LIVRE SECOND.

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

LA Géométrie eſt, ou *Spéculative*, ou *Pratique*. La Géométrie *ſpéculative* eſt celle qui eſt occupée à démontrer, la Géométrie *pratique* eſt celle qui eſt occupée à opérer & à exécuter: à l'une appartiennent les *Théorêmes*, à l'autre les *Problêmes*. Nous diviſerons ce livre en deux Parties. Dans la premiere nous donnerons les élémens de la Géométrie ſpéculative; dans la seconde, ceux de la Géométrie pratique.

PREMIERE PARTIE.

Élémens de la Géométrie ſpéculative.

I°. L'OBJET de la Géométrie eſt l'étendue: dans l'étendue il y a quatre choſes à conſidérer; ſavoir le *Point*, la *Ligne*, la *Surface*, & le *Solide*. Un corps quelconque conſidéré tout entier, s'appelle *Solide*: un ſolide eſt terminé par des faces, que l'on appelle *Surfaces*; chaque ſurface eſt terminée par des côtés, que l'on appelle *Lignes*; chaque ligne eſt terminée par des extrêmités, que l'on appelle *Points*.

II°. Le *point* n'a pas de dimenſions; la *ligne* a une dimenſion que l'on appelle *Longueur*; la *ſurface* a deux dimenſions, que l'on appelle *Longueur* & *Largeur*; le *Solide* a trois dimenſions, que l'on appelle *Longueur*, *Largeur* & *Profondeur*.

III°. Ces trois dimenſions tirent primitivement leur origine du *point*: car en Géométrie on conçoit qu'un point en ſe mouvant, décrit une *ligne*; qu'une ligne en ſe mouvant, décrit une *ſurface*; qu'une ſurface en ſe mouvant, décrit un *ſolide*. Il n'y a donc que trois eſpéces d'étendue, la *ligne*, la *ſurface*, & le *ſolide*. Nous en allons parler dans autant de ſections.

SECTION I.

Des Lignes.

LES lignes ont leur nature, leurs propriétés & leurs rapports, dont il nous faut parler.

CHAPITRE I.

De la Nature des Lignes.

I°. TOUTE ligne eſt *droite* ou *courbe*: une ligne droite eſt unique dans une eſpéce; elle ne peut être plus ou moins droite: une ligne courbe peut varier à l'infini; elle peut être plus ou moins courbe.

II°. De toutes les lignes courbes, la plus ſimple, la plus uniforme, & dont toutes les autres tirent primitivement leur origine, eſt la ligne *circulaire* (*fig.* 2) parce que ſa courbure eſt la même par tout, & ne varie dans aucun de ſes points, comme nous le verrons.

III°. Toutes les lignes priſes en général ſe rapportent donc à deux eſpéces, la ligne *droite*, & la ligne *circulaire*: & ce ſont-là les principes ſur leſquels eſt fondée toute la Géométrie *ſpéculative*.

IV°. A la ligne *droite* & à la ligne *circulaire* répondent la *regle* & le *compas*: la regle pour décrire la ligne droite, & le compas pour décrire la ligne circulaire ; & ce sont les instrumens fondamentaux dont on se sert dans la Géométrie *pratique*.

V°. Sur la ligne droite, la ligne circulaire, & leur combinaison sont fondées toutes les démonstrations des *théorêmes* de la Géométrie spéculative ; pareillement de la regle, du compas, & de leur combinaison dérivent tous les instrumens dont on se sert pour exécuter les *problêmes* de la Géométrie pratique. Nous allons donc donner, 1°. la notion de la ligne droite ; 2°. la notion de la ligne circulaire.

ARTICLE I.

Notion de la Ligne droite.

Hypothése.

245. Si un point A (*fig.* 1.) est supposé se mouvoir, & partir d'un terme A pour arriver au terme B, l'espace parcouru par ce point s'appelle *Ligne*.

DÉFINITIONS.

I.

246. Si le point, en se mouvant, conserve toujours la même direction, il décrit une ligne que l'on nomme ligne *droite* : telle est la ligne AB (*fig.* 1.)

II.

247. Si le point, en se mouvant, vient à changer de direction, il décrit une ligne que l'on appelle *anguleuse*, telle est la ligne AEB (*fig.* 3.) ou la ligne DCE (*fig.* 5.)

III.

248. Si le point, en se mouvant, change à chaque instant de direction, il décrit une ligne que l'on appelle *courbe* : telle est la ligne CAD (*fig.* 1.)

IV.

249. Si la ligne est en partie droite, & en partie courbe, on l'appelle ligne *mixte*.

Corollaire I.

250. Tous les points d'une ligne *droite* sont dans

la même direction ; *par ex :* tous les points de la droite AB (*fig.* 1.) ſont dans la direction de A vers B.

Corollaire II.

251. La ligne droite eſt la plus courte que l'on puiſſe mener d'un point à un autre point ; *par ex :* la droite AB (*fig.* 3.) eſt plus courte qu'aucune des trois lignes AEB, ADB, AFB, parce que tous ſes points étant dans la même direction, elle paſſe par la voie la plus courte.

Corollaire III.

252. La ligne droite eſt auſſi la plus courte entre ſes extrémités ; *par ex :* la ligne AB eſt la plus courte que l'on puiſſe mener entre ſes extrémités A & B.

Corollaire IV.

253. La ſomme de deux droites AE + EB (*fig.* 3.) eſt toujours plus grande que la troiſiéme AB.

Corollaire V.

254. D'un point A à un autre point B on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite AB (*fig.* 3.) : car toute autre ligne droite menée de A en B ſeroit par le ſecond corollaire la plus courte entre ces deux points, & par conſéquent ne ſeroit pas diſtinguée de la droite AB.

Corollaire VI.

255. D'un point à une ligne on peut mener une infinité de lignes droites ; *par ex :* du point C à la ligne EG (*fig.* 11.) on peut mener les lignes CA, CD, CF, CB, & une infinité d'autres : on en peut mener autant qu'il y a de points dans la ligne EG.

Corollaire VII.

256. Pour déterminer la poſition d'une ligne *droite*, un point ſeul ne ſuffit pas ; car les droites CA, DC, CF, &c. ont un même point C commun, & ont différentes poſitions : deux points

suffisent; deux points étant donnés, tels que C & D (*fig.* 11.) il n'est pas possible (254) de faire passer par ces points d'autre ligne que CD.

Corollaire VIII.

257. Deux lignes droites ne peuvent pas avoir deux points communs; elles auroient dès lors la même position, & ne feroient plus qu'une seule & même ligne.

Corollaire IX.

258. Deux lignes droites ne peuvent se couper qu'en un seul point: si elles se coupoient en deux points, elles auroient deux points communs, & par conséquent ne feroient plus qu'une seule & même ligne.

ARTICLE II.

Notion de la Ligne Circulaire.

Hypothése.

259. Si une ligne droite AD (*fig.* 4.) immobile au point A, & mobile à l'extrêmité D, est supposée faire une révolution autour du point A, il est clair que l'extrêmité, ou le point D décrira une courbe dont tous les points seront également distans du point A: cette ligne coube s'appelle *Ligne circulaire*, ou *Cercle*.

DÉFINITIONS.

I.

260. Une ligne *circulaire* est une ligne courbe, dont tous les points sont également éloignés d'un point commun; *par ex:* A (*fig.* 2 & 4.) que l'on nomme *Centre.*

II.

261. L'espace compris & renfermé par la ligne circulaire, s'appelle *Cercle*, & la ligne circulaire s'appelle *Circonférence* du cercle.

III.

262. La ligne AD, ou AC, ou AB, &c. (*fig.* 4.)

& en général toute ligne droite, tirée du centre A à un point quelconque de la circonférence, s'appelle *Rayon*. Le double rayon, & en général toute ligne droite menée d'un point de la circonférence au point opposé, & qui passe par le centre, s'appelle *Diamétre*.

IV.

263. Deux cercles qui ont un centre commun, s'appellent *Concentriques* (*fig.* 2.): deux cercles qui se coupent ou se touchent, s'appellent cercles *Excentriques* (*fig.* 7, 8, & 9.); la ligne droite qui joint les deux centres, s'appelle ligne d'*excentricité*.

Corollaire I.

264. Dans le cercle tous les rayons sont égaux, car ils mesurent la distance du centre à la circonférence, laquelle est par tout la même: pareillement tous les diamétres sont égaux, puisqu'ils sont chacun le double du rayon.

Corollaire II.

265. Une ligne droite qui coupe la circonférence d'un cercle, la coupe toujours en deux points; ou prolongée, la couperoit en deux points.

Corollaire III.

266. Une ligne droite ne peut pas couper une circonférence de cercle en trois points; car trois points ont la même direction dans une ligne droite, & ne peuvent l'avoir dans une circonférence de cercle.

Corollaire IV.

267. Donc trois points pris dans la circonférence du cercle ne peuvent pas être posés en ligne droite; ou, ce qui revient au même, une circonférence de cercle peut bien avoir deux points communs avec une ligne droite, mais non pas trois.

Corollaire

Corollaire V.

268. Deux circonférences de cercle qui ſe coupent, ſe coupent néceſſairement en deux points, comme il eſt évident (*fig.* 9.)

Corollaire VI.

269. Deux circonférences de cercle ne peuvent ſe couper en trois points (*fig.* 9.); car ſi cela étoit poſſible, deux circonférences pourroient donc avoir trois points communs; & par conſéquent la circonférence ACB pourroit avoir trois de ſes points également diſtans du point C centre de l'autre circonférence : or elle ne peut avoir que deux de ſes points, ſavoir, A & B, également diſtans du point C; car tous ſes autres points s'en éloignent ou s'en approchent toujours de plus en plus, à cauſe de l'uniformité de ſa courbure: donc, &c.

Corollaire VII.

270. Deux circonférences de cercle ne peuvent ſe toucher qu'en un ſeul point: car ſoit qu'elles ſe touchent en dedans (*fig.* 7.), ſoit qu'elles ſe touchent en dehors (*fig.* 8.), elles ne peuvent avoir qu'un ſeul point commun O; ſi elles en avoient deux, elles ſe couperoient, comme il arrive (*fig* 9.)

Remarque.

271. Lorſque deux circonférences de cercle ſe touchent, la ligne d'excentricité eſt égale à la ſomme ou à la différence des rayons; car ſi elles ſe touchent en dehors (*fig.* 8.), la ligne d'excentricité, ſavoir CD, eſt égale, comme il eſt évident, à la ſomme des rayons $CO + OD$; ſi elles ſe touchent en dedans (*fig.* 7.) la ligne d'excentricité eſt $CD = CO - OD$, qui eſt la différence des rayons.

Corollaire VIII.

272. Deux circonférences de cercle peuvent avoir un point commun, lorſqu'elles ſe touchent; elles peuvent avoir deux points communs, lorſ-

qu'elles se coupent ; mais elles ne peuvent avoir trois points communs ; parce qu'elles ne peuvent ni se toucher, ni se couper en trois points.

Corollaire I X.

273. Pour déterminer la position d'une circonférence de cercle, deux points ne suffisent pas ; car elle peut avoir deux points communs, soit avec une ligne droite, soit avec une autre circonférence de cercle ; mais trois points suffisent, parce qu'elle ne peut avoir trois points communs, ni avec une ligne droite, ni avec une autre circonférence de cercle.

Corollaire X.

274. On peut toujours faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés B, C, D, (*fig.* 4.) & non posés en ligne droite ; car prenant un point A également distant des trois points donnés, & de ce point A comme centre, & de l'intervalle AB décrivant avec le compas un arc, cet arc passera par les trois points donnés, & continué donnera une circonférence de cercle.

Il ne s'agit pour cela que de trouver le centre A ; nous en donnerons dans la suite la méthode.

DÉFINITIONS.

I.

275. Les portions GH, HI, IB, &c. (*fig.* 4.) de la circonférence, comprises entre deux rayons, s'appellent *Arcs* de circonférence.

I I.

276. Toute portion prise dans la surface du cercle, comprise entre deux rayons & terminée par un arc, s'appelle *Secteur* de cercle.

I I I.

277. Une ligne droite FG ou DE (*fig.* 5.) qui passe par les extrémités d'un arc, s'appelle *Corde*.

I V.

278. La corde divise la surface du cercle en deux parties inégales, dont la plus grande s'appelle le *grand Segment*, & la plus petite, le *petit Segment.*

Corollaire I.

279. Dans un cercle, ou dans des cercles égaux, les cordes égales soutiennent des arcs égaux, & les arcs égaux sont soutenus par des cordes égales ; ce qui est évident, puisque la courbure du cercle étant par-tout uniforme, il est nécessaire qu'entre les extrémités des cordes égales soient compris des arcs égaux.

Corollaire I I.

280. Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les plus grandes cordes soutiennent de plus grands arcs, & les plus grands arcs sont soutenus par de plus grandes cordes.

Corollaire I I I.

281. Dans un même cercle la plus grande de toutes les cordes est celle qui passe par le centre, ou est le diamétre lui-même ; *par ex :* le diamétre AB (*fig.* 5.) est plus grand que la corde DE. Car le diamétre AB est égal aux rayons CE + CD : or la somme CE + CD = AB, est plus grande que la corde DE (253) : donc, &c.

Corollaire I V.

282. Tout diamétre partage & la circonférence & la surface du cercle en deux également. Car le diamétre pouvant être regardé comme la plus grande de toutes les cordes, il soutient par conséquent le plus grand de tous les arcs, & le plus grand de tous les segmens que l'on puisse prendre dans le cercle : or dans le cercle, le plus grand de tous les arcs est la demi-circonférence, & le plus grand de tous les segmens est le demi-cercle ; donc le diamétre partage & la circonférence & le cercle en deux moitiés, ou en deux parties égales.

CHAPITRE II.

Des Propriétés des Lignes.

I°. LEs lignes dont nous examinons ici les propriétés, sont les lignes droites : les propriétés des lignes droites naissent de leur *position* respective, & de leur *assortiment.*

II°. La position respective des lignes est la position d'une ligne par rapport à une autre ligne, ou à plusieurs autres lignes ; l'assortiment des lignes consiste dans la rencontre & la réunion de plusieurs lignes par leurs extrémités.

III°. De la position respective des lignes naissent les *angles :* de l'assortiment des lignes résultent les *figures.*

ARTICLE I.

De la Position respective des Lignes droites, & des Angles.

Nous parlerons, 1°. de la position respective des lignes droites : 2°. des angles.

PARAGRAPHE I.

De la Position respective des Lignes droites.

Une ligne droite considérée toute seule, n'a qu'une position *absolue*; elle ne peut avoir de position *respective* qu'à l'égard d'autres lignes. La position d'une ligne droite peut être considérée ou par rapport à d'autres lignes droites, ou par rapport au cercle.

NOMBRE I.

De la position d'une ligne droite par rapport à d'autres droites.

Une ligne droite, considérée par rapport à d'autres lignes droites, peut avoir trois sortes de position, être *perpendiculaire*, être *oblique*, être *parallele.*

DÉFINITIONS.

I.

283. Une ligne AB qui tombe ſur une autre ligne CD, ſans pencher plus d'un côté que de l'autre, s'appelle *Perpendiculaire.*

I I.

284. La ligne ſur laquelle tombe la perpendiculaire, eſt auſſi perpendiculaire à l'égard de l'autre; *par ex:* la ligne CD eſt perpendiculaire ſur AB, auſſi-bien que AB ſur CD (*fig.* 9 & 10.)

I I I.

285. Les lignes AC, AD (*fig.* 9.) qui tombent ſur une ligne CD, de façon qu'elles s'inclinent plus d'un côté que de l'autre, s'appellent *Obliques*, par rapport à ligne CD. Les diſtances CI, DI, (*fig.* 9.) s'appellent *Eloignemens de Perpendicule.*

I V.

286. Les obliques peuvent être inclinées, ou dans le même ſens, comme CF, CB (*fig.* 11.), ou en ſens contraire, comme CA, CF.

V.

287. On appelle lignes *paralleles*, deux lignes qui ſont également éloignées l'une de l'autre dans tous leurs points correſpondans (*fig.* 15.). On définit auſſi les lignes *paralleles*, des lignes qui, quelque prolongées qu'on les ſuppoſât, ne ſe rencontreroient jamais.

THÉORÊME I.

288. *Une ligne* CD (fig. 10.) *qui tombe ſur une autre* AB, *de façon qu'elle ait deux de ſes points*, par ex: C & D, *également diſtans chacun de deux termes ou deux points* A, B, *donnés dans l'autre ligne, eſt dès-lors perpendiculaire ſur cette ligne* AB.

DÉMONSTRATION. Car ſi la ligne CD n'étoit point perpendiculaire ſur AB, elle pencheroit par conſéquent plus d'un côté que de l'autre; & dans ce cas le point C, *par ex:* ſeroit plus proche de A que de B, ou de B que de A, & l'on auroit la distance AC < CB, ou la distance CB < AC; ce qui est impossible, puisque par la supposition la distance CA = CB, donc, &c.

La démonstration peut aussi être appliquée à la figure 9.

Corollaire.

289. Pour mener une ligne perpendiculaire AI, ou AB, sur une ligne donnée CD (*fig.* 9.), il n'y a qu'à décrire des extrêmités C, D, pris comme centres, & de la même ouverture de compas, des cercles, lesquels s'entrecouperont, & joindre les points d'interfection A & B par une droite AB, laquelle sera la perpendiculaire cherchée.

Remarquez 1°. que pour mener une perpendiculaire AB, au lieu de cercles, il suffit de tracer des arcs qui s'entrecoupent aux points A & B.

Remarquez 2°. que c'est par cette même méthode que l'on divise une ligne droite donnée, *par ex:* CD en deux également.

THÉORÊME II.

290. *Une ligne* AI *étant perpendiculaire sur une autre* CD, *si l'un des points de la perpendiculaire est également éloigné de deux termes ou deux points* C, D, *donnés dans l'autre ligne, tous les autres points de la perpendiculaire seront également éloignés chacun de ces deux mêmes points* C, D (fig. 9.).

DÉMONST. Si l'on suppose que le point A soit également éloigné des deux points C, D, ou que l'on ait AC = AD, je dis que tout autre point de la perpendiculaire; *par ex:* le point I sera aussi également éloigné des deux mêmes points C & D, ou que l'on aura IC = ID. Car si l'on avoit IC > ID, la ligne AI pencheroit plus du côté de C que de D; & si l'on avoit ID > IC, la ligne AI pencheroit plus du côté de D que de C: donc la ligne AI ne seroit plus perpendiculaire sur CD, ce qui est contre la supposition.

La démonstration peut aussi être appliquée à la figure 10.

Corollaire I.

291. Une perpendiculaire AI étant prolongée tant que l'on voudra de part & d'autre, tous les points par où elle passera, seront toujours également distans chacun des deux termes ou deux points donnés C & D. Car la perpendiculaire AI étant prolongée jusqu'en B, & le point I étant également distant des extrémités C & D, il suit que le point B sera de même également distant des extrémités C & D, & que l'on aura BC = BD, ce qui se prouve de la même maniere que le théorême précédent.

Corollaire II.

292. Il y a donc cette différence entre la ligne *perpendiculaire*, & la ligne simplement droite, que pour juger de la position d'une ligne perpendiculaire, *par ex :* CD (*fig.* 11.), par rapport à une autre ligne donnée EB, il suffit qu'il soit donné un seul de ses points, tels que C; car si le point C est également distant des deux termes E, B, il en sera de même de tous les autres points de la perpendiculaire : au lieu que pour déterminer la position d'une ligne simplement *droite* CF, le point C seul ne suffit pas; car le point C ne détermine pas plutôt la position de CF que de CB, ou que de CA; mais il faut qu'il soit donné deux points; *par ex :* C & F, pour pouvoir juger de la position de la ligne CF par rapport à l'autre ligne EB.

THÉORÊME III.

293. *La Perpendiculaire est plus courte que l'Oblique menée d'un même point à une même ligne droite,* par ex: CD *est plus courte que* CA, *que* CF, *que &c.* (fig. 11.).

CONSTRUCTION. Prolongez la ligne CD jusqu'en H, de façon que l'on ait CD = DH, & menez les lignes HA, HF; cela posé

DÉMONSTRAT. La ligne CH est plus courte

(253) que $CA + AH$: donc la moitié de CH eſt plus courte que la moitié de $CA + AH$. Or CD eſt la moitié de CH par la conſtruction. Pareillement CA eſt la moitié de $CA + AH$; car la ligne AD eſt perpendiculaire ſur CH, auſſi bien que CH l'eſt ſur AD, or dans la perpendiculaire AD, le point D eſt également diſtant des points C & H, puiſque par la conſtruction $CD = DH$, donc auſſi le point A eſt également diſtant des mêmes points C & H, donc on aura $CA = AH$, & par conſéquent CA eſt la moitié de $CA + AH$.

La démonſtration peut auſſi être appliquée aux figures 9, 12, & 13.

Théorême IV.

294. *D'un point pris hors d'une ligne on ne peut abbaiſſer ſur cette ligne qu'une ſeule Perpendiculaire ; pareillement d'un point pris dans une ligne on ne peut élever ſur cette ligne qu'une ſeule Perpendiculaire* (fig. 9 & 11.).

Démonst. I. Part. La perpendiculaire eſt la ligne la plus courte que l'on puiſſe mener d'un point à une ligne (293) : or il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne qui ſoit la plus courte entre deux termes donnés: donc, &c.

Démonst. II. Part. Dans la ligne EG (*fig.* 11.), prenons le point D également éloigné des points A & F: or de ce point D on ne peut élever que la ſeule perpendiculaire DC. Car ſi du point D on pouvoit élever une ſeconde perpendiculaire diſtinguée de DC, cette ſeconde perpendiculaire partant d'un point D, également éloigné de A & de F, paſſeroit par conſéquent toujours (291) par des points également éloignés de A & de F; donc elle paſſeroit par le point C; donc elle auroit deux points C & D communs avec la premiere perpendicaire CD, & ſe confondroit ainſi avec elle.

Corollaire.

295. C'eſt pourquoi la ligne perpendiculaire eſt la meſure dont ſe ſervent les Géométres pour me-

ſurer les *diſtances*, les *hauteurs*, &c. parce qu'elle eſt la ligne la plus courte que l'on puiſſe mener entre deux termes donnés, & qu'entre deux termes on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire : deux propriétés qui donnent à la perpendiculaire les deux caracteres propres de la *meſure*, ſçavoir, la *ſimplicité* & l'*invariabilité*.

THÉORÊME V.

296. *De toutes les Obliques* CF, CB, *&c. menées d'un même point* C *ſur une même ligne* EG, *celles qui ſont moins éloignées de la Perpendiculaire, ſont plus courtes ; celles qui ſont plus éloignées, ſont plus longues* (fig. 11.).

DÉMONST. Prolongez CD juſqu'au point H, de façon que l'on ait CD = DH, & menez les lignes HF, HB ; il eſt évident que la ligne CBH eſt plus grande que CFH, puiſqu'elle s'écarte davantage de la voie la plus courte : donc la moitié de CBH eſt plus longue que la moitié de CFH : or CB eſt la moitié de CBH, & CF eſt la moitié de CFH. Ce que l'on prouve de la même maniere que nous avons démontré (293) que CA étoit la moitié de CAH : donc, &c.

Corollaire I.

297. De toutes les obliques menées d'un même point ſur une même ligne : 1°. celles qui ont même éloignement de perpendicule, ſont égales : 2°. celles qui ſont égales, ont même éloignement de perpendicule : 3°. celles qui ſont égales & ont même éloignement de perpendicule, appartiennent à une même perpendiculaire (*fig.* 11.).

I°. Si les éloignemens de perpendicule ſont égaux, on aura AD = DF : donc dans la perpendiculaire CD, le point D, & par conſéquent auſſi le point C, ſera (290) également éloigné des points A & F ; donc on aura CA = CF.

II°. Si les obliques ſont égales, on aura CA = CF : donc dans la perpendiculaire CD, le point C, & par conſéquent auſſi le point D ſera également éloigné des points A & F : donc on aura DA = DF.

III°. Si l'on a les obliques égales CA = CF, & les éloignemens de perpendicule égaux DA = DF, il eſt clair que la ligne dont les obliques ſont également éloignées, eſt une même perpendiculaire CD.

Corollaire II.

298. Si les obliques ſont tirées de différens points, ſoit ſur une même ligne, ſoit ſur différentes lignes, comme AC, EF (*fig.* 12 & 13.), il arrivera

I°. Que les obliques AC, EF ſeront égales, lorſqu'elles auront des perpendiculaires égales, & même éloignement de perpendicule.

II°. Que les éloignemens de perpendicule BC, DF, ſeront égaux, lorſque les obliques ſeront égales, & les perpendiculaires égales.

III°. Que les perpendiculaires AB, ED ſeront égales, lorſque les obliques ſeront égales, & les éloignemens de perpendicule égaux.

En effet concevez que l'extrémité A de la perpendiculaire AB ſoit poſée ſur l'extrémité E de la perpendiculaire ED; vous verrez évidemment que dans le cas des perpendiculaires AB, ED égales, & des éloignemens de perpendicules BC, DF égaux, les obliques AC, & EF tomberont néceſſairement l'une ſur l'autre, ſe confondront & ſeront par conſéquent égales: que dans le cas des obliques AC, EF égales, & des perpendiculaires AB, ED égales, l'éloignement de perpendicule BC tombera exactement ſur DF, ſe confondra avec lui, & lui ſera par conſéquent égal: que dans le cas des obliques AC, EF égales, & des éloignemens de perpendicule BC, DF égaux, les extrémités A & B de la perpendiculaire AB tomberont ſur les extrémités E & D de la perpendiculaire ED, & que par conſéquent les deux perpendiculaires ſe confondront & ſeront égales.

Corollaire III.

299. Donc en général de ces trois choſes, lignes perpendiculaires, lignes obliques, éloignemens de perpendicule; ſi deux d'une part ſont égales aux deux correſpondantes de l'autre part, la troiſiéme ſera auſſi néceſſairement égale de part & d'autre.

Corollaire IV.

