SECTION II.

Du Calcul des Rapports des Quantités, ou de l'Analogie & des Proportions.

I°. DANS la soustraction, si l'on compare la quantité dont on veut soustraire, avec celle que l'on veut soustraire; la maniere d'être d'une de ces quantités par rapport à l'autre, s'appelle *Raison* ou *Rapport*, & ce rapport est exprimé par la *Différence*. Pareillement dans la division, si l'on compare le *dividende* avec le *diviseur*, ces deux quantités ont aussi une maniere d'être, ou un *rapport*, qui est exprimé par le *quotient*.

II°. On connoît donc le *rapport* ou la *raison* d'une grandeur à une autre, ou par la *différence*, ou par le *quotient* que l'on trouve en comparant les deux grandeurs.

III°. Les rapports des grandeurs ou quantités peuvent être soumis au calcul, aussi bien que les grandeurs elles-mêmes; parce que ces rapports étant susceptibles de plus & de moins, peuvent admettre les mêmes combinaisons que les quantités elles-mêmes.

IV°. Les rapports sont ou de termes connus avec des termes connus, ou de termes connus avec des termes inconnus: dans le premier cas, le calcul consiste dans la comparaison des quantités connues, & s'appelle *Calcul des Rapports*, ou *Analogie*: dans le second cas il consiste à découvrir des quantités inconnues par le moyen de celles qui sont connues, & on l'appelle *Calcul analytique*, ou *Analyse*.

CHAPITRE I.

De l'Analogie, & des Proportions.

SI l'on compare ensemble deux quantités pour connoître combien de fois l'une est contenue dans l'autre, ou de combien l'une surpasse l'autre, ou aura un *rapport*, ou une *raison*: si deux raisons sont égales, cette égalité s'appelle *Analogie* ou *Proportion*: si on a une suite de raisons égales, cette suite s'appelle *Progression*: si la progression est continuée à l'infini, elle s'appelle *Suite, Serie*, ou *Progression infinie*. Nous allons parler, 1°. des raisons; 2°. des proportions; 3°. des progressions.

ARTICLE I.

Des Raisons.

Toutes les quantités homogênes ont entr'elles un rapport, ou une raison, parce qu'elles ont toujours ou une différence, ou un quotient; 6 & 8 ont une différence qui est 2; 12 & 4 ont un quotient qui est 3: cette différence ou ce quotient s'appelle *Valeur* ou *Exposant* de la raison. Il est à remarquer,

I°. Que toute raison est composée de deux termes: car il ne peut y avoir de comparaison qu'entre deux termes; le premier s'appelle *Antécédent*, le second s'appelle *Conséquent*.

II°. Que toute raison est ou *Arithmétique* ou *Géométrique*. La raison arithmétique est celle où l'on cherche la différence, ou l'excès dont l'antécédent surpasse le conséquent, & on l'exprime ainsi; 5. 2, 7. 3, *a*. *b*, *c*. *f*. &c. La raison géométrique est celle où l'on cherche combien de fois, ou comment le conséquent est contenu dans l'antécédent, & on l'exprime ainsi; 2 : 3, 3 : 4, 5 : 9, *a* : *b*, &c. ou bien de cette maniere, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{a}{b}$, &c. La valeur de la raiſon arithmétique eſt la différence du conſéquent ſouſtrait de l'antécédent; & la valeur de la raiſon géométrique eſt le quotient de l'antécédent diviſé par le conſéquent. Nous parlerons ici ſur-tout des raiſons géométriques.

III°. Que deux raiſons qui ont une même valeur, ſont toujours égales, *par ex:* les raiſons géométriques $8 : 4$ & $6 : 3$ ſont égales, car $8 : 4$, ou $\frac{8}{4} = 2$; pareillement $6 : 3$, ou $\frac{6}{3} = 2$.

IV°. Que les raiſons prennent différens noms, ſuivant le rapport de l'antécédent au conſéquent. La raiſon $2 : 1$, s'appelle raiſon *double;* celle de $3 : 1$ s'appelle raiſon *triple;* &c. Celle de $1 : 2$, s'appelle raiſon *ſous-double;* celle de $1 : 3$, raiſon *ſous-triple*, &c. Celle de $3 : 2$, raiſon *ſeſqui-altere.* En un mot les Géométres ont donné des noms à chaque eſpéce de raiſons pour les diſtinguer. De plus la raiſon géométrique s'appelle raiſon d'*Egalité*, lorſque l'antécédent & le conſéquent ſont égaux; *par ex:* $2 : 2$, $3 : 3$, $a : a$, $b : b$, &c. Elle s'appelle raiſon d'*Inégalité*, lorſque l'antécédent & le conſéquent ſont inégaux; *par ex:* $3 : 4$, $a : b$, &c.

Propoſition I.

156. *Toute raiſon géométrique eſt, ou ſimple, ou compoſée.*

Démonstration. On appelle raiſon *ſimple* le rapport qui ſe trouve entre deux quantités ſimplement; on appelle raiſon *compoſée* le produit de deux raiſons ſimples multipliées l'une par l'autre, antécédent par antécédent, & conſéquent par conſéquent; *par ex:* la raiſon $\frac{2}{5}$ eſt ſimple; mais ſi j'ai *par ex:* les deux raiſons ſimples $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$ & ſi je les multiplie l'une par l'autre, antécédent par antécédent, conſéquent par conſéquent, pour avoir $\frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$; la raiſon $\frac{6}{20}$ eſt dite être *compoſée* des deux raiſons ſimples $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$: pareillement la raiſon $\frac{abd}{cef}$ eſt compoſée de trois raiſons ſimples $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{d}{f}$.

Propoſition I I.

157. *Toute Raiſon ſimple eſt, ou* directe, *ou* réciproque.

DÉMONSTRATION. La raiſon géométrique s'appelle *directe*, lorſque deux quantités telles que *a* & *b* ſont entr'elles comme deux autres quantités, *par ex :* 6 & 3, priſes dans le même ordre, c'eſt-à-dire, que *a* eſt double de *b*, de même que 6 eſt double de 3. Au contraire la raiſon eſt dite être *réciproque*, ou *indirecte*, ou *renverſée*, lorſque les deux quantités *a* & *b* ſont entr'elles comme deux autres 6 & 3, mais priſes dans un ordre renverſé, c'eſt-à-dire, que *a* & *b* ſont entr'eux non comme 6 & 3 ; mais comme 3 & 6, ou que *a* n'eſt que la moitié de *b*, de même que 3 n'eſt que la moitié de 6.

Propoſition I I I.

158 Toute raiſon compoſée de raiſons ſimples & inégales, s'appelle ſimplement raiſon *compoſée*, ou raiſon *multiple* ; telle eſt la raiſon $\frac{6}{20}$, laquelle eſt compoſée de deux raiſons, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, inégales entr'elles : mais une raiſon compoſée de raiſons égales s'appelle autrement ; ſçavoir, une raiſon compoſée de deux raiſons égales s'appelle *doublée ; par ex :* la raiſon $\frac{4}{9}$ eſt doublée des raiſons $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$; une raiſon compoſée de trois raiſons égales s'appelle *triplée ; par ex :* la raiſon $\frac{8}{27}$ eſt triplée des raiſons $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$; une raiſon compoſée de quatre raiſons égales s'appelle *quadruplée ;* & ainſi du reſte.

Propoſition I V.

159. *Toute Raiſon compoſée eſt, ou* directement, *ou* indirectement *compoſée.*

DÉMONSTRATION. En effet,

I°. Si je multiplie les deux raiſons $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, l'une par l'autre, antécédent par antécédent; conſéquent par conſéquent, pour avoir la raiſon compoſée $\frac{6}{20}$; cette raiſon $\frac{6}{20}$ s'appelle raiſon *directement compoſée* des deux raiſons ſimples ou *compoſantes* $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$.

II°. Mais ſi je multiplie les deux raiſons $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, l'une par l'autre; multipliant, non l'antécédent par l'antécédent, & le conſéquent par le conſéquent, mais l'antécédent de l'une par le conſéquent de l'autre, & le conſéquent de l'une par l'antécédent de l'autre; la raiſon qui en réſultera ſera $\frac{10}{12}$, & s'appelle raiſon *réciproquement compoſée* des deux raiſons compoſantes $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$.

Propoſition V.

160. *Si les Raiſons ſimples ou compoſantes ſont égales entr'elles, la Raiſon qui en ſera réciproquement compoſée, ſera une Raiſon d'égalité.*

DÉMONSTRATION. Soient les deux raiſons égales $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$; la raiſon qui en ſera réciproquement compoſée, ſera la raiſon $\frac{12}{12}$, qui eſt une raiſon d'égalité: ce qui arrive à cauſe de la compenſation qui ſe trouve entre les multiplicateurs & les multiplicandes dans le cas des raiſons égales, compenſation d'où réſultent des produits égaux.

Cette propſition ſera énoncée dans la ſuite ſous d'autres expreſſions, lorſque nous dirons que dans toute proportion géométrique le *produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.*

Corollaire I.

161. Toute fraction eſt, & doit être regardée comme une raiſon géométrique: en effet, la *fraction*, la *raiſon*, la *diviſion*, ne ſont rien autre choſe que trois points de vue différents qui appartiennent à une même choſe. La *fraction* eſt le rapport d'une partie à ſon tout: la *raiſon* eſt le rapport d'un tout à un autre tout: La *diviſion* eſt l'opération dont on ſe ſert pour connoître le rapport, ou pour connoître la valeur ſoit de la raiſon, ſoit de la fraction. C'eſt pourquoi,

I°. Comme une *fraction* est d'autant plus grande que son numérateur est plus grand, le dénominateur restant le même; ou que son dénominateur est plus petit, le numérateur restant le même, de même la *raison* est d'autant plus grande que son antécédent est plus grand, le conséquent restant le même; ou que son conséquent est plus petit, l'antécédent restant le même.

