Or, lorſque le nombre dont on cherche le logarithme ſe trouve dans les tables, on en trouvera auſſi tout d'un coup le logarithme, lequel eſt à côté de ce nombre dans la colonne des logarithmes; & pareillement étant donné un logarithme qui ſe trouve dans les tables, il ſera aiſé d'avoir ſa valeur, ou le nombre auquel il répond, lequel ſera à côté du logarithme dans la colonne des nombres naturels.

Mais comme tous les nombres & tous les logarithmes qui peuvent réſulter des différentes opérations, ne ſe trouvent pas dans les tables, parce que celles-ci ne contiennent ni les fractions, ni les nombres entiers au-delà de 20000, il eſt à propos, lorſque ces cas arrivent, de ſçavoir faire uſage de ces tables. On donne pour cela des régles que l'on trouve ordinairement dans les livres qui contiennent ces tables.

SECTION II.

Des Opérations de la Géométrie pratique.

LEs démonſtrations de la Géométrie ſpéculative avoient pour objet les propriétés de l'étendue; les opérations de la Géométrie pratique ont pour but de meſurer les différentes eſpéces de l'étendue; c'eſt pourquoi il eſt néceſſaire de connoître les meſures, & de les ſçavoir appliquer. Nous parlerons donc, 1°. des meſures; 2°. de l'uſage & de l'application des meſures.

CHAPITRE I.

Des Mesures.

I°. DANS la Géométrie ſpéculative les Géométres ſe ſont ſervis de deux principes pour appuyer leurs démonſtrations, ſçavoir, de la ligne *droite* & de la ligne *circulaire*; de même dans la Géométrie pratique ils ſe ſervent, pour ſe diriger dans leurs opérations, de deux inſtrumens qui répondent à la ligne droite & à la ligne circulaire, ſçavoir, de la *regle* & du *compas*: de la regle, pour tracer & meſurer des lignes: du compas, pour décrire le cercle qui ſert à meſurer les angles.

II°. Mais pour que la regle & le cercle puiſſent devenir des meſures de quelque uſage, il faut auparavant les diviſer en des parties fixes & connues ſoit pour le nombre, ſoit pour la grandeur. C'eſt pourquoi les Géométres ont diviſé l'un & l'autre inſtrument en un certain nombre de parties déterminées, & cette diviſion a été de pure convention.

ARTICLE I.

De la Diviſion de la Regle.

I°. On diſtingue deux ſortes de regle, la regle ordinaire & la regle géométrique, que l'on appelle auſſi *Echelle géométrique.*

II°. La regle ordinaire ſe diviſe en *pieds*, le pied ſe diviſe en 12 *pouces*, le pouce en 12 *lignes*, la ligne en 12 *points.* L'uſage de cette regle conſiſte à l'appliquer, en la portant ſur toute la longueur d'une dimenſion quelconque de l'étendue; afin de trouver par ce moyen combien cette dimenſion contient de pieds, de pouces, &c. ainſi par ſon moyen on juge des *longueurs*, des *diſtances*, des *hauteurs*, des *largeurs*, &c.

III°. Mais l'uſage de la regle, ou échelle géométrique ne consiste pas à l'appliquer immédiatement sur l'étendue que l'on veut mesurer; mais il consiste soit à trouver, soit à désigner le nombre des parties dont cette étendue est composée, par un même nombre de parties semblables & proportionnelles, prises sur l'échelle géométrique.

IV°. Ainsi on doit regarder l'échelle géométrique comme une regle divisée, *par ex :* en 10, en 100, en 1000, en 10000, &c. parties sous divisées elles-mêmes avec un certain art en parties plus petites, pour mesurer ou pour désigner de plus grandes étendues, avec lesquelles ces parties, qui sont des petites mesures, ont une proportion connue.

PROBLÊME I.

646. *Construire la Regle, ou l'Échelle géométrique* (fig. 134.).

SOLUT. I°. Tirez la droite indéfinie AB3 : prenez sur cette ligne un certain nombre de parties égales prises à volonté; *par ex :* six portions égales A, 6; 6, 5; 5, 4; &c. en commençant depuis A; la sixiéme sera 2, B; & supposez que ces divisions représentent des pieds: vous transporterez ensuite la distance AB sur toute la longueur de la ligne A 3, autant de fois qu'il vous plaira, & les divisions AB; B2; 2, 3; désigneront par conséquent des toises.

II°. Elevez au point A une perpendiculaire AC, que vous diviserez en douze parties égales A, 1; 1, 2; 2, 3; &c. Leur nombre représentera celui des parties (sçavoir, des pouces) qui sont immédiatement contenues dans le pied.

III°. De chaque point de division faite dans la perpendiculaire AC, menez des paralleles à la ligne A3, & sur la derniere parallele C3, transportez de C en D les six parties égales, auxquelles on a divisé la ligne AB.

IV°. Joignez par des lignes droites le point à gauche, marqué A, avec le second à droite, marqué 6; puis 6 de la gauche avec 5 de la droite, & ainsi de suite; joignez toujours les divisions de la gauche avec celles de la droite par des transversales A, 6; 6, 5; 5, 4; 4, 3; 3, 2; &c.

Il est évident que si AB est supposée être une longueur de six pieds, les portions A, 6; 6, 5; 5, 4; &c. C, 6; 6, 5; 5, 4; &c. seront chacune la longueur d'un pied: mais les portions 1, 1; 2, 2; 3, 3; comprises entre la perpendiculaire AC & la transversale A 6, & prises dans les paralleles menées entre A3, & C3 exprimeront des pouces; sçavoir la portion 1, 1, exprimera un pouce 2, 2, deux pouces, 3, 3, trois pouces, 4, 4, quatre pouces, de telle sorte que la derniere C6 exprimera douze pouces, ou un pied, parce que C6 = A6 par la construction.

Démonst. Supposant que les six parties égales de la ligne AB sont six pieds, il faut démontrer que la portion 1, 1, donne un pouce; 2, 2, deux pouces; 3, 3, trois pouces, &c. ce qui est évident. Car les triangles CA6, 1A1, sont semblables: donc on aura A1 : AC :: 1, 1 : C6. Or A1 n'est que la douziéme partie de AC par la construction: donc 1, 1 sera la douziéme partie de C6: donc puisque C6 vaut 12 pouces, 1, 1 vaudra un pouce. On prouve de la même maniere que 2, 2 vaut deux pouces, que 3, 3 donne trois pouces, &c.

Corollaire.

647. L'usage de la regle ainsi divisée est fort commode. Voulez-vous prendre en petit la valeur de 5 pieds plus 4 pouces? cherchez sur l'échelle géométrique la transversale qui forme la cinquiéme division, en allant de A en B, sçavoir la transversale 2, 1; cherchez aussi la parallele qui forme la quatriéme division en allant de A en C, sçavoir la parallele 4, Z. Si sur le point X où se rencontrent la transversale & la parallele, vous

poſez une jambe du compas, & l'autre jambe ſur l'extrémité 4, ou la parallele rencontre la ligne AC, l'ouverture du compas vous donnera une longueur de 5 pieds 4 pouces. Car du point X au chiffre 4 qui ſe rencontre le premier dans la parallele, il y a cinq diviſions qui déſignent 5 pieds; & l'intervalle 4, 4, que donne le reſte de la parallele, dénote 4 pouces, comme nous l'avons prouvé : donc, &c.

ARTICLE II.

De la Diviſion du Cercle.

I°. En géométrie il ne ſuffit pas d'avoir une meſure pour juger des *longueurs*, des *diſtances*, &c. il en faut auſſi une pour meſurer les *angles*. La meſure dont on ſe ſert pour connoître les diſtances, eſt la *regle* dont nous venons de parler; celle dont on ſe ſert pour juger de la quantité des angles, eſt la circonférence du *cercle*, que l'on a pour cette raiſon diviſée en un certain nombre de parties égales, comme nous l'avons dit ailleurs.

II°. Quand on veut meſurer un angle, on ſuppoſe & l'on conçoit qu'il a ſon ſommet au centre du cercle, & alors l'arc de circonférence intercepté entre les côtés de l'angle, eſt la meſure de l'angle, & l'angle ſera d'autant plus grand ou plus petit, qu'il interceptera entre ſes côtés un arc d'un plus grand ou d'un plus petit nombre de parties égales ou de *degrés*, ou de *minutes*, ou, &c.

III°. Il eſt donc important de pouvoir diviſer exactement la circonférence du cercle en tous ſes degrés & minutes, & c'eſt à quoi les Géométres tâchent de parvenir en cherchant ſurtout la méthode d'inſcrire à la circonférence du cercle des polygones réguliers de différente eſpéce, comme nous l'allons voir pour quelques-uns.

PROBLÊME I.

648. *Diviſer la Circonférence du Cercle en deux également.*

SOLUT. Dans le cercle menez un diamétre; il partagera la circonférence du cercle en deux également, comme nous l'avons prouvé (282).

PROBLÊME II.

649. *Diviser la Circonférence du cercle en quatre parties égales.*

SOLUT. Dans le cercle menez deux diamétres perpendiculaires l'un sur l'autre, ils partageront la circonférence en quatre parties égales, comme il est évident.

C'est par cette méthode que l'on inscrit un quarré dans un cercle : car si l'on joint les extrémités des diamétres par des cordes, ces cordes formeront un quarré.

PROBLÊME III.

650. *Diviser un Arc quelconque en deux également.*

SOLUT. Menez une corde par les extrémités de l'arc donné, & divisez-la en deux également par une perpendiculaire (289); l'arc sera aussi divisé en deux également (319).

Par la même méthode on divise aussi en deux également un angle quelconque. Car ayant décrit du sommet de l'angle, pris comme centre, & d'un intervalle quelconque, un arc entre les deux côtés de l'angle, la ligne qui, tirée du sommet, partagera cet arc en deux également, divisera aussi l'angle mesuré par cet arc en deux également.

Corollaire.

651. On peut toujours diviser exactement la circonférence du cercle en autant de parties égales que l'on voudra, en prenant le nombre 2 & ses multiples 4, 8, 16, &c. pour diviseurs. Ainsi on peut la diviser en 2, 4, 8, 16, 32, &c. parties égales; d'où suit la méthode d'inscrire à un cercle donné, non-seulement un quarré, mais un octogone, un polygone de 16, de 32, de 64, &c. côtés.

Proposition.

