tangle : or le quarré conſtruit ſur l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés conſtruits ſur les côtés : donc, &c.

Corollaire VIII.

521. Si ſur les côtés d'un triangle rectangle & iſocele on conſtruit des demi-cercles, comme on voit (*fig* 108.), & que du ſommet de l'angle droit on abbaiſſe une perpendiculaire, les deux lunules AODG, AEBF terminées par les demi-circonférences, ſeront chacune égales aux triangles correſpondans CAD, CAB.

Car le demi-cercle BEAOD conſtruit ſur l'hypothénuſe BD eſt égal (520) à la ſomme des demi-cercles conſtruits ſur les côtés AB, AD : or ces deux demi-cercles conſtruits ſur les côtés ſont égaux entr'eux, parce que leurs diamétres AB, AD ſont ſuppoſés égaux : donc chacun de ces petits demi-cercles eſt égal à la moitié du grand demi-cercle BEAOD : donc on aura DAGD = CAOD, & retranchant la portion commune DAOD, on aura la lunule DOAGD = CAD, triangle correſpondant à la lunule.

Ces lunules s'appellent les *Lunules d'Hypocrate*, parce que c'eſt lui qui le premier ait évalué la ſurface de ces lunules, en découvrant qu'elles étoient égales chacune à un triangle.

SECTION III.

Des Solides.

I°. UN point qui ſe meut, décrit une *ligne* : une ligne en ſe mouvant décrit une *ſurface* : une ſurface qui ſe meut décrit un *ſolide*.

II°. Lorſqu'une ſurface plane, ou un plan ſe meut pour décrire un ſolide, les lignes qui terminent le plan, décrivent la ſurface du ſolide,

& l'intérieur ou la surface du plan donne la solidité.

III°. Un solide est terminé par des faces & des angles solides. On appelle *angle solide* un espace solide terminé en pointe par le concours de plusieurs angles plans; telle est la pointe d'une pyramide, tels sont les coins d'un dez à jouer. Il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide; car deux plans seulement ne peuvent pas renfermer un espace, de façon à terminer un solide.

IV°. Le solide peut être considéré sous deux points de vue différens, ou comme corps *figuré*, ou comme corps *solide*. On le regarde comme corps figuré, lorsqu'on l'envisage par rapport aux surfaces planes & aux angles solides qui terminent son volume: on le considére comme corps solide, lorsqu'on le regarde comme un volume résultant de trois dimensions, lequel est susceptible d'évaluation, de mesure & de comparaison. Nous allons envisager les solides sous ces deux points de vue différens.

CHAPITRE I.

Des Solides considérés comme Corps figurés.

I°. ON appelle *corps figurés*, des corps ou solides terminés par des angles solides & des surfaces planes. Les corps figurés sont dans la classe des solides, ce que les polygones sont dans la classe des figures.

II°. On distingue deux sortes de corps figurés, comme on distingue deux sortes de polygones; sçavoir, des *réguliers* & des *irréguliers*. Les corps réguliers sont ceux dont toutes les faces planes sont égales entr'elles & tous les angles solides sont égaux entr'eux. On appelle au contraire corps irréguliers, ceux dont, ou toutes les faces ne ſont point égales, ou tous les angles ſolides ne ſont point égaux.

III°. On conçoit que les corps figurés ſe peuvent former de deux manieres, ou en faiſant mouvoir une ſurface que l'on ſuppoſe laiſſer des traces par tout où elle paſſe ; ou en joignant des ſurfaces planes par leurs angles pour former des angles ſolides : la premiere ſe fait par le mouvement d'un plan ; la ſeconde par l'aſſortiment des plans.

ARTICLE I.

Formation des Corps figurés par le mouvement d'un Plan.

Hypothèse I.

522. Concevez que le plan EFGH (*fig.* 116.) monte parallelement à lui-même le long de la ligne EA, enſorte que le point E parcoure ſucceſſivement tous les points de la ligne EA, & que ce plan laiſſe des traces par tout où il paſſe : il eſt évident qu'il en réſultera le corps AG, que l'on appelle en général *Priſme.*

DÉFINITIONS.

I.

523. Un *priſme* eſt un corps qui dans toute ſa longueur à une égale groſſeur, qui eſt entouré de faces qui ſont des parallélogrammes, & eſt compris ſous deux baſes, l'une ſupérieure ABDC, & l'autre inférieure EFGH, qui ſont des figures paralleles ; ſemblables & égales.

II.

524. Si le plan générateur eſt un parallélogramme, alors le priſme eſt appellé *Parallélipipede.* Si le plan générateur eſt un parallélogramme rectangle, & ſi la ligne AE eſt perpendiculaire à la baſe, alors le parallélipipede s'appelle *Parallélipipede* rectangle (*fig.* 121.). Si le plan générateur eſt un quarré, & qu'il s'éleve à une hauteur égale au

côté du quarré, alors il s'appelle *Cube* ou *Exaedre*, (*fig.* 116.).

I I I.

525. De plus, le prisme s'appelle *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *exagonal*, &c. selon que le plan générateur est un *Triangle*, un *Rectangle*, un *Pentagone*, un *Exagone*, &c.

I V.

526. Une ligne tirée du centre de la base supérieure au centre de la base inférieure, s'appelle l'*Axe* du prisme. Une ligne tirée d'un des angles du prisme perpendiculairement sur la base (prolongée, s'il le faut) s'appelle la *Hauteur* du prisme.

V.

527. Un prisme est appellé *droit*, lorsque son axe est perpendiculaire aux bases, & alors l'axe n'est pas distingué de la hauteur; il est appellé *oblique*, lorsque l'axe n'est pas perpendiculaire aux bases, & alors l'axe est distingué de la hauteur.

V I.

528. Si le plan générateur est un polygone d'un nombre infini de côtés, ou est un cercle, alors le prisme deviendra un *prisme infinitaire*, ou un *cylindre*, (*fig.* 123.). Le cylindre peut donc être regardé comme un prisme entouré de faces qui sont des parallélogrammes d'une largeur infiniment petite.

Corollaire I.

529. Dans l'hypothèse que nous venons de faire, on peut regarder les traces que laisse le *plan générateur*, en montant parallelement à lui-même pour former le prisme, comme étant elles-mêmes autant de petits prismes élémentaires d'une hauteur infiniment petite: c'est pourquoi

I°. On peut regarder le prisme comme un composé d'une infinité de prismes qui n'ont qu'une hauteur infiniment petite, & qui sont posés les uns sur les autres. Les prismes élémentaires peuvent aussi être regardés comme des tranches, ou comme des plans semblables & égaux d'une épaisseur infiniment petite.

II°. On peut dire la même chose du parallélipipede.

III°. Le cylindre peut être regardé comme résultant de la somme d'une infinité de petits cylindres d'une hauteur infiniment petite & posés les uns sur les autres. Ces petits cylindres élémentaires peuvent aussi être regardés comme des cercles, ou des plans circulaires égaux, & d'une épaisseur infiniment petite.

Corollaire II.

530. Comme toute figure réguliere peut être inscrite ou circonscrite à un cercle, de même tout prisme (dont les bases seront supposées régulieres) peut être inscrit ou circonscrit à un cylindre : or

I°. De deux ou plusieurs prismes circonscrits à un même cylindre, celui dont la base aura plus de côtés, sera plus petit : car plus la base du prisme aura de côtés, plus elle approchera du cercle (422) qui est la base du cylindre, & par conséquent plus aussi le prisme approchera du cylindre qui est toujours plus petit qu'aucun des prismes circonscrits.

II°. De deux ou plusieurs prismes inscrits à un même cylindre, celui dont la base aura plus de côtés, sera le plus grand. La preuve en est évidente après ce que nous venons de dire.

Hypothèse II.

