les arcs ſemblables, ou comme les arcs d'un même nombre de degrés ; car les tous ſont comme les parties ſemblables.

THÉORÊME VII.

463. *Dans les Circonférences de différens cercles les Arcs ſemblables ſont entr'eux comme les cordes qui les ſoutiennent* (fig. 91.).

DÉMONST. Ayant tiré du centre commun A des rayons aux extrêmités des cordes ED, CB, on aura deux triangles ſemblables ACB, AED, dans leſquels les côtés AC, AE, qui ſont rayons, ſont entr'eux comme les côtés, ou cordes CB, ED : or les arcs ſemblables ſont entr'eux comme leurs rayons : donc, &c.

THÉORÊME VIII.

464. *Dans les circonférences de différens cercles les cordes* BC & BE, *ſont entr'elles comme les rayons* AC & AE *de leurs cercles* (fig. 91.).

DÉMONST. Les deux triangles ACB, AED ſont ſemblables ; donc on aura la proportion BC : DE :: AC : AE : donc, &c.

SECTION II.

Des Surfaces.

I°. LA ligne eſt une étendue qui n'a qu'une dimenſion, que l'on appelle *Longueur* ; la ſurface eſt une étendue qui a deux dimenſions, que l'on appelle *Longueur* & *Largeur*.

II°. La ſurface eſt ou *plane*, ou *courbe*. On appelle ſurface *plane*, celle dont tous les points ſont de niveau, c'eſt-à-dire, ne ſont ni plus élevés, ni plus enfoncés les uns que les autres ; telle eſt la ſurface d'un miroir. On appelle ſurface *courbe*, celle dont tous les points ſont inégalement élevés, ou enfoncés ; telle eſt la ſurface d'une ſphere, Nous ne parlerons ici que des ſurfaces planes.

III°. La ſurface plane peut être conſidérée, ou comme *figure*, ou comme *quantité*. La ſurface conſidérée comme *figure*, eſt une étendue terminée par des angles & des côtés. La ſurface conſidérée comme *quantité* eſt le réſultat de deux dimenſions combinées entr'elles, qui rendent la ſurface plus ou moins grande.

IV°. Les ſurfaces conſidérées comme *quantités*, ſont ſuſceptibles d'évaluation, de meſure & de rapports : nous en allons parler.

CHAPITRE I.

De l'Evaluation des Surfaces.

DÉFINITIONS.

I.

465. TOUTE ſurface peut être conſidérée comme réſultante de deux dimenſions combinées entr'elles, & que l'on appelle, ou bien la *hauteur* & la *baſe*, quand il s'agit de triangles & de parallélogrammes; ou bien le *rayon droit* & le *périmétre*, quand il s'agit de polygones.

II.

466. La *baſe* d'une ſurface eſt le côté de cette ſurface ſur lequel elle peut être conçue appuyée, *par ex:* AD, (*fig.* 92.). La *hauteur* eſt une ligne perpendiculaire menée du ſommet d'un des angles de la ſurface, ſur la baſe prolongée, s'il le faut : telles ſont les lignes BA (*fig.* 92.) & AF ou DG (*fig.* 101.).

III.

467. Dans le polygone on appelle *Périmétre*, le contour du polygone, réſultant de la ſomme de

ſes côtés; & l'on appelle *rayon droit*, une perpendiculaire menée du centre du polygone ſur l'un de ſes côtés, *par ex :* CM (*fig.* 89.).

PRINCIPE I.

468. Une ſurface peut être conçue décrite par le mouvement de ſa baſe AD (*fig.* 92.), laquelle monte parallelement à elle-même le long de la hauteur AB. Car en Géometrie on conçoit que la ligne eſt décrite par le mouvement d'un point; la ſurface, par le mouvement d'une ligne; & le ſolide, par le mouvement d'une ſurface.

PRINCIPE II.

469. Si la baſe AD, montant parallelement à elle-même le long de la ligne AB, eſt ſuppoſée laiſſer des traces par-tout où elle paſſe, ces traces pourront être regardées comme les élémens de la ſurface. Ces élémens ſeront toujours des lignes ſemblablement poſées, ou ſemblablement tirées dans la ſurface.

Or les Géométres ont coutume de conſidérer ces lignes, que l'on prend pour élémens de la ſurface, comme ayant une largeur *infiniment petite*, ou comme étant elles-mêmes des ſurfaces élémentaires d'une hauteur *infiniment petite*.

PRINCIPE III.

470. Une ſurface eſt égale à la ſomme de tous ſes élémens: c'eſt pourquoi l'évaluation de cette ſomme, donnera celle de la ſurface, laquelle, par conſéquent, peut être une quantité plus ou moins grande, ſuſceptible de plus ou de moins, & ſous ce point de vûe on l'appelle ordinairement *aire* ou *ſuperficie*.