652. Les Géométres étant convenus que la circonférence du cercle seroit divisée en 360 parties égales, il est à remarquer que pour faire exactement & géométriquement cette division, le diviseur 2, & ses multiples ne suffisent pas; il faudroit aussi pouvoir faire usage des diviseurs 3, 5, & de leurs multiples, c'est-à-dire qu'il faudroit pouvoir diviser la circonférence, ou un arc quelconque, en 3, en 5, en 9, en 12, en 15, &c. parties égales. Or pour diviser la circonférence du cercle en un nombre quelconque de parties égales, & en nombres multiples de 3 & de 5, la question se réduit en général à inscrire dans le cercle des polygones réguliers de différente espece, lesquels détermineront dans la circonférence des points de division, & dont les côtés seront des cordes qui contiendront des arcs d'un certain nombre de degrés.

PROBLÊME IV.

653. *Inscrire dans le cercle un Exagone régulier, ou diviser la circonférence du Cercle en six parties égales.*

SOLUT. Portez le rayon du cercle successivement sur la circonférence, il donnera un exagone régulier inscrit, & divisera la circonférence en six parties égales. Car nous avons prouvé (423.) que le côté de l'exagone étoit égal au rayon du cercle.

Corollaire I.

654. De-là suit la méthode d'inscrire à un cercle,

I°. Un triangle équilatéral, ou de diviser la circonférence du cercle en trois parties égales, en menant des cordes qui soutiendroient des arcs doubles de ceux qui sont soutenus par les côtés de l'exagone régulier.

II°. Un dodécagone régulier; car après avoir inscrit un exagone régulier, il ne s'agit que de diviser en deux également chacun des arcs soutenus par les côtés de l'exagone.

Corollaire II.

655. On peut diviser un angle droit, ou un arc de 90 degrés en trois parties égales (*fig.* 133), en portant successivement le côté du dodécagone sur l'arc BEDA de 90 degrés, & il le partagera en trois arcs de 30 degrés chacun.

Ou bien portez le rayon du cercle sur un arc de 90 degrés, sçavoir de B en D, & de A en E, & vous aurez la même chose. Car le rayon porté sur la circonférence, est le côté d'un exagone régulier, qui par conséquent détermine de A en E un arc de 60 degrés, & pareillement porté de B en D, déterminera un autre arc de 60 degrés: donc les arcs AD, DE, EB sont de 30 degrés chacun.

Corollaire III.

656. On peut aussi diviser un angle ou un arc de 45 degrés en trois parties égales. Pour cela il n'y a qu'à prendre un arc de 30 degrés, & le diviser en deux également, ce qui donnera un arc de 15 degrés, dont la corde, portée successivement sur un arc de 45 degrés, le divisera en trois arcs égaux de 15 degrés chacun.

Mais on n'a pas trouvé la méthode de diviser géométriquement par la *regle* & le *compas* un angle ou un arc quelconque donné en trois parties égales; & c'est-là le fameux problême de la *trisection* de l'angle tant cherchée par les Anciens. A plus forte raison on ne peut pas diviser un angle quelconque en 5, 7, 9, 11, &c. parties égales: c'est de-là que vient la difficulté de graduer exactement les *quarts* de cercle dont on se sert dans la Géométrie pratique.

Corollaire IV.

657. Il suit évidemment de tout ce que nous venons de dire, que pour inscrire un polygone régulier quelconque à un cercle, il ne s'agit que de déterminer le côté de ce polygone, en cherchant le rapport qu'a ce côté avec le rayon du

cercle auquel on veut inſcrire le polygone. Car le rayon du cercle eſt toujours une quantité connue & donnée. Dans ce cas on doit regarder le côté du polygone régulier que l'on veut inſcrire, comme une corde qui ſoutient dans le cercle un arc d'un certain nombre de degrés, & dont on cherche le rapport avec le rayon du cercle. La queſtion ſe réduit donc en dernier lieu à connoître & à déterminer le rapport de chaque corde du cercle avec le rayon. Ce rapport eſt fixe & connu pour quelques cordes; mais il en eſt pluſieurs autres dont on ne peut pas trouver le rapport avec le rayon du cercle, & par cette raiſon on ne peut trouver la valeur juſte & exacte de la plûpart des cordes du cercle, mais ſeulement par approximation. De-là vient la difficulté d'inſcrire à la circonférence du cercle toutes ſortes de polygones réguliers, ou de diviſer géométriquement la circonférence du cercle en un nombre quelconque de parties égales; c'eſt pourquoi cette diviſion en bien des cas ne ſe peut faire que par voie d'approximation & de tâtonnement.

CHAPITRE II.

Uſage & Application des Meſures.

L'USAGE & l'application des meſures ſe fait, lorſqu'on veut connoître & déterminer les dimenſions plus ou moins grandes des corps. Dans le corps il y a trois dimenſions, qui ſont la *longueur*, la *largeur*, & la *profondeur*, d'où naiſſent trois eſpeces d'étendue, qui ſont la *ligne*, la *ſurface* & le *ſolide*. L'objet de la Géométrie ſpéculative étoit de les ſoumettre à la démonſtration; celui de la Géométrie pratique eſt de les aſſujettir à la meſure. De-là naiſſent différens procédés de la Géométrie pratique, qui peuvent tous ſe réduire à trois eſpeces analogues à celles de l'étendue ; ſçavoir, la *longimétrie*, ou la meſure des lignes ; la *planimétrie*, ou la meſure des ſurfaces ; & la *ſtéréométrie*, ou la meſure des ſolides.

ARTICLE I.

La Longimétrie.

La longimétrie eſt la pratique des lignes, des angles & des figures. Elle donne l'art & la méthode de les tracer, de les diviſer & de les comparer.

Des Lignes.

PROBLÊME I.

658. *Sur une ligne donnée* CD (fig. 9.) *mener une Perpendiculaire.*

SOLUT. Des extrémités C & D, priſes comme centres, & de l'intervalle CD décrivez deux circonférences de cercles, qui s'entrecouperont aux points A & B ; joignez les points d'interſection A & B par une ligne droite AB : cette ligne AB, ou AI ſera perpendiculaire ſur la ligne donnée CD, comme nous l'avons fait voir (288 & 289) : ou, plus ſimplement, il n'y a qu'à décrire (*fig.* 10.) des extrémités A & B, priſes comme centres, & d'une même ouverture de compas, des arcs qui s'entrecoupent aux points C, E, & joindre les ſections par une ligne droite CE ; car cette pratique eſt la même que la précédente, mais abrégée.

Corollaire.

659. De là ſuit la méthode,

I°. De diviſer une ligne droite donnée CD (*fig.* 9.) en deux également. Car la perpendiculaire AB partage la ligne CD en deux parties égales au point I, & l'on a CI = ID.

II°. De conſtruire ſur une ligne donnée CD (*fig.* 9.) un triangle équilatéral, en décrivant des extrémités C & D, priſes comme centres, & de l'intervalle CD des arcs qui s'entrecoupent au point A, & en menant les lignes AC, AD; ce qui donnera le triangle ACD équilatéral. Car DA = DC, parce qu'ils ſont rayons d'un même cercle, & CD = CA par la même raiſon.

III°. De conſtruire pareillement ſur une ligne donnée CD (*fig.* 9.) un triangle iſocele; ce qui ſe fait en prenant une ouverture de compas plus grande que l'intervalle CD, & en faiſant le reſte comme pour le triangle équilatéral.

PROBLÊME II.

660. *D'un point donné* C *dans une ligne* AB, *élever une Perpendiculaire ſur cette ligne* (fig. 135.).

SOLUT. Du point donné C déterminez avec le compas les portions égales CD, CE, & des points C, E pris comme centres, & d'une ouverture de compas priſe à volonté, mais reſtant la même, décrivez des arcs qui s'entrecoupent au point F: enfin menez la droite CF, & elle ſera la perpendiculaire demandée.

Car par la conſtruction on a DF=EF, & DC= CE: donc la ligne CF ne s'incline pas plus d'un côté que de l'autre: donc (288.) la ligne CF eſt perpendiculaire ſur AB.

PROBLÊME III.

661. *D'un point donné* C *hors d'une ligne* AB, *abbaiſſer une Perpendiculaire ſur cette ligne* (fig. 136.).

SOLUT. Du point C, comme centre, décrivez un arc qui coupe la ligne donnée AB en deux points tels que D, E, deſquels vous tracerez de la même ouverture de compas des arcs qui s'entrecoupent au point F; poſez enſuite la regle ſur les points C, F, pour mener la ligne CO, qui ſera la perpendiculaire demandée, comme il eſt évident par ce qui a été dit ci-deſſus.

PROBLÊME IV.

662. *Elever une Perpendiculaire à l'extrémité* A *d'une ligne donnée* AB (fig. 137.).

Solut. I°. Si la ligne donnée peut être prolongée par cette extrémité d'où il faut élever la perpendiculaire, prolongez-la, & vous menerez la perpendiculaire demandée suivant la méthode du second problême.

II°. Si la ligne donnée ne peut pas être prolongée par cette extrémité, au-dessus de la ligne AB prenez à volonté un point C, duquel comme centre & de l'intervalle CA, décrivez une circonférence de cercle: menez le diamétre DE & la ligne FA; celle-ci est la perpendiculaire demandée. Car l'angle FAD appuyé sur le diamétre est droit: donc FA est perpendiculaire sur AD, ou AB.

Problême V.

663. *Mener une Parallele à une ligne donnée* CD (fig. 15.).

Solut. Des extrémités C, D, ou de deux autres points quelconques E, F, pris à volonté dans la ligne CD, décrivez de la même ouverture de compas des arcs qui s'entrecoupent à un point quelconque O; sur ces arcs prenez avec le compas des portions égales EG, FH, & par les points G, H, menez la ligne AB, laquelle sera parallele à ligne donnée CD.

Car si des points G & H vous abaissez des perpendiculaires sur la ligne CD, ces perpendiculaires seront égales; parce que les arcs étant continués, & les perpendiculaires étant prolongées jusqu'à la rencontre des circonférences, elles seront les moitiés de cordes qui soutiendront des arcs égaux, dans des circonférences égales, & elles seront par conséquent égales: donc les distances mesurées par ces perpendiculaires seront aussi égales, c'est-à-dire, que les lignes AB, CD seront paralleles.

Problême VI.

664. *D'un point* I *donné hors d'une ligne mener une Parallele à cette ligne* (fig. 16.).

Solut. Soit donnée la ligne CD; du point I, & d'une ouverture de compas prise à volonté, décrivez l'arc indéfini FBK, & du point F & de la même ouverture de compas décrivez l'arc IE: prenez ensuite sur l'arc indéfini FBK une portion FB = IE, & la ligne AB qui passe par les points I, B, sera parallele à la ligne donnée CF.

Car ayant mené IF, les angles alternes internes FIB, IFE seront égaux, puisqu'ils sont mesurés par les arcs IE, FB, égaux par la construction: donc les lignes AB, CF sont paralleles.