531. Si le plan générateur qui monte parallelement à lui-même, est un polygone fini, dont chaque côté pendant le mouvement, décroisse toujours uniformement, jusqu'à ce qu'il devienne nul, ou $=0$; alors le solide se terminera en pointe, & s'appelle *Pyramide*, (*fig.* 113.).

DÉFINITIONS.

I.

532. La pyramide eſt donc un ſolide terminé d'une part par une *Baſe*, & de l'autre par un *Point*, & environné de faces qui ſont des triangles dont les ſommets ſe réuniſſent tous en un même point, que l'on appelle *Sommet* de la pyramide.

II.

533. La pyramide s'appelle *tronquée*, lorſqu'on en a retranché le ſommet, ou lorſque faiſant paſſer par une des faces de la pyramide un plan parallélement à la baſe, on en a retranché une petite pyramide, (*fig.* 124.).

III.

534. La pyramide s'appelle *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, &c. ſelon que le plan générateur eſt un *Triangle*, un *Quarré*, un *Pentagone*, &c. Dans chacune de ces pyramides, la ligne tirée du ſommet au centre de la baſe, (que nous ſuppoſons être un polygone régulier,) s'appelle l'*Axe* de la pyramide.

IV.

235. La pyramide eſt appellée *droite*, lorſque ſon axe eſt perpendiculaire ſur la baſe, & elle eſt appellée *oblique*, lorſque cet axe eſt oblique ſur la baſe. Elle eſt appellée *réguliere*, lorſqu'elle eſt droite, & que la baſe eſt un polygone régulier.

V.

536. Une ligne tirée du ſommet de la pyramide perpendiculairement ſur la baſe, (prolongée, s'il le faut,) s'appelle la *Hauteur* de la pyramide. Si la pyramide eſt droite, & ſi la baſe eſt un polygone régulier, une ligne tirée du ſommet de la pyramide perpendiculairement ſur un des côtés de la baſe, s'appelle l'*Apothême* de la pyramide.

VI.

537. Si le plan générateur eſt un cercle dont la circonférence décroiſſe uniformément, à meſure quelle monte parallélement à elle-même, alors la

pyramide devient une *pyramide infinitaire*, ou un *Cône* (*fig.* 120.); le cône peut donc être regardé comme une pyramide entourrée de faces qui sont des triangles d'une base infiniment petite.

V I I.

538. Le cône, de même que la pyramide, à sa *Hauteur*, son *Axe*, son *Apothême*: il est appellé *droit*, lorsque son axe est perpendiculaire sur la base; il est appellé *oblique*, lorsque cet axe est oblique sur la base; & il est appellé *tronqué*, lorsqu'on en a retranché le sommet.

Corollaire I.

539. Dans l'hypothèse que nous venons de faire, on peut regarder les traces que laisse le plan générateur, comme autant de plans polygones qui ont une épaisseur infiniment petite, & sont posés les uns sur les autres: c'est pourquoi

I°. La pyramide peut être regardée comme composée d'élémens qui soient des plans polygones d'une épaisseur infiniment petite, & dont les côtés décroissent uniformément depuis la base jusqu'au sommet de la pyramide, ou ils deviennent nuls, ou $=0$.

II°. Le cône peut être regardé comme composé de plusieurs cercles posés les uns sur les autres, & dont les circonférences décroissent uniformément depuis la base jusqu'au sommet du cône, ou elles deviennent nulles, ou $=0$.

Corollaire II.

540. Comme tout prisme, dont les bases sont supposées régulieres, peut être inscrit ou circonscrit à un cylindre de même hauteur que lui; de même toute pyramide dont la base sera une figure réguliere, pourra être inscrite ou circonscrite à un cône de même hauteur qu'elle: or

I°. De deux ou plusieurs pyramides circonscrites à un même cône, celle-là approchera plus du cône & sera plus petite, dont la base aura plus de côtés, ce qui eſt évident après ce que nous avons dit du priſme circonſcrit au cylindre.

IIº. Pareillement de deux ou pluſieurs pyramides inſcrites à un même cône, celle-là approchera plus du cône & ſera plus grande, dont la baſe aura plus de côtés.

Hypothèse III.

541. Concevez qu'un polygone: *par ex:* LABIF, &c. (*fig.* 126.) tourne autour d'un diamétre IL, ou d'une diagonale quelconque menée d'un des angles du polygone à l'angle oppoſé; ce polygone dans ſa révolution formera un ſolide, que l'on appelle en général *Sphéroïde*, lequel reçoit différens noms ſelon l'eſpéce du plan ou polygne générateur.

DÉFINITIONS.

I.

542. Si le plan générateur eſt un quarré, ou un lozange qui tourne autour d'une de ſes diagonales priſe comme *axe* du mouvement, le ſphéroïde qui ſera formé par cette révolution, s'appelle *fuſeau.*

II.

543. Si le plan générateur eſt un pentagone régulier, qui ſoit ſuppoſé tourner autour d'un diamétre mené d'un des angles du polygone perpendiculairement ſur le côté oppoſé, le ſolide formé par cette révolution, s'appelle *ſphéroïde pentagonal.*

III.

544. En général le ſphéroïde s'appellera *pentagonal*, *exagonal*, *décagonal*, &c. ſelon que le plan générateur ſera un *pentagone*, un *exagone*, un *décagone*, &c. régulier.

IV.

545. Si le plan générateur eſt un polygone d'un nombre infini de côtés, ou eſt un cercle (*fig.* 127.) que l'on ſuppoſe tourner autour d'un de ſes diamétres IS, alors le ſphéroïde décrit ſera un ſphéroïde *infinitaire*, ou une *ſphere.*

Corollaire I.

546. On peut regarder le ſphéroïde comme compoſé de pluſieurs tranches poſées les unes ſur les autres, leſquels ſont ou des cylindres, ou des cônes tronqués, ou des cônes.

Corollaire II.

547. De ce que tout polygone régulier peut être inſcrit ou circonſcrit à un cercle, il s'enſuit que tout ſphéroïde dont le plan générateur ſera un polygone régulier pourra être inſcrit ou circonſcrit à une ſphére: or

I°. De deux ou pluſieurs ſphéroïdes circonſcrits à une même ſphére, celui dont le polygone générateur aura plus de côtés, ſera le plus petit; car ſi l'on conçoit pluſieurs polygones circonſcrits à un même cercle, & qu'on les faſſe tourner autour d'un diamétre commun pour former la ſphére & les ſphéroïdes, il eſt évident que le polygone qui aura le plus de côtés approchera le plus du cercle, & ſera le plus petit (422); par conſéquent le ſphéroïde décrit par le polygone d'un plus grand nombre de côtés approchera le plus de la ſphére, & ſera le plus petit, puiſque la ſphére eſt plus petite qu'aucun des ſphéroïdes circonſcrits.

II°. Par une raiſon contraire de tous les ſphéroïdes inſcrits à une même ſphére, celui dont le polygone générateur aura plus de côtés, ſera le plus grand, parce qu'il approchera le plus de la ſphére, laquelle eſt plus grande qu'aucun des ſphéroïdes qui lui ſont inſcrits.

Remarque.

548. Le mouvement de révolution dont nous venons de faire uſage dans cette hypothèſe, ſert en général à faire concevoir la formation de tous les corps circulaires.

ARTICLE II.

Formation des Corps figurés par l'assortiment des Plans.

Hypothése.

549. Si l'on joint ensemble des surfaces planes par leurs angles pour former des angles solides ; & si l'on renferme un espace ou un volume sous ces surfaces, on représentera des solides que l'on appelle *polyedres*, lesquels prennent différens noms suivant le nombre & l'espéce des surfaces que l'on aura fait concourir.

Il est à propos de former soi-même ces différens polyedres avec du carton.

DÉFINITIONS.