THÉORÊME I.

471. *La ſurface d'un Parallélogramme eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur* (fig. 92.).

DÉMONST. La ſurface du parallélogramme ABID peut être conçue formée & décrite par le mouvement de la baſe AD, qui monte parallelement à elle-même le long de la hauteur AB:

donc elle eſt égale à la ſomme des traces que laiſſe la baſe en montant le long de la hauteur : or la baſe en montant, laiſſe autant de traces, qu'il y a de points dans la hauteur : donc la ſurface du parallélogramme eſt égale à la baſe priſe autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt égale au produit de la *baſe* par la *hauteur*.

Corollaire I.

472. Si l'on diviſe la hauteur BA (*fig.* 92.) en tel nombre de parties égales, que l'on voudra, *par ex :* en trois parties égales B*e*, *ef*, *f*A, & la baſe en quatre parties égales A*b*, *bc cd*, *d*D, & que par les points de diviſion on mene des lignes telles que *ep*, *fu*, &c. *bg*, *ci*, &c. la ſurface du parallélogramme, ſera compoſée de petits parallélogrammes élémentaires, dont le nombre ſera $3 \times 4 = 12$; & ce ſera l'expreſſion *numérique* de la ſurface du parallélogramme.

Corollaire II.

473. Si l'on appelle la hauteur a, la baſe b & le parallélogramme p, l'évaluation de la ſurface du parallélogramme ſera $p = ab$; & c'eſt l'expreſſion *algébrique* de ſa ſurface.

Corollaire III.

474. La hauteur du parallélogramme étant la ligne AB, & la baſe étant la ligne AD, l'évaluation de ſa ſurface ſera $P = AB \times AD = ABID$, qui eſt une figure ; & c'eſt l'expreſſion *géométrique* du parallélogramme.

THÉORÊME II.

475. *Un parallélogramme & un rectangle de même baſe & de même hauteur ſont égaux en ſurface* (fig. 93.).

DÉMONST. Soient donnés le rectangle ACDB, & le parallélogramme ECDF, de même baſe, puiſqu'ils ont une baſe commune CD ; & de même hauteur, puiſqu'ils ſont entre même paralleles AF, CD ; je dis qu'ils ſont égaux en ſurface.

En effet le triangle ACE eſt égal au triangle

BDF (402) à cauſe de l'égalité des perpendiculaires AC, BD, des obliques CE, DF, & des éloignemens de perpendicule AE, BF; car ces lignes forment les trois côtés des deux triangles: donc ſi de ces deux triangles égaux on retranche la portion commune BOE, les reſtes ACOB & EODF ſeront égaux, & ſi à ces deux reſtes on ajoute de part & d'autre le petit triangle COD, on aura ACDB = ECDF, dont l'un eſt le rectangle & l'autre eſt le parallélogramme de même baſe & de même hauteur.

Corollaire.

476. D'où il ſuit en général, que deux parallélogrammes quelconques de même baſe & de même hauteur ſont égaux en ſurface (*fig.* 94.).

THÉORÊME III.

477. *La ſurface du triangle eſt la moitié de celle d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur que lui* (fig. 58 & 60.).

DÉMONST. Ayant mené la diagonale AD vous aurez le triangle ACD égal au triangle ADB; car le côté AD eſt commun à l'un & à l'autre triangle; d'ailleurs le côté AC = BD parce qu'ils ſont côtés oppoſés d'un même parallélogramme; par la même raiſon le côté AB = CD: donc (402) on aura le triangle ACD = ADB; donc chacun de ces triangles eſt la moitié du parallélogramme ACDB: mais chacun de ces triangles a même hauteur & même baſe que le parallélogramme; donc, &c.

Corollaire I.

478. Donc la ſurface du triangle eſt égale à la moitié du produit de ſa baſe par ſa hauteur, puiſqu'elle eſt la moitié de la ſurface d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur que lui; & par conſéquent l'expreſſion de la ſurface du parallélogramme étant $s = ab$, celle du triangle de même baſe & de même hauteur ſera $s = \frac{1}{2} ab$.

Corollaire II.

479. Deux triangles de même base & de même hauteur sont égaux en surface, car ils sont les moitiés de parallélogrammes de même base & de même hauteur, lesquels sont égaux en surface, comme nous l'avons vu (476).

THÉORÊME IV.

480. *La surface du Trapeze est égale au produit de sa hauteur par la moitié de la somme de ses bases supérieure & inférieure* (fig. 96.).

