le plan coupant sort du cône, ou il sera parallele à la base, & alors la section donnera un *cercle*; ou il sera incliné sur la base, & alors la section donnera une *ellipse*.

Si le plan coupant reste en dedans du cône, ou il sera parallele au côté du cône, ou il sera parallele à l'axe du cône, ou il sera incliné sur la base, sans être parallele ni au côté, ni à l'axe du cône. Or dans le premier cas la section sera une *parabole*; dans le second & le troisiéme la section sera une *hyperbole*.

Proposition II.

741. La nature d'une courbe dépend de la direction qu'elle suit dans ses différens points. Il est aisé de déterminer la direction d'une *ligne droite*, parce qu'elle ne dépend que de deux points : on peut aussi déterminer facilement celle d'une *circonférence* de cercle, parce qu'elle ne dépend que de trois points. Mais la position & la direction d'une ligne courbe différente du cercle n'est pas aisée à déterminer, parce que sa courbure n'étant pas uniforme comme celle du cercle, sa position & sa direction varie dans ses différens points. Or

I°. Les Géométres pour pouvoir déterminer la position & la direction d'une courbe, & connoître par ce moyen sa nature, ont imaginé de tirer d'un point pris dans la courbe, une ligne telle que *Sp*, ou *Ss* (*fig.* 1. 2. 3.) autour de laquelle on concevroit que la courbe pût faire une révolution. Ils ont appellé cette ligne, l'*axe* de la courbe, & le point, ou les points de la courbe qui terminent cet axe, s'appellent le *sommet*, ou les *sommets* de la courbe.

II°. De plus de chaque point de la courbe les Géométres menent sur cet axe des lignes MP, *mp* (*fig.* 1. 2. 3.) tirées perpendiculairement, ou même obliquement, mais dans le même degré d'obliquité: ces lignes MP, *mp*, s'appellent *ordonnées* à l'axe de la courbe; la portion de l'axe comprise entre chaque ordonnée & le sommet S de la courbe, s'appelle *abscisse*, & la portion de l'axe comprise de l'autre côté entre la même ordonné & le sommet opposé *s*, se nomme *co-abscisse*.

III°. Or le rapport constant qui se trouve entre une certaine fonction de chaque *ordonnée*, & une certaine fonction de ses *abscisses* correspondantes, est ce qui détermine la nature de la courbe, & en fait découvrir les propriétés & les affections.

DÉFINITIONS.

I.

742. L'ordonnée & l'abscisse considérées ensemble s'appellent *co-ordonnées*, & ce sont les différens rapports que les co-ordonnées peuvent avoir entre elles, qui différencient les courbes.

II.

743. Dans le *cercle* & l'*ellipse* chaque ordonnée a son abscisse & sa co-abscisse; dans la *parabole* il n'y a point de co-abscisse; dans l'*hyperbole* la co-abscisse se trouve du même côté que l'abscisse, & se prend depuis l'ordonnée jusqu'au sommet de l'hyperbole opposée ou conjuguée.

LEMME I.

744. *Une ligne* AC *perpendiculaire à un plan est aussi perpendiculaire à toutes les droites menées sur ce plan & qui passent par le point, ou le pied* C *de la perpendiculaire* (fig. 110.)

CONSTRUCTION. Concevez que le triangle rectangle ACB tourne autour du côté AC, pris comme axe; & en ce cas la base CB dans la révolution décrira la surface GFEBK, &c., que l'on appelle *Plan*, & auquel sera perpendiculaire la ligne AC.

I°. On appelle donc *Plan*, une surface considérée en tant que tous ses points sont semblablement posés entre ses extrémités, c'est-à-dire, qui ne sont pas plus élevés les uns que les autres.

II°. On peut aussi définir un plan, une surface telle qu'une ligne droite qui lui est appliquée en tout sens; convient parfaitement avec elle, ou est posée toute entiere sur elle.

DÉMONST. Les lignes CK, CI, CH, &c. menées sur le plan par le pied C de la perpendiculaire, ne sont autre chose que les traces que laisse la ligne CB, lorsque dans la révolution du triangle rectangle ACB elle décrit le plan: or cette ligne CB pendant la révolution reste toujours perpendiculaire à la ligne CA: donc, &c.

LEMME II.

745. *La section commune* AB *de deux plans perpendiculaires sur un troisiéme plan, est perpendiculaire à ce plan* (fig. 111.).

DÉMONST. Si du point B ou les trois plans se rencontrent, on éléve une perpendiculaire, cette perpendiculaire sera dans le plan EF, puisque ce plan est perpendiculaire sur le troisiéme plan; elle sera aussi dans le plan GH, parce que ce plan est pareillement perpendiculaire au troisiéme plan: donc cette perpendiculaire sera dans les deux plans EF & GH; mais elle ne peut appartenir aux deux plans, sans être dans leur commune section BA: donc, &c.

THÉORÊME I.

746. *Dans la parabole les Quarrés des Ordonnées sont entr'eux comme les Abscisses* (fig. 1.).

DÉMONST. Concevez que par le point E passe le plan d'un cercle parallele à la base. Si par le sommet A on conçoit faite une section triangulaire BAC perpendiculaire à la base, & que par le point S il soit fait une section parabolique *mSm*, perpendiculaire sur le plan du triangle; le plan du cercle EDE, (il faut dire la même chose du plan du cercle BCB,) & le plan de la parabole se couperont & feront les sections MM, ou *mm*. Or le plan du cercle & le plan de la parabole sont chacun perpendiculaires sur le plan du triangle : donc leur commune section PM sera perpendiculaire (745) au plan du triangle : donc PM sera aussi perpendiculaire (744) tant au diamétre ED du cercle, qu'à l'axe *Sp* de la parabole (il faut dire la même chose de *pm*,) donc les lignes PM, *pm*, sont des ordonnées communes au cercle & à la parabole.

Or on a par la propriété du cercle (442).

$$\overline{PM^2} : \overline{pm^2} :: PD \times PE : pC \times pB;$$

& à cause des paralleles AB, *Sp*, qui donnent PE $= pB$, on aura $\overline{PM^2} : \overline{pm^2} :: PD : pC$. Mais à cause des triangles semblables SPD, SpC; on a PD : pC :: SP : Sp; donc $\overline{PM^2} : \overline{pm^2} :: SP : Sp$, c'est-à-dire, que les quarrés des ordonnées PM, *pm*, sont entr'eux comme les abscisses correspondantes.

THÉORÊME II.

747. *Dans l'Ellipse les Quarrés des Ordonnées sont entr'eux comme les Rectangles des Abscisses correspondantes* (fig. 2.).

DÉMONST. Ayant fait passer deux plans paralleles à la base du cône, on aura deux cercles E*m*F, GMH, qui couperont le plan de la section elliptique; & on verra, comme ci-dessus, que PM & *pm* sont des ordonnées communes au cercle & à la section elliptique.

Or on a (442) par la propriété du cercle.

$$\overline{PM^2} : \overline{pm^2} :: PG \times PH : pE \times pF.$$

Mais les triangles ſemblables SPH, SpF donnent d'une part PH : pF :: SP : Sp, & les triangles ſemblables spE, sPG donnent de l'autre part PG : pE :: sP : sp donc en multipliant les deux dernieres proportions l'une par l'autre, ce qui donne

$$PG \times PH : pE \times pF :: SP \times sP : Sp \times sp,$$

on aura $\overline{PM^2} : \overline{pm^2} :: SP \times sP : Sp \times sp$, dans laquelle proportion les deux derniers termes ſont les rectangles des abſciſſes correſpondantes.