Remarque.

665. Quand on veut tracer des lignes paralleles, on se sert ordinairement de la *double regle*, qui est un instrument de l'étui de Mathématique, & qui consiste en deux regles paralleles AB, CD (*fig.* 140.) jointes ensemble par deux lignes GE, HF, égales, paralleles & mobiles, par le mouvement desquelles les deux regles peuvent être ou approchées, ou éloignées l'une de l'autre, en conservant toujours leur parallélisme.

Corollaire.

666. On peut toujours sur une ligne donnée construire, soit un parallélogramme, soit un rectangle. Car si sur les extrémités d'une ligne donnée FG (*fig.* 101.) on éleve des perpendiculaires égales FA, GD, & qu'on joigne les extrémités A, D, par une ligne droite, on aura le rectangle FADG; ou si l'on éleve deux obliques BA, ED, égales & également inclinées, & que l'on mene la droite AD, on aura le parallélogramme BADE.

Problême VII.

667. *Diviser une ligne droite donnée* AB *en trois parties égales* (fig. 138.).

Solut. Par le point A menez la ligne indéfinie AZ qui fasse avec la ligne AB un angle quelconque; & prenant une ouverture de compas à volonté, prenez sur la ligne AZ trois parties égales

égales AE, EF, FG ; joignez les points G, B, & des points F, E, menez les lignes FD, EC, paralleles à GB ; ces paralleles diviſeront la ligne AB en trois parties égales.

Car à cauſe des triangles ſemblables ACE, ADF, ABG, on aura AE : AC :: EF : CD :: FG : DB ; dans laquelle proportionnalité les antécédens ſont égaux par la conſtruction : donc les conſéquens ſont auſſi égaux ; c'eſt-à-dire, que les parties diviſées de la ligne AB ſont égales entr'elles.

Corollaire.

668. On peut par la même méthode diviſer une ligne donnée en autant de parties égales que l'on voudra, en portant le compas ſur la ligne indéfinie AZ le nombre de fois requis, & faiſant le reſte comme ci-deſſus.

PROBLÊME VIII.

669. *Diviſer une Ligne donnée* AB *en des parties ſemblables & proportionnelles à celles d'une autre Ligne donnée* AC (fig. 141.).

SOLUT. Joignez les deux lignes par leur extrémité A, de façon qu'elles forment un angle : de plus joignez les extrémités C & B en menant CB, & par les points de diviſion D, E, F, tirez des paralleles à la ligne CB ; & elles diviſeront la ligne AB en des parties ſemblables ou proportionnelles à celles de la ligne AC. Car les triangles AGD, AHE, AIF, ABC, ſont ſemblables, & donnent.

AD : AG :: DE : GH :: EF : HI :: FC : IB,

dans laquelle proportionnalité les antécédens ſont les portions de la ligne AC, & les conſéquens ſont les portions correſpondantes dans la ligne AB : donc les dernieres ſont proportionnelles aux premieres.

Ce problême peut auſſi s'exécuter en poſant la ligne donnée AB (*fig.* 148.) parallelement à la ligne diviſée CD, & en joignant leurs extrémités par des lignes droites, qui se rencontreront en un point quelconque O, d'où si vous menez des lignes aux points de division E, F, G, ces lignes diviseront AB en parties proportionnelles à celles de la ligne CD.

PROBLÊME IX.

670. *Diviser un Arc en deux également.*

SOLUT. Joignez les extrémités de cet arc par une corde; coupez cette corde en deux également par une perpendiculaire, & l'arc se trouvera aussi divisé en deux parties égales. Car toute perpendiculaire qui divise une corde en deux également, divise aussi en deux portions égales l'arc soutenu par la corde (319).

PROBLÊME X.

671. *Une Circonférence de Cercle étant donnée, en trouver le centre* (fig. 144.).

SOLUT. Menez les deux cordes AC, AB, & divisez-les chacune en deux également par des perpendiculaires; le point O, où ces perpendiculaires se coupent, sera le centre du cercle. Car chacune de ces perpendiculaires divisant en deux également une corde du cercle, passe par conséquent par le centre (319): donc le point O où ces perpendiculaires se rencontrent, sera le centre du cercle.

Corollaire I.

672. On peut toujours continuer un arc de cercle donné. Car menant sur cet arc deux cordes, & les divisant chacune en deux également par des perpendiculaires, on trouvera le centre de cet arc. Or posant l'une des pointes du compas sur le centre, & l'autre sur l'arc, on pourra, en tournant le compas, continuer & achever la circonférence du cercle.

Corollaire II.

673. Il est toujours possible de faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés C, A, B (*fig.* 144) & non posés en ligne droite. Car

ayant joint les trois points donnés par des lignes droites, il ne s'agit que de trouver le centre O par la méthode précédente.

PROBLÊME XI.

674. *Trouver une Ligne quatriéme proportionnelle à trois lignes données* AB, AE, AD (fig. 143.).

SOLUT. I°. Faites un angle quelconque, dont les côtés ſoient indéfinis, *par ex:* l'angle MAN.

II°. Sur le premier côté AM prenez une portion égale à la premiere ligne AB, & ſur le ſecond une portion égale à la ſeconde ligne AE, & menez la ligne BE.

III°. Sur le premier côté prenez encore une portion égale à la troiſiéme ligne donnée AD, & menez la parallele DC ; la ligne AC ſera la quatriéme ligne proportionnelle cherchée.

DÉMONST. Car à cauſe des triangles ſemblables BAE, DAC, on aura la proportion AB : AE :: AD : AC; donc la ligne AC eſt la quatriéme ligne proportionnelle cherchée.

Remarque.

675. Au lieu de faire l'angle MAN (*fig.* 143.) les Géométres ſe ſervent ordinairement du compas de proportion (*fig.* 142), lequel repréſente cet angle, & eſt un des principaux inſtrumens de l'étui de mathématiques. Il a différens uſages : on s'en ſert ſurtout beaucoup pour trouver les lignes proportionnelles, les cordes des différens arcs dans un cercle donné, & pour faire des angles de tel nombre de degrés que l'on voudra, & voici comment.

CONSTRUCTION. L'on ſuppoſe un cercle, ou un demi-cercle, qui ait été diviſé le plus exactement qu'il a été poſſible, en ſes degrés depuis un degré juſqu'à 180. Enſuite prenant deux lignes mobiles autour d'un point A pris pour centre du compas de proportion, l'on tranſporte toutes les cordes du cercle diviſé ſur les deux lignes mobiles de part & d'autre, *par ex :* la longueur de la corde A30, qui eſt une corde de 30 degrés, ſe tranſporte de A en D; la corde A 60 ſe tranſporte de A en E, & ainſi du reſte.

Solut. Soit maintenant donné un cercle à volonté, & dont le rayon ſoit nommé EF, & qu'il ſoit propoſé de trouver dans ce cercle un arc de 40 degrés; j'ouvre les deux branches du compas de proportion, de façon que le rayon EF ſoit porté de 60 en 60: enſuite cherchant l'intervalle qui ſe trouve entre 40 & 40, je le porte ſur le cercle à diviſer, & j'ai une corde de 40 degrés: & par conſéquent ſi du point A, pris comme centre, & de l'intervalle AO je décris un arc entre les branches du compas de proportion, cet arc ſera de 40 degrés, & l'angle formé par les deux branches du compas ſera de 40 degrés; ce qui donne la méthode de faire aiſément un angle de tel nombre de degrés que l'on voudra.

Démonst. A cauſe des deux triangles ſemblables AOM & AEF, on a la proportion

AE : EF :: AO : OM.

Or dans cette proportion le premier terme eſt le rayon ſur lequel a été conſtruit le compas de proportion, parce que la corde de 60 degrés eſt égale (423) au rayon; le ſecond terme eſt le rayon du cercle à diviſer; le troiſiéme terme eſt la corde de 40 degrés du premier cercle: donc le quatriéme terme ſera la corde de 40 degrés du ſecond cercle. Car dans les cercles inégaux nous avons prouvé que les cordes des arcs ſemblables ſont entr'elles comme les rayons.

Problême XII.

676. *Trouver une Ligne moyenne proportionnelle entre deux Lignes données* AB, BC (fig. 146.).

Solut. I°. Joignez par les extrémités les deux lignes données AB, BC de ſorte qu'elles ne faſſent plus qu'une ſeule & même ligne.

II°. Diviſez leur ſomme en deux également

(659) & du point du milieu O, & de l'intervalle OA, ou OC, décrivez une circonférence de cercle.

III°. Du point de réunion B élevez (660) la perpendiculaire BD jusqu'à la rencontre de la circonférence, elle sera la moyenne proportionnelle cherchée, comme nous l'avons prouvé (442).

PROBLÊME XIII.

677. *Trouver une troisiéme Ligne* x *proportionnelle à deux Lignes données* AB *&* BD, *en sorte qu'on ait la proportion* AB : BD :: BD : x.

Solut. Joignez les deux lignes AB, BD (*fig.* 146.), de façon que BD soit perpendiculaire sur l'extrémité de AB: prolongez BD, de façon que l'on ait BE = BD : par les trois points A, D, E, faites passer (673) une circonférence de cercle, & prolongez AB jusqu'à la rencontre de la circonférence; & la ligne BC sera la troisiéme proportionnelle cherchée. Car par la propriété du cercle (442) l'on a AB : BD :: BD : BC.

Corollaire.

678. Etant donnée la corde DE, & la hauteur BC d'un arc (*fig.* 146.), il sera facile, par la méthode précédente, de trouver le diamétre AC, & par conséquent le centre du cercle. Car cherchez une troisiéme proportionnelle à BC & BD pour avoir BA, & ajoutez BA à la hauteur BC, & vous aurez le diamétre AC; lequel divisé en deux également, donnera le centre O, & le rayon OC.

Ce problême est en usage dans l'Architecture, quand il s'agit de construire des ouvrages en forme d'arc.

PROBLÊME XIV.

679. *D'un point donné dans la circonférence du cercle mener une Tangente.*

Solut. Du centre menez un rayon à ce point de la circonférence, & sur l'extrémité du rayon élevez (662) une perpendiculaire à ce rayon, elle ſera la tangente demandée. Car toute ligne qui eſt perpendiculaire à l'extrémité du rayon, eſt tangente par rapport à la circonférence (323).

PROBLÊME XV.

680. *D'un point donné* A *hors de la circonférence du cercle, mener une Tangente à la circonférence* (fig. 147.).

SOLUT. I°. Du point A menez au centre du cercle la droite AC, que vous diviſerez en deux également (659) au point O.

