çoit qu'un point en ſe mouvant, décrit une *ligne;* qu'une ligne en ſe mouvant, décrit une *ſurface;* qu'une ſurface en ſe mouvant, décrit un *ſolide.* Il n'y a donc que trois eſpéces d'étendue, la *ligne*, la *ſurface*, & le *ſolide.* Nous en allons parler dans autant de ſections.

SECTION I.

Des Lignes.

LEs lignes ont leur nature, leurs propriétés & leurs rapports, dont il nous faut parler.

CHAPITRE I.

De la Nature des Lignes.

I°. TOUTE ligne eſt *droite* ou *courbe:* une ligne droite eſt unique dans une eſpéce; elle ne peut être plus ou moins droite: une ligne courbe peut varier à l'infini; elle peut être plus ou moins courbe.

II°. De toutes les lignes courbes, la plus ſimple, la plus uniforme, & dont toutes les autres tirent primitivement leur origine, eſt la ligne *circulaire* (*fig.* 2) parce que ſa courbure eſt la même par tout, & ne varie dans aucun de ſes points, comme nous le verrons.

III°. Toutes les lignes priſes en général ſe rapportent donc à deux eſpéces, la ligne *droite*, & la ligne *circulaire*: & ce ſont-là les principes ſur leſquels eſt fondée toute la Géométrie *ſpéculative.*

IV°. A la ligne *droite* & à la ligne *circulaire* répondent la *regle* & le *compas*: la regle pour décrire la ligne droite, & le compas pour décrire la ligne circulaire ; & ce ſont les inſtrumens fondamentaux dont on ſe ſert dans la Géométrie *pratique*.

V°. Sur la ligne droite, la ligne circulaire, & leur combinaiſon ſont fondées toutes les démonſtrations des *théorêmes* de la Géométrie ſpéculative ; pareillement de la regle, du compas, & de leur combinaiſon dérivent tous les inſtrumens dont on ſe ſert pour exécuter les *problêmes* de la Géométrie pratique. Nous allons donc donner, 1°. la notion de la ligne droite ; 2°. la notion de la ligne circulaire.

ARTICLE I.

Notion de la Ligne droite.

Hypothése.

245. Si un point A (*fig.* 1.) eſt ſuppoſé ſe mouvoir, & partir d'un terme A pour arriver au terme B, l'eſpace parcouru par ce point s'appelle *Ligne*.

DÉFINITIONS.

I.

246. Si le point, en ſe mouvant, conſerve toujours la même direction, il décrit une ligne que l'on nomme ligne *droite* : telle eſt la ligne AB (*fig.* 1.)

II.

247. Si le point, en ſe mouvant, vient à changer de direction, il décrit une ligne que l'on appelle *anguleuſe*, telle eſt la ligne AEB (*fig.* 3.) ou la ligne DCE (*fig.* 5.)

III.

248. Si le point, en ſe mouvant, change à chaque inſtant de direction, il décrit une ligne que l'on appelle *courbe* : telle eſt la ligne CAD (*fig.* 1.)

IV.

249. Si la ligne eſt en partie droite, & en partie courbe, on l'appelle ligne *mixte*.

Corollaire I.

250. Tous les points d'une ligne *droite* ſont dans

la même direction ; *par ex :* tous les points de la droite AB (*fig.* 1.) sont dans la direction de A vers B.

Corollaire II.

251. La ligne droite est la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre point ; *par ex :* la droite AB (*fig.* 3.) est plus courte qu'aucune des trois lignes AEB, ADB, AFB, parce que tous ses points étant dans la même direction, elle passe par la voie la plus courte.

Corollaire III.

252. La ligne droite est aussi la plus courte entre ses extrémités ; *par ex :* la ligne AB est la plus courte que l'on puisse mener entre ses extrémités A & B.

Corollaire IV.

253. La somme de deux droites AE + EB (*fig.* 3.) est toujours plus grande que la troisiéme AB.

Corollaire V.

254. D'un point A à un autre point B on ne peut mener qu'une seule ligne droite AB (*fig.* 3.) : car toute autre ligne droite menée de A en B seroit par le second corollaire la plus courte entre ces deux points, & par conséquent ne seroit pas distinguée de la droite AB.

Corollaire VI.

255. D'un point à une ligne on peut mener une infinité de lignes droites ; *par ex :* du point C à la ligne EG (*fig.* 11.) on peut mener les lignes CA, CD, CF, CB, & une infinité d'autres : on en peut mener autant qu'il y a de points dans la ligne EG.

Corollaire VII.

256. Pour déterminer la position d'une ligne *droite*, un point seul ne suffit pas ; car les droites CA, DC, CF, &c. ont un même point C commun, & ont différentes positions : deux points

suffisent ; deux points étant donnés, tels que C & D (*fig.* 11.) il n'est pas possible (254) de faire passer par ces points d'autre ligne que CD.

Corollaire VIII.

257. Deux lignes droites ne peuvent pas avoir deux points communs ; elles auroient dès lors la même position, & ne feroient plus qu'une seule & même ligne.

Corollaire IX.

258. Deux lignes droites ne peuvent se couper qu'en un seul point : si elles se coupoient en deux points, elles auroient deux points communs, & par conséquent ne feroient plus qu'une seule & même ligne.

ARTICLE II.

Notion de la Ligne Circulaire.

HYPOTHÉSE.

259. Si une ligne droite AD (*fig.* 4.) immobile au point A, & mobile à l'extrêmité D, est supposée faire une révolution autour du point A, il est clair que l'extrêmité, ou le point D décrira une courbe dont tous les points seront également distans du point A : cette ligne coube s'appelle *Ligne circulaire*, ou *Cercle*.

DÉFINITIONS.

I.

260. Une ligne *circulaire* est une ligne courbe, dont tous les points sont également éloignés d'un point commun ; *par ex :* A (*fig.* 2 & 4.) que l'on nomme *Centre.*

II.

261. L'espace compris & renfermé par la ligne circulaire, s'appelle *Cercle*, & la ligne circulaire s'appelle *Circonférence* du cercle.

III.

262. La ligne AD, ou AC, ou AB, &c. (*fig.* 4.)

& en général toute ligne droite, tirée du centre A à un point quelconque de la circonférence, s'appelle *Rayon*. Le double rayon, & en général toute ligne droite menée d'un point de la circonférence au point opposé, & qui passe par le centre, s'appelle *Diamétre*.

IV.

263. Deux cercles qui ont un centre commun, s'appellent *Concentriques* (*fig.* 2.): deux cercles qui se coupent ou se touchent, s'appellent cercles *Excentriques* (*fig.* 7, 8, & 9.); la ligne droite qui joint les deux centres, s'appelle ligne d'*excentricité*.

Corollaire I.

264. Dans le cercle tous les rayons sont égaux, car ils mesurent la distance du centre à la circonférence, laquelle est par tout la même: pareillement tous les diamétres sont égaux, puisqu'ils sont chacun le double du rayon.

Corollaire II.

265. Une ligne droite qui coupe la circonférence d'un cercle, la coupe toujours en deux points; ou prolongée, la couperoit en deux points.

Corollaire III.

266. Une ligne droite ne peut pas couper une circonférence de cercle en trois points; car trois points ont la même direction dans une ligne droite, & ne peuvent l'avoir dans une circonférence de cercle.

Corollaire IV.

267. Donc trois points pris dans la circonférence du cercle ne peuvent pas être posés en ligne droite; ou, ce qui revient au même, une circonférence de cercle peut bien avoir deux points communs avec une ligne droite, mais non pas trois.

Corollaire

Corollaire V.

268. Deux circonférences de cercle qui se coupent, se coupent nécessairement en deux points, comme il est évident (*fig.* 9.)

Corollaire VI.

269. Deux circonférences de cercle ne peuvent se couper en trois points (*fig.* 9.); car si cela étoit possible, deux circonférences pourroient donc avoir trois points communs; & par conséquent la circonférence ACB pourroit avoir trois de ses points également distans du point C centre de l'autre circonférence : or elle ne peut avoir que deux de ses points, savoir, A & B, également distans du point C; car tous ses autres points s'en éloignent ou s'en approchent toujours de plus en plus, à cause de l'uniformité de sa courbure : donc, &c.

Corollaire VII.

270. Deux circonférences de cercle ne peuvent se toucher qu'en un seul point : car soit qu'elles se touchent en dedans (*fig.* 7.), soit qu'elles se touchent en dehors (*fig.* 8.), elles ne peuvent avoir qu'un seul point commun O; si elles en avoient deux, elles se couperoient, comme il arrive (*fig* 9.)

Remarque.

271. Lorsque deux circonférences de cercle se touchent, la ligne d'excentricité est égale à la somme ou à la différence des rayons; car si elles se touchent en dehors (*fig.* 8.), la ligne d'excentricité, savoir CD, est égale, comme il est évident, à la somme des rayons $CO + OD$; si elles se touchent en dedans (*fig.* 7.) la ligne d'excentricité est $CD = CO - OD$, qui est la différence des rayons.

Corollaire VIII.

272. Deux circonférences de cercle peuvent avoir un point commun, lorsqu'elles se touchent; elles peuvent avoir deux points communs, lorsf-

qu'elles ſe coupent ; mais elles ne peuvent avoir trois points communs; parce qu'elles ne peuvent ni ſe toucher, ni ſe couper en trois points.

Corollaire I X.

273. Pour déterminer la poſition d'une circonférence de cercle, deux points ne ſuffiſent pas ; car elle peut avoir deux points communs, ſoit avec une ligne droite, ſoit avec une autre circonférence de cercle; mais trois points ſuffiſent, parce qu'elle ne peut avoir trois points communs, ni avec une ligne droite, ni avec une autre circonférence de cercle.

Corollaire X.

274. On peut toujours faire paſſer une circonférence de cercle par trois points donnés B, C, D, (*fig.* 4.) & non poſés en ligne droite; car prenant un point A également diſtant des trois points donnés, & de ce point A comme centre, & de l'intervalle AB décrivant avec le compas un arc, cet arc paſſera par les trois points donnés, & continué donnera une circonférence de cercle.

Il ne s'agit pour cela que de trouver le centre A ; nous en donnerons dans la ſuite la méthode.

DÉFINITIONS.

I.

275. Les portions GH, HI, IB, &c. (*fig.* 4.) de la circonférence, compriſes entre deux rayons, s'appellent *Arcs* de circonférence.

I I.

276. Toute portion priſe dans la ſurface du cercle, compriſe entre deux rayons & terminée par un arc, s'appelle *Secteur* de cercle.

I I I.

277. Une ligne droite FG ou DE (*fig.* 5.) qui paſſe par les extrémités d'un arc, s'appelle *Corde.*

I V.

278. La corde divise la surface du cercle en deux parties inégales, dont la plus grande s'appelle le *grand Segment*, & la plus petite, le *petit Segment*.

Corollaire I.

279. Dans un cercle, ou dans des cercles égaux, les cordes égales soutiennent des arcs égaux, & les arcs égaux sont soutenus par des cordes égales; ce qui est évident, puisque la courbure du cercle étant par-tout uniforme, il est nécessaire qu'entre les extrémités des cordes égales soient compris des arcs égaux.

Corollaire I I.

280. Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les plus grandes cordes soutiennent de plus grands arcs, & les plus grands arcs sont soutenus par de plus grandes cordes.

Corollaire I I I.

281. Dans un même cercle la plus grande de toutes les cordes est celle qui passe par le centre, ou est le diamétre lui-même; *par ex:* le diamétre AB (*fig.* 5.) est plus grand que la corde DE. Car le diamétre AB est égal aux rayons CE + CD: or la somme CE + CD = AB, est plus grande que la corde DE (253): donc, &c.

Corollaire I V.

282. Tout diamétre partage & la circonférence & la surface du cercle en deux également. Car le diamétre pouvant être regardé comme la plus grande de toutes les cordes, il soutient par conséquent le plus grand de tous les arcs, & le plus grand de tous les segmens que l'on puisse prendre dans le cercle: or dans le cercle, le plus grand de tous les arcs est la demi-circonférence, & le plus grand de tous les segmens est le demi-cercle; donc le diamétre partage & la circonférence & le cercle en deux moitiés, ou en deux parties égales.

CHAPITRE II.

Des Propriétés des Lignes.

I°. LEs lignes dont nous examinons ici les propriétés, sont les lignes droites : les propriétés des lignes droites naissent de leur *position* respective, & de leur *assortiment.*

II°. La position respective des lignes est la position d'une ligne par rapport à une autre ligne, ou à plusieurs autres lignes ; l'assortiment des lignes consiste dans la rencontre & la réunion de plusieurs lignes par leurs extrémités.

III°. De la position respective des lignes naissent les *angles :* de l'assortiment des lignes résultent les *figures.*

ARTICLE I.

De la Position respective des Lignes droites, & des Angles.

Nous parlerons, 1°. de la position respective des lignes droites : 2°. des angles.

PARAGRAPHE I.

De la Position respective des Lignes droites.

Une ligne droite considérée toute seule, n'a qu'une position *absolue* ; elle ne peut avoir de position *respective* qu'à l'égard d'autres lignes. La position d'une ligne droite peut être considérée ou par rapport à d'autres lignes droites, ou par rapport au cercle.

NOMBRE I.

De la position d'une ligne droite par rapport à d'autres droites.

Une ligne droite, considérée par rapport à d'autres lignes droites, peut avoir trois sortes de position, être *perpendiculaire*, être *oblique*, être *parallele.*

DÉFINITIONS.

I.

283. Une ligne AB qui tombe ſur une autre ligne CD, ſans pencher plus d'un côté que de l'autre, s'appelle *Perpendiculaire.*

I I.

284. La ligne ſur laquelle tombe la perpendiculaire, eſt auſſi perpendiculaire à l'égard de l'autre; *par ex:* la ligne CD eſt perpendiculaire ſur AB, auſſi-bien que AB ſur CD (*fig.* 9 & 10.)

I I I.

285. Les lignes AC, AD (*fig.* 9.) qui tombent ſur une ligne CD, de façon qu'elles s'inclinent plus d'un côté que de l'autre, s'appellent *Obliques*, par rapport à ligne CD. Les diſtances CI, DI, (*fig.* 9.) s'appellent *Eloignemens de Perpendicule.*

I V.