II°. Et c'est pour cette raison que l'on dit que les valeurs des raisons géométriques sont entr'eux en *raison directe* des antécédents & en *raison réciproque* des conséquents; & pareillement que les valeurs des fractions sont en *raison directe* des numérateurs, & en *raison réciproque* des dénominateurs.

Corollaire I I.

162. Tous les nombres pris deux à deux ont entr'eux une raison géométrique; parce que l'un est toujours contenu un certain nombre de fois dans l'autre : ce *combien de fois* est exprimé par un troisiéme nombre que l'on appelle *partie aliquote*, *mesure commune*, *quotient*, *sous-multiple*. Tous les nombres pris deux à deux ont donc une partie aliquote qui leur sert de mesure commune, sçavoir, l'unité au moins; & alors on les appelle quantités *commensurables*, ou *rationelles*.

C'est pourquoi deux quantités commensurables sont toujours entr'elles comme nombre à nombre; *par ex :* comme 2 : 3, ou comme 4 : 5, ou, &c. parce que leur rapport peut toujours être exprimé par deux nombres.

Mais il y a des quantités qui n'ont point de partie aliquote, aucune mesure commune : alors ces quantités s'appellent *incommensurables* ou *irrationelles*; parce que l'on ne peut connoître le rapport de deux quantités, qu'autant qu'elles peuvent être exprimées ou représentées par des nombres.

ARTICLE II.

Des Proportions.

La proportion est l'égalité de deux raisons : une raison renferme deux termes, sçavoir, l'antécédent & le conséquent ; d'où il suit que la proportion renferme quatre termes, sçavoir deux antécédens & deux conséquens. Le premier & le dernier terme s'appellent *Extrêmes ;* les deux termes intermédiaires s'appellent *Moyens.* La proportion est, ou *arithmétique* ou *géométrique ;* la proportion arithmétique est l'égalité de deux raisons arithmétiques ; la proportion géométrique est l'égalité de deux raisons géométriques.

LEMME I.

163. *Dans tout Rapport arithmétique, le Conséquent est égal à l'Antécédent augmenté ou diminué de la différence qui se trouve entre les deux termes ; augmenté, si l'Antécédent est plus petit que le Conséquent ; diminué, s'il est plus grand que le Conséquent.*

DÉMONSTRATION. Dans le rapport arithmétique 8. 2, dont la différence est 6, il est évident que le conséquent 2 est égal à l'antécédent 8 diminué de la différence 6, ou que l'on a $2=8-6$: de même dans le rapport arithmétique 2. 8, dont la différence est encore 6, on aura le conséquent $8=2+6$. Pareillement si les deux termes a & b ont pour différence d ; dans le rapport $a \cdot b$, on aura $b=a+d$, ou $b=a-d$, selon que a sera plus petit, ou plus grand que b.

Corollaire.

164. Donc en supposant que l'antécédent soit représenté par a, & la différence par d, le conséquent sera $a \pm d$. D'où il suit que toute raison arithmétique pourra être représentée par cette expression, ou formule générale, $a \cdot a \pm d$.

LEMME II.

165. *Dans toute Proportion arithmétique, il regne une*

une même différence entre l'Antécédent & le Conſéquent dans chacune des deux raiſons.

Démonstration. Dans une proportion arithmétique les deux raiſons ſont égales, & ont une même valeur : or la valeur d'une raiſon arithmétique conſiſte dans la différence des deux termes; donc il regne une même différence dans les deux raiſons; & par conſéquent ſi la différence de la premiere raiſon eſt exprimée par d, celle de la ſeconde ſera auſſi exprimée par d.

Corollaire.

166. Donc en ſuppoſant que a repréſente le premier antécédent, c le ſecond, & d la différence qui regne dans chacune des deux raiſons; la proportion arithmétique pourra ſe repréſenter par cette expreſſion, ou formule générale, $a \cdot a \pm d \because c. c \pm d$.

Théorême I.

167. *Dans une Proportion arithmétique la Somme des Extrêmes eſt égale à la Somme des Moyens.*

Démonstration. Soit la proportion arithmétique $a \cdot b \because c \cdot f$; par le corollaire précédent cette proportion peut ſe repréſenter par cette expreſſion générale $a \cdot a \pm d \because c \cdot c \pm d$; or la ſomme des extrêmes $a + c \pm d = c + a \pm d$, ſomme des moyens comme il eſt évident.

Corollaire I.

168. Dans une proportion arithmétique *continue;* c'eſt-à-dire, dans laquelle un même terme eſt tout à la fois *conſéquent* de la premiere, & *antécédent* de la ſeconde raiſon, comme dans la proportion $3 \cdot 2 \because 2 \cdot 1$, (laquelle s'exprime d'une maniere abrégée par $\div 3 \cdot 2 \cdot 1$,) la ſomme des extrêmes eſt double du moyen terme; car $3 + 1 = 2 + 2$.

Corollaire II.

169. Dans une proportion arithmétique, ſi l'un des quatre termes; *par ex :* le dernier eſt inconnu, il ſera aiſé de le trouver : ainſi dans la proportion

$8 \cdot 6 : 4 \cdot x$, le dernier terme inconnu x est 2; car (167) $8+x=6+4$; donc si de la somme $6+4=10$, on retranche le terme 8, le reste 2 sera la valeur du terme inconnu x.

LEMME III.

170. *Dans une Raison géométrique, le Conséquent est toujours égal à l'Antécédent divisé par le Quotient de la Raison.*

DÉMONSTRATION. Dans la raison géométrique $12 : 4$, ou $\frac{12}{4}$, dont le quotient est 3, on aura le conséquent $4=\frac{12}{3}$; pareillement dans la raison $4 : 12$, ou $\frac{4}{12}$, dont le quotient est $\frac{1}{3}$, on aura le conséquent 12 égal à 4 divisé par $\frac{1}{3}$, ou $12=\frac{4}{\frac{1}{3}}=\frac{4 \times 3}{1}=4 \times 3=12$. La raison est qu'une raison géométrique est une division : or dans une division le diviseur est toujours égal au dividende divisé par le quotient.

Corollaire.

171. Donc si on suppose que l'antécédent de la raison géométrique soit a; & que le quotient soit $\frac{1}{p}$, le conséquent sera ap, & toute raison géométrique pourra être représentée par cette expression, ou formule générale, $a : ap$.

LEMME IV.

172. *Dans toute Proportion géométrique; il regne un même Quotient dans la premiere & dans la seconde Raison.*

DÉMONSTRATION. Les deux raisons d'où résulte la proportion géométrique, sont égales; donc elles ont une même valeur : or cette valeur consiste dans le quotient; donc elles ont un même quotient; & par conséquent si le quotient de la premiere raison s'exprime par $\frac{1}{p}$, le quotient de la seconde raison doit aussi s'exprimer par $\frac{1}{p}$.

Corollaire.

173. Donc en ſuppoſant que a repréſente l'antécédent de la premiere raiſon, c l'antécédent de la ſeconde, & $\frac{1}{p}$ le quotient des deux raiſons, toute proportion géométrique pourra être repréſentée par cette expreſſion, ou formule générale, $a : ap :: c : cp$.

THÉORÊME II.

174. *Dans toute Proportion géométrique le Produit des Extrêmes eſt égal au Produit des Moyens.*

DÉMONSTRATION. Soit la proportion géométrique $a : b :: c : f$; cette proportion peut être repréſentée, comme nous venons de le dire, par cette expreſſion, $a : ap :: c : cp$; or dans cette proportion le produit des extrêmes $acp = cap$ produit des moyens.

THÉORÊME III.

175. *Réciproquement, lorſqu'on a quatre Termes, tels que le produit des Extrêmes ſoit égal au produit des Moyens, les quatre Termes ſont en proportion géométrique.*

DÉMONSTRATION. Soient les quatre termes a, c, ap, cp, tels que le produit des extrêmes $acp = cap$ produit des moyens; il en réſultera la proportion $a : ap :: c : cp$, qui eſt juſte; car les deux raiſons ont un même quotient $\frac{1}{p}$; donc, &c.

Corollaire I.

176. Toutes les fois que l'on a deux produits égaux, on en peut toujours conclure une proportion, en prenant pour extrêmes de la proportion les deux racines d'un des produits, & pour moyens les deux racines de l'autre produit; *par ex :* de ce que l'on a $acp = cap$, on en peut conclure $a : ap :: c : cp$, comme il eſt évident. Cette égalité entre le produit des extrêmes, & celui des moyens s'ap-

pelle *Equation*. Il eſt donc toujours poſſible de déduire une *équation* d'une proportion donnée, & réciproquement de conclure *une proportion* d'une équation donnée.

Corollaire II.

177. Dans toute proportion géométrique *continue; par ex: $a : b :: b : c$*, (laquelle s'exprime d'une maniere abrégée par $\div a : b : c$,) le produit des extrêmes eſt égal au quarré du moyen terme; ce qui eſt évident.

Ce terme moyen entre les deux extrêmes s'appelle *Moyen proportionnel*. Or, ſi l'on a un produit ab compoſé de deux racines a & b, & qu'on prenne un moyen proportionnel x entre a & b, le quarré du moyen terme ſera égal au produit des racines; car par l'hypothèſe $\div a : x : b$; donc $xx = ab$.

Corollaire III.

178. Dans une proportion géométrique, on peut changer l'ordre & l'arrangement des termes qui la compoſent; pourvu que le changement ſoit tel, que le produit des extrêmes reſte toujours égal au produit des moyens. On a donné à ces changemens différens noms que voici: ſoit la proportion $a : b :: c : d$.

I°. Le premier changement que l'on peut faire dans cette proportion, s'appelle *alternando*, & conſiſte à mettre les moyens à la place l'un de l'autre $a : c :: b : d$.

II°. Le ſecond changement s'appelle *invertendo*, & conſiſte à mettre les moyens à la place des extrêmes $b : a :: d : c$.