II°. Du point O, comme centre, & de l'intervalle OA, décrivez une circonférence, laquelle coupera la premiere en deux points B, D.

III°. Si du point A vous menez une ligne à l'un ou à l'autre des deux points d'interſection B, D, cette ligne ſera tangente au cercle. Car ayant mené le rayon CB, on aura l'angle CBA appuyé ſur le diamétre CA: donc cet angle ſera droit: donc la ligne AB eſt perpendiculaire à l'extrémité du rayon: donc (323) elle eſt tangente.

PROBLÊME XVI.

681. *Un Angle étant donné, en trouver la valeur.*

SOLUT. Du ſommet de l'angle pris comme centre, décrivez un arc entre les côtés, cherchez le nombre de degrés que contient cet arc, & vous aurez la meſure de l'angle.

On trouve la meſure de cet arc par le moyen du *rapporteur*, qui eſt un des inſtrumens de l'étui de Mathématique. Le *rapporteur* eſt un demi-cercle (*fig.* 139.) diviſé le plus exactement qu'il a été poſſible, en degrés & en minutes. Or mettant le centre du rapporteur au ſommet de l'angle, les côtés de l'angle, prolongés (s'il eſt néceſſaire), intercepteront un arc du rapporteur qui donnera le nombre de degrés que contient l'arc que vous avez décrit, parce que ces deux arcs ſont ſemblables, & contiennent par conſéquent un même nombre de degrés.

PROBLÊME XVII.

682. *Faire un Angle de tel nombre de degrés que l'on voudra*, par ex: *de 50 degrés* (fig. 139.).

SOLUT. Placez le centre du rapporteur ſur le point C, qui doit être le ſommet de l'angle : marquez les points B & D, qui interceptent un arc de 50 degrés ; du centre C menez par les points B & D les lignes CF, CE, & vous aurez l'angle requis.

PROBLÊME XVIII.

683. *Faire un Angle égal à un Angle donné* BAC (fig. 145.).

SOLUT. 1°. Du ſommet A comme centre, décrivez l'arc BC ; menez la ligne indéfinie *az*, & du point *a* comme centre, & de l'intervalle $ac =$ AB, décrivez l'arc indéfini *cbd*. 2°. Sur l'arc indéfini *cbd*, prenez avec le compas la portion $bc =$ BC, & joignez par une droite les points *a*, *b*, & vous aurez l'angle $bac =$ BAC, comme il eſt évident.

Corollaire.

684. C'eſt par cette méthode que l'on peut faire

I°. Un triangle égal à un autre triangle donné BAC (*fig.* 71.). Car ayant mené $ab =$ AB, faites en *a* & en *b* des angles égaux aux angles correſpondans A & B, & prolongez-en les côtés juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent, & vous aurez le triangle $abc =$ ABC (403).

II°. Un triangle ſemblable à un autre triangle (*fig.* 155.). Car tirant la ligne $cb <$ ou $>$ CB, & faiſant le reſte comme ci-deſſus, vous aurez le triangle *abc* ſemblable au triangle ABC (446).

PROBLÊME XIX.

685. *Faire ſous un angle donné à un Parallélogramme égal à un autre Parallélogramme donné* AEDC (fig. 149.).

SOLUT. Dans le parallélogramme donné AEDC, menez la ligne BC qui faſſe ſur la baſe l'angle

BCD=*a*; menez la parallele DF, & prolongez AE, & vous aurez le parallélogramme BCDF fait sous l'angle donné *a* & égal au parallélogramme donné ACDE, parce qu'ils ont tous deux même base & même hauteur.

Problême XX.

686. *Faire sous un angle donné* a, *& sur une ligne donnée* DF, *un Parallélogramme égal à un autre Parallélogramme donnée* (fig. 150.).

Solut. I°. Construisez sous l'angle donné *a*, par la méthode du problême précédent, un parallélogramme égal au parallélogramme donné, & soit ABOC ce parallélogramme ainsi construit.

II°. Prolongez AB de maniere que l'on ait BG = DF, menez la ligne indéfinie GOD, & prolongez AC jusqu'à la rencontre de GD.

III°. Achevez le parallélogramme ADIG, & prolongez BO & CO; le parallélogramme cherché sera EOHI, dont l'angle OEI=BOH=ACH (356)=*a*, angle donné, & dont la base EI=BG=DF, ligne donnée.

Démonst. La raison est que le parallélogramme EOHI est égal au parallélogramme ACOB. Car la diagonale GD partage le parallélogramme ADIG en deux triangles égaux GDA, GDI (477). Or si de ces deux triangles égaux vous retranchez d'une part le triangle GOB, & de l'autre le triangle GOH=GOB (477); si de plus vous retranchez d'une part le petit triangle ODC, & de l'autre le triangle ODE=ODC (477); les restes seront égaux, c'est-à-dire, que vous aurez le parallélogramme EOHI=ACOB.

Corollaire I.

687. Dans tout parallélogramme ou une diagonale GD (*fig.* 150.) est coupée en un point quelconque O par deux lignes paralleles aux côtés, les portions EOHI, ACOB s'appellent les *complémens* du parallélogramme, & ces complémens sont toujours des parallélogrammes égaux.

Corollaire II.

688. Si le parallélogramme étoit un quarré AGID (*fig.* 151.) les complémens feroient alors des parallélogrammes non feulement égaux, mais femblables. C'eft pourquoi

I°. Prenant dans le quarré la fomme des complémens, & y ajoutant le quarré COED, vous aurez la figure ADIHOB, laquelle s'appelle *Gnomon*, ou *Equerre*; d'où vient l'inftrument de l'étui de Mathématique, qui porte ce nom, & dont l'ufage eft de mener des lignes perpendiculaires, de former des angles droits, de conftruire des quarrés, des rectangles, & autres figures à angles droits.

II°. A l'ufage de l'équerre on ajoute fouvent celui de la *ligne d'aplomb*, qui fe trouve auffi dans l'étui de Mathématique, & qui n'eft autre chofe qu'un fil à l'extrémité duquel on a attaché un plomb. L'ufage de ce fil eft de déterminer les directions perpendiculaires à l'horifon, de juger de la pofition des plans, de leur parallélifme, de leur inclinaifon, plus ou moins grande par rapport à l'horifon. Pour cet effet on fufpend la ligne d'*aplomb* par une de fes extrémités au fommet de l'angle formé par les deux branches de l'équerre, entre lefquelles on adapte auffi un quart de cercle gradué (*fig.* 152.). Or fi l'on pofe fur un plan quelconque les points B, C de l'équerre, de façon que le fil AF puiffe fe mouvoir librement le long du quart de cercle, on jugera fi le plan eft perpendiculaire, ou incliné plus ou moins fur l'horifon, fuivant que le fil répondra au point O, milieu du quart de cercle, ou qu'il s'en écartera plus ou moins.

Corollaire III.

689. Suppofant le point O autre que le milieu de la diagonale, fi d'un quarré ADIG on retranche les complémens ACOB, EOHI (*fig.* 151.), il reftera deux autres parallélogrammes GBOH,

OCDE (*fig.* 153.), que l'on peut appeller les *Supplémens* du parallélogramme. Or ces supplémens ſont toujours des parallélogrammes ſemblables, mais inégaux.

Si l'on ſuppoſe que dans cette figure le point O étant fixe, tous les autres points B, G, H, C, D, E, ſoient mobiles, alors ſubſtituant des regles à la place des côtés de la figure, il en réſultera un inſtrument (*fig.* 154.) dans lequel les points G, D, extrémités de la diagonale commune, pourront s'approcher ou s'éloigner du point fixe O, tandis que les points collatéraux B, H & C, E s'éloigneront ou s'approcheront, dans la même proportion, de la diagonale GD. Or dans ce mouvement les deux parallélogrammes changeront d'eſpéce, mais reſteront toujours ſemblables. D'où il ſuit que ſi le point G, pendant le mouvement décrit, une figure quelconque, le point oppoſé D décrira en même tems un figure plus petite, mais toute ſemblable.

C'eſt pourquoi l'on ſe ſert de cet inſtrument pour réduire les figures, les plans & les cartes, ſoit de grand en petit, ſoit de petit en grand.

ARTICLE II.

La Planimétrie.

I°. L'objet de la planimétrie eſt la meſure des ſurfaces. Pour meſurer une ſurface, il faut ſouvent, ſur-tout lorſqu'elle eſt irréguliere, la partager en triangles par des diagonales, ou des rayons, ou autres lignes ſemblables, & la meſure de tous ces triangles donne la meſure totale de la ſurface. Le but important dans la planimétrie eſt donc de bien ſçavoir meſurer les triangles.

II°. On meſure aiſément la ſurface d'un triangle, dont on connoît la hauteur & la baſe (478). Mais il eſt ſouvent impoſſible de déterminer ces deux dimenſions, parce que l'on ne peut point y appliquer immédiatement la meſure. Dans ce cas, pourvu qu'il y ait de certaines conditions données, ou pourvu que des différentes parties qui composent le triangle, sçavoir, trois côtés & trois angles, il y en ait un certain nombre de connues, les Géométres ont l'art & la méthode de connoître & de déterminer toutes les autres, & c'est ce que l'on appelle *Solution des Triangles*, ou *Trigonométrie*.

III°. La Trigonométrie en donnant la mesure des triangles, procure en même tems le moyen non-seulement d'évaluer une surface quelconque donnée, mais aussi de déterminer des hauteurs, des distances, &c. inconnues, comme nous le verrons; d'où l'on peut juger quelle est son utilité dans l'application des mesures. Nous parlerons donc, 1°. de la mesure des surfaces en général; 2°. de la mesure des triangles en particulier, ou de la Trigonométrie.

PARAGRAPHE I.

De la Mesure des Surfaces en général.

PROBLÊME I.

690. *Trouver l'aire ou la surface d'un Quarré, d'un Rectangle & d'un Triangle.*

SOLUT. I°. Mesurez l'un des côtés du quarré, & multipliez-le par lui-même, le produit sera l'aire du quarré. Si le côté est de quatre pieds, vous aurez $4 \times 4 = 16$ pieds pour la surface du quarré.

II°. Multipliez la base du rectangle par sa hauteur, & vous aurez l'aire du rectangle. Si la base est de 5 pieds & la hauteur de 3, vous aurez $3 \times 5 = 15$ pieds pour la surface du rectangle.

III°. D'un des angles du triangle abbaissez une perpendiculaire sur le côté opposé, (que vous regarderez comme la base du triangle), & cette perpendiculaire sera la hauteur du triangle: multipliez la base par la hauteur, & prenez la moitié du produit, & vous aurez (478) la surface du triangle. La base étant de 5 pieds, & la hauteur de 4, vous aurez $\frac{5\times4}{2}=\frac{20}{2}=10$ pieds pour la surface du triangle.