286. Les obliques peuvent être inclinées, ou dans le même ſens, comme CF, CB (*fig.* 11.), ou en ſens contraire, comme CA, CF.

V.

287. On appelle lignes *paralleles*, deux lignes qui ſont également éloignées l'une de l'autre dans tous leurs points correſpondans (*fig.* 15.). On définit auſſi les lignes *paralleles*, des lignes qui, quelque prolongées qu'on les ſuppoſât, ne ſe rencontreroient jamais.

THÉORÊME I.

288. *Une ligne* CD (fig. 10.) *qui tombe ſur une autre* AB, *de façon qu'elle ait deux de ſes points*, par ex: C & D, *également diſtans chacun de deux termes ou deux points* A, B, *donnés dans l'autre ligne, eſt dès-lors perpendiculaire ſur cette ligne* AB.

DÉMONSTRATION. Car ſi la ligne CD n'étoit point perpendiculaire ſur AB, elle pencheroit par conſéquent plus d'un côté que de l'autre; & dans ce cas le point C, *par ex:* ſeroit plus proche de A que de B, ou de B que de A, & l'on auroit la distance $AC < CB$, ou la distance $CB < AC$; ce qui est impossible, puisque par la supposition la distance $CA = CB$, donc, &c.

La démonstration peut aussi être appliquée à la figure 9.

Corollaire.

289. Pour mener une ligne perpendiculaire AI, ou AB, sur une ligne donnée CD (*fig.* 9.), il n'y a qu'à décrire des extrêmités C, D, pris comme centres, & de la même ouverture de compas, des cercles, lesquels s'entrecouperont, & joindre les points d'intersection A & B par une droite AB, laquelle sera la perpendiculaire cherchée.

Remarquez 1°. que pour mener une perpendiculaire AB, au lieu de cercles, il suffit de tracer des arcs qui s'entrecoupent aux points A & B.

Remarquez 2°. que c'est par cette même méthode que l'on divise une ligne droite donnée, *par ex:* CD en deux également.

THÉORÊME II.

290. *Une ligne* AI *étant perpendiculaire sur une autre* CD, *si l'un des points de la perpendiculaire est également éloigné de deux termes ou deux points* C, D, *donnés dans l'autre ligne, tous les autres points de la perpendiculaire seront également éloignés chacun de ces deux mêmes points* C, D (fig. 9.).

DÉMONST. Si l'on suppose que le point A soit également éloigné des deux points C, D, ou que l'on ait $AC = AD$, je dis que tout autre point de la perpendiculaire; *par ex:* le point I sera aussi également éloigné des deux mêmes points C & D, ou que l'on aura $IC = ID$. Car si l'on avoit $IC > ID$, la ligne AI pencheroit plus du côté de C que de D; & si l'on avoit $ID > IC$, la ligne AI pencheroit plus du côté de D que de C: donc la ligne AI ne seroit plus perpendiculaire sur CD, ce qui est contre la supposition.

La démonstration peut aussi être appliquée à la figure 10.

Corollaire I.

291. Une perpendiculaire AI étant prolongée tant que l'on voudra de part & d'autre, tous les points par où elle passera, seront toujours également distans chacun des deux termes ou deux points donnés C & D. Car la perpendiculaire AI étant prolongée jusqu'en B, & le point I étant également distant des extrémités C & D, il suit que le point B sera de même également distant des extrémités C & D, & que l'on aura BC = BD, ce qui se prouve de la même maniere que le théorême précédent.

Corollaire II.

292. Il y a donc cette différence entre la ligne *perpendiculaire*, & la ligne simplement droite, que pour juger de la position d'une ligne perpendiculaire, *par ex :* CD (*fig.* 11.), par rapport à une autre ligne donnée EB, il suffit qu'il soit donné un seul de ses points, tels que C; car si le point C est également distant des deux termes E, B, il en sera de même de tous les autres points de la perpendiculaire : au lieu que pour déterminer la position d'une ligne simplement *droite* CF, le point C seul ne suffit pas; car le point C ne détermine pas plutôt la position de CF que de CB, ou que de CA; mais il faut qu'il soit donné deux points; *par ex :* C & F, pour pouvoir juger de la position de la ligne CF par rapport à l'autre ligne EB.

THÉORÊME III.

293. *La Perpendiculaire est plus courte que l'Oblique menée d'un même point à une même ligne droite,* par ex : CD *est plus courte que* CA, *que* CF, *que &c.* (fig. 11.).

CONSTRUCTION. Prolongez la ligne CD jusqu'en H, de façon que l'on ait CD = DH, & menez les lignes HA, HF; cela posé

DÉMONSTRAT. La ligne CH est plus courte

(253) que CA + AH: donc la moitié de CH eſt plus courte que la moitié de CA + AH. Or CD eſt la moitié de CH par la conſtruction. Pareillement CA eſt la moitié de CA + AH; car la ligne AD eſt perpendiculaire ſur CH, auſſi bien que CH l'eſt ſur AD, or dans la perpendiculaire AD, le point D eſt également diſtant des points C & H, puiſque par la conſtruction CD = DH, donc auſſi le point A eſt également diſtant des mêmes points C & H, donc on aura CA = AH, & par conſéquent CA eſt la moitié de CA + AH.

La démonſtration peut auſſi être appliquée aux figures 9, 12, & 13.

Théorême IV.

294. *D'un point pris hors d'une ligne on ne peut abaiſſer ſur cette ligne qu'une ſeule Perpendiculaire ; pareillement d'un point pris dans une ligne on ne peut élever ſur cette ligne qu'une ſeule Perpendiculaire* (fig. 9 & 11.).

Démonst. I. Part. La perpendiculaire eſt la ligne la plus courte que l'on puiſſe mener d'un point à une ligne (293) : or il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne qui ſoit la plus courte entre deux termes donnés: donc, &c.

Démonst. II. Part. Dans la ligne EG (*fig.* 11.), prenons le point D également éloigné des points A & F: or de ce point D on ne peut élever que la ſeule perpendiculaire DC. Car ſi du point D on pouvoit élever une ſeconde perpendiculaire diſtinguée de DC, cette ſeconde perpendiculaire partant d'un point D, également éloigné de A & de F, paſſeroit par conſéquent toujours (291) par des points également éloignés de A & de F; donc elle paſſeroit par le point C; donc elle auroit deux points C & D communs avec la premiere perpendicaire CD, & ſe confondroit ainſi avec elle.

Corollaire.

295. C'eſt pourquoi la ligne perpendiculaire eſt la meſure dont ſe ſervent les Géométres pour me-

ſurer les *diſtances*, les *hauteurs*, &c. parce qu'elle eſt la ligne la plus courte que l'on puiſſe mener entre deux termes donnés, & qu'entre deux termes on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire: deux propriétés qui donnent à la perpendiculaire les deux caracteres propres de la *meſure*, ſçavoir, la *ſimplicité* & l'*invariabilité*.

THÉORÊME V.

296. *De toutes les Obliques* CF, CB, *&c. menées d'un même point* C *ſur une même ligne* EG, *celles qui ſont moins éloignées de la Perpendiculaire, ſont plus courtes; celles qui ſont plus éloignées, ſont plus longues* (fig. 11.).

DÉMONST. Prolongez CD juſqu'au point H, de façon que l'on ait CD = DH, & menez les lignes HF, HB; il eſt évident que la ligne CBH eſt plus grande que CFH, puiſqu'elle s'écarte davantage de la voie la plus courte: donc la moitié de CBH eſt plus longue que la moitié de CFH: or CB eſt la moitié de CBH, & CF eſt la moitié de CFH. Ce que l'on prouve de la même maniere que nous avons démontré (293) que CA étoit la moitié de CAH: donc, &c.

Corollaire I.

297. De toutes les obliques menées d'un même point ſur une même ligne: 1°. celles qui ont même éloignement de perpendicule, ſont égales: 2°. celles qui ſont égales, ont même éloignement de perpendicule: 3°. celles qui ſont égales & ont même éloignement de perpendicule, appartiennent à une même perpendiculaire (*fig.* 11.).

I°. Si les éloignemens de perpendicule ſont égaux, on aura AD = DF: donc dans la perpendiculaire CD, le point D, & par conſéquent auſſi le point C, ſera (290) également éloigné des points A & F; donc on aura CA = CF.

II°. Si les obliques ſont égales, on aura CA = CF: donc dans la perpendiculaire CD, le point C, & par conſéquent auſſi le point D ſera également éloigné des points A & F : donc on aura DA = DF.

III°. Si l'on a les obliques égales CA = CF, & les éloignemens de perpendicule égaux DA = DF, il eſt clair que la ligne dont les obliques ſont également éloignées, eſt une même perpendiculaire CD.

Corollaire II.

298. Si les obliques ſont tirées de différens points, ſoit ſur une même ligne, ſoit ſur différentes lignes, comme AC, EF (*fig.* 12 & 13.), il arrivera

I°. Que les obliques AC, EF ſeront égales, lorſqu'elles auront des perpendiculaires égales, & même éloignement de perpendicule.

II°. Que les éloignemens de perpendicule BC, DF, ſeront égaux, lorſque les obliques ſeront égales, & les perpendiculaires égales.

III°. Que les perpendiculaires AB, ED ſeront égales, lorſque les obliques ſeront égales, & les éloignemens de perpendicule égaux.

En effet concevez que l'extrémité A de la perpendiculaire AB ſoit poſée ſur l'extrémité E de la perpendiculaire ED; vous verrez évidemment que dans le cas des perpendiculaires AB, ED égales, & des éloignemens de perpendicules BC, DF égaux, les obliques AC, & EF tomberont néceſſairement l'une ſur l'autre, ſe confondront & ſeront par conſéquent égales: que dans le cas des obliques AC, EF égales, & des perpendiculaires AB, ED égales, l'éloignement de perpendicule BC tombera exactement ſur DF, ſe confondra avec lui, & lui ſera par conſéquent égal: que dans le cas des obliques AC, EF égales, & des éloignemens de perpendicule BC, DF égaux, les extrémités A & B de la perpendiculaire AB tomberont ſur les extrémités E & D de la perpendiculaire ED, & que par conſéquent les deux perpendiculaires ſe confondront & ſeront égales.

Corollaire III.

299. Donc en général de ces trois choſes, lignes perpendiculaires, lignes obliques, éloignemens de perpendicule ; ſi deux d'une part ſont égales aux deux correſpondantes de l'autre part, la troiſiéme ſera auſſi néceſſairement égale de part & d'autre.

Corollaire IV.

300. D'un point on ne peut mener que deux obliques égales ſur une même ligne EG (*fig.* 11.) : car il ne peut y avoir que deux obliques CA, CF, également éloignées de la perpendiculaire, & par conſéquent égales.

THÉORÊME VI.

301. *Deux lignes qui ſont chacune perpendiculaires à une même troiſiéme Ligne, ſont paralleles entr'elles.*

DÉMONSTRATION. Si elles n'étoient pas paralleles entr'elles, elles ſe rencontreroient en un point quelconque ; & par conſéquent il y auroit deux perpendiculaires menées d'un même point ſur une même ligne, ce qui eſt impoſſible (294).

THÉORÊME VII.

302. *Une Ligne* AB *perpendiculaire à une Ligne* GH, *eſt auſſi perpendiculaire à une ſeconde ligne* CD, *parallele à* GH (fig. 14.).

DÉMONSTRATION. Si la ligne AB perpendiculaire ſur GH, ne l'étoit pas ſur CD, CD ne ſeroit pas non plus perpendiculaire ſur AB ; donc CD ſeroit inclinée ſur AB : donc CD étant prolongée rencontreroit de part ou d'autre la ligne GH, & par conſéquent ne lui ſeroit pas parallele, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Corollaire.

303. Une ligne GI perpendiculaire à une ligne AB (*fig.* 17.), eſt auſſi perpendiculaire à toutes les lignes CD, EF, &c. paralleles à la ligne AB.

THÉORÊME VIII.

304. *Une ligne* AB, *parallele à une premiere paral-*

lele CD, *eſt auſſi parallele à la ſeconde parallele* EF, (fig. 17.).

Démonst. Par l'hypothèſe la ligne AB eſt parallele à la ligne CD, & par conſéquent la ligne GH perpendiculaire ſur AB, l'eſt auſſi ſur CD: par l'hypothèſe encore la ligne CD eſt parallele à la ligne EF: donc la ligne prolongée GHI, perpendiculaire ſur CD, le ſera auſſi ſur EF, donc la ligne GI eſt perpendiculaire ſur AB & ſur EF: donc (301) AB & EF ſont paralleles.

C'eſt la même choſe auſſi de dire que deux lignes paralleles à une même troiſiéme ligne, ſont paralleles entr'elles.

Théorême IX.

305. *Une ligne* IF, *oblique & inclinée ſur une parallele* AB, *eſt également inclinée ſur l'autre parallele* CD (fig. 16.).

Démonst. Si la ligne IF étoit plus ou moins inclinée ſur la parellele AB, que ſur la parallele CD, la parallele AB ſeroit pareillement plus ou moins inclinée ſur la ligne IF, que ne l'eſt la parallele CD: donc les paralleles AB, CD, s'inclineroient l'une ſur l'autre, & prolongées ſe rencontreroient quelque part, & par conſéquent ne ſeroient plus paralleles, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Corollaire I.

306. Une ligne GI oblique & inclinée ſur une ligne AB (*fig.* 18.) eſt également inclinée ſur toutes les lignes CD, EF, &c. paralleles à la ligne AB.

Corollaire II.

307. En général deux lignes paralleles ont toujours une même poſition par rapport à une même troiſiéme ligne; & réciproquement.

Théorême X.

308. *Deux lignes perpendiculaires compriſes entre deux paralleles, ſont égales.*

Démonst. Les perpendiculaires compriſes entre deux paralleles mesurent des distances égales, donc elles sont égales.

Corollaire I.

309. Donc deux lignes paralleles comprises entre deux paralleles, sont égales entr'elles: car si elles sont perpendiculaires, elles seront égales, comme nous venons de le prouver; si elles sont obliques, elles auront même éloignement de perpendicule, puisqu'elles sont paralleles, & par conséquent elles seront égales.