Dans ce changement on peut introduire encore le changement *alternando*, ce qui donnera d'autres combinaiſons.

III°. Le troiſiéme changement s'appelle *permutando*, & conſiſte à mettre les extrêmes à la place l'un de l'autre, $d : b :: c : a$.

Dans ce changement on peut encore introduire les changemens *alternando* & *invertendo* ; ce qui donnera d'autres combinaisons.

IV°. Le quatriéme changement se fait, soit en ajoutant les conséquens aux antécédens, ou les antécédens aux conséquens ; ce qui s'appelle *addendo* ou *componendo*.

$$a + b : b :: c + d : d$$

$$a : a + b :: c : c + d$$

Soit en retranchant les antécédens des conséquens, ou les conséquens des antécédens ; ce qui s'appelle *substrahendo* ou *dividendo*.

$$a - b : b :: c - d : d$$

$$a : b - a :: c : d - c.$$

Corollaire IV.

179. Si deux quantités sont multipliées, ou divisées par une même troisiéme quantité, les produits ou les quotiens auront entr'eux la même raison qu'avoient les racines ou les dividendes.

DÉMONSTRATION. Si l'on multiplie les racines a, b, par une même troisiéme quantité m ; les produits am, bm, seront dans le même rapport que les racines a, b, c'est-à-dire, qu'on aura la proportion $am : bm :: a : b$; car le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, $abm = abm$. Il faut dire la même chose, lorsqu'on divise deux quantités par une même troisiéme quantité.

D'où il suit que les touts sont entr'eux comme leurs parties semblables ; c'est-à-dire, comme les *moitiés*, les *quarts*, les *tiers*, &c. & réciproquement. Car les parties semblables résultent de la division des touts par une même troisiéme quantité, & les touts résultent de la multiplication des parties semblables par une même troisiéme quantité.

Corollaire V.

180. Les produits qui ont une racine commune, sont entr'eux comme les racines inégales ;

par ex : les produits am, bm, qui ont la racine commune m, ſont entr'eux comme les racines inégales a & b : c'eſt une ſuite évidente du corollaire précédent.

Corollaire VI.

181. Les produits ſont en raiſon compoſée de leurs racines ; les quarrés ſont en raiſon doublée des racines ; les cubes ſont en raiſon triplée des racines ; les quatriémes puiſſances ſont en raiſon quadruplée des racines ; les cinquiémes puiſſances, &c.

Ou ce qui revient au même :

I°. Une raiſon compoſée eſt égale à la raiſon qu'ont entr'eux les produits qui réſultent des raiſons compoſantes, multipliées les unes par les autres ; *par ex :* la raiſon $\frac{ab}{cd}$, qui eſt compoſée des raiſons ſimples $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$, eſt $= \frac{a \times b}{c \times d}$, produit des raiſons ſimples compoſantes.

II°. Une raiſon doublée eſt égale à la raiſon qu'ont entr'eux les quarrés des termes de l'une ou l'autre des deux raiſons compoſantes ; *par ex :* ſi l'on a deux raiſons égales $a : ap :: b : bp$; la raiſon doublée de ces deux raiſons eſt $ab : abpp$: or l'on aura $ab : abpp :: aa : aapp$; ou bien $ab : abpp :: bb : bbpp$; car dans ces proportions le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

III°. Une raiſon triplée eſt égale à la raiſon qu'ont entr'eux les cubes des termes de l'une des trois raiſons compoſantes ; ce qui ſe prouve d'une maniere toute ſemblable.

IV°. Une raiſon quadruplée eſt égale à la raiſon qu'ont entr'elles les quatriémes puiſſances des termes de l'une des quatre raiſons compoſantes. Il faut dire la même choſe des raiſons quintuplées, ſextuplées, &c.

Corollaire VII.

182. Si l'on multiplie, ou ſi l'on diviſe les termes d'une proportion par les termes d'une autre proportion, les produits ou les quotiens seront proportionnels.

DÉMONSTRATION. Si l'on multiplie les termes de la proportion $a : ap :: b : bp$ par les termes de la proportion $c : cp :: d : dp$, on aura la proportion $ac : acpp :: bd : bdpp$, qui eſt juſte; car le produit des extrêmes $acbdpp = acbdpp$, produit des moyens: on prouveroit de même qu'en diviſant les termes d'une proportion par les termes d'une autre proportion, les quotiens ſeroient proportionnels.

Il ſuit de là que lorſque les puiſſances ſont proportionnelles entr'elles, les racines ſont auſſi proportionnelles entr'elles, & réciproquement; mais les puiſſances ne ſont point proportionnelles aux racines, ni les racines aux puiſſances.

Corollaire VIII.

183. Dans une proportion géométrique, ſi l'un des quatre termes; *par ex:* le dernier eſt inconnu, il ſera facile de le trouver. Soit la proportion $4 : 8 :: 6 : x$, le dernier terme inconnu x ſe trouvera en prenant le produit des moyens, & en le diviſant par l'extrême connu, ce qui donnera $\frac{48}{4} = 12 = x$: en effet de la proportion $4 : 8 :: 6 : x$ on déduit (174) $4x = 48$; & par conſéquent diviſant les deux quantités par 4, on aura $x = \frac{48}{4} = 12$; pareillement dans la proportion $a : b :: c : x$, on aura $x = \frac{bc}{a}$.

Si le terme inconnu eût été le troiſiéme, comme dans la proportion $a : b :: x : c$; on auroit de même trouvé la valeur de x, en prenant le produit des extrêmes, & en le diviſant par le moyen connu b, ce qui auroit donné $x = \frac{ac}{b}$.

Cette méthode de trouver un quatriéme terme proportionnel à trois autres, s'appelle *Regle de Trois*, dont nous parlerons plus au long dans la ſuite.

Corollaire IX.

184. Toutes les fois qu'on aura une proportion $a : b :: c : d$, on en pourra déduire une fraction, en diviſant le produit des moyens par un des extrêmes, ce qui donne $\frac{bc}{a}$ pour la valeur du ſecond extrême d, & réciproquement d'une fraction donnée $\frac{bc}{a}$, on pourra toujours tirer une proportion dont les moyens ſeront les racines b, c du numérateur, le premier extrême ſera le dénominateur a, & le dernier terme ſera la fraction elle-même; ſçavoir, $a : b :: c : \frac{bc}{a}$. Pareillement de la fraction $\frac{6}{5}$, qui eſt la même que $\frac{2 \times 3}{5}$, on peut déduire $5 : 2 :: 3 : \frac{6}{5}$; de la fraction $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 1}{3}$, on peut conclure $3 : 2 :: 1 : \frac{2}{3}$.

ARTICLE III.

Des Progreſſions.

On appelle *Raiſon* ou *Rapport*, la maniere d'être de deux quantités à l'égard l'une de l'autre; *par ex:* $1 : 3$, $a : b$, &c. On appelle *proportion*, ou *analogie*, l'égalité de deux raiſons; *par ex :* $2 : 4 :: 6 : 12$. On appelle *proportionnalité* une ſuite de pluſieurs raiſons égales; *par ex :* $2 : 4 :: 6 : 2 :: 8 : 16 :: 9 : 18$. On appelle *progreſſion* une proportionnalité continue, c'eſt-à-dire, dans laquelle chaque terme eſt en même-tems conſéquent de la raiſon précédente, & antécédent de la ſuivante, *par ex :* $2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 :: 16 : 32$; ce qui s'écrit plus briévement de cette maniere $\div\!\div$ $2 : 4 : 8 : 16 : 32$. On diſtingue deux ſortes de progreſſions, l'arithmétique & la géométrique.

THÉORÊME I.

185. *Dans une Progreſſion arithmétique, il regne par-tout une même différence entre deux termes immédiatement conſécutifs.*

DÉMONSTRATION. La raiſon qui eſt du premier terme au ſecond, eſt la même que celle qui eſt du ſecond au troiſiéme; du troiſiéme au quatriéme; du quatriéme, &c.

Corollaire I.

186. Donc dans une progreſſion arithmétique chaque terme eſt égal à celui qui le précéde immédiatement, augmenté ou diminué de la différence (163) qui regne dans la progreſſion; augmenté, ſi la progreſſion eſt croiſſante: diminué, ſi la progreſſion eſt décroiſſante.

Corollaire II.

187. Suppoſant que le premier terme ſoit a, & la différence d, on pourra repréſenter une progreſſion arithmétique par cette expreſſion, ou formule générale $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d \cdot a \pm 4d$, &c.

THÉOREME II.

188. *Dans une Progreſſion arithmétique, un Terme quelconque eſt égal à la Somme faite du premier Terme & de la différence commune multipliée par le nombre des Termes précédens.*

DÉMONSTRATION. Soit la progreſſion arithmétique $\div a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f$; elle peut être repréſentée par la formule, ou expreſſion générale, $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d \cdot a \pm 4d \cdot a \pm 5d$: or le cinquiéme terme $a \pm 4d$ eſt évidemment égal au premier terme a, plus à la différence d multipliée par 4, qui eſt le nombre des termes précédens.

Corollaire.

189. Il ſera facile de trouver un terme quelconque dans une progreſſion arithmétique, dans laquelle on connoîtra le premier terme a, la diffé-

rence commune d, & le nombre n des termes : car regardant le terme que l'on cherche, comme le dernier de la progreſſion, & le nommant x, le nombre des termes qui précédent celui que l'on cherche, ſera $n-1$; & alors le terme cherché ſera repréſenté par l'expreſſion générale & indéterminée $x=a+dn-d$, ſi la progreſſion eſt croiſſante; ou par $x=a-dn+d$, ſi la progreſſion eſt décroiſſante. C'eſt pourquoi ſuppoſant le premier terme $a=1$, la différence $d=2$, & le nombre des termes $n=5$, la valeur du cinquiéme terme x ſera, en ſuppoſant que la progreſſion eſt croiſſante,

$$x=a+dn-d=1+10-2=1+8=9.$$

THÉORÊME III.