THÉORÊME III.

748. *Dans l'Hyperbole les Quarrés des Ordonnées ſont entr'eux comme les Rectangles des Abſciſſes correſpondantes* (fig. 3.).

DÉMONST. Par la propriété du cercle on a

$$\overline{MP^2} : \overline{mp^2} :: PD \times PE : pC \times pB.$$

Or à cauſe des triangles ſemblables SPD, SpC, on a la proportion PD : pC :: SP : Sp; & à cauſe des triangles ſemblables sPE, spB, on a auſſi PE : pB :: sP : sp; donc en multipliant les deux proportions l'une par l'autre, on aura

$$PD \times PE : pC \times pB :: SP \times sP : Sp \times sp;$$

donc on aura $\overline{PM^2} : \overline{pm^2} :: SP \times sP : Sp \times sp$, dans laquelle proportion les deux derniers termes ſont les rectangles des abſciſſes correſpondantes.

SECTION II.

Des Sections Coniques conſidérées ſur un Plan.

LORSQU'ON enviſage les ſections coniques ſur un plan, on peut les conſidérer ou abſolument & en elles-mêmes, ou par comparaiſon. Nous allons les conſidérer ſous ces deux points de vue.

CHAPITRE I.

Des Sections Coniques considérées en elles-mêmes.

NOus parlerons, 1°. de la parabole ; 2°. de l'ellipse ; 3°. de l'hiperbole.

ARTICLE I.

De la Parabole.

HYPOTHÈSE.

749. Si sur une droite AD, posée sur un plan, (*fig.* 4.) on mene une perpendiculaire AC, sur laquelle on prenne à volonté un point F, & si, par tant de points que l'on voudra de la droite AD, on mene des paralleles DM, sur chacune desquelles on prenne un point M, tel que l'on ait toujours $MD = MF$, la courbe qui passera par tous ces points M, s'appelle *Parabole*, & a les mêmes propriétés que celle que nous avons considérée dans le cône, comme nous le prouverons bientôt. La ligne AD, ou DD s'appelle *Directrice*, & le point F s'appelle *Foyer*.

Corollaire I.

750. La ligne AF est partagée en deux également au point S ; c'est-à-dire, que l'on a $SA = SF$. Car S étant un point de la courbe décrite, doit être également distant de F & de la ligne DA.

Corollaire II.

751. C'est pourquoi le point S est de tous les points de la courbe le plus proche de DA, & par cette raison est le point le plus élevé, & s'appelle le *sommet* de la parabole.

DÉFINITIONS.

I.

752. La ligne AC dans laquelle se trouve le

foyer F, & autour de laquelle on conçoit que la courbe en tournant feroit sa révolution, s'appelle l'*Axe* de la courbe; le point S où l'axe prend son origine, s'appelle le *sommet de la courbe*, ou l'*Origine de l'axe.*

I I.

753. Nous appellerons *Paramétre* de l'axe une ligne p quadruple de SA, ou quadruple de la distance de l'origine de l'axe à la directrice.

I I I.

754. Si du sommet S, origine de l'axe, ou d'un point quelconque M de la courbe, vous menez une ligne SB, ou SE, ou MT, qui touche la courbe au point S, ou au point M, cette ligne s'appelle *Tangente*, & les points S ou M s'appellent *points de contingence.*

I V.

755. Une ligne quelconque *mp*, MP, tirée d'un point quelconque de la courbe à l'axe, & parallele à la tangente SE, s'appelle *Ordonnée* à l'axe; & les lignes S*p*, ou SP, comprises entre le sommet & l'ordonnée, s'appellent *Abscisses.*

V.

756. Si de l'extrémité M d'une ordonnée quelconque MP, vous menez une tangente MT qui rencontre l'axe prolongé, la portion TP de l'axe comprise entre l'ordonnée & l'extrémité T de la tangente, s'appelle *Sous-Tangente.*

V I.

757. Si du point M vous menez sur l'axe une ligne MC qui soit perpendiculaire à la tangente, cette perpendiculaire s'appelle *Normale*; la portion CP de l'axe comprise entre l'ordonnée & la perpendiculaire MC, s'appelle *Sous-Perpendiculaire*, ou *Sous-Normale.*

V I I.

758. Une ligne FM menée du foyer F à un point quelconque de contingence M, s'appelle *Rayon vecteur.*

Corollaire.

759. On voit par ces difinitions que l'axe eſt une ligne que l'on ne doit pas conſidérer toute ſeule, mais comme un terme auquel ſe rapportent pluſieurs lignes qui en dépendent, & qui forment un ſyſtême fixe & déterminé, que l'on peut appeller *Syſtême de l'axe.* Ce ſyſtême de l'axe comprend l'*ordonnée* & ſes *abſciſſes ;* la *tangente* & la *ſous-tangente ;* la *perpendiculaire* & la *ſous-perpendiculaire ;* le *paramétre* & le *rayon vecteur.*

THÉORÊME I.

760. ***Dans la courbe que l'on vient de décrire le Quarré de l'ordonnée*** MP (y) ***eſt égal au rectangle de l'abſciſſe correſpondante*** PS (x) ***par le paramétre*** p ***de l'axe*** (fig. 4.); ***c'eſt-à-dire, que l'on a*** $yy = px$.

DÉMONST. Suppoſant la quantité conſtante SA, ou SF $= a$, on aura MF $=$ MD (749.) $=$ PS $+$ SA $= x + a$, & PF $= x - a$, ou $= a - x$, ſelon que le point P ſe trouve au-deſſous, ou au-deſſus du foyer F.

Or le triangle rectangle MPF donne $\overline{MF}^2 = \overline{MP}^2 + PF^2$, ou algébriquement.

$$aa + 2ax + xx = yy + aa - 2ax + xx:$$

donc tranſpoſant on aura $yy = 4ax$. Or (753) $4a = p$: donc $yy = px$.

Corollaire I.

761. Si l'on prend une autre ordonnée Y avec ſon abſciſſe X l'on aura de même $Y^2 = pX$, d'où l'on conclud $Y^2 : y^2 :: pX : px$, & par conſéquent $Y^2 : y^2 :: X : x$. (180): c'eſt-à-dire, que dans la courbe qui vient d'être décrite, les quarrés des ordonnées ſeront entr'eux comme les abſciſſes correſpondantes. D'où il ſuit que la courbe qui vient d'être décrite, eſt une *parabole*, & eſt la même que celle que nous avons eue dans le cône par une ſection parallelle au côté.

Corollaire II.

762. Puiſque $yy = px$, il ſuit que $x : y :: y : p$, ou que $\div x : y : p$, c'eſt-à-dire, que le paramétre

est une troisiéme proportionnelle à l'abscisse & à l'ordonnée.

Corollaire III.

763. C'est sur cette propriété du paramétre qu'est fondé son usage, qui consiste à déterminer le rapport entre la longueur & la largeur de la parabole, lequel est le même que celui qui regne entre l'abscisse & l'ordonnée correspondante. En effet dans l'équation $yy=px$, supposons $p=1$, & elle deviendra $yy=x$. Or,

I°. Si l'on suppose l'abscisse $x=\frac{1}{9}$, du paramétre, l'on aura $yy=\frac{1}{9}$, & $y=\frac{1}{3}$, c'est-à-dire, que lorsque l'abscisse est un $\frac{1}{9}$ du paramétre, l'ordonnée en est le $\frac{1}{3}$, & par conséquent la parabole alors croît davantage selon la largeur que selon la longueur.