Corollaire II.

310. Donc deux lignes également inclinées, entre deux paralleles, sont égales: car étant également inclinées, elles ont même éloignement de perpendicule; donc elles sont égales.

Remarque.

311. Pour mener une ligne parallele à une autre ligne donnée, *par ex:* CD (*fig.* 15.), il n'y a qu'à élever sur la ligne donnée CD deux perpendiculaires égales, & faire passer par les extrémités des deux perpendiculaires, une ligne droite, laquelle sera nécessairement (301) parallele à la ligne donnée.

On peut aussi mener une ligne parallele à une autre ligne donnée CD, en décrivant des extrémités C & D, ou de tels autres points que l'on voudra, *par ex:* E & F pris dans la ligne donnée soit des cercles, comme l'on voit (*fig.* 14.), soit des arcs indéfinis EGO, FHO avec la même ouverture de compas, & prenant sur ces arcs des portions égales BG, FH, la ligne qui passera par les points G & H, sera parallele à la ligne donnée, comme il est évident.

NOMBRE II.

De la position de la ligne droite par rapport au Cercle.

Une ligne droite considérée par rapport à une autre ligne droite, peut avoir trois sortes de positions; sçavoir, être *perpendiculaire*, être *oblique*, être *parallele:* une ligne droite considérée par rapport au cercle, ne peut avoir que deux ſortes de poſitions; ſçavoir, être *tangente*, ou être *ſécante*.

DÉFINITIONS.

I.

312. On appelle *Sécante*, toute ligne droite qui coupe, ou qui, prolongée, couperoit la circonférence du cercle.

II.

313. La ſécante s'appelle *Sécante extérieure*, lorſqu'elle eſt tirée d'un point pris hors de la circonférence; & elle s'appelle *Sécante intérieure*, lorſqu'elle eſt tirée d'un point pris en dedans du cercle.

THÉORÊME I.

314. *De toutes les Sécantes intérieures tirées d'un point pris au-deſſous du centre, la plus courte ſera celle qui, prolongée, paſſeroit par le centre* (fig. 19.).

DÉMONSTRATION. La ſécante AB, qui, prolongée, paſſeroit par le centre C, eſt plus courte que la ſécante AD. Car (253) CAD > CD : or CD = CB, parce qu'elles ſont rayons d'un même cercle: donc CAD > CB : donc, en retranchant de part & d'autre la partie commune CA, on aura AD > AB.

THÉORÊME II.

315. *De toutes les Sécantes intérieures tirées d'un même point, pris au-deſſus du centre à la circonférence concave du cercle, la plus longue ſera celle qui paſſe par le centre* (fig. 20.).

DÉMONST. La ſécante AB qui paſſe par le centre C, eſt plus longue que toute autre ſécante, *par ex:* AD. Car CB = CD, puiſqu'elles ſont rayons d'un même cercle; donc ajoûtant à l'une & à l'autre la portion commune CA, on aura ACB = ACD; or (253) ACD > AD : donc ACB, ou AB > AD.

THÉORÊME III.

316. *De toutes les Sécantes extérieures, menées d'un même point à la circonférence convexe du cercle, la plus*

courte est celle qui prolongée, passeroit par le centre (fig. 21.).

DÉMONST. Ayant continué les deux sécantes AB, AD, jusqu'au centre C, on aura (253) ABC < ADC, donc retranchant de part & d'autre les lignes égales, ou rayons BC, DC, il restera AB < AD.

THÉORÊME IV.

317. *De toutes les Sécantes extérieures, tirées d'un même point à la circonférence concave du cercle, la plus longue sera celle qui passera par le centre* (fig. 22.).

DÉMONST. La sécante AB qui passe par le centre C, est plus longue que AD. Car (264) CB = CD : donc ajoutant la partie commune CA, on aura BCA = DCA : or (253) DCA > DA, donc aussi BCA > DA.

Remarque.

318. Si dans le cercle la *sécante intérieure* étoit tirée soit du centre à la circonférence, soit d'un point de la circonférence à un point opposé en passant par le centre, soit d'un point de la circonférence à un autre point, sans passer par le centre, alors elle deviendroit ou *rayon*, ou *diamétre*, ou *corde*. Or dans le cercle, le rayon, ou le diamétre peut être soit *perpendiculaire*, soit *oblique*, soit *parallele* à une corde, & de ces différentes positions naissent de nouveaux rapports.

THÉORÊME V.

319. *Dans un même Cercle* (fig. 23.).

I°. *Tout Diamétre ou Rayon, qui est perpendiculaire à une corde, coupe cette corde & l'arc soutenu par cette corde, en deux également.*

II°. *Tout Diamétre, ou Rayon, qui coupe une corde en deux également, est perpendiculaire à cette corde.*

III°. *Toute Ligne perpendiculaire à une corde, & qui la divise en deux également, est Diamétre, ou Rayon.*

DÉMONST. I. Part. Le diamétre FB passe par le centre A, qui est également distant des extrémités C & D de la corde : or il est perpendiculaire à la corde: donc le point E, par où paſſe ce diamétre, eſt auſſi également diſtant des extrémités C & D: donc on aura CE = ED: par la même raiſon on aura l'arc CB = BD.

DÉMONST. II. Part. Le diamétre paſſe par le centre A, qui eſt également éloigné des extrémités C & D: & puiſqu'il coupe la corde en deux également, le point E eſt auſſi également diſtant des extrémités C & D: donc dans ce diamétre il y a deux points A, E, qui ſont chacun également diſtans des extrémités de la corde: donc (288) il eſt perpendiculaire à la corde.

DÉMONST. III. Part. Puiſque la ligne FB coupe la corde en deux également, le point E eſt également diſtant des extrémités C & D de la corde: & puiſqu'elle eſt perpendiculaire à la corde, elle paſſe toujours par des points également diſtans des extrêmités C & D; donc elle paſſe par le centre A: or toute ligne qui paſſe par le centre, eſt rayon, ou diamétre: donc, &c.

Corollaire.

320. D'où il ſuit en général que de ces trois conditions, être perpendiculaire à une corde; couper une corde en deux également; être rayon, ou diamétre, deux étant données, la troiſiéme s'enſuit néceſſairement.

DÉFINITIONS.

I.

321. On appelle *tangente*, une ligne droite qui rencontre en dehors la circonférence du cercle, ſans la couper, telles ſont les lignes FE, CD, AB, fig. 24, 25 & 26.

I I.

322. Le point ou la tangente rencontre la circonférence du cercle, s'appelle point de *contact* ou de *contingence*, tels ſont les points A, F, E, (*fig.* 24, &c.).

THÉORÊME VI.

323. *Une ligne perpendiculaire à l'extrémité du*

rayon, ou du diamétre, est tangente par rapport au cercle (fig. 24.).

Démonst. Elle est ou tangente, ou sécante : or elle n'est point sécante. Si elle l'étoit, elle couperoit nécessairement (265) la circonférence du cercle en deux points, *par ex :* A & D : donc cette ligne seroit la ligne AB, qui rentre dans le cercle : donc menant sur AB une ligne quelconque CH, le point H sera en dedans du cercle, & la ligne CH sera plus courte que le rayon CA : donc le rayon CA n'étant point la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un même point C sur la ligne AB, ne sera pas perpendiculaire sur la ligne AB : donc aussi la ligne AB ne sera pas perpendiculaire à l'extrémité du rayon ; ce qui est contre notre supposition.

Théorême VII.

324. *Réciproquement la Tangente est toujours perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contingence* (fig. 24.).

Démonst. Si la tangente AE n'est pas perpendiculaire à l'extrémité du rayon CA, le rayon ne sera pas non plus perpendiculaire, mais oblique sur la tangente ; soit donc CH, cette perpendiculaire menée du centre à la tangente : donc on aura CH < CA : donc l'extrémité H est en dedans du cercle : donc la tangente rentreroit dans le cercle, & par conséquent ne seroit plus tangente ; ce qui est contre la supposition.

Théorême VIII.

325. *La Tangente ne touche la circonférence du cercle qu'en un seul point.*

Démonst. Si elle touchoit la circonférence du cercle en deux points, soient menés du centre deux rayons à ces deux points de contingence : or tout rayon mené au point de contingence, est perpendiculaire sur la tangente, comme nous venons de le voir : donc on auroit deux perpendiculaires menées d'un même point ſur une même ligne, ce qui eſt impoſſible.

Corollaire I.

326. De ces trois conditions, être rayon, ou paſſer par le centre; aboutir au point de contingence; être perpendiculaire à la tangente, deux étant poſées, la troiſiéme s'enſuit néceſſairement: En effet,

I°. Tout rayon qui aboutit au point de contingence, eſt auſſi perpendiculaire à la tangente; puiſque (324) la tangente eſt toujours perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contingence.

II°. Toute ligne menée au point de contingence, & qui eſt perpendiculaire à la tangente, dès-lors paſſe par le centre ou eſt rayon: car du point de contingence, on ne peut élever ſur la tangente d'autre perpendiculaire, que celle qui paſſe par le centre, ou qui eſt rayon.

III°. Toute ligne qui eſt perpendiculaire à la tangente, & qui paſſe par le centre, ou qui eſt rayon, aboutit dès-lors au point de contingence: car, ſi elle n'y aboutiſſoit pas, on pourroit donc avoir deux perpendiculaires menées du centre à la tangente; l'une qui aboutiroit au point de contingence (324), & l'autre qui n'y aboutiroit pas par l'hypothèſe, ce qui eſt impoſſible (294).

Corollaire II.

327. Les arcs de circonférence compris entre une corde & une tangente paralleles, ſont égaux; car ayant mené du point de contingence E (*fig.* 25.) le diamétre EF, ce diamétre ſera perpendiculaire à la tangente AB: donc il le ſera auſſi ſur la corde GH, parallele à la tangente: donc (302) il partagera la corde GH, & l'arc GEH en deux également: donc on aura EG = EH.

Corollaire III.

328. Les arcs de circonférence compris entre deux tangentes paralleles, ſont égaux (*fig.* 25.);

car si du point de contingence F on éleve une perpendiculaire sur la tangente CD, cette perpendiculaire passera par le centre (326) : donc elle sera un diamétre; mais ce diamétre sera aussi (302) perpendiculaire à la tangente AB parallele à la premiere CD: donc il aboutira (326) au point de contingence E: donc les deux tangentes paralleles seront perpendiculaires aux extrémités d'un même diamétre: or tout diamétre partage la circonférence en deux également (282): donc les arcs compris entre deux tangentes paralleles sont égaux.

Corollaire IV.

329. Les arcs de circonférence compris entre deux cordes paralleles, *par ex:* GH, IK, sont égaux: car l'arc EGIF=EHFK, comme nous venons de le prouver; donc retranchant d'une part les arcs EG & EH qui sont égaux (327), & retranchant de l'autre les arcs IF & KF, qui sont encore égaux (327), les restes, ou arcs GI & HK compris entre les deux cordes paralleles, seront égaux.

THÉORÊME IX.

330. *On ne peut mener qu'une seule Tangente à l'extrémité d'une même rayon.*

DÉMONST. La tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon: or à l'extrémité d'une ligne on ne peut mener (294) qu'une seule perpendiculaire: donc, &c.

Corollaire.

131. Donc par le point de contingence il n'est pas possible de faire passer entre la tangente & la circonférence aucune ligne droite; telle que AB (*fig.* 24.) Car cette ligne droite seroit oblique par rapport au rayon: donc menant du centre une perpendiculaire CH sur AB, on aura CH<CA: donc le point H sera en dedans du cercle, & par conséquent la ligne AB coupe la circonférence,

& ne passe pas entre la tangente & la circonférence.

Théorême X.

332. *Entre la tangente & la circonférence on peut faire passer par le point de contingence une infinité de Courbes*, (fig. 26.).

Démonst. Si l'on prolonge le rayon EC jusqu'en D, & que du point D comme centre; & de l'intervalle DE on décrive la courbe FEG, je dis que cette courbe passera entre la tangente & la circonférence, sans couper ni l'une ni l'autre; & que prolongeant toujours de même le rayon, on pourra décrire semblablement tant de courbes que l'on voudra.

I°. Elle ne coupera point la tangente, puisque le rayon DE de cette courbe est terminé au point de contingence.

II°. Elle ne coupera pas la circonférence; car si elle la coupoit: *par ex :* au point O, le point O devenant commun à la petite & à la grande circonférence, on auroit CE=CO: or cela n'est pas, mais plutôt on a CE<CO; car CE, & CO étant, par rapport à la grande circonférence, deux sécantes intérieures menées d'un même point pris au-dessous du centre D de cette circonférence: nous avons prouvé (314) que la ligne CE qui, prolongée, passeroit par le centre D, est plus courte que CO, qui n'y passeroit point: donc le point O est hors de la petite circonférence.

PARAGRAPHE II.

Des Angles.

Les angles ont une origine; ils peuvent être de différente qualité: ils sont susceptibles d'évaluation; c'est ce que nous allons faire voir.

Nombre I.

De l'Origine des Angles.

Hypothése I.

333. Si le rayon AD (*fig.* 27.) qui dans sa révolution décrit par son extrémité D une circonfé-

tence de cercle, est supposé laisser, par-tout où il passe, des traces, ou lignes AC, AB, AI, &c. deux de ces *traces*, ou *lignes*, ou *rayons* AC, AD, intercepteront un *espace*, laisseront une *ouverture*, auront entr'eux une *inclinaison*, que l'on peut évaluer & comparer.

DÉFINITIONS.

I.

334. Cet *espace*, cette *ouverture*, cette *inclinaison* plus ou moins grande, que laissent entr'eux deux rayons, ou lignes AC, AD, s'appelle *Angle*.

I I.

335. Les rayons AC, AD s'appellent les *Côtés* de l'angle; le point A où les côtés se rencontrent, s'appelle le *Sommet* de l'angle; l'arc CD compris entre les côtés & décrit du sommet A, pris comme centre, s'appelle la *Mesure* de l'angle.

I I I.