300. D'un point on ne peut mener que deux obliques égales ſur une même ligne EG (*fig.* 11.): car il ne peut y avoir que deux obliques CA, CF, également éloignées de la perpendiculaire, & par conſéquent égales.

THÉORÊME VI.

301. *Deux lignes qui ſont chacune perpendiculaires à une même troiſiéme Ligne, ſont paralleles entr'elles.*

DÉMONSTRATION. Si elles n'étoient pas paralleles entr'elles, elles ſe rencontreroient en un point quelconque; & par conſéquent il y auroit deux perpendiculaires menées d'un même point ſur une même ligne, ce qui eſt impoſſible (294).

THÉORÊME VII.

302. *Une Ligne* AB *perpendiculaire à une Ligne* GH, *eſt auſſi perpendiculaire à une ſeconde ligne* CD, *parallele à* GH (fig. 14.).

DÉMONSTRATION. Si la ligne AB perpendiculaire ſur GH, ne l'étoit pas ſur CD, CD ne ſeroit pas non plus perpendiculaire ſur AB; donc CD ſeroit inclinée ſur AB: donc CD étant prolongée rencontreroit de part ou d'autre la ligne GH, & par conſéquent ne lui ſeroit pas parallele, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Corollaire.

303. Une ligne GI perpendiculaire à une ligne AB (*fig.* 17.), eſt auſſi perpendiculaire à toutes les lignes CD, EF, &c. paralleles à la ligne AB.

THÉORÊME VIII.

304. *Une ligne* AB, *parallele à une premiere paral-*

lele CD, *eſt auſſi parallele à la ſeconde parallele* EF, (fig. 17.).

Démonst. Par l'hypothèſe la ligne AB eſt parallele à la ligne CD, & par conſéquent la ligne GH perpendiculaire ſur AB, l'eſt auſſi ſur CD: par l'hypothèſe encore la ligne CD eſt parallele à la ligne EF: donc la ligne prolongée GHI, perpendiculaire ſur CD, le ſera auſſi ſur EF, donc la ligne GI eſt perpendiculaire ſur AB & ſur EF: donc (301) AB & EF ſont paralleles.

C'eſt la même choſe auſſi de dire que deux lignes paralleles à une même troiſiéme ligne, ſont paralleles entr'elles.

Théorême IX.

305. *Une ligne* IF, *oblique & inclinée ſur une parallele* AB, *eſt également inclinée ſur l'autre parallele* CD (fig. 16.).

Démonst. Si la ligne IF étoit plus ou moins inclinée ſur la parellele AB, que ſur la parallele CD, la parallele AB ſeroit pareillement plus ou moins inclinée ſur la ligne IF, que ne l'eſt la parallele CD: donc les paralleles AB, CD, s'inclineroient l'une ſur l'autre, & prolongées ſe rencontreroient quelque part, & par conſéquent ne ſeroient plus paralleles, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Corollaire I.

306. Une ligne GI oblique & inclinée ſur une ligne AB (*fig.* 18.) eſt également inclinée ſur toutes les lignes CD, EF, &c. paralleles à la ligne AB.

Corollaire II.

307. En général deux lignes paralleles ont toujours une même poſition par rapport à une même troiſiéme ligne; & réciproquement.

Théorême X.

308. *Deux lignes perpendiculaires compriſes entre deux paralleles, ſont égales.*

Démonst. Les perpendiculaires compriſes entre deux paralleles mesurent des distances égales, donc elles sont égales.

Corollaire I.

309. Donc deux lignes paralleles comprises entre deux paralleles, sont égales entr'elles: car si elles sont perpendiculaires, elles seront égales, comme nous venons de le prouver; si elles sont obliques, elles auront même éloignement de perpendicule, puisqu'elles sont paralleles, & par conséquent elles seront égales.

Corollaire II.

310. Donc deux lignes également inclinées, entre deux paralleles, sont égales: car étant également inclinées, elles ont même éloignement de perpendicule; donc elles sont égales.

Remarque.

311. Pour mener une ligne parallele à une autre ligne donnée, *par ex:* CD (*fig.* 15.), il n'y a qu'à élever sur la ligne donnée CD deux perpendiculaires égales, & faire passer par les extrémités des deux perpendiculaires, une ligne droite, laquelle sera nécessairement (301) parallele à la ligne donnée.

On peut aussi mener une ligne parallele à une autre ligne donnée CD, en décrivant des extrémités C & D, ou de tels autres points que l'on voudra, *par ex:* E & F pris dans la ligne donnée soit des cercles, comme l'on voit (*fig.* 14.), soit des arcs indéfinis EGO, FHO avec la même ouverture de compas, & prenant sur ces arcs des portions égales BG, FH, la ligne qui passera par les points G & H, sera parallele à la ligne donnée, comme il est évident.

NOMBRE II.

De la position de la ligne droite par rapport au Cercle.

Une ligne droite considérée par rapport à une autre ligne droite, peut avoir trois sortes de positions; sçavoir, être *perpendiculaire*, être *oblique*, être *parallele:* une ligne droite considérée par rapport au cercle, ne peut avoir que deux ſortes de poſitions; ſçavoir, être *tangente*, ou être *ſécante*.

DÉFINITIONS.

I.

312. On appelle *Sécante*, toute ligne droite qui coupe, ou qui, prolongée, couperoit la circonférence du cercle.

II.

313. La ſécante s'appelle *Sécante extérieure*, lorſqu'elle eſt tirée d'un point pris hors de la circonférence; & elle s'appelle *Sécante intérieure*, lorſqu'elle eſt tirée d'un point pris en dedans du cercle.

Théorême I.

314. *De toutes les Sécantes intérieures tirées d'un point pris au-deſſous du centre, la plus courte ſera celle qui, prolongée, paſſeroit par le centre* (fig. 19.).

Démonstration. La ſécante AB, qui, prolongée, paſſeroit par le centre C, eſt plus courte que la ſécante AD. Car (253) CAD > CD : or CD = CB, parce qu'elles ſont rayons d'un même cercle: donc CAD > CB : donc, en retranchant de part & d'autre la partie commune CA, on aura AD > AB.

Théorême II.

315. *De toutes les Sécantes intérieures tirées d'un même point, pris au-deſſus du centre à la circonférence concave du cercle, la plus longue ſera celle qui paſſe par le centre* (fig. 20.).

Démonst. La ſécante AB qui paſſe par le centre C, eſt plus longue que toute autre ſécante, *par ex :* AD. Car CB = CD, puiſqu'elles ſont rayons d'un même cercle; donc ajoûtant à l'une & à l'autre la portion commune CA, on aura ACB = ACD; or (253) ACD > AD : donc ACB, ou AB > AD.

Théorême III.

316. *De toutes les Sécantes extérieures, menées d'un même point à la circonférence convexe du cercle, la plus*

courte est celle qui prolongée, passeroit par le centre (fig. 21.).

DÉMONST. Ayant continué les deux sécantes AB, AD, jusqu'au centre C, on aura (253) ABC < ADC, donc retranchant de part & d'autre les lignes égales, ou rayons BC, DC, il restera AB < AD.

THÉORÊME IV.

317. *De toutes les Sécantes extérieures, tirées d'un même point à la circonférence concave du cercle, la plus longue sera celle qui passera par le centre* (fig. 22.).

DÉMONST. La sécante AB qui passe par le centre C, est plus longue que AD. Car (264) CB = CD : donc ajoutant la partie commune CA, on aura BCA = DCA : or (253) DCA > DA, donc aussi BCA > DA.

Remarque.

318. Si dans le cercle la *sécante intérieure* étoit tirée soit du centre à la circonférence, soit d'un point de la circonférence à un point opposé en passant par le centre, soit d'un point de la circonférence à un autre point, sans passer par le centre, alors elle deviendroit ou *rayon*, ou *diamétre*, ou *corde*. Or dans le cercle, le rayon, ou le diamétre peut être soit *perpendiculaire*, soit *oblique*, soit *parallele* à une corde, & de ces différentes positions naissent de nouveaux rapports.

THÉORÊME V.

319. *Dans un même Cercle* (fig. 23.).

I°. *Tout Diamétre ou Rayon, qui est perpendiculaire à une corde, coupe cette corde & l'arc soutenu par cette corde, en deux également.*

II°. *Tout Diamétre, ou Rayon, qui coupe une corde en deux également, est perpendiculaire à cette corde.*

III°. *Toute Ligne perpendiculaire à une corde, & qui la divise en deux également, est Diamétre, ou Rayon.*

DÉMONST. I. Part. Le diamétre FB passe par le centre A, qui est également distant des extrémités C & D de la corde : or il est perpendiculaire à la corde: donc le point E, par où paſſe ce diamétre, eſt auſſi également diſtant des extrémités C & D: donc on aura CE = ED: par la même raiſon on aura l'arc CB = BD.

Démonst. II. Part. Le diamétre paſſe par le centre A, qui eſt également éloigné des extrémités C & D: & puiſqu'il coupe la corde en deux également, le point E eſt auſſi également diſtant des extrémités C & D: donc dans ce diamétre il y a deux points A, E, qui ſont chacun également diſtans des extrémités de la corde: donc (288) il eſt perpendiculaire à la corde.

Démonst. III. Part. Puiſque la ligne FB coupe la corde en deux également, le point E eſt également diſtant des extrémités C & D de la corde: & puiſqu'elle eſt perpendiculaire à la corde, elle paſſe toujours par des points également diſtans des extrêmités C & D; donc elle paſſe par le centre A: or toute ligne qui paſſe par le centre, eſt rayon, ou diamétre: donc, &c.

Corollaire.

320. D'où il ſuit en général que de ces trois conditions, être perpendiculaire à une corde; couper une corde en deux également; être rayon, ou diamétre, deux étant données, la troiſiéme s'enſuit néceſſairement.

DÉFINITIONS.

I.

321. On appelle *tangente*, une ligne droite qui rencontre en dehors la circonférence du cercle, ſans la couper, telles ſont les lignes FE, CD, AB, fig. 24, 25 & 26.

I I.

322. Le point ou la tangente rencontre la circonférence du cercle, s'appelle point de *contact* ou de *contingence*, tels ſont les points A, F, E, (*fig.* 24, &c.).

Théorême VI.

323. *Une ligne perpendiculaire à l'extrémité du*

rayon, ou du diamétre, est tangente par rapport au cercle (fig. 24.).

DÉMONST. Elle est ou tangente, ou sécante : or elle n'est point sécante. Si elle l'étoit, elle couperoit nécessairement (265) la circonférence du cercle en deux points, *par ex :* A & D : donc cette ligne seroit la ligne AB, qui rentre dans le cercle : donc menant sur AB une ligne quelconque CH, le point H sera en dedans du cercle, & la ligne CH sera plus courte que le rayon CA : donc le rayon CA n'étant point la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un même point C sur la ligne AB, ne sera pas perpendiculaire sur la ligne AB : donc aussi la ligne AB ne sera pas perpendiculaire à l'extrémité du rayon ; ce qui est contre notre supposition.

THÉORÊME VII.

324. *Réciproquement la Tangente est toujours perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contingence* (fig. 24.).

DÉMONST. Si la tangente AE n'est pas perpendiculaire à l'extrémité du rayon CA, le rayon ne sera pas non plus perpendiculaire, mais oblique sur la tangente ; soit donc CH, cette perpendiculaire menée du centre à la tangente : donc on aura $CH < CA$: donc l'extrémité H est en dedans du cercle : donc la tangente rentreroit dans le cercle, & par conséquent ne seroit plus tangente ; ce qui est contre la supposition.

THÉORÊME VIII.

325. *La Tangente ne touche la circonférence du cercle qu'en un seul point.*

DÉMONST. Si elle touchoit la circonférence du cercle en deux points, soient menés du centre deux rayons à ces deux points de contingence : or tout rayon mené au point de contingence, est perpendiculaire sur la tangente, comme nous venons de le voir : donc on auroit deux perpendiculaires menées d'un même point ſur une même ligne, ce qui eſt impoſſible.

Corollaire I.

326. De ces trois conditions, être rayon, ou paſſer par le centre; aboutir au point de contingence; être perpendiculaire à la tangente, deux étant poſées, la troiſiéme s'enſuit néceſſairement: En effet,

I°. Tout rayon qui aboutit au point de contingence, eſt auſſi perpendiculaire à la tangente; puiſque (324) la tangente eſt toujours perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contingence.

II°. Toute ligne menée au point de contingence, & qui eſt perpendiculaire à la tangente, dès-lors paſſe par le centre ou eſt rayon: car du point de contingence, on ne peut élever ſur la tangente d'autre perpendiculaire, que celle qui paſſe par le centre, ou qui eſt rayon.

III°. Toute ligne qui eſt perpendiculaire à la tangente, & qui paſſe par le centre, ou qui eſt rayon, aboutit dès-lors au point de contingence: car, ſi elle n'y aboutiſſoit pas, on pourroit donc avoir deux perpendiculaires menées du centre à la tangente; l'une qui aboutiroit au point de contingence (324), & l'autre qui n'y aboutiroit pas par l'hypothèſe, ce qui eſt impoſſible (294).

Corollaire I I.

327. Les arcs de circonférence compris entre une corde & une tangente paralleles, ſont égaux; car ayant mené du point de contingence E (*fig.* 25.) le diamétre EF, ce diamétre ſera perpendiculaire à la tangente AB: donc il le ſera auſſi ſur la corde GH, parallele à la tangente: donc (302) il partagera la corde GH, & l'arc GEH en deux également: donc on aura EG = EH.

Corollaire I I I.

328. Les arcs de circonférence compris entre deux tangentes paralleles, ſont égaux (*fig.* 25.);

car si du point de contingence F on éleve une perpendiculaire sur la tangente CD, cette perpendiculaire passera par le centre (326) : donc elle sera un diamétre ; mais ce diamétre sera aussi (302) perpendiculaire à la tangente AB parallele à la premiere CD : donc il aboutira (326) au point de contingence E : donc les deux tangentes paralleles seront perpendiculaires aux extrémités d'un même diamétre : or tout diamétre partage la circonférence en deux également (282) : donc les arcs compris entre deux tangentes paralleles sont égaux.

Corollaire IV.

329. Les arcs de circonférence compris entre deux cordes paralleles, *par ex :* GH, IK, sont égaux : car l'arc EGIF = EHFK, comme nous venons de le prouver ; donc retranchant d'une part les arcs EG & EH qui sont égaux (327), & retranchant de l'autre les arcs IF & KF, qui sont encore égaux (327), les restes, ou arcs GI & HK compris entre les deux cordes paralleles, seront égaux.

Théorême IX.

330. *On ne peut mener qu'une seule Tangente à l'extrémité d'une même rayon.*

Démonst. La tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon : or à l'extrémité d'une ligne on ne peut mener (294) qu'une seule perpendiculaire : donc, &c.

Corollaire.

131. Donc par le point de contingence il n'est pas possible de faire passer entre la tangente & la circonférence aucune ligne droite ; telle que AB (*fig.* 24.) Car cette ligne droite seroit oblique par rapport au rayon : donc menant du centre une perpendiculaire CH sur AB, on aura CH < CA : donc le point H sera en dedans du cercle, & par conséquent la ligne AB coupe la circonférence,

& ne passe pas entre la tangente & la circonférence.

Théorême X.

332. *Entre la tangente & la circonférence on peut faire passer par le point de contingence une infinité de Courbes,* (fig. 26.).

Démonst. Si l'on prolonge le rayon EC jusqu'en D, & que du point D comme centre; & de l'intervalle DE on décrive la courbe FEG, je dis que cette courbe passera entre la tangente & la circonférence, sans couper ni l'une ni l'autre; & que prolongeant toujours de même le rayon, on pourra décrire semblablement tant de courbes que l'on voudra.

I°. Elle ne coupera point la tangente, puisque le rayon DE de cette courbe est terminé au point de contingence.

II°. Elle ne coupera pas la circonférence; car si elle la coupoit: *par ex :* au point O, le point O devenant commun à la petite & à la grande circonférence, on auroit $CE=CO$: or cela n'est pas, mais plutôt on a $CE<CO$; car CE, & CO étant, par rapport à la grande circonférence, deux sécantes intérieures menées d'un même point pris au-dessous du centre D de cette circonférence: nous avons prouvé (314) que la ligne CE qui, prolongée, passeroit par le centre D, est plus courte que CO, qui n'y passeroit point: donc le point O est hors de la petite circonférence.

PARAGRAPHE II.

Des Angles.

Les angles ont une origine; ils peuvent être de différente qualité: ils sont susceptibles d'évaluation; c'est ce que nous allons faire voir.

Nombre I.

De l'Origine des Angles.

Hypothése I.

333. Si le rayon AD (*fig.* 27.) qui dans sa révolution décrit par son extrémité D une circonfé-

rence de cercle, est supposé laisser, par-tout où il passe, des traces, ou lignes AC, AB, AI, &c. deux de ces *traces*, ou *lignes*, ou *rayons* AC, AD, intercepteront un *espace*, laisseront une *ouverture*, auront entr'eux une *inclinaison*, que l'on peut évaluer & comparer.

DÉFINITIONS.

I.

334. Cet *espace*, cette *ouverture*, cette *inclinaison* plus ou moins grande, que laissent entr'eux deux rayons, ou lignes AC, AD, s'appelle *Angle*.

I I.

335. Les rayons AC, AD s'appellent les *Côtés* de l'angle; le point A où les côtés se rencontrent, s'appelle le *Sommet* de l'angle; l'arc CD compris entre les côtés & décrit du sommet A, pris comme centre, s'appelle la *Mesure* de l'angle.

I I I.

336. L'angle qui est mesuré par un arc qui est le quart de la circonférence, s'appelle *Angle droit*; tel est l'angle BAD (*fig.* 27.), ou ABC (*fig.* 28.).

I V.

337. L'angle qui est mesuré par un arc moindre que le quart de la circonférence, s'appelle *Angle aigu*; tel est l'angle CAD (*fig.* 27.), ou l'angle DEF (*fig.* 29.).

V.

338. L'angle qui est mesuré par un arc plus grand que le quart de la circonférence s'appelle *Angle obtus*; tel est l'angle IAD (*fig.* 27.), ou l'angle GHO (*fig.* 30.).

V I.

339. La différence d'un angle aigu avec l'angle droit s'appelle *complément* de cet angle, & sa différence avec deux angles droits, s'appelle *supplément* de cet angle; *par ex*: l'angle IAB (*fig.* 27.) est le complément de l'angle IAH, & l'angle IAD est son supplément: en général on appelle *complément* ou *supplément* d'un angle, ce qu'il faut lui ajouter

pour qu'il devienne égal ou à un angle droit, ou à deux angles droits.

Obſervez que lorſque l'angle eſt déſigné par trois lettres, la lettre du milieu déſigne toujours le ſommet de l'angle; & lorſqu'on déſigne l'angle par une ſeule lettre, on prend toujours celle qui déſigne le ſommet.

Hypothèse II.

340. Si dans la ligne AD (*fig.* 27.) ou bien dans la ligne CB (*fig.* 31.), tandis que l'extrémité B décrit une circonférence, vous ſuppoſez que les points O, E, & tant d'autres qu'il vous plaira, décrivent auſſi des circonférences; ces circonférences auront toutes le même centre C, & s'appellent par cette raiſon circonférences *concentriques.*

Corollaire I.

341. Toutes les lignes droites tirées du centre commun, & qui traverſeront les circonférences concentriques, opéreront dans ces circonférences, ou dans les arcs de ces circonférences, les mêmes diviſions, comme de moitié, de tiers, de quart, & de tant de parties ſemblables que l'on voudra; car le rayon CB dans ſa révolution a déſigné & marqué par ſon point E autant de parties dans la petite circonférence, qu'il en a déſignées par ſon extrémité B dans la grande circonférence, avec cette différence ſeulement, que ces parties ſont plus petites dans l'une, & plus grandes dans l'autre; mais elles ſeront toujours ſemblables.

Corollaire II.

342. Donc toute circonférence grande ou petite, peut être partagée en un égal nombre de parties ſemblables; car toutes les circonférences, grandes ou petites, ayant une courbure uniforme, peuvent toujours être ſuppoſées concentriques.

Corollaire III.

343. C'eſt pourquoi les Géométres ont diviſé

la circonférence du cercle, quel qu'il soit, en 360 parties égales, que l'on appelle *degrés*; chaque degré en 60 parties égales, que l'on appelle *minutes*; chaque minute en 60 *secondes*; chaque seconde en &c. or l'angle est d'autant plus grand, ou plus petit, que l'arc compris entre ses côtés contient plus ou moins de ces parties égales, *degrés* ou *minutes*, ou *secondes*, &c.

I°. L'angle droit est mesuré par le quart de la circonférence, c'est-à-dire, que sa valeur est de 90 degrés.

II°. L'angle obtus est mesuré par un arc de circonférence plus grand que le quart, c'est-à-dire, que sa valeur passe 90 degrés.

III°. L'angle aigu est mesuré par un arc moindre que le quart de la circonférence; c'est-à-dire, que sa valeur est au-dessous de 90 degrés.

Corollaire I V.

344. Chacun de ces arcs AB, IO, DE, (*fig.* 31.) compris entre les mêmes rayons, peut être indifféremment pris pour la mesure de l'angle ACB; car chacun de ces arcs contient un même nombre de degrés, puisque les rayons CA, CB ont opéré les mêmes divisions dans les circonférences concentriques.

Corollaire V.

345. D'où il suit que la *grandeur*, ou *quantité* de l'angle ne dépend ni de la longueur des côtés, ni de la grandeur de l'arc intercepté entre les côtés; mais seulement du nombre de degrés que contient l'arc, petit ou grand, compris entre ses côtés, & décrit du sommet de l'angle pris pour centre.

Corollaire V I.

346. Pour connoître la mesure d'un angle, *par ex :* CAD (*fig.* 23.), il faut concevoir qu'il a son sommet au centre du cercle, & alors l'arc de circonférence CBD compris entre ses côtés sera sa mesure.

Corollaire VII.

347. Tous les angles droits sont égaux, puisqu'ils sont mesurés chacun par le quart de la circonférence.

NOMBRE II.

De la Qualité des Angles.

La qualité des angles dépend de la position des lignes, par la rencontre desquelles ils sont formés.

THÉORÊME I.

348. *Une ligne droite qui est perpendiculaire sur une autre ligne droite, forme avec elle deux Angles, dont chacun est droit* (fig. 32.).

DÉMONST. La ligne CD, perpendiculaire sur AB, ne penche pas par conséquent plus d'un côté que de l'autre: donc l'angle CDA = CDB: or si du point D, comme centre, on décrit une circonférence; il est évident que les deux angles CDA+CDB sont mesurés par la demi-circonférence: donc chacun d'eux est mesuré par le quart de la circonférence: donc chacun de ces angles est droit, ou est = 90 degrés.

Corollaire I.

349. Si vous prolongez la ligne CD jusqu'en E (*fig.* 33.), alors les deux lignes CE, AB, formeront autour du point D quatre angles droits.

Corollaire II.

350. Si une ligne perpendiculaire coupe deux paralleles, elle opérera les mêmes effets, & formera les mêmes angles, & de la même maniere, sur la seconde parallele que sur la premiere: c'est pourquoi elle formera autour des deux points d'intersection huit angles droits (*fig.* 39.).

THÉORÊME II.

351. *Une ligne droite qui tombe obliquement sur une autre droite, forme avec elle deux Angles, l'un aigu, & l'autre obtus, dont la somme vaut deux angles droits* (fig. 34.).

DÉMONST. Si du point D, comme centre, on décrit une circonférence, il est évident que la somme me des angles CDA + CDB aura pour meſure la demi-conférence: donc cette ſomme vaudra 180 degrés, ou deux angles droits. Mais la ligne CD étant oblique, penche plus du côté de A que de B: donc on aura l'angle CDA < CDB: donc le premier ſera aigu, & le ſecond obtus.

Corollaire I.

352. Si vous prolongez la ligne CD pour avoir CE (*fig.* 35.), alors les deux lignes CE & BA formeront autour du point d'interſection D quatre angles, deux aigus & deux obtus, dont la ſomme vaudra quatre angles droits.

Corollaire II.

353. Dans le cas où deux lignes s'entrecoupent en un même point C (*fig.* 36.), les angles oppoſés au ſommet C, *par ex:* les angles DCB, ACE, ſont égaux; car ſi du ſommet commun C, pris comme centre, on décrit une circonférence, l'arc DB, meſure de l'angle DCB, ſera égal à l'arc AE, meſure de l'angle oppoſé: en effet l'arc EAD = ADB, parce qu'ils ſont chacun la moitié de la circonférence: donc ſi l'on retranche de l'un & l'autre la portion commune AD, les reſtes ſeront égaux, c'eſt-à-dire, l'on aura AE = DB.

Corollaire III.

354. Si pluſieurs lignes DC, FC, HC (*fig.* 37.) tombent ſur un même point C d'une ligne BA, la ſomme de tous les angles formés autour du point C vaudra deux angles droits; car ils ſeront tous meſurés par la demi-circonférence du cercle qui ſeroit décrite du point C comme centre.

Corollaire IV.

355. Si vous prolongez les lignes DC, FC, HC (*fig.* 38.), pour avoir pluſieurs lignes qui s'entrecoupent toutes au point C, la ſomme de tous les angles formés de part & d'autre autour du point C, vaudra quatre angles droits, car elle ſera meſurée par la circonférence entiere.

Théorême III.

356. *Une ligne droite qui traverse obliquement deux Paralleles, formera précisément les mêmes Angles sur la seconde Parallele que sur la premiere.*

C'est-à-dire, que tous les angles respectifs & *correspondans*, formés sur les deux paralleles par la ligne oblique & sécante, seront égaux (*fig.* 40.).

Démonst. Les angles correspondans sont ceux qui sont formés du même côté de la sécante, l'un en dedans, l'autre en dehors des paralleles, *par ex :* f & b, h & d : or l'on aura $f=b$, $h=d$, &c. Car ces angles sont formés par l'inclinaison de l'oblique sur les deux paralleles MO, NL : or l'inclinaison de l'oblique est la même sur les deux paralleles, parce qu'une ligne qui tombe obliquement sur l'une des paralleles, tombe dans le même degré d'obliquité sur l'autre parallele, donc elle y opere les mêmes effets, & y forme les mêmes angles.