II°. Supposons l'abscisse $x=\frac{1}{4}$ du paramétre, & nous aurons $yy=\frac{1}{4}$, & $y=\frac{1}{2}$: c'est-à-dire, qu'alors l'ordonnée est la moitié du paramétre. Or le point de l'axe où l'abscisse est $=\frac{1}{4}$ du paramétre, est le foyer (750); d'où l'on conclud que dans la parabole la double ordonnée qui passe par le foyer, est égale au paramétre, & que dans ce cas la parabole a encore plus de largeur que de longueur.

III°. Supposons l'abscisse $x=1$, ou égal au paramétre, & l'on aura $yy=1$; & $y=1$, c'est-à-dire, que dans ce cas l'ordonnée & l'abscisse sont égales, & que la parabole a autant de longueur que de largeur.

IV°. Supposons l'abscisse $x=4$, ou quadruple du paramétre, l'on aura $yy=4$, & $y=2$, c'est-à-dire, que l'ordonnée n'est que double du paramétre, & qu'alors la parabole croît plus selon la longueur que selon la largeur.

Corollaire IV.

764. Ayant mené de l'extrémité d'une ordonnée MP (*fig.* 5.), une corde MA, & une ligne MD perpendiculaire à cette corde, la portion DP de

l'axe comprise entre l'ordonnée & cette perpendiculaire sera égale au paramétre. Car à cause du triangle rectangle DMA, on aura AP : PM :: PM : DP, ou $x : y :: y : \frac{yy}{x} = p$.

Théorême II.

765. *Une perpendiculaire* MT, *qui divise en deux également une droite* FD, *tirée du foyer à la directrice, va toucher la Parabole en un point quelconque* M, *& est une Tangente* (fig. 4.).

Demonst. La ligne MT, divisant en deux également la base du triangle DMF, qui est isocele (749), & étant perpendiculaire à cette base, passe nécessairement par le sommet M de l'angle DFM (319). Or ce sommet est un point de la parabole : donc la ligne MT touche la parabole au point M.

Or elle ne la coupera point; car elle passera par tous les points également distans de D & de F. Or les points de la parabole qui sont au-dessous de M s'éloignent toujours plus de D que de F, parce qu'ils sont tous à égale distance (749) du foyer & de la directrice : donc, &c.

Corollaire.

566. L'angle HMX formé par la ligne HM, parallele à l'axe, & la tangente XMT, est égal à l'angle TMF formé par la tangente MT, & le rayon vecteur MF; car HMX = DMT = TMF.

D'où il suit qu'un rayon de lumiere, dirigé suivant la ligne HM, se réfléchiroit au foyer F; & pareillement que partant du foyer F au point M, il se réfléchiroit suivant la ligne MH.

Théorême III.

767. *Dans la Parabole la Sous-perpendiculaire, ou Sous-normale* PC *est égale à la moitié du Paramétre, & son expression est* $s = \frac{1}{2}p$ (fig. 4.).

Démonst. Les lignes DF & MC sont paralleles, puisqu'elles sont perpendiculaires sur une même ligne MT. Elles sont aussi égales, puisqu'elles ſont paralleles entre des paralleles. De plus les lignes DA & MP ſont paralleles & égales : donc les triangles DFA, MCP ſont équiangles & égaux : donc on aura PC = AF, ou $PC = \frac{1}{2} p$.

Corollaire.

768. Le triangle rectangle CPM donne auſſi $\overline{MC}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PC}^2 = yy + \frac{1}{4} pp = px + \frac{1}{4} pp$: donc appellant m la perpendiculaire, ou *normale* MC, ſon expreſſion ſera $m = \sqrt{px + \frac{1}{4} pp}$.

THÉORÊME IV.

769. *Dans la parabole la Sous-Tangente* PT *eſt double de l'Abſciſſe, & ſon expreſſion ſera* PT = $2x$.

DÉMONST. Dans le triangle rectangle CTM, à cauſe de la perpendiculaire MP abaiſſée du ſommet M ſur l'hypothénuſe CT, on a CP : PM :: PM : PT, ou algébriquement $2a : y :: y : PT$: donc $PT = \frac{yy}{2a}$: or $yy = 4ax$: donc $PT = \frac{4ax}{2a}$, ou $PT = 2x$.

Corollaire.

770. Le triangle rectangle TPM donne auſſi $\overline{MT}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PT}^2 = yy + 4xx = px + 4xx$: donc l'expreſſion de la *tangente* ſera $MT = \sqrt{px + 4xx}$.

THÉORÊME V.

771. *Dans la Parabole, le rayon vecteur* FM *eſt égal à l'Abſciſſe, plus au quart du Paramétre de l'axe, & ſon expreſſion eſt* $r = x + \frac{1}{4} p$.

DÉMONST. On a (749) FM = MD = AP = AS + SP = $x + \frac{1}{4} p$: donc FM, ou $r = x + \frac{1}{4} p$.

Remarque.

772. La parabole a pluſieurs uſages applicables aux ſciences & aux arts. On s'en ſert,

I°. Dans la pratique du *jet des bombes*, pour déterminer l'élévation, la portée, & les autres circonſtances du jet, comme on voit dans la *Méchanique*.

II°. Pour déterminer & calculer le cours & le mouvement

mouvement des *comêtes*, comme on le fait voir en *Astronomie*.

III°. Dans la *Catoptrique* & la *Dioptrique*, pour déterminer les effets & les usages des verres & des miroirs paraboliques.

ARTICLE II.

De l'Ellipse.

HYPOTHÉSE.

773. Ayant mené sur un plan une ligne AB (*fig.* 7.) dans laquelle on détermine deux points F, *f*, également distans chacun des extrémités A, B; si vous prenez hors de cette droite des points M, G, &c. tels que la somme des distances de chacun de ces points aux deux points F, *f*, soit constante, & toujours égale à la droite AB, la courbe qui passera par ces points M, G, &c. s'appelle une *Ellipse*, & est la même que celle que nous avons considérée dans le cône, comme nous l'allons prouver.

DÉFINITIONS.

I.

774. La ligne AB s'appelle le *grand Axe* de cette courbe; la ligne perpendiculaire MN, qui partage en deux également le grand axe, s'appelle le *petit Axe*, ou l'*Axe conjugué*; on les appelle aussi *premier* & *second* axes: le point C, où les deux axes se coupent, s'appelle le *Centre*.

II.

775. Une troisiéme proportionnelle aux deux axes est nommé le *Paramétre* de l'axe, qui fait le premier terme de la proportion; ensorte que si l'on a AB : MN :: MN : p, la quantité p sera le paramétre du grand axe.

III.

776. Les points F, *f*, s'appellent *Foyers*, & la somme des distances de ces foyers à chaque point

de la courbe eſt toujours une quantité conſtante, laquelle eſt égale au grand axe ; ſçavoir, l'on a toujours MF + Mf, ou GF + Gf = AB.

I V.

777. Chacun des axes a ſes ordonnées & ſes abſciſſes. Les *Ordonnées* ſont des lignes menées de différens points de la courbe ſur l'axe, & paralleles à l'axe conjugué. Les *Abſciſſes* ſe prennent depuis l'origne de l'axe juſqu'aux ordonnées.

THÉORÊME I.

778. *Dans cette courbe le petit demi-Axe eſt moyen proportionnel entre les diſtances d'un des foyers aux deux extrémités du grand Axe* (fig. 6.), *c'eſt-à-dire, l'on a* FA : MC :: MC : FB.