I.

550. Si vous assortissez quatre triangles égaux & équilatéraux par leurs angles, vous renfermerez par cet assortiment un espace ou un volume, & vous aurez un polyedre, que l'on appelle *Tétraedre* (*fig.* 114.).

II.

551. Si vous joignez de la même maniere huit triangles égaux & équilatéraux, cet assortissement représentera un polyedre, que l'on appelle *Octaedre* (*fig.* 115.).

III.

552. Si vous réunissez ensemble vingt triangles égaux & équilatéraux, il en résultera un polyedre, que l'on appelle *Icosaedre* (*fig.* 117.).

IV.

553. Si, au lieu de triangles, vous prenez des quarrés, & si vous assortissez ensemble, & de la maniere ci-dessus, six quarrés égaux, vous aurez un polyedre que l'on appelle *Exaedre* ou *Cube*, (*fig.* 116.).

V.

554. Si, au lieu de quarrés, vous prenez des rectangles, & si vous entourez un espace avec ces

rectangles, de façon que ceux qui seront opposés, soient égaux ; si de plus vous donnez à cette enveloppe des bases qui soient des polygones paralleles, semblables & égaux, il en résultera un polyedre, que l'on appelle en général *Prisme*, (*fig.* 121, 122 & 131).

I V.

555. Si, au lieu de rectangles, vous prenez des pentagones, & si vous assortissez ensemble douze pentagones réguliers & égaux, de maniere à former des angles solides, vous aurez un polyedre que l'on appelle *Dodécaedre* (*fig.* 119.).

Corollaire I.

556. Si, du sommet de chaque angle du polyedre, on suppose des lignes menées dans l'intérieur du polyedre, de façon qu'elles se rencontrent toutes en un même point, ces lignes partageront le polyedre en plusieurs pyramides, dont les sommets se réuniront en un point commun, que l'on appelle le *centre* du polyedre : d'où il suit

I°. Que le polyedre peut être regardé comme composé de pyramides, dont les sommets se réunissent au centre du polyedre, & dont les bases sont appuyées sur les faces du polyedre.

II°. Que la sphére peut être regardée comme un polyedre régulier, composée d'une infinité de pyramides toutes égales, dont les sommets se réunissent au centre de la sphére, & dont les bases sont appuyées sur les faces infiniment petites du polyedre infinitaire, ou de la sphére.

Corollaire I I.

557. Comme toute figure réguliere peut être inscrite ou circonscrite à un cercle, de même tout polyedre régulier pourra être inscrit ou circonscrit à une sphére de même diamétre : or

I°. De deux ou plusieurs polyedres inscrits à une même sphére, le plus grand sera celui qui aura un plus grand nombre de faces, parce qu'il approchera plus de la ſphére, laquelle eſt plus grande qu'aucun des polyedres inſcrits.

II°. Au contraire, de tous les polyedres circonſcrits à une même ſphére, le plus petit ſera celui qui aura un plus grand nombre de faces, parce que plus le polyedre aura de faces, plus il approchera de la ſphére, laquelle eſt plus petite qu'aucun des polyedres circonſcrits.

Remarque I.

558. En prenant des exagones, & en général des polygones au deſſus de l'exagone; on ne peut plus former aucune eſpéce de polyedres par l'aſſortiſſement des plans.

Remarque II.

559. En aſſortiſſant des lignes égales par leurs extrémités, vous pouvez toujours former des polygones réguliers: ainſi tous les polygones depuis le plus ſimple, qui eſt le *triangle*, juſqu'au plus composé, qui eſt le *cercle*, peuvent être réguliers; mais il n'en eſt pas de même des corps figurés, & nous allons voir qu'entre tous les corps figurés depuis le plus ſimple, qui eſt le *tétraedre*, juſqu'au plus compoſé, qui eſt la *ſphére*, il ne peut y avoir que cinq ſortes de corps réguliers. Nous entendons par corps réguliers, ceux-là ſeulement dont la régularité eſt parfaite, c'eſt-à-dire dont tous les angles ſolides ſont égaux entr'eux, & toutes les faces ſont égales entr'elles.

LEMME I.

560. *Lorſqu'un Angle ſolide* A (*fig.* 112.) *eſt formé par trois angles plans* DAC, DAB, BAC, *deux de ces angles, quels qu'ils ſoient, ſont plus grands que le troiſiéme.*

DÉMONST. L'angle plan BAC eſt plus petit que la ſomme des angles plans BAD + DAC; car entre les extrémités AB, AC, aucune ſurface n'eſt plus petite que le plan BAC: donc le plan BAC eſt plus petit que le plan anguleux BAD + DAC; de même qu'une ligne droite eſt plus courte que la ligne anguleuſe compriſe entre les mêmes points.

LEMME II.

561. *Tous les Angles plans qui peuvent former un Angle ſolide, pris enſemble, ſont plus petits que quatre angles droits* (fig. 113.).

DÉMONST. Soit une pyramide pentagonale dont la baſe BFEDC ſoit diviſée en cinq triangles, dont les ſommets ſe réuniſſent au point G. Cela poſé, la ſurface convexe de la pyramide eſt compoſée de cinq triangles, dans chacun deſquels la ſomme des angles vaut 180 degrés: pareillement la baſe de la pyramide eſt compoſée de cinq triangles, dans chacun deſquels la ſomme des angles vaut 180 degrés; donc la ſomme des angles des cinq premiers triangles eſt égale à la ſomme des angles des cinq derniers triangles. Mais les angles ſur les baſes des cinq premiers triangles qui ſont les faces triangulaires, ſont plus grands que les angles ſur la baſe des cinq autres triangles, ou que les angles à la circonférence du pentagone. Car par la propoſition précédente, à cauſe de l'angle ſolide, *par ex:* C, on aura les angles ACB + ACD plus grands que BCD: donc les angles au ſommet A de la pyramide ſont moindres que les angles formés autour du point G du pentagone; or les angles autour du point G valent quatre angles droits: donc la ſomme des angles formés autour du ſommet A vaut moins que quatre angles droits.

THEORÉME I.

562. *Il n'y a que cinq eſpéces de corps réguliers qui puiſſent être formés par l'aſſortiment des ſurfaces planes de même eſpéce, ſçavoir; le* Tétraedre, *l'*Octaedre, *l'*Icoſaedre, *l'*Exaedre, *& le* Dodécaedre.

DÉMONST. Pour former un polyedre en joignant des ſurfaces planes, il eſt néceſſaite que ces ſurfaces réunies par leurs angles puiſſent former un angle ſolide, qui eſt moindre que 360 degrés.

Or I°. trois angles de triangles égaux & équilatéraux peuvent former un angle solide ; car chaque angle du triangle équilatéral étant de 60 degrés, trois de ces angles font $3 \times 60 = 180$ degrés, ce qui est moindre que 360 degrés ou quatre angles droits : donc en assortissant quatre triangles égaux & équilatéraux, on formera des angles solides tels que sont ceux du *Tétraedre.*

II°. Quatre angles de ces mêmes triangles peuvent encore former un angle solide : car quatre de ces angles font $4 \times 60 = 240$ degrés, ce qui est moindre que quatre angles droits ; or l'angle solide de l'*Octaedre* est formé par quatre angles de triangles égaux & équilatéraux.

III°. Cinq angles de ces mêmes triangles peuvent encore former un angle solide, car $5 \times 60 = 300$ degrés ; ce qui est moindre que 360 degrés ou quatre angles droits : or l'angle de l'*Icosaedre* est formé par cinq angles de triangles égaux & équilatéraux.

Mais six angles de triangles équilatéraux ne peuvent plus former un angle solide ; car $6 \times 60 = 360$ degrés ou quatre angles droits : c'est pourquoi il ne peut y avoir que trois espéces de polyedres réguliers formés par l'assortiment de triangles égaux & équilatéraux.