336. L'angle qui est mesuré par un arc qui est le quart de la circonférence, s'appelle *Angle droit*; tel est l'angle BAD (*fig.* 27.), ou ABC (*fig.* 28.).

I V.

337. L'angle qui est mesuré par un arc moindre que le quart de la circonférence, s'appelle *Angle aigu*; tel est l'angle CAD (*fig.* 27.), ou l'angle DEF (*fig.* 29.).

V.

338. L'angle qui est mesuré par un arc plus grand que le quart de la circonférence s'appelle *Angle obtus*; tel est l'angle IAD (*fig.* 27.), ou l'angle GHO (*fig.* 30.).

V I.

339. La différence d'un angle aigu avec l'angle droit s'appelle *complément* de cet angle, & sa différence avec deux angles droits, s'appelle *supplément* de cet angle; *par ex :* l'angle IAB (*fig.* 27.) est le complément de l'angle IAH, & l'angle IAD est son supplément: en général on appelle *complément* ou *supplément* d'un angle, ce qu'il faut lui ajouter

pour qu'il devienne égal ou à un angle droit, ou à deux angles droits.

Obſervez que lorſque l'angle eſt déſigné par trois lettres, la lettre du milieu déſigne toujours le ſommet de l'angle; & lorſqu'on déſigne l'angle par une ſeule lettre, on prend toujours celle qui déſigne le ſommet.

Hypothèse II.

340. Si dans la ligne AD (*fig.* 27.) ou bien dans la ligne CB (*fig.* 31.), tandis que l'extrémité B décrit une circonférence, vous ſuppoſez que les points O, E, & tant d'autres qu'il vous plaira, décrivent auſſi des circonférences; ces circonférences auront toutes le même centre C, & s'appellent par cette raiſon circonférences *concentriques.*

Corollaire I.

341. Toutes les lignes droites tirées du centre commun, & qui traverſeront les circonférences concentriques, opéreront dans ces circonférences, ou dans les arcs de ces circonférences, les mêmes diviſions, comme de moitié, de tiers, de quart, & de tant de parties ſemblables que l'on voudra; car le rayon CB dans ſa révolution a déſigné & marqué par ſon point E autant de parties dans la petite circonférence, qu'il en a déſignées par ſon extrémité B dans la grande circonférence, avec cette différence ſeulement, que ces parties ſont plus petites dans l'une, & plus grandes dans l'autre; mais elles ſeront toujours ſemblables.

Corollaire II.

342. Donc toute circonférence grande ou petite, peut être partagée en un égal nombre de parties ſemblables; car toutes les circonférences, grandes ou petites, ayant une courbure uniforme, peuvent toujours être ſuppoſées concentriques.

Corollaire III.

343. C'eſt pourquoi les Géométres ont diviſé

la circonférence du cercle, quel qu'il ſoit, en 360 parties égales, que l'on appelle *degrés ;* chaque degré en 60 parties égales, que l'on appelle *minutes ;* chaque minute en 60 *ſecondes ;* chaque ſeconde en &c. or l'angle eſt d'autant plus grand, ou plus petit, que l'arc compris entre ſes côtés contient plus ou moins de ces parties égales, *degrés* ou *minutes*, ou *ſecondes*, &c.

I°. L'angle droit eſt meſuré par le quart de la circonférence, c'eſt-à-dire, que ſa valeur eſt de 90 degrés.

II°. L'angle obtus eſt meſuré par un arc de circonférence plus grand que le quart, c'eſt-à-dire, que ſa valeur paſſe 90 degrés.

III°. L'angle aigu eſt meſuré par un arc moindre que le quart de la circonférence; c'eſt-à-dire, que ſa valeur eſt au-deſſous de 90 degrés.

Corollaire I V.

344. Chacun de ces arcs AB, IO, DE, (*fig.* 31.) compris entre les mêmes rayons, peut être indifféremment pris pour la meſure de l'angle ACB; car chacun de ces arcs contient un même nombre de degrés, puiſque les rayons CA, CB ont opéré les mêmes diviſions dans les circonférences concentriques.

Corollaire V.

345. D'où il ſuit que la *grandeur*, ou *quantité* de l'angle ne dépend ni de la longueur des côtés, ni de la grandeur de l'arc intercepté entre les côtés; mais ſeulement du nombre de degrés que contient l'arc, petit ou grand, compris entre ſes côtés, & décrit du ſommet de l'angle pris pour centre.

Corollaire V I.

346. Pour connoître la meſure d'un angle, *par ex :* CAD (*fig.* 23.), il faut concevoir qu'il a ſon ſommet au centre du cercle, & alors l'arc de circonférence CBD compris entre ſes côtés ſera ſa meſure.

Corollaire VII.

347. Tous les angles droits sont égaux, puisqu'ils sont mesurés chacun par le quart de la circonférence.

NOMBRE II.

De la Qualité des Angles.

La qualité des angles dépend de la position des lignes, par la rencontre desquelles ils sont formés.

THÉORÊME I.

348. *Une ligne droite qui est perpendiculaire sur une autre ligne droite, forme avec elle deux Angles, dont chacun est droit* (fig. 32.).

DÉMONST. La ligne CD, perpendiculaire sur AB, ne penche pas par conséquent plus d'un côté que de l'autre: donc l'angle CDA = CDB: or si du point D, comme centre, on décrit une circonférence; il est évident que les deux angles CDA + CDB sont mesurés par la demi-circonférence: donc chacun d'eux est mesuré par le quart de la circonférence: donc chacun de ces angles est droit, ou est = 90 degrés.

Corollaire I.

349. Si vous prolongez la ligne CD jusqu'en E (*fig.* 33.), alors les deux lignes CE, AB, formeront autour du point D quatre angles droits.

Corollaire II.

350. Si une ligne perpendiculaire coupe deux paralleles, elle opérera les mêmes effets, & formera les mêmes angles, & de la même maniere, sur la seconde parallele que sur la premiere: c'est pourquoi elle formera autour des deux points d'intersection huit angles droits (*fig.* 39.).

THÉORÊME II.

351. *Une ligne droite qui tombe obliquement sur une autre droite, forme avec elle deux Angles, l'un aigu, & l'autre obtus, dont la somme vaut deux angles droits* (fig. 34.).

DÉMONST. Si du point D, comme centre, on décrit une circonférence, il est évident que la somme me des angles CDA + CDB aura pour mesure la demi-conférence: donc cette somme vaudra 180 degrés, ou deux angles droits. Mais la ligne CD étant oblique, penche plus du côté de A que de B : donc on aura l'angle CDA < CDB : donc le premier sera aigu, & le second obtus.

Corollaire I.

352. Si vous prolongez la ligne CD pour avoir CE (*fig.* 35.), alors les deux lignes CE & BA formeront autour du point d'intersection D quatre angles, deux aigus & deux obtus, dont la somme vaudra quatre angles droits.

Corollaire II.

353. Dans le cas où deux lignes s'entrecoupent en un même point C (*fig.* 36.), les angles opposés au sommet C, *par ex :* les angles DCB, ACE, sont égaux; car si du sommet commun C, pris comme centre, on décrit une circonférence, l'arc DB, mesure de l'angle DCB, sera égal à l'arc AE, mesure de l'angle opposé : en effet l'arc EAD = ADB, parce qu'ils sont chacun la moitié de la circonférence : donc si l'on retranche de l'un & l'autre la portion commune AD, les restes seront égaux, c'est-à-dire, l'on aura AE = DB.

Corollaire III.

354. Si plusieurs lignes DC, FC, HC (*fig.* 37.) tombent sur un même point C d'une ligne BA, la somme de tous les angles formés autour du point C vaudra deux angles droits; car ils seront tous mesurés par la demi-circonférence du cercle qui seroit décrite du point C comme centre.

Corollaire IV.

355. Si vous prolongez les lignes DC, FC, HC (*fig.* 38.), pour avoir plusieurs lignes qui s'entrecoupent toutes au point C, la somme de tous les angles formés de part & d'autre autour du point C, vaudra quatre angles droits, car elle sera mesurée par la circonférence entiere.

THÉORÊME III.

356. *Une ligne droite qui traverse obliquement deux Paralleles, formera précisément les mêmes Angles sur la seconde Parallele que sur la premiere.*

C'est-à-dire, que tous les angles respectifs & *correspondans*, formés sur les deux paralleles par la ligne oblique & sécante, seront égaux (*fig.* 40.).

DÉMONST. Les angles correspondans sont ceux qui sont formés du même côté de la sécante, l'un en dedans, l'autre en dehors des paralleles, *par ex* : f & b, h & d : or l'on aura $f=b$, $h=d$, &c. Car ces angles sont formés par l'inclinaison de l'oblique sur les deux paralleles MO, NL : or l'inclinaison de l'oblique est la même sur les deux paralleles, parce qu'une ligne qui tombe obliquement sur l'une des paralleles, tombe dans le même degré d'obliquité sur l'autre parallele, donc elle y opere les mêmes effets, & y forme les mêmes angles.

Corollaire I.

357. Donc les angles *alternes internes* sont égaux entr'eux. Car les angles alternes internes sont ceux qui sont formés de différens côtés de la sécante entre les deux paralleles, l'un en bas, l'autre en haut ; *par ex* : f & c, e & d, &c. or on aura, *par ex* : $f=c$; car $f=b$, puisqu'ils sont correspondans, & $b=c$, parce qu'ils sont opposés au sommet : donc $f=c$.

Corollaire II.

358. Les Angles *alternes externes* sont aussi égaux entr'eux. Car les angles alternes externes sont ceux qui sont hors des paralleles & de différent côté de la sécante, l'un en haut, l'autre en bas ; *par ex* : h & a : or l'on a $h=a$; car $h=d$, parce qu'ils sont correspondans, & $d=a$, parce qu'ils sont opposés au sommet : donc $h=a$.

Corollaire III.

359. Dans ce même cas les angles *adjacens* valent deux angles droits. Car les angles adjacens sont ceux qui sont du même côté de la sécante

en dedans des paralleles; *par ex : f & d*, or on a la somme $f+d=180$ degrés, ou deux angles droits; car $f+h=180$ degrés (351), & $h=d$, parce qu'ils sont correspondans : donc $f+d=180$ degrés.

THÉORÊME IV.

360. *Réciproquement si les Angles correspondans, formés par une Sécante qui traverse deux lignes, sont égaux, ces deux lignes sont paralleles entr'elles* (fig. 40.).

DÉMONST. Par l'hypothèse les angles correspondans f & b sont égaux : donc ils sont formés par des lignes également inclinées sur la sécante AB : donc les lignes MO, NL, sont également inclinées sur la sécante AB, & par conséquent (307) elles sont paralleles entr'elles.

Corollaire.

361. De ce théorême on déduit toutes les propositions inverses des corollaires tirés du troisiéme théorême; sçavoir,

I°. Si les angles alternes internes sont égaux, les lignes traversées par la sécante seront paralleles; car par l'hypothèse $f=c$: or $c=b$ (353) : donc $b=f$; donc les angles correspondans b, f, sont égaux, & par conséquent les lignes MO, NL qui forment ces angles avec la sécante AB, sont paralleles entr'elles.

II°. Si les angles alternes externes sont égaux; les lignes traversées par la sécante seront paralleles; ce qui se prouve de la même maniere.

III°. Si les angles adjacens valent deux angles droits, les lignes traversées par la sécante seront encore paralleles; car par l'hypothèse $f+d=180$ degrés, ou deux angles droits : or (351) $d+b=180$ degrés : donc $f=b$: donc les angles correspondans f & b sont égaux, & par conséquent les lignes MO, NL, traversées par la sécante, sont paralleles.

NOMBRE III.

De l'Evaluation des Angles.

Evaluer un angle, c'est déterminer l'arc de circonférence qui lui ſert de meſure; c'eſt pourquoi pour évaluer un angle, il faut le conſidérer par rapport au cercle: or l'angle conſidéré par rapport au cercle peut avoir différentes poſitions & prend différens noms.

DÉFINITIONS.

I.

362. Un angle dont le ſommet eſt au centre, ou qui eſt formé par deux rayons, s'appelle *Angle central*; tel eſt l'angle CAD (*fig.* 42.).

II.

363. Un angle dont le ſommet eſt à la circonférence, & qui eſt formé par deux cordes, s'appelle *Angle inſcrit*; tel eſt l'angle CBD (*fig.* 42.). S'il eſt formé par une corde & une tangente, ou par une corde & une ſécante extérieure, il s'appelle angle du *Segment, par ex:* CAB (*fig.* 48.), & CBA (*fig.* 49.): s'il eſt formé par la circonférence & une tangente, il s'appelle angle de *Contingence*; tel eſt l'angle CEAB (*fig.* 48.).

III.

364. Un angle dont le ſommet eſt hors de la circonférence, s'appelle *Angle circonſcrit*: tels ſont les angles BAC (*fig.* 50.), DAE (*fig.* 51.), EAC, (*fig.* 52.).

IV.

365. Un angle dont le ſommet eſt en dedans de la circonférence, mais ailleurs qu'au centre, s'appelle angle *excentrique*; tel eſt l'angle DAE (*fig.* 53.).

Remarque.

366. L'angle *central* eſt toujours meſuré par l'arc de circonférence qu'il comprend entre ſes côtés; c'eſt pourquoi il n'y a nulle difficulté à l'évaluer. Mais lorſque l'angle a ſon ſommet ailleurs qu'au centre du cercle, alors il n'eſt pas meſuré par l'arc qu'il comprend entre ſes côtés; mais ſeulement par une portion de cet arc, & c'eſt cette portion qu'il faut déterminer, pour évaluer l'angle.

THÉORÊME I.

367. *L'angle de contingence est un angle infiniment petit.*

DÉMONST. La circonférence du cercle ne s'éloigne qu'infiniment peu de sa tangente au point de contingence: donc à ce point de contingence elle ne forme avec la tangente qu'un angle infiniment petit.

THÉORÊME II.

368. *L'Angle formé par le rayon, ou par le diamétre, avec la tangente, est un angle droit* (fig. 24, 25 & 26.).

DÉMONST. Car la tangente est perpendiculaire (324) à l'extrémité du rayon.

Corollaire.