DÉMONST. A cauſe du triangle rectangle MCF, on aura $\overline{MC^2} = \overline{FM^2} - \overline{FC^2}$. Donc ſi l'on nomme c la diſtance du centre au foyer, a le grand demi-axe, & b le petit demi-axe, on aura algébriquement $bb = aa - cc$: d'où l'on tire la proportion $a - c : b :: b : a + c$, ou FA : MC :: MC : FB.

THÉORÊME II.

779. *Dans la courbe qui vient d'être décrite, le quarré de l'ordonnée au grand axe eſt au produit de ſes abſciſſes, comme le quarré du petit axe eſt au Quarré du grand axe* (fig. 8.).

DÉMONST. La ſomme des deux diſtances, ou des rayons vecteurs fM + FM ſoit appellée $2a$, & leur différence $2z$; par conſéquent l'on aura (237) $f\mathrm{M} = a + z$, & FM $= a - z$.

Suppoſons la diſtance PC de l'ordonnée au centre $= x$, & l'on aura l'abſciſſe AP $= a - x$, & la co-abſciſſe P$a = a + x$.

Soit auſſi l'excentricité FC $= c$, & l'on aura FP $= c - x$, & P$f = c + x$. Cela étant,

I°. Le triangle rectangle PMF donnera $\overline{PM^2} = \overline{MF^2} - \overline{PF^2}$, ou algébriquement $yy = aa - 2az + zz - cc + 2cx - xx$.

II°. Pareillement le triangle rectangle PMf donnera $\overline{PM}^2 = \overline{fM}^2 - \overline{Pf}^2$, ou algébriquement $yy = aa + 2az + zz - cc - 2cx - xx$.

III°. Prenant la valeur de yy dans la premiere équation, & la substituant à la place de yy dans la seconde équation, celle-ci deviendra $aa - 2az + zz - cc + 2cx - xx = aa + 2az + zz - cc - 2cx - xx$; & réduisant $4az = 4cx$: donc $z = \frac{cx}{a}$.

IV°. Substituant cette valeur de z à la place de z dans la premiere équation, elle deviendra $yy = aa - 2cx + \frac{ccxx}{aa} - cc + 2cx - xx$; & multipliant par aa, l'on aura $aayy = a^4 - 2aacx + ccxx - aacc + 2aacx - aaxx = \overline{aa - xx} \times \overline{aa - cc}$: donc

$$aayy = \overline{aa - xx} \times \overline{aa - cc}.$$

Or (778) $aa - cc = bb$. Donc divisant le premier membre par bb, & le second par $aa - cc$, on aura $\frac{aa}{bb} yy = aa - xx$; d'où l'on tire cette proportion $yy : aa - xx :: bb : aa$; c'est-à-dire, que dans cette courbe le quarré de l'ordonnée est au produit de ses abscisses, comme, &c.

Corollaire.

780. Si nous prenons une autre ordonnée quelconque MP $= Y$, l'on prouvera de même que $Y^2 : aa - XX :: bb : aa$; d'où l'on conclud $Y^2 : y^2 :: aa - XX : aa - xx$; c'est-à-dire, que les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les produits des abscisses, & par conséquent que cette courbe est une *ellipse*, & la même que la section conique à laquelle nous avons donné ce nom.

THÉORÊME III.

781. *Ayant prolongé la ligne* fM, *de façon que* Mm $=$ MF, *& ayant tiré la ligne* mF, *je dis qu'une ligne* MT *qui divisera en deux également la ligne* mF, *sera Tangente au point* M *de l'ellipse* (fig. 8.).

DÉMONST. Ayant mené du point M de l'ellipſe une ligne quelconque MT qui diviſe en deux également la ligne mF, il n'y aura que le ſeul point M de la ligne MT qui ſoit de l'ellipſe; tous les autres points ſeront hors de l'ellipſe. Car la ſomme de leurs diſtances, *par ex :* des diſtances du point D aux foyers F, f ſera plus grande que Aa, ou fm. En effet concevant que l'on ait joint par des lignes les points f, D, & D, m, ces lignes fD, & Dm ſeroient les deux côtés d'un triangle dont fm ſera le troiſiéme côté: donc $fD + Dm$ ſeroient plus grands que fm. Or $fm = Aa$: donc la ſomme $fD + Dm$ ſeroit plus grande que le grand axe Aa.

Corollaire.

782. Les droites tirées des foyers aux points de contingence, (leſquels s'appellent *rayons vecteurs* de l'ellipſe,) forment avec la tangente des angles fMD, FMT égaux. Car $fMD = TMm = TMF$ (*fig.* 8.). D'où il ſuit qu'un rayon de lumiere allant d'un des foyers f à la circonférence de l'ellipſe, ſe réfléchiroit à l'autre foyer F.

THÉORÊME IV.

783. *Dans l'Ellipſe l'expreſſion du Rayon vecteur* FM *mené du foyer au point de contingence, eſt* $r = \frac{aa - cx}{a}$.

DÉMONST. Le triangle rectangle FMP donne $FM^2 = \overline{PM^2} + \overline{PF^2}$. Or $MP = y$, & $PF = c - x$: donc on aura $\overline{FM^2} = yy + cc - 2cx + xx$. Or nous avons vu (779) que $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$: donc ſubſtituant on aura $\overline{FM^2} = bb - \frac{bbxx}{aa} + cc - 2cx + xx$. Nous avons vu auſſi (778) que $bb = aa - cc$: donc ſubſtituant encore, on aura $\overline{FM^2} = aa - cc - xx + \frac{ccxx}{aa} + cc$

$- 2cx + xx$; & réduisant, $\overline{FM^2} = aa - 2ccx + \frac{ccxx}{aa}$, ou $\overline{FM^2} = \frac{a^4 - 2aacx + ccxx}{aa}$: donc FM, ou $r = \frac{ac - cx}{a}$.

Théorême V.

784. *L'expression de la Sous-perpendiculaire* PE *est* $\frac{bbx}{aa}$, ou $\frac{px}{2a}$.

Démonst. Ayant mené EM perpendiculaire sur MT, & parallele à Fm, on aura $fm : fF :: Mm : FE$, ou $2a : 2c :: \frac{aa - cx}{a} : FE$; donc $FE = \frac{aac - ccx}{aa}$: donc retranchant $PF = c - x$ de la quantité précédente, le reste sera

$$PE = \frac{aac - ccx}{aa} - c + x = \frac{aax - ccx}{aa} = x \times \frac{aa - cc}{aa}.$$

Or (778) $aa - cc = bb$: donc substituant, on aura pour l'expression de la sous-perpendiculaire PE = $\frac{bbx}{aa}$, ou $\frac{px}{2a}$.

Théorême VI.

785. *L'expression de la Sous-tangente* PT *est* $\frac{aa - xx}{x}$.

Démonst. Le triangle rectangle EMT, dans lequel la ligne MP est une perpendiculaire abbaissée du sommet sur l'hypothénuse, donne EP : PM :: PM : PT, ou algébriquement $\frac{bbx}{aa} : y :: y : PT$; donc $PT = \frac{aayy}{bbx}$, & substituant à la place de yy sa valeur, on aura $PT = \frac{aabb - bbxx}{bbx}$; & divisant par bb, $PT = \frac{aa - xx}{x}$.

Remarque.

786. On fait usage de l'ellipse dans la *Dioptrique* & la *Catoptrique*, pour la construction des verres & des miroirs ardens; dans l'*Architecture*, pour la construction des voûtes; dans l'*Acoustique*, pour la direction du son; dans l'*Astronomie*, pour déterminer & calculer le cours des planétes.