IV°. Trois angles de quarré peuvent faire un angle solide : car l'angle du quarré étant de 90 degrés, trois de ces angles font $3 \times 90 = 270$ degrés, moindres que 360 degrés ou quatre angles droits : or l'angle du *cube* ou de l'*exaedre*, est composé de trois angles de quarré.

Mais quatre angles de quarré font $4 \times 90 = 360$ degrés, & ne peuvent par conséquent former un angle solide ; c'est pourquoi on ne peut former avec des quarrés d'autre solide que le *cube*.

V°. Trois angles de pentagones réguliers peuvent aussi former un angle solide : car l'angle du pentagone régulier étant de 108 degrés, trois de ces angles feront 3×108 degrés $= 324$ degrés, ce qui est moindre que quatre angles droits: or chaque angle du *Dodécaedre* est formé par trois angles de pentagones réguliers.

Mais quatre angles de pentagones réguliers font $4 \times 108 = 432 > 360$ degrés, & ne peuvent par conséquent former d'angles solides. C'est pourquoi on ne peut former avec des pentagones réguliers d'autre solide que le *Dodécaedre*.

VI°. Trois angles d'exagones réguliers ne peuvent pas former un angle solide: car chaque angle de l'exagone régulier étant de 120 degrés, trois de ces angles font $3 \times 120 = 360$ degrés ou quatre angles droits: ainsi on ne peut point former de polyedres réguliers avec des exagones.

Remarque.

563. Ces surfaces planes qui, jointes par leurs angles, & repliées les unes sur les autres, représentent le solide, donnent exactement la surface du solide. Or, si l'on conçoit que ces surfaces soient développées, ou posées sur un même plan à côté les unes des autres, elles s'appellent le *Développement* de la surface du solide; & ce développement peut être évalué & mesuré.

THÉORÊME II.

564. *Chaque corps régulier a pour développement une surface composée d'un certain nombre de polygones égaux réguliers & de même espéce, que l'on peut tracer & évaluer.*

DÉMONST. I°. Si vous faites le triangle équilatéral BAC (*fig.* 114.); & si vous divisez également les trois côtés aux points D, E, F, en tirant les lignes DE, DF, EF, vous aurez le développement du *Tétraedre*, qui sera composé de quatre triangles plans égaux & équilatéraux, lesquels repliés pour se réunir, représenteront le *Tétraedre*.

II°. Si vous joignez ensemble deux développemens de tétraedre, en leur donnant le côté commun AB (*fig.* 115.) vous aurez le développement de l'*Octaedre*, lequel est composé de huit triangles égaux & équilatéraux.

III°. Si entre deux paralleles AB, CD (*fig.* 117.) vous tracez dix triangles égaux & équilatéraux ; & si sur les bases de ces triangles vous tracez encore de part & d'autre des triangles égaux & équilatéraux, vous aurez le développement de l'*Icosaedre*, lequel est composé de vingt triangles égaux & équilatéraux.

IV°. Si vous faites le quarré ABDC (*fig.* 116.); & si sur chaque côté de ce quarré vous faites encore des quarrés égaux & semblables au premier, & si vous ajoutez le quarré EGHF, construit sur le côté EF, vous aurez le développement du *Cube*, ou de l'*Exaedre*, qui est composé de six quarrés égaux.

V°. Si vous faites deux pentagones réguliers & égaux A & B (*fig.* 119.), & si sur chaque côté de chacun des pentagones vous construisez pareillement des pentagones égaux, rendez le côté DC commun, & vous aurez le développement du *Dodécaedre*, composé de douze pentagones réguliers & égaux.

Corollaire I.

565. Des cinq corps réguliers dont nous venons de parler, on peut dériver & faire naître d'autres corps, qui seront des polyédres; sçavoir en tronquant les angles du corps régulier, ce qui augmentera le nombre des angles solides, & celui des faces du polyedre.

Corollaire II.

566. Si l'on tronquoit les angles d'un polyedre régulier à l'infini, les angles deviendroient nuls, & les faces seroient infiniment petites, & alors le polyedre régulier deviendroit une sphére.

Corollaire III.

567. Tout polygone régulier a, comme nous l'avons dit, un centre qui est également éloigné

de tous les sommets des angles & de tous les côtés : de même aussi tout corps régulier a un centre qui est également distant de tous les sommets des angles solides, & de toutes les faces du corps régulier.

Or dans le corps régulier, comme dans le polygone régulier, une ligne tirée du centre perpendiculairement sur une des faces, s'appelle *rayon droit*, & une ligne tirée du centre au sommet d'un des angles solides, s'appelle *rayon oblique*, lequel n'est pas distingué du rayon de la sphére circonscrite.

CHAPITRE II.

Des Solides considérés en tant que Corps Solides.

NOUS y considérerons deux choses, leur surface & leur solidité. La surface du corps solide est cette étendue qui termine le volume du solide, la solidité est la capacité ou le volume qui est compris sous cette surface.

ARTICLE I.

De la Surface des Solides.

Nous avons déja parlé de la surface des solides considérée comme *développement*, ou comme surface formée par le concours ou l'assortiment de plusieurs figures planes de même, ou de différente espéce, nous allons maintenant considérer leur surface comme *produit*, ou comme étendue résultante de la combinaison de deux dimensions multipliées l'une par l'autre.

Hypothése I.

568. Si une ligne AB (*fig.* 113.) immobile au point A, parcourt par son extrémité B les côtés, d'une figure quelconque BCDEF, cette ligne décrira la surface *convexe* ou *latérale* d'une pyramide,

mide, dont le ſommet eſt le point A & dont la baſe eſt la figure décrite par l'extrémité B de la ligne. Or

I°. Si la figure décrite par l'extrémité B eſt un *Triangle*, cette ligne décrira la ſurface d'une pyramide *triangulaire*.

II°. Si la figure décrite eſt un *Quarré*, un *Pentagone*, &c. cette ligne décrira la ſurface d'une pyramide *quadrangulaire*, *pentagonale*, &c.

III°. Si la figure décrite par le point B eſt un *Cercle*, cette ligne décrira la ſurface d'un *Cône*.

Hypotése II.

569. Si le ſommet de la ligne qui décrit la ſurface d'un ſolide, n'eſt pas immobile, & ſi dans le tems que l'extrémité F d'une ligne CF (*fig.* 116.) décrit le contour d'une figure FGHE, ſon ſommet C décrit une figure CDBA, parallele, égale & ſemblable à la premiere; alors cette ligne décrira la ſurface *convexe* ou *latérale* d'un *Priſme*. Or

I°. Si la baſe eſt un *Triangle*, la ſurface décrite ſera celle d'un priſme *triangulaire*.

II°. Si la baſe eſt un *Quarré*, un *Pentagone*, &c. la ſurface décrite ſera celle d'un priſme *quadrangulaire*, *pentagonal*, &c.

III°. Si la baſe eſt un *Cercle*, la ſurface décrite ſera celle d'un *Cylindre*.

Théorême I.

570. *La ſurface convexe ou latérale du Priſme droit eſt égale au produit du côté du Priſme par le contour de ſa baſe* (fig. 116.).

Démonst. Car elle eſt égale à la ſurface que décrit la ligne, ou le côté CF, lorſque par ſes extrémités C & F elle parcourt les côtés de deux figures égales & paralleles FEHG, CABD. Or tandis que les extrémités C & F de la ligne CF décrivent les côtés des figures FEHG, CABD, tous les autres points de la ligne CF décrivent auſſi les côtés de figures ſemblables, égales & paralleles, comme il eſt évident. Donc pour avoir la ſurface décrite par la ligne CF, il n'y a qu'à prendre le contour d'une de ces figures; *par ex:* de la baſe autant de fois qu'il y a de points dans le côté CF. Or prendre le contour de la baſe autant de fois qu'il y a de points dans le côté CF, c'eſt multiplier le contour de la baſe par le côté: donc, &c.