PROBLÊME II.

691. *Trouver la surface d'un Parallélogramme.*

SOLUT. Du sommet d'un des angles du Parallélogramme abbaissez une perpendiculaire sur le côté opposé, (prolongé, s'il est nécessaire,) & que vous prendrez pour base : cette perpendiculaire sera la hauteur du parallélogramme, laquelle multipliée par la base, donnera la surface du parallélogramme (471).

PROBLÊME III.

692. *Trouver l'aire ou la surface d'un Polygone quelconque.*

SOLUT. Réduisez le polygone en triangles par des diagonales menées du sommet d'un des angles à tous les autres (*fig.* 64 & 65.) ; cherchez l'aire de chacun de ces triangles par la méthode ci-dessus (690) ; la somme des aires triangulaires donnera l'aire du polygone.

Corollaire.

693. Si le polygone est régulier, menez du centre du polygone des rayons obliques, lesquels partageront le polygone en autant de triangles égaux qu'il y a de côtés dans le polygone : cherchez la surface d'un de ces triangles, & multipliez-la par le nombre des côtés du polygone, & vous aurez la surface du polygone. Ou tout d'un coup multipliez le rayon droit du polygone par la moitié du périmétre, & le produit donnera la surface du polygone régulier (482).

PROBLÊME IV.

694. *Trouver l'aire ou la surface d'un cercle, dont on connoît la circonférence.*

SOLUT. Cherchez le diamétre de ce cercle, lequel est à la circonférence à-peu-près dans le rapport de 7 à 22, ou de 100 à 314, (ce dernier rapport est un des plus exacts que l'on ait trouvé) ; multipliez la circonférence par le rayon, & la moitié de ce produit, donnera l'aire, ou la surface du cercle (485).

Corollaire.

695. On trouvera la surface d'un secteur de cercle, en multipliant l'arc du secteur par la moitié du rayon.

PARAGRAPHE II.

De la Mesure des Triangles, ou de la Trigonométrie.

I°. La Trigonométrie est l'art de résoudre les triangles, c'est-à-dire, de connoître les parties inconnues du triangle par le moyen de celles qui sont connues.

II°. Dans tout triangle il y a cinq choses à considérer, comme nous l'avons dit ailleurs, sçavoir, trois côtés & deux angles. Or lorsque de ces cinq choses trois sont connues, la Trigonométrie donne l'art & la méthode de connoître les autres.

III°. Si l'on a le triangle ABC (*fig.* 155.) dont on connoisse déjà trois choses, sçavoir, l'angle A, & les deux côtés AB, AC autour de cet angle; on pourra connoître le troisiéme côté & les autres angles, (que l'on suppose ne pouvoir être mesurés immédiatement), on pourra, dis-je, les connoître en traçant un triangle moindre, mais semblable au premier. Car si l'on fait l'angle $a =$ A, & les côtés *ab*, *ac*, proportionnels aux côtés AB, AC du grand, & que l'on mene le troisiéme côté *bc*, le petit triangle *abc* sera semblable au grand, comme nous l'avons prouvé (448). Or tous les côtés & tous les angles du petit triangle peuvent être mesurés immédiatement : ils feront donc connoître ceux des angles, ou des côtés du grand triangle qui étoient inconnus. Cette méthode de résoudre les triangles s'appelle la Trigonométrie par les *triangles semblables*, & est toute fondée sur la similitude des triangles.

IV°. Mais on peut aussi résoudre immédiatement le grand triangle ABC, par le moyen des *ſinus, tangentes* & *ſécantes* des angles, leſquels ont un rapport géométrique avec les côtés du triangle, & font connoître les parties inconnues du triangle par le moyen de celles qui ſont connues. Or cette méthode de réſoudre les triangles, s'appelle Trigonométrie par les *ſinus, tangentes* & *ſécantes ;* & c'eſt celle que nous allons expoſer. Nous parlerons, 1°. de la théorie des *ſinus, tangentes* & *ſécantes ;* 2°. de la réſolution des triangles ; 3°. de l'application de la Trigonométrie à la pratique.

NOMBRE I.

Théorie des Sinus, Tangentes & Sécantes.

DÉFINITIONS.

I.

696. On appelle *Sinus-droit* d'un arc AE, ou d'un angle ACE, meſuré par cet arc, une ligne AB (*fig.* 157.) tirrée de l'extrémité de l'arc perpendiculairement ſur le rayon, ou diamétre, qui paſſe par l'autre extrémité du même arc.

II.

697. La ligne BE, qui eſt la partie du rayon compriſe entre le ſinus droit & la circonférence, s'appelle *Sinus-verſe* du même arc AE, ou de l'angle ACE.

III.

698. La ligne CB, qui eſt la portion du rayon compriſe entre le centre du cercle & le ſinus droit, s'appelle *Co-ſinus*, ou *Sinus de complément* de l'arc AE, ou de l'angle ACE, parce que CB eſt toujours égal à FA, lequel eſt le ſinus droit de l'angle ACF, qui eſt le complément de l'angle ACE.

IV.

699. Le rayon du cercle au centre duquel on conçoit qu'eſt poſé le ſommet de l'angle, s'appelle *Sinus-total*.

V.

700. On appelle *Tangente* d'un arc, ou d'un angle, une ligne EH perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui paſſe par une extrémité de l'arc, & terminée par la rencontre du rayon prolongé CA, qui paſſe par l'autre extrémité du même arc.

VI.

701. On appelle *Sécante* d'un arc, ou d'un angle, le rayon prolongé juſqu'à la rencontre de la tangente, ſçavoir, la ligne CH.

Corollaire I.

702. Le *ſinus-droit* d'un arc, ou d'un angle, eſt toujours la moitié de la corde qui ſoutient un arc double; *par ex :* le ſinus AB de l'arc AE eſt la moitié de la corde AD, laquelle ſoutient l'arc AED, double de AE, comme il eſt évident.

Corollaire II.

703. Le ſinus de l'angle droit, ou de l'arc de 90 degrés, eſt toujours le *rayon.* Car l'arc double de celui de 90 degrés eſt la demi-circonférence; la corde qui la ſoutient eſt le diamétre, dont la moitié eſt le rayon.

Le plus grand de tous les ſinus eſt le ſinus de l'*angle droit*, ou le *rayon;* & c'eſt pour cette raiſon qu'on l'appelle *Sinus-total.*

Corollaire III.

704. Un arc, ou un angle ACE étant donné, & ayant mené ſon ſinus droit AB, le *ſinus-verſe* ſera toujours la différence du *rayon* & du *co-ſinus;* & pareillement le *co-ſinus* ſera toujours la différence du *rayon* & du *ſinus-verſe.*

Corollaire IV.

705. Dans un triangle rectangle HCE, ſi l'on prend pour rayon le côté CE, il eſt clair que l'hypothénuſe CH ſera la *ſécante*, & l'autre côté HE ſera la *tangente* de l'angle HCE. Mais ſi l'on prend pour rayon l'hypothénuſe CH, il eſt évident que le côté HE ſera le *ſinus-droit*, & que l'autre côté

CE ſera le *co-ſinus* de l'angle HCE. C'eſt pourquoi une même ligne HE peut faire la fonction de ſinus ou de tangente, ſelon que l'on prend pour rayon l'hypothénuſe CH, ou le côté CE.

Corollaire V.

706. L'angle droit, *par ex:* FCE, & à plus forte raiſon l'angle obtus, n'a ni tangente, ni ſécante. Car la tangente eſt une ligne perpendiculaire à l'extrémité du rayon, & prolongée juſqu'à la rencontre de la ſécanre. Or dans l'angle droit & l'angle obtus la tangente & la ſécante ne peuvent ſe rencontrer, mais ſont paralleles dans l'un, & divergentes dans l'autre: donc, &c.

Corollaire V I.

707. L'angle obtus n'a point d'autre ſinus que celui de l'angle aigu ſon ſupplément. Car ſi de l'extrémité de l'arc qui meſure l'angle obtus, on tire perpendiculairement une ligne ſur le rayon qui paſſe par l'autre extrémité de l'arc, cette ligne tombera hors de l'angle, & ſera le ſinus de l'angle de *ſupplément*. Ainſi ce ſont les ſinus des angles de ſupplément qui ſervent dans la Trigonométrie à faire connoître les angles obtus.

THÉORÊME I.

708. *Dans tout Triangle les Sinus des Angles ſont proportionnels aux côtés oppoſés à ces ongles* (fig. 156.).

DÉMONST. Les moitiés ſont proportionnelles aux touts: or les ſinus des angles ſont les moitiés des côtés oppoſés aux angles. Car ſi l'on inſcrit le triangle ABC dans un cercle, l'angle A étant inſcrit, a pour meſure la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé. Or le ſinus de la moitié de l'arc CB, & par conſéquent de l'angle A eſt la moitié de la corde BC (702) laquelle corde eſt le côté oppoſé à l'angle A. De même l'angle C étant inſcrit, a pour meſure la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé. Or le ſinus de la moitié de l'arc AB, & par conſéquent de l'angle C, eſt la moitié de la corde AB, laquelle eſt le côté oppoſé à l'angle C. Il faut dire la même chose de l'angle B : donc, &c.

Remarque.

709. Le Théorême sera toujours vrai, soit que le triangle soit *Obliquangle*, soit qu'il soit *Rectangle*, soit qu'il soit *Obtusangle*. Mais observez que le sinus de l'angle *obtus* est le même que le sinus de son supplément, comme nous l'avons dit ; & que ce sinus du supplément est toujours la moitié du côté opposé à l'angle obtus.

Corollaire I.

710. Dans tout triangle rectangle, comme CAB (*fig.* 157.), le sinus-total, ou le rayon est au sinus de l'un ou l'autre des angles aigus, comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle aigu. En effet CA est en même tems sinus total & hypothénuse ; AB est en même tems sinus de l'angle C, & côté opposé à cet angle. Or l'on a évidemment

$$CA : AB :: CA : AB$$

Corollaire II.

711. Dans tout triangle rectangle CHE, le sinus-total est à la tangente de l'un des angles aigus, comme le côté adjacent à cet angle est au côté opposé au même angle, ou l'on aura

$$CE : EH :: CE : EH.$$

Car CE est en même tems sinus total & côté adjacent de l'angle C, & EH est en même tems tangente de l'angle C, & côté opposé à cet angle.

Corollaire III.