ARTICLE III.

De l'Hyperbole.

HYPOTHÉSE.

787. Si sur une droite A*a* (*fig.* 9.) on prend deux points F, *f*, également éloignés du milieu C, & que dans le plan sur lequel la droite est posée, on prenne tant de points que l'on voudra, comme M, tels que la différence de leurs distances FM, *f*M aux points F, *f*, soit constante & toujours égale à la ligne A*a*, la courbe qui passera par tous ces points M, s'appelle *Hyperbole*, & est la même que celle que nous avons considérée dans le cône, comme nous l'allons voir; & comme vous pouvez prendre du côté opposé des points semblables, la courbe qui passera de même par tous ces points, s'appelle *Hyperbole conjuguée*.

DÉFINITIONS.

I.

788. La droite A*a* se nomme le *premier Axe*; les points *A*, *a*, sont les *Sommets*; les points F, *f*, les *Foyers*; le point C s'appelle le *Centre*; la droite B*b* (*fig.* 9.) perpendiculaire au premier axe *Aa*, passant par le centre, & terminée en B, *b* par des sections d'arcs de cercle décrits des points A & *a* avec un rayon égal à l'excentricité CF, ou C*f*, s'appelle le second *Axe*.

II.

789. Une troisiéme proportionnelle aux deux

axes, s'appelle le *Paramétre* du premier terme de la proportion.

III.

790. Si dans cette courbe, comme dans l'ellipse, on suppose le premier demi-axe $CA = a$, le second demi-axe $CB = b$, le paramétre du premier axe $= p$, l'ordonnée $MP = y$, la distance de l'ordonnée au centre $= x$, l'excentricité $CF = c$, on aura par conséquent $AP = x - a$, & $aP = x + a$; l'on aura aussi $FP = x - c$, & $fP = x + c$.

THÉORÊME I.

791. *Le second demi-Axe est moyen proportionnel entre les distances d'un des Foyers aux deux sommets de la Courbe que l'on vient de décrire, c'est-à-dire, que* $FA : CB :: CB : Fa$, *ou algébriquement* $c - a : b :: b : c + a$.

DÉMONST. Le triangle rectangle BAC (*fig.* 9.) donne $\overline{BC^2} = \overline{AB^2} - \overline{CA^2}$, ou algébriquement $bb = cc - aa$, d'où l'on tire la proportion $c - a : b :: b : c + a$.

THÉORÊME II.

792. *Dans cette même courbe le Quarré de l'ordonnée au premier Axe est au produit de ses Abscisses, comme le Quarré du second Axe est au Quarré du premier Axe* (fig. 9.).

DÉMONST. Nous avons la différence $fM - FM = 2a$; soit donc la somme $fM + FM = 2z$, & l'on aura par conséquent (237) $fM = z + a$, & $FM = z - a$. Or

I°. Le triangle rectangle PMF donne $\overline{MP^2} = \overline{FM^2} - \overline{FP^2}$, ou algébriquement $yy = zz - 2az + aa - xx + 2cx - cc$.

II°. Le triangle rectangle PMf donne aussi $\overline{MP^2} = \overline{Mf^2} - \overline{Pf^2}$, ou algébriquement $yy = zz + 2az + aa - xx - 2cx - cc$.

III°. Comparant ces deux valeurs de $\overline{MP^2}$, ou yy, on aura $zz - 2az + aa - xx + 2cx - cc = zz +$

$2az + aa - xx - 2cx - cc$: donc on aura $4cx = az$: donc $z = \frac{cx}{a}$.

IV°. Substituant cette valeur de z à la place de z dans la premiere équation, elle deviendra $yy = \frac{ccxx}{aa} - 2cx + aa - xx + 2cx - cc$, ou $aayy = ccxx - 2aacx + a^4 - aaxx + 2aacx - aacc$, & réduisant $aayy = ccxx + a^4 - aaxx - aacc$.

V°. Or nous avons vu (791) que $bb = cc - aa$; donc divisant dans cette équation le premier membre par bb, & le second par $cc - aa$, l'on aura $\frac{aa}{bb}yy = xx - aa$. D'où l'on conclud $yy : xx - aa :: bb : aa$; c'est-à-dire, que le quarré de l'ordonnée est au rectangle de ses abscisses, comme le quarré du second axe est au quarré du premier axe.

Corollaire I.

793. Il suit que dans cette courbe les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les rectangles des abscisses correspondantes, & par conséquent que cette courbe est une *Hyperbole*, & la même que celle que nous avons considérée dans le cône.

Corollaire II.

794. L'on avoit pour l'ellipse la proportion $yy : aa - xx :: bb : aa$, & l'on a pour l'hyperbole $yy : xx - aa :: bb : aa$. Ces deux courbes ont donc les mêmes propriétés, & il n'y a de différence que dans les signes + & —, qui affectent la quantité x, lesquels donnent pour les abscisses de l'ellipse les expressions $a + x$, $a - x$, & pour celles de l'hyperbole $x + a$, $x - a$.

THÉORÊME III.

795. *Si d'un point quelconque* M *de l'hyperbole & de l'intervalle* MF *on décrit un Arc de cercle entre les deux rayons vecteurs* MF, Mf, *une droite* MT *qui divisera*

cet Arc en deux également, sera tangente à l'hyperbole au point M (fig. *6.*).

DÉMONST. La droite MT n'aura que le seul point M commun avec l'hyperbole ; tout autre point tel que D sera hors de l'hyperbole; en effet si du point D on mene aux foyers F, f, les lignes DF, Df, on verra que leur différence sera toujours plus petite que le grand axe ; car du point D, comme centre & de l'intervalle DF, ayant décrit un arc entre DF & Df, cet arc coupera Df en o, & Mf en x ; or l'on aura toujours la différence des lignes DF, Df, laquelle est fo plus petite que fn = Aa, différence entre MF & Mf: car de deux sécantes extérieures fx, fo menées d'un même point f à l'arc convexe Fo décrit du centre D, la plus courte (316) est la ligne fo, qui prolongée passe par le centre D : donc $fo < fx$, donc à plus forte raison $fo < fn$, & par conséquent $fo <$ Aa; donc le point D n'est point à l'hyperbole.

THÉORÊME IV.

796. *Dans l'hyperbole l'expression du rayon vecteur* FM *mené du foyer au point de contingence* M, *est* $r = \frac{cx - aa}{a}$ (fig. 9.).

DÉMONST. Le triangle rectangle FMP donne $\overline{FM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PF}^2$; or PM $= y$ & PF $= x - c$: donc on aura $\overline{FM}^2 = yy + xx - 2cx + cc$: maintenant si nous substituons à la place de yy sa valeur prise dans l'équation de l'hyperbole, laquelle valeur est $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$, & si à la place de bb on substitue aussi sa valeur qui est (791) $bb = cc - aa$, nous trouverons après les substitutions & les réductions FM, ou $r = \frac{cx - aa}{a}$.

THÉORÊME V.

797. *L'expression de la Sous-perpendiculaire* PE *est* $PE = \frac{bbx}{aa}$ ou $\frac{px}{2a}$ (fig. 9.).