Corollaire.

571. Il s'enſuit:

I°. Que la ſurface *convexe* ou *latérale* du priſme droit eſt égale au produit de ſa hauteur par le contour de ſa baſe. Car lorſque le priſme eſt droit, ſa hauteur n'eſt pas diſtinguée de ſon côté.

II°. Que la ſurface convexe ou latérale, ſoit du parallélipipede rectangle, ſoit du cube, eſt égale au produit d'un des côtés du ſolide par le contour de la baſe.

THÉORÊME II.

572. *La ſurface convexe du Cylindre droit eſt égale au produit de la circonférence de la baſe par la hauteur du Cylindre* (fig. 123.).

DÉMONST. Car elle eſt égale à la ſomme de toutes les circonférences que décrivent les points de la ligne CI, lorſque par ſes extrémités C & I elle décrit les circonférences égales & paralleles des baſes ſupérieure & inférieure. Or toutes ces circonférences ſont égales & uniformes: donc leur ſomme eſt égale à l'une d'entr'elles; *par ex:* à la circonférence de la baſe multipliée par le nombre de ces circonférences. Mais le nombre de ces circonférences eſt meſuré par la hauteur CI, ou AB du cylindre: donc, &c.

Corollaire I.

573. La ſurface convexe du cylindre eſt égale à un rectangle qui auroit pour baſe une ligne égale à la circonférence de la baſe du cylindre, & une hauteur égale à celle du cylindre.

Il eſt aiſé par conſéquent de meſurer la ſurface totale du cylindre. Car pour l'évaluer, il ne s'agit que d'ajouter à la ſurface convexe les deux baſes, qui ſont des cercles que l'on ſçait (485) évaluer.

Corollaire II.

574. La ſurface convexe du cylindre qui a pour hauteur le rayon du cercle de la baſe, eſt double de ce cercle. Car la ſurface de ce cercle eſt égale au produit de ſon rayon par ſa demi-circonférence (485). Or la ſurface convexe du cylindre eſt égale au produit de ſa hauteur, (qui eſt le rayon du cercle de la baſe,) par la circonférence entiere de cette baſe: donc, &c.

Corollaire III.

575. Donc la ſurface convexe du cylindre qui auroit pour hauteur le diamétre du cercle de la baſe, eſt quadruple de la ſurface de ce cercle; comme il eſt évident.

THÉORÊME III.

576. *La ſurface convexe ou latérale de la Pyramide droite & réguliere, eſt égale au produit du contour de ſa baſe par la moitié de l'Apothême de la Pyramide.* (fig. 113.)

DÉMONST. Elle eſt égale à la ſomme de tous les triangles qui ſont décrits par la ligne AB, lorſqu'immobile au point A, elle décrit par ſon extrémité B les côtés de la figure, ou du polygone BFEDC. Or tous ces triangles ayant même hauteur, leur ſurface eſt égale à celle d'un triangle unique, qui auroit pour baſe une ligne égale à la ſomme des baſes de tous ces triangles, (laquelle ſomme eſt le contour de la baſe de la pyramide,) & pour hauteur, la hauteur commune de tous les triangles, (laquelle eſt l'apothême de la pyramide.). Or ce triangle unique eſt égal au produit de ſa baſe par la moitié de ſa hauteur: donc, &c.

Corollaire.

577. D'où il ſuit que la ſurface de la pyramide

droite & réguliere eſt égale à celle d'un triangle qui auroit pour hauteur l'apothême de la pyramide, & pour baſe une ligne égale à la circonférence de la baſe de la pyramide.

THÉORÊME IV.

578. *La ſurface convexe du Cône droit eſt égale au produit de l'Apothême par la moitié de la circonférence de la baſe* (fig. 124.).

DÉMONST. La ſurface convexe du cône eſt égale à la ſomme de toutes les circonférences que décrivent les points de la ligne AE, lorſqu'immobile au point A, elle décrit par ſon extrémité E la circonférence du cercle EFE, qui ſert de baſe au cône. Or toutes ces circonférences décroiſſent uniformement depuis la baſe juſqu'au ſommet, & par conſéquent ſont repréſentées par les termes d'une progreſſion arithmétique, *par ex :* 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6, dont le premier terme 0 repréſente le ſommet, le dernier 6 repréſente la circonférence de la baſe, & le nombre des termes repréſente l'apothême; (car il y a autant de termes dans la progreſſion, qu'il y a dans l'apothême de points qui décrivent ces circonférences.) Or la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique eſt égale, comme nous l'avons dit (192), au nombre des termes multiplié par la moitié de la ſomme des extrêmes : donc dans la progreſſion 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6, le premier extrême étant 0, la ſomme de tous les termes ſera égale au nombre des termes multiplié par la moitié du dernier extrême; & par conſéquent la ſurface convexe du cône ſera égale au produit de l'apothême par la moitié de la circonférence de la baſe.

Corollaire I.

579. Donc la ſurface convexe du cône droit eſt égale à celle d'un triangle rectangle ABC (*fig.* 124.), dont la baſe ſeroit égale à la circonférence

de la base du cône, & dont la hauteur seroit égale à l'apothême du cône.

Corollaire II.

580. La surface convexe du cône est égale au produit de l'apothême par la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre le sommet & la circonférence de la base. Car elle est égale (578) au produit de l'apothême par la moitié de la circonférence de la base : or la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre le sommet & la base, est précisément la moitié de la circonférence de la base. Car les circonférences qui composent la surface conique étant représentées par les termes de la progression 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6, comme nous venons de le dire, le terme moyen 3 qui représente la circonférence du milieu, est précisément la moitié du dernier terme 6, qui représente la circonférence de la base, suivant la nature de toute progression arithmétique qui commence par 0.

THÉORÊME V.

581. *La surface convexe d'un Cône tronqué est égale au produit de son apothême par la moitié de la somme des circonférences de ses bases supérieure & inférieure* (fig. 124.).

DÉMONST. On peut considérer le cône tronqué GEFH comme résultant de la section faite dans le cône entier AEF, dont on auroit retranché le petit cône AGH : or, puisque (578) les circonférences ou élémens de la surface du cône entier sont représentés par les termes d'une progression arithmétique, *par ex :*

0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10;

si d'ailleurs l'on suppose que les élémens de la surface du petit cône AGH soient représentés par les termes 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5, il s'ensuit que les circonférences ou élémens qui composent la surface du cône tronqué, seront représentés par le reste des termes 6 · 7 · 8 · 9 · 10, dont le premier 6 représente la circonférence de la base supérieure, le dernier 10 représente celle de la base inférieure, & le nombre représente l'apothême du cône tronqué; or la somme des termes de cette derniere progression est égale, comme nous l'avons vu (192), au nombre des termes multiplié par la moitié de la somme des extrêmes: donc, &c.

Corollaire I.

582. La surface du cône tronqué est égale à la surface d'un trapeze qui auroit pour hauteur l'apothême, & des bases égales aux circonférences des bases supérieure & inférieure du cône tronqué (*fig.* 124.). Car l'une & l'autre surfaces sont égales chacune au produit de deux élémens qui sont supposés égaux de part & d'autre.

Corollaire II.

583. La surface du cône tronqué est égale au produit de l'apothême par la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre les bases supérieure & inférieure. Car la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre les bases supérieure & inférieure, est égale à la moitié de la somme des circonférences des bases supérieure & inférieure.

Théorême VI.

584. *La surface d'un Sphéroïde est égale au produit de son axe par la circonférence d'un grand cercle de la sphère inscrite* (fig. 126.).