DÉMONST. Ayant mené la diagonale CB, la surface du trapeze sera divisée en deux triangles ABC, CBD, & ne sera pas distinguée de la surface de ces triangles: or la surface du triangle ABC est égale (478) au produit de la hauteur AB par la moitié de la base supérieure AC; & celle du triangle CBD est égale au produit de la hauteur commune AB par la moitié de la base inférieure BD: donc la surface des deux triangles, & par conséquent celle du trapeze lui-même est égale au produit de la hauteur AB par la moitié de la somme des bases supérieure & inférieure AC & BD.

THÉORÊME V.

481. *La surface du Trapeze est égale au produit de sa hauteur* AB *par la ligne où l'élément* EF *qui tient le milieu arithmétique entre les bases supérieure & inférieure* AC, & BC (*fig.* 97.).

DÉMONST. Car elle est égale, comme nous venons de le prouver, au produit de sa hauteur par la moitié de la somme de ses bases supérieure & inférieure: or l'élément EF qui tient le milieu, est égal à la moitié de la somme de ces bases: car les élémens du trapeze décroissent uniformement depuis la base inférieure jusqu'à la base supérieure, & peuvent par conséquent être représentés par les termes d'une progression arithmétique, *par ex:* $\div 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$, dont la somme donne la surface du trapeze, & dont les extrêmes repréſentent les baſes ſupérieure & inférieure du trapeze : or la ſomme des extrêmes eſt $6 + 10 = 16$, dont la moitié 8 qui eſt le terme tenant le milieu de la progreſſion, repréſente l'élément EF qui tient le milieu entre les baſes ſupérieure & inférieure du trapeze, donc, &c.

THÉORÊME VI.

482. *La ſurface du Pentagone, de l'Exagone, de l'Eptagone, &c. en général d'un Polygone quelconque régulier, eſt égal au produit du rayon droit par la moitié du périmétre du Polygone* (fig. 89.).

DÉMONST. La ſurface du polygone régulier eſt égale à celle de tous les triangles que l'on peut y former, en tirant des rayons du centre aux angles du polygone. Or tous ces triangles ayant même hauteur & même baſe, à cauſe de la régularité du polygone la ſomme de leurs ſurfaces eſt égale à celle d'un triangle unique qui auroit pour hauteur la hauteur commune de tous ces triangles, ſçavoir, le *rayon droit*, & pour baſe la ſomme des baſes de tous ces triangles, ſçavoir, le *périmétre* du polygone; mais la ſurface de ce triangle unique eſt égale au produit de ſa hauteur par la moitié de ſa baſe: donc, &c.

Corollaire I.

483. Donc deux polygones réguliers de même eſpéce, qui ont des périmétres & des rayons droits égaux, ſont égaux en ſurface.

Corollaire II.

484. Mais ſi les polygones réguliers ont un égal périmétre & un nombre inégal de côtés, celui qui aura moins de côtés, aura moins de ſurface. Car la ſurface de chacun de ces polygones eſt égale au produit du rayon droit par la moitié du périmétre (482), donc le périmétre étant ſuppoſé égal dans les polygones, la ſurface ſera d'autant plus petite, que le rayon droit ſera plus petit. Or moins le polygone aura de côtés, plus ſon rayon

droit sera petit ; *par ex :* le rayon droit du triangle sera plus petit que celui du quarré d'un périmétre égal. Car s'il lui étoit égal, on pourroit circonscrire (421) ce triangle & ce quarré à un même cercle, & alors le périmétre du quarré approchant plus de la circonférence du cercle, seroit plus petit (422) que celui du triangle ; ce qui est contre la supposition.

Ces figures qui ont un égal périmétre sont appellées *Isopérimétres.*

Théorême VI.

485. *La surface du Cercle est égale au produit de son rayon par sa demi-circonférence.*

Démonst. Le cercle n'étant qu'un polygone régulier d'une infinité de côtés, sa surface est égale à celle d'une infinité de triangles, dont les sommets seroient réunis au centre du cercle, & les bases appuyées sur les côtés infiniment petits du cercle, ou du polygone infinitaire. La surface de tous ces triangles est égale à la surface d'un triangle unique, qui auroit pour hauteur le rayon du cercle, & pour base une ligne égale à la circonférence du cercle : or la surface de ce triangle unique est égale au produit de sa hauteur par la moitié de sa base : donc, &c.

C'est pourquoi appellant la circonférence c, & le rayon r, l'expression de la surface circulaire sera $s = \frac{1}{2} rc$, ou $s = \frac{rc}{2}$.

Remarque I.

486. Pour évaluer une surface plane, il faut donc multiplier l'un par l'autre deux élémens, ou deux lignes. Cette opération s'appelle multiplication *géométrique*, parce que les racines d'où résulte le produit, sont des lignes, de même que dans la multiplication *algébrique* les racines sont des lettres, & dans la multiplication *numérique* les racines sont des *chiffres*, ou *nombres.*

Remarque II.