DÉMONST. Ayant mené EM perpendiculaire sur MT, & parallele à Fm, les deux triangles semblables fEm, fFn donneront $fn : fF :: Mn : FE$; or l'on a dans l'hyperbole la différence des rayons vecteurs, sçavoir, $fn = 2a$; la distance $fF = 2c$; la portion $Mn = MF = \frac{cx - aa}{a}$: donc substituant on aura la proportion $2a : 2c :: \frac{cx - aa}{a} : FE$; donc $FE = \frac{ccx - aac}{aa}$; donc retranchant $PF = x - c$ de la quantité précédente, on trouvera d'une maniere semblable que pour l'ellipse, $PE = \frac{px}{aa}$, ou parce que $\frac{bb}{2a} = p$, l'on aura aussi $PE = \frac{px}{2a}$.

THÉORÊME VI.

798. *Dans l'hyperbole l'expression de la Sous-tangente* PT *appartenante au grand axe est* $PT = \frac{xx - aa}{a}$.

DÉMONST. Elle est entiérement semblable à celle de l'ellipse, en observant seulement de prendre la valeur de yy dans l'hyperbole, au lieu de la prendre dans l'ellipse.

Remarque.

799. L'hyperbole a son usage & ses applications dans la *Dioptrique* & dans la *Catroptrique*, pour la construction & l'usage des verres & des miroirs. Si l'on suppose, *par ex:* une surface hyperbolique formée par la révolution d'une hyperbole AMD (*fig.* 9.), & qu'un rayon de lumiere tombe sur la convexité de cette hyperbole dans

une direction VM, laquelle prolongée, aboutiroit au foyer F, ce rayon se réfléchira au foyer *f* de l'hyperbole conjuguée. Car, puisque l'angle de réflexion doit être égal à l'angle d'incidence, selon les loix de la Physique, le rayon VM sera réfléchi dans la direction M*f*, laquelle, suivant la nature de l'hyperbole, forme avec la tangente DMT l'angle FMT égal à l'angle d'incidence VMD.

CHAPITRE II.

Des Sections Coniques comparées.

On peut considérer les sections coniques, dans leur description; dans leurs équations, & dans leurs affections.

ARTICLE I.

Des Sections coniques comparées dans leur Description.

DÉFINITIONS.

I.

800. La description d'une courbe est ou *géométrique* ou *méchanique*. On appelle description géométrique celle dans laquelle on assigne plusieurs points par lesquels passe la courbe. On appelle description *méchanique*, ou *organique*, celle dans laquelle on décrit la courbe d'un mouvement continu à l'aide des instrumens.

II.

801. Lorsqu'on considére les sections coniques sur un plan, on appelle *Section conique* toute ligne qui est telle que les deux distances de chacun de ses points, l'une MF à un même point F, l'autre MG à une même droite GA (*fig.* 10, 11 & 12.), soient toujours en même raison, ou dans un rap-

port constant, *par ex :* dans le rapport de $a : p$.

III.

802. La ligne droite AG s'appelle *Directrice*, ou *Génératrice* de la section ; le point F s'appelle le *Foyer*.

IV.

803. La section est une *Ellipse*, si $MF < MG$ (*fig.* 12.) ; une *Hyperbole*, si $MF > MG$ (*fig.* 11.) ; une *Parabole*, si $MF = MG$ (*fig.* 10.) ; un *Cercle*, si MG est infini par rapport à MF ; car dans ce dernier cas la ligne MF n'ayant plus de rapport avec MG, reste seule pour déterminer la distance de chaque point M au foyer F, laquelle distance par cette raison se trouve toujours égale dans tous les points de la courbe. Ainsi la section est une ellipse, une hyperbole, une parabole, ou un cercle, suivant que dans le rapport $a : p$, on aura $a < p$, ou $a > p$, ou $a = p$, ou $\infty\, a = p$.

PROBLÊME I.

804. *La Directrice* GG *étant donnée de position, étant donnés le foyer* F, *& le sommet* S, *trouver tant de points que l'on voudra d'une Section conique, & par conséquent décrire géométriquement une Section conique* (fig. 10, 11 & 12.).

SOLUT. Du sommet S élevez perpendiculairement à l'axe une ligne $SB = SF$; par les points A & B menez la ligne indéfinie ABD, & ayant mené tant de droites PD, PD, &c. que l'on voudra, perpendiculaires à l'axe, il faut marquer sur chacune de ces droites un point M, tel que chaque MF soit égale à chaque PD.

DÉMONST. Car si de l'un de ces points on éleve à la directrice la perpendiculaire MG, à cause des triangles semblables ASB, APD, on aura $PD : PA :: SB : SA$, ou ce qui est le même, $MF : MG :: SF : SA :: a : p$; donc, &c.

Corollaire I.

805. La ligne SB, ou la distance SF du sommet

de la section au foyer, est par rapport à SA, distance du sommet à la directrice, égale dans la parabole, plus petite dans l'ellipse, plus grande dans l'hyperbole.

Corollaire II.

806. L'angle SAB dans la parabole est de 45 degrés, parce que SB = SA; il est plus petit dans l'ellipse, parce que SB < SA; il est plus grand dans l'hyperbole, parce que SB > SA.

THÉORÊME.

807. *Dans une Section conique l'intervalle Ff des deux foyers est au grand Axe Ss dans la raison de $a:p$: c'est-à-dire, $Ff : Ss :: a : p$, ou $2c : 2a :: a : p$.*

DÉMONST. Nous avons prouvé (804) que $sF : sA :: SB : SA :: a : p$; donc $sF - SB : sA - SA :: a : p$. Or par la construction (804) $SB = SF = sf$, & par conséquent $sF - SB = Ff$; pareillement $sA - SA = sS$: donc on aura $fF : sS :: a : p$.

Corollaire I.

808. Dans le *cercle* la quantité a est infiniment petite par rapport à la quantité p: donc l'intervalle fF des foyers est infiniment petit par rapport à l'axe, c'est-à-dire, qu'il est nul. Dans la *parabole* $a = p$, & par conséquent on y aura $fF = sS$: c'est-à-dire, que l'intervalle des foyers est égal à l'axe, & par conséquent infini. Dans l'*ellipse* $a < p$, d'où il suit que l'intervalle des foyers fF sera plus petit que l'axe. Dans l'*hyperbole* $a > p$, d'où il suit que l'intervalle des foyers sera plus grand que l'axe.

Corollaire II.

809. Il suit que le *cercle* peut être regardé comme une section, dont les foyers se réunissent en un seul & même point C, qui est le centre; que l'*ellipse* peut être regardée comme un cercle dont les foyers se sont éloignés du centre d'une quantité finie, laquelle s'appelle *excentricité*; que la

parabole eſt une ellipſe dont les foyers ſe ſont éloignés infiniment l'un de l'autre ; que l'*hyperbole* eſt une ellipſe dont les foyers ſe ſont éloignés plus qu'à l'infini l'un de l'autre, & ſe ſont poſés à contre-ſens.

Comme le centre eſt toujours placé entre les deux foyers, il arrive que dans la *parabole* il n'y a point de centre ; que dans le *cercle* & l'*ellipſe* il eſt en dedans de la courbe ; & que dans l'*hyperbole* il eſt en dehors de la courbe, placé entre les ſommets des hyperboles conjuguées.

PROBLÊME II.

810. *Décrire méchaniquement, ou par un mouvement continu une Section conique ſur un plan* (fig. 13, 14 & 15.).

SOLUT. I°. Pour le *Cercle*, il n'y a point de difficulté. Il ſe décrit, comme l'on ſçait, en fixant une des pointes du compas, & en faiſant tourner l'autre, gardant toujours la même ouverture : ou bien l'on prend un point quelconque C que l'on appelle *centre*, & où ſe réuniſſent les deux foyers ; on y plante un piquet dans lequel on engage une corde, dont les deux bouts ſont réunis, & l'on fait tourner autour de ce centre une pointe ou ſtilet qui tienne toujours la corde tendue ; cette pointe dans ſon mouvement trace la circonférence d'un cercle.