Démonst. Si l'on suppose qu'un cercle & un polygone circonscrit au cercle tournent autour du diamétre IL; ils décriront, l'un une sphére, & l'autre un sphéroïde circonscrit à la sphére. Or, si par les angles du sphéroïde on fait passer des plans paralleles BD, AE, &c. le sphéroïde se trouvera divisé en plusieurs portions qui seront, ou des cônes tronqués, ou des cylindres, & la surface du sphéroïde ne sera pas distinguée de la somme des surfaces de tous ces cônes tronqués

& cylindres circonfcrits à la fphére. Or la furface de la portion cylindrique comprife entre les plans AE, PG eft évidemment égale au produit de fon axe CX par la circonférence de fa bafe, qui eft la circonférence d'un grand cercle de la fphére. Refte donc à prouver que la furface de chacun des cônes tronqués circonfcrits à la fphére, eft égale au même produit.

Pour le prouver, prenons le cône tronqué décrit pendant la révolution par le côté, ou apothême BA, & du milieu Y, menez YR, parallele à BD, & menez le diamétre YS; abbaiffez la perpendiculaire BZ = TX, laquelle fera l'axe du cône tronqué, ou la portion correfpondante de l'axe de la fphére, & menez la ligne RS.

Cela pofé, on aura le triangle ABZ femblable au triangle YRS. Car 1°. ils ont chacun un angle droit; 2°. l'angle BAZ = BYR, parce qu'ils font correfpondans; & l'angle BYR = RSY, parce qu'ils font mefurés chacun par la moitié du même arc YIR: donc l'angle BAZ = RSY: donc le triangle ABZ eft femblable au triangle YRS: donc on aura $AB : BZ$, ou $TX :: YS : YR$;
or les diamétres YS; YR font entr'eux comme leurs circonférences YSY, YRY: donc on aura

$$AB : TX :: YSY : YRY;$$

donc $AB \times YRY = TX \times YSY$.

Or la furface du cône tronqué eft égale au produit $AB \times YRY$ de fon apothême par la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre fes bafes: donc elle eft auffi égale au produit $TX \times YSY$ de l'axe du cône, ou de la portion correfpondante de l'axe de la fphére, par la circonférence d'un grand cercle de la fphére.

Par conféquent la fomme des furfaces de tous les cônes tronqués & cylindres circonfcrits à la fphére, laquelle fomme donne la furface du fphéroïde, eft égale au produit de l'axe entier de la fphére, (qui n'eft point ici diftingué de l'axe du ſphéroïde,) par la circonférence d'un grand cercle de la même ſphére.

THÉORÊME VII.

585. *La ſurface de la Sphére eſt égale au produit de ſon axe par la circonférence d'un de ſes grands cercles* (fig. 126 & 127.).

DÉMONST. La ſphére peut être conſidérée comme un ſphéroïde formé par la révolution d'un polygone régulier d'une infinité de côtés autour de ſon diamétre, qui n'eſt pas diſtingué du diamétre de la ſphére; or la ſurface de ce ſphéroïde eſt égale au produit de l'axe entier de la ſphére par la circonférence d'un grand cercle de la même ſphére: donc, &c.

Corollaire I.

586. La ſurface de la ſphére eſt quadruple de la ſurface d'un grand cercle de la même ſphére. Car la circonférence d'un grand cercle étant appellée c, le rayon r, & le diamétre $2r$, l'expreſſion de la ſurface ſphérique ſera $2rc$, & celle de la ſurface d'un grand cercle ſera $\frac{1}{2}rc$; or

$2rc : \frac{1}{2}rc :: 2 : \frac{1}{2} :: 4 : \frac{2}{2} :: 4 : 1$; donc, &c.

Corollaire II.

587. La ſurface de la ſphére eſt égale à la ſurface convexe du cylindre circonſcrit (*fig.* 128); car elle eſt égale au produit de ſon axe par la circonférence d'un de ſes grands cercles. Or la ſurface convexe du cylindre circonſcrit eſt égale (572) au produit de ſon axe, qui eſt le même que celui de la ſphére, par la circonférence du cercle de ſa baſe, qui eſt la même que la circonférence d'un grand cercle de la ſphére: donc, &c.

Corollaire III.

588. La ſurface de la ſphére eſt à la ſurface totale du cylindre circonſcrit, comme 2 : 3. Car la ſurface de la ſphére eſt à la ſurface d'un de ſes grands cercles comme 4 : 1, comme nous venons

de le voir. La ſurface totale du cylindre circonſcrit à la ſphére eſt égale à la ſurface de la ſphére, plus à celle de ſes deux baſes, qui ſont deux grands cercles de la ſphére : donc la ſurface totale du cylindre circonſcrit eſt à la ſurface d'un grand cercle de la ſphére, comme 6 : 1 ; donc la ſurface de la ſphére eſt à la ſurface totale du cylindre circonſcrit comme 4 : 6, ou comme 2 : 3.

Corollaire IV.

589. La ſurface, ſoit d'une zône, ſoit d'une calotte ſphérique eſt égale au produit de ſa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la ſphére, à laquelle appartiendra cette zône, ou cette calotte ſphérique. Car cette ſurface ſera la même que celle d'un cône tronqué circonſcrit à la ſphére, laquelle eſt, comme nous l'avons prouvé (584), égale au produit de ſon axe (qui eſt ici le même que la hauteur), par la circonférence d'un grand cercle de la ſphére.

Corollaire V.

590. La ſurface de la ſphére eſt au quarré de ſon diamétre, comme la circonférence eſt au diamétre. Car le diamétre étant $2r$, la ſurface de la ſphére eſt $2rc$, & le quarré du diamétre eſt $4rr$, on aura donc $2rc : 4rr :: 2r \times c : 2r \times 2r :: c : 2r$ (180).

ARTICLE II.

De la Solidité des Solides.

Les ſolides ſont ſuſceptibles d'évaluation, de meſure & de rapport, comme nous l'allons voir.

PARAGRAPHE I.

De l'Evaluation des Solides.

THÉORÊME I.

591. *La ſolidité du Priſme droit eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur* (fig. 116.).

DÉMONST. On peut concevoir que le priſme eſt formé (522) par le mouvement d'un plan EFGH (qui est ici la base du prisme), lequel monte parallélement à lui-même le long d'une ligne droite FC, perpendiculaire à ce plan, (laquelle est dans ce cas la hauteur du prisme), & qui, en s'élevant, laisse autant de traces, qu'il y a de points dans la hauteur; or, prendre la base autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur, c'est multiplier la base par la hauteur : donc, &c.

Corollaire I.

592. La solidité du prisme est égale au produit de ses trois dimensions, longueur, largeur & profondeur. Car elle est égale au produit de sa hauteur par sa base, laquelle base est elle-même le produit de la longueur par la largeur.

Corollaire II.

593. Si l'on divise (*fig.* 130.) la hauteur AB du prisme en cinq parties égales, la largeur BC en quatre parties égales, & la profondeur CD en trois parties égales, la solidité du prisme se trouvera composée de petits prismes élémentaires, dont le nombre sera $5 \times 4 \times 3 = 60$, & c'est l'expression *numérique* de la solidité du prisme.

Corollaire III.

594. Si l'on appelle la hauteur du prisme a, sa largeur b, & sa profondeur c, l'expression de la solidité du prisme sera $P = abc$, & c'est l'expression *algébrique* de la solidité du prisme.

Si les trois dimensions du prisme étoient égales, alors on auroit $P = aaa$, ou $P = a^3$, & le prisme deviendroit un cube.

Corollaire IV.

595. La hauteur du prisme étant exprimée par la ligne AB, la largeur par BC, & la profondeur par CD, l'évaluation de sa solidité sera $P = AB \times BC \times CD$, lequel produit est un solide, & c'est l'expression *géométrique* de la solidité du prisme (*fig.* 130.).