487. Lorsqu'on multiplie deux racines géométriques, ou deux lignes l'une par l'autre, pour avoir une surface :

I°. Si les deux lignes sont inégales a, b, le produit qui en résulte, est un *produit* plan, & donne un rectangle ABID, (*fig.* 92.), ou $s = ab$.

II°. Si les deux lignes que l'on multiplie, sont égales a, a, ou, ce qui est le même, si on multiplie une ligne a par elle-même, le produit qui en résulte, est une *puissance*, & donne un quarré GACI (*fig.* 98.) & l'on a $s = aa = a^2$.

Remarque III.

488. Supposons que la ligne que l'on multiplie par elle-même, ou que l'on éleve au quarré, soit composée de deux parties, auquel cas la ligne sera considérée comme un *binôme* géométrique ; alors le quarré de cette ligne renfermera les mêmes portions que nous avons remarquées dans le binôme numérique, & dans le binôme algébrique : il en faut remarquer & le nombre & la qualité.

I°. Si la ligne AC (*fig.* 98.) est composée de deux parties AB & BC, ou est regardée comme étant un binôme géométrique, alors le quarré GACI de la ligne AB+BC, renfermera ; 1°. le quarré de la premiere partie AB, savoir, ABED ; 2°. le quarré de la seconde partie BC, ou de son égale EF, sçavoir, HEFI ; 3°. le double rectangle de l'une des parties par l'autre, savoir, GDEH & BEFC.

II°. Si on représente sous les expressions algébriques a & b les deux parties de la ligne AB+BC, la ligne sera $a+b$, ce qui donne un binôme algébrique ; & son quarré sera $aa + 2ab + bb$, lequel renferme aussi toutes les parties dont nous venons de parler ci-dessus.

III°. Si l'on représente sous les expressions numériques 3 & 4 les deux portions de la même ligne AB + BC, la ligne ſera 3 + 4 = 7, ce qui donne un binôme numérique, & ſon quarré ſera 49, lequel renferme auſſi toutes les mêmes parties que ci-deſſus.

IV°. On voit par-là que les puiſſances conſervent dans les parties qui les compoſent les mêmes analogies dans le *numérique*, dans l'*algébrique*, & dans le *géométrique*.

CHAPITRE II.

De la Meſure des Surfaces.

THÉORÊME I.

489. *UN Polygone d'un nombre quelconque de côtés, peut être réduit en un Polygone de même ſurface, & qui ait un côté de moins* (fig. 99.).

DÉMONST. Dans l'exagone ABCEFG tirez la ligne BE, qui retranche le triangle BCE, & menez la ligne DC parallele à BE; cela poſé, ſi vous menez la ligne BD, vous aurez le pentagone AGFDB, qui ſera égal en ſurface à l'exagone. Car la ſurface AGFEB eſt commune au pentagone & à l'exagone. Reſte donc à prouver que le triangle EBD, reſte du pentagone, eſt égal au triangle BCE, reſte de l'exagone: or ces deux triangles ſont égaux, parce qu'ils ont même baſe BE, & qu'ils ont même hauteur, puiſqu'ils ſont compris entre mêmes paralleles BE, CD: donc, &c.

THÉORÊME II.

490. *Un Polygone quelconque peut être réduit en un triangle qui lui ſoit égal en ſurface.*

DEMONST. Par le théorême précédent un polygone quelconque peut être réduit en un polygone de même ſurface, & qui ait un côté de moins; donc un exagone peut être réduit en un pentagone de même ſurface; un pentagone en un quadrilatere, & un quadrilatere en un triangle de même ſurface: donc, &c.

THÉORÊME III.

491. *Un triangle peut toujours être réduit en un parallélogramme de même ſurface que lui* (fig. 100.).

DÉMONST. Le triangle BCE étant donné, l'on peut faire le parallélogramme BADE ſur la même baſe, & dont la hauteur ſoit la moitié de celle du triangle: or le triangle (477) eſt la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur, & par conſéquent eſt égal en ſurface à un parallélogramme de même baſe & d'une hauteur ſous-double: donc, &c.

THÉORÊME IV.

492. *Un Parallélogramme quelconque peut être réduit en un rectangle de même ſurface que lui* (fig. 101.).

DÉMONST. Le parallélogramme BADE étant donné, ſi des deux angles en A & en B on abaiſſe les perpendiculaires AF, DG ſur la baſe prolongée, s'il le faut, on aura un rectangle FADG de même baſe & de même hauteur que le parallélogramme, & par conſéquent égal (475) en ſurface au parallélogramme.

THÉORÊME V.