II°. Comme l'*Ellipſe* a deux foyers qui ſont diſtingués du centre, il faut concevoir que les foyers qui étoient réunis au centre C dans la deſcription du cercle, s'en ſont éloignés, & ſont devenus les points F, *f* (*fig.* 14.) ; par conſéquent pour décrire l'ellipſe, au lieu d'un piquet, il en faut planter deux aux points F, *f*, autour deſquels ſera engagée la corde ci-deſſus, & la pointe M, qui tiendra cette corde tendue, décrira par ſon mouvement une ellipſe. Car il eſt évident que la ſomme des diſtances de chaque point de la courbe aux deux foyers F, f eſt conſtante, & qu'elle eſt égale à toute la quantité de cette corde priſe des deux foyers, laquelle quantité meſure le grand axe.

III°. Si l'ellipſe étoit infinie, ou devenoit une *Parabole*, elle auroit par conſéquent ſes foyers infiniment éloignés l'un de l'autre, & en ce cas la portion Mf de la corde ne couperoit point l'axe, ſi ce n'eſt à une diſtance infinie, & deviendroit par conſéquent parallele à l'axe. Donc pour décrire une parabole d'un mouvement continu, il n'y a qu'à faire enſorte que la portion Mf de la corde devienne & reſte toujours parallele à l'axe, & pour cela on ſe ſert de deux regles, l'une droite & immobile BAB (*fig.* 13.), & l'autre EDC mobile & en forme d'équerre. Alors tenant toujours le fil tendu & aſſujetti à la regle mobile par le moyen d'un ſtilet que l'on fera couler le long de la regle mobile, & faiſant mouvoir cette regle en l'éloignant toujours de l'axe parallelement, ce ſtilet décrira une ellipſe infinie, ou une parabole.

IV°. Si l'ellipſe étoit allongée plus qu'à l'infini, auquel cas elle ſeroit une *Hyperbole*, il arriveroit que l'un de ſes foyers étant au point F (*fig.* 15.), l'autre ſe trouveroit placé à contreſens au point f; d'où il ſuit que la regle DE (*fig.* 13.), qui étoit parallele à l'axe, & dont l'extrémité E étoit cenſée tendre au ſecond foyer de la parabole infiniment éloigné, mais dans le même ſens, doit ſe replier pour fixer cette extrémité E au foyer f de l'hyperbole. C'eſt pourquoi, pour décrire l'hyperbole par un mouvement continu, il n'y aura qu'à fixer une des extrémités de la regle au foyer f (*fig.* 15.), & aſſujettir à cette regle le fil, ou le cordon qui part du foyer F. Car faiſant mouvoir cette regle, en l'éloignant toujours de l'axe, le ſtilet qui tiendra la corde tendue, & coulera le long de la regle mobile d'écrira l'hyperbole EAE ; & par le moyen d'une seconde regle fixée par son extrémité à l'autre foyer F, & à laquelle on fixeroit un fil, ou un cordon qui partiroit du point f, on décrira de la même maniere l'hyperbole conjuguée *eae*.

ARTICLE II.

Des Sections coniques comparées dans leurs Equations.

Proposition I.

811. Dans le triangle une ordonnée quelconque *mo* (*fig.* 17.) est à son abscisse *m*A, comme une autre ordonnée quelconque CD est à son abscisse CA ; car les deux triangles semblables A*mo*, ACD donnent la proportion $mo : mA :: CD : CA$: c'est pourquoi faisant $mo = y$, $mA = x$, $CD = a$, & $CA = b$, la proportion deviendra $y \cdot x :: a \cdot b$; d'où l'on déduit l'équation $yb = ax$, ou $y = \frac{ax}{b}$, laquelle est l'équation du *triangle*.

Proposition II.

812. Dans le cercle une ordonnée quelconque EG (y) (*fig.* 16.) est moyenne proportionnelle entre les abscisses, ou segmens du diamétre, de sorte que nommant l'abscisse x, le diamétre $2a$, la co-abscisse sera $2a - x$, & l'on aura la proportion $x : y :: y : 2a - x$, d'où l'on déduit l'équation $yy = 2ax - xx$, qui est l'équation du *Cercle*.

Corollaire.

813. Si l'on prend l'ordonnée DC égale au rayon (a), l'abscisse sera $CB = a$, & la co-abscisse $CA = a$. Par conséquent si l'on compare les deux ordonnées EG, DC, on aura par la propriété du cercle $\overline{EG}^2 : \overline{DC}^2 :: GB \times GA : CB \times CA$ ou algébriquement $yy : aa :: 2ax - xx : aa$; d'où l'on conclud $\frac{aa}{aa} yy = 2ax - xx$, qui est encore l'équation du

cercle, & laquelle ne différe de la précédente que par le coefficient $\frac{aa}{aa} = 1$, qui exprime l'égalité des axes, ou diamétres du cercle.

Propoſition III.

814. Si l'on ſuppoſe que les axes du cercle deviennent inégaux, auquel cas le *cercle* ſe change en ellipſe, alors le premier axe étant exprimée par a, le ſecond doit être exprimé par b, & la fraction $\frac{aa}{aa}$ ſe changera en $\frac{aa}{bb}$; ainſi l'équation précédente deviendra $\frac{aa}{bb} yy = 2ax - 2xx$, & c'eſt l'équation de l'*Ellipſe*, laquelle ne différe de celle du cercle que par la fraction $\frac{aa}{bb}$, laquelle exprime l'inégalité des deux axes de l'*ellipſe*.

Propoſition IV.

815. Si dans l'ellipſe on ſuppoſe que le grand axe $2a$ ſoit prolongé à l'infini, auquel cas l'ellipſe ſe change en *Parabole*, alors dans l'équation $\frac{aa}{bb} yy = 2ax - xx$, le terme $-xx$ ſera infiniment petit, & par conſéquent nul par rapport au terme $2a$; & alors l'équation de l'ellipſe deviendra $\frac{aa}{bb} yy = 2ax$, & en ſimplifiant $yy = \frac{2bbx}{a}$; & faiſant la quantité connue & conſtante $\frac{2bb}{a} = p$, on aura $yy = px$, & c'eſt l'équation de la *Parabole*.

Propoſition V.

816. Si dans l'équation de l'ellipſe $\frac{aa}{bb} yy = 2ax$

$-xx$, on ſuppoſe que les ſommets A, a, & les foyers F, f, ſoient placés à contre-ſens, auquel cas l'ellipſe devient une *Hyperbole*; alors la co-abſciſſe qui étoit $2a-x$, ſe trouvera placée dans le même ſens que l'abſciſſe, & ſera par conſéquent $2a+x$: donc le rectangle des abſciſſes alors ſera $2ax+xx$, & l'équation précédente ſe changera en $\frac{aa}{bb}=2ax+xx$; & c'eſt l'équation de l'*Hyperbole* appellée *elliptique*, c'eſt-à-dire, de l'hyperbole dont les deux axes ſont inégaux, & qui par cette raiſon eſt dite dériver de l'ellipſe.

Si dans cette derniere équation on ſuppoſe $a=b$, ou ſi l'on ſuppoſe que les deux axes de l'hyperbole ſoient égaux, alors on aura $\frac{aa}{bb}=\frac{aa}{aa}=1$; & l'équation ſe changera en celle-ci, $yy=2ax+xx$; & c'eſt l'équation de l'*Hyperbole* appellée *circulaire*, c'eſt-à-dire, de l'hyperbole dont les deux axes ſont égaux, & qui par cette raiſon eſt dite dériver du cercle.