190. *Dans une Progreſſion arithmétique, la Somme des extrêmes eſt égale à la Somme de deux termes également éloignés des extrêmes.*

DÉMONSTRATION. Dans la progreſſion arithmétique $\div a \cdot a\pm d \cdot a\pm 2d \cdot a\pm 3d \cdot a\pm 4d \cdot a\pm 5d$, la ſomme des extrêmes, ſçavoir, $a+a\pm 5d$ eſt la même que $a\pm 2d+a\pm 3d$, ſomme du troiſiéme & du quatriéme termes également éloignés des extrêmes.

Corollaire.

191. Si le nombre des termes de la progreſſion étoit impair, alors la ſomme des extrêmes ſeroit égale au double du terme moyen.

THÉORÊME IV.

192. *Dans une Progreſſion arithmétique, la Somme de tous les termes eſt égale à la Somme des extrêmes multipliés par la moitié du nombre des termes.*

DÉMONSTRATION. Dans la progreſſion arithmétique $\div a \cdot a\pm d \cdot a\pm 2d \cdot a\pm 3d$, compoſée de quatre termes, la ſomme de tous les termes, qui eſt $4a\pm 6d$, eſt évidemment égale à la ſomme des extrêmes $2a\pm 3d$ multipliée par 2, moitié du nombre des termes.

Corollaire I.

193. Si l'on appelle le premier terme a, le dernier x, le nombre des termes n, la ſomme des termes s; cette ſomme ſera repréſentée par l'expreſſion ou formule générale $s = \frac{an + nx}{2}$: laquelle ſera trouver tout d'un coup la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique. Car ſoit ſuppoſé $a = 1$, $x = 11$, & $n = 6$; ſi l'on ſubſtitue à la place des indéterminées a, x, n, leurs valeurs, on trouvera

$$s = \frac{an + nx}{2} = \frac{\overline{1 \times 6} + \overline{6 \times 11}}{2} = \frac{6 + 66}{2} = \frac{72}{2} = 36.$$

Corollaire II.

194. Si la progreſſion arithmétique étoit priſe dans la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. & qu'elle commençât par l'unité; alors on auroit le dernier terme $x = n$, & la formule précédente $s = \frac{an + nx}{2}$, deviendroit $s = \frac{x + xx}{2}$, ou $s = \frac{n + nn}{2}$; c'eſt-à-dire, que l'on trouveroit tout d'un coup la ſommé de tous les termes, en prenant la moitié de la ſomme du dernier terme & de ſon quarré, ou la moitié de la ſomme faite du nombre des termes & de ſon quarré.

THÉORÊME V.

195. *Dans une progreſſion géométrique, il regne partout un même quotient entre deux termes immédiatement conſécutifs.*

DÉMONSTRATION. La raiſon qui eſt du premier terme au ſecond, eſt la même que celle qui eſt du ſecond au troiſiéme, du troiſiéme au quatriéme, &c. parce que chaque terme de la progreſſion géométrique contient celui qui le ſuit, de la même maniere qu'il eſt contenu lui-même dans celui qui le précéde.

Corollaire I.

196. Dans une progression géométrique, un terme quelconque est égal (170) à celui qui le précede immédiatement, divisé par le quotient commun qui regne dans la progression.

Corollaire II.

197. En supposant que le premier terme soit a, & que le quotient soit $\frac{1}{p}$; on pourra représenter toute progression géométrique, par cette expression, ou formule générale.

$$\div\!\!\div\; a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5 : ap^6, \&c.$$

dans laquelle formule il faut remarquer que, lorsque la progression sera croissante, alors $\frac{1}{p}$ sera une fraction, & p sera un nombre entier; mais lorsque la progression sera décroissante, $\frac{1}{p}$ sera un nombre entier, & p une fraction.

THÉORÊME VI.

198. *Dans toute progression géométrique, un Terme quelconque est égal au premier Terme* a *divisé par la puissance du quotient* $\frac{1}{p}$ *de même degré que le nombre des Termes précédens.*

DÉMONSTRATION. Dans la progression $\div\!\!\div\; a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5$, il est évident que le cinquiéme terme ap^4 est égal au premier terme a divisé par le quotient $\frac{1}{p}$ élevé à la quatiéme puissance, laquelle puissance est de même degré que le nombre des termes précédens. En effet la quatriéme puissance de $\frac{1}{p}$ est $\frac{1}{p^4}$: mais a divisé par $\frac{1}{p^4} = \frac{ap^4}{1} = ap^4$; donc, &c.

Corollaire.

199. L'on peut regarder le terme que l'on cherche, comme le dernier de la progreſſion, & le nommer x; nommant le premier terme a, le quotient $\frac{1}{p}$, & le nombre des termes n; le nombre des termes qui précédent celui que l'on cherche, ſera $n-1$, & alors le terme cherché peut être repréſenté ſous l'expreſſion générale $x = ap^{n-1}$: ſoit donc le premier terme $a = 1$, le nombre des termes $n = 6$, & le quotient $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$, ce qui donne $p = 2$, & ſuppoſons que la progreſſion ſoit croiſſante, l'on trouvera tout d'un coup la valeur du terme x cherché, & l'on aura $x = ap^{n-1} = 1 \times 2^{6-1} = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Si la progreſſion étoit décroiſſante, alors le quotient $\frac{1}{p}$ ſeroit un nombre entier, & p un nombre fractionnaire : ainſi ſuppoſant $a = 32$, $n = 6$, & $\frac{1}{p} = 2$; ce qui donneroit $p = \frac{1}{2}$, on auroit $x = ap^{n-1} = 32 \times \frac{1}{2^{6-1}} = \frac{32}{2^{6-1}} = \frac{32}{2^5} = \frac{32}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{32}{32} = 1$.

Théorême VII.

200. *Dans une progreſſion géométrique, le produit des Extrêmes eſt égal au produit de deux termes quelconques également éloignés des Extrêmes.*

Démonstration. La raiſon eſt évidente par l'inſpection de la formule $\dot{\dot{\div}}\ a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5$, dans laquelle le produit aap^5 des extrêmes eſt le même que le produit du ſecond terme ap par le cinquiéme ap^4.

Corollaire.

201. Si le nombre des termes étoit impair, le

produit des extrêmes seroit égal au quarré du moyen terme.

Théorême VIII.

202. *Dans une progression géométrique, la somme des Antécédens est à la somme des Conséquens, comme un seul Antécédent est à son Conséquent.*

Démonstration. Dans une progression géométrique $\div a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4$, tous les termes sont antécédens, excepté le dernier; donc la somme des antécédens est $a + ap + ap^2 + ap^3$: pareillement tous les termes sont conséquens, excepté le premier; donc la somme des conséquens est $ap + ap^2 + ap^3 + ap^4$: or l'on a la proportion $a + ap + ap^2 + ap^3 : ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 :: a : ap$: laquelle est juste, car dans cette proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Corollaire.

203. Nommant le dernier terme x, & la somme des termes s, la somme des antécédens sera par conséquent $s - x$, & la somme des conséquens sera $s - a$: c'est pourquoi le théorême précédent pourra s'énoncer en style algébrique & plus briévement par cette proportion $s - x : s - a :: a : ap$.

Théorême IX.

204. *Dans une progression géométrique dont les termes sont affectés d'exposans, les exposans sont en progression arithmétique.*

Démonstration. Cela se voit dans la formule $\div a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5 : ap^6$: &c. dont les exposans $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot$ &c. sont en progression arithmétique.

Corollaire.

205. D'où il suit que si dans une progression géométrique on prend quatre termes quelconques, dont les exposans soient en proportion

arithmétique, alors les termes eux mêmes seront en proportion géométrique; tels sont les termes $ap : ap^3 :: ap^5 : ap^7$.

Remarque.

206. Toutes les fois que l'on a une suite de termes en progression géométrique, & qui sont affectés d'exposans, l'on a deux progressions réunies, l'une géométrique qui regne entre les termes; & l'autre arithmétique qui regne entre les exposans. La réunion de ces deux progressions est le fondement & le principe d'un calcul célébre & utile, que l'on appelle *calcul logarithmique*, & dont nous parlerons dans la suite.

CHAPITRE II.

Du Calcul Analytique, ou de l'Analyse.

L'Analyse peut être considérée ou en général & dans ses principes, ou en particulier & dans ses applications; nous en allons parler sous ces deux rapports.

ARTICLE I.

Des Principes de l'Analyse.

I°. Le but de l'analyse est de découvrir les quantités inconnues par les rapports qu'elles ont avec les quantités connues. Le moyen dont elle se sert pour découvrir les quantités inconnues, est la *double expression* d'une même quantité.

II°. La double expression d'une même quantité s'appelle *Equation; par ex:* la quantité *huit* peut être représentée par l'expression 8, ou par celle de $5 + 3$ égale à la premiere, d'où naît l'équation $8 = 5 + 3$, dans laquelle les quantités jointes par le signe $=$ s'appellent *membres;* tous les termes qui se trouvent à la gauche du *signe*, s'appellent *premier membre ;* tous ceux qui ſe trouvent à la droite, s'appellent *ſecond membre.*

III°. L'uſage des équations eſt fort étendu ; on peut par leur moyen réſoudre une infinité de *queſtions* ou *problêmes ; par ex :* ſi je diſois Pierre a 10 écus, & Paul a 15 écus ; quelle eſt la ſomme des écus qu'ils ont tous les deux ? il eſt clair que nommant x cette ſomme, la queſtion peut s'exprimer par l'équation $x = 10 + 15$, & qu'elle eſt réſolue par l'équation $x = 25$.

IV°. Le but de l'équation eſt donc de connoître la valeur d'une quantité ſous une expreſſion connue, lorſqu'on ne pouvoit la connoître ſous une autre expreſſion, dont la valeur étoit inconnue.