369. Donc l'angle formé par le rayon, ou par le diamétre, avec la circonférence du cercle, est un angle droit; car il est égal à l'angle formé par le diamétre & la tangente, puisque l'un & l'autre ne différent entr'eux que de la quantité de l'angle de contingence, qui est une quantité infiniment petite.

On conclud de-là que tous les rayons & tous les diamétres sont perpendiculaires à la circonférence du cercle.

THÉORÊME III.

370. *L'Angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

DÉMONST. Il y a trois cas: ou bien l'un des côtés de l'angle passe par le centre (*fig.* 43.); ou bien les deux côtés interceptent le centre (*fig.* 44.); ou bien le centre est hors des deux côtés (*fig.* 45.).

1°. Si l'un des côtés passe par le centre, soit mené le diamétre FE, parallele au côté DA, & l'on aura l'angle inscrit DAB = FCB angle central, & qui lui est correspondant; donc ils ont même mesure: or la mesure de l'angle central FCB est l'arc FB, mais l'arc FB = AE = DF (329): donc l'arc FB = DF: donc l'arc FB, mesure de l'angle inſcrit, eſt la moitié de l'arc DFB, intercepté entre les côtés de l'angle inſcrit: donc, &c.

II°. Si les deux côtés interceptent le centre, ſoit mené du ſommet de l'angle le diamétre AF: or l'angle BAF aura pour meſure la moitié de l'arc BF, comme nous venons de le prouver. Par la même raiſon l'angle FAD a pour meſure la moitié de l'arc FD: donc la ſomme des angles BAF + FAD, ou l'angle total BAD aura pour meſure la moitié de la ſomme des arcs BF + FD = BD.

III°. Si le centre eſt hors des deux côtés, ſoit mené du ſommet de l'angle le diamétre AF, & l'angle FAD aura pour meſure la moitié des arcs FB + BD, comme il vient d'être prouvé: or l'angle FAB a pour meſure la moitié de l'arc FB: donc retranchant de la meſure de l'angle total celle de l'angle FAB, il reſtera pour meſure de l'angle BAD la moitié de l'arc BD.

Corollaire I.

371. L'angle *inſcrit* eſt ſous-double de l'angle *central*, appuyé ſur le même arc CD (*fig.* 42.): car l'angle central a pour meſure l'arc entier ſur lequel il eſt appuyé; au lieu que l'angle inſcrit n'a pour meſure que la moitié de ce même arc.

Corollaire II.

372. Donc l'angle A appuyé ſur le diamétre EB (*fig.* 46.), eſt un angle droit, puiſqu'il a pour meſure la moitié de la demi-circonférence ſur laquelle il eſt appuyé.

Corollaire III.

373. Donc tous les angles inſcrits A, B, C (*fig.* 47.), appuyés ſur le même diamétre, ſont tous égaux, puiſqu'ils ſont tous droits. En général tous les angles inſcrits, appuyés ſur un même arc, ſont égaux.

THÉORÊME IV.

374. *L'Angle du Segment formé par une corde & une*

tangente, a pour mesure la moitié de l'arc soutenu par la corde (fig. 48.).

Démonst. Ayant mené la ligne CD, parallele à la tangente AB, on aura (357) l'angle du segment BAC = ACD, angle inscrit : or la mesure de l'angle inscrit ACD est (370) la moitié de l'arc AD : mais l'arc AD = AC (327), donc la mesure de l'angle du segment est la moitié de l'arc AD, ou de l'arc AC soutenu par la corde.

En suivant les principes ci-dessus, il sera aisé de faire voir que l'angle du segment formé par une corde & une sécante extérieure, est mesuré par la demi-somme des arcs soutenus par la corde & par le prolongement de la sécante en dedans du cercle (*fig.* 49.).

Théorême V.

375. *L'Angle circonscrit a pour mesure la moitié de la différence des arcs concave & convexe, interceptés entre ses côtés.*

Démonst. Il y a trois cas : ou bien l'angle circonscrit est formé par deux tangentes (*fig.* 50.); ou par deux sécantes (*fig.* 51.) ; ou par une tangente & une sécante (*fig.* 52.).

I°. Dans le premier cas soit mené du point de contingence D la ligne DE, parallele à la tangente AB, & l'on aura (356) l'angle circonscrit BAC = EDC angle du segment : donc ils auront même mesure; or la mesure de l'angle du segment EDC est la moitié de l'arc ED; mais l'arc ED est la différence, ou l'excès de l'arc concave FED sur l'arc convexe FD ; car on a FED — FE = ED : or (327) FE = FD : donc FED — FD = ED : donc, &c.

II°. Dans le second cas soit menée du point B la ligne BC, parallele au côté AD, & l'on aura l'angle circonscrit DAE = CBE angle inscrit, & qui lui est correspondant : donc ils auront même mesure. Or l'angle inscrit CBE a pour mesure la moitié de l'arc CE, lequel est la différence des arcs concave & convexe ; car puisque DC=OB (329), il s'ensuit que DCE — OB = CE.

III°. Dans le troisiéme cas, soit menée du point B la ligne BD, parallele à la tangente AE, & l'on prouvera de la même maniere que la mesure de l'angle EAC est la moitié de l'arc DC = EDC — EB, différence entre les arcs concave & convexe.

Théorême VI.

376. *La Mesure de l'Angle excentrique est la moitié de la somme des arcs interceptés de part & d'autre, en dessus & en dessous entre ses côtés prolongés* (figures 53 & 54.).

Démonst. Ayant mené du point B la ligne BF, parallele au côté AE, on aura l'angle excentrique DAE = DBF angle inscrit & qui lui est correspondant : donc ils auront même mesure, sçavoir, la moitié de l'arc DEF : or puisque (329) EF = BG, il s'ensuit que l'arc DEF = DE + BG somme des arcs interceptés entre les côtés prolongés en-dessus & en-dessous.

ARTICLE II.

De l'Assortiment des Lignes ou des Figures.

I°. Deux lignes qui se rencontrent, forment un angle : pour former une figure, il faut au moins trois lignes, qui par leur rencontre renferment un espace.

II°. Ces lignes qui se rencontrent, s'appellent les côtés de la figure : ces côtés par leur inclinaison forment des *Angles* ; des angles & des côtés pris ensemble résultent les *Figures*.

III°. Les figures prennent différens noms suivant le nombre de leurs côtés.

Une figure de trois côtés s'appelle *Triangle*,
de quatre côtés, *Quadrilatere*,
de cinq côtés, *Pentagone*,
de six côtés, *Exagone*,
de sept côtés, *Eptagone*,
de huit côtés, &c. *Octogone*, &c.

En général toute figure qui a plus de trois côtés, s'appelle *Polygone ;* si elle a un nombre infini de côtés, elle s'appelle *Polygone infinitaire*, ou *Cercle.*

IV°. Comme toutes les lignes se rapportent à deux, sçavoir, à la ligne *droite*, & à la ligne *circulaire ;* de même toutes les figures peuvent se rapporter à deux, sçavoir, au *triangle*, & au *cercle ;* au *triangle*, en diminuant le nombre des côtés de la figure ; au *cercle*, en augmentant le nombre des côtés. Le triangle & le cercle sont donc les deux extrêmes de toutes les figures possibles, qui par cette raison participent, & des propriétés du triangle, & de celles du cercle. C'est pourquoi nous allons parler des figures : 1°. considérées par rapport au triangle : 2°. considérées par rapport au cercle.

PARAGRAPHE I.

Des Figures considérées par rapport au Triangle.

DÉFINITIONS.

I.

377. Le triangle prend différens noms suivant la qualité de ses côtés, & s'appelle,

s'il a les trois *côtés* égaux,	*Equilatéral*,
s'il a deux *côtés* égaux,	*Isocele*,
s'il a les trois *côtés* inégaux,	*Scalene.*

Voyez les figures 55, 56, 57.

I I.

378. Le triangle prend encore différens noms, suivant la qualité de ses angles, & s'appelle,

s'il a un angle droit,	*Rectangle*,
s'il a tous ses angles aigus,	*Acutangle*,
s'il a un angle obtus,	*Obtusangle*,

I I I.

379. Le quadrilatere prend aussi différens noms suivant la qualité de ses angles & de ses côtés, & s'appelle,

Parallélogramme, lorſqu'il a ſes côtés oppoſés paralleles (*fig.* 58.).

Trapeze, s'il n'a que deux côtés paralleles (*fig.* 59.).

Trapezoïde, s'il n'a aucun de ſes côtés paralleles.

Parallélogramme rectangle, ou ſimplement *Rectangle*, s'il a tous ſes angles droits, (*fig.* 60.).

Quarré, s'il a tous ſes angles & tous ſes côtés égaux (*fig.* 61.).

Lozange, ou *Rhombe* s'il a tous ſes côtés égaux, & ſeulement les angles oppoſés égaux (*fig.* 62.).

IV.

380. Dans une figure l'angle formé par l'inclinaiſon de deux côtés adjacens, s'appelle *Angle au périmétre*. L'angle formé par un côté & le prolongement du côté adjacent, s'appelle *Angle extérieur*. L'angle formé par deux lignes tirées du centre de la figure à deux angles adjacens du périmétre, s'appelle *Angle au centre*; & on appelle *Centre*, le point qui tient le juſte milieu dans la ſurface de la figure.

V.

381. Une ligne AC, ou AD (*fig.* 58 &c. 65.) tirée du ſommet d'un angle du périmétre, à l'un des angles oppoſés, s'appelle *Diagonale*.

THÉORÊME I.

382. *Les trois angles d'un triangle pris enſemble, valent deux Angles droits, ou* 180 *degrés* (fig. 63.).

DÉMONST. Si l'on fait paſſer une circonférence de cercle par les ſommets des trois angles du triangle CAB, ce qui eſt toujours poſſible (274); l'angle en A étant inſcrit, a pour meſure (370) la moitié de l'arc CB; l'angle en B par la même raiſon a pour meſure la moitié de l'arc CA; & l'angle en C a pour meſure la moitié de l'arc AB: donc la ſomme des trois angles a pour meſure la moitié de la circonférence entiere, ou 180 degrés; donc, &c.

Corollaire I.

383. Donc connoiſſant deux angles dans un triangle, il ſera facile de connoître le troiſiéme, parce qu'il ſera toujours le ſupplément des deux autres.

Corollaire II.

384. Donc un triangle ne peut pas avoir deux angles droits, encore moins deux angles obtus; car alors la ſomme des trois angles vaudroit plus de deux angles droits.

Corollaire III.

385. Lorſque deux angles d'un triangle ſont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troiſiéme angle eſt auſſi égal de part & d'autre.

Corollaire IV.

386. Les quatre angles à la circonférence du quadrilatere valent quatre angles droits; les cinq angles à la circonférence du pentagone valent ſix angles droits; les ſix angles à la circonférence de l'exagone valent huit angles droits, & ainſi du reſte (*fig.* 62, 64, 65.).

En général la ſomme des angles à la circonférence d'un polygone quelconque vaut autant de fois deux angles droits, ou 180 degrés, qu'il y a de côtés dans le polygone, moins deux. Car ſi d'un angle du polygone on mene des diagonales à tous les autres angles, ces diagonales formeront dans le polygone autant de triangles qu'il y a de côtes dans le polygone, moins deux côtés; & la ſomme des angles à la circonférence ne ſera pas diſtinguée de la ſomme des angles de ces triangles. Or la ſomme des angles dans chaque triangle vaut (382) deux angles droits: donc la ſomme des angles de tous ces triangles, & par conſéquent la ſomme des angles à la circonférence du polygone, vaut autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés dans le polygone, moins deux.

Corollaire V.

387. On peut dire aussi que la somme des angles à la circonférence du polygone vaut autant de fois deux angles droits, moins quatre, qu'il y a de côtés dans le polygone.

C'est pourquoi si l'on nomme s la somme des angles à la circonférence du polygone, r l'angle droit, n le nombre des côtés du polygone; la somme des angles à la circonférence sera représentée par cette formule générale,

$$s = 2rn - 4r.$$

THÉORÊME II.

388. *Dans un triangle l'Angle extérieur* ACD, *ou* d, *est égal aux deux Angles intérieurs opposés* o *&* m (*fig.* 66.).

DEMONST. Les deux angles intérieurs avec l'angle n valent deux angles droits, c'est-à-dire, $n + o + m = 180$ degrés (382): pareillement (351) $n + d = 180$ degrés: donc $n + d = n + o + m$: donc, retranchant de part & d'autre la quantité commune n, on aura $d = o + m$.

Corollaire I.

389. Dans un triangle tous les angles extérieurs pris ensemble valent quatre angles droits. Car chaque angle extérieur du triangle avec l'angle adjacent vaut (382) deux angles droits: donc les trois angles extérieurs avec les intérieurs valent tous ensemble six angles droits; donc si on en retranche deux angles droits, qui sont la valeur des angles intérieurs, il restera quatre angles droits pour la valeur des angles extérieurs.

Corollaire II.

390. Tous les angles extérieurs à la circonférence du polygone pris ensemble valent quatre angles droits (*fig.* 67, 68, 69,) car la somme des angles, tant intérieurs qu'extérieurs du polygone, vaut autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés dans le polygone, c'est-à-dire qu'elle est

$$s = 2rn;$$

d'où, si l'on retranche $2rn - 4r$, qui est la valeur des angles intérieurs, on aura

$$s = 2rn - 2rn + 4r = 4r,$$

pour la valeur des angles extérieurs.

Corollaire III.

391. Donc si l'on divise le polygone en triangles, non par des diagonales, comme ci-dessus; mais par des rayons tirés du centre à chaque angle de la circonférence, la somme des angles extérieurs sera égale à la somme des angles formés autour du centre (*fig.* 69.): car chacune de ces sommes est égale à quatre angles droits.

THÉORÊME III.

392. *Dans un Triangle le plus grand Angle est opposé au plus grand côté; le plus petit Angle, au plus petit côté* (fig. 46.).

DÉMONST. Si l'on inscrit le triangle à un cercle, il est évident que le plus grand angle A sera appuyé sur un plus grand arc, lequel sera soutenu par une plus grande corde EB, laquelle est le côté opposé à l'angle A: on prouve de même que le plus petit angle est opposé au plus petit côté.