712. Dans tout triangle rectangle le sinus total, ou le rayon est à la sécante de l'un des angles aigus, comme le côté adjacent à cet angle est à l'hypothénuse, ou l'on a

$$CE : CH :: CE : CH;$$

parce que CE est en même tems sinus total & côté adjacent de l'angle C, & CH est en même tems sécante de l'angle C & hypothénuse.

Remarquez que les proportions que donnent les trois corollaires précédens, sont fondées sur ce que dans un triangle rectangle chaque côté peut faire double fonction, comme nous l'avons dit (705).

Théorême II.

713. *Dans tout Triangle ſcalène* ABC (fig. 158.) *ſi du plus grand angle* B *on abbaiſſe une perpendiculaire ſur le côté oppoſé, le plus grand côté* AC *ſera à la ſomme des deux autres* BC, BA, *comme la différence de ces côtés eſt à la différence des ſegmens* CE, EA, *faits par la perpendiculaire abbaiſſée* BE.

Construction. Du centre B, & de l'intervalle du petit côté CB, décrivez une circonférence, & prolongez AB juſqu'en G, pour avoir AG, ſomme des deux côtés, & HA leur différence; abbaiſſez la perpendiculaire BE pour avoir les ſegmens CE, EA, dont la différence ſera DA = EA — EC, comme il eſt évident, puiſque (319) CE = ED.

Démonst. Les parties extérieures AH, AD des deux ſécantes AG, AC, ſont réciproquement proportionnelles aux ſécantes entieres, comme nous l'avons prouvé (443): donc on aura

AC : AG :: AH : AD,

dans laquelle proportion le premier terme AC eſt le plus grand côté du triangle; le ſecond terme AG eſt la ſomme des deux autres côtés BA, BC; & HA eſt leur différence; & DA eſt la différence des deux ſegmens.

Théorême III.

714. *Dans tout triangle ſcalène la ſomme de deux côtés quelconques* BA, BC *eſt à leur différence* DC, *comme la tangente de la demi-ſomme des angles* A & C *oppoſés à ces côtés, eſt à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles* (fig. 159.).

Construction. Du point B, comme centre & de l'intervalle du petit côté BA, décrivez un cercle; menez la droite DA & la parallele CF; prolongez CB juſqu'en E, & menez la ligne EAF, laquelle ſera perpendiculaire aux lignes AD & FC, à cauſe de l'angle droit EAD. Or

I°. On aura la ligne CE = CB + BA, ſomme des côtés, & DC leur différence.

II°. L'angle ECF eſt égal à la demi-ſomme des angles BAC, & BCA. Car l'angle ECF = EDA, parce qu'ils ſont correſpondans. Or l'angle inſcrit EDA eſt ſous-double de l'angle central EBA (371); lequel étant extérieur au triangle ABC, eſt par conſéquent égal à la ſomme des deux angles intérieures oppoſés BAC + BCA, donc l'angle EDA, ou ſon égal ECF, eſt la moitié de la ſomme des angles BAC + BCA.

III°. L'angle ACF eſt égal à la demi-différence des deux mêmes angles BAC, BCA. Car le plus grand angle BAC = BAD + DAC : or DAC = ACF, parce qu'ils ſont alternes internes : donc BAC = BAD + ACF. Mais BAD = BDA, à cauſe du triangle ABD iſocele : donc on aura BAC = BDA + ACF. Or dans cette équation BAC eſt le plus grand des deux angles, & BDA eſt la moitié de la ſomme des angles : donc ACF eſt la moitié de leur différence; puiſque de deux quantités inégales, la plus grande (237) eſt toujours égale à la moitié de la ſomme, plus à la moitié de la différence.

IV°. Puiſque l'angle F eſt droit, ſi on prend CF pour rayon, & que du point C, comme centre, on décrive une circonférence, la ligne FE ſera la tangente de l'angle ECF, demi-ſomme des angles; & FA ſera la tangente de l'angle ACF, demi-différence de ces mêmes angles.

Démonst. Les deux triangles EFC, EAD ſont ſemblables par la conſtruction : donc on aura

EC : DC :: EF : AF,

dans laquelle proportion le premier terme EC eſt la ſomme des côtés BC, BA; le ſecond eſt la différence des mêmes côtés; le troiſiéme eſt la tangente de la demi-ſomme des angles, & le quatriéme eſt la tangente de la demi-différence des mêmes angles : donc, &c.

Nombre II.

De la Réſolution des Triangles.

1°. Pour pouvoir réſoudre par le moyen des ſinus, tangentes & ſécantes, un triangle quelconque donné dans lequel on ne connoîtroit que trois choſes des cinq qui ſont à conſidérer, ſçavoir trois côtés & deux angles, il faut connoître les valeurs des ſinus, tangentes & ſécantes de tous les angles depuis une minute juſqu'à 90 minutes ou un degré, & depuis un degré juſqu'à 90 degrés, afin que par leur moyen on puiſſe connoître les côtés inconnus du triangle, avec leſquels ils ont un rapport connu.

II°. Les ſinus, co-ſinus, tangentes, &c. ayant un rapport avec le rayon du cercle au centre duquel le ſommet de l'angle ſeroit ſuppoſé placé, les Géométres ont conclu que par le moyen de ce rapport on pourroit déterminer les valeurs des ſinus, co-ſinus, tangentes, &c. C'eſt pourquoi ils ſuppoſent que le rayon du cercle au centre duquel eſt placé le ſommet de l'angle, eſt diviſé en un très-grand nombre de parties, *par ex :* en 10000000 parties. Or les ſinus, tangentes, &c. contiendront toujours un certain nombre de ces parties, ſelon qu'ils ſeront plus grands ou plus petits, & c'eſt le nombre de ces parties que contient un ſinus, ou une tangente, ou, &c. qui en donnera la valeur.

III°. Les ſinus des angles étant les moitiés des cordes qui ſoutiennent des arcs doubles, pour trouver la valeur des ſinus, la queſtion ſe réduit à trouver celle de toutes les cordes du cercle. C'eſt pourquoi les Géométres ont cherché la valeur de toutes les cordes du cercle depuis la corde d'un arc de deux minutes, juſqu'à celle d'un arc de 90 degrés, & l'ont trouvée par le rapport que ces cordes ont avec le rayon du cercle, ſoit exactement pour quelques cordes, ſoit par voie d'approximation pour les autres. Par le moyen des cordes, ils ont trouvé les ſinus; par le moyen des ſinus, ils ont trouvé les tangentes, ſécantes, co-ſinus, co-tangentes & co-ſécantes.

IV°. De plus après avoir trouvé les ſinus, co-ſinus, tangentes, &c. de tous les arcs du quart de cercle les Géométres en ont dreſſé une table partagée en différentes colonnes, qui, priſes de haut en bas, donnent les ſinus, co-ſinus, tangentes, &c. de tous les angles par degrés & minutes juſqu'à 45 degrés; & priſes de bas en haut, donnent les ſinus, co-ſinus, tangentes, &c. pour les angles depuis 45 degrés juſqu'à 90; comme on peut le voir par cet exemple, dans lequel on ſuppoſe le rayon diviſé en 10000000 de parties, & où nous repréſentons ſeulement la colonne des ſinus & co-ſinus pour quelques angles.

1 Degré.

M.	*Sinus.*	*Co-Sinus.*	
0	1745 · 24	99984 · 77	60
10	2036 · 08	99979 · 27	50
20	2326 · 90	99972 · 92	40
30	2617 · 69	99965 · 73	30
40	2908 · 47	99957 · 69	20
50	3299 · 22	99948 · 81	10
60	3489 · 95	99939 · 08	0
	Co-Sinus.	*Sinus.*	M.

88 Degrés.

Il eſt clair qu'étant donné un angle quelconque *par ex:* d'un degré 30 minutes, & cherchant dans la premiere colonne à gauche, qui appartient à l'angle d'un degré, le nombre 30 de minutes de cet angle, vous trouverez à côté le ſinus 2617·69, & le co-ſinus 99965 · 73 · pareillement ſi l'on donne un ſinus, & qu'il faille trouver à quel nombre de degrés & minutes il appartient, il faut chercher ce ſinus dans la colonne des ſinus; & ſi l'on ne l'y trouve pas préciſément, s'arrêter à celui qui en approche le plus, & prendre les degrés & minutes qui lui répondent.

V°. Cela poſé, lorſqu'on veut réſoudre un triangle, il faut diſtinguer quatre cas: ſçavoir, dans un triangle, ou bien l'on connoît deux côtés & un angle oppoſé à l'un des côtés connus; ou bien l'on connoît deux angles & le côté compris; ou bien l'on connoît les trois côtés; ou bien l'on connoît deux côtés & l'angle compris.

PROBLÉME I.

715. *Réſoudre un Triangle quelconque* ABC (fig. 155.) *dans lequel on connoît deux côtés* AB & BC, & *un angle* A *oppoſé à l'un des côtés connus.*

SOLUT. I°. Faites la proportion; le côté BC eſt au ſinus de l'angle oppoſé A, comme le côté AB eſt au ſinus de l'angle oppoſé C (708), ou

$$BC : S \cdot A :: BA : S \cdot C,$$

& par ce moyen on connoîtra un ſecond angle dans le triangle ABC; & par conſéquent le troiſiéme angle ſera auſſi connu.

II°. De plus le troiſiéme côté AC ſe connoîtra facilement, en faiſant une proportion ſemblable dans laquelle le côté cherché ſoit le quatriéme terme; ſçavoir, le ſinus de l'angle A eſt au côté oppoſé BC, comme le ſinus de l'angle B eſt au côté oppoſé AC, ou $S \cdot A : BC :: S \cdot B : AC$.

III°. C'eſt pourquoi ſuppoſant l'angle en A de 35 degrés 40 minutes, le côté oppoſé BC de 336 toiſes, & que le triangle ſoit rectangle en B, on trouvera dans les tables que le ſinus d'un angle de 35 degrés 40 minutes eſt 58306·87, & que le

ſinus de l'angle droit, ou le ſinus total, eſt 10000000; ainſi la proportion précédente deviendra 58306 · 87 : 336 :: 10000000 : *x*
ou en retranchant les deux derniers chiffres dans les nombres qui expriment les ſinus, ſuivant la regle que nous avons donnée en parlant (629) des fractions décimales, l'on aura 58307 : 336 :: 100000 : *x*, & le quatriéme terme *x*, ou le côté cherché AC, qui eſt l'hypothénuſe, ſe trouvera être $x = 576$.