493. *Un rectangle quelconque peut être réduit en un quarré de même ſurface que lui* (fig. 102.).

DÉMONST. Le rectangle GDAF étant donné, ſi l'on prend une ligne moyenne proportionnelle entre la hauteur DG & la baſe GF du rectangle, ſavoir, la ligne FE, & qu'on l'éleve au quarré; le quarré de cette moyenne proportionnelle ſera égal en ſurface au parallélogramme. Car appellant a la hauteur, b la baſe du parallélogramme, & x la moyenne proportionnelle, on aura $a : x :: x : b$, ou $\div\, a : x : b$: donc $xx = ab$.

Corollaire I.

494. Donc toute ſurface rectiligne eſt réductible en un quarré; mais le quarré ne peut pas lui-

même être réduit en une figure plus ſimple. C'eſt pourquoi le quarré eſt la meſure la plus ſimple qu'aient trouvé les Géométres pour évaluer les ſurfaces, & c'eſt pour cette raiſon qu'on évalue les ſurfaces planes en *toiſes*, ou *pieds*, ou *pouces* quarrés; *par ex:* ſi l'on multiplie une hauteur de 3 pouces par une baſe de 4 pouces, la ſurface du parallélogramme qui en réſultera, eſt dite avoir $3 \times 4 = 12$ pouces quarrés, c'eſt-à-dire, qu'elle contiendra 12 parties égales, dont chacune aura un pouce de hauteur & un pouce de largeur; d'où vient que *meſurer* & *quarrer*, *meſure* & *quadrature* ſont la même choſe.

Corollaire II.

495. C'eſt pourquoi toute ſurface rectiligne peut être meſurée géométriquement, parce que toute figure rectiligne eſt réductible en un quarré de même ſurface. Mais on ne peut pas meſurer géométriquement le cercle, parce que le cercle ne peut pas être réduit en un quarré de même ſurface que lui.

Remarque.

496. On auroit la meſure, ou la quadrature du cercle, ſi on pouvoit meſurer géométriquement la circonférence du cercle, ou trouver une ligne droite égale à la circonférence du cercle. Car alors on pourroit réduire le cercle en un triangle qui auroit pour hauteur le rayon, & pour baſe une ligne égale à la circonférence du cercle (*fig.* 103.); ce triangle pourroit être réduit en un parallélogramme, & ce parallélogramme en un quarré.

On auroit trouvé la méthode de meſurer géométriquement la circonférence du cercle, ſi l'on connoiſſoit le rapport de la circonférence au diamétre, parce que le diamétre étant une ligne droite que l'on peut par conſéquent meſurer, la circonférence qui auroit un rapport connu avec le diamétre, auroit dès-lors une meſure commune avec lui, & feroit par conféquent mefurable; mais le rapport entre la circonférence & le diamétre du cercle eft inconnu. Archiméde a prouvé que ce rapport étoit plus grand que celui de 21 : 7, & qu'il étoit plus petit que celui de 22 : 7. Depuis Archiméde, Métius a prouvé que ce rapport étoit un peu plus petit que celui de 355 : 113; & ce rapport eft un des plus exacts que l'on puiffe employer dans la pratique. Pour plus grande commodité nous nous fervirons du rapport de 22 à 7, lequel eft fuffifant dans l'ufage & la pratique, qui n'exige point une une fi grande précifion.

CHAPITRE III.

Du Rapport des Surfaces.

I°. LEs furfaces, de même que les lignes, ont un rapport entr'elles; il y a cette différence, que le rapport, ou la raifon qui eft entre les lignes, eft fimple, parce qu'elles n'ont qu'une dimenfion; au lieu que le rapport des furfaces eft compofé, parce qu'elles réfultent du produit de deux dimenfions.

II°. Le rapport des furfaces eft, ou un rapport fimplement compofé, ou un rapport doublé; il eft fimplement compofé, lorfque les furfaces ne font point femblables; il eft rapport doublé, lorfqu'elles font femblables. Nous allons parler 1°. du rapport qu'ont entr'elles les furfaces; 2°. des conféquences qui réfultent du rapport des furfaces.

ARTICLE I.

Du Rapport qu'ont entr'elles les Surfaces.

THÉORÊME I.

497. *Les Parallélogrammes font entr'eux en raifon compofée*

composée de la raison de leurs bases & de celle de leurs hauteurs.

Démonst. Chaque parallélogramme est égal au produit de sa base par sa hauteur (471): donc les parallélogrammes sont entr'eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs; or les produits (181) sont en raison composée des raisons de leurs racines, qui sont ici la base & la hauteur de chaque parallélogramme: donc, &c.