V°. Les équations ſont de différens degrés : ſavoir, du premier, du ſecond, du troiſiéme, &c. degré, ſelon que l'inconnue x ou y, &c. eſt élevée à la premiere, à la ſeconde, à la troiſiéme, &c. puiſſance. Nous ne parlerons que des équations du premier degré, que l'on appelle auſſi équations *ſimples* ou *linéaires.*

VI°. Le calcul analytique conſiſte à former & à réſoudre des équations ; la formation des équations s'appelle *Synthèſe*, ou compoſition des équations ; la réſolution des équations s'appelle *Analyſe*, ou décompoſition des équations.

PARAGRAPHE I.

La Synthèſe, ou Formation des Equations.

DÉFINITIONS.

I.

207. La *Synthèſe*, ou formation des équations, conſiſte en général à exprimer la double valeur d'une même quantité. La Synthèſe, ou formation des équations, conſidérée par rapport à la ſolution des problêmes, eſt l'art d'exprimer par des équations l'état de la *queſtion* propoſée, ou les conditions du problême qui eſt à réſoudre.

I I.

208. On appelle *Conditions* du problême, des marques qui caractériſent les quantités inconnues dont on cherche la valeur, & qui ſervent à les faire connoître. Les conditions du problême ſont, à proprement parler, les *rapports* que les quantités inconnues ont avec les quantités connues, leſquels rapports ſont donnés dans l'état de la queſtion.

I I I.

209. On appelle problême *déterminé*, celui dans lequel il y a autant de conditions, ou de rapports donnés, qu'il y a de quantités inconnues; & on appelle problême *indéterminé*, celui dans lequel il y a moins de conditions que de quantités inconnues.

I V.

210. On appelle problêmes *numériques*, ou problêmes d'*Arithmétique*, ceux que l'on peut réſoudre, ou aux conditions deſquels on peut ſatisfaire par des nombres: on appelle problêmes *géométriques*, ou de *Géométrie*, ceux aux conditions deſquels il faut ſatisfaire en aſſignant de certaines lignes, ou de certaines poſitions de lignes. Les premiers ſont ceux dont nous allons bientôt donner des exemples.

Propoſition I.

211. Quand on veut réſoudre un problême, il faut bien faire attention aux conditions qui ſont énoncées dans l'état de la queſtion: car il faut toujours un certain nombre de conditions, ou de rapports donnés pour rendre la ſolution poſſible, & ordinairement il faut autant de conditions, qu'il y a de quantités inconnues; ſavoir, lorſque le problême eſt *déterminé*.

Propoſition I I.

212. Après avoir bien déterminé les conditions

du problême, il s'agit de les exprimer algébriquement & par des équations : or

I°. Si l'état de la queſtion, ou du problême propoſé, énonce une proportion; *par ex :* de trouver un quatriéme terme x, proportionnel à trois autres donnés a, b, c, il ne ſera pas difficile de former l'équation; car faiſant $a : b :: c : x$, l'on déduit l'équation $ax = bc$, qui exprime la queſtion propoſée.

II°. Mais lorſque la queſtion ne renferme pas de proportion, il faut alors former les équations immédiatement, & ſuivant les conditions qui ſont énoncées dans le problême.

III°. Le moyen de parvenir à former ces équations, eſt d'exprimer *algébriquement* les conditions du problême; c'eſt-à-dire, qu'il faut exprimer en ſtyle *algébrique* les quantités & les rapports de ces quantités, qui dans l'état de la queſtion ſont énoncés en ſtyle ordinaire.

IV°. Le ſtyle algébrique eſt celui qui ſe ſert de lettres & de ſignes. On repréſente donc les quantités par les lettres de l'alphabet; les quantités connues par les premieres lettres a, b, c, d, &c. les quantités *inconnues* par les dernieres lettres x, y, z, & les quantités *égales* par les mêmes lettres; & pour exprimer les rapports que ces quantités ont ent'elles, on les combine les unes avec les autres par le moyen des ſignes $+$, $-$, $\times$, $=$, $\sqrt{}$, &c. ſuivant l'état & la fonction qu'elles ont chacune dans le problême propoſé.

V°. Il faut donc ajouter, ſouſtraire, multiplier, &c. les quantités algébriques, autant & de la maniere qu'il eſt néceſſaire, pour qu'elles repréſentent exactement les rapports énoncés dans le problême; enſorte qu'une quantité étant repréſentée par a, le double de cette quantité ſera $2a$, le triple ſera $3a$, &c. le quarré ſera a^2, le cube ſera a^3, &c. la ſomme de a ajoutée à une autre quantité b, ſera $a+b$; la différence ſera $a-b$; le produit ſera ab, le quotient $\frac{a}{b}$. Pareillement ſi la quantité a eſt ſuppoſée quatriéme proportionnelle à trois autres quantités b, c, d, on fera $b : c :: d : a$, d'où l'on tire $a = \frac{cd}{b}$, & l'expreſſion de la quantité a deviendra pour lors $\frac{cd}{b}$; ſi a eſt un moyen proportionnel entre b & c, on fera $b : a :: a : b$, d'où l'on tire $aa = bc$, & $a = \sqrt{bc}$, & alors l'expreſſion de a ſera $\sqrt{bc}$. Si l'on vouloit exprimer que la quantité x eſt la moitié de ab, moins les deux tiers de c. il faudroit diviſer ab par 2 pour en avoir la moitié, & multiplier c par $\frac{2}{3}$ pour en avoir les deux tiers; & aprés avoir retranché la quantité $\frac{2c}{3}$ de $\frac{ab}{2}$ par le moyen du ſigne —, on feroit $x = \frac{ab}{2} - \frac{2c}{3}$.

Propoſition III.

213. Pour mieux entendre comment on forme les équations, & comment on transforme le ſtyle *ordinaire* en ſtyle *algébrique*, nous allons donner quelques exemples.

I°. Soit propoſée cette queſtion: Pierre & Paul ont dépenſé enſemble 100 écus; mais la dépenſe de Pierre eſt trois fois plus grande que celle de Paul: quelle eſt la dépenſe de chacun? On voit aiſément que cette queſtion a deux inconnues, ſavoir, la dépenſe de Pierre que j'appelle x, & la dépenſe de Paul que j'appelle y: elle renferme une quantité connue; ſavoir, les 100 écus que j'appelle a: on voit auſſi qu'il y a deux conditions dans le problême.

La premiere eſt en ſtyle ordinaire, que la dépenſe de Pierre & celle de Paul priſes enſemble, font 100 écus, ce qui s'exprime en ſtyle algébrique par l'équation $x + y = a$.

La ſeconde condition eſt en ſtyle ordinaire, que la dépenſe de Pierre eſt triple de celle de Paul; donc x eſt triple de y, & par conſéquent pour rendre y égal à x, il faut multiplier y par 3; la ſeconde condition s'exprimera donc en ſtyle algébrique par l'équation $x = 3y$.

Nous avons deux équations, & il y a deux inconnues, ce qui fait voir que ce problême eſt déterminé.

IIº. Soit propoſé de trouver deux nombres, tels que le premier ajouté au ſecond donne 12, & que la moitié du ſecond retranchée du premier laiſſe 6. Ayant appellé le premier nombre x, & le ſecond y; ayant déſigné la quantité connue 12 par a, & 6 par b; il eſt clair que la premiere condition du problême s'exprime en ſtyle algébrique par l'équation $x + y = a$;
& que pour exprimer la ſeconde condition, il n'y a qu'à prendre la moitié du ſecond nombre y, laquelle eſt $\frac{y}{2}$, la retrancher du premier nombre x, ce qui donne $x - \frac{y}{2}$, & l'égaler à la quantité b, & l'on exprimera la ſeconde condition du problême en ſtyle algébrique par l'équation

$$x - \frac{y}{2} = b,$$

ce qui donne deux équations, leſquelles ſont ſuffiſantes pour la ſolution du problême, où il n'y a que deux inconnues.

Propoſition IV.

214. Dans l'expreſſion des conditions, & lorſqu'on forme les équations, il ne faut point introduire de nouvelles inconnues ſans néceſſité; le but doit être au contraire d'en diminuer le nombre, autant qu'il eſt poſſible. Or il arrive ſouvent que toutes les inconnues d'un problême peuvent être repréſentées par une même lettre x ou y, & cela

arrive ſur-tout lorſque les inconnues ſont multiples, ou ſous-multiples les unes des autres. On le voit dans le premier exemple donné ci deſſus : car puiſque la dépenſe x de Pierre eſt triple de la dépenſe y de Paul ; il s'enſuit que celle-ci étant repréſentée par y, celle-là pourra être repréſentée par $3y$, & par ce moyen les deux inconnues x & y ſe trouvent réduites à une ſeule inconnue y, & les deux équations $x+y=a$, $x=3y$, ſe réduiront à une ſeule équation $3y+y=a$, ou $4y=a$ ce qui rendra la ſolution plus facile.

Propoſition V.

215. Lorſqu'on a formé les équations qui renferment les conditions du probleme, il faut les préparer pour la ſolution. Cette préparation conſiſte à les ſimplifier : pour les ſimplifier, il faut modifier les membres de l'équation par la voie, ou de l'*addition*, ou de la *ſouſtraction*, ou de la *multiplication*, &c. Ces opérations introduiſent dans l'équation différens changemens que l'on appelle *transformations* : ces transformations rendent les équations plus aiſées à réſoudre ; mais elles doivent ſe faire de maniere que l'on ne détruiſe pas l'égalité qui ſe trouve entre les deux membres ; ainſi on ne doit rien faire d'un côté, qu'on ne faſſe préciſément la même choſe de l'autre.

Les regles ſuivantes donneront la méthode d'introduire dans une équation les différentes eſpéces de *transformations* qui peuvent la ſimplifier ſans détruire l'égalité des membres.

Regle I.