IV°. Les Géométres pour abréger les calculs de la trigonométrie, ont conſtruit une table des logarithmes pour les ſinus, co-ſinus, tangentes, &c. des differens angles, & en conſéquence on pourra, à la place des ſinus des angles, ſubſtituer leurs logarithmes, & à la place des nombres naturels qui repréſentent les côtés connus, ſubſtituer auſſi leurs logarithmes, & dans ce cas la proportion ci-deſſus deviendra 976571 · 97 : 252633 · 93 :: 100000000 : *x*, dans laquelle on trouvera le quatriéme terme *x* par la voie d'addition & de ſouſtraction, au lieu de la multiplication & de la diviſion qu'il eût fallu employer dans la précédente proportion.

PROBLÊME II.

716. *Réſoudre un Triangle quelconque* ABC (fig. 155.) *dont on connoît deux angles* B & C, & *le côté compris* BC.

SOLUT. Les deux angles B & C étant connus, le troiſiéme angle A eſt par conſéquent connu; c'eſt pourquoi faiſant la proportion

S · A : BC :: S · C : AB,

on connoîtra le ſecond côté AB; & faiſant la proportion S · A : BC :: S · B : AC,
on connoîtra le troiſiéme côté AC, & le triangle ABC deviendra par-là parfaitement connu.

PROBLÊME III.

717. *Réſoudre un Triangle quelconque ſcalène* CBA (fig. 158.), *dont on connoît les trois côtés.*

SOLUT. Il faudra diviſer le triangle donné en deux triangles rectangles par une perpendiculaire BE, abbaiſſée du plus grand angle ſur le côté oppoſé.

II°. Faire la proportion (713), le grand côté AC eſt à la ſomme AG des deux autres côtés, comme la différence AH de ces deux côtés eſt à la différence DA des ſegmens CE, EA, faits par la perpendiculaire, ou

AC : AG :: AH : DA.

III°. Connoiſſant le côté CA, ſa moitié eſt auſſi connue : donc ſi à cette moitié vous ajoutez la moitié de la différence DA, vous aurez le plus grand ſegment EA qui eſt égal (237) à la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence de ces ſegmens inégaux.

IV°. C'eſt pourquoi dans le triangle rectangle BEA, vous connoiſſez maintenant les côtés EA, BA, & l'angle droit en E : donc faiſant

BA : S · E :: EA : S · B,

vous connoîtrez un ſecond angle B, & par conſéquent le troiſiéme angle A.

V°. Maintenant dans le triangle BCA, vous connoiſſez les trois côtés & un angle A oppoſé à l'un de ces côtés : donc il ſera facile de connoître les autres angles par la méthode du premier problême.

PROBLÊME IV.

718. *Réſoudre un Triangle quelconque ſcalème* ABC (fig. 159.), *dans lequel on connoît deux côtés* AB, BC, *& l'angle compris* B.

SOLUT. I°. Il faut chercher un des angles oppoſés aux côtés connus, en faiſant (714) la proportion : la ſomme des deux côtés connus CB+BA= CE eſt à leur différence DC, comme la tangente de la demi-ſomme des angles oppoſés aux côtés connus eſt à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

II°. Le quatriéme terme de cette proportion

ſera

fera connoître la différence des deux angles opposés aux côtés connus. Mais on en connoît la somme par l'hypothèse : donc prenant la moitié de la somme, plus la moitié de la différence de ces angles, on connoît le plus grand des angles, sçavoir A ; ou prenant la moitié de la somme, moins la moitié de la différence, on connoîtra le plus petit des angles, sçavoir C : donc dans le triangle ABC on connoît maintenant les trois angles.

III°. On connoîtra le troisiéme côté AC par la méthode du premier problême.

NOMBRE III.

Usage & Application de la Trigonométrie.

I°. L'usage de la Trigonométrie consiste à mesurer sur le terrein des angles & des lignes. Les lignes se mesurent par le moyen de la *perche*, de la *toise* ou du *pied ;* les angles se mesurent par le moyen du *graphométre.*

II°. La *Toise* est une mesure qui contient 6 pieds ; la *perche* de Paris contient 3 toises ; 2000 toises font la petite lieue ; 2282 toises font la lieue commune.

III°. Le *Graphométre* est un cercle, ou demi-cercle exactement divisé en ses degrés & minutes, & accompagné d'une alidade & de deux pinnules (*fig.* 162.). L'alidade est un diamétre roulant sur le centre. Les pinnules sont deux platines de métal perpendiculairement élevées aux deux extrémités de l'alidade, & percées pour diriger le rayon visuel vers l'objet que l'on cherche.

PROBLÊME I.

720. *Mesurer sur le terrein un angle ;* par ex : *l'angle* ABC, *dont le sommet* B *est supposé accessible* (fig. 160.).

SOLUT. I°. Posez le centre du graphométre au sommet B de l'angle à mesurer, & plantez des piquets sur chacun des deux côtés de l'angle, *par ex :* aux points A & C.

II°. Dirigez l'alidade vers le piquet A, en regardant par les fentes des deux pinnules; faites ensuite tourner l'alidade, pour la diriger vers le piquet C.

III°. Comptez ensuite sur le graphométre les degrés & minutes compris entre les deux directions BC & BA de l'alidade, & vous aurez la mesure de l'angle proposé.

PROBLÊME II.

721. *Mesurer sur le terrein un Angle saillant* BCD, *dont le sommet* C *est supposé inaccessible* (fig. 166.).

SOLUT. I°. Posez le graphométre horisontalement, & tournez l'alidade de façon qu'elle aligne le côté CD, & plantez un piquet à un point quelconque *b* de l'alignement.

II°. Par le moyen du graphométre alignez aussi le côté BC, & plantez un piquet à un point quelconque *d* de l'alignement.

III°. Aux points *b* & *d* mesurez immédiatement les angles C*bd*, & C*db*, & vous connoîtrez le troisiéme angle *b*C*d* = BCD opposé au sommet.

PROBLÊME III.

722. *Mesurer sur le terrein un Angle rentrant* ABC, *dont le sommet* B *est supposé inaccessible* (fig. 167.).

SOLUT. I°. Alignez, comme dans le problême précédent, les côtés AB & BC de l'angle, & plantez des piquets dans des points quelconques *a* & *c*, pris dans les alignemens des côtés.

II°. Aux points *a* & *c* mesurez immédiatement les angles B*ac*, & B*ca*, & vous connoîtrez le troisiéme angle AB*c*, qui est le supplément des deux autres.

PROBLÊME IV.

723. *Mesurer une hauteur accessible par le pied*, par ex : *la hauteur perpendiculaire* AB *d'une Tour* (fig. 161.).

Solut. I°. Prenez un point de station D, d'où vous viserez par le moyen de l'alidade du graphométre les points A & B, pour mesurer l'angle ADB.

II°. Mesurez la distance, ou ligne DB, qui est la base du triangle ADB, lequel est rectangle en B, & dont l'angle B est par conséquent connu.

III°. Dans le triangle ADB vous connoissez deux angles D & B, & le côté compris DB : vous connoîtrez donc le côté AB, ou la hauteur perpendiculaire de la tour, en faisant la proportion, le sinus de l'angle A est au côté opposé & connu DB, comme le sinus de l'angle D est au côté cherché AB, ou,

$$S \cdot A : DB :: S \cdot D : AB.$$

Problême V.

724. *Mesurer une Hauteur inaccessible par le pied, par ex: la hauteur perpendiculaire d'une Tour* AB (fig. 161.) *dont le point* B *est supposé inaccessible.*

Solut. I°. Prenez deux points de station C & D, & mesurez la distance CD.

II°. Du point C visez les points A & D pour mesurer l'angle ACD, & du point D visez les points A & C, pour mesurer l'angle ADC.

III°. Cela posé, vous connoissez dans le triangle ACD deux angles & le côté compris, le troisiéme angle sera par conséquent connu : c'est pourquoi vous pourrez connoître le côté AD, en faisant la proportion

$$S \cdot A : CD :: S \cdot C : AD.$$

IV°. Au point de station D visez les points A & B, pour mesure l'angle ADB. D'ailleurs on connoît l'angle en B qui est droit ; dans le triangle ABD vous connoissez donc tous les angles & un côté, c'est pourquoi vous connoîtrez le côté AB, en faisant la proportion

$$S \cdot B : AD :: S \cdot D : AB.$$

PROBLÊME VI.

725. *Mesurer une hauteur oblique & inaccessible par le pied*, par ex: *la pente* AB *d'une montagne*, *dont le point* B *est supposé inaccessible* (fig. 163.).

SOLUT. I°. Prenez, comme ci-devant, deux points de station C & D, & résolvez par la méthode ci-dessus le triangle ACD, pour connoître le côté AD.

II°. Au point de station D mesurez l'angle ADB d'un second triangle ADB, dans lequel vous connoîtrez par conséquent deux choses, sçavoir le côté AD, & l'angle ADB.

III°. Maintenant si l'on pouvoit mesurer immédiatement le côté BD du second triangle, ce triangle seroit aisé à résoudre, parce que l'on y connoîtroit deux côtés & l'angle compris; mais ce côté ne peut pas être mesuré immédiatement, à cause du point B inaccessible.

IV°. Il faut donc prendre un troisiéme point de station E, duquel visant les points D & B, vous formerez par les rayons visuels un troisiéme triangle dans lequel vous connoîtrez les angles en E & D en les mesurant par le graphométre, & le côté ED que l'on peut mesurer immédiatement; la solution de ce triangle BED fera connoître le côté cherché BD.

V°. Cela posé, dans le triangle ADB vous connoissez trois choses, sçavoir, les deux côtés AD, BD, & l'angle compris ADB. Il faut donc maintenant chercher la valeur d'un des angles opposés à l'un des côtés connus, en faisant la proportion (714).

La somme des deux côtés connus AD + DB *est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés, est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.*

Cette proportion fera connoître les angles du triangle ABD, lesquels étant connus, vous connoîtrez facilement le côté AB, en faisant la proportion. S · A : BD :: S · D : AB.

PROBLÊME VII.

726. *Mesurer sur le terrein une distance accessible par une seule de ses extrémités*, par ex: *la largeur d'une Riviere.*

Solut. La largeur de la riviere soit représentée par la ligne AB (*fig.* 155.) : pour la mesurer prenez deux points de station B & C, & mesurez leur distance CB ; de plus à l'autre bord de la riviere choisissez un objet visible, *par ex :* A, que vous puissiez viser des deux points de station B & C. Or au point de station B mesurez l'angle ABC, & au point de station C mesurez l'angle ACB : donc dans le triangle ACB vous connoissez deux angles & le côté compris : donc vous connoîtrez le côté AB, en faisant la proportion (708). S : A : BC :: S · C · AB.

PROBLÊME VIII.

727. *Mesurer la distance de deux objets inaccessibles, tels que* C & D (fig. 160.).