THÉORÊME II.

596. *Un prisme droit & un prisme oblique* (fig. 131.) *de même base & de même hauteur, sont égaux en solidité.*

DÉMONST. Supposant deux prismes AC & BD compris entre deux plans paralleles & traversés par une infinité de plans paralleles intermédiaires, les sections que laisseront ces plans dans le prisme droit & dans le prisme oblique, représenteront les traces que laisse la base, en montant, soit pour former le prisme droit, soit pour former le prisme oblique. Or ces sections sont égales de part & d'autre en nombre & en grandeur : en nombre, parce que tous les plans qui traversent l'un des prismes, traversent aussi l'autre; en grandeur, parce que chacune de ces sections est égale à la base, laquelle est ou commune aux deux prismes, ou égale dans les deux prismes.

Corollaire I.

597. Deux prismes quelconques, deux parallélipipedes quelconques, un parallélipipede droit & un parallélipipede oblique de même base & de même hauteur sont égaux en solidité.

Corollaire II.

598. Il suit aussi que deux prismes qui ont même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases, & ceux qui ont même base, sont entr'eux comme leurs hauteurs. En effet, si de deux prismes qui ont même base, l'un a une hauteur double, il est clair qu'il sera double de l'autre ; car il équivaut à deux prismes dont chacun seroit précisément égal au prisme dont la hauteur n'est que sous-double.

Ce que nous disons des prismes doit s'entendre de tous les solides en général.

THÉORÊME III.

599. *La solidité de la Pyramide droite est le tiers de*

la ſolidité d'un priſme de même baſe & de même hauteur.

DÉMONST. Soit donné un priſme qui ſoit un cube ; ſi l'on ſuppoſe que du centre du cube il parte des rayons qui aboutiſſent aux ſommets de tous les angles ſolides ; ces rayons partageront le cube en ſix pyramides égales dont chacune ſera la ſixiéme partie du cube : mais chacune de ces pyramides a même baſe & n'a que la moitié de la hauteur du cube ; donc ſi l'on ſuppoſe une pyramide qui ait même baſe, mais une hauteur double de chacune des précédentes, ou une hauteur égale à celle du cube, elle ſera double de chacune de ces pyramides (598) ; & par conſéquent ſera le tiers du cube : donc, &c.

Corollaire I.

600. La ſolidité de la pyramide droite eſt égale au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur, ou au produit de ſa hauteur par le tiers de ſa baſe.

Corollaire II.

601. Deux pyramides de même hauteur & de même baſe ſont égales en ſolidité. Car elles ſont les tiers de deux priſmes de même baſe & de même hauteur, leſquels, comme nous l'avons prouvé (597), ſont égaux en ſolidité.

Corollaire III.

602. La ſolidité du cylindre eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur. Car le cylindre n'eſt autre choſe qu'un priſme, dont les baſes ſupérieure & inférieure ſont des polygones d'une infinité de côtés ; or la ſolidité du priſme eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur (591) : donc, &c.

Corollaire IV.

603. La ſolidité du cône eſt égale au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur. Car comme la ſolidité de la pyramide eſt le tiers de celle d'un priſme de même baſe & de même hauteur ; de même la ſolidité du cône eſt le tiers de celle d'un

cylindre de même base & de même hauteur. Or le cylindre est égal au produit de sa base par sa hauteur, ou est $= abc$: donc la solidité du cône en sera le tiers, ou sera $= \frac{1}{3} abc$.

THÉORÊME IV.

604. *La solidité du Polyedre régulier est égale au produit de sa surface par le tiers de son rayon droit.*

DÉMONST. La solidité du polyedre régulier est égale à celle de toutes les pyramides auxquelles on peut concevoir (556) le polyedre divisé, en tirant des rayons du centre à tous les angles solides. Or toutes ces pyramides ont même base, & même hauteur à cause de la régularité du polyedre : donc leur solidité est égale à celle d'une pyramide unique, qui auroit pour hauteur la hauteur commune de toutes ces pyramides, & pour base la somme des bases de toutes ces pyramides. Mais la solidité de cette pyramide unique est égale (600) au produit de sa base, qui est la surface du polyedre, par le tiers de sa hauteur, qui est le rayon droit du polyedre : donc, &c.

Corollaire I.

605. La solidité de la sphére est égale au produit de sa surface par le tiers de son rayon. En effet la sphére n'est autre chose qu'un polyedre régulier, dont les faces sont devenues infiniment petites & infinies en nombre. Or la solidité du polyedre régulier est égal au produit de sa surface par le tiers de son rayon droit : donc, &c.

Corollaire II.

606. Donc la solidité de la sphére est la même que celle d'un cône qui auroit pour hauteur le rayon de la sphére, & pour base un cercle égal à la surface de la sphére.

Corollaire III.

607. Donc la solidité de la sphére est double de la solidité d'un cône qui auroit pour hauteur le dia-

métre de la ſphére, & pour baſe un grand cercle de la ſphére. Car elle eſt égale à celle d'un cône qui auroit pour hauteur le rayon de la ſphére, & pour baſe un cercle égal à la ſurface de la ſphére. Or ce cône eſt quadruple de celui qui ayant pour hauteur le rayon de la ſphére, auroit pour baſe un grand cercle de la ſphére; mais il ne ſera que double de celui qui aura pour hauteur le diamétre de la ſphére, & pour baſe un grand cercle de la ſphére (598): donc, &c.

Corollaire IV.

608. La ſolidité de la ſphére eſt les deux tiers de la ſolidité du cylindre circonſcrit, c'eſt-à-dire, que la ſolidité de la ſphére eſt à la ſolidité du cylindre circonſcrit, comme 2 : 3, ou comme 4 : 6. Car la ſolidité de la ſphére eſt à la ſolidité du cône qui auroit pour hauteur l'axe de la ſphére, & pour baſe un grand cercle de la ſphére, comme 2 : 1 (607). Or la ſolidité du cylindre circonſcrit, eſt à celle de ce même cône, comme 3 · 1 (603): donc la ſphére eſt au cylindre conconſcrit, comme 2 : 3, ou comme 4 : 6.

Corollaire V.

609. Donc les rapports des ſolidités de la ſphére & du cylindre circonſcrit, ſont les mêmes que ceux de leurs ſurfaces.

Archiméde, auteur de cette découverte, en fut ſi charmé, qu'il voulut que ſur ſon tombeau on gravât une ſphére avec un cylindre circonſcrit.

Corollaire VI.

610. C'eſt pourquoi ſi à une ſphére on circonſcrit un cylindre, & ſi à ce cylindre on inſcrit un cône, c'eſt-à-dire, ſi l'on fait un cône qui ait même baſe & même hauteur que le cylindre, on aura trois ſolides, ſçavoir, un cylindre, une ſphére & un cône, dont les ſolidités ſeront dans les rapports 3 : 2 : 1, ou comme 1 : $\frac{2}{3}$: $\frac{1}{3}$.

PARAGRAPHE II.

De la Mesure des Solides.

THÉORÊME I.

611. *Le Polyédre peut être réduit en une Pyramide de même solidité que lui.*

DÉMONST. Si l'on fait une pyramide qui ait pour hauteur le rayon droit du polyédre, & pour base une surface égale à la surface du polyédre, nous avons prouvé (604) que cette pyramide est égale en solidité au polyédre.

THÉORÊME II.

612. *Cette Pyramide peut être réduite en un Prisme polygone de même solidité qu'elle.*

DÉMONST. Si sur une base polygone égale à la base de la pyramide, on construit un prisme qui ait le tiers de la hauteur de la pyramide, la solidité de ce prisme sera égale à celle de la pyramide; car la pyramide est le tiers du prisme de même base & de même hauteur (599).