Corollaire I.

817. Il ſuit que les équations de l'hyperbole ſoit circulaire, ſoit elliptique, ne différent des équations du cercle & de l'ellipſe, que par le ſigne $+$ qui affecte le terme xx pour les hyperboles, au lieu que le ſigne $-$ affecte le même terme xx pour le cercle & l'ellipſe.

Corollaire II.

818. On voit par ce qui vient d'être dit, que les équations des ſections coniques dérivent toutes d'une équation primitive, ſçavoir, de l'équation du cercle; & par conſéquent que la nature des ſections coniques peut être repréſentée par une équation générale, qui pourra s'appliquer à chaque ſection en particulier, en la modifiant ſuivant les différences qu'admettent les ſections

en particulier par rapport aux axes, aux abſciſſes, aux co-abſciſſes, &c. Cette équation générale ſera $\frac{aa}{bb}yy = 2ax \pm xx$ ou $yy = \frac{2bbx}{a} \pm \frac{bbxx}{aa}$, que l'on appelle l'équation généraliſſime à l'*axe* des ſections coniques, & de laquelle on peut déduire l'équation à l'axe de chaque ſection en particulier. Car

I°. Si l'on ſuppoſe $a = b$, & qu'on prenne dans le ſecond membre le ſigne —, alors de l'équation générale $\frac{aa}{bb}yy = 2ax \pm xx$, on déduira l'équation $yy = 2ax - xx$, qui eſt celle du *Cercle*.

II°. Si l'on ſuppoſe $a > b$, & qu'on prenne dans le ſecond membre le ſigne —, on aura $\frac{aa}{bb}yy = 2ax - xx$, qui eſt l'équation de l'*Ellipſe*.

III°. Si l'on ſuppoſe $a = \infty b$, le terme $- xx$ ſera nul par rapport à $2ax$, & on aura $\frac{aa}{bb}yy = 2ax$, ou $yy = \frac{2bbx}{a}$, pour l'équation de la *Parabole*.

IV°. Si l'on prend le ſigne + dans le ſecond membre, & qu'on laiſſe tout le reſte, on aura $\frac{aa}{bb}yy = 2ax + xx$, & c'eſt l'équation de l'hyperbole *Elliptique*; & ſuppoſant $a = b$, on aura $yy = 2ax + xx$, pour l'équation de l'hyperbole *Circulaire*.

ARTICLE III.

Des Sections coniques comparées dans leurs affections.

THÉORÊME I.

819. *Dans une ſection conique le Paramétre eſt égal à la double ordonnée qui paſſe par le foyer.*

DÉMONST. Si l'on appelle x la diſtance du centre à l'ordonnée y, alors l'équation généraliſſime $\frac{aa}{bb}yy=2ax\pm xx$, deviendra $\frac{aa}{bb}yy=\mp aa\pm xx$.

Or lorſqu'on prend l'ordonnée qui paſſe par le foyer, alors la diſtance de l'ordonnée au centre ſera la même que celle du foyer au centre, & l'on aura $x=c$: donc mettant c à la place de x, l'équation généraliſſime ſe changera en $\frac{aa}{bb}yy=\mp aa\pm cc$. Or $aa\pm cc=bb$: donc $\frac{aa}{bb}yy=bb$: donc $aayy=b^4$, & diviſant par aa, $yy=\frac{b^4}{aa}$: donc $y=\frac{bb}{a}=\frac{p}{2}$, & $2y=\frac{2bb}{a}=p$; c'eſt-à-dire, que la double ordonnée $2y$ qui paſſe par le foyer d'une ſection conique, eſt égale au paramétre.

THÉORÊME II.

820. *Le Paramétre d'une Section conique eſt par rapport à la diſtance du ſommet au plus proche foyer*, quadruple *dans la Parabole*, moins que quadruple *dans l'Ellipſe*, plus que quadruple *dans l'Hyperbole.*

DÉMONST. Nous venons de prouver que l'ordonnée y qui paſſe par le foyer, eſt $y=\frac{p}{2}$: donc $yy=\frac{pp}{4}$. Or ſubſtituant cette valeur de yy dans l'équation au paramétre des ſections coniques, laquelle eſt $yy=px\pm\frac{pxx}{2a}$, & que l'on déduit de l'équation généraliſſime en ſuppoſant $\frac{2bb}{a}=p$, comme nous l'avons dit, cette équation deviendra $\frac{pp}{4}=px\pm\frac{pxx}{2a}$: donc diviſant par p, on aura $\frac{p}{4} = x \pm \frac{xx}{2a}$: donc $p = 4x \pm \frac{2xx}{a}$ Or la quantité x exprime ici la distance du sommet au plus proche foyer ; d'où il s'ensuit

I°. Que dans la parabole a étant infini, le terme $\frac{2xx}{a}$ devient infiniment petit, & par conséquent nul par rapport à $4x$; donc dans la parabole on aura $p = 4x$; c'est-à-dire, que le paramétre p est quadruple de la distance du foyer au sommet.

II°. Dans l'ellipse on a $p = 4x - \frac{2xx}{a}$; c'est-à-dire, que le paramétre est moins que quadruple par rapport à la distance x, de toute la quantité $\frac{2xx}{a}$.

III°. Dans l'hyperbole on a $p = 4x + \frac{2xx}{a}$; c'est-à-dire, que p est plus que quadruple par rapport à x, de toute la quantité $\frac{2xx}{a}$.

THÉORÊME III.

821. *Dans toute Section conique la Sous-tangente est par rapport à l'abscisse, double dans la Parabole, plus que double dans l'Ellipse, moins que double dans l'Hyperbole.*

DÉMONST. I°. Dans la parabole l'abscisse est x, & la sous-tangente est (779) PT $= 2x$: donc, &c.

II°. Dans l'ellipse l'abscisse est $a - x$, & la sous-tangente est PT $= \frac{aa - xx}{x}$: donc on a PT : $a - x$ :: $a + x : x$. Or dans l'ellipse a est toujours plus grand que x : donc $a + x$ est plus que double de x : donc aussi PT est plus que double de l'abscisse $a - x$.

III°. Dans l'hyperbole l'abscisse est $x - a$, & la ſous-tangente eſt PT $= \frac{xx - aa}{x}$: donc PT : $x - a$ :: $x + a : x$. Or dans l'hyperbole a eſt toujours plus petit que x : donc $x + a$ eſt moins que double de x : donc PT eſt auſſi moins que double de l'abſciſſe $x - a$.

Théorême IV.

822. *Dans toute Section conique la Sous-perpendiculaire eſt par rapport à la moitié du Paramétre, égale dans la Parabole, moindre dans l'Ellipſe, plus grande dans l'Hyperbole.*

Démonst. I°. Dans la parabole le paramétre eſt $4a$. Or la ſous-perpendiculaire eſt PC $= 2a$ (*fig.* 4.) : donc, &c.

II°. Dans l'ellipſe, & dans l'hyperbole la ſous-perpendiculaire (*fig.* 8 & 9.) eſt PE $= \frac{px}{2a}$: donc PE : $\frac{1}{2}p$ :: $x : a$. Or x eſt toujours plus petit que a dans l'ellipſe, & eſt plus grand que a dans l'hyperbole : donc PE $< \frac{1}{2}p$ dans l'ellipſe, & $> \frac{1}{2}p$ dans l'hyperbole.

FIN.