Corollaire I.

357. Donc les angles *alternes internes* sont égaux entr'eux. Car les angles alternes internes sont ceux qui sont formés de différens côtés de la sécante entre les deux paralleles, l'un en bas, l'autre en haut ; *par ex :* f & c, e & d, &c. or on aura, *par ex :* $f=c$; car $f=b$, puisqu'ils sont correspondans, & $b=c$, parce qu'ils sont opposés au sommet : donc $f=c$.

Corollaire II.

358. Les Angles *alternes externes* sont aussi égaux entr'eux. Car les angles alternes externes sont ceux qui sont hors des paralleles & de différent côté de la sécante, l'un en haut, l'autre en bas ; *par ex :* h & a : or l'on a $h=a$; car $h=d$, parce qu'ils sont correspondans, & $d=a$, parce qu'ils sont opposés au sommet : donc $h=a$.

Corollaire III.

359. Dans ce même cas les angles *adjacens* valent deux angles droits. Car les angles adjacens sont ceux qui sont du même côté de la sécante

en dedans des paralleles; *par ex: f & d*, or on a la ſomme $f+d=180$ degrés, ou deux angles droits; car $f+h=180$ degrés (351), & $h=d$, parce qu'ils ſont correſpondans: donc $f+d=180$ degrés.

Théorême IV.

360. *Réciproquement ſi les Angles correſpondans, formés par une Sécante qui traverſe deux lignes, ſont égaux, ces deux lignes ſont paralleles entr'elles* (fig. 40.).

Démonst. Par l'hypothèſe les angles correſpondans f & b ſont égaux: donc ils ſont formés par des lignes également inclinées ſur la ſécante AB: donc les lignes MO, NL, ſont également inclinées ſur la ſécante AB, & par conſéquent (307) elles ſont paralleles entr'elles.

Corollaire.

361. De ce théorême on déduit toutes les propoſitions inverſes des corollaires tirés du troiſiéme théorême; ſçavoir,

I°. Si les angles alternes internes ſont égaux, les lignes traverſées par la ſécante ſeront paralleles; car par l'hypothèſe $f=c$: or $c=b$ (353): donc $b=f$; donc les angles correſpondans b, f, ſont égaux, & par conſéquent les lignes MO, NL qui forment ces angles avec la ſécante AB, ſont paralleles entr'elles.

II°. Si les angles alternes externes ſont égaux; les lignes traverſées par la ſécante ſeront paralleles; ce qui ſe prouve de la même maniere.

III°. Si les angles adjacens valent deux angles droits, les lignes traverſées par la ſécante ſeront encore paralleles; car par l'hypothèſe $f+d=180$ degrés, ou deux angles droits: or (351) $d+b=180$ degrés: donc $f=b$: donc les angles correſpondans f & b ſont égaux, & par conſéquent les lignes MO, NL, traverſées par la ſécante, ſont paralleles.

Nombre III.

De l'Evaluation des Angles.

Evaluer un angle, c'eſt déterminer l'arc de circonférence qui lui ſert de meſure; c'eſt pourquoi pour évaluer un angle, il faut le conſidérer par rapport au cercle : or l'angle conſidéré par rapport au cercle peut avoir différentes poſitions & prend différens noms.

DÉFINITIONS.

I.

362. Un angle dont le ſommet eſt au centre, ou qui eſt formé par deux rayons, s'appelle *Angle central ;* tel eſt l'angle CAD (*fig.* 42.).

II.

363. Un angle dont le ſommet eſt à la circonférence, & qui eſt formé par deux cordes, s'appelle *Angle inſcrit ;* tel eſt l'angle CBD (*fig.* 42.). S'il eſt formé par une corde & une tangente, ou par une corde & une ſécante extérieure, il s'appelle angle du *Segment, par ex :* CAB (*fig.* 48.), & CBA (*fig.* 49.) : s'il eſt formé par la circonférence & une tangente, il s'appelle angle de *Contingence ;* tel eſt l'angle CEAB (*fig.* 48.).

III.

364. Un angle dont le ſommet eſt hors de la circonférence, s'appelle *Angle circonſcrit :* tels ſont les angles BAC (*fig.* 50.), DAE (*fig.* 51.), EAC, (*fig.* 52.).

IV.

365. Un angle dont le ſommet eſt en dedans de la circonférence, mais ailleurs qu'au centre, s'appelle angle *excentrique ;* tel eſt l'angle DAE (*fig.* 53.).

Remarque.

366. L'angle *central* eſt toujours meſuré par l'arc de circonférence qu'il comprend entre ſes côtés ; c'eſt pourquoi il n'y a nulle difficulté à l'évaluer. Mais lorſque l'angle a ſon ſommet ailleurs qu'au centre du cercle, alors il n'eſt pas meſuré par l'arc qu'il comprend entre ſes côtés ; mais ſeulement par une portion de cet arc, & c'eſt cette portion qu'il faut déterminer, pour évaluer l'angle.

THÉORÊME I.

367. *L'angle de contingence est un angle infiniment petit.*

DÉMONST. La circonférence du cercle ne s'éloigne qu'infiniment peu de sa tangente au point de contingence: donc à ce point de contingence elle ne forme avec la tangente qu'un angle infiniment petit.

THÉORÊME II.

368. *L'Angle formé par le rayon, ou par le diamétre, avec la tangente, est un angle droit* (fig. 24, 25 & 26.).

DÉMONST. Car la tangente est perpendiculaire (324) à l'extrémité du rayon.

Corollaire.

369. Donc l'angle formé par le rayon, ou par le diamétre, avec la circonférence du cercle, est un angle droit; car il est égal à l'angle formé par le diamétre & la tangente, puisque l'un & l'autre ne différent entr'eux que de la quantité de l'angle de contingence, qui est une quantité infiniment petite.

On conclud de-là que tous les rayons & tous les diamétres sont perpendiculaires à la circonférence du cercle.

THÉORÊME III.

370. *L'Angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

DÉMONST. Il y a trois cas: ou bien l'un des côtés de l'angle passe par le centre (*fig.* 43.); ou bien les deux côtés interceptent le centre (*fig.* 44.); ou bien le centre est hors des deux côtés (*fig.* 45.).

1°. Si l'un des côtés passe par le centre, soit mené le diamétre FE, parallele au côté DA, & l'on aura l'angle inscrit DAB = FCB angle central, & qui lui est correspondant; donc ils ont même mesure: or la mesure de l'angle central FCB est l'arc FB, mais l'arc FB = AE = DF (329): donc l'arc FB = DF: donc l'arc FB, mesure de l'angle inſcrit, eſt la moitié de l'arc DFB, intercepté entre les côtés de l'angle inſcrit: donc, &c.

II°. Si les deux côtés interceptent le centre, ſoit mené du ſommet de l'angle le diamétre AF: or l'angle BAF aura pour meſure la moitié de l'arc BF, comme nous venons de le prouver. Par la même raiſon l'angle FAD a pour meſure la moitié de l'arc FD: donc la ſomme des angles BAF + FAD, ou l'angle total BAD aura pour meſure la moitié de la ſomme des arcs BF + FD = BD.

III°. Si le centre eſt hors des deux côtés, ſoit mené du ſommet de l'angle le diamétre AF, & l'angle FAD aura pour meſure la moitié des arcs FB + BD, comme il vient d'être prouvé: or l'angle FAB a pour meſure la moitié de l'arc FB: donc retranchant de la meſure de l'angle total celle de l'angle FAB, il reſtera pour meſure de l'angle BAD la moitié de l'arc BD.

Corollaire I.

371. L'angle *inſcrit* eſt ſous-double de l'angle *central*, appuyé ſur le même arc CD (*fig.* 42.): car l'angle central a pour meſure l'arc entier ſur lequel il eſt appuyé; au lieu que l'angle inſcrit n'a pour meſure que la moitié de ce même arc.

Corollaire II.

372. Donc l'angle A appuyé ſur le diamétre EB (*fig.* 46.), eſt un angle droit, puiſqu'il a pour meſure la moitié de la demi-circonférence ſur laquelle il eſt appuyé.

Corollaire III.

373. Donc tous les angles inſcrits A, B, C (*fig.* 47.), appuyés ſur le même diamétre, ſont tous égaux, puiſqu'ils ſont tous droits. En général tous les angles inſcrits, appuyés ſur un même arc, ſont égaux.

THÉORÊME IV.

374. *L'Angle du Segment formé par une corde & une*

tangente, a pour mesure la moitié de l'arc soutenu par la corde (fig. 48.).

Démonst. Ayant mené la ligne CD, parallele à la tangente AB, on aura (357) l'angle du segment BAC = ACD, angle inscrit : or la mesure de l'angle inscrit ACD est (370) la moitié de l'arc AD : mais l'arc AD = AC (327), donc la mesure de l'angle du segment est la moitié de l'arc AD, ou de l'arc AC soutenu par la corde.

En suivant les principes ci-dessus, il sera aisé de faire voir que l'angle du segment formé par une corde & une sécante extérieure, est mesuré par la demi-somme des arcs soutenus par la corde & par le prolongement de la sécante en dedans du cercle (*fig.* 49.).

Théorême V.

375. *L'Angle circonscrit a pour mesure la moitié de la différence des arcs concave & convexe, interceptés entre ses côtés.*

Démonst. Il y a trois cas : ou bien l'angle circonscrit est formé par deux tangentes (*fig.* 50.); ou par deux sécantes (*fig.* 51.) ; ou par une tangente & une sécante (*fig.* 52.).

I°. Dans le premier cas soit mené du point de contingence D la ligne DE, parallele à la tangente AB, & l'on aura (356) l'angle circonscrit BAC = EDC angle du segment : donc ils auront même mesure; or la mesure de l'angle du segment EDC est la moitié de l'arc ED; mais l'arc ED est la différence, ou l'excès de l'arc concave FED sur l'arc convexe FD ; car on a FED — FE = ED : or (327) FE = FD : donc FED — FD = ED : donc, &c.

II°. Dans le second cas soit menée du point B la ligne BC, parallele au côté AD, & l'on aura l'angle circonscrit DAE = CBE angle inscrit, & qui lui est correspondant : donc ils auront même mesure. Or l'angle inscrit CBE a pour mesure la moitié de l'arc CE, lequel est la différence des arcs concave & convexe; car puisque DC=OB (329), il s'ensuit que DCE — OB = CE.

III°. Dans le troisiéme cas, soit menée du point B la ligne BD, parallele à la tangente AE, & l'on prouvera de la même maniere que la mesure de l'angle EAC est la moitié de l'arc DC = EDC — EB, différence entre les arcs concave & convexe.

Théorême VI.

376. *La Mesure de l'Angle excentrique est la moitié de la somme des arcs interceptés de part & d'autre, en dessus & en dessous entre ses côtés prolongés* (figures 53 & 54.).

Démonst. Ayant mené du point B la ligne BF, parallele au côté AE, on aura l'angle excentrique DAE = DBF angle inscrit & qui lui est correspondant: donc ils auront même mesure, sçavoir, la moitié de l'arc DEF: or puisque (329) EF = BG, il s'ensuit que l'arc DEF = DE + BG somme des arcs interceptés entre les côtés prolongés en-dessus & en-dessous.

ARTICLE II.

De l'Assortiment des Lignes ou des Figures.

I°. Deux lignes qui se rencontrent, forment un angle: pour former une figure, il faut au moins trois lignes, qui par leur rencontre renferment un espace.

II°. Ces lignes qui se rencontrent, s'appellent les côtés de la figure: ces côtés par leur inclinaison forment des *Angles*; des angles & des côtés pris ensemble résultent les *Figures*.

III°. Les figures prennent différens noms suivant le nombre de leurs côtés.

Une figure de trois côtés s'appelle	*Triangle*,
de quatre côtés,	*Quadrilatere*,
de cinq côtés,	*Pentagone*,
de six côtés,	*Exagone*,
de sept côtés,	*Eptagone*,
de huit côtés, &c.	*Octogone*, &c.

En général toute figure qui a plus de trois côtés, s'appelle *Polygone ;* si elle a un nombre infini de côtés, elle s'appelle *Polygone infinitaire*, ou *Cercle.*

IV°. Comme toutes les lignes se rapportent à deux, sçavoir, à la ligne *droite*, & à la ligne *circulaire ;* de même toutes les figures peuvent se rapporter à deux, sçavoir, au *triangle*, & au *cercle ;* au *triangle*, en diminuant le nombre des côtés de la figure; au *cercle*, en augmentant le nombre des côtés. Le triangle & le cercle sont donc les deux extrêmes de toutes les figures possibles, qui par cette raison participent, & des propriétés du triangle, & de celles du cercle. C'est pourquoi nous allons parler des figures: 1°. considérées par rapport au triangle : 2°. considérées par rapport au cercle.

PARAGRAPHE I.

Des Figures considérées par rapport au Triangle.

DÉFINITIONS.

I.

377. Le triangle prend différens noms suivant la qualité de ses côtés, & s'appelle,

s'il a les trois *côtés* égaux,	*Equilatéral*,
s'il a deux *côtés* égaux,	*Isocele*,
s'il a les trois *côtés* inégaux,	*Scalene.*

Voyez les figures 55, 56, 57.

II.

378. Le triangle prend encore différens noms, suivant la qualité de ses angles, & s'appelle,

s'il a un angle droit,	*Rectangle*,
s'il a tous ses angles aigus,	*Acutangle*,
s'il a un angle obtus,	*Obtusangle*,

III.

379. Le quadrilatere prend aussi différens noms suivant la qualité de ses angles & de ses côtés, & s'appelle,

Parallélogramme, lorsqu'il a ses côtés opposés paralleles (*fig.* 58.).

Trapeze, s'il n'a que deux côtés paralleles (*fig.* 59.).

Trapezoïde, s'il n'a aucun de ses côtés paralleles.

Parallélogramme rectangle, ou simplement *Rectangle*, s'il a tous ses angles droits, (*fig.* 60.).

Quarré, s'il a tous ses angles & tous ses côtés égaux (*fig.* 61.).

Lozange, ou *Rhombe* s'il a tous ses côtés égaux, & seulement les angles opposés égaux (*fig.* 62.).

IV.

380. Dans une figure l'angle formé par l'inclinaison de deux côtés adjacens, s'appelle *Angle au périmétre*. L'angle formé par un côté & le prolongement du côté adjacent, s'appelle *Angle extérieur*. L'angle formé par deux lignes tirées du centre de la figure à deux angles adjacens du périmétre, s'appelle *Angle au centre*; & on appelle *Centre*, le point qui tient le juste milieu dans la surface de la figure.

V.

381. Une ligne AC, ou AD (*fig.* 58 &c. 65.) tirée du sommet d'un angle du périmétre, à l'un des angles opposés, s'appelle *Diagonale*.

THÉORÊME I.

382. *Les trois angles d'un triangle pris ensemble, valent deux Angles droits, ou* 180 *degrés* (fig. 63.).

DÉMONST. Si l'on fait passer une circonférence de cercle par les sommets des trois angles du triangle CAB, ce qui est toujours possible (274); l'angle en A étant inscrit, a pour mesure (370) la moitié de l'arc CB; l'angle en B par la même raison a pour mesure la moitié de l'arc CA; & l'angle en C a pour mesure la moitié de l'arc AB: donc la somme des trois angles a pour mesure la moitié de la circonférence entiere, ou 180 degrés; donc, &c.

Corollaire I.

383. Donc connoiſſant deux angles dans un triangle, il ſera facile de connoître le troiſiéme, parce qu'il ſera toujours le ſupplément des deux autres.

Corollaire II.

384. Donc un triangle ne peut pas avoir deux angles droits, encore moins deux angles obtus; car alors la ſomme des trois angles vaudroit plus de deux angles droits.

Corollaire III.

385. Lorſque deux angles d'un triangle ſont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troiſiéme angle eſt auſſi égal de part & d'autre.

Corollaire IV.

386. Les quatre angles à la circonférence du quadrilatere valent quatre angles droits; les cinq angles à la circonférence du pentagone valent ſix angles droits; les ſix angles à la circonférence de l'exagone valent huit angles droits, & ainſi du reſte (*fig.* 62, 64, 65.).

En général la ſomme des angles à la circonférence d'un polygone quelconque vaut autant de fois deux angles droits, ou 180 degrés, qu'il y a de côtés dans le polygone, moins deux. Car ſi d'un angle du polygone on mene des diagonales à tous les autres angles, ces diagonales formeront dans le polygone autant de triangles qu'il y a de côtes dans le polygone, moins deux côtés; & la ſomme des angles à la circonférence ne ſera pas diſtinguée de la ſomme des angles de ces triangles. Or la ſomme des angles dans chaque triangle vaut (382) deux angles droits: donc la ſomme des angles de tous ces triangles, & par conſéquent la ſomme des angles à la circonférence du polygone, vaut autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés dans le polygone, moins deux.

Corollaire V.

387. On peut dire aussi que la somme des angles à la circonférence du polygone vaut autant de fois deux angles droits, moins quatre, qu'il y a de côtés dans le polygone.

C'est pourquoi si l'on nomme s la somme des angles à la circonférence du polygone, r l'angle droit, n le nombre des côtés du polygone; la somme des angles à la circonférence sera représentée par cette formule générale,

$$s = 2rn - 4r.$$

THÉORÊME II.

388. *Dans un triangle l'Angle extérieur* ACD, *ou* d, *est égal aux deux Angles intérieurs opposés* o *&* m (*fig.* 66.).

DEMONST. Les deux angles intérieurs avec l'angle n valent deux angles droits, c'est-à-dire, $n + o + m = 180$ degrés (382): pareillement (351) $n + d = 180$ degrés: donc $n + d = n + o + m$: donc, retranchant de part & d'autre la quantité commune n, on aura $d = o + m$.

Corollaire I.

389. Dans un triangle tous les angles extérieurs pris ensemble valent quatre angles droits. Car chaque angle extérieur du triangle avec l'angle adjacent vaut (382) deux angles droits: donc les trois angles extérieurs avec les intérieurs valent tous ensemble six angles droits; donc si on en retranche deux angles droits, qui sont la valeur des angles intérieurs, il restera quatre angles droits pour la valeur des angles extérieurs.

Corollaire II.

390. Tous les angles extérieurs à la circonférence du polygone pris ensemble valent quatre angles droits (*fig.* 67, 68, 69,) car la somme des angles, tant intérieurs qu'extérieurs du polygone, vaut autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés dans le polygone, c'est-à-dire qu'elle est

$$s = 2rn;$$

d'où, ſi l'on retranche $2rn - 4r$, qui eſt la valeur des angles intérieurs, on aura

$$s = 2rn - 2rn + 4r = 4r,$$

pour la valeur des angles extérieurs.

Corollaire III.

391. Donc ſi l'on diviſe le polygone en triangles, non par des diagonales, comme ci-deſſus; mais par des rayons tirés du centre à chaque angle de la circonférence, la ſomme des angles extérieurs ſera égale à la ſomme des angles formés autour du centre (*fig.* 69.): car chacune de ces ſommes eſt égale à quatre angles droits.

THÉORÊME III.

392. *Dans un Triangle le plus grand Angle eſt oppoſé au plus grand côté; le plus petit Angle, au plus petit côté* (fig. 46.).

DÉMONST. Si l'on inſcrit le triangle à un cercle, il eſt évident que le plus grand angle A ſera appuyé ſur un plus grand arc, lequel ſera ſoutenu par une plus grande corde EB, laquelle eſt le côté oppoſé à l'angle A: on prouve de même que le plus petit angle eſt oppoſé au plus petit côté.

Corollaire I.

393. Donc dans un triangle les angles oppoſés à des côtés égaux, ſont égaux, & réciproquement: car le triangle étant inſcrit à un cercle, les angles égaux ſont appuyés ſur des arcs égaux, leſquels ſeront ſoutenus par des cordes égales, leſquelles ſeront les côtés oppoſés aux angles égaux.

Corollaire II.

394. Donc dans le triangle *équilatéral* les trois angles ſont égaux: dans le triangle *iſocele* les deux angles ſur la baſe ſont égaux: dans le triangle *ſcalene* les trois angles ſont inégaux.

THÉORÊME IV.

395. *Dans un triangle iſocele*, par ex: CAD (fig. 73.) *une perpendiculaire, menée du ſommet ſur la baſe,*

divise en deux également ; 1°. la base ; 2°. l'angle compris entre les côtés égaux.

DÉMONST. Si du sommet A, où se réunissent les deux côtés égaux, & de l'intervalle AC, ou AD, on décrit une circonférence de cercle, il est évident que la base DC du triangle isocele sera une corde du cercle, & que la perpendiculaire AN, menée du sommet du triangle sur cette base, sera une perpendiculaire menée du centre du cercle sur une corde : donc (319) elle divisera en deux également ; 1°. la corde DC, laquelle est base du triangle isocele ; 2°. l'arc CND, qui est la mesure de l'angle DAC, & par conséquent l'angle DAC sera lui-même divisé en deux également.

Ce que nous venons de démontrer du triangle isocele, convient à plus forte raison au triangle équilatéral.

THÉORÊME V.

396. *Si dans un triangle quelconque on tire une Ligne parallele à la base du triangle, les Angles respectifs, ou correspondans, formés sur les deux bases paralleles, seront égaux* (fig. 70.).

DÉMONST. L'angle en D est égal à l'angle en B, parce qu'ils sont correspondans (356) : par la même raison l'angle en E est égal à l'angle en C : donc, &c.

Remarque.

397. La proposition inverse est aussi vraie ; c'est-à-dire, que, si les angles formés sur les deux bases sont égaux, ces bases sont paralleles : car les angles en D & B sont correspondans, parce qu'ils sont formés du même côté de la sécante AB : or ils sont égaux par l'hypothèse : donc les lignes DE, BC sont également inclinées sur la sécante ; donc elles sont paralleles.

Corollaire.

398. Ayant mené dans un triangle une ligne parallele à la base, on aura deux triangles, l'un plus grand, & l'autre plus petit, tels que tous les an-

gles de l'un feront égaux aux angles correfpondans de l'autre (*fig.* 70.) comme il eft évident. Ces triangles ADE, ABC s'appellent triangles *équiangles*.

Hypothèse.

399. Si dans le petit triangle DAE, on fuppofe que les côtés AD, AE, viennent à s'allonger, & que la bafe DE defcende parallelement à elle-même, jufqu'à ce qu'elle fe confonde avec la bafe BC, alors les deux triangles non-feulement font *équiangles*, mais font auffi égaux; puifqu'alors les deux triangles ne font point diftingués l'un de l'autre, mais qu'ils conviennent parfaitement l'un avec l'autre.

Remarque I.

400. Le cas où deux triangles pofés l'un fur l'autre, conviennent parfaitement, s'appelle *Superpofition*: or toutes les fois que la fuperpofition eft poffible, on conclud l'égalité des deux triangles.

Remarque II.

401. De fix chofes qui font dans le triangle, fçavoir, trois angles & trois côtés, il fuffit d'en confidérer cinq, fçavoir, trois côtés & deux angles, parce que deux angles étant donnés dans un triangle (383) le troifiéme eft auffi donné.

THEORÊME VI.

402. *Deux triangles* ACB, *acb* (fig. 71.) *qui ont tous leurs côtés homologues égaux, font égaux entr'eux.*

DEMONST. Des points A & B, comme centres, décrivez les arcs DCE, FCG, qui fe coupent au fommet C; fi vous pofez le côté *ab* fur le côté AB, le point *a* tombera fur le point A, & le point *b* fur B, à caufe de $ab = AB$: or à caufe de $ac = AC$ le côté *ac* aboutira quelque part dans l'arc DCE; & pareillement à caufe de $bc = BC$, la ligne *bc* aboutira quelque part dans l'arc FCG: mais les côtés *ac*, *bc* fe réuniffent à un même point: donc ils aboutiront tous deux au même point C, interſection des deux arcs; donc les côtés *ac*, *bc* du triangle *abc* conviendront parfaitement avec les côtés AC, BC de l'autre triangle, & par conſéquent tout le triangle *abc* conviendra parfaitement avec tout le triangle ABC: donc on aura *abc* = ABC.

THÉORÊME VII.

403. *Deux triangles qui ont deux angles égaux de part & d'autre, & le côté compris entre ces angles égaux, égal de part & d'autre, ſont égaux entr'eux* (fig. 71.).

DEMONST. Soit l'angle A = *a*, l'angle B = *b*, & le côté AB = *ab*, il eſt évident, ſi vous poſez le côté *ab* ſur AB, qu'à cauſe de l'égalité des angles en A & *a*, en B & *b*, le côté *ac* tombera ſur AC, & *bc* ſur BC; donc ils ſe réuniront au même point C: donc tout le triangle *abc* conviendra parfaitement avec tout le triangle ABC: donc on aura *abc* = ABC.

THÉORÊME VIII.

404. *Deux triangles qui ont deux côtés égaux, & l'angle compris entre ces côtés, égal de part & d'autre, ſont égaux entr'eux* (fig. 71.).

DEMONST. Soit le côté AC = *ac*, le côté BC = *bc*, & l'angle C = *c*; ſi vous poſez le côté AC ſur *ac*, & BC ſur *bc*, ces côtés tomberont exactement les uns ſur les autres à cauſe de l'angle C = *c*; & parce qu'ils ſont ſuppoſés égaux, le point *a* tombera ſur le point A, & *b* ſur B: donc le côté *ab*, qui meſure la diſtance des points *a* & *b*, ſera égal & tombera exactement ſur AB: donc le triangle *abc* conviendra parfaitement avec le triangle ABC: donc on aura *abc* = ABC.

THÉORÊME IX.

405. *Deux triangles qui ont deux côtés égaux, & un angle oppoſé à l'un de ces côtés égal de part & d'autre, ſont égaux, pourvu que le ſecond angle op-*

posé à l'autre côté soit de même espéce de part & d'autre (fig. 72.).