Si l'on appelle les parallélogrammes P, p, les hauteurs A, a, les bases B, b, on aura, comme nous l'avons prouvé (471), $P = AB$, & $p = ab$; donc $P : p :: AB : ab$, ou, ce qui revient au même, $\frac{P}{p} = \frac{AB}{ab}$: or on aura évidemment

$$\frac{P}{p} = \frac{AB}{ab} = \frac{A \times B}{a \times b} = \frac{A}{a} \times \frac{B}{b};$$

où l'on voit que la raison $\frac{AB}{ab}$ qui est celle des parallélogrammes P, p, est composée des raisons $\frac{A}{a}$, & $\frac{B}{b}$, qui sont celles de leurs hauteurs & de leurs bases.

Corollaire I.

498. Les triangles sont en raison composée de celles de leurs bases & de leurs hauteurs; car ils sont les moitiés (477) de parallélogrammes de même base & de même hauteur qu'eux; or les moitiés sont en même raison que les tous: donc, &c.

Corollaire II.

499. Les polygones réguliers sont entr'eux en raison composée de celle de leurs rayons droits, & de celle de leurs périmétres; car chaque polygone régulier est égal au produit de son rayon droit par son demi-périmètre (482): donc deux polygones réguliers sont entr'eux comme les pro-

duits de leurs rayons droits par leurs périmétres ; or les produits sont en raison composée de celles de leurs racines : donc, &c.

Corollaire III.

500. Deux cercles sont en raison composée de leurs rayons & de leurs circonférences, ce qui se prouve de la même maniere que pour les parallélogrammes, les triangles & les polygones.

Corollaire IV.

501. En général deux surfaces sont toujours entr'elles en raison composée de celles de leurs *dimensions*, de la multiplication desquelles elles résultent.

Ces dimensions de la multiplication desquelles résultent les surfaces, s'appellent *racines*, *produisans*, *dimensions homologues* des surfaces.

Corollaire V.

502. Si les surfaces ont une *racine* commune, ou une *dimension* qui soit égale de part & d'autre, elles seront entr'elles comme leurs dimensions inégales, c'est-à-dire,

I°. Si deux parallélogrammes ont même hauteur, ils seront entr'eux comme leurs bases ; car on a $P : p :: AB : ab$; or par l'hypothèse $A = a$, donc en substituant l'unité à la place de A & a, on aura $P : p :: B : b$.

II°. S'ils ont même base, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs ; car $P : p :: AB : ab$; or par l'hypothèse $B = b$: donc on aura $P : p :: A : a$.

Corollaire VI.

503. Si les dimensions d'une surface sont réciproques aux dimensions homologues d'une autre surface, les deux surfaces seront égales ; *par ex :* si la hauteur & la base d'un parallélogramme sont réciproques à la hauteur & à la base d'un autre parallélogramme, les deux parallélogrammes seront égaux ; car par l'hypothèse $A : a :: b : B$: donc on aura $AB = ab$; or $P : p :: AB : ab$: donc on aura $P = p$.

THÉORÊME II.

504. *Deux parallélogrammes ſemblables ſont en raiſon doublée de la raiſon de leurs baſes & de celle de leurs hauteurs.*

DÉMONST. Les parallélogrammes ſont en raiſon composée de celles de leurs baſes & de leurs hauteurs : donc ſi la raiſon des baſes eſt égale à celle des hauteurs, cette raiſon composée deviendra doublée ; or quand les parallélogrammes ſont ſemblables, la raiſon des baſes eſt égale à celle des hauteurs ; car dans les parallélogrammes ſemblables les baſes ſont proportionnelles aux hauteurs, ou $A : a :: B : b$: donc, &c.

Corollaire I.

505. Les parallélogrammes ſemblables ſont entr'eux comme les quarrés de leurs hauteurs, ou comme les quarrés de leurs baſes, ou en général comme les quarrés de leurs côtés homologues, c'eſt-à-dire, que l'on aura $P : p :: AA : aa$, ou bien $P : p :: BB : bb$. Car ils ſont entr'eux en raiſon doublée de la raiſon de leurs baſes & de celle de leurs hauteurs : or une raiſon doublée eſt égale (181) à celle qu'ont entr'eux les quarrés des termes de l'une ou de l'autre raiſon composante : donc, &c.

C'eſt pourquoi, lorſque les parallélogrammes ſont ſemblables, on a toujours la proportionnalité

$$P : p :: AB : ab :: AA : aa :: BB : bb.$$

Corollaire II.

506. Les triangles ſemblables ſont en raiſon doublée de celles de leurs baſes & de leurs hauteurs : ils ſont auſſi entr'eux comme les quarrés de leurs baſes, ou comme les quarrés de leurs hauteurs, ou en général comme les quarrés de leurs côtés homologues. Car les triangles ſemblables ſont les moitiés de parallélogrammes ſemblables ; or les moitiés, & en général les

parties semblables sont entr'elles comme les tous : donc, &c.