Corollaire I.

393. Donc dans un triangle les angles opposés à des côtés égaux, sont égaux, & réciproquement: car le triangle étant inscrit à un cercle, les angles égaux sont appuyés sur des arcs égaux, lesquels seront soutenus par des cordes égales, lesquelles seront les côtés opposés aux angles égaux.

Corollaire II.

394. Donc dans le triangle *équilatéral* les trois angles sont égaux: dans le triangle *isocele* les deux angles sur la base sont égaux: dans le triangle *scalene* les trois angles sont inégaux.

THÉORÊME IV.

395. *Dans un triangle isocele*, par ex: CAD (fig. 73.) *une perpendiculaire, menée du sommet sur la base,*

divise en deux également ; 1°. la base ; 2°. l'angle compris entre les côtés égaux.

DÉMONST. Si du sommet A, où se réunissent les deux côtés égaux, & de l'intervalle AC, ou AD, on décrit une circonférence de cercle, il est évident que la base DC du triangle isocele sera une corde du cercle, & que la perpendiculaire AN, menée du sommet du triangle sur cette base, sera une perpendiculaire menée du centre du cercle sur une corde : donc (319) elle divisera en deux également ; 1°. la corde DC, laquelle est base du triangle isocele ; 2°. l'arc CND, qui est la mesure de l'angle DAC, & par conséquent l'angle DAC sera lui-même divisé en deux également.

Ce que nous venons de démontrer du triangle isocele, convient à plus forte raison au triangle équilatéral.

THÉORÊME V.

396. *Si dans un triangle quelconque on tire une Ligne parallele à la base du triangle, les Angles respectifs, ou correspondans, formés sur les deux bases paralleles, seront égaux* (fig. 70.).

DÉMONST. L'angle en D est égal à l'angle en B, parce qu'ils sont correspondans (356) : par la même raison l'angle en E est égal à l'angle en C : donc, &c.

Remarque.

397. La proposition inverse est aussi vraie ; c'est-à-dire, que, si les angles formés sur les deux bases sont égaux, ces bases sont paralleles : car les angles en D & B sont correspondans, parce qu'ils sont formés du même côté de la sécante AB : or ils sont égaux par l'hypothèse : donc les lignes DE, BC sont également inclinées sur la sécante ; donc elles sont paralleles.

Corollaire.

398. Ayant mené dans un triangle une ligne parallele à la base, on aura deux triangles, l'un plus grand, & l'autre plus petit, tels que tous les an-

gles de l'un feront égaux aux angles correfpondans de l'autre (*fig.* 70.) comme il eft évident. Ces triangles ADE, ABC s'appellent triangles *équiangles*.

Hypothèse.

399. Si dans le petit triangle DAE, on fuppofe que les côtés AD, AE, viennent à s'allonger, & que la bafe DE defcende parallelement à elle-même, jufqu'à ce qu'elle fe confonde avec la bafe BC, alors les deux triangles non-feulement font *équiangles*, mais font auffi égaux; puifqu'alors les deux triangles ne font point diftingués l'un de l'autre, mais qu'ils conviennent parfaitement l'un avec l'autre.

Remarque I.

400. Le cas où deux triangles pofés l'un fur l'autre, conviennent parfaitement, s'appelle *Superpofition*: or toutes les fois que la fuperpofition eft poffible, on conclud l'égalité des deux triangles.

Remarque II.

401. De fix chofes qui font dans le triangle, fçavoir, trois angles & trois côtés, il fuffit d'en confidérer cinq, fçavoir, trois côtés & deux angles, parce que deux angles étant donnés dans un triangle (383) le troifiéme eft auffi donné.

THEORÊME VI.

402. *Deux triangles* ACB, *acb* (fig. 71.) *qui ont tous leurs côtés homologues égaux, font égaux entr'eux.*

DEMONST. Des points A & B, comme centres, décrivez les arcs DCE, FCG, qui fe coupent au fommet C; fi vous pofez le côté *ab* fur le côté AB, le point *a* tombera fur le point A, & le point *b* fur B, à caufe de *ab* = AB: or à caufe de *ac* = AC le côté *ac* aboutira quelque part dans l'arc DCE; & pareillement à caufe de *bc* = BC, la ligne *bc* aboutira quelque part dans l'arc FCG: mais les côtés *ac*, *bc* fe réuniffent à un même point : donc ils aboutiront tous deux au même point C, interſection des deux arcs ; donc les côtés *ac*, *bc* du triangle *abc* conviendront parfaitement avec les côtés AC, BC de l'autre triangle, & par conſéquent tout le triangle *abc* conviendra parfaitement avec tout le triangle ABC : donc on aura *abc* = ABC.

Théorême VII.

403. *Deux triangles qui ont deux angles égaux de part & d'autre, & le côté compris entre ces angles égaux, égal de part & d'autre, ſont égaux entr'eux* (fig. 71.).

Demonst. Soit l'angle A = *a*, l'angle B = *b*, & le côté AB = *ab*, il eſt évident, ſi vous poſez le côté *ab* ſur AB, qu'à cauſe de l'égalité des angles en A & *a*, en B & *b*, le côté *ac* tombera ſur AC, & *bc* ſur BC ; donc ils ſe réuniront au même point C : donc tout le triangle *abc* conviendra parfaitement avec tout le triangle ABC : donc on aura *abc* = ABC.

Théorême VIII.

404. *Deux triangles qui ont deux côtés égaux, & l'angle compris entre ces côtés, égal de part & d'autre, ſont égaux entr'eux* (fig. 71.).

Demonst. Soit le côté AC = *ac*, le côté BC = *bc*, & l'angle C = *c* ; ſi vous poſez le côté AC ſur *ac*, & BC ſur *bc*, ces côtés tomberont exactement les uns ſur les autres à cauſe de l'angle C = *c* ; & parce qu'ils ſont ſuppoſés égaux, le point *a* tombera ſur le point A, & *b* ſur B : donc le côté *ab*, qui meſure la diſtance des points *a* & *b*, ſera égal & tombera exactement ſur AB : donc le triangle *abc* conviendra parfaitement avec le triangle ABC : donc on aura *abc* = ABC.

Théorême IX.

405. *Deux triangles qui ont deux côtés égaux, & un angle oppoſé à l'un de ces côtés égal de part & d'autre, ſont égaux, pourvu que le ſecond angle op-*

posé à l'autre côté soit de même espéce de part & d'autre (fig. 72.).

DEMONST. Soit le côté ab = AB, le côté ac = AC, & l'angle b = B; si les angles c, C, opposés aux autres côtés égaux ab, AB, sont de même espéce, ou tous deux aigus, ou tous deux obtus, je dis que les deux triangles seront égaux. Posez le point b sur le point B, & le côté ab sur AB; les deux côtés ab, AB conviendront parfaitement, puisqu'ils sont égaux; & la base bc tombera sur BC, à cause de l'angle b = B; mais de plus le point c tombera sur le point C; car ayant mené la perpendiculaire AD, la ligne AC tombera du même côté de la perpendiculaire que la ligne ac, à cause des angles en c & C de même espéce. En effet si la ligne AC tomboit de l'autre côté de la perpendiculaire, & devenoit AE, alors l'angle en E seroit obtus, & par conséquent ne seroit plus de même espéce que l'angle en c: donc les lignes ac, AC tomberont du même côté de la perpendiculaire AD: mais ces deux lignes sont des obliques égales, menées d'un même point A; donc (297) elles ont même éloignement de perpendicule, & par conséquent le point c tombera sur le point C.

Corollaire I.

406. Donc des cinq choses que l'on peut considérer dans un triangle, sçavoir, trois côtés & deux angles, si trois d'une part sont égales aux trois correspondantes de l'autre part, la *superposition* des triangles sera possible, & l'on pourra conclure que les deux triangles seront parfaitement égaux.

Corollaire II.

407. Deux figures quelconques, qui peuvent être partagées en un même nombre de triangles égaux, sont dès-lors égales.

PARAGRAPHE II.

Des Figures considérées par rapport au Cercle.

Les figures considérées par rapport au cercle ; sont les figures considérées en tant qu'elles ont un *centre* & un *périmétre*, ou *circonférence* autour de ce centre, & des propriétés relatives à ce centre & à cette circonférence.

DÉFINITIONS.

I.

408. Une figure est dite *inscrite* dans un cercle, lorsque tous ses angles ont leur sommet à la circonférence du cercle. Elle est dite *circonscrite*, lorsque tous ses côtés touchent la circonférence du cercle.

II.

409. Une figure est dite être *réguliere*, lorsque tous ses côtés sont égaux, & que tous ses angles sont égaux.

Corollaire I.

410. Puisque dans une figure réguliere tous les angles sont égaux, il s'ensuit qu'on trouvera la valeur de l'angle à la circonférence, en divisant la somme des angles par le nombre des angles. C'est pourquoi appellant x l'angle à la circonférence, & la somme des angles à la circonférence étant (387) $2rn - 4r$, on aura $x = \frac{2rn - 4r}{n}$.

Corollaire II.

411. Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés ; *par ex :* deux exagones réguliers sont toujours *équiangles*. Car la somme des angles est la même dans l'un & l'autre exagone, savoir, de huit angles droits : or dans chaque exagone les six angles sont égaux entr'eux, puisque l'un & l'autre exagone est régulier : donc chacun des angles est la sixiéme partie de huit angles droits dans l'un & l'autre exagone : donc les angles de l'un

ſont égaux aux angles de l'autre, c'eſt-à-dire, que les deux polygones ſont équiangles.

THÉORÊME I.

412. *Si dans un Polygone régulier on tire du ſommet des angles des Lignes* DA, FA, HA (fig. 69.), *qui partagent chacun de ſes angles en deux également, ces Lignes priſes du ſommet juſqu'au point de rencontre, ſeront toutes égales entr'elles.*

DEMONST. I°. On aura la ligne DA = FA; car l'angle total en D eſt égal à l'angle total en F, puiſque le polygone eſt ſuppoſé régulier : donc l'angle *n*, qui eſt la moitié du premier, eſt égal à l'angle *o*, qui eſt la moitié du ſecond : donc dans le triangle DAF les deux côtés DA & FA ſont (393) égaux.

II°. Dans le triangle AFH on a par la même raiſon que ci-deſſus l'angle *m* = *r* : donc (393) on aura le côté FA = HA.

III°. On prouvera la même choſe & de la même maniere pour toutes les autres lignes IA, KA, &c.

Corollaire I.

413. Le point A eſt appellé le *centre* du polygone; & les lignes tirées de ce centre aux ſommets des angles du polygone s'appellent *rayons obliques*, leſquels ſont tous égaux entr'eux, comme on vient de le prouver.

Corollaire II.

414. Si du centre du polygone on tire des perpendiculaires; *par ex :* AM, AN, (*fig.* 73.) ſur les côtés, ces perpendiculaires s'appellent *rayons droits :* or tous les rayons droits ſont auſſi égaux entr'eux; car prenant deux rayons droits menés ſur deux côtés adjacens, ils formeront avec le rayon oblique deux triangles rectangles MAC, CAN, qui ſont évidemment égaux entr'eux.

Corollaire III.

415. Dans un polygone régulier le rayon oblique, *par ex :* AF (*fig.* 69.), partage l'angle à la cir-

conférence, sçavoir, l'angle HFD en deux parties égales; cela est évident par la construction (412).

Corollaire IV.

416. Donc l'angle du centre est supplément de l'angle à la circonférence du polygone; car dans le triangle DAF, l'angle A au centre est supplément (382) des deux angles $o+n$: or dans le polygone régulier $o+n=$FDC angle à la circonférence, puisque chaque angle à la circonférence est partagé en deux parties égales par le rayon: donc, &c.

Corollaire V.

417. Donc l'angle au centre est égal à l'angle extérieur du polygone régulier; car l'un & l'autre sont supplémens d'un même angle, savoir, de l'angle à la circonférence du polygone.

Corollaire VI.

418. Dans le polygone régulier le rayon droit divise l'angle au centre, savoir l'angle CAD (*fig.* 73.) & le côté du polygone opposé à cet angle, en deux également; car le triangle DAC est isocele: donc (395) la perpendiculaire ou le rayon droit AN divise en deux également, & l'angle DAC & le côté DC.

THÉORÊME II.

419. *Tout polygone régulier donné, peut être inscrit à un cercle* (fig. 73 & 75.).

DEMONST. Car, puisque tous les rayons obliques sont égaux, si du centre du polygone, & de l'intervalle d'un rayon oblique on décrit une circonférence, elle passera par tous les sommets des angles & le polygone sera inscrit au cercle.

Corollaire.

420. De tous les polygones réguliers inscrits à un même cercle, celui qui aura le plus de côtés, aura un plus grand périmétre; car plus le polygone aura de côtés, plus son périmétre approchera de

la circonférence du cercle, qui eſt plus grande qu'aucun des polygones inſcrits.

THÉORÊME III.

421. *Tout polygone régulier donné, peut être circonſcrit à un cercle* (fig. 74 & 75.).

DEMONST. Car, puiſque tous les rayons droits ſont égaux, ſi du centre du polygone, & de l'intervalle d'un rayon droit, on décrit une circonférence, tous les côtés du polygone toucheront la circonférence, & le polygone ſera circonſcrit.

Corollaire.

422. De tous les polygones réguliers circonſcrits à un même cercle, celui qui aura le plus de côtés, aura un plus petit périmétre; car plus le polygone aura de côtés, plus ſon périmétre approchera de la circonférence du cercle, qui eſt plus petite qu'aucun des polygones circonſcrits.

THÉORÊME IV.

423. *Dans l'Exagone régulier inſcrit, le côté eſt égal au Rayon oblique, ou au Rayon du cercle* (fig. 73.).

DEMONST. Dans le triangle BAC, l'angle A au centre eſt de 60 degrés, parce qu'il eſt ſupplément de l'angle à la circonférence (416) lequel dans l'exagone régulier eſt de 120 degrés; les deux angles ſur la baſe BC ſont égaux, puiſqu'ils ſont chacun la moitié de l'angle à la circonférence, & ſont par conſéquent chacun de 60 degrés: donc dans le triangle BAC tous les angles ſont égaux: donc le triangle BAC eſt équilatéral (393) donc le côté BC = AB rayon oblique du polygone.