Solut. I°. Prenez deux points de station A & B, & mesurez leur distance AB.

II°. Du point A mesurez l'angle CAB, & du point B mesurez l'angle CBA, & résolvez le triangle CBA pour connoître le côté BC.

III°. Résolvez de la même maniere le triangle ABD pour connoître le côté BD.

IV°. Si dans le triangle CBD vous mesurez l'angle CBD, vous y connoîtrez trois choses, sçavoir, les deux côtés BD & BC, & l'angle compris B.

V°. Pour résoudre le triangle CBD, il faut de plus chercher l'un des angles opposés aux côtés connus par la méthode donnée au sixiéme problême (725).

VI°. Connoissant par-là tous les angles de ce triangle, il sera aisé de trouver le côté CD, en faiſant la proportion S · C : BD :: S · B : CD.

Problême IX.

728. *Meſurer la diſtance de pluſieurs objets conſidérés comme inacceſſibles, ou lever une Carte Géographique* (fig. 168.).

Solut. I°. Prenez une baſe MN, dont vous vérifierez la longueur le plus exactement qu'il ſera poſſible. Poſez le graphométre au point de ſtation M, & viſez ſucceſſivement les points A, B, C, D, pour meſurer les angles NMD, NMC, NMB NMA, (on doit paſſer l'angle NME, parce qu'il eſt trop aigu, & l'angle NML, parce qu'il eſt trop obtus.) Enſuite tranſportez le graphométre au point de ſtation N & viſez ſucceſſivement les mêmes points A, B, &c, pour meſurer les angles MND, MNC, MNB, MNA.

II°. Les rayons viſuels partis des extrémités M & N formeront les triangles MAN, MBN, MCN, MDN, dont la ſolution vous donnera la poſition des points A, B, C, D. Car dans le triangle MAN connoiſſant la baſe MN, & les angles formés ſur cette baſe, vous connoîtrez évidemment par la Trigonométrie les côtés AM & AN, & vous aurez conſéquemment la poſition du point A. Pareillement dans le triangle MBN connoiſſant la baſe MN & les angles ſur cette baſe, vous aurez les côtés BM, BN, & par conſéquent la poſition du point B, & ainſi de ſuite.

III°. Maintenant du point N viſez les points K, H, G, F, pour meſurer les angles MNK, MNH, MNG, MNF; & pareillement de l'extrémité M viſez les mêmes points K, H, &c. pour meſurer les angles NMK, NMH, NMG, NMF, ce qui vous donnera comme ci-devant, des triangles dont vous connoîtrez les côtés, & conſéquemment la poſition des points K, H, G, &c. Car, *par ex:* dans le triangle MNK, connoiſſant la baſe MN & les angles ſur cette baſe, vous trouverez les côtés NK & MK, & conféquemment la pofition du point K. Il faut dire la même chofe pour les points H, G, F.

IV°. Pour avoir les points E & L, prenez dans les triangles déjà réfolus des côtés quelconques connus pour fervir de bafes : *par ex :* pour avoir le point L prenez pour bafe le côté connu AM. Or fi du point M vous mefurez l'angle AML, & du point A l'angle LAM, vous connoîtrez dans le triangle AML la bafe AM, & les deux angles fur cette bafe : donc vous connoîtrez aifément les côtés AL, & ML, & par conféquent la pofition du point L.

ARTICLE III.

La Stéréométrie.

PROBLÊME I.

729. *Trouver la folidité d'un Cube.*

SOLUT. Mefurez un côté du cube, & multipliez-le par lui-même, le produit fera la bafe : multipliez cette bafe par la hauteur du cube, ou par le côté, (qui n'eft pas diftingué de la hauteur,) ce fecond produit donnera la folidité du cube. *Par ex :* fi le côté du cube eft de 4 pieds, vous aurez $4 \times 4 = 16$, & c'eft la bafe : faites enfuite $16 \times 4 = 64$, & c'eft la folidité du cube.

PROBLÊME II.

730. *Trouver la folidité d'un Prifme.*

SOLUT. Cherchez la bafe du prifme, en multipliant l'un par l'autre les deux produifans, d'où réfulte cette bafe ; multipliez enfuite la bafe par la hauteur du prifme, & vous en aurez la folidité. *Par ex :* fi la bafe du prifme eft un exagone régulier, dont chaque côté foit de 5 pieds, & dont la circonférence fera par conféquent de 30 pieds, cherchez-en le rayon droit, que je fuppofe être de 4 pieds; & vous aurez $4 \times 30 = 120$, dont la moitié 60 fera (482) la bafe du prifme : multipliez cette base par la hauteur, que je suppose être de 8 pieds, & vous aurez $60 \times 8 = 480$, pour la solidité du prisme.

Corollaire.

731. La pyramide étant (599) le tiers d'un prisme de même hauteur & de même base, vous trouverez la solidité de la pyramide, en cherchant celle d'un prisme de même hauteur & de même base, & que vous diviserez par 3.

PROBLÊME III.

732. *Trouver la solidité d'un Cylindre.*

SOLUT. Cherchez la surface du cercle qui est la base du cylindre, en multipliant le rayon par la demi-circonférence, & multipliez cette base par la hauteur du cylindre; le produit sera la solidité du cylindre.

Corollaire.

733. Le cône étant le tiers (603) d'un cylindre de même base & de même hauteur, vous trouverez la solidité du cône en cherchant celle d'un cylindre de même base & de même hauteur, & dont vous prendrez le tiers.

PROBLÊME IV.

734. *Trouver la solidité d'un Cône tronqué* CADF (fig. 125.).

SOLUT. I°. Cherchez la hauteur du cône entier CIF par le moyen des deux triangles semblables CGA, CBI, lesquels donnent la proportion, CG, différence des rayons CB & A*o*, est à GA, hauteur du cône tronqué, comme le plus grand rayon CB est à la hauteur BI du cône entier; ou CG : GA :: CB : BI.

II°. Connoissant la hauteur BI du cône entier CIF, cherchez-en la solidité en prenant le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

III°. Retranchez la hauteur *o*B du cône tronqué de la hauteur IB du cône entier, & vous aurez la hauteur du petit cône AID.

IV°. Connoissant la hauteur du petit cône, dont vous connoissez aussi la base, à cause du rayon Ao qui est connu, cherchez-en la solidité.

V°. Enfin retranchez la solidité du petit cône AID, de celle du cône entier CIF, & le reste sera la solidité du cône tronqué.

PROBLÊME V.

735. *Trouver la solidité d'une Sphere, dont le diamétre est donné.*

SOLUT. I°. Cherchez la circonférence d'un grand cercle de la sphére, en vous servant du rapport 100 · 314, qui est un des rapports les plus exacts du diamétre à la circonférence, & multipliez cette circonférence par le diamétre donné; le produit sera (585) la surface de la sphére.

II°. Multipliez cette surface par la sixiéme partie du diamétre, ou par le tiers du rayon, & le produit sera (605) la solidité de la sphére.

PROBLÊME VI.

736. *Mesurer la capacité d'un vase circulaire*, par ex: *la capacité d'un Tonneau* (fig. 164.).

SOLUT. Comme le tonneau forme un ventre vers le milieu, & que de ce milieu il va toujours en diminuant vers ses deux extrémités, on a coutume de le considérer comme un cylindre, dont la base est un cercle moyen proportionnel arithmétique entre le cercle qui forme le fond & celui qui forme le ventre.

II°. C'est pourquoi mesurez l'aire ou la surface d'un des fonds AB, & celui du plus grand cercle CD; prenez-en la somme, & la moitié de cette somme multipliée par la longueur EF du tonneau, donnera à-peu-près la capacité du tonneau. Car ce produit donnera un cylindre, qui aura pour hauteur la longueur du tonneau, & pour base un cercle moyen arithmétique entre le plus petit & le plus grand cercle du tonneau.

Corollaire I.

737. Lorsque l'on connoît la capacité d'un vase cylindrique, ou la quantité de fluide qu'il peut contenir, il est facile de déterminer celle d'un autre vase cylindrique de même hauteur, mais de différent diamétre. Car les cylindres de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Mais les bases étant des cercles, sont entr'elles comme les quarrés de leurs diamétres; & par conséquent les capacités de deux vases cylindriques qui ont même hauteur, sont entr'elles comme les quarrés de leurs diamétres.

Corollaire II.

738. De ce principe les Géométres déduisent une méthode facile & ingénieuse de mesurer la capacité d'un vase cylindrique quelconque, étant connue celle d'un vase cylindrique plus petit & semblable.

I°. Soit (*fig.* 165.) AB le diamétre d'un vase cylindrique donné, & qui soit supposé contenir une mesure: sur l'extrémité A élevez une perpendiculaire indéfinie, sur laquelle prenez $A1 = AB$, & menez B1; B1 sera le diamétre d'un vase qui contiendra deux mesures, mais qui a la même hauteur que le premier.

II°. Faites $A2 = B1$; B2 sera le diamétre d'un vase qui contiendra trois mesures, mais qui aura encore la même hauteur que le premier. On trouve de cette maniere les diamétres B3, B4, ou A4, A5, &c. de plusieurs autres vases plus grands.

III°. Si vous portez sur une verge de bois ou de fer, d'un côté les divisions trouvées A1, A2, A3, &c. & sur l'autre côté, autant de fois qu'il sera possible, la hauteur d'un cylindre qui ne contient qu'une mesure; cette verge s'appelle *Jauge*, & sert à mesurer les capacités des vaisseaux cylindriques.

IV°. La raison en est que deux cylindres de même hauteur (laquelle ſoit celle d'une meſure,) étant entr'eux comme les quarrés de leurs diamétres (737), le quarré du diamétre d'un vaſe qui contient deux, trois, quatre, &c. meſures, ſera par conſéquent double, triple, quadruple, &c. du quarré du diamétre d'un vaſe qui n'en contient qu'une. Or le quarré de B1, ou de A2, eſt le double; le quarré de B2, ou de A3, eſt le triple du quarré de AB, ou de A1, (513): donc A2 ſera le diamétre d'un vaſe qui contient deux meſures, A3, celui d'un vaſe qui contient trois meſures, &c.

V°. Si vous appliquez donc au diamétre d'un vaſe cylindrique le côté de la *jauge* où ſont marquées les diviſions A1, A2, A3, &c. vous verrez tout d'un coup combien ce diamétre donne de meſures; & multipliant ce diamétre (ou le nombre de meſures indiqué par ce diamétre) par la hauteur du vaſe, le produit ſera la quantité de meſures que tout le vaſe peut contenir : ainſi le diamétre étant A5 & la hauteur 8, vous aurez $5 \times 8 = 40$ meſures.