DEMONST. Soit le côté *ab* = AB, le côté *ac* = AC, & l'angle *b* = B; si les angles *c*, C, opposés aux autres côtés égaux *ab*, AB, sont de même espéce, ou tous deux aigus, ou tous deux obtus, je dis que les deux triangles seront égaux. Posez le point *b* sur le point B, & le côté *ab* sur AB; les deux côtés *ab*, AB conviendront parfaitement, puisqu'ils sont égaux; & la base *bc* tombera sur BC, à cause de l'angle *b* = B; mais de plus le point *c* tombera sur le point C; car ayant mené la perpendiculaire AD, la ligne AC tombera du même côté de la perpendiculaire que la ligne *ac*, à cause des angles en *c* & C de même espéce. En effet si la ligne AC tomboit de l'autre côté de la perpendiculaire, & devenoit AE, alors l'angle en E seroit obtus, & par conséquent ne seroit plus de même espéce que l'angle en *c* : donc les lignes *ac*, AC tomberont du même côté de la perpendiculaire AD : mais ces deux lignes sont des obliques égales, menées d'un même point A; donc (297) elles ont même éloignement de perpendicule, & par conséquent le point *c* tombera sur le point C.

Corollaire I.

406. Donc des cinq choses que l'on peut considérer dans un triangle, sçavoir, trois côtés & deux angles, si trois d'une part sont égales aux trois correspondantes de l'autre part, la *superposition* des triangles sera possible, & l'on pourra conclure que les deux triangles seront parfaitement égaux.

Corollaire II.

407. Deux figures quelconques, qui peuvent être partagées en un même nombre de triangles égaux, sont dès-lors égales.

PARAGRAPHE II.

Des Figures conſidérées par rapport au Cercle.

Les figures conſidérées par rapport au cercle ; ſont les figures conſidérées en tant qu'elles ont un *centre* & un *périmétre*, ou *circonférence* autour de ce centre, & des propriétés relatives à ce centre & à cette circonférence.

DÉFINITIONS.

I.

408. Une figure eſt dite *inſcrite* dans un cercle, lorſque tous ſes angles ont leur ſommet à la circonférence du cercle. Elle eſt dite *circonſcrite*, lorſque tous ſes côtés touchent la circonférence du cercle.

II.

409. Une figure eſt dite être *réguliere*, lorſque tous ſes côtés ſont égaux, & que tous ſes angles ſont égaux.

Corollaire I.

410. Puiſque dans une figure réguliere tous les angles ſont égaux, il s'enſuit qu'on trouvera la valeur de l'angle à la circonférence, en diviſant la ſomme des angles par le nombre des angles. C'eſt pourquoi appellant x l'angle à la circonférence, & la ſomme des angles à la circonférence étant (387) $2rn-4r$, on aura $x=\frac{2rn-4r}{n}$.

Corollaire II.

411. Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés; *par ex :* deux exagones réguliers ſont toujours *équiangles*. Car la ſomme des angles eſt la même dans l'un & l'autre exagone, ſavoir, de huit angles droits : or dans chaque exagone les ſix angles ſont égaux entr'eux, puiſque l'un & l'autre exagone eſt régulier : donc chacun des angles eſt la ſixiéme partie de huit angles droits dans l'un & l'autre exagone : donc les angles de l'un

ſont égaux aux angles de l'autre, c'eſt-à-dire, que les deux polygones ſont équiangles.

THÉORÊME I.

412. *Si dans un Polygone régulier on tire du ſommet des angles des Lignes* DA, FA, HA (fig. 69.), *qui partagent chacun de ſes angles en deux également, ces Lignes priſes du ſommet juſqu'au point de rencontre, ſeront toutes égales entr'elles.*

DEMONST. I°. On aura la ligne DA = FA; car l'angle total en D eſt égal à l'angle total en F, puiſque le polygone eſt ſuppoſé régulier : donc l'angle *n*, qui eſt la moitié du premier, eſt égal à l'angle *o*, qui eſt la moitié du ſecond : donc dans le triangle DAF les deux côtés DA & FA ſont (393) égaux.

II°. Dans le triangle AFH on a par la même raiſon que ci-deſſus l'angle *m* = *r* : donc (393) on aura le côté FA = HA.

III°. On prouvera la même choſe & de la même maniere pour toutes les autres lignes IA, KA, &c.

Corollaire I.

413. Le point A eſt appellé le *centre* du polygone; & les lignes tirées de ce centre aux ſommets des angles du polygone s'appellent *rayons obliques*, leſquels ſont tous égaux entr'eux, comme on vient de le prouver.

Corollaire II.

414. Si du centre du polygone on tire des perpendiculaires; *par ex :* AM, AN, (*fig.* 73.) ſur les côtés, ces perpendiculaires s'appellent *rayons droits :* or tous les rayons droits ſont auſſi égaux entr'eux; car prenant deux rayons droits menés ſur deux côtés adjacens, ils formeront avec le rayon oblique deux triangles rectangles MAC, CAN, qui ſont évidemment égaux entr'eux.

Corollaire III.

415. Dans un polygone régulier le rayon oblique, *par ex :* AF (*fig.* 69.), partage l'angle à la cir-

conférence, sçavoir, l'angle HFD en deux parties égales; cela est évident par la construction (412).

Corollaire IV.

416. Donc l'angle du centre est supplément de l'angle à la circonférence du polygone; car dans le triangle DAF, l'angle A au centre est supplément (382) des deux angles $o+n$: or dans le polygone régulier $o+n=$FDC angle à la circonférence, puisque chaque angle à la circonférence est partagé en deux parties égales par le rayon : donc, &c.

Corollaire V.

417. Donc l'angle au centre est égal à l'angle extérieur du polygone régulier; car l'un & l'autre sont supplémens d'un même angle, savoir, de l'angle à la circonférence du polygone.

Corollaire VI.

418. Dans le polygone régulier le rayon droit divise l'angle au centre, savoir l'angle CAD (*fig.* 73.) & le côté du polygone opposé à cet angle, en deux également; car le triangle DAC est isocele: donc (395) la perpendiculaire ou le rayon droit AN divise en deux également, & l'angle DAC & le côté DC.

THÉORÊME II.

419. *Tout polygone régulier donné, peut être inscrit à un cercle* (fig. 73 & 75.).

DEMONST. Car, puisque tous les rayons obliques sont égaux, si du centre du polygone, & de l'intervalle d'un rayon oblique on décrit une circonférence, elle passera par tous les sommets des angles & le polygone sera inscrit au cercle.

Corollaire.

420. De tous les polygones réguliers inscrits à un même cercle, celui qui aura le plus de côtés, aura un plus grand périmétre; car plus le polygone aura de côtés, plus son périmétre approchera de

la circonférence du cercle, qui eſt plus grande qu'aucun des polygones inſcrits.

THÉORÊME III.

421. *Tout polygone régulier donné, peut être circonſcrit à un cercle* (fig. 74 & 75.).

DEMONST. Car, puiſque tous les rayons droits ſont égaux, ſi du centre du polygone, & de l'intervalle d'un rayon droit, on décrit une circonférence, tous les côtés du polygone toucheront la circonférence, & le polygone ſera circonſcrit.

Corollaire.

422. De tous les polygones réguliers circonſcrits à un même cercle, celui qui aura le plus de côtés, aura un plus petit périmétre; car plus le polygone aura de côtés, plus ſon périmétre approchera de la circonférence du cercle, qui eſt plus petite qu'aucun des polygones circonſcrits.

THÉORÊME IV.

423. *Dans l'Exagone régulier inſcrit, le côté eſt égal au Rayon oblique, ou au Rayon du cercle* (fig. 73.).

DEMONST. Dans le triangle BAC, l'angle A au centre eſt de 60 degrés, parce qu'il eſt ſupplément de l'angle à la circonférence (416) lequel dans l'exagone régulier eſt de 120 degrés; les deux angles ſur la baſe BC ſont égaux, puiſqu'ils ſont chacun la moitié de l'angle à la circonférence, & ſont par conſéquent chacun de 60 degrés: donc dans le triangle BAC tous les angles ſont égaux: donc le triangle BAC eſt équilatéral (393) donc le côté BC = AB rayon oblique du polygone.

Corollaire I.

424. Mais dans les polygones pris au-deſſous de l'exagone le côté eſt plus grand que le rayon, & l'excès du côté ſur le rayon ſera d'autant plus grand, que le polygone aura moins de côtés: car ſi l'on inſcrit à un même cercle tous les polygones réguliers qui ſont au-deſſous de l'exagone, moins le polygone a de côtés, plus ſon côté ſurpaſſera

celui de l'exagone, lequel eſt égal au rayon du cercle.

Corollaire II.

425. Par une raiſon contraire dans les polygones pris au-deſſus de l'exagone, le côté eſt plus petit que le rayon, & l'excès du rayon ſur le côté ſera d'autant plus grand, que le polygone aura plus de côtés.

Théorême V.

426. *Dans le triangle équilatéral le Rayon oblique eſt double du rayon droit* (fig. 76.).

Demonst. Soit le triangle équilatéral DEF inſcrit & circonſcrit à des cercles décrits du centre commun C: le rayon droit CB eſt perpendiculaire au côté, ou à la corde EF: donc la corde EF eſt auſſi perpendiculaire ſur le rayon droit. Mais ayant mené les cordes égales EA, AF, ces cordes ſeront les côtés d'un exagone régulier: donc (423) elles ſeront chacune égales au rayon: donc CE = EA: donc dans la perpendiculaire EF le point E eſt également diſtant des points C & A, donc auſſi (290) le point B ſera également diſtant des points C & A: donc on aura CB = BA, c'eſt-à-dire, que le rayon oblique CE, ou CA, eſt double du rayon droit CB.

Corollaire I.

427. Dans le quarré, dans le pentagone, dans l'exagone, &c. régulier, le rayon oblique eſt moins que double du rayon droit. En général plus le polygone aura de côtés, plus la différence entre le rayon oblique & le rayon droit ſera petite; car plus le polygone aura de côtés, moins la circonférence inſcrite à ce polygone différera de la circonférence circonſcrite au même polygone, & par conſéquent la différence de leurs rayons ſera plus petite; or les rayons de ces circonférences ſont le rayon oblique & le rayon droit du polygone: donc, &c.

Corollaire II.

428. Donc dans le polygone *infinitaire*, ou dans le cercle, les rayons obliques ſont égaux aux rayons droits; ou ce qui eſt le même, tous les rayons ſont égaux: car plus le nombre des côtés du polygone eſt grand, plus la différence entre le rayon oblique & le rayon droit ſera petite, comme nous venons de le voir: donc le nombre des côtés dans le cercle étant infini, la différence entre le rayon droit & le rayon oblique ſera infiniment petite ou nulle.

ARTICLE III.

Du Rapport des Lignes.

Les poſitions ſemblables des lignes, les diviſions faites ſemblablement dans les lignes, mettent entr'elles des rapports, des proportions, des proportionnalités, dont la connoiſſance fait découvrir dans les figures pluſieurs propriétés. Ces lignes s'appellent *proportionnelles*, & les figures à qui elles appartiennent, s'appellent *figures ſemblables*. Nous allons parler, 1°. des lignes proportionnelles; 2°. des figures ſemblables.

PARAGRAPHE I.

Des Lignes proportionnelles.

DÉFINITIONS.

I.

429. On appelle lignes *proportionnelles* des lignes, *par ex :* A, B, *a*, *b*, qui ſont telles, que la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſiéme eſt à la quatriéme, ou que A : B :: *a* : *b*.

II.

430. Deux lignes ſont dites être *réciproquement* proportionnelles à deux autres, lorſqu'elles ſont entr'elles comme les deux autres priſes dans un ordre renverſé; *par ex :* lorſqu'au lieu de A : B :: *a* : *b*, on a au contraire A : B :: *b* : *a*.

III.

431. Deux lignes ſont dites être *réciproques* à

deux autres, lorſque les deux premieres ſont les extrêmes d'une proportion, dont les deux dernieres ſont les moyens, ou lorſqu'on a A : a :: b : B.

I V.

432. Une ligne eſt dite diviſée en *moyenne** & *extrême raiſon*, lorſqu'elle eſt diviſée de façon que la toute A eſt à ſa grande partie B, comme la grande partie B eſt à la plus petite C, ou, ce qui eſt le même lorſque la plus grande partie eſt moyenne proportionnelle entre la ligne entiere A & la plus petite partie C, ou qu'on a A:B::B:C, ou $\div$ A : B : C.

V.

433. On appelle *Médiane* la plus grande partie B d'une ligne A diviſée en moyenne & extrême raiſon. On l'appelle *médiane*, parce qu'elle eſt moyenne proportionnelle entre la ligne entiere A & la plus petite partie C.

THÉORÊME I.

434. *Si deux lignes telles que* AB & CD (fig. 77.) *compriſes entre deux paralleles, ſont coupées par une, ou pluſieurs paralleles intermédiaires, les portions correſpondantes dans les deux lignes ſeront* 1°. *proportionnelles aux lignes totales ;* 2°. *proportionnelles entr'elles.*

DEMONST. I. Partie. Les portions correſpondantes ſeront proportionnelles aux lignes totales, parce qu'elles ſont ſemblablement diviſées; car ſi AE eſt le tiers, ou le quart de la ligne totale AB ; CF ſera auſſi le tiers, ou le quart de la ligne totale CD: donc les portions correſpondantes ſeront des parties ſemblables des lignes totales : donc elles ſeront entr'elles comme les lignes totales ; c'eſt pourquoi l'on aura les proportions,

AE : CF :: AB : CD;
EG : FH :: AB : CD.

DEMONST. II. Partie. Les parties correſpondantes ſeront proportionnelles entr'elles : car puiſqu'elles

qu'elles ſont proportionnelles aux lignes totales, & que l'on a AE : CF :: AB : CD,
EG : FH :: AB : CD;
il s'enſuit que l'on aura

AE : CF :: EG : FH.

Corollaire I.

435. Si deux lignes *eb*, *fd*, compriſes entre deux paralleles, ſont autant inclinées que deux autres lignes AB, CD, compriſes auſſi entre deux paralleles (*fig.* 77.), les deux premieres ſeront proportionnelles aux deux autres: car prenant ſur la ligne AB la portion AI=*eb*, & menant la parallele OP, on aura CK=*fd*, parce que CK & *fd* ſont également inclinées dans des eſpaces paralleles égaux, & ſont par conſéquent (310) égales : or nous venons de prouver que les portions AI, CK ſont proportionnelles aux lignes totales AB, CD, ou que

AI : CK :: AB : CD;

donc à la place de AI, CK, mettant leurs égales, *eb*, *fd*, on aura *eb* : *fd* :: AB : CD.

Corollaire II.

436. Si deux lignes ſe coupent entre deux paralleles, les parties de l'une ſeront proportionnelles aux parties de l'autre (*fig.* 78.) car ayant tiré par le point d'interſection E une ligne parallele aux deux autres AB, CD, les portions EC, ED ſont autant inclinées dans leur eſpace parallele, que les portions EB, EA le ſont dans le leur, puiſque ce ſont les mêmes lignes continuées : donc, &c.

THÉORÊME II.

437. *Si les deux côtés d'un Triangle ſont diviſés par une, ou pluſieurs lignes paralleles à la baſe, ils ſeront diviſés en parties proportionnelles* (fig. 79.).

DÉMONST. Faiſant paſſer par le ſommet de l'angle A une ligne GH, parallele aux baſes *ed*, BC, les deux côtés AB, AC du triangle doivent être alors regardés comme deux lignes compriſes entre deux paralleles, & qui sont coupées par une ou plusieurs paralleles intermédiaires en parties proportionnelles entr'elles & aux lignes totales.

Théorême III.

438. *Si deux Triangles, l'un plus grand & l'autre plus petit, sont équiangles, tous les côtés de l'un seront proportionnels aux côtés homologues de l'autre* (fig. 79 & 80.).

Démonst. En effet :

I°. Si l'on pose le sommet *a* du petit triangle sur le sommet A du grand triangle, alors les côtés du petit triangle seront couchés sur les côtés du grand à cause de l'angle $a = A$, & la base *ed* du petit triangle sera parallele à la base BC du grand (397.) : or dans ce cas si l'on fait passer par le sommet commun A une ligne GH parallele à la base, les côtés AB, AC du grand triangle seront divisés aux points *e*, *d*, par une ligne parallele à la base: donc (437) ils seront divisés en parties proportionnelles, c'est-à-dire, que l'on aura $Ae : Ad :: AB : AC$, dans laquelle proportion les côtés du petit triangle se trouvent proportionnels aux côtés homologues du grand triangle.

II°. Si l'on pose le point *d* pris comme sommet du petit triangle sur le sommet C du grand triangle, il est clair, par la même raison que ci-dessus, que les côtés du petit triangle seront couchés sur les côtés du grand, & que la base *ae* du petit triangle sera parallele à la base du grand, & par conséquent on prouvera, comme ci-dessus, que l'on a

$$da : de :: CA : CB;$$

& par conséquent les trois côtés du petit triangle sont proportionnels aux trois côtés homologues du grand.

Corollaire I.

439. Si deux cordes AD, CB se coupent dans un cercle, les parties de l'une seront réciproques aux parties de l'autre (*fig.* 81.). En effet ayant mené les lignes AB, CD, on aura deux triangles AEB,

CED, qui seront équiangles; car les angles opposés au sommet E sont égaux (353); de plus les angles aux points D & B sont aussi égaux, parce qu'ils sont appuyés sur le même arc CA; par la même raison les angles aux points A & C sont égaux: donc les deux triangles CED, AEB sont équiangles: donc (438) les côtés homologues sont proportionnels, & l'on aura

CE : AE :: ED : EB,

dans laquelle proportion les parties CE, EB d'une corde sont réciproques aux parties AE, ED de l'autre.

Corollaire II.

440. Si l'une des cordes étoit diamétre, alors les portions, ou segmens du diamétre seroient réciproques aux portions, ou segmens de la corde.

Corollaire III.

441. Si la corde DE (*fig.* 82.) étoit perpendiculaire au diamétre AC, alors la portion DB ou BE de la corde, seroient moyenne proportionnelle entre les deux segmens du diamétre; car par le corollaire précédent on a

AB : BD :: BE : BC :

or la corde étant perpendiculaire au diamétre, on a (319) BD = BE: donc on aura

AB : BD :: BD : BC, ou $\div$ AB : AD : BC.

Corollaire IV.

442. Dans un cercle une ligne quelconque BD (*fig.* 85.) tirée d'un point de la circonférence perpendiculairement sur le diamétre est moyenne proportionnelle entre les deux segmens AD, DC du diamétre; car cette perpendiculaire est la moitié d'une corde perpendiculaire au diamétre.

Corollaire V.

443. Si deux sécantes extérieures EB, EC, (*fig.* 83.) partant d'un même point, vont se terminer à la circonférence concave du cercle; les parties extérieures des sécantes seront réciproquement

proportionnelles aux ſécantes entieres, c'eſt-à-dire, que l'on aura EB : EC :: ED : EA : car ayant mené les cordes AC, BD, les triangles EBD, EAC ſeront équiangles; ayant l'angle en E commun, & les angles en B & C appuyés ſur le même arc AD : donc (438) les côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura EB : EC :: ED : EA, dans laquelle proportion les parties extérieures EA, ED ſont réciproquement proportionnelles aux ſécantes entieres EB, EC.

THÉORÊME V.

444. *Dans tout Triangle rectangle, ſi l'on abbaiſſe du ſommet de l'angle droit une perpendiculaire ſur le côté oppoſé* (que l'on appelle Hypothénuſe), *on aura trois lignes moyennes proportionnelles;* (fig. 84.).

I°. *Le grand côté* BC *entre l'hypothénuſe entiere* AC, *& le ſegment adjacent* DC, *c'eſt-à-dire, que l'on aura* ∺ AC : BC : DC.

II°. *Le petit côté* BA *entre l'hypothénuſe entiere* AC *& le ſegment adjacent* AD : *c'eſt-à-dire, que l'on aura* ∺ AC : AB : AD.

III°. *La perpendiculaire* BD *entre les deux ſegmens* AD *&* DC, *c'eſt-à-dire, que l'on aura* ∺ AD : BD : DC.

DÉMONST. I. Partie. Le petit triangle ABD & le grand triangle ABC ſont équiangles; car ils ont chacun un angle droit, & de plus l'angle en A eſt commun à l'un à & l'autre : donc le troiſiéme angle eſt auſſi égal de part & d'autre, ſavoir, l'angle $o = r$: donc les côtés homologues ſont proportionnels, & on aura la proportion, l'hypothénuſe AC du grand triangle eſt à l'hypothénuſe AB du petit triangle, comme le petit côté AB du grand triangle eſt au petit côté AD du petit triangle, ou

AC : AB :: AB : AD, ou ∺ AC : AB : AD.

DÉMONST. II. Partie. Le moyen triangle BDC & le grand triangle ABC ſont équiangles; car ils ont chacun un angle droit, & de plus l'angle en C eſt commun à l'un & à l'autre : donc le troiſiéme angle eſt auſſi égal de part & d'autre, ſavoir, l'angle $e=m$: donc les côtés homologues ſont proportionnels : donc on aura la proportion, l'hypothénuſe AC du grand triangle eſt à l'hypothénuſe BC du moyen triangle, comme le grand côté BC du grand triangle eſt au grand côté DC du moyen triangle, ou

AC : BC :: BC : DC, ou $\div$ AC : BC : DC.

Démonst. III. Partie. Le petit triangle ABD & le moyen triangle BDC ſont équiangles ; car ils ont chacun un angle droit ; de plus l'angle $o=r$, & l'angle $e=m$: donc les côtés homologues ſont proportionnels : donc le petit côté AD du petit triangle eſt à ſon moyen côté BD, comme le petit côté BD du moyen triangle eſt à ſon moyen côté DC, ou

AD : BD :: BD : DC, ou $\div$ AD : BD : DC.

PARAGRAPHE II.

Des Figures ſemblables.

I°. L'égalité des figures dépend de l'égalité & des angles reſpectifs & des côtés correſpondans ; mais leur ſimilitude dépend de l'égalité des angles reſpectifs & de la proportionnalité des côtés homologues : on appelle donc figures ſemblables celles qui ont tous leurs angles reſpectifs égaux, & tous leurs côtés homologues proportionnels.

II°. Dans les figures ſemblables il y a trois choſes, égalité, proportionnalité & ſimilitude : l'*égalité* tombe ſur les angles ; la *proportionnalité* ſur les côtés ; la *ſimilitude* ſur les figures.

III°. La ſimilitude des figures a des ſignes qui la font reconnoître, & des rapports qui en réſultent. Nous en allons parler.

Nombre I.

Des Signes de Similitude dans les Figures.

Deux figures ſont ſemblables toutes les fois que par le moyen de rayons, ou de diagonales, ou de lignes quelconques ſemblablement tirées, elles peuvent être partagées en un égal nombre de triangles ſemblables ; car deux quantités qui peuvent être diviſées en un même nombre de parties ſemblables, ſont ſemblables entr'elles. Il eſt donc néceſſaire ici de bien remarquer quels ſont les ſignes, ou les marques qui font reconnoître ſi deux triangles ſont ſemblables, ou non.

THÉORÊME I.

445. *Deux triangles équiangles ſont toujours ſemblables.*

DEMONST. Deux triangles équiangles ont tous leurs angles reſpectifs égaux, comme il eſt évident, & tous leurs côtés homologues proportionnels, comme nous l'avons prouvé (438) : donc ils ſont ſemblables.

Corollaire.

446. Deux triangles qui ont deux angles égaux de part & d'autre, ſont dès-lors ſemblables; car lorſqu'ils ont deux angles égaux de part & d'autre, le troiſiéme angle (385) eſt auſſi égal de part & d'autre, & par conſéquent les triangles ſont équiangles, & dès-lors ſemblables.

THÉORÊME II.

447. *Deux Triangles abc*, ABC, *qui ont leurs trois côtés homologues proportionnels, ſont dès-lors ſemblables* (fig. 86.).

DEMONST. Sur le côté AB du grand triangle prenez A*d* = *ab*, & menez *do* parallele à BC, & vous aurez (398) le triangle A*do* équiangle, & par conſéquent (445) ſemblable au triangle ABC : or le triangle *abc* = A*do*. Car par la conſtruction on a A*d* : AB :: A*o* : AC :: *do* : BC, & par l'hypothèſe on a *ab* : AB :: *ac* : AC : *bc* : BC ; mais puiſque dans ces deux proportionnalités les conſéquens ſont les mêmes de part & d'autre, il eſt évident que l'on pourra conclure *ab* : A*d* :: *ac* : A*o* :: *bc* : *do* ; or par la conſtruction *ab* = A*d* : donc auſſi *ac* = A*o*, & *bc* = *do* : donc le triangle *abc* = A*do*, & eſt par conſéquent ſemblable au triangle ABC.

THÉORÊME III.

448. *Deux Triangles qui ont deux côtés homologues proportionnels, & l'angle intercepté entre ces côtés, égal de part & d'autre, ſont dès-lors ſemblables* (fig. 86.).

DEMONST. Soient les côtés *ab*, *ac* proportionnels aux côtés AB, AC, & l'angle *a* = A; ſur le côté AB du grand triangle prenez A*d* = *ab*, & menez *do* parallele à BC, & vous aurez le triangle A*do* équiangle (398), & par conſéquent ſemblable (445) au triangle ABC: or le triangle *abc* = A*do*. Car par la conſtruction A*d* : A*o* :: AB : AC, & par l'hypothèſe *ab* : *ac* :: AB : AC; donc *ab* : *ac* :: A*d* : A*o*; or par la conſtruction *ab* = A*d*: donc auſſi *ac* = A*o*: donc les deux triangles *abc*, A*do* ont deux côtés homologues égaux; d'ailleurs les angles *a*, A, compris entre ces côtés, ſont ſuppoſés égaux: donc (404) le triangle *abc* = A*do*.

THÉORÊME IV.

449. *Deux Triangles qui ont deux côtés homologues proportionnels, & l'un des angles oppoſés à ces côtés, égal de part & d'autre, ſont ſemblables; pourvu que le ſecond angle oppoſé aux autres côtés proportionnels ſoit de même eſpéce* (fig. 86.)