216. Si j'ai l'équation $x-b=ac$, il eſt évident que je puis (10), ſans détruire l'égalité, ajouter la quantité b de part & d'autre, & il viendra $x-b+b=ac+b$, & en réduiſant $x=ac+b$: d'où l'on déduit cette regle, que *dans une équation on*

peut faire passer une quantité négative d'un membre à l'autre, en changeant son signe — en +.

Regle II.

217. Soit l'équation $x + b = ac$, je puis (11) retrancher la quantité b de part & d'autre, & j'aurai $x + b - b = ac - b$, & en réduisant $x = ac - b$: d'où suit la regle, que *dans une équation on peut faire passer une quantité positive d'un membre à l'autre, en changeant son signe + en —.*

Regle III.

218. L'équation $a + \frac{b}{c} = fx$ étant donnée, je puis (12) multiplier les deux membres par une même quantité; *par ex:* par le dénominateur c, & il viendra $ac + \frac{bc}{c} = cfx$, & réduisant, $ac + b = cfx$: il est donc évident, que *dans une équation on peut faire évanouir une fraction qui s'y trouve, en multipliant par son dénominateur tous les autres termes de l'équation.*

Regle IV.

219. Dans l'équation $ab + cc = bx$, je puis (13) évidemment diviser les deux membres par une même quantité b, & j'aurai $\frac{ab}{b} + \frac{cc}{b} = \frac{bx}{b}$, & réduisant, $a + \frac{cc}{b} = x$: on peut donc *dans une équation dégager une quantité d'un coefficient qui la multiplie, en divisant par ce coefficient tous les autres termes de l'équation:* dans l'équation précédente les deux quantités a & x ont été par ce moyen dégagées de la grandeur b qui les multiplioit.

Corollaire.

220. Toutes les fois que les deux membres de l'équation sont des produits qui ont une racine commune, on simplifie l'équation en divisant les

deux membres par la racine commune; *par ex :* on ſimplifie l'équation $ax + 2ay = 2abc - acd$, en diviſant le tout par a, & il vient $x + 2y = 2bc - cd$.

PARAGRAPHE II.

Analyſe, ou Réſolution des Equations.

Après avoir exprimé les conditions du problême en ſtyle algébrique & par des équations, après avoir ſimplifié & préparé ces mêmes équations par différentes transformations, il faut les réſoudre ou les *analyſer.*

Propoſition I.

221. La réſolution ou l'*analyſe* des équations conſiſte à trouver la valeur de chaque inconnue par les rapports qu'elle a avec des quantités toutes connues : ces rapports ſont enveloppés dans l'équation à cauſe de la pluralité des inconnues & de leur mêlange, ſoit entr'elles, ſoit avec les quantités connues ; il s'agit de développer ces rapports.

Propoſition II.

222. Pour développer ces rapports & par-là trouver la valeur des quantités inconnues,

I°. Il faut choiſir à volonté une des inconnues, & la laiſſer toute ſeule pour faire un membre de l'équation ; pour cela l'on fait-paſſer tous les autres termes de ce membre dans l'autre, & cet autre membre ſera la valeur de l'inconnue ; *par ex :* ſi dans l'équation $x + y = a$, je cherche la valeur de x, je ferai $x = a - y$, & le ſecond nombre ſera la valeur de x.

II°. On ſubſtitue cette valeur à la place de l'inconnue, non dans l'équation où l'on a pris cette valeur, (ce qui donneroit deux membres ſous une même expreſſion) mais dans l'autre équation, ou les autres équations ; *par ex :* ayant les deux équations

$$x + y = a$$
$$x = 3y,$$

je prends dans la premiere équation la valeur de x, laquelle eſt $a - y$, je la ſubſtitue à la place de x dans la ſeconde équation, qui devient

$$a - y = 3y$$

& dans laquelle il n'y a plus qu'une ſeule eſpéce d'inconnue, ſavoir y : cette opération peut être appellée *premiere ſubſtitution.*

III°. Cette ſubſtitution réduit, comme on le voit, les deux inconnues x & y à une ſeule y, & les deux équations à une ſeule $a - y = 3y$; d'où je conclus, en tranſpoſant,

$$a = 3y + y,$$

en réduiſant, $a = 4y$,

& en diviſant, $y = \frac{a}{4} = \frac{100}{4} = 25.$

IV°. La valeur de y étant toute connue, je m'en ſers pour connoître auſſi la valeur de x; & pour cela je mets cette valeur de y à la place de y dans toutes les équations où ſe trouvent x & y : & cette opération peut s'appeller *ſeconde ſubſtitution.* Dans l'exemple précédent je ſubſtitue 25, valeur de y, à la place de y dans l'équation $x = 3y$; & je trouve $x = 3 \times 25 = 75$; donc la valeur de x devient toute connue, & l'équation eſt réſolue.

V°. S'il reſtoit encore quelques inconnues, on prendroit de même & ſucceſſivement la valeur de chacune d'elles, & on la ſubſtitueroit à leur place dans les équations reſtantes, juſqu'à ce que l'on eût fait évanouir toutes les inconnues.

Remarque.

223. Il y a cette différence entre la premiere & la ſeconde *ſubſtitution ;* que dans la premiere la valeur de l'inconnue n'eſt pas tout-à-fait connue, parce que cette valeur eſt encore un mélange de quantités connues & de quantités inconnues, au lieu que dans la ſeconde ſubſtitution la valeur de l'inconnue devient tout-à-fait connue, ne renfermant plus que des quantités connues.

Propoſition

Proposition III.

224. Lorsqu'on substitue la valeur d'une inconnue à la place de cette inconnue, on doit substituer cette valeur selon l'état & la fonction que l'inconnue a dans l'équation, ou les équations dans lesquelles se fait cette substitution; c'est-à-dire, que si l'inconnue est ajoutée, ou soustraite, on ajoute, ou l'on soustrait sa valeur; si l'inconnue est multipliée, ou divisée, on multiplie, ou l'on divise sa valeur par les mêmes quantités qui multiplient ou qui divisent l'inconnue. Soient les deux équations

$$ax + 3x = b$$
$$x + y = c,$$

je veux substituer dans la premiere équation la valeur, de x, qui prise dans la seconde équation, est $x = c - y$: je remarque que dans la premiere équation x est multipliée par la quantité $a + 3$; car $ax + 3x = x \times \overline{a+3}$: je dois donc multiplier la valeur $c - y$ par la quantité $a + 3$; ce qui donnera l'équation

$$ac - ay + 3c - 3y = b.$$

Proposition IV.

225. Lorsque le problême est *déterminé*, il n'est susceptible que d'une seule solution : car il n'y a qu'une valeur déterminée pour chaque inconnue, qui puisse satisfaire aux conditions du problême. Mais si le problême est *indéterminé*, il admet plusieurs solutions; chaque inconnue pouvant alors avoir plusieurs valeurs, qui toutes satisferoient aux conditions du problême.

Or dans un problême *indéterminé*, il y a plus d'inconnues que d'équations; & alors pour résoudre le problême, on suppose à quelque-une des inconnues une valeur arbitraire que l'on substituera à la place de cette inconnue. Si la valeur supposée est juste, vous aurez la solution du problême, en suivant les procédés que nous avons exposés ci-dessus. Mais si cette valeur n'étoit pas juste, il se rencontreroit dans la solution des contradictions & des oppositions avec les conditions du problême: alors on supposeroit une autre quantité pour la valeur de l'inconnue; & on essayeroit ainsi successivement différentes quantités pour la valeur de cette inconnue, jusqu'à ce qu'on en eût trouvé une qui donne la solution du problême.

Proposition V.

226. Tout l'art de l'*Analyse* consiste à trouver successivement les valeurs de toutes les inconnues: pour cela on réduit par la voie de la *premiere substitution* le nombre des inconnues & des équations à une seule. Or n'y ayant plus qu'une seule inconnue, on en trouve aisément la valeur en la laissant toute seule pour faire un membre de l'équation, ou en faisant passer toutes les quantités connues dans l'autre membre; lequel donnera par conséquent la valeur précise & toute connue d'une premiere inconnue: mais cette valeur par la voie de la *seconde substitution* fera connoître celle d'une seconde inconnue; les deux valeurs substituées feront connoître celle d'une troisiéme inconnue, & ces trois valeurs substituées feront connoître celle d'une quatriéme, & ainsi des autres.

ARTICLE II.

Application de l'Analyse.

L'analyse peut s'appliquer à différens cas; aux raisons, aux progressions, aux puissances, &c. & à une infinité de circonstances dans lesquelles on peut considérer la grandeur. L'objet de l'analyse est de résoudre des questions relatives à ces circonstances, & proposées avec certaines conditions; c'est ce que l'on appelle *problêmes*: de la solution de ces problêmes résultent des vérités qui conduisent à la découverte de propriétés générales, & de-là naissent les *théorêmes*. C'est ainsi que par le moyen de l'analyse on parvient à la connoissance des vérités qui nous étoient inconnues : nous en allons donner des exemples.

PROBLÊME I.

227. *Diviser 1000 livres entre Pierre, Paul & Jacques, de maniere que la portion de Pierre soit double de celle de Paul, & celle de Paul triple de celle de Jacques.*

SOLUTION. I. Soit x la portion de Jacques; celle de Paul qui est triple, sera $3x$; & celle de Pierre qui est double de celle de Paul, $6x$: donc la condition du problême exprimée algébriquement sera $x + 3x + 6x = 1000$,

& en réduisant, $10x = 1000$,

& en divisant, $x = \frac{1000}{10} = 100$:

donc x portion de Jacques $= 100$ livres, $3x = 300$ livres, & $6x = 600$.

On voit dans ce problême que les parties auxquelles il faut diviser 1000 livres, ont entr'elles un certain rapport exprimé par les nombres 6, 3, 1; & que ce problême auroit pu être énoncé d'une façon générale, en disant, *diviser un tout en trois parties, telles que leur rapport soit comme* 6 · 3 · 1.