THÉORÊME III.

613. *Ce Prisme polygone peut être réduit en un Parallépipede de même solidité que lui.*

DÉMONST. Conservant la hauteur du prisme, on peut réduire sa base polygone en un parallélogramme de même surface (490 & 491); or en ce cas le prisme polygone & le parallélipipede ayant des bases de même surface & des hauteurs égales, seront égaux en solidité (597); donc, &c.

THÉORÊME IV.

614. *Le Parallélipipede peut être réduit en un Parallélipipede rectangle de même solidité que lui.*

DÉMONST. Conservant la hauteur du parallélipipede, on peut réduire sa base parallélogramme en un rectangle de même surface; or en ce cas le parallélipipede parallélogramme & le parallélipipede rectangle ayant des bases égales & la même hauteur, seront égaux en solidité (597): donc, &c.

Théorême V.

615. *Si les dimensions du Parallélipipede rectangle sont continuement proportionnelles, ou si l'on a* $\div\!\!\div$ *a : b : c, alors il pourra être réduit en un cube de même solidité que lui.*

Démonst. Comme en élevant au quarré la moyenne proportionnelle entre les deux dimensions d'un rectangle, on a un quarré de même surface que le rectangle (493); de même en élevant au cube la dimension du parallélipipede, moyenne entre les deux autres, on aura un cube de même solidité que le parallélipipede. Car à cause de $\div\!\!\div a:b:c$, on aura $ac=bb$ (177); & multipliant par b, on aura $abc=b^3$; or abc représente le parallélipipede, & b^3 représente le cube fait sur la dimension b moyenne entre a & c: donc, &c.

Corollaire I.

616. Si les dimensions du parallélipipede ne sont pas continuement proportionnelles, ou ne sont pas réductibles en des dimensions continuement proportionnelles, alors le parallélipipede ne pourra pas être réduit en un cube de même solidité que lui. On pourra cependant toujours diviser ce parallélipipede en un nombre quelconque de cubes, dont la somme sera contenue dans la solidité du parallélipipede, en réduisant la base rectangle du parallélipipede en un quarré de même surface.

Corollaire II.

617. Comme le quarré ne peut pas être réduit en une figure plus simple, & que par cette raison il est regardé comme la mesure la plus simple qu'on puisse employer pour mesurer les surfaces; de même le cube ne peut plus être réduit en un solide plus simple que lui, & par cette raison il est regardé comme la mesure la plus simple dont on puisse se servir pour mesurer les solidités. C'est

pourquoi, comme on évalue les ſurfaces planes en toiſes, ou pieds, ou pouces quarrés; de même on évalue les ſolidités en toiſes, ou pieds, ou pouces cubiques.

PARAGRAPHE III.

Du Rapport des Solidités.

Les ſolides, de même que les lignes & les ſurfaces, ont un rapport entr'eux; mais il y a cette différence que le rapport qui eſt entre les lignes, eſt ſimple, parce qu'elles n'ont qu'une dimenſion; que le rapport qui eſt entre les ſurfaces, eſt composé de deux rapports, parce qu'elles ont deux dimenſions; & que le rapport qui eſt entre les ſolides, eſt composé de trois rapports, parce qu'ils ont trois dimenſions.

THÉORÊME I.

618. *Les Solides ſont entr'eux en raiſon composée de celles de leurs trois dimenſions, hauteur, largeur & profondeur.*

DÉMONST. Chaque ſolide eſt égal au produit de ſes trois dimenſions: donc les ſolides ſont entr'eux comme les produits de leurs trois dimenſions. Or les produits ſont (181) en raiſon composée de celles de leurs racines, qui ſont ici les trois dimenſions, ſçavoir, les hauteurs, les largeurs & les profondeurs: donc, &c.

C'eſt pourquoi ſi l'on appelle les ſolides P, p, les hauteurs A, a; les largeurs B, b; les profondeurs C, c, on aura, comme nous l'avons vu (592) $P = ABC$, & $p = abc$: donc $P : p :: ABC : abc$, ou ce qui revient au même, $\frac{P}{p} = \frac{ABC}{abc}$. Or il eſt évident que l'on a $\frac{P}{p} = \frac{ABC}{abc} = \frac{A \times B \times C}{a \times b \times c} = \frac{A}{a} \times \frac{B}{b} \times \frac{C}{c}$, où l'on voit que la raiſon $\frac{ABC}{abc}$ eſt composée des raiſons $\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{C}{c}$, qui ſont celles des hauteurs, des largeurs & des profondeurs des ſolides : donc, &c.

Corollaire I.

619. Les ſolides ſont en raiſon compoſée de celles de leurs baſes & de leurs hauteurs. Car chaque ſolide eſt égal (591) au produit de ſa baſe par ſa hauteur : donc ils ſont entr'eux comme les produits des baſes par les hauteurs, & par conſéquent ſont en raiſon compoſée (181) de celles des baſes & des hauteurs ; c'eſt pourquoi nommant les hauteurs A, *a*, & les baſes BC, *bc*, on aura

P : *p* :: ABC : *abc*.

Corollaire I.

620. Si deux ſolides ont même hauteur, ils ſont entr'eux comme leurs baſes, comme nous l'avons déjà dit (598). Car la hauteur étant la même, dans la proportion P : *p* :: ABC : *abc*, on aura A = *a* : donc à leur place ſubſtituant l'unité, on aura P : *p* :: BC : *bc*. Pareillement lorſque les baſes ſont les mêmes, on a BC = *bc* : donc leur ſubſtituant l'unité, on aura P : *p* :: A : *a*.

Corollaire III.

621. Donc ſi la hauteur & la baſe d'un ſolide ſont réciproques à la hauteur & à la baſe d'un autre ſolide, alors les deux ſolides ſeront égaux. Car par l'hypothèſe A : *a* :: *bc* : BC ; donc ABC = *abc*, & par conſéquent P = *p*.

Corollaire IV.

622. Les polyédres réguliers ſont en raiſon compoſées de celles de leurs rayons droits & de leurs ſurfaces. Car chaque polyédre régulier eſt (604) égal au produit de ſa ſurface par le tiers de ſon rayon droit : donc deux polyédres réguliers ſont entr'eux comme les produits de leurs ſurfaces par les rayons droits. Or les produits ſont en raiſon compoſée de leurs racines : donc, &c.

THÉORÊME II.

623. *Les Solides ſemblables ſont en raiſon triplée de celles de leurs dimenſions homologues.*

DÉMONST. Les ſolides P, p, ſont en raiſon compoſée (618) de leurs dimenſions homologues; c'eſt-à-dire, l'on a P : p :: ABC : abc. Or à cauſe de la ſimilitude des ſolides, les dimenſions homologues ſont proportionnelles, c'eſt-à-dire, l'on a la proportionnalité A : a :: B : b :: C : c; donc la raiſon qui eſt compoſée de ces trois raiſons égales, ſçavoir la raiſon ABC : abc, eſt une raiſon triplée.

Corollaire I.

624. Donc les ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues; c'eſt-à-dire, l'on aura P : p :: $A^3 : a^3$ :: $B^3 : b^3$ :: $C^3 : c^3$. Car ils ſont en raiſon triplée de celles de leurs dimenſions homologues. Or une raiſon triplée eſt égale (181) à la raiſon qu'ont entr'eux les cubes des termes de chacune des trois raiſons compoſantes : donc, &c.

Corollaire II.

625. Les polyédres réguliers ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs rayons; car les rayons ſont des dimenſions homologues dans les polyédres réguliers ſemblables.

Corollaire III.

626. Les ſphéres ſont entr'elles comme les cubes de leurs rayons, ou de leurs diamétres; car les ſphéres ſont des polyédres réguliers ſemblables, qui ont une infinité de faces infiniment petites.