DÉMONST. Dans les triangles *abc*, ABC, ſoient les côtés *ab*, *ac* proportionnels aux côtés AB, AC, & l'angle *b* = B; ſi de plus les angles en *c*, C, ſont de même eſpéce, je dis que les deux triangles *abc*, ABC ſont ſemblables. Car ayant pris, comme ci-deſſus, A*d* = *ab*, & mené la parallele *do*, on aura le triangle A*do* ſemblable au triangle ABC: or *abc* = A*do*; car on a par l'hypothèſe *ab* : *ac* :: AB : AC, & par la conſtruction A*d* : A*o* :: AB : AC: donc *ab* : *ac* :: A*d* : A*o*: or *ab* = A*d*: donc *ac* = A*o*; donc dans les triangles *abc*, A*do* les deux côtés, *ab*, *ac* ſont égaux aux côtés homologues A*d*, A*o*; d'ailleurs l'angle *b* = B = *d*, & de plus l'angle *c* eſt de même eſpece que l'angle C = *o*: donc (405) le triangle *abc* = A*do*.

THÉORÊME V.

450. *Deux Polygones réguliers de même eſpéce, ou d'un même nombre de côtés, ſont toujours ſemblables* (fig. 89.).

DÉMONST. Si vous diviſez les deux polygones en triangles par des rayons tirés du centre aux angles de la circonférence; 1°. il y aura un même nombre de triangles dans l'un & dans l'autre, ſavoir, autant que de côtés; 2°. tous les triangles de l'un ſeront ſemblables aux triangles correſpondans de l'autre; *par ex:* le triangle CAB ſera ſemblable au triangle *cab*. Car les côtés de ces triangles partagent dans chaque polygone l'angle à la circonférence en deux également (415): or les polygones étant réguliers & d'un même nombre de côtés, tous les angles de l'un ſont égaux aux angles correſpondans de l'autre (411): donc leurs moitiés ſont auſſi égales de part & d'autre, & l'on aura l'angle O = *o*, l'angle N = *n*: donc les triangles CAB, *cab* ſont équiangles (385), & par conſéquent ſemblables.

Corollaire I.

451. Si du centre d'un polygone on mene des rayons aux angles de la circonférence (*fig.* 88.) & qu'on joigne ces rayons par des lignes continuement paralleles aux côtés du polygone, on aura deux polygones concentriques, qui ſeront ſemblables. Car ces deux polygones ſe trouveront partagés en un égal nombre de triangles correſpondans & ſemblables les uns aux autres; *par ex:* le triangle CNM eſt ſemblable au triangle CFE, & ainſi des autres, comme il eſt évident.

Corollaire II.

452. Si vous faites le polygone ABDEFG (*fig.* 89.) égal & ſemblable au polygone extérieur de la figure 88, & le polygone *abdefg* égal & ſemblable au polygone intérieur, & ſi vous les par-

tagez en triangle par des rayons menés du centre, il eſt évident qu'on peut appliquer aux deux polygones de la figure 89, ce que nous avons dit des deux polygones concentriques (*fig.* 88.) & que les propriétés qui conviennent aux uns, conviennent auſſi aux autres. D'où il faut conclure en général;

I°. Que deux polygones ſemblables peuvent toujours être ſuppoſés concentriques.

II°. Que deux polygones ſemblables peuvent toujours être partagés en un même nombre de triangles ſemblables par des rayons menés du centre aux angles de la circonférence.

III°. Que deux polygones ſemblables peuvent auſſi être ſemblablement diviſés, ou être partagés en un nombre égal de triangles ſemblables par des diagonales) *fig.* 90.) ſemblablement tirées dans les polygones.

NOMBRE II.

Des Rapports réſultans de la Similitude des Figures.

Les rapports qui réſultent de la ſimilitude des figures, ſont certaines proportions qui ſe trouvent entre les périmétres, les côtés, les rayons, les diamétres, les lignes ſemblablement tirées dans les figures ſemblables.

THÉORÊME I.

453. *Dans les Triangles ſemblables les côtés homologues ſont proportionnels aux hauteurs, c'eſt-à-dire, aux lignes tirées du ſommet perpendiculairement ſur la baſe* (fig. 87.).

DÉMONST. Les deux triangles rectangles BAD, *bad*, ſont équiangles, parce qu'ils ont chacun un angle droit aux points D & *d*, & l'angle $b = B$ par l'hypothèſe: donc ils ſont ſemblables: donc leurs côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura AB : *ab* :: AD : *ad*:
mais AD & *ad* ſont les hauteurs des triangles; donc, &c.

Corollaire.

454. Dans les triangles ſemblables les baſes ſont proportionnelles aux hauteurs ; car les baſes ſont elles-mêmes des côtés : or les côtés ſont proportionnels aux hauteurs.

THÉORÊME II.

455. *Dans les Polygones réguliers ſemblables, les côtés homologues ſont proportionnels aux rayons obliques (fig. 89.).*

DÉMONST. Les triangles ACB, *acb* ſont ſemblables, comme nous l'avons prouvé (446) : donc leurs côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura AB : AC :: *ab* : *ac* ;

C'eſt-à-dire, que les côtés AB, *ab* des polygones ſont entr'eux comme les rayons obliques AC, *ac*.

THÉORÊME III.

456. *Dans les Polygones réguliers ſemblables, les côtés homologues ſont proportionnels aux rayons droits* (fig. 89.).

DÉMONST. Les triangles FCM, *fcm* ſont ſemblables, comme il eſt évident : donc leurs côtés homologues ſont proportionnels, & l'on aura

FM : CM :: *fm* : *cm* :

or FM, *fm* ſont les moitiés des côtés homologues FE, *fe* (418), & les moitiés ſont entr'elles comme les touts : donc on aura FE : *fe* :: CM : *cm*.

Corollaire.

457. Dans les polygones ſemblables, les rayons obliques ſont proportionnels aux rayons droits. Car les rayons obliques ſont (455) proportionnels aux côtés homologues ; les côtés homologues ſont proportionnels aux rayons droits ; donc les rayons obliques ſont, &c.

THÉORÊME IV.

458. *Dans les Polygones ſemblables les circonférences, ou périmétres ſont proportionnels aux côtés homologues* (fig. 89.).

DÉMONST. Déſignons les côtés du grand polygone par A, B, C, D, & les côtés du petit par a, b, c, d: les deux polygones étant ſemblables, leurs côtés homologues ſont tous proportionnels; donc on aura la proportionnalité $A : a :: B : b :: C : c :: D : d$: or (202) dans toute proportionnalité la ſomme des antécédens eſt à celle des conſéquens, comme un ſeul antécédent eſt à ſon conſéquent : donc on aura

$$A+B+C+D : a+b+c+d :: A : a.$$

Or la ſomme des antécédens donne la ſomme des côtés, ou le périmétre du grand polygone, & la ſomme des conſéquens donne la ſomme des côtés, ou le périmétre du petit polygone : donc, &c.

Corollaire.

459. Donc dans les polygones ſemblables les périmétres ſont entr'eux, & comme les rayons obliques, & comme les rayons droits.

THÉORÊME V.

460. *En général dans les Polygones ſemblables, les périmétres ſont entr'eux, comme les lignes ſemblablement tirées dans les deux polygones :* par ex : *comme les diagonales* AC, *ac* ; *ou* AD, *ad* (fig. 90.).

DÉMONST. Les triangles ABC, *abc*, ſont ſemblables (448) : donc on aura $AB : ab :: AC : ac$: or les périmétres des deux polygones ſemblables ſont entr'eux comme les côtés AB, *ab* : donc ils ſont auſſi entr'eux comme les diagonales AC, *ac*.

THÉORÊME VI.

461. *Si les côtés des Polygones ſemblables ſont ſuppoſés infiniment petit, & être en nombre infini, ou, ce qui eſt le même, ſi les Polygones ſemblables ſont ſuppoſés être des cercles, les circonférences ſeront entr'elles comme les rayons.*

DÉMONST. Cela ſe prouve par la même raiſon, que dans les polygones finis & ſemblables les périmétres ſont entr'eux comme les rayons.

Corollaire.

462. Donc les circonférences des cercles, ſont entr'elles 1°. comme les diamétres; 2°. comme

les arcs ſemblables, ou comme les arcs d'un même nombre de degrés ; car les tous ſont comme les parties ſemblables.

THÉORÊME VII.

463. *Dans les Circonférences de différens cercles les Arcs ſemblables ſont entr'eux comme les cordes qui les ſoutiennent* (fig. 91.).

DÉMONST. Ayant tiré du centre commun A des rayons aux extrêmités des cordes ED, CB, on aura deux triangles ſemblables ACB, AED, dans leſquels les côtés AC, AE, qui ſont rayons, ſont entr'eux comme les côtés, ou cordes CB, ED : or les arcs ſemblables ſont entr'eux comme leurs rayons : donc, &c.

THÉORÊME VIII.

464. *Dans les circonférences de différens cercles les cordes* BC & BE, *ſont entr'elles comme les rayons* AC & AE *de leurs cercles* (fig. 91.).

DÉMONST. Les deux triangles ACB, AED ſont ſemblables ; donc on aura la proportion BC : DE :: AC : AE : donc, &c.

SECTION II.

Des Surfaces.

I°. LA ligne eſt une étendue qui n'a qu'une dimenſion, que l'on appelle *Longueur* ; la ſurface eſt une étendue qui a deux dimenſions, que l'on appelle *Longueur* & *Largeur*.

II°. La ſurface eſt ou *plane*, ou *courbe*. On appelle ſurface *plane*, celle dont tous les points ſont de niveau, c'eſt-à-dire, ne ſont ni plus élevés, ni plus enfoncés les uns que les autres ; telle eſt la ſurface d'un miroir. On appelle ſurface *courbe*, celle dont tous les points ſont inégalement élevés, ou enfoncés ; telle eſt la ſurface d'une ſphere, Nous ne parlerons ici que des ſurfaces planes.

III°. La ſurface plane peut être conſidérée, ou comme *figure*, ou comme *quantité*. La ſurface conſidérée comme *figure*, eſt une étendue terminée par des angles & des côtés. La ſurface conſidérée comme *quantité* eſt le réſultat de deux dimenſions combinées entr'elles, qui rendent la ſurface plus ou moins grande.

IV°. Les ſurfaces conſidérées comme *quantités*, ſont ſuſceptibles d'évaluation, de meſure & de rapports : nous en allons parler.

CHAPITRE I.

De l'Evaluation des Surfaces.

DÉFINITIONS.

I.

465. TOUTE ſurface peut être conſidérée comme réſultante de deux dimenſions combinées entr'elles, & que l'on appelle, ou bien la *hauteur* & la *baſe*, quand il s'agit de triangles & de parallélogrammes ; ou bien le *rayon droit* & le *périmétre*, quand il s'agit de polygones.

II.

466. La *baſe* d'une ſurface eſt le côté de cette ſurface ſur lequel elle peut être conçue appuyée, *par ex :* AD, (*fig.* 92.). La *hauteur* eſt une ligne perpendiculaire menée du ſommet d'un des angles de la ſurface, ſur la baſe prolongée, s'il le faut : telles ſont les lignes BA (*fig.* 92.) & AF ou DG (*fig.* 101.).

III.

467. Dans le polygone on appelle *Périmétre*, le contour du polygone, réſultant de la ſomme de

ſes côtés ; & l'on appelle *rayon droit*, une perpendiculaire menée du centre du polygone ſur l'un de ſes côtés, *par ex :* CM (*fig.* 89.).

PRINCIPE I.

468. Une ſurface peut être conçue décrite par le mouvement de ſa baſe AD (*fig.* 92.), laquelle monte parallelement à elle-même le long de la hauteur AB. Car en Géometrie on conçoit que la ligne eſt décrite par le mouvement d'un point ; la ſurface, par le mouvement d'une ligne ; & le ſolide, par le mouvement d'une ſurface.

PRINCIPE II.

469. Si la baſe AD, montant parallelement à elle-même le long de la ligne AB, eſt ſuppoſée laiſſer des traces par-tout où elle paſſe, ces traces pourront être regardées comme les élémens de la ſurface. Ces élémens ſeront toujours des lignes ſemblablement poſées, ou ſemblablement tirées dans la ſurface.

Or les Géométres ont coutume de conſidérer ces lignes, que l'on prend pour élémens de la ſurface, comme ayant une largeur *infiniment petite*, ou comme étant elles-mêmes des ſurfaces élémentaires d'une hauteur *infiniment petite*.

PRINCIPE III.

470. Une ſurface eſt égale à la ſomme de tous ſes élémens : c'eſt pourquoi l'évaluation de cette ſomme, donnera celle de la ſurface, laquelle, par conſéquent, peut être une quantité plus ou moins grande, ſuſceptible de plus ou de moins, & ſous ce point de vûe on l'appelle ordinairement *aire* ou *ſuperficie*.

THÉORÊME I.

471. *La ſurface d'un Parallélogramme eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur* (fig. 92.).

DÉMONST. La ſurface du parallélogramme ABID peut être conçue formée & décrite par le mouvement de la baſe AD, qui monte parallelement à elle-même le long de la hauteur AB :

donc elle eſt égale à la ſomme des traces que laiſſe la baſe en montant le long de la hauteur : or la baſe en montant, laiſſe autant de traces, qu'il y a de points dans la hauteur : donc la ſurface du parallélogramme eſt égale à la baſe priſe autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt égale au produit de la *baſe* par la *hauteur*.

Corollaire I.

472. Si l'on diviſe la hauteur BA (*fig.* 92.) en tel nombre de parties égales, que l'on voudra, *par ex :* en trois parties égales B*e*, *ef*, *f*A, & la baſe en quatre parties égales A*b*, *bc cd*, *d*D, & que par les points de diviſion on mene des lignes telles que *ep*, *fu*, &c. *bg*, *ci*, &c. la ſurface du parallélogramme, ſera compoſée de petits parallélogrammes élémentaires, dont le nombre ſera $3 \times 4 = 12$; & ce ſera l'expreſſion *numérique* de la ſurface du parallélogramme.

Corollaire II.

473. Si l'on appelle la hauteur a, la baſe b & le parallélogramme p, l'évaluation de la ſurface du parallélogramme ſera $p = ab$; & c'eſt l'expreſſion *algébrique* de ſa ſurface.

Corollaire III.

474. La hauteur du parallélogramme étant la ligne AB, & la baſe étant la ligne AD, l'évaluation de ſa ſurface ſera $P = AB \times AD = ABID$, qui eſt une figure ; & c'eſt l'expreſſion *géométrique* du parallélogramme.

THÉORÊME II.

475. *Un parallélogramme & un rectangle de même baſe & de même hauteur ſont égaux en ſurface* (fig. 93.).

DÉMONST. Soient donnés le rectangle ACDB, & le parallélogramme ECDF, de même baſe, puiſqu'ils ont une baſe commune CD ; & de même hauteur, puiſqu'ils ſont entre même paralleles AF, CD ; je dis qu'ils ſont égaux en ſurface.

En effet le triangle ACE eſt égal au triangle

BDF (402) à cauſe de l'égalité des perpendiculaires AC, BD, des obliques CE, DF, & des éloignemens de perpendicule AE, BF; car ces lignes forment les trois côtés des deux triangles: donc ſi de ces deux triangles égaux on retranche la portion commune BOE, les reſtes ACOB & EODF ſeront égaux, & ſi à ces deux reſtes on ajoute de part & d'autre le petit triangle COD, on aura ACDB = ECDF, dont l'un eſt le rectangle & l'autre eſt le parallélogramme de même baſe & de même hauteur.

Corollaire.

476. D'où il ſuit en général, que deux parallélogrammes quelconques de même baſe & de même hauteur ſont égaux en ſurface (*fig.* 94.).

THÉORÊME III.

477. *La ſurface du triangle eſt la moitié de celle d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur que lui* (fig. 58 & 60.).

DÉMONST. Ayant mené la diagonale AD vous aurez le triangle ACD égal au triangle ADB; car le côté AD eſt commun à l'un & à l'autre triangle; d'ailleurs le côté AC = BD parce qu'ils ſont côtés oppoſés d'un même parallélogramme; par la même raiſon le côté AB = CD: donc (402) on aura le triangle ACD = ADB; donc chacun de ces triangles eſt la moitié du parallélogramme ACDB: mais chacun de ces triangles a même hauteur & même baſe que le parallélogramme; donc, &c.

Corollaire I.

478. Donc la ſurface du triangle eſt égale à la moitié du produit de ſa baſe par ſa hauteur, puiſqu'elle eſt la moitié de la ſurface d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur que lui; & par conſéquent l'expreſſion de la ſurface du parallélogramme étant $s = ab$, celle du triangle de même baſe & de même hauteur ſera $s = \frac{1}{2} ab$.

Corollaire II.

479. Deux triangles de même base & de même hauteur sont égaux en surface, car ils sont les moitiés de parallélogrammes de même base & de même hauteur, lesquels sont égaux en surface, comme nous l'avons vu (476).

THÉORÊME IV.

480. *La surface du Trapeze est égale au produit de sa hauteur par la moitié de la somme de ses bases supérieure & inférieure* (fig. 96.).

DÉMONST. Ayant mené la diagonale CB, la surface du trapeze sera divisée en deux triangles ABC, CBD, & ne sera pas distinguée de la surface de ces triangles: or la surface du triangle ABC est égale (478) au produit de la hauteur AB par la moitié de la base supérieure AC; & celle du triangle CBD est égale au produit de la hauteur commune AB par la moitié de la base inférieure BD: donc la surface des deux triangles, & par conséquent celle du trapeze lui-même est égale au produit de la hauteur AB par la moitié de la somme des bases supérieure & inférieure AC & BD.

THÉORÊME V.

481. *La surface du Trapeze est égale au produit de sa hauteur* AB *par la ligne où l'élément* EF *qui tient le milieu arithmétique entre les bases supérieure & inférieure* AC, & BC (*fig.* 97.).

DÉMONST. Car elle est égale, comme nous venons de le prouver, au produit de sa hauteur par la moitié de la somme de ses bases supérieure & inférieure: or l'élément EF qui tient le milieu, est égal à la moitié de la somme de ces bases: car les élémens du trapeze décroissent uniformement depuis la base inférieure jusqu'à la base supérieure, & peuvent par conséquent être représentés par les termes d'une progression arithmétique, *par ex:* $\div 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$, dont la somme donne la surface du trapeze, & dont les extrêmes repréſentent les baſes ſupérieure & inférieure du trapeze : or la ſomme des extrêmes eſt $6+10=16$, dont la moitié 8 qui eſt le terme tenant le milieu de la progreſſion, repréſente l'élément EF qui tient le milieu entre les baſes ſupérieure & inférieure du trapeze, donc, &c.

Théorême VI.

482. *La ſurface du Pentagone, de l'Exagone, de l'Eptagone, &c. en général d'un Polygone quelconque régulier, eſt égal au produit du rayon droit par la moitié du périmétre du Polygone* (fig. 89.).

Démonst. La ſurface du polygone régulier eſt égale à celle de tous les triangles que l'on peut y former, en tirant des rayons du centre aux angles du polygone. Or tous ces triangles ayant même hauteur & même baſe, à cauſe de la régularité du polygone la ſomme de leurs ſurfaces eſt égale à celle d'un triangle unique qui auroit pour hauteur la hauteur commune de tous ces triangles, ſçavoir, le *rayon droit*, & pour baſe la ſomme des baſes de tous ces triangles, ſçavoir, le *périmétre* du polygone; mais la ſurface de ce triangle unique eſt égale au produit de ſa hauteur par la moitié de ſa baſe: donc, &c.

Corollaire I.

483. Donc deux polygones réguliers de même eſpéce, qui ont des périmétres & des rayons droits égaux, ſont égaux en ſurface.

Corollaire II.

484. Mais ſi les polygones réguliers ont un égal périmétre & un nombre inégal de côtés, celui qui aura moins de côtés, aura moins de ſurface. Car la ſurface de chacun de ces polygones eſt égale au produit du rayon droit par la moitié du périmétre (482), donc le périmétre étant ſuppoſé égal dans les polygones, la ſurface ſera d'autant plus petite, que le rayon droit ſera plus petit. Or moins le polygone aura de côtés, plus ſon rayon

droit sera petit; *par ex:* le rayon droit du triangle sera plus petit que celui du quarré d'un périmétre égal. Car s'il lui étoit égal, on pourroit circonscrire (421) ce triangle & ce quarré à un même cercle, & alors le périmétre du quarré approchant plus de la circonférence du cercle, seroit plus petit (422) que celui du triangle; ce qui est contre la supposition.

Ces figures qui ont un égal périmétre sont appellées *Isopérimétres.*

THÉORÊME VI.

485. *La surface du Cercle est égale au produit de son rayon par sa demi-circonférence.*

DÉMONST. Le cercle n'étant qu'un polygone régulier d'une infinité de côtés, sa surface est égale à celle d'une infinité de triangles, dont les sommets seroient réunis au centre du cercle, & les bases appuyées sur les côtés infiniment petits du cercle, ou du polygone infinitaire. La surface de tous ces triangles est égale à la surface d'un triangle unique, qui auroit pour hauteur le rayon du cercle, & pour base une ligne égale à la circonférence du cercle: or la surface de ce triangle unique est égale au produit de sa hauteur par la moitié de sa base: donc, &c.

C'est pourquoi appellant la circonférence c, & le rayon r, l'expression de la surface circulaire sera $s = \frac{1}{2} rc$, ou $s = \frac{rc}{2}$.

Remarque I.

486. Pour évaluer une surface plane, il faut donc multiplier l'un par l'autre deux élémens, ou deux lignes. Cette opération s'appelle multiplication *géométrique*, parce que les racines d'où résulte le produit, sont des lignes, de même que dans la multiplication *algébrique* les racines sont des lettres, & dans la multiplication *numérique* les racines sont des *chiffres*, ou *nombres.*

Remarque II.

487. Lorſqu'on multiplie deux racines géométriques, ou deux lignes l'une par l'autre, pour avoir une ſurface :

I°. Si les deux lignes ſont inégales a, b, le produit qui en réſulte, eſt un *produit* plan, & donne un rectangle ABID, (*fig.* 92.), ou $s = ab$.

II°. Si les deux lignes que l'on multiplie, ſont égales a, a, ou, ce qui eſt le même, ſi on multiplie une ligne a par elle-même, le produit qui en réſulte, eſt une *puiſſance*, & donne un quarré GACI (*fig.* 98.) & l'on a $s = aa = a^2$.

Remarque III.

488. Suppoſons que la ligne que l'on multiplie par elle-même, ou que l'on éleve au quarré, ſoit composée de deux parties, auquel cas la ligne ſera conſidérée comme un *binôme* géométrique ; alors le quarré de cette ligne renfermera les mêmes portions que nous avons remarquées dans le binôme numérique, & dans le binôme algébrique : il en faut remarquer & le nombre & la qualité.

I°. Si la ligne AC (*fig.* 98.) eſt composée de deux parties AB & BC, ou eſt regardée comme étant un binôme géométrique, alors le quarré GACI de la ligne AB + BC, renfermera ; 1°. le quarré de la premiere partie AB, ſavoir, ABED ; 2°. le quarré de la ſeconde partie BC, ou de ſon égale EF, ſçavoir, HEFI ; 3°. le double rectangle de l'une des parties par l'autre, ſavoir, GDEH & BEFC.

II°. Si on repréſente ſous les expreſſions algébriques a & b les deux parties de la ligne AB + BC, la ligne ſera $a + b$, ce qui donne un binôme algébrique ; & ſon quarré ſera $aa + 2ab + bb$, lequel renferme auſſi toutes les parties dont nous venons de parler ci-deſſus.

III°. Si l'on repréſente ſous les expreſſions numériques 3 & 4 les deux portions de la même ligne AB + BC, la ligne sera $3 + 4 = 7$, ce qui donne un binôme numérique, & son quarré sera 49, lequel renferme aussi toutes les mêmes parties que ci-dessus.

IV°. On voit par-là que les puissances conservent dans les parties qui les composent les mêmes analogies dans le *numérique*, dans l'*algébrique*, & dans le *géométrique*.

CHAPITRE II.

De la Mesure des Surfaces.

THÉORÊME I.

489. *UN Polygone d'un nombre quelconque de côtés, peut être réduit en un Polygone de même surface, & qui ait un côté de moins* (fig. 99.).

DÉMONST. Dans l'exagone ABCEFG tirez la ligne BE, qui retranche le triangle BCE, & menez la ligne DC parallele à BE; cela posé, si vous menez la ligne BD, vous aurez le pentagone AGFDB, qui sera égal en surface à l'exagone. Car la surface AGFEB est commune au pentagone & à l'exagone. Reste donc à prouver que le triangle EBD, reste du pentagone, est égal au triangle BCE, reste de l'exagone: or ces deux triangles sont égaux, parce qu'ils ont même base BE, & qu'ils ont même hauteur, puisqu'ils sont compris entre mêmes paralleles BE, CD: donc, &c.

THÉORÊME II.

490. *Un Polygone quelconque peut être réduit en un triangle qui lui soit égal en surface.*

DEMONST. Par le théorême précédent un polygone quelconque peut être réduit en un polygone de même surface, & qui ait un côté de moins; donc un exagone peut être réduit en un pentagone de même surface; un pentagone en un quadrilatere, & un quadrilatere en un triangle de même surface: donc, &c.

THÉORÊME III.

491. *Un triangle peut toujours être réduit en un parallélogramme de même surface que lui* (fig. 100.).

DÉMONST. Le triangle BCE étant donné, l'on peut faire le parallélogramme BADE sur la même base, & dont la hauteur soit la moitié de celle du triangle: or le triangle (477) est la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur, & par conséquent est égal en surface à un parallélogramme de même base & d'une hauteur sous-double: donc, &c.

THÉORÊME IV.

492. *Un Parallélogramme quelconque peut être réduit en un rectangle de même surface que lui* (fig. 101.).

DÉMONST. Le parallélogramme BADE étant donné, si des deux angles en A & en B on abaisse les perpendiculaires AF, DG sur la base prolongée, s'il le faut, on aura un rectangle FADG de même base & de même hauteur que le parallélogramme, & par conséquent égal (475) en surface au parallélogramme.