SOLUTION. II. Si l'on supposoit la portion de Jacques = 10 livres; celle de Paul seroit 30 livres, & celle de Pierre 60 livres : dans ce cas la somme seroit 100 livres. Mais cette supposition est fausse, puisqu'il s'agit de diviser non 100 livres, mais 1000 livres; c'est ce qu'on appelle *fausse position*. Cependant cette supposition, quoique fausse, peut conduire à la vérité par le moyen de la regle de trois : en disant, si 100 livres donnent 10 livres pour la portion du troisiéme; combien donneront 1000 livres pour la portion du même? ou bien

$$100 : 10 :: 1000 : x;$$

donc $x = \frac{1000}{10} = 100$,

c'est-à-dire, que la portion qui échecoit au troisiéme, est 100 livres.

PROBLÊME II.

228. *On a donné à Pierre 12 livres, à Paul 8 livres, à Jacques 6 livres ; on veut donner à Jean une somme proportionnelle aux trois autres : on demande quelle doit être cette somme ? Ou pour énoncer le problême d'une façon plus générale, on demande que l'on trouve un quatriéme Terme proportionnel à trois autres donnés* 12, 8, 6.

SOLUTION. Ayant exprimé par x le terme inconnu que l'on cherche, il faut ranger les quatre termes en proportion $12 : 8 :: 6 : x$: donc (183)

$$x = \frac{8 \times 6}{12} = \frac{48}{12} = 4,$$

c'est-à-dire, que la somme qui doit échecoir à Jean est 4 livres.

Cette méthode de trouver un quatriéme terme proportionnel à trois autres termes donnés, s'appelle la *Regle de trois*, comme nous l'avons dit (183); elle s'appelle aussi *Regle d'or*, à cause de sa grande utilité. Elle est quelquefois *directe*, quelquefois *inverse*, ou *réciproque*.

Regle de Trois directe.

229. La regle de trois s'appelle *directe*, lorsque dans l'état de la question le quatriéme terme inconnu x que l'on cherche, doit être d'autant plus grand, ou plus petit par rapport au troisiéme, que le second est plus grand, ou plus petit par rapport au premier : tel est l'exemple du problême précédent. On y trouve alors la valeur de l'inconnu x, en prenant le produit des moyens, & le divisant par l'extrême connu : soit $a : b :: c : x$, on aura $x = \frac{bc}{a}$. Cette regle s'appelle *directe*, parce que dans l'état de la question les deux derniers termes sont entr'eux dans le même ordre que les deux premiers.

Regle de Trois inverse.

230. La regle de trois s'appelle *inverse*, ou *réciproque*, lorsque par l'état de la question on voit que le quatriéme terme inconnu doit être d'autant plus grand ou plus petit par rapport au troisiéme, que le second est plus petit, ou plus grand par rapport au premier; telle seroit cette question: trois ouvriers ont fait un certain ouvrage en 10 heures, six ouvriers en combien de tems l'auroient-ils fait? Et pour s'assurer si l'état de la question exprime une raison *directe*, ou *réciproque*, il faut mettre les termes homogênes avec les homogênes, les ouvriers avec les ouvriers, les heures avec les heures.

3 ouvriers : 6 ouvriers :: 10 heures : x.

Or l'on voit que les deux derniers termes ne sont point dans le même ordre que les deux premiers, ou que le quatriéme terme ne doit pas être plus grand que le troisiéme, de même que le second est plus grand que le premier; car six ouvriers doivent faire le même ouvrage en moins de tems que ne l'ont fait trois ouvriers: pour conserver la proportion juste, il faut donc placer au troisiéme rang le terme inconnu x;

3 ouvriers : 6 ouvriers :: x : 10 heures;

& on aura la valeur de x, en prenant le produit des extrêmes, & en le divisant par le moyen connu, savoir, $x = \frac{3 \times 10}{6} = \frac{30}{6} = 5$: car étant donnée la proportion $a : b :: x : c$, on auroit $bx = ac$; & par conséquent $x = \frac{ac}{b}$.

Cette regle s'appelle *inverse* ou *réciproque*, ou *indirecte*, parce que dans la question proposée les deux derniers termes homogênes sont entr'eux dans un ordre renversé des deux premiers.

Corollaire.

231. Pour exprimer que deux quantités quelconques x & y sont en raison directe de deux au-

tres 3 & 2, on fait $x : y :: 3 : 2$, ce qui eſt évident. Mais pour exprimer que deux quantités quelconques x & y ſont en raiſon *inverſe* ou *réciproque* de 3 & 2, on fait $x : y :: 2 : 3$. On peut auſſi exprimer cette raiſon réciproque, en faiſant $x : y :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$; car les produits des extrêmes & des moyens ſeront les mêmes dans les proportions; ſavoir, $3x = 2y$, & $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, ce qui revient au même.

PROBLÊME III.

232. *20 Hommes en 10 jours ont fait 100 toiſes; on demande, 30 Hommes en 6 jours combien feront-ils de toiſes?*

SOLUTION. Cette queſtion renferme cinq termes, ce que l'on appelle la *regle de cinq*: pour la réſoudre, on exprime l'état de la queſtion par deux proportions, en cette maniere: ſi 20 hommes on fait 100 toiſes, 30 hommes combien en feront-ils? ou

$$20 : 100 :: 30 : x;$$

& ſi en 10 jours on a fait 100 toiſes; en 6 jours combien en fera-t-on? ou

$$10 : 100 :: 6 : x;$$

les deux proportions ſont donc

$$20 : 100 :: 30 : x,$$
$$10 : 100 :: 6 : x,$$

ou plus ſimplement,

$$\begin{matrix}20\\10\end{matrix} : 100 :: \begin{matrix}30\\6\end{matrix} : x$$

Maintenant il n'y a qu'à multiplier le nombre des ouvriers par le nombre des jours, 20 par 10, ce qui donne 200, & 30 par 6, ce qui donne 180; car 20 ouvriers qui travaillent pendant 10 jours, font la même choſe que 200 ouvriers qui travaillent pendant un ſeul jour; pareillement 30 ouvriers qui travaillent pendant 6 jours, font la même choſe que 180 ouvriers qui travaillent pendant un ſeul jour; les deux proportions ſe réduisent donc à une seule, que l'on résout par la simple regle de trois,

$$200 : 100 :: 180 : x;$$

donc on aura $x = \frac{180 \times 100}{200} = \frac{18000}{200} = 90$.

Si la question proposée avoit renfermé sept termes, ce qui donne la *regle de sept*, il eût fallu faire trois proportions, qui par une multiplication de termes, semblable à celle qui a été faite ci-dessus, auroient été réduites à une seule : si elle avoit eu neuf termes, ce que l'on appelle *regle de neuf*, il eût fallu faire quatre proportions, qui, par la multiplication des termes auroient été réduites à une seule.

PROBLÊME IV.

233. *Pierre, Jacques & Jean ont fait un fonds de* 1800 *livres; Pierre y a mis* 300 *livres, Jacques* 600 *livres, & Jean* 900 *livres; ils ont fait sur ce fonds un gain de* 9000 *livres. On demande combien chacun doit participer au gain, à proportion de la mise qu'il a faite.*

Cette question peut être énoncée d'une maniere générale, en proposant de *diviser un tout en parties proportionnelles aux parties d'un autre tout.*

SOLUTION. Ce problême renferme ce que l'on appelle la *regle de compagnie;* il est clair que le gain qui doit revenir à chacun, doit être proportionnel à la mise qu'il a faite; cette question se résout donc par autant de proportions, qu'il y a de termes inconnus, en disant: le fond est au gain comme la mise de chacun est à la portion du gain qui revient à chacun : soit x la portion qui doit revenir à Pierre: celle de Jacques, y; & celle de Jean, z: on aura

$$1800 \cdot 9000 :: \begin{cases} 300 \cdot x \\ 600 \cdot y \\ 900 \cdot z; \end{cases}$$

donc $x = \frac{2700000}{1800} = 1500$,

& $y = \frac{5400000}{1800} = 3000$,

& $z = \frac{8100000}{1800} = 4500$.

PROBLÊME V.

234. *Etant donné des Quantités de différens prix, déterminer les portions qu'il faut prendre de chacune d'elles, pour faire ſoit un mêlange, ſoit un alliage, dont telle meſure ou tel poids ſoit à un prix moyen.*

Ce problême renferme ce que l'on appelle la *Regle d'alliage*. La regle d'alliage eſt la méthode dont on ſe ſert, lorſqu'on veut mêler enſemble des matieres différentes, comme des vins de différente eſpéce, des bleds de différens prix, des métaux de différens titres : elle eſt de même que la regle de trois, ou *directe*, ou *inverſe*.

Regle d'Alliage directe.

235. La regle d'alliage *directe* eſt la méthode de trouver le prix moyen d'un mêlange quelconque, lorſque les portions qui doivent le compoſer, ſont données, & que les prix de ces portions ſont connus.

EXEMPLE. On veut mêler enſemble des vins de différens prix; ſavoir, 4 pintes de vin à 10 ſols, & 6 pintes de vin à 15 ſols la pinte, on demande quel ſera le prix moyen, ou le prix auquel reviendra la pinte après le mêlange fait ?

SOLUTION. Prenez la ſomme des portions ou meſures qui doivent compoſer le mêlange, prenez auſſi la ſomme des prix de toutes ces meſures.

Meſures,	Prix
4 pintes à 10 ſ. font	40 ſ.
6 pintes à 15 ſ. font	90 ſ.
10 meſures.	130 ſ.

Faites enſuite la proportion; la ſomme des meſures ou le mêlange entier eſt au prix total, comme une ſeule meſure eſt au prix moyen, ou

$$10 \text{ pintes} : 130 :: 1 \text{ pinte} : x = \frac{130}{10} = 13.$$

Cette queſtion ſe réſout, comme l'on voit, par une ſimple *regle de trois*, & porte avec elle ſa démonſtration.