Corollaire I.

424. Mais dans les polygones pris au-deſſous de l'exagone le côté eſt plus grand que le rayon, & l'excès du côté ſur le rayon ſera d'autant plus grand, que le polygone aura moins de côtés: car ſi l'on inſcrit à un même cercle tous les polygones réguliers qui ſont au-deſſous de l'exagone, moins le polygone a de côtés, plus ſon côté ſurpaſſera

celui de l'exagone, lequel eſt égal au rayon du cercle.

Corollaire II.

425. Par une raiſon contraire dans les polygones pris au-deſſus de l'exagone, le côté eſt plus petit que le rayon, & l'excès du rayon ſur le côté ſera d'autant plus grand, que le polygone aura plus de côtés.

THÉORÊME V.

426. *Dans le triangle équilatéral le Rayon oblique eſt double du rayon droit* (fig. 76.).

DEMONST. Soit le triangle équilatéral DEF inſcrit & circonſcrit à des cercles décrits du centre commun C: le rayon droit CB eſt perpendiculaire au côté, ou à la corde EF: donc la corde EF eſt auſſi perpendiculaire ſur le rayon droit. Mais ayant mené les cordes égales EA, AF, ces cordes ſeront les côtés d'un exagone régulier: donc (423) elles ſeront chacune égales au rayon: donc CE = EA: donc dans la perpendiculaire EF le point E eſt également diſtant des points C & A, donc auſſi (290) le point B ſera également diſtant des points C & A: donc on aura CB = BA, c'eſt-à-dire, que le rayon oblique CE, ou CA, eſt double du rayon droit CB.

Corollaire I.

427. Dans le quarré, dans le pentagone, dans l'exagone, &c. régulier, le rayon oblique eſt moins que double du rayon droit. En général plus le polygone aura de côtés, plus la différence entre le rayon oblique & le rayon droit ſera petite; car plus le polygone aura de côtés, moins la circonférence inſcrite à ce polygone différera de la circonférence circonſcrite au même polygone, & par conſéquent la différence de leurs rayons ſera plus petite; or les rayons de ces circonférences ſont le rayon oblique & le rayon droit du polygone: donc, &c.

Corollaire II.

428. Donc dans le polygone *infinitaire*, ou dans le cercle, les rayons obliques ſont égaux aux rayons droits; ou ce qui eſt le même, tous les rayons ſont égaux: car plus le nombre des côtés du polygone eſt grand, plus la différence entre le rayon oblique & le rayon droit ſera petite, comme nous venons de le voir: donc le nombre des côtés dans le cercle étant infini, la différence entre le rayon droit & le rayon oblique ſera infiniment petite ou nulle.

ARTICLE III.

Du Rapport des Lignes.

Les poſitions ſemblables des lignes, les diviſions faites ſemblablement dans les lignes, mettent entr'elles des rapports, des proportions, des proportionnalités, dont la connoiſſance fait découvrir dans les figures pluſieurs propriétés. Ces lignes s'appellent *proportionnelles*, & les figures à qui elles appartiennent, s'appellent *figures ſemblables*. Nous allons parler, 1°. des lignes proportionnelles; 2°. des figures ſemblables.

PARAGRAPHE I.

Des Lignes proportionnelles.

DÉFINITIONS.

I.

429. On appelle lignes *proportionnelles* des lignes, *par ex:* A, B, *a*, *b*, qui ſont telles, que la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſiéme eſt à la quatriéme, ou que A : B :: *a* : *b*.

II.

430. Deux lignes ſont dites être *réciproquement* proportionnelles à deux autres, lorſqu'elles ſont entr'elles comme les deux autres priſes dans un ordre renverſé; *par ex:* lorſqu'au lieu de A : B :: *a* : *b*, on a au contraire A : B :: *b* : *a*.

III.

431. Deux lignes ſont dites être *réciproques* à

deux autres, lorſque les deux premieres ſont les extrêmes d'une proportion, dont les deux dernieres ſont les moyens, ou lorſqu'on a A : *a* :: *b* : B.

IV.

432. Une ligne eſt dite diviſée en *moyenne* & *extrême raiſon*, lorſqu'elle eſt diviſée de façon que la toute A eſt à ſa grande partie B, comme la grande partie B eſt à la plus petite C, ou, ce qui eſt le même lorſque la plus grande partie eſt moyenne proportionnelle entre la ligne entiere A & la plus petite partie C, ou qu'on a A : B :: B : C, ou ÷ A : B : C.

V.

433. On appelle *Médiane* la plus grande partie B d'une ligne A diviſée en moyenne & extrême raiſon. On l'appelle *médiane*, parce qu'elle eſt moyenne proportionnelle entre la ligne entiere A & la plus petite partie C.

THÉORÊME I.

434. *Si deux lignes telles que* AB & CD (fig. 77.) *compriſes entre deux paralleles, ſont coupées par une, ou plusieurs paralleles intermédiaires, les portions correſpondantes dans les deux lignes ſeront* 1°. *proportionnelles aux lignes totales ;* 2°. *proportionnelles entr'elles.*

DEMONST. I. Partie. Les portions correſpondantes ſeront proportionnelles aux lignes totales, parce qu'elles ſont ſemblablement diviſées; car ſi AE eſt le tiers, ou le quart de la ligne totale AB ; CF ſera auſſi le tiers, ou le quart de la ligne totale CD: donc les portions correſpondantes ſeront des parties ſemblables des lignes totales : donc elles ſeront entr'elles comme les lignes totales ; c'eſt pourquoi l'on aura les proportions,

AE : CF :: AB : CD;
EG : FH :: AB : CD.

DEMONST. II. Partie. Les parties correſpondantes ſeront proportionnelles entr'elles : car puiſqu'elles

qu'elles ſont proportionnelles aux lignes totales, & que l'on a AE : CF :: AB : CD,
EG : FH :: AB : CD;
il s'enſuit que l'on aura
AE : CF :: EG : FH.

Corollaire I.

435. Si deux lignes *eb*, *fd*, compriſes entre deux paralleles, ſont autant inclinées que deux autres lignes AB, CD, compriſes auſſi entre deux paralleles (*fig.* 77.), les deux premieres ſeront proportionnelles aux deux autres: car prenant ſur la ligne AB la portion AI=*eb*, & menant la parallele OP, on aura CK=*fd*, parce que CK & *fd* ſont également inclinées dans des eſpaces paralleles égaux, & ſont par conſéquent (310) égales: or nous venons de prouver que les portions AI, CK ſont proportionnelles aux lignes totales AB, CD, ou que
AI : CK :: AB : CD;
donc à la place de AI, CK, mettant leurs égales, *eb*, *fd*, on aura *eb* : *fd* :: AB : CD.

Corollaire II.

436. Si deux lignes ſe coupent entre deux paralleles, les parties de l'une ſeront proportionnelles aux parties de l'autre (*fig.* 78.) car ayant tiré par le point d'interſection E une ligne parallele aux deux autres AB, CD, les portions EC, ED ſont autant inclinées dans leur eſpace parallele, que les portions EB, EA le ſont dans le leur, puiſque ce ſont les mêmes lignes continuées: donc, &c.

THÉORÊME II.

437. *Si les deux côtés d'un Triangle ſont diviſés par une, ou pluſieurs lignes paralleles à la baſe, ils ſeront diviſés en parties proportionnelles* (fig. 79.).

DÉMONST. Faiſant paſſer par le ſommet de l'angle A une ligne GH, parallele aux baſes *ed*, BC, les deux côtés AB, AC du triangle doivent être alors regardés comme deux lignes compriſes entre deux paralleles, & qui ſont coupées par une ou pluſieurs paralleles intermédiaires en parties proportionnelles entr'elles & aux lignes totales.

THÉORÊME III.

438. *Si deux Triangles, l'un plus grand & l'autre plus petit, ſont équiangles, tous les côtés de l'un ſeront proportionnels aux côtés homologues de l'autre* (fig. 79 & 80.).

DÉMONST. En effet :

I°. Si l'on poſe le ſommet *a* du petit triangle ſur le ſommet A du grand triangle, alors les côtés du petit triangle ſeront couchés ſur les côtés du grand à cauſe de l'angle $a=A$, & la baſe *ed* du petit triangle ſera parallele à la baſe BC du grand (397.) : or dans ce cas ſi l'on fait paſſer par le ſommet commun A une ligne GH parallele à la baſe, les côtés AB, AC du grand triangle ſeront diviſés aux points *e*, *d*, par une ligne parallele à la baſe : donc (437) ils ſeront diviſés en parties proportionnelles, c'eſt-à-dire, que l'on aura $Ae : Ad :: AB : AC$, dans laquelle proportion les côtés du petit triangle ſe trouvent proportionnels aux côtés homologues du grand triangle.

II°. Si l'on poſe le point *d* pris comme ſommet du petit triangle ſur le ſommet C du grand triangle, il eſt clair, par la même raiſon que ci-deſſus, que les côtés du petit triangle ſeront couchés ſur les côtés du grand, & que la baſe *ae* du petit triangle ſera parallele à la baſe du grand, & par conſéquent on prouvera, comme ci-deſſus, que l'on a

$$da : de :: CA : CB;$$

& par conſéquent les trois côtés du petit triangle ſont proportionnels aux trois côtés homologues du grand.

Corollaire I.

439. Si deux cordes AD, CB ſe coupent dans un cercle, les parties de l'une ſeront réciproques aux parties de l'autre (*fig.* 81.). En effet ayant mené les lignes AB, CD, on aura deux triangles AEB,

CED, qui seront équiangles; car les angles opposés au sommet E sont égaux (353); de plus les angles aux points D & B sont aussi égaux, parce qu'ils sont appuyés sur le même arc CA; par la même raison les angles aux points A & C sont égaux: donc les deux triangles CED, AEB sont équiangles: donc (438) les côtés homologues sont proportionnels, & l'on aura

CE : AE :: ED : EB,

dans laquelle proportion les parties CE, EB d'une corde sont réciproques aux parties AE, ED de l'autre.

Corollaire II.

440. Si l'une des cordes étoit diamétre, alors les portions, ou segmens du diamétre seroient réciproques aux portions, ou segmens de la corde.

Corollaire III.

441. Si la corde DE (*fig.* 82.) étoit perpendiculaire au diamétre AC, alors la portion DB ou BE de la corde, seroient moyenne proportionnelle entre les deux segmens du diamétre; car par le corollaire précédent on a

AB : BD :: BE : BC:

or la corde étant perpendiculaire au diamétre, on a (319) BD = BE: donc on aura

AB : BD :: BD : BC, ou ∺ AB : AD : BC.

Corollaire IV.

442. Dans un cercle une ligne quelconque BD (*fig.* 85.) tirée d'un point de la circonférence perpendiculairement sur le diamétre est moyenne proportionnelle entre les deux segmens AD, DC du diamétre; car cette perpendiculaire est la moitié d'une corde perpendiculaire au diamétre.

Corollaire V.

443. Si deux sécantes extérieures EB, EC, (*fig.* 83.) partant d'un même point, vont se terminer à la circonférence concave du cercle; les parties extérieures des sécantes seront réciproquement

I 2

proportionnelles aux sécantes entieres, c'est-à-dire, que l'on aura EB : EC :: ED : EA : car ayant mené les cordes AC, BD, les triangles EBD, EAC seront équiangles; ayant l'angle en E commun, & les angles en B & C appuyés sur le même arc AD : donc (438) les côtés homologues sont proportionnels, & l'on aura EB : EC :: ED : EA, dans laquelle proportion les parties extérieures EA, ED sont réciproquement proportionnelles aux sécantes entieres EB, EC.

THÉORÊME V.

444. *Dans tout Triangle rectangle, si l'on abbaisse du sommet de l'angle droit une perpendiculaire sur le côté opposé* (que l'on appelle Hypothénuse), *on aura trois lignes moyennes proportionnelles;* (fig. 84.).

I°. *Le grand côté* BC *entre l'hypothénuse entiere* AC, *& le segment adjacent* DC, *c'est-à-dire, que l'on aura* ÷ AC : BC : DC.

II°. *Le petit côté* BA *entre l'hypothénuse entiere* AC *& le segment adjacent* AD : *c'est-à-dire, que l'on aura* ÷ AC : AB : AD.

III°. *La perpendiculaire* BD *entre les deux segmens* AD *&* DC, *c'est-à-dire, que l'on aura* ÷ AD : BD : DC.

DÉMONST. I. Partie. Le petit triangle ABD & le grand triangle ABC sont équiangles; car ils ont chacun un angle droit, & de plus l'angle en A est commun à l'un à & l'autre : donc le troisiéme angle est aussi égal de part & d'autre, savoir, l'angle $o = r$: donc les côtés homologues sont proportionnels, & on aura la proportion, l'hypothénuse AC du grand triangle est à l'hypothénuse AB du petit triangle, comme le petit côté AB du grand triangle est au petit côté AD du petit triangle, ou

AC : AB :: AB : AD, ou ÷ AC : AB : AD.

DÉMONST. II. Partie. Le moyen triangle BDC & le grand triangle ABC sont équiangles; car ils ont chacun un angle droit, & de plus l'angle en C eſt commun à l'un & à l'autre: donc le troiſiéme angle eſt auſſi égal de part & d'autre, ſavoir, l'angle $e=m$: donc les côtés homologues ſont proportionnels: donc on aura la proportion, l'hypothénuſe AC du grand triangle eſt à l'hypothénuſe BC du moyen triangle, comme le grand côté BC du grand triangle eſt au grand côté DC du moyen triangle, ou

AC : BC :: BC : DC, ou ∺ AC : BC : DC.

Démonst. III. Partie. Le petit triangle ABD & le moyen triangle BDC ſont équiangles; car ils ont chacun un angle droit; de plus l'angle $o=r$, & l'angle $e=m$: donc les côtés homologues ſont proportionnels: donc le petit côté AD du petit triangle eſt à ſon moyen côté BD, comme le petit côté BD du moyen triangle eſt à ſon moyen côté DC, ou

AD : BD :: BD : DC, ou ∺ AD : BD : DC.