THÉORÊME V.

493. *Un rectangle quelconque peut être réduit en un quarré de même surface que lui* (fig. 102.).

DÉMONST. Le rectangle GDAF étant donné, si l'on prend une ligne moyenne proportionnelle entre la hauteur DG & la base GF du rectangle, savoir, la ligne FE, & qu'on l'éleve au quarré; le quarré de cette moyenne proportionnelle sera égal en surface au parallélogramme. Car appellant a la hauteur, b la base du parallélogramme, & x la moyenne proportionnelle, on aura $a : x :: x : b$, ou $\div\, a : x : b$: donc $xx = ab$.

Corollaire I.

494. Donc toute surface rectiligne est réductible en un quarré; mais le quarré ne peut pas lui-

même être réduit en une figure plus ſimple. C'eſt pourquoi le quarré eſt la meſure la plus ſimple qu'aient trouvé les Géométres pour évaluer les ſurfaces, & c'eſt pour cette raiſon qu'on évalue les ſurfaces planes en *toiſes*, ou *pieds*, ou *pouces* quarrés; *par ex:* ſi l'on multiplie une hauteur de 3 pouces par une baſe de 4 pouces, la ſurface du parallélogramme qui en réſultera, eſt dite avoir $3 \times 4 = 12$ pouces quarrés, c'eſt-à-dire, qu'elle contiendra 12 parties égales, dont chacune aura un pouce de hauteur & un pouce de largeur; d'où vient que *meſurer* & *quarrer*, *meſure* & *quadrature* ſont la même choſe.

Corollaire I I.

495. C'eſt pourquoi toute ſurface rectiligne peut être meſurée géométriquement, parce que toute figure rectiligne eſt réductible en un quarré de même ſurface. Mais on ne peut pas meſurer géométriquement le cercle, parce que le cercle ne peut pas être réduit en un quarré de même ſurface que lui.

Remarque.

496. On auroit la meſure, ou la quadrature du cercle, ſi on pouvoit meſurer géométriquement la circonférence du cercle, ou trouver une ligne droite égale à la circonférence du cercle. Car alors on pourroit réduire le cercle en un triangle qui auroit pour hauteur le rayon, & pour baſe une ligne égale à la circonférence du cercle (*fig.* 103.); ce triangle pourroit être réduit en un parallélogramme, & ce parallélogramme en un quarré.

On auroit trouvé la méthode de meſurer géométriquement la circonférence du cercle, ſi l'on connoiſſoit le rapport de la circonférence au diamétre, parce que le diamétre étant une ligne droite que l'on peut par conſéquent meſurer, la circonférence qui auroit un rapport connu avec le diamétre, auroit dès-lors une meſure commune avec lui, & seroit par conséquent mesurable; mais le rapport entre la circonférence & le diamétre du cercle est inconnu. Archiméde a prouvé que ce rapport étoit plus grand que celui de 21 : 7, & qu'il étoit plus petit que celui de 22 : 7. Depuis Archiméde, Métius a prouvé que ce rapport étoit un peu plus petit que celui de 355 : 113; & ce rapport est un des plus exacts que l'on puisse employer dans la pratique. Pour plus grande commodité nous nous servirons du rapport de 22 à 7, lequel est suffisant dans l'usage & la pratique, qui n'exige point une une si grande précision.

CHAPITRE III.

Du Rapport des Surfaces.

I°. Les surfaces, de même que les lignes, ont un rapport entr'elles; il y a cette différence, que le rapport, ou la raison qui est entre les lignes, est simple, parce qu'elles n'ont qu'une dimension; au lieu que le rapport des surfaces est composé, parce qu'elles résultent du produit de deux dimensions.

II°. Le rapport des surfaces est, ou un rapport simplement composé, ou un rapport doublé; il est simplement composé, lorsque les surfaces ne sont point semblables; il est rapport doublé, lorsqu'elles sont semblables. Nous allons parler 1°. du rapport qu'ont entr'elles les surfaces; 2°. des conséquences qui résultent du rapport des surfaces.

ARTICLE I.

Du Rapport qu'ont entr'elles les Surfaces.

THÉORÊME I.

497. *Les Parallélogrammes sont entr'eux en raison composée*

composée de la raison de leurs bases & de celle de leurs hauteurs.

Démonst. Chaque parallélogramme est égal au produit de sa base par sa hauteur (471) : donc les parallélogrammes sont entr'eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs ; or les produits (181) sont en raison composée des raisons de leurs racines, qui sont ici la base & la hauteur de chaque parallélogramme : donc, &c.

Si l'on appelle les parallélogrammes P, p, les hauteurs A, a, les bases B, b, on aura, comme nous l'avons prouvé (471), $P = AB$, & $p = ab$: donc $P : p :: AB : ab$, ou, ce qui revient au même, $\frac{P}{p} = \frac{AB}{ab}$: or on aura évidemment

$$\frac{P}{p} = \frac{AB}{ab} = \frac{A \times B}{a \times b} = \frac{A}{a} \times \frac{B}{b};$$

où l'on voit que la raison $\frac{AB}{ab}$ qui est celle des parallélogrammes P, p, est composée des raisons $\frac{A}{a}$, & $\frac{B}{b}$, qui sont celles de leurs hauteurs & de leurs bases.

Corollaire I.

498. Les triangles sont en raison composée de celles de leurs bases & de leurs hauteurs ; car ils sont les moitiés (477) de parallélogrammes de même base & de même hauteur qu'eux ; or les moitiés sont en même raison que les tous : donc, &c.

Corollaire II.

499. Les polygones réguliers sont entr'eux en raison composée de celle de leurs rayons droits, & de celle de leurs périmétres ; car chaque polygone régulier est égal au produit de son rayon droit par son demi-périmètre (482) : donc deux polygones réguliers sont entr'eux comme les pro-

duits de leurs rayons droits par leurs périmétres ; or les produits sont en raison composée de celles de leurs racines : donc, &c.

Corollaire III.

500. Deux cercles sont en raison composée de leurs rayons & de leurs circonférences, ce qui se prouve de la même maniere que pour les parallélogrammes, les triangles & les polygones.

Corollaire IV.

501. En général deux surfaces sont toujours entr'elles en raison composée de celles de leurs *dimensions*, de la multiplication desquelles elles résultent.

Ces dimensions de la multiplication desquelles résultent les surfaces, s'appellent *racines*, *produisans*, *dimensions homologues* des surfaces.

Corollaire V.

502. Si les surfaces ont une *racine* commune, ou une *dimension* qui soit égale de part & d'autre, elles seront entr'elles comme leurs dimensions inégales, c'est-à-dire,

I°. Si deux parallélogrammes ont même hauteur, ils seront entr'eux comme leurs bases ; car on a $P : p :: AB : ab$; or par l'hypothèse $A = a$, donc en substituant l'unité à la place de A & a, on aura $P : p :: B : b$.

II°. S'ils ont même base, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs ; car $P : p :: AB : ab$; or par l'hypothèse $B = b$: donc on aura $P : p :: A : a$.

Corollaire VI.

503. Si les dimensions d'une surface sont réciproques aux dimensions homologues d'une autre surface, les deux surfaces seront égales ; *par ex :* si la hauteur & la base d'un parallélogramme sont réciproques à la hauteur & à la base d'un autre parallélogramme, les deux parallélogrammes seront égaux ; car par l'hypothèse $A : a :: b : B$: donc on aura $AB = ab$; or $P : p :: AB : ab$: donc on aura $P = p$.

THÉORÊME II.

504. *Deux parallélogrammes ſemblables ſont en raiſon doublée de la raiſon de leurs baſes & de celle de leurs hauteurs.*

DÉMONST. Les parallélogrammes ſont en raiſon compoſée de celles de leurs baſes & de leurs hauteurs : donc ſi la raiſon des baſes eſt égale à celle des hauteurs, cette raiſon compoſée deviendra doublée ; or quand les parallélogrammes ſont ſemblables, la raiſon des baſes eſt égale à celle des hauteurs ; car dans les parallélogrammes ſemblables les baſes ſont proportionnelles aux hauteurs, ou A : a :: B : b : donc, &c.

Corollaire I.

505. Les parallélogrammes ſemblables ſont entr'eux comme les quarrés de leurs hauteurs, ou comme les quarrés de leurs baſes, ou en général comme les quarrés de leurs côtés homologues, c'eſt-à-dire, que l'on aura P : p :: AA : aa, ou bien P : p :: BB : bb. Car ils ſont entr'eux en raiſon doublée de la raiſon de leurs baſes & de celle de leurs hauteurs : or une raiſon doublée eſt égale (181) à celle qu'ont entr'eux les quarrés des termes de l'une ou de l'autre raiſon compoſante : donc, &c.

C'eſt pourquoi, lorſque les parallélogrammes ſont ſemblables, on a toujours la proportionnalité

P : p :: AB : ab :: AA : aa :: BB : bb.

Corollaire II.

506. Les triangles ſemblables ſont en raiſon doublée de celles de leurs baſes & de leurs hauteurs : ils ſont auſſi entr'eux comme les quarrés de leurs baſes, ou comme les quarrés de leurs hauteurs, ou en général comme les quarrés de leurs côtés homologues. Car les triangles ſemblables ſont les moitiés de parallélogrammes ſemblables ; or les moitiés, & en général les

parties semblables sont entr'elles comme les tous : donc, &c.

THÉORÊME III.

507. *Les Polygones réguliers semblables sont entre eux en raison doublée de celle de leurs périmétres, ou circonférences, & de celle de leurs rayons droits.*

DÉMONST. Les polygones réguliers sont entre eux (499) en raison composée de leurs périmétres & de leurs rayons droits; or quand les polygones réguliers sont semblables, cette raison composée devient doublée; car dans les figures semblables les dimensions homologues sont proportionnelles : donc, &c.

Corollaire I.

508. Les polygones réguliers semblables, 1°. sont entr'eux comme les quarrés de leurs périmétres, ou comme les quarrés de leurs rayons droits, ou comme les quarrés de leurs rayons obliques; 2°. sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; 3°. en général les polygones réguliers semblables sont entr'eux comme les quarrés des lignes semblablement tirées dans les polygones.

Corollaire II.

509. Les surfaces des cercles sont entr'elles comme les quarrés de leurs diamétres, ou comme les quarrés de leurs rayons; car les cercles sont des polygones infinitaires semblables, auxquels convient tout ce que nous venons de dire des polygones finis.

Corollaire III.

510. En général toutes les surfaces semblables sont entr'elles, non-seulement comme les quarrés faits sur les côtés homologues, mais aussi comme les figures quelconques semblables construites sur les côtés homologues, ou sur des lignes quelconques semblablement tirées dans les surfaces semblables; car les figures semblables quelconques, construites sur les côtés homologues, sont

entr'elles comme les quarrés faits ſur ces mêmes côtés homologues.

Corollaire I V.

511. Réciproquement les quarrés des côtés homologues, ou en général les figures quelconques ſemblables, conſtruites ſur les côtés homologues, ſont entr'elles comme les ſurfaces ſemblables auxquelles appartiennent ces côtés homologues. Car c'eſt une même choſe de dire que les ſurfaces ſemblables ſont comme les quarrés des côtés homologues, ou que les quarrés des côtés homologues ſont entr'eux, comme les ſurfaces ſemblables elles-mêmes.

ARTICLE II.

Des Conſéquences qui réſultent du Rapport des Surfaces.

THÉORÊME I.

512. *Le Triangle équilatéral circonſcrit au cercle eſt quadruple du Triangle équilatéral inſcrit au même cercle* (fig. 104.).

DÉMONST. Les ſurfaces de ces triangles ſont (506) entr'elles comme les quarrés de leurs rayons droits : or les rayons droits de ces triangles ſont comme 1 & 2, parce que CA eſt double de CB (426) : donc les ſurfaces ſont comme 1 & 4.

THÉORÊME II.

513. *Dans un Triangle rectangle le Quarré fait ſur l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des Quarrés faits ſur les deux autres côtés* (fig. 105.).

DÉMONST. Ayant abbaiſſé la perpendiculaire GO du ſommet de l'angle droit, on a trois triangles AGB, AGO, OGB, rectangles & ſemblables, comme nous l'avons prouvé (444), & qui ont pour hypothénuſes les trois côtés du grand triangle. Or les quarrés faits ſur les trois hypothénuſes ſont entr'eux comme les trois triangles ſemblables (511); mais le grand triangle AGB eſt égal à la ſomme des deux autres AGO + OGB : donc le quarré fait ſur l'hypothénuſe AB du grand triangle eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres hypothénuſes AG & GB, leſquelles ſont côtés du triangle rectangle AGB : donc, &c.

Corollaire I.

514. Si l'on nomme a l'hypothénuſe AB, b le côté AG, c le côté GB, l'expreſſion du quarré fait ſur l'hypothénuſe ſera $aa = bb + cc$: celle de l'hypothénuſe AB ſera $a = \sqrt{bb+cc}$; celle du côté GB ſera $c = \sqrt{aa-bb}$, & celle du côté AG ſera $b = \sqrt{aa-cc}$.

Corollaire II.

515. Lorſque dans les expreſſions $a = \sqrt{bb+cc}$, $c = \sqrt{aa-bb}$, $b = \sqrt{aa-cc}$, la ſomme ou la différence des quarrés, qui eſt ſous le ſigne radical, ſera un quarré parfait ; on pourra toujours dans un triangle rectangle dont on connoît déjà deux côtés, connoître le troiſiéme, *par ex :* ſuppoſant que les deux côtés connus ſont 3 & 4, leurs quarrés ſeront 9 & 16, dont la ſomme 25 ſera le quarré de l'hypothénuſe, & la racine 5 ſera l'hypothénuſe elle-même.

Corollaire III.

516. Mais lorſque dans les expreſſions $a = \sqrt{bb+cc}$, &c. la ſomme ou la différence des quarrés qui eſt ſous le ſigne radical, n'eſt pas un quarré parfait ; alors connoiſſant deux côtés dans le triangle rectangle, on ne pourra pas pour cela connoître le troiſiéme ; *par ex :* ſuppoſant que les deux côtés connus ſont 2 & 3, en ajoutant leurs quarrés 4 & 9, on aura 13 pour le quarré de l'hypothénuſe ; or le nombre 13 n'étant un point quarré parfait, n'a point de racine quarrée ; l'hypothénuſe ne peut donc être exprimée numériquement, ou par un nombre ; mais ſeulement par $\sqrt{13}$.

Corollaire IV.

517. Ces expreſſions $\sqrt{13}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, & autres ſemblables, ſont ce qu'on appelle quantités *incommenſurables*, quantités *irrationnelles*, *racines ſourdes*, parce qu'elles ne peuvent être exprimées

par aucun nombre poſſible; ces quantités $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$, &c. expriment donc toujours en Géométrie le côté d'un triangle rectangle, qui eſt incommenſurable avec les deux autres.

Corollaire V.

518. Si dans un cercle on mene aux extrémités du diamétre deux cordes qui faſſent avec le diamétre un triangle rectangle (*fig.* 109.), connoiſſant le diamétre & une des cordes, il ſera aiſé par l'application du théorême précédent de déterminer la valeur préciſe de l'autre corde, lorſqu'elle ſera commenſurable avec le diamétre; ou ſa valeur approchée, lorſqu'elle ſera incommenſurable avec le diamétre; & c'eſt par ce moyen que les Géométres déterminent la valeur de toutes les cordes du cercle, depuis celle qui ſoutient l'arc d'un degré, juſqu'à celle qui ſoutient l'arc de 90 degrés.

Corollaire VI.

519. La diagonale du quarré eſt incommenſurable avec le côté. Car la diagonale du quarré eſt toujours l'hypothénuſe d'un triangle rectangle CAD (*fig.* 106.) : donc on a $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$; mais le triangle CAD étant iſocele, on a $CD = AD$, & par conſéquent $\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$: donc on aura $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{CD}^2$: or la quantité $2\overline{CD}^2$ n'eſt pas un quarré parfait: s'il l'étoit, on pourroit trouver la valeur de $\sqrt{2\overline{CD}^2}$, ce qui eſt impoſſible, à cauſe du nombre 2 qui n'a point de racine quarrée; car $\sqrt{2}$ n'eſt pas commenſurable : donc la diagonale, &c.

Corollaire VII.

520. Une figure quelconque faite ſur l'hypothénuſe eſt égale à la ſomme des figures ſemblables conſtruites ſur les côtés. Cela ſuit évidemment du théorême précédent; car ces figures étant ſemblables, ſont entr'elles (510) comme les quarrés faits ſur leurs côtés homologues, leſquels côtés homologues ſont les côtés du triangle rec-

tangle : or le quarré conſtruit ſur l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés conſtruits ſur les côtés : donc, &c.

Corollaire VIII.

521. Si ſur les côtés d'un triangle rectangle & iſocele on conſtruit des demi-cercles, comme on voit (*fig* 108.), & que du ſommet de l'angle droit on abbaiſſe une perpendiculaire, les deux lunules AODG, AEBF terminées par les demi-circonférences, ſeront chacune égales aux triangles correſpondans CAD, CAB.

Car le demi-cercle BEAOD conſtruit ſur l'hypothénuſe BD eſt égal (520) à la ſomme des demi-cercles conſtruits ſur les côtés AB, AD : or ces deux demi-cercles conſtruits ſur les côtés ſont égaux entr'eux, parce que leurs diamétres AB, AD ſont ſuppoſés égaux : donc chacun de ces petits demi-cercles eſt égal à la moitié du grand demi-cercle BEAOD : donc on aura DAGD = CAOD, & retranchant la portion commune DAOD, on aura la lunule DOAGD = CAD, triangle correſpondant à la lunule.

Ces lunules s'appellent les *Lunules d'Hypocrate*, parce que c'eſt lui qui le premier ait évalué la ſurface de ces lunules, en découvrant qu'elles étoient égales chacune à un triangle.

SECTION III.

Des Solides.

I°. UN point qui ſe meut, décrit une *ligne* : une ligne en ſe mouvant décrit une *ſurface* : une ſurface qui ſe meut décrit un *ſolide*.

II°. Lorſqu'une ſurface plane, ou un plan ſe meut pour décrire un ſolide, les lignes qui terminent le plan, décrivent la ſurface du ſolide,

& l'intérieur ou la ſurface du plan donne la ſolidité.

III°. Un ſolide eſt terminé par des faces & des angles ſolides. On appelle *angle ſolide* un eſpace ſolide terminé en pointe par le concours de pluſieurs angles plans ; telle eſt la pointe d'une pyramide, tels ſont les coins d'un dez à jouer. Il faut au moins trois angles plans pour former un angle ſolide ; car deux plans ſeulement ne peuvent pas renfermer un eſpace, de façon à terminer un ſolide.

IV°. Le ſolide peut être conſidéré ſous deux points de vue différens, ou comme corps *figuré*, ou comme corps *ſolide*. On le regarde comme corps figuré, lorſqu'on l'enviſage par rapport aux ſurfaces planes & aux angles ſolides qui terminent ſon volume : on le conſidére comme corps ſolide, lorſqu'on le regarde comme un volume réſultant de trois dimenſions, lequel eſt ſuſceptible d'évaluation, de meſure & de comparaiſon. Nous allons enviſager les ſolides ſous ces deux points de vue différens.

CHAPITRE I.

Des Solides conſidérés comme Corps figurés.

I°. ON appelle *corps figurés*, des corps ou ſolides terminés par des angles ſolides & des ſurfaces planes. Les corps figurés ſont dans la claſſe des ſolides, ce que les polygones ſont dans la claſſe des figures.

II°. On diſtingue deux ſortes de corps figurés, comme on diſtingue deux ſortes de polygones ; ſçavoir, des *réguliers* & des *irréguliers*. Les corps réguliers ſont ceux dont toutes les faces planes ſont égales entr'elles & tous les angles ſolides ſont égaux entr'eux. On appelle au contraire corps irréguliers, ceux dont, ou toutes les faces ne ſont point égales, ou tous les angles ſolides ne ſont point égaux.

III°. On conçoit que les corps figurés ſe peuvent former de deux manieres, ou en faiſant mouvoir une ſurface que l'on ſuppoſe laiſſer des traces par tout où elle paſſe; ou en joignant des ſurfaces planes par leurs angles pour former des angles ſolides : la premiere ſe fait par le mouvement d'un plan; la ſeconde par l'aſſortiment des plans.

ARTICLE I.

Formation des Corps figurés par le mouvement d'un Plan.

HYPOTHÈSE I.

522. Concevez que le plan EFGH (*fig.* 116.) monte parallelement à lui-même le long de la ligne EA, enſorte que le point E parcoure ſucceſſivement tous les points de la ligne EA, & que ce plan laiſſe des traces par tout où il paſſe : il eſt évident qu'il en réſultera le corps AG, que l'on appelle en général *Priſme*.

DÉFINITIONS.

I.

523. Un *priſme* eſt un corps qui dans toute ſa longueur à une égale groſſeur, qui eſt entouré de faces qui ſont des parallélogrammes, & eſt compris ſous deux baſes, l'une ſupérieure ABDC, & l'autre inférieure EFGH, qui ſont des figures paralleles ; ſemblables & égales.

II.

524. Si leplan générateur eſt un parallélogramme, alors le priſme eſt appellé *Parallélipipede*. Si le plan générateur eſt un parallélogramme rectangle, & ſi la ligne AE eſt perpendiculaire à la baſe, alors le parallélipipede s'appelle *Parallélipipede* rectangle (*fig.* 121.). Si le plan générateur eſt un quarré, & qu'il s'éleve à une hauteur égale au

côté du quarré, alors il s'appelle *Cube* ou *Exaedre*, (*fig.* 116.).

I I I.

525. De plus, le prisme s'appelle *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *exagonal*, &c. selon que le plan générateur est un *Triangle*, un *Rectangle*, un *Pentagone*, un *Exagone*, &c.

I V.

526. Une ligne tirée du centre de la base supérieure au centre de la base inférieure, s'appelle l'*Axe* du prisme. Une ligne tirée d'un des angles du prisme perpendiculairement sur la base (prolongée, s'il le faut) s'appelle la *Hauteur* du prisme.

V.

527. Un prisme est appellé *droit*, lorsque son axe est perpendiculaire aux bases, & alors l'axe n'est pas distingué de la hauteur; il est appellé *oblique*, lorsque l'axe n'est pas perpendiculaire aux bases, & alors l'axe est distingué de la hauteur.

V I.

528. Si le plan générateur est un polygone d'un nombre infini de côtés, ou est un cercle, alors le prisme deviendra un *prisme infinitaire*, ou un *cylindre*, (*fig.* 123.). Le cylindre peut donc être regardé comme un prisme entouré de faces qui sont des parallélogrammes d'une largeur infiniment petite.

Corollaire I.

529. Dans l'hypothèse que nous venons de faire, on peut regarder les traces que laisse le *plan générateur*, en montant parallelement à lui-même pour former le prisme, comme étant elles-mêmes autant de petits prismes élémentaires d'une hauteur infiniment petite: c'est pourquoi

I°. On peut regarder le prisme comme un composé d'une infinité de prismes qui n'ont qu'une hauteur infiniment petite, & qui sont posés les uns sur les autres. Les prismes élémentaires peuvent auſſi être regardés comme des tranches, ou comme des plans ſemblables & égaux d'une épaiſſeur infiniment petite.

IIº. On peut dire la même choſe du parallélipipede.

IIIº. Le cylindre peut être regardé comme réſultant de la ſomme d'une infinité de petits cylindres d'une hauteur infiniment petite & poſés les uns ſur les autres. Ces petits cylindres élémentaires peuvent auſſi être regardés comme des cercles, ou des plans circulaires égaux, & d'une épaiſſeur infiniment petite.

Corollaire II.

530. Comme toute figure réguliere peut être inſcrite ou circonſcrite à un cercle, de même tout priſme (dont les baſes ſeront ſuppoſées régulieres) peut être inſcrit ou circonſcrit à un cylindre : or

Iº. De deux ou pluſieurs priſmes circonſcrits à un même cylindre, celui dont la baſe aura plus de côtés, ſera plus petit : car plus la baſe du priſme aura de côtés, plus elle approchera du cercle (422) qui eſt la baſe du cylindre, & par conſéquent plus auſſi le priſme approchera du cylindre qui eſt toujours plus petit qu'aucun des priſmes circonſcrits.

IIº. De deux ou pluſieurs priſmes inſcrits à un même cylindre, celui dont la baſe aura plus de côtés, ſera le plus grand. La preuve en eſt évidente après ce que nous venons de dire.

Hypothèse II.

531. Si le plan générateur qui monte parallelement à lui-même, eſt un polygone fini, dont chaque côté pendant le mouvement, décroiſſe toujours uniformement, juſqu'à ce qu'il devienne nul, ou $=0$; alors le ſolide ſe terminera en pointe, & s'appelle *Pyramide*, (*fig.* 113.).

DÉFINITIONS.

I.

532. La pyramide eſt donc un ſolide terminé d'une part par une *Baſe*, & de l'autre par un *Point*, & environné de faces qui ſont des triangles dont les ſommets ſe réuniſſent tous en un même point, que l'on appelle *Sommet* de la pyramide.

II.

533. La pyramide s'appelle *tronquée*, lorſqu'on en a retranché le ſommet, ou lorſque faiſant paſſer par une des faces de la pyramide un plan parallélement à la baſe, on en a retranché une petite pyramide, (*fig.* 124.).

III.

534. La pyramide s'appelle *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, &c. ſelon que le plan générateur eſt un *Triangle*, un *Quarré*, un *Pentagone*, &c. Dans chacune de ces pyramides, la ligne tirée du ſommet au centre de la baſe, (que nous ſuppoſons être un polygone régulier,) s'appelle l'*Axe* de la pyramide.

IV.

235. La pyramide eſt appellée *droite*, lorſque ſon axe eſt perpendiculaire ſur la baſe, & elle eſt appellée *oblique*, lorſque cet axe eſt oblique ſur la baſe. Elle eſt appellée *réguliere*, lorſqu'elle eſt droite, & que la baſe eſt un polygone régulier.