THÉORÊME III.

507. *Les Polygones réguliers semblables sont entre eux en raison doublée de celle de leurs perimétres, ou circonférences, & de celle de leurs rayons droits.*

DEMONST. Les polygones réguliers sont entre eux (499) en raison composée de leurs perimétres & de leurs rayons droits; or quand les polygones réguliers sont semblables, cette raison composée devient doublée; car dans les figures semblables les dimensions homologues sont proportionnelles : donc, &c.

Corollaire I.

508. Les polygones réguliers semblables, 1°. sont entr'eux comme les quarrés de leurs perimétres, ou comme les quarrés de leurs rayons droits, ou comme les quarrés de leurs rayons obliques; 2°. sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; 3°. en général les polygones réguliers semblables sont entr'eux comme les quarrés des lignes semblablement tirées dans les polygones.

Corollaire II.

509. Les surfaces des cercles sont entr'elles comme les quarrés de leurs diamétres, ou comme les quarrés de leurs rayons; car les cercles sont des polygones infinitaires semblables, auxquels convient tout ce que nous venons de dire des polygones finis.

Corollaire III.

510. En général toutes les surfaces semblables sont entr'elles, non-seulement comme les quarrés faits sur les côtés homologues, mais aussi comme les figures quelconques semblables construites sur les côtés homologues, ou sur des lignes quelconques semblablement tirées dans les surfaces semblables; car les figures semblables quelconques, construites sur les côtés homologues, sont

entr'elles comme les quarrés faits ſur ces mêmes côtés homologues.

Corollaire IV.

511. Réciproquement les quarrés des côtés homologues, ou en général les figures quelconques ſemblables, conſtruites ſur les côtés homologues, ſont entr'elles comme les ſurfaces ſemblables auxquelles appartiennent ces côtés homologues. Car c'eſt une même choſe de dire que les ſurfaces ſemblables ſont comme les quarrés des côtés homologues, ou que les quarrés des côtés homologues ſont entr'eux, comme les ſurfaces ſemblables elles-mêmes.

ARTICLE II.

Des Conſéquences qui réſultent du Rapport des Surfaces.

THÉORÊME I.

512. *Le Triangle équilatéral circonſcrit au cercle eſt quadruple du Triangle équilatéral inſcrit au même cercle* (fig. 104.).

DÉMONST. Les ſurfaces de ces triangles ſont (506) entr'elles comme les quarrés de leurs rayons droits : or les rayons droits de ces triangles ſont comme 1 & 2, parce que CA eſt double de CB (426) : donc les ſurfaces ſont comme 1 & 4.

THÉORÊME II.

513. *Dans un Triangle rectangle le Quarré fait ſur l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des Quarrés faits ſur les deux autres côtés* (fig. 105.).

DÉMONST. Ayant abbaiſſé la perpendiculaire GO du ſommet de l'angle droit, on a trois triangles AGB, AGO, OGB, rectangles & ſemblables, comme nous l'avons prouvé (444), & qui ont pour hypothénuſes les trois côtés du grand triangle. Or les quarrés faits ſur les trois hypothénuſes ſont entr'eux comme les trois triangles ſemblables (511); mais le grand triangle AGB eſt égal à la ſomme des deux autres AGO + OGB : donc le quarré fait ſur l'hypothénuſe AB du grand triangle eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres hypothénuſes AG & GB, leſquelles ſont côtés du triangle rectangle AGB : donc, &c.

Corollaire I.

514. Si l'on nomme a l'hypothénuſe AB, b le côté AG, c le côté GB, l'expreſſion du quarré fait ſur l'hypothénuſe ſera $aa = bb + cc$: celle de l'hypothénuſe AB ſera $a = \sqrt{bb+cc}$; celle du côté GB ſera $c = \sqrt{aa-bb}$, & celle du côté AG ſera $b = \sqrt{aa-cc}$.

Corollaire II.

515. Lorſque dans les expreſſions $a = \sqrt{bb+cc}$, $c = \sqrt{aa-bb}$, $b = \sqrt{aa-cc}$, la ſomme ou la différence des quarrés, qui eſt ſous le ſigne radical, ſera un quarré parfait ; on pourra toujours dans un triangle rectangle dont on connoît déjà deux côtés, connoître le troiſiéme, *par ex :* ſuppoſant que les deux côtés connus ſont 3 & 4, leurs quarrés ſeront 9 & 16, dont la ſomme 25 ſera le quarré de l'hypothénuſe, & la racine 5 ſera l'hypothénuſe elle-même.

Corollaire III.