PARAGRAPHE II.

Des Figures ſemblables.

I°. L'égalité des figures dépend de l'égalité & des angles reſpectifs & des côtés correſpondans; mais leur ſimilitude dépend de l'égalité des angles reſpectifs & de la proportionnalité des côtés homologues: on appelle donc figures ſemblables celles qui ont tous leurs angles reſpectifs égaux, & tous leurs côtés homologues proportionnels.

II°. Dans les figures ſemblables il y a trois choſes, égalité, proportionnalité & ſimilitude: l'*égalité* tombe ſur les angles; la *proportionnalité* ſur les côtés; la *ſimilitude* ſur les figures.

III°. La ſimilitude des figures a des ſignes qui la font reconnoître, & des rapports qui en réſultent. Nous en allons parler.

Nombre I.

Des Signes de Similitude dans les Figures.

Deux figures ſont ſemblables toutes les fois que par le moyen de rayons, ou de diagonales, ou de lignes quelconques semblablement tirées, elles peuvent être partagées en un égal nombre de triangles semblables ; car deux quantités qui peuvent être divisées en un même nombre de parties semblables, sont semblables entr'elles. Il est donc nécessaire ici de bien remarquer quels sont les signes, ou les marques qui font reconnoître si deux triangles sont semblables, ou non.

THÉORÊME I.

445. *Deux triangles équiangles sont toujours semblables.*

DEMONST. Deux triangles équiangles ont tous leurs angles respectifs égaux, comme il est évident, & tous leurs côtés homologues proportionnels, comme nous l'avons prouvé (438) : donc ils sont semblables.

Corollaire.

446. Deux triangles qui ont deux angles égaux de part & d'autre, sont dès-lors semblables ; car lorsqu'ils ont deux angles égaux de part & d'autre, le troisiéme angle (385) est aussi égal de part & d'autre, & par conséquent les triangles sont équiangles, & dès-lors semblables.

THÉORÊME II.

447. *Deux Triangles abc*, ABC, *qui ont leurs trois côtés homologues proportionnels, sont dès-lors semblables* (fig. 86.).

DEMONST. Sur le côté AB du grand triangle prenez A*d* = *ab*, & menez *do* parallele à BC, & vous aurez (398) le triangle A*do* équiangle, & par conséquent (445) semblable au triangle ABC : or le triangle *abc* = A*do*. Car par la construction on a A*d* : AB :: A*o* : AC :: *do* : BC, & par l'hypothèse on a *ab* : AB :: *ac* : AC : *bc* : BC ; mais puisque dans ces deux proportionnalités les conséquens sont les mêmes de part & d'autre, il est évident que l'on pourra conclure *ab* : A*d* :: *ac* : A*o* :: *bc* : *do* ; or par la construction *ab* = A*d* : donc aussi *ac* = A*o*, & *bc* = *do* : donc le triangle *abc* = A*do*, & eſt par conſéquent ſemblable au triangle ABC.

THÉORÊME III.

448. *Deux Triangles qui ont deux côtés homologues proportionnels, & l'angle intercepté entre ces côtés, égal de part & d'autre, ſont dès-lors ſemblables* (fig. 86.).

DEMONST. Soient les côtés *ab*, *ac* proportionnels aux côtés AB, AC, & l'angle *a* = A; ſur le côté AB du grand triangle prenez A*d* = *ab*, & menez *do* parallele à BC, & vous aurez le triangle A*do* équiangle (398), & par conſéquent ſemblable (445) au triangle ABC: or le triangle *abc* = A*do*. Car par la conſtruction A*d* : A*o* :: AB : AC, & par l'hypothèſe *ab* : *ac* :: AB : AC; donc *ab* : *ac* :: A*d* : A*o*; or par la conſtruction *ab* = A*d*: donc auſſi *ac* = A*o*: donc les deux triangles *abc*, A*do* ont deux côtés homologues égaux; d'ailleurs les angles *a*, A, compris entre ces côtés, ſont ſuppoſés égaux: donc (404) le triangle *abc* = A*do*.

THÉORÊME IV.

449. *Deux Triangles qui ont deux côtés homologues proportionnels, & l'un des angles oppoſés à ces côtés, égal de part & d'autre, ſont ſemblables; pourvu que le ſecond angle oppoſé aux autres côtés proportionnels ſoit de même eſpéce* (fig. 86.)

DÉMONST. Dans les triangles *abc*, ABC, ſoient les côtés *ab*, *ac* proportionnels aux côtés AB, AC, & l'angle *b* = B; ſi de plus les angles en *c*, C, ſont de même eſpéce, je dis que les deux triangles *abc*, ABC ſont ſemblables. Car ayant pris, comme ci-deſſus, A*d* = *ab*, & mené la parallele *do*, on aura le triangle A*do* ſemblable au triangle ABC: or *abc* = A*do*; car on a par l'hypothèſe *ab* : *ac* :: AB : AC, & par la conſtruction A*d* : A*o* :: AB : AC: donc *ab* : *ac* :: A*d* : A*o*: or *ab* = A*d*: donc *ac* = A*o*; donc dans les triangles *abc*, A*do* les deux côtés, *ab*, *ac* ſont égaux aux côtés homologues A*d*, A*o*; d'ailleurs l'angle *b* = B = *d*, & de plus l'angle *c* eſt de même eſpece que l'angle C = *o*: donc (405) le triangle *abc* = A*do*.

THÉORÊME V.

450. *Deux Polygones réguliers de même eſpéce, ou d'un même nombre de côtés, ſont toujours ſemblables* (fig. 89.).

DÉMONST. Si vous diviſez les deux polygones en triangles par des rayons tirés du centre aux angles de la circonférence; 1°. il y aura un même nombre de triangles dans l'un & dans l'autre, ſavoir, autant que de côtés; 2°. tous les triangles de l'un ſeront ſemblables aux triangles correſpondans de l'autre; *par ex:* le triangle CAB ſera ſemblable au triangle *cab*. Car les côtés de ces triangles partagent dans chaque polygone l'angle à la circonférence en deux également (415): or les polygones étant réguliers & d'un même nombre de côtés, tous les angles de l'un ſont égaux aux angles correſpondans de l'autre (411): donc leurs moitiés ſont auſſi égales de part & d'autre, & l'on aura l'angle O = *o*, l'angle N = *n*: donc les triangles CAB, *cab* ſont équiangles (385), & par conſéquent ſemblables.

Corollaire I.

451. Si du centre d'un polygone on mene des rayons aux angles de la circonférence (*fig.* 88.) & qu'on joigne ces rayons par des lignes continuement paralleles aux côtés du polygone, on aura deux polygones concentriques, qui ſeront ſemblables. Car ces deux polygones ſe trouveront partagés en un égal nombre de triangles correſpondans & ſemblables les uns aux autres; *par ex:* le triangle CNM eſt ſemblable au triangle CFE, & ainſi des autres, comme il eſt évident.

Corollaire II.

452. Si vous faites le polygone ABDEFG (*fig.* 89.) égal & ſemblable au polygone extérieur de la figure 88, & le polygone *abdefg* égal & ſemblable au polygone intérieur, & ſi vous les par-

tagez en triangle par des rayons menés du centre, il eſt évident qu'on peut appliquer aux deux polygones de la figure 89, ce que nous avons dit des deux polygones concentriques (*fig.* 88.) & que les propriétés qui conviennent aux uns, conviennent auſſi aux autres. D'où il faut conclure en général ;

I°. Que deux polygones ſemblables peuvent toujours être ſuppoſés concentriques.

II°. Que deux polygones ſemblables peuvent toujours être partagés en un même nombre de triangles ſemblables par des rayons menés du centre aux angles de la circonférence.

III°. Que deux polygones ſemblables peuvent auſſi être ſemblablement diviſés, ou être partagés en un nombre égal de triangles ſemblables par des diagonales) *fig.* 90.) ſemblablement tirées dans les polygones.

NOMBRE II.

Des Rapports réſultans de la Similitude des Figures.

Les rapports qui réſultent de la ſimilitude des figures, ſont certaines proportions qui ſe trouvent entre les périmétres, les côtés, les rayons, les diamétres, les lignes ſemblablement tirées dans les figures ſemblables.

THÉORÊME I.

453. *Dans les Triangles ſemblables les côtés homologues ſont proportionnels aux hauteurs, c'eſt-à-dire, aux lignes tirées du ſommet perpendiculairement ſur la baſe* (fig. 87.).

DÉMONST. Les deux triangles rectangles BAD, *bad*, ſont équiangles, parce qu'ils ont chacun un angle droit aux points D & *d*, & l'angle *b* = B par l'hypothèſe : donc ils ſont ſemblables : donc leurs côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura AB : *ab* :: AD : *ad* :
mais AD & *ad* ſont les hauteurs des triangles ; donc, &c.

Corollaire.

454. Dans les triangles ſemblables les baſes ſont proportionnelles aux hauteurs ; car les baſes ſont elles-mêmes des côtés : or les côtés ſont proportionnels aux hauteurs.

THÉORÊME II.

455. *Dans les Polygones réguliers ſemblables, les côtés homologues ſont proportionnels aux rayons obliques (fig. 89.).*

DÉMONST. Les triangles ACB, *acb* ſont ſemblables, comme nous l'avons prouvé (446) : donc leurs côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura AB : AC :: *ab* : *ac* ;

C'eſt-à-dire, que les côtés AB, *ab* des polygones ſont entr'eux comme les rayons obliques AC, *ac*.

THÉORÊME III.

456. *Dans les Polygones réguliers ſemblables, les côtés homologues ſont proportionnels aux rayons droits* (fig. 89.).

DÉMONST. Les triangles FCM, *fcm* ſont ſemblables, comme il eſt évident : donc leurs côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura

FM : CM :: *fm* : *cm* :

or FM, *fm* ſont les moitiés des côtés homologues FE, *fe* (418), & les moitiés ſont entr'elles comme les touts : donc on aura FE : *fe* :: CM : *cm*.

Corollaire.

457. Dans les polygones ſemblables, les rayons obliques ſont proportionnels aux rayons droits. Car les rayons obliques ſont (455) proportionnels aux côtés homologues ; les côtés homologues ſont proportionnels aux rayons droits ; donc les rayons obliques ſont, &c.

THÉORÊME IV.

458. *Dans les Polygones ſemblables les circonférences, ou périmétres ſont proportionnels aux côtés homologues* (fig. 89.).

DÉMONST. Déſignons les côtés du grand polygone par A, B, C, D, & les côtés du petit par *a*, *b*, *c*, *d*: les deux polygones étant ſemblables, leurs côtés homologues ſont tous proportionnels; donc on aura la proportionnalité A : *a* :: B : *b* :: C : *c* :: D : *d* : or (202) dans toute proportionnalité la ſomme des antécédens eſt à celle des conſéquens, comme un ſeul antécédent eſt à ſon conſéquent : donc on aura

$$A + B + C + D : a + b + c + d :: A : a.$$

Or la ſomme des antécédens donne la ſomme des côtés, ou le périmétre du grand polygone, & la ſomme des conſéquens donne la ſomme des côtés, ou le périmétre du petit polygone : donc, &c.

Corollaire.

459. Donc dans les polygones ſemblables les périmétres ſont entr'eux, & comme les rayons obliques, & comme les rayons droits.

THÉORÊME V.

460. *En général dans les Polygones ſemblables, les périmétres ſont entr'eux, comme les lignes ſemblablement tirées dans les deux polygones :* par ex : *comme les diagonales* AC, *ac ; ou* AD, *ad* (fig. 90.).

DÉMONST. Les triangles ABC, *abc*, ſont ſemblables (448) : donc on aura AB : *ab* :: AC : *ac* : or les périmétres des deux polygones ſemblables ſont entr'eux comme les côtés AB, *ab* : donc ils ſont auſſi entr'eux comme les diagonales AC, *ac*.

THÉORÊME VI.

461. *Si les côtés des Polygones ſemblables ſont ſuppoſés infiniment petit, & être en nombre infini, ou, ce qui eſt le même, ſi les Polygones ſemblables ſont ſuppoſés être des cercles, les circonférences ſeront entr'elles comme les rayons.*

DÉMONST. Cela ſe prouve par la même raiſon, que dans les polygones finis & ſemblables les périmétres ſont entr'eux comme les rayons.

Corollaire.

462. Donc les circonférences des cercles, ſont entr'elles 1°. comme les diamétres ; 2°. comme

les arcs ſemblables, ou comme les arcs d'un même nombre de degrés ; car les tous ſont comme les parties ſemblables.

THÉORÊME VII.

463. *Dans les Circonférences de différens cercles les Arcs ſemblables ſont entr'eux comme les cordes qui les ſoutiennent* (fig. 91.).

DÉMONST. Ayant tiré du centre commun A des rayons aux extrêmités des cordes ED, CB, on aura deux triangles ſemblables ACB, AED, dans leſquels les côtés AC, AE, qui ſont rayons, ſont entr'eux comme les côtés, ou cordes CB, ED : or les arcs ſemblables ſont entr'eux comme leurs rayons : donc, &c.

THÉORÊME VIII.

464. *Dans les circonférences de différens cercles les cordes* BC & BE, *ſont entr'elles comme les rayons* AC & AE *de leurs cercles* (fig. 91.).

DÉMONST. Les deux triangles ACB, AED ſont ſemblables ; donc on aura la proportion BC : DE :: AC : AE : donc, &c.

SECTION II.

Des Surfaces.

I°. LA ligne eſt une étendue qui n'a qu'une dimenſion, que l'on appelle *Longueur ;* la ſurface eſt une étendue qui a deux dimenſions, que l'on appelle *Longueur* & *Largeur.*

II°. La ſurface eſt ou *plane*, ou *courbe.* On appelle ſurface *plane*, celle dont tous les points ſont de niveau, c'eſt-à-dire, ne ſont ni plus élevés, ni plus enfoncés les uns que les autres ; telle eſt la ſurface d'un miroir. On appelle ſurface *courbe*, celle dont tous les points ſont inégalement élevés, ou enfoncés ; telle eſt la ſurface d'une ſphere,