V.

536. Une ligne tirée du ſommet de la pyramide perpendiculairement ſur la baſe, (prolongée, s'il le faut,) s'appelle la *Hauteur* de la pyramide. Si la pyramide eſt droite, & ſi la baſe eſt un polygone régulier, une ligne tirée du ſommet de la pyramide perpendiculairement ſur un des côtés de la baſe, s'appelle l'*Apothême* de la pyramide.

VI.

537. Si le plan générateur eſt un cercle dont la circonférence décroiſſe uniformément, à meſure qu'elle monte parallélement à elle-même, alors la

pyramide devient une *pyramide infinitaire*, ou un *Cône* (*fig.* 120.); le cône peut donc être regardé comme une pyramide entourrée de faces qui ſont des triangles d'une baſe infiniment petite.

V I I.

538. Le cône, de même que la pyramide, à ſa *Hauteur*, ſon *Axe*, ſon *Apothême*: il eſt appellé *droit*, lorſque ſon axe eſt perpendiculaire ſur la baſe; il eſt appellé *oblique*, lorſque cet axe eſt oblique ſur la baſe; & il eſt appellé *tronqué*, lorſqu'on en a retranché le ſommet.

Corollaire I.

539. Dans l'hypothèſe que nous venons de faire, on peut regarder les traces que laiſſe le plan générateur, comme autant de plans polygones qui ont une épaiſſeur infiniment petite, & ſont poſés les uns ſur les autres: c'eſt pourquoi

I°. La pyramide peut être regardée comme compoſée d'élémens qui ſoient des plans polygones d'une épaiſſeur infiniment petite, & dont les côtés décroiſſent uniformément depuis la baſe juſqu'au ſommet de la pyramide, ou ils deviennent nuls, ou $=0$.

II°. Le cône peut être regardé comme compoſé de pluſieurs cercles poſés les uns ſur les autres, & dont les circonférences décroiſſent uniformément depuis la baſe juſqu'au ſommet du cône, ou elles deviennent nulles, ou $=0$.

Corollaire II.

540. Comme tout priſme, dont les baſes ſont ſuppoſées régulieres, peut être inſcrit ou circonſcrit à un cylindre de même hauteur que lui; de même toute pyramide dont la baſe ſera une figure réguliere, pourra être inſcrite ou circonſcrite à un cône de même hauteur qu'elle: or

I°. De deux ou pluſieurs pyramides circonſcrites à un même cône, celle-là approchera plus du cône & ſera plus petite, dont la baſe aura plus de côtés, ce qui eſt évident après ce que nous avons dit du priſme circonſcrit au cylindre.

II°. Pareillement de deux ou pluſieurs pyramides inſcrites à un même cône, celle-là approchera plus du cône & ſera plus grande, dont la baſe aura plus de côtés.

Hypothèse III.

541. Concevez qu'un polygone: *par ex*: LABIF, &c. (*fig.* 126.) tourne autour d'un diamétre IL, ou d'une diagonale quelconque menée d'un des angles du polygone à l'angle oppoſé; ce polygone dans ſa révolution formera un ſolide, que l'on appelle en général *Sphéroïde*, lequel reçoit différens noms ſelon l'eſpéce du plan ou polygne générateur.

DÉFINITIONS.

I.

542. Si le plan générateur eſt un quarré, ou un lozange qui tourne autour d'une de ſes diagonales priſe comme *axe* du mouvement, le ſphéroïde qui ſera formé par cette révolution, s'appelle *fuſeau.*

II.

543. Si le plan générateur eſt un pentagone régulier, qui ſoit ſuppoſé tourner autour d'un diamétre mené d'un des angles du polygone perpendiculairement ſur le côté oppoſé, le ſolide formé par cette révolution, s'appelle *ſphéroïde pentagonal.*

III.

544. En général le ſphéroïde s'appellera *pentagonal*, *exagonal*, *décagonal*, &c. ſelon que le plan générateur ſera un *pentagone*, un *exagone*, un *décagone*, &c. régulier.

IV.

545. Si le plan générateur eſt un polygone d'un nombre infini de côtés, ou eſt un cercle (*fig.* 127.) que l'on ſuppoſe tourner autour d'un de ſes diamétres IS, alors le ſphéroïde décrit ſera un ſphéroïde *infinitaire*, ou une *ſphere.*

Corollaire I.

546. On peut regarder le ſphéroïde comme compoſé de pluſieurs tranches poſées les unes ſur les autres, leſquels ſont ou des cylindres, ou des cônes tronqués, ou des cônes.

Corollaire II.

547. De ce que tout polygone régulier peut être inſcrit ou circonſcrit à un cercle, il s'enſuit que tout ſphéroïde dont le plan générateur ſera un polygone régulier pourra être inſcrit ou circonſcrit à une ſphére: or

I°. De deux ou pluſieurs ſphéroïdes circonſcrits à une même ſphére, celui dont le polygone générateur aura plus de côtés, ſera le plus petit; car ſi l'on conçoit pluſieurs polygones circonſcrits à un même cercle, & qu'on les faſſe tourner autour d'un diamétre commun pour former la ſphére & les ſphéroïdes, il eſt évident que le polygone qui aura le plus de côtés approchera le plus du cercle, & ſera le plus petit (422); par conſéquent le ſphéroïde décrit par le polygone d'un plus grand nombre de côtés approchera le plus de la ſphére, & ſera le plus petit, puiſque la ſphére eſt plus petite qu'aucun des ſphéroïdes circonſcrits.

II°. Par une raiſon contraire de tous les ſphéroïdes inſcrits à une même ſphére, celui dont le polygone générateur aura plus de côtés, ſera le plus grand, parce qu'il approchera le plus de la ſphére, laquelle eſt plus grande qu'aucun des ſphéroïdes qui lui ſont inſcrits.

Remarque.

548. Le mouvement de révolution dont nous venons de faire uſage dans cette hypothèſe, ſert en général à faire concevoir la formation de tous les corps circulaires.

ARTICLE II.

Formation des Corps figurés par l'assortiment des Plans.

Hypothése.

549. Si l'on joint ensemble des surfaces planes par leurs angles pour former des angles solides ; & si l'on renferme un espace ou un volume sous ces surfaces, on représentera des solides que l'on appelle *polyedres*, lesquels prennent différens noms suivant le nombre & l'espéce des surfaces que l'on aura fait concourir.

Il est à propos de former soi-même ces différens polyedres avec du carton.

DÉFINITIONS.

I.

550. Si vous assortissez quatre triangles égaux & équilatéraux par leurs angles, vous renfermerez par cet assortiment un espace ou un volume, & vous aurez un polyedre, que l'on appelle *Tétraedre* (*fig.* 114.).

II.

551. Si vous joignez de la même maniere huit triangles égaux & équilatéraux, cet assortissement représentera un polyedre, que l'on appelle *Octaedre* (*fig.* 115.).

III.

552. Si vous réunissez ensemble vingt triangles égaux & équilatéraux, il en résultera un polyedre, que l'on appelle *Icosaedre* (*fig.* 117.).

IV.

553. Si, au lieu de triangles, vous prenez des quarrés, & si vous assortissez ensemble, & de la maniere ci-dessus, six quarrés égaux, vous aurez un polyedre que l'on appelle *Exaedre* ou *Cube*, (*fig.* 116.).

V.

554. Si, au lieu de quarrés, vous prenez des rectangles, & si vous entourez un espace avec ces

rectangles, de façon que ceux qui seront opposés, soient égaux ; si de plus vous donnez à cette enveloppe des bases qui soient des polygones paralleles, semblables & égaux, il en résultera un polyedre, que l'on appelle en général *Prisme*, (*fig.* 121, 122 & 131).

I V.

555. Si, au lieu de rectangles, vous prenez des pentagones, & si vous assortissez ensemble douze pentagones réguliers & égaux, de maniere à former des angles solides, vous aurez un polyedre que l'on appelle *Dodécaedre* (*fig.* 119.).

Corollaire I.

556. Si, du sommet de chaque angle du polyedre, on suppose des lignes menées dans l'intérieur du polyedre, de façon qu'elles se rencontrent toutes en un même point, ces lignes partageront le polyedre en plusieurs pyramides, dont les sommets se réuniront en un point commun, que l'on appelle le *centre* du polyedre : d'où il suit

I°. Que le polyedre peut être regardé comme composé de pyramides, dont les sommets se réunissent au centre du polyedre, & dont les bases sont appuyées sur les faces du polyedre.

II°. Que la sphére peut être regardée comme un polyedre régulier, composée d'une infinité de pyramides toutes égales, dont les sommets se réunissent au centre de la sphére, & dont les bases sont appuyées sur les faces infiniment petites du polyedre infinitaire, ou de la sphére.

Corollaire I I.

557. Comme toute figure réguliere peut être inscrite ou circonscrite à un cercle, de même tout polyedre régulier pourra être inscrit ou circonscrit à une sphére de même diamétre : or

I°. De deux ou plusieurs polyedres inscrits à une même sphére, le plus grand sera celui qui aura un plus grand nombre de faces, parce qu'il approchera plus de la ſphére, laquelle eſt plus grande qu'aucun des polyedres inſcrits.

II°. Au contraire, de tous les polyedres circonſcrits à une même ſphére, le plus petit ſera celui qui aura un plus grand nombre de faces, parce que plus le polyedre aura de faces, plus il approchera de la ſphére, laquelle eſt plus petite qu'aucun des polyedres circonſcrits.

Remarque I.

558. En prenant des exagones, & en général des polygones au deſſus de l'exagone; on ne peut plus former aucune eſpéce de polyedres par l'aſſortiſſement des plans.

Remarque II.

559. En aſſortiſſant des lignes égales par leurs extrémités, vous pouvez toujours former des polygones réguliers : ainſi tous les polygones depuis le plus ſimple, qui eſt le *triangle*, juſqu'au plus composé, qui eſt le *cercle*, peuvent être réguliers; mais il n'en eſt pas de même des corps figurés, & nous allons voir qu'entre tous les corps figurés depuis le plus ſimple, qui eſt le *tétraedre*, juſqu'au plus composé, qui eſt la *ſphére*, il ne peut y avoir que cinq ſortes de corps réguliers. Nous entendons par corps réguliers, ceux-là ſeulement dont la régularité eſt parfaite, c'eſt-à-dire dont tous les angles ſolides ſont égaux entr'eux, & toutes les faces ſont égales entr'elles.

LEMME I.

560. *Lorſqu'un Angle ſolide* A (*fig.* 112.) *eſt formé par trois angles plans* DAC, DAB, BAC, *deux de ces angles, quels qu'ils ſoient, ſont plus grands que le troiſiéme.*

DÉMONST. L'angle plan BAC eſt plus petit que la ſomme des angles plans BAD + DAC; car entre les extrémités AB, AC, aucune ſurface n'eſt plus petite que le plan BAC : donc le plan BAC eſt plus petit que le plan anguleux BAD + DAC; de même qu'une ligne droite eſt plus courte que la ligne anguleuse comprise entre les mêmes points.

LEMME II.

561. *Tous les Angles plans qui peuvent former un Angle solide, pris ensemble, sont plus petits que quatre angles droits* (fig. 113.).

DÉMONST. Soit une pyramide pentagonale dont la base BFEDC soit divisée en cinq triangles, dont les sommets se réunissent au point G. Cela posé, la surface convexe de la pyramide est composée de cinq triangles, dans chacun desquels la somme des angles vaut 180 degrés : pareillement la base de la pyramide est composée de cinq triangles, dans chacun desquels la somme des angles vaut 180 degrés; donc la somme des angles des cinq premiers triangles est égale à la somme des angles des cinq derniers triangles. Mais les angles sur les bases des cinq premiers triangles qui sont les faces triangulaires, sont plus grands que les angles sur la base des cinq autres triangles, ou que les angles à la circonférence du pentagone. Car par la proposition précédente, à cause de l'angle solide, *par ex :* C, on aura les angles ACB + ACD plus grands que BCD : donc les angles au sommet A de la pyramide sont moindres que les angles formés autour du point G du pentagone; or les angles autour du point G valent quatre angles droits : donc la somme des angles formés autour du sommet A vaut moins que quatre angles droits.

THÉORÊME I.

562. *Il n'y a que cinq espéces de corps réguliers qui puissent être formés par l'assortiment des surfaces planes de même espéce, sçavoir ; le* Tétraedre, *l'*Octaedre, *l'*Icosaedre, *l'*Exaedre, *& le* Dodécaedre.

DÉMONST. Pour former un polyedre en joignant des surfaces planes, il est nécessaite que ces surfaces réunies par leurs angles puissent former un angle solide, qui est moindre que 360 degrés.

Or I°. trois angles de triangles égaux & équilatéraux peuvent former un angle solide ; car chaque angle du triangle équilatéral étant de 60 degrés, trois de ces angles font $3 \times 60 = 180$ degrés, ce qui eſt moindre que 360 degrés ou quatre angles droits : donc en aſſortiſſant quatre triangles égaux & équilatéraux, on formera des angles ſolides tels que ſont ceux du *Tétraedre*.

II°. Quatre angles de ces mêmes triangles peuvent encore former un angle ſolide : car quatre de ces angles font $4 \times 60 = 240$ degrés, ce qui eſt moindre que quatre angles droits ; or l'angle ſolide de l'*Octaedre* eſt formé par quatre angles de triangles égaux & équilatéraux.

III°. Cinq angles de ces mêmes triangles peuvent encore former un angle ſolide, car $5 \times 60 = 300$ degrés ; ce qui eſt moindre que 360 degrés ou quatre angles droits : or l'angle de l'*Icoſaedre* eſt formé par cinq angles de triangles égaux & équilatéraux.

Mais ſix angles de triangles équilatéraux ne peuvent plus former un angle ſolide ; car $6 \times 60 = 360$ degrés ou quatre angles droits : c'eſt pourquoi il ne peut y avoir que trois eſpéces de polyedres réguliers formés par l'aſſortiment de triangles égaux & équilatéraux.

IV°. Trois angles de quarré peuvent faire un angle ſolide : car l'angle du quarré étant de 90 degrés, trois de ces angles font $3 \times 90 = 270$ degrés, moindres que 360 degrés ou quatre angles droits : or l'angle du *cube* ou de l'*exaedre*, eſt compoſé de trois angles de quarré.

Mais quatre angles de quarré font $4 \times 90 = 360$ degrés, & ne peuvent par conſéquent former un angle ſolide ; c'eſt pourquoi on ne peut former avec des quarrés d'autre ſolide que le *cube*.

V°. Trois angles de pentagones réguliers peuvent auſſi former un angle ſolide : car l'angle du pentagone régulier étant de 108 degrés, trois de ces angles feront 3×108 degrés $= 324$ degrés, ce qui eſt moindre que quatre angles droits: or chaque angle du *Dodécaedre* eſt formé par trois angles de pentagones réguliers.

Mais quatre angles de pentagones réguliers font $4 \times 108 = 432 > 360$ degrés, & ne peuvent par conſéquent former d'angles ſolides. C'eſt pourquoi on ne peut former avec des pentagones réguliers d'autre ſolide que le *Dodécaedre*.

VI°. Trois angles d'exagones réguliers ne peuvent pas former un angle ſolide: car chaque angle de l'exagone régulier étant de 120 degrés, trois de ces angles font $3 \times 120 = 360$ degrés ou quatre angles droits: ainſi on ne peut point former de polyedres réguliers avec des exagones.

Remarque.

563. Ces ſurfaces planes qui, jointes par leurs angles, & repliées les unes ſur les autres, repréſentent le ſolide, donnent exactement la ſurface du ſolide. Or, ſi l'on conçoit que ces ſurfaces ſoient développées, ou poſées ſur un même plan à côté les unes des autres, elles s'appellent le *Développement* de la ſurface du ſolide; & ce développement peut être évalué & meſuré.

THÉORÊME II.

564. *Chaque corps régulier a pour développement une ſurface composée d'un certain nombre de polygones égaux réguliers & de même eſpéce, que l'on peut tracer & évaluer.*

DÉMONST. I°. Si vous faites le triangle équilatéral BAC (*fig.* 114.); & ſi vous diviſez également les trois côtés aux points D, E, F, en tirant les lignes DE, DF, EF, vous aurez le développement du *Tétraedre*, qui ſera composé de quatre triangles plans égaux & équilatéraux, leſquels repliés pour ſe réunir, repréſenteront le *Tétraedre*.

II°. Si vous joignez enſemble deux développemens de tétraedre, en leur donnant le côté commun AB (*fig.* 115.) vous aurez le développement de l'*Octaedre*, lequel est composé de huit triangles égaux & équilatéraux.

III°. Si entre deux paralleles AB, CD (*fig.* 117.) vous tracez dix triangles égaux & équilatéraux; & si sur les bases de ces triangles vous tracez encore de part & d'autre des triangles égaux & équilatéraux, vous aurez le développement de l'*Icosaedre*, lequel est composé de vingt triangles égaux & équilatéraux.

IV°. Si vous faites le quarré ABDC (*fig.* 116.); & si sur chaque côté de ce quarré vous faites encore des quarrés égaux & semblables au premier, & si vous ajoutez le quarré EGHF, construit sur le côté EF, vous aurez le développement du *Cube*, ou de l'*Exaedre*, qui est composé de six quarrés égaux.

V°. Si vous faites deux pentagones réguliers & égaux A & B (*fig.* 119.), & si sur chaque côté de chacun des pentagones vous construisez pareillement des pentagones égaux, rendez le côté DC commun, & vous aurez le développement du *Dodécaedre*, composé de douze pentagones réguliers & égaux.

Corollaire I.

565. Des cinq corps réguliers dont nous venons de parler, on peut dériver & faire naître d'autres corps, qui seront des polyédres; sçavoir en tronquant les angles du corps régulier, ce qui augmentera le nombre des angles solides, & celui des faces du polyedre.

Corollaire II.

566. Si l'on tronquoit les angles d'un polyedre régulier à l'infini, les angles deviendroient nuls, & les faces seroient infiniment petites, & alors le polyedre régulier deviendroit une sphére.

Corollaire III.

567. Tout polygone régulier a, comme nous l'avons dit, un centre qui est également éloigné

de tous les sommets des angles & de tous les côtés : de même aussi tout corps régulier a un centre qui est également distant de tous les sommets des angles solides, & de toutes les faces du corps régulier.

Or dans le corps régulier, comme dans le polygone régulier, une ligne tirée du centre perpendiculairement sur une des faces, s'appelle *rayon droit*, & une ligne tirée du centre au sommet d'un des angles solides, s'appelle *rayon oblique*, lequel n'est pas distingué du rayon de la sphére circonscrite.

CHAPITRE II.

Des Solides considérés en tant que Corps Solides.

NOUS y considérerons deux choses, leur surface & leur solidité. La surface du corps solide est cette étendue qui termine le volume du solide, la solidité est la capacité ou le volume qui est compris sous cette surface.

ARTICLE I.

De la Surface des Solides.

Nous avons déja parlé de la surface des solides considérée comme *développement*, ou comme surface formée par le concours ou l'assortiment de plusieurs figures planes de même, ou de différente espéce, nous allons maintenant considérer leur surface comme *produit*, ou comme étendue résultante de la combinaison de deux dimensions multipliées l'une par l'autre.

HYPOTHÈSE I.

568. Si une ligne AB (*fig.* 113.) immobile au point A, parcourt par son extrémité B les côtés, d'une figure quelconque BCDEF, cette ligne décrira la surface *convexe* ou *latérale* d'une pyramide,

mide, dont le ſommet eſt le point A & dont la baſe eſt la figure décrite par l'extrémité B de la ligne. Or

I°. Si la figure décrite par l'extrémité B eſt un *Triangle*, cette ligne décrira la ſurface d'une pyramide *triangulaire*.

II°. Si la figure décrite eſt un *Quarré*, un *Pentagone*, &c. cette ligne décrira la ſurface d'une pyramide *quadrangulaire*, *pentagonale*, &c.

III°. Si la figure décrite par le point B eſt un *Cercle*, cette ligne décrira la ſurface d'un *Cône*.

Hypotése II.

569. Si le ſommet de la ligne qui décrit la ſurface d'un ſolide, n'eſt pas immobile, & ſi dans le tems que l'extrémité F d'une ligne CF (*fig.* 116.) décrit le contour d'une figure FGHE, ſon ſommet C décrit une figure CDBA, parallele, égale & ſemblable à la premiere; alors cette ligne décrira la ſurface *convexe* ou *latérale* d'un *Priſme*. Or

I°. Si la baſe eſt un *Triangle*, la ſurface décrite ſera celle d'un priſme *triangulaire*.

II°. Si la baſe eſt un *Quarré*, un *Pentagone*, &c. la ſurface décrite ſera celle d'un priſme *quadrangulaire*, *pentagonal*, &c.

III°. Si la baſe eſt un *Cercle*, la ſurface décrite ſera celle d'un *Cylindre*.

Théorême I.

570. *La ſurface convexe ou latérale du Priſme droit eſt égale au produit du côté du Priſme par le contour de ſa baſe* (fig. 116.).

Démonst. Car elle eſt égale à la ſurface que décrit la ligne, ou le côté CF, lorſque par ſes extrémités C & F elle parcourt les côtés de deux figures égales & paralleles FEHG, CABD. Or tandis que les extrémités C & F de la ligne CF décrivent les côtés des figures FEHG, CABD, tous les autres points de la ligne CF décrivent auſſi les côtés de figures ſemblables, égales & paralleles, comme il eſt évident, Donc pour avoir la ſurface décrite par la ligne CF, il n'y a qu'à prendre le contour d'une de ces figures; *par ex :* de la baſe autant de fois qu'il y a de points dans le côté CF. Or prendre le contour de la baſe autant de fois qu'il y a de points dans le côté CF, c'eſt multiplier le contour de la baſe par le côté : donc, &c.

Corollaire.

571. Il s'enſuit :

I°. Que la ſurface *convexe* ou *latérale* du priſme droit eſt égale au produit de ſa hauteur par le contour de ſa baſe. Car lorſque le priſme eſt droit, ſa hauteur n'eſt pas diſtinguée de ſon côté.

II°. Que la ſurface convexe ou latérale, ſoit du parallélipipede rectangle, ſoit du cube, eſt égale au produit d'un des côtés du ſolide par le contour de la baſe.

THÉORÊME II.

572. *La ſurface convexe du Cylindre droit eſt égale au produit de la circonférence de la baſe par la hauteur du Cylindre* (fig. 123.).

DÉMONST. Car elle eſt égale à la ſomme de toutes les circonférences que décrivent les points de la ligne CI, lorſque par ſes extrémités C & I elle décrit les circonférences égales & paralleles des baſes ſupérieure & inférieure. Or toutes ces circonférences ſont égales & uniformes : donc leur ſomme eſt égale à l'une d'entr'elles; *par ex :* à la circonférence de la baſe multipliée par le nombre de ces circonférences. Mais le nombre de ces circonférences eſt meſuré par la hauteur CI, ou AB du cylindre : donc, &c.

Corollaire I.

573. La ſurface convexe du cylindre eſt égale à un rectangle qui auroit pour baſe une ligne égale à la circonférence de la baſe du cylindre, & une hauteur égale à celle du cylindre.

Il eſt aiſé par conſéquent de meſurer la ſurface totale du cylindre. Car pour l'évaluer, il ne s'agit que d'ajouter à la ſurface convexe les deux baſes, qui ſont des cercles que l'on ſçait (485) évaluer.

Corollaire II.

574. La ſurface convexe du cylindre qui a pour hauteur le rayon du cercle de la baſe, eſt double de ce cercle. Car la ſurface de ce cercle eſt égale au produit de ſon rayon par ſa demi-circonférence (485). Or la ſurface convexe du cylindre eſt égale au produit de ſa hauteur, (qui eſt le rayon du cercle de la baſe,) par la circonférence entiere de cette baſe: donc, &c.

Corollaire III.

575. Donc la ſurface convexe du cylindre qui auroit pour hauteur le diamétre du cercle de la baſe, eſt quadruple de la ſurface de ce cercle; comme il eſt évident.

THÉORÊME III.

576. *La ſurface convexe ou latérale de la Pyramide droite & réguliere, eſt égale au produit du contour de ſa baſe par la moitié de l'Apothême de la Pyramide.* (fig. 113.)

DÉMONST. Elle eſt égale à la ſomme de tous les triangles qui ſont décrits par la ligne AB, lorſqu'immobile au point A, elle décrit par ſon extrémité B les côtés de la figure, ou du polygone BFEDC. Or tous ces triangles ayant même hauteur, leur ſurface eſt égale à celle d'un triangle unique, qui auroit pour baſe une ligne égale à la ſomme des baſes de tous ces triangles, (laquelle ſomme eſt le contour de la baſe de la pyramide,) & pour hauteur, la hauteur commune de tous les triangles, (laquelle eſt l'apothême de la pyramide.). Or ce triangle unique eſt égal au produit de ſa baſe par la moitié de ſa hauteur: donc, &c.

Corollaire.

577. D'où il ſuit que la ſurface de la pyramide

droite & réguliere est égale à celle d'un triangle qui auroit pour hauteur l'apothême de la pyramide, & pour base une ligne égale à la circonférence de la base de la pyramide.

THÉORÊME IV.

578. *La surface convexe du Cône droit est égale au produit de l'Apothême par la moitié de la circonférence de la base* (fig. 124.).

DÉMONST. La surface convexe du cône est égale à la somme de toutes les circonférences que décrivent les points de la ligne AE, lorsqu'immobile au point A, elle décrit par son extrémité E la circonférence du cercle EFE, qui sert de base au cône. Or toutes ces circonférences décroissent uniformement depuis la base jusqu'au sommet, & par conséquent sont représentées par les termes d'une progression arithmétique, *par ex:* $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$, dont le premier terme 0 représente le sommet, le dernier 6 représente la circonférence de la base, & le nombre des termes représente l'apothême; (car il y a autant de termes dans la progression, qu'il y a dans l'apothême de points qui décrivent ces circonférences.) Or la somme de tous les termes d'une progression arithmétique est égale, comme nous l'avons dit (192), au nombre des termes multiplié par la moitié de la somme des extrêmes: donc dans la progression $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$, le premier extrême étant 0, la somme de tous les termes sera égale au nombre des termes multiplié par la moitié du dernier extrême; & par conséquent la surface convexe du cône sera égale au produit de l'apothême par la moitié de la circonférence de la base.