516. Mais lorſque dans les expreſſions $a = \sqrt{bb+cc}$, &c. la ſomme ou la différence des quarrés qui eſt ſous le ſigne radical, n'eſt pas un quarré parfait ; alors connoiſſant deux côtés dans le triangle rectangle, on ne pourra pas pour cela connoître le troiſiéme ; *par ex :* ſuppoſant que les deux côtés connus ſont 2 & 3, en ajoutant leurs quarrés 4 & 9, on aura 13 pour le quarré de l'hypothénuſe ; or le nombre 13 n'étant un point quarré parfait, n'a point de racine quarrée ; l'hypothénuſe ne peut donc être exprimée numériquement, ou par un nombre ; mais ſeulement par $\sqrt{13}$.

Corollaire IV.

517. Ces expreſſions $\sqrt{13}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, & autres ſemblables, ſont ce qu'on appelle quantités *incommenſurables*, quantités *irrationnelles*, *racines ſourdes*, parce qu'elles ne peuvent être exprimées

par aucun nombre possible; ces quantités $\sqrt{13}$, $\sqrt{3}$, &c. expriment donc toujours en Géométrie le côté d'un triangle rectangle, qui est incommensurable avec les deux autres.

Corollaire V.

518. Si dans un cercle on mene aux extrémités du diamétre deux cordes qui fassent avec le diamétre un triangle rectangle (*fig.* 109.), connoissant le diamétre & une des cordes, il sera aisé par l'application du théorême précédent de déterminer la valeur précise de l'autre corde, lorsqu'elle sera commensurable avec le diamétre; ou sa valeur approchée, lorsqu'elle sera incommensurable avec le diamétre ; & c'est par ce moyen que les Géométres déterminent la valeur de toutes les cordes du cercle, depuis celle qui soutient l'arc d'un degré, jusqu'à celle qui soutient l'arc de 90 degrés.

Corollaire VI.

519. La diagonale du quarré est incommensurable avec le côté. Car la diagonale du quarré est toujours l'hypothénuse d'un triangle rectangle CAD (*fig.* 106.) : donc on a $\overline{AC^2} = \overline{AD^2} + \overline{CD^2}$; mais le triangle CAD étant isocele, on a $CD = AD$, & par conséquent $\overline{CD^2} = \overline{AD^2}$: donc on aura $\overline{AC^2} = \overline{CD^2} + \overline{AD^2} = 2\overline{CD^2}$: or la quantité $\overline{2CD^2}$ n'est pas un quarré parfait: s'il l'étoit, on pourroit trouver la valeur de $\sqrt{2CD^2}$, ce qui est impossible, à cause du nombre 2 qui n'a point de racine quarrée; car $\sqrt{2}$ n'est pas commensurable : donc la diagonale, &c.

Corollaire VII.

520. Une figure quelconque faite sur l'hypothénuse est égale à la somme des figures semblables construites sur les côtés. Cela suit évidemment du théorême précédent; car ces figures étant semblables, sont entr'elles (510) comme les quarrés faits sur leurs côtés homologues, lesquels côtés homologues sont les côtés du triangle rec-

tangle : or le quarré conſtruit ſur l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés conſtruits ſur les côtés : donc, &c.

Corollaire VIII.

521. Si ſur les côtés d'un triangle rectangle & iſocele on conſtruit des demi-cercles, comme on voit (*fig* 108.), & que du ſommet de l'angle droit on abbaiſſe une perpendiculaire, les deux lunules AODG, AEBF terminées par les demi-circonférences, ſeront chacune égales aux triangles correſpondans CAD, CAB.

Car le demi-cercle BEAOD conſtruit ſur l'hypothénuſe BD eſt égal (520) à la ſomme des demi-cercles conſtruits ſur les côtés AB, AD : or ces deux demi-cercles conſtruits ſur les côtés ſont égaux entr'eux, parce que leurs diamétres AB, AD ſont ſuppoſés égaux : donc chacun de ces petits demi-cercles eſt égal à la moitié du grand demi-cercle BEAOD : donc on aura DAGD = CAOD, & retranchant la portion commune DAOD, on aura la lunule DOAGD = CAD, triangle correſpondant à la lunule.

Ces lunules s'appellent les *Lunules d'Hypocrate*, parce que c'eſt lui qui le premier ait évalué la ſurface de ces lunules, en découvrant qu'elles étoient égales chacune à un triangle.

SECTION III.

Des Solides.

I°. UN point qui ſe meut, décrit une *ligne* : une ligne en ſe mouvant décrit une *ſurface* : une ſurface qui ſe meut décrit un *ſolide*.

II°. Lorſqu'une ſurface plane, ou un plan ſe meut pour décrire un ſolide, les lignes qui terminent le plan, décrivent la ſurface du ſolide,