Corollaire I.

579. Donc la surface convexe du cône droit est égale à celle d'un triangle rectangle ABC (*fig.* 124.), dont la base seroit égale à la circonférence

de la base du cône, & dont la hauteur seroit égale à l'apothême du cône.

Corollaire II.

580. La surface convexe du cône est égale au produit de l'apothême par la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre le sommet & la circonférence de la base. Car elle est égale (578) au produit de l'apothême par la moitié de la circonférence de la base : or la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre le sommet & la base, est précisément la moitié de la circonférence de la base. Car les circonférences qui composent la surface conique étant représentées par les termes de la progression 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6, comme nous venons de le dire, le terme moyen 3 qui représente la circonférence du milieu, est précisément la moitié du dernier terme 6, qui représente la circonférence de la base, suivant la nature de toute progression arithmétique qui commence par 0.

THÉORÊME V.

581. *La surface convexe d'un Cône tronqué est égale au produit de son apothême par la moitié de la somme des circonférences de ses bases supérieure & inférieure* (fig. 124.).

DÉMONST. On peut considérer le cône tronqué GEFH comme résultant de la section faite dans le cône entier AEF, dont on auroit retranché le petit cône AGH : or, puisque (578) les circonférences ou élémens de la surface du cône entier sont représentés par les termes d'une progression arithmétique, *par ex :*

0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10;

si d'ailleurs l'on suppose que les élémens de la surface du petit cône AGH soient représentés par les termes 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5, il s'ensuit que les circonférences ou élémens qui composent la surface du cône tronqué, seront représentés par le reste des termes 6 · 7 · 8 · 9 · 10, dont le premier 6 repréſente la circonférence de la baſe ſupérieure, le dernier 10 repréſente celle de la baſe inférieure, & le nombre repréſente l'apothême du cône tronqué; or la ſomme des termes de cette derniere progreſſion eſt égale, comme nous l'avons vu (192), au nombre des termes multiplié par la moitié de la ſomme des extrêmes: donc, &c.

Corollaire I.

582. La ſurface du cône tronqué eſt égale à la ſurface d'un trapeze qui auroit pour hauteur l'apothême, & des baſes égales aux circonférences des baſes ſupérieure & inférieure du cône tronqué (*fig.* 124.). Car l'une & l'autre ſurfaces ſont égales chacune au produit de deux élémens qui ſont ſuppoſés égaux de part & d'autre.

Corollaire II.

583. La ſurface du cône tronqué eſt égale au produit de l'apothême par la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre les baſes ſupérieure & inférieure. Car la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre les baſes ſupérieure & inférieure, eſt égale à la moitié de la ſomme des circonférences des baſes ſupérieure & inférieure.

Théorême VI.

584. *La ſurface d'un Sphéroïde eſt égale au produit de ſon axe par la circonférence d'un grand cercle de la ſphére inſcrite* (fig. 126.).

Démonst. Si l'on ſuppoſe qu'un cercle & un polygone circonſcrit au cercle tournent autour du diamétre IL; ils décriront, l'un une ſphére, & l'autre un ſphéroïde circonſcrit à la ſphére. Or, ſi par les angles du ſphéroïde on fait paſſer des plans paralleles BD, AE, &c. le ſphéroïde ſe trouvera diviſé en pluſieurs portions qui ſeront, ou des cônes tronqués, ou des cylindres, & la ſurface du ſphéroïde ne ſera pas diſtinguée de la ſomme des ſurfaces de tous ces cônes tronqués

& cylindres circonſcrits à la ſphére. Or la ſurface de la portion cylindrique compriſe entre les plans AE, PG eſt évidemment égale au produit de ſon axe CX par la circonférence de ſa baſe, qui eſt la circonférence d'un grand cercle de la ſphére. Reſte donc à prouver que la ſurface de chacun des cônes tronqués circonſcrits à la ſphére, eſt égale au même produit.

Pour le prouver, prenons le cône tronqué décrit pendant la révolution par le côté, ou apothême BA, & du milieu Y, menez YR, parallele à BD, & menez le diamétre YS; abbaiſſez la perpendiculaire BZ = TX, laquelle ſera l'axe du cône tronqué, ou la portion correſpondante de l'axe de la ſphére, & menez la ligne RS.

Cela poſé, on aura le triangle ABZ ſemblable au triangle YRS. Car 1°. ils ont chacun un angle droit; 2°. l'angle BAZ = BYR, parce qu'ils ſont correſpondans; & l'angle BYR = RSY, parce qu'ils ſont meſurés chacun par la moitié du même arc YIR: donc l'angle BAZ = RSY: donc le triangle ABZ eſt ſemblable au triangle YRS: donc on aura AB : BZ, ou TX :: YS : YR;
or les diamétres YS; YR ſont entr'eux comme leurs circonférences YSY, YRY: donc on aura

AB : TX :: YSY : YRY;

donc AB × YRY = TX × YSY.

Or la ſurface du cône tronqué eſt égale au produit AB × YRY de ſon apothême par la circonférence de l'élément qui tient le milieu entre ſes baſes: donc elle eſt auſſi égale au produit TX × YSY de l'axe du cône, ou de la portion correſpondante de l'axe de la ſphére, par la circonférence d'un grand cercle de la ſphére.

Par conſéquent la ſomme des ſurfaces de tous les cônes tronqués & cylindres circonſcrits à la ſphére, laquelle ſomme donne la ſurface du ſphéroïde, eſt égale au produit de l'axe entier de la ſphére, (qui n'eſt point ici diſtingué de l'axe du ſphéroïde,) par la circonférence d'un grand cercle de la même ſphére.

THÉORÊME VII.

585. *La ſurface de la Sphére eſt égale au produit de ſon axe par la circonférence d'un de ſes grands cercles* (fig. 126 & 127.).

DÉMONST. La ſphére peut être conſidérée comme un ſphéroïde formé par la révolution d'un polygone régulier d'une infinité de côtés autour de ſon diamétre, qui n'eſt pas diſtingué du diamétre de la ſphére; or la ſurface de ce ſphéroïde eſt égale au produit de l'axe entier de la ſphére par la circonférence d'un grand cercle de la même ſphére: donc, &c.

Corollaire I.

586. La ſurface de la ſphére eſt quadruple de la ſurface d'un grand cercle de la même ſphére. Car la circonférence d'un grand cercle étant appellée c, le rayon r, & le diamétre $2r$, l'expreſſion de la ſurface ſphérique ſera $2rc$, & celle de la ſurface d'un grand cercle ſera $\frac{1}{2}rc$; or

$2rc : \frac{1}{2}rc :: 2 : \frac{1}{2} :: 4 : \frac{2}{2} :: 4 : 1$; donc, &c.

Corollaire II.

587. La ſurface de la ſphére eſt égale à la ſurface convexe du cylindre circonſcrit (*fig.* 128); car elle eſt égale au produit de ſon axe par la circonférence d'un de ſes grands cercles. Or la ſurface convexe du cylindre circonſcrit eſt égale (572) au produit de ſon axe, qui eſt le même que celui de la ſphére, par la circonférence du cercle de ſa baſe, qui eſt la même que la circonférence d'un grand cercle de la ſphére : donc, &c.

Corollaire III.

588. La ſurface de la ſphére eſt à la ſurface totale du cylindre circonſcrit, comme $2 : 3$. Car la ſurface de la ſphére eſt à la ſurface d'un de ſes grands cercles comme $4 : 1$, comme nous venons

de le voir. La surface totale du cylindre circonscrit à la sphére est égale à la surface de la sphére, plus à celle de ses deux bases, qui sont deux grands cercles de la sphére : donc la surface totale du cylindre circonscrit est à la surface d'un grand cercle de la sphére, comme 6 : 1 ; donc la surface de la sphére est à la surface totale du cylindre circonscrit comme 4 : 6, ou comme 2 : 3.

Corollaire IV.

589. La surface, soit d'une zône, soit d'une calotte sphérique est égale au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la sphére, à laquelle appartiendra cette zône, ou cette calotte sphérique. Car cette surface sera la même que celle d'un cône tronqué circonscrit à la sphére, laquelle est, comme nous l'avons prouvé (584), égale au produit de son axe (qui est ici le même que la hauteur), par la circonférence d'un grand cercle de la sphére.

Corollaire V.

590. La surface de la sphére est au quarré de son diamétre, comme la circonférence est au diamétre. Car le diamétre étant $2r$, la surface de la sphére est $2rc$, & le quarré du diamétre est $4rr$, on aura donc $2rc : 4rr :: 2r \times c : 2r \times 2r :: c : 2r$ (180).

ARTICLE II.

De la Solidité des Solides.

Les solides sont susceptibles d'évaluation, de mesure & de rapport, comme nous l'allons voir.

PARAGRAPHE I.

De l'Evaluation des Solides.

THÉORÊME I.

591. *La solidité du Prisme droit est égale au produit de sa base par sa hauteur* (fig. 116.).

DÉMONST. On peut concevoir que le prisme est formé (522) par le mouvement d'un plan EFGH (qui est ici la base du prisme), lequel monte parallélement à lui-même le long d'une ligne droite FC, perpendiculaire à ce plan, (laquelle est dans ce cas la hauteur du prisme), & qui, en s'élevant, laisse autant de traces, qu'il y a de points dans la hauteur; or, prendre la base autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur, c'est multiplier la base par la hauteur : donc, &c.

Corollaire I.

592. La solidité du prisme est égale au produit de ses trois dimensions, longueur, largeur & profondeur. Car elle est égale au produit de sa hauteur par sa base, laquelle base est elle-même le produit de la longueur par la largeur.

Corollaire II.

593. Si l'on divise (*fig.* 130.) la hauteur AB du prisme en cinq parties égales, la largeur BC en quatre parties égales, & la profondeur CD en trois parties égales, la solidité du prisme se trouvera composée de petits prismes élémentaires, dont le nombre sera $5 \times 4 \times 3 = 60$, & c'est l'expression *numérique* de la solidité du prisme.

Corollaire III.

594. Si l'on appelle la hauteur du prisme a, sa largeur b, & sa profondeur c, l'expression de la solidité du prisme sera $P = abc$, & c'est l'expression *algébrique* de la solidité du prisme.

Si les trois dimensions du prisme étoient égales, alors on auroit $P = aaa$, ou $P = a^3$, & le prisme deviendroit un cube.

Corollaire IV.

595. La hauteur du prisme étant exprimée par la ligne AB, la largeur par BC, & la profondeur par CD, l'évaluation de sa solidité sera $P = AB \times BC \times CD$, lequel produit est un solide, & c'est l'expression *géométrique* de la solidité du prisme (*fig.* 130.).

THÉORÊME II.

596. *Un prisme droit & un prisme oblique (fig. 131.) de même base & de même hauteur, sont égaux en solidité.*

DÉMONST. Supposant deux prismes AC & BD compris entre deux plans paralleles & traversés par une infinité de plans paralleles intermédiaires, les sections que laisseront ces plans dans le prisme droit & dans le prisme oblique, représenteront les traces que laisse la base, en montant, soit pour former le prisme droit, soit pour former le prisme oblique. Or ces sections sont égales de part & d'autre en nombre & en grandeur : en nombre, parce que tous les plans qui traversent l'un des prismes, traversent aussi l'autre; en grandeur, parce que chacune de ces sections est égale à la base, laquelle est ou commune aux deux prismes, ou égale dans les deux prismes.

Corollaire I.

597. Deux prismes quelconques, deux parallélipipedes quelconques, un parallélipipede droit & un parallélipipede oblique de même base & de même hauteur sont égaux en solidité.

Corollaire II.

598. Il suit aussi que deux prismes qui ont même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases, & ceux qui ont même base, sont entr'eux comme leurs hauteurs. En effet, si de deux prismes qui ont même base, l'un a une hauteur double, il est clair qu'il sera double de l'autre ; car il équivaut à deux prismes dont chacun seroit précisément égal au prisme dont la hauteur n'est que sous-double.

Ce que nous disons des prismes doit s'entendre de tous les solides en général.

THÉORÊME III.

599. *La solidité de la Pyramide droite est le tiers de*

la ſolidité d'un priſme de même baſe & de même hauteur.

Démonst. Soit donné un priſme qui ſoit un cube; ſi l'on ſuppoſe que du centre du cube il parte des rayons qui aboutiſſent aux ſommets de tous les angles ſolides; ces rayons partageront le cube en ſix pyramides égales dont chacune ſera la ſixiéme partie du cube: mais chacune de ces pyramides a même baſe & n'a que la moitié de la hauteur du cube; donc ſi l'on ſuppoſe une pyramide qui ait même baſe, mais une hauteur double de chacune des précédentes, ou une hauteur égale à celle du cube, elle ſera double de chacune de ces pyramides (598); & par conſéquent ſera le tiers du cube: donc, &c.

Corollaire I.

600. La ſolidité de la pyramide droite eſt égale au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur, ou au produit de ſa hauteur par le tiers de ſa baſe.

Corollaire II.

601. Deux pyramides de même hauteur & de même baſe ſont égales en ſolidité. Car elles ſont les tiers de deux priſmes de même baſe & de même hauteur, leſquels, comme nous l'avons prouvé (597), ſont égaux en ſolidité.

Corollaire III.

602. La ſolidité du cylindre eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur. Car le cylindre n'eſt autre choſe qu'un priſme, dont les baſes ſupérieure & inférieure ſont des polygones d'une infinité de côtés; or la ſolidité du priſme eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur (591): donc, &c.

Corollaire IV.

603. La ſolidité du cône eſt égale au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur. Car comme la ſolidité de la pyramide eſt le tiers de celle d'un priſme de même baſe & de même hauteur; de même la ſolidité du cône eſt le tiers de celle d'un

cylindre de même baſe & de même hauteur. Or le cylindre eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur, ou eſt $= abc$: donc la ſolidité du cône en ſera le tiers, ou ſera $= \frac{1}{3}\, abc$.

Théorême IV.

604. *La ſolidité du Polyedre régulier eſt égale au produit de ſa ſurface par le tiers de ſon rayon droit.*

Démonst. La ſolidité du polyedre régulier eſt égale à celle de toutes les pyramides auxquelles on peut concevoir (556) le polyedre diviſé, en tirant des rayons du centre à tous les angles ſolides. Or toutes ces pyramides ont même baſe, & même hauteur à cauſe de la régularité du polyedre : donc leur ſolidité eſt égale à celle d'une pyramide unique, qui auroit pour hauteur la hauteur commune de toutes ces pyramides, & pour baſe la ſomme des baſes de toutes ces pyramides. Mais la ſolidité de cette pyramide unique eſt égale (600) au produit de ſa baſe, qui eſt la ſurface du polyedre, par le tiers de ſa hauteur, qui eſt le rayon droit du polyedre : donc, &c.

Corollaire I.

605. La ſolidité de la ſphére eſt égale au produit de ſa ſurface par le tiers de ſon rayon. En effet la ſphére n'eſt autre choſe qu'un polyedre régulier, dont les faces ſont devenues infiniment petites & infinies en nombre. Or la ſolidité du polyedre régulier eſt égal au produit de ſa ſurface par le tiers de ſon rayon droit : donc, &c.

Corollaire II.

606. Donc la ſolidité de la ſphére eſt la même que celle d'un cône qui auroit pour hauteur le rayon de la ſphére, & pour baſe un cercle égal à la ſurface de la ſphére.

Corollaire III.

607. Donc la ſolidité de la ſphére eſt double de la ſolidité d'un cône qui auroit pour hauteur le dia-

métre de la ſphére, & pour baſe un grand cercle de la ſphére. Car elle eſt égale à celle d'un cône qui auroit pour hauteur le rayon de la ſphére, & pour baſe un cercle égal à la ſurface de la ſphére. Or ce cône eſt quadruple de celui qui ayant pour hauteur le rayon de la ſphére, auroit pour baſe un grand cercle de la ſphére; mais il ne ſera que double de celui qui aura pour hauteur le diamétre de la ſphére, & pour baſe un grand cercle de la ſphére (598): donc, &c.

Corollaire IV.

608. La ſolidité de la ſphére eſt les deux tiers de la ſolidité du cylindre circonſcrit, c'eſt-à-dire, que la ſolidité de la ſphére eſt à la ſolidité du cylindre circonſcrit, comme 2 : 3, ou comme 4 : 6. Car la ſolidité de la ſphére eſt à la ſolidité du cône qui auroit pour hauteur l'axe de la ſphére, & pour baſe un grand cercle de la ſphére, comme 2 : 1 (607). Or la ſolidité du cylindre circonſcrit, eſt à celle de ce même cône, comme 3 · 1 (603): donc la ſphére eſt au cylindre conconſcrit, comme 2 : 3, ou comme 4 : 6.

Corollaire V.

609. Donc les rapports des ſolidités de la ſphére & du cylindre circonſcrit, ſont les mêmes que ceux de leurs ſurfaces.

Archiméde, auteur de cette découverte, en fut ſi charmé, qu'il voulut que ſur ſon tombeau on gravât une ſphére avec un cylindre circonſcrit.

Corollaire VI.

610. C'eſt pourquoi ſi à une ſphére on circonſcrit un cylindre, & ſi à ce cylindre on inſcrit un cône, c'eſt-à-dire, ſi l'on fait un cône qui ait même baſe & même hauteur que le cylindre, on aura trois ſolides, ſçavoir, un cylindre, une ſphére & un cône, dont les ſolidités ſeront dans les rapports 3 : 2 : 1, ou comme 1 : $\frac{2}{3}$: $\frac{1}{3}$.

PARAGRAPHE II.

De la Mesure des Solides.

THÉORÊME I.

611. *Le Polyédre peut être réduit en une Pyramide de même solidité que lui.*

DÉMONST. Si l'on fait une pyramide qui ait pour hauteur le rayon droit du polyédre, & pour base une surface égale à la surface du polyédre, nous avons prouvé (604) que cette pyramide est égale en solidité au polyédre.

THÉORÊME II.

612. *Cette Pyramide peut être réduite en un Prisme polygone de même solidité qu'elle.*

DÉMONST. Si sur une base polygone égale à la base de la pyramide, on construit un prisme qui ait le tiers de la hauteur de la pyramide, la solidité de ce prisme sera égale à celle de la pyramide; car la pyramide est le tiers du prisme de même base & de même hauteur (599).

THÉORÊME III.

613. *Ce Prisme polygone peut être réduit en un Parallépipede de même solidité que lui.*

DÉMONST. Conservant la hauteur du prisme, on peut réduire sa base polygone en un parallélogramme de même surface (490 & 491); or en ce cas le prisme polygone & le parallélipipede ayant des bases de même surface & des hauteurs égales, seront égaux en solidité (597); donc, &c.

THÉORÊME IV.

614. *Le Parallélipipede peut être réduit en un Parallélipipede rectangle de même solidité que lui.*

DÉMONST. Conservant la hauteur du parallélipipede, on peut réduire sa base parallélogramme en un rectangle de même surface; or en ce cas le parallélipipede parallélogramme & le parallélipipede rectangle ayant des bases égales & la même hauteur, seront égaux en solidité (597): donc, &c.

THÉORÊME V.

615. *Si les dimensions du Parallélipipede rectangle sont continuement proportionnelles, ou si l'on a* $\div\!\div a : b : c$, *alors il pourra être réduit en un cube de même solidité que lui.*

DÉMONST. Comme en élevant au quarré la moyenne proportionnelle entre les deux dimensions d'un rectangle, on a un quarré de même surface que le rectangle (493); de même en élevant au cube la dimension du parallélipipede, moyenne entre les deux autres, on aura un cube de même solidité que le parallélipipede. Car à cause de $\div\!\div a : b : c$, on aura $ac = bb$ (177); & multipliant par b, on aura $abc = b^3$; or abc représente le parallélipipede, & b^3 représente le cube fait sur la dimension b moyenne entre a & c: donc, &c.

Corollaire I.

616. Si les dimensions du parallélipipede ne sont pas continuement proportionnelles, ou ne sont pas réductibles en des dimensions continuement proportionnelles, alors le parallélipipede ne pourra pas être réduit en un cube de même solidité que lui. On pourra cependant toujours diviser ce parallélipipede en un nombre quelconque de cubes, dont la somme sera contenue dans la solidité du parallélipipede, en réduisant la base rectangle du parallélipipede en un quarré de même surface.

Corollaire II.

617. Comme le quarré ne peut pas être réduit en une figure plus simple, & que par cette raison il est regardé comme la mesure la plus simple qu'on puisse employer pour mesurer les surfaces; de même le cube ne peut plus être réduit en un solide plus simple que lui, & par cette raison il est regardé comme la mesure la plus simple dont on puisse se servir pour mesurer les solidités. C'est

pourquoi, comme on évalue les ſurfaces planes en toiſes, ou pieds, ou pouces quarrés; de même on évalue les ſolidités en toiſes, ou pieds, ou pouces cubiques.

PARAGRAPHE III.

Du Rapport des Solidités.

Les ſolides, de même que les lignes & les ſurfaces, ont un rapport entr'eux; mais il y a cette différence que le rapport qui eſt entre les lignes, eſt ſimple, parce qu'elles n'ont qu'une dimenſion; que le rapport qui eſt entre les ſurfaces, eſt composé de deux rapports, parce qu'elles ont deux dimenſions; & que le rapport qui eſt entre les ſolides, eſt composé de trois rapports, parce qu'ils ont trois dimenſions.

THÉORÊME I.

618. *Les Solides ſont entr'eux en raiſon compoſée de celles de leurs trois dimenſions, hauteur, largeur & profondeur.*

DÉMONST. Chaque ſolide eſt égal au produit de ſes trois dimenſions: donc les ſolides ſont entr'eux comme les produits de leurs trois dimenſions. Or les produits ſont (181) en raiſon compoſée de celles de leurs racines, qui ſont ici les trois dimenſions, ſçavoir, les hauteurs, les largeurs & les profondeurs: donc, &c.

C'eſt pourquoi ſi l'on appelle les ſolides P, p, les hauteurs A, a; les largeurs B, b; les profondeurs C, c, on aura, comme nous l'avons vu (592) $P = ABC$, & $p = abc$: donc $P : p :: ABC : abc$, ou ce qui revient au même, $\frac{P}{p} = \frac{ABC}{abc}$. Or il eſt évident que l'on a $\frac{P}{p} = \frac{ABC}{abc} = \frac{A \times B \times C}{a \times b \times c} = \frac{A}{a} \times \frac{B}{b} \times \frac{C}{c}$, où l'on voit que la raiſon $\frac{ABC}{abc}$ eſt compoſée des raiſons $\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{C}{c}$, qui ſont celles des hauteurs, des largeurs & des profondeurs des ſolides : donc, &c.

Corollaire I.

619. Les ſolides ſont en raiſon compoſée de celles de leurs baſes & de leurs hauteurs. Car chaque ſolide eſt égal (591) au produit de ſa baſe par ſa hauteur : donc ils ſont entr'eux comme les produits des baſes par les hauteurs, & par conſéquent ſont en raiſon compoſée (181) de celles des baſes & des hauteurs ; c'eſt pourquoi nommant les hauteurs A, a, & les baſes BC, bc, on aura

$$P : p :: ABC : abc.$$

Corollaire I.

620. Si deux ſolides ont même hauteur, ils ſont entr'eux comme leurs baſes, comme nous l'avons déjà dit (598). Car la hauteur étant la même, dans la proportion $P : p :: ABC : abc$, on aura $A = a$: donc à leur place ſubſtituant l'unité, on aura $P : p :: BC : bc$. Pareillement lorſque les baſes ſont les mêmes, on a $BC = bc$: donc leur ſubſtituant l'unité, on aura $P : p :: A : a$.

Corollaire III.

621. Donc ſi la hauteur & la baſe d'un ſolide ſont réciproques à la hauteur & à la baſe d'un autre ſolide, alors les deux ſolides ſeront égaux. Car par l'hypothèſe $A : a :: bc : BC$; donc $ABC = abc$, & par conſéquent $P = p$.

Corollaire IV.

622. Les polyédres réguliers ſont en raiſon compoſées de celles de leurs rayons droits & de leurs ſurfaces. Car chaque polyédre régulier eſt (604) égal au produit de ſa ſurface par le tiers de ſon rayon droit : donc deux polyédres réguliers ſont entr'eux comme les produits de leurs ſurfaces par les rayons droits. Or les produits ſont en raiſon compoſée de leurs racines : donc, &c.

THÉORÊME II.

623. *Les Solides ſemblables ſont en raiſon triplée de celles de leurs dimenſions homologues.*

DÉMONST. Les ſolides P, p, ſont en raiſon compoſée (618) de leurs dimenſions homologues; c'eſt-à-dire, l'on a $P : p :: ABC : abc$. Or à cauſe de la ſimilitude des ſolides, les dimenſions homologues ſont proportionnelles, c'eſt-à-dire, l'on a la proportionnalité $A : a :: B : b :: C : c$; donc la raiſon qui eſt compoſée de ces trois raiſons égales, ſçavoir la raiſon $ABC : abc$, eſt une raiſon triplée.

Corollaire I.

624. Donc les ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues; c'eſt-à-dire, l'on aura $P : p :: A^3 : a^3 :: B^3 : b^3 :: C^3 : c^3$. Car ils ſont en raiſon triplée de celles de leurs dimenſions homologues. Or une raiſon triplée eſt égale (181) à la raiſon qu'ont entr'eux les cubes des termes de chacune des trois raiſons compoſantes : donc, &c.

Corollaire II.

625. Les polyédres réguliers ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs rayons; car les rayons ſont des dimenſions homologues dans les polyédres réguliers ſemblables.

Corollaire III.

626. Les ſphéres ſont entr'elles comme les cubes de leurs rayons, ou de leurs diamétres; car les ſphéres ſont des polyédres réguliers ſemblables, qui ont une infinité de faces infiniment petites.