Regle d'Alliage inverſe.

236. La regle d'alliage *inverſe* eſt une méthode par laquelle étant donné le prix ou titre moyen que l'on veut faire réſulter d'un mêlange ou d'un alliage quelconque, étant auſſi donnés les prix particuliers des quantités que l'on veut mêler enſemble, il s'agit de déterminer les portions dont doit réſulter le mêlange, ou l'alliage.

Exemple. La livre d'étain étant ſuppoſée de 16 ſols, & la livre de plomb de 10 ſols, combien faut-il prendre de l'un & de l'autre pour faire un alliage dont la livre puiſſe être vendue à un prix moyen 12 ſols.

Solution. Dans l'exemple propoſé il y a deux prix, ou deux titres donnés : c'eſt pourquoi

I°. Comparez les deux prix avec le prix moyen pour en connoître les différences ; donnez au plus haut prix la différence du prix moyen avec le plus bas prix, & au plus bas prix la différence du prix moyen avec le plus haut, de cette maniere,

$$12\left\{\begin{array}{lcl}16 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & 2\\ 10 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & 4\end{array}\right.$$

Ces différences dénotent combien il faut prendre de parties de chaque quantité pour faire l'alliage ou le mêlange ; dans la queſtion ci-deſſus il faut prendre deux parties d'étain & quatre de plomb ; & comme la ſomme des parties qui compoſeront l'alliage, eſt $2+4=6$; les parties qu'il faut prendre des deux quantités, ſont $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{6}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

II°. S'il y avoit trois titres donnés tels que 20, 16, 10, dont on voulût faire un alliage qui fût d'un titre moyen 14, après les avoir diſpoſés, comme il ſuit.

$$14\left\{\begin{array}{lcl}20 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & 4\\ 16 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & 4\\ 10 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & 6+2\end{array}\right.$$

Il faut prendre les titres donnés deux à deux, commençant par le plus haut & le plus bas, ſavoir, 20 & 10; les comparer avec le titre moyen pour en prendre les différences 6 & 4, que l'on écrit ſuivant le procédé ci-deſſus, 6 à côté de 10, & 4 à côté de 20: enſuite, comme le nombre des titres donnés eſt impair, pour comparer le titre reſtant 16, je prends avec lui l'un des autres déjà comparés, ſavoir ici 10 plutôt que 20, parce que le titre moyen 14 ſe trouve intercepté entre 16 & 10, & non entre 16 & 20; & prenant leurs différences qui ſont 2 & 4, je donne la différence 4 au titre 16, & la différence 2 au titre 10, lequel ſe trouve avoir ainſi deux différences écrites à côté; ſavoir, 6 & 2, parce qu'il a été comparé deux fois. Les différences trouvées ſont donc 4, 4, & $6+2=8$, dont la ſomme eſt 16 : ce qui fait voir que les portions qu'il faut prendre des titres 20, 16 & 10, ſont $\frac{4}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{8}{16}$, ou en réduiſant $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, leſquelles fractions évaluées donneront les nombres 5, 4, 5, dont la ſomme eſt 14, & qui par conſéquent ſatisfont aux conditions du problême.

III°. S'il y avoit quatre titres donnés, on les prendroit deux à deux, obſervant de prendre toujours l'un au-deſſus, & l'autre au-deſſous du titre moyen, (ſans quoi la ſolution ſeroit impoſſible, parce que le titre auquel on veut réduire, ne ſeroit plus moyen entre les titres comparés;) d'où il réſulte que dans quelques cas le même titre doit être comparé pluſieurs fois, comme dans cet exemple,

$$22\begin{cases} 26 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 12+4+2=18. \\ 20 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 4 \\ 18 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 4 \\ 10 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 4 \end{cases}$$

où le même titre 26 eſt comparé avec chacun de trois autres titres, parce que ceux-ci ſont tous au-deſſous du titre moyen donné 22.

DÉMONSTRATION. La raiſon de cette opération eſt que les titres doivent fournir à l'alliage ou au mêlange, d'autant plus qu'ils différent moins du titre moyen, & d'autant moins qu'ils en différent plus : donc les portions qu'ils doivent fournir, ſont entr'elles réciproquement comme les différences qu'ont les titres avec le titre moyen : donc pour connoître ces portions, il n'y a qu'à donner au plus haut titre la différence du plus petit, & réciproquement.

PROBLÊME VI.

237. *La Somme de deux Nombres étant connue, & leur Différence étant auſſi connue, trouver quels ſont ces deux Nombres ?*

SOLUTION. Soient les deux nombres que l'on cherche, le plus grand déſigné par x, & le plus petit par y; leur ſomme ſoit $40 = a$, & leur différence ſoit $8 = d$: il eſt évident,

I° Que les deux nombres pris enſemble égalent la ſomme, ou $x + y = a$.

II°. Qu'en retranchant le plus petit du plus grand, on aura la différence, ou $x - y = d$.

Ces deux équations expriment les conditions du problême.

III°. Prenons la valeur de x dans la premiere équation; elle ſera $x = a - y$;
ſubſtituons-la dans la ſeconde équation, qui par conſéquent deviendra $a - y - y = d$,
ou $a - 2y = d$
& tranſpoſant, $a - d = 2y$
& diviſant par 2, $y = \frac{a}{2} - \frac{d}{2}$:
donc la valeur de y eſt toute connue.

IV°. Subſtituons cette valeur toute connue à la place de y dans la premiere équation, qui étant $x + y = a$, deviendra $x + \frac{a}{2} - \frac{d}{2} = a$;

donc $$x = a - \frac{a}{2} + \frac{d}{2},$$

ou $$x = \frac{2a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{d}{2},$$

& $$x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}:$$

c'eſt-à-dire, que la plus grande quantité eſt égale à la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence; & que la plus petite eſt égale à la moitié de la ſomme, moins la moitié de la différence.

V°. Si à la place des indéterminées a & d, nous ſubſtituons leur valeur, nous trouverons que $x = 24$, & $y = 16$.

PROBLÊME VII.

238. *Le rapport de deux nombres étant donné, & leur différence étant connue, trouver quels ſont ces deux nombres?*

SOLUTION. Le rapport des deux nombres cherchés ſoit *par ex:* 3 · 5, & leur différence ſoit 10, multipliez les deux termes 3 & 5 du rapport donné chacun par la différence 10 & vous aurez les deux nombres 30 & 50, leſquels conſervent le même rapport (179). Diviſez enſuite les deux nombres 30 & 50, chacun par 2 qui eſt la différence des deux termes 3 & 5, & vous trouverez les nombres 15 & 25, qui conſervent encore le même rapport (179) & dont la différence eſt 10, leſquels ſatisfont, par conſéquent, aux conditions du problême & ſont les nombres cherchés.

DEMONSTRATION. La raiſon eſt que, lorſque vous multipliez les deux termes 3 & 5 chacun par 10, ce qui donne les produits 30 & 50, la différence de ces deux termes qui étoit 2 doit devenir dix fois plus grande & ſera par conſéquent 20: pareillement lorſque vous diviſez les produits 30 & 50 chacun par 2, leur différence qui eſt 20 doit devenir deux fois plus petite, & ſera parconséquent 10 ; donc en suivant la méthode du problême vous devez trouver les deux nombres 15 & 25 lesquels sont dans le rapport de 3 à 5 & ont pour différence 10.

Corollaire.

239. On peut par ce moyen résoudre une infinité de question, *par ex :* une armée ayant été défaite, si l'on demandoit de combien d'hommes elle étoit composée avant la bataille, & combien il en est resté après la défaite, demandez quel est le rapport des deux nombres tant avant qu'après la bataille, & qu'elle en est la différence. Soit ce rapport comme 5 · 2, & la différence 9000. Multipliez 5 & 2 par par 9000 vous aurez les nombres 45000 & 18000, lesquels étant divisés par 3, différence des termes 5 & 2, donneront 15000 & 6000 pour les deux nombres cherchés.

PROBLÊME VIII.

240. *Trouver trois nombres* x, y, z, *dont la somme soit* 60, *& qui soient tels que la Différence de* x *&* y *soit double de la Différence de* y *& de* z.

SOLUTION. La premiere condition du problême est

$$x+y+z=60.$$

La seconde condition étant que la différence $x-y$ est double de la différence $y-z$, il en résulte

$$x-y=2y-2z.$$

Les conditions du problême ne peuvent s'exprimer que par ces deux équations : or le problême renferme trois inconnues ; il a donc une inconnue de plus qu'il n'a de conditions, ou d'équations, d'où il suit qu'il est indéterminé.

Je prends la valeur de x dans la seconde équation ; & j'aurai $x=3y-2z$.

Je la substitue dans la premiere équation à la place de x, & j'aurai $3y-2z+y+z=60$, ou

$$4y-z=60;$$

dans laquelle équation je ne puis faire évanouir ni

y, ni z; il faut donc ſuppoſer une valeur, *par ex :* à y : je ſuppoſe $y=18$,
& j'aurai $72-z=60$;
donc $z=12$:
& ſubſtituant ces deux valeurs de y & de z dans la premiere équation, nous trouverons que

$$x=30.$$

Ces trois nombres 30, 18, 12, ſatisfont aux conditions du problême.

On auroit pu ſuppoſer $y=16$, & alors on auroit eu $z=4$, & $x=40$; ces trois nombres 40, 16 & 4, ſatisfont encore aux conditions du problême, ce qui fait voir que ce problême eſt ſuſceptible de pluſieurs ſolutions.

Problême IX.

241. *Un Pere a trois Enfans de différens âges ; l'âge du premier avec la moitié de l'âge des deux autres fait 25 ans ; l'âge du ſecond avec le tiers de l'âge des deux autres fait 26 ans ; l'âge du troiſiéme avec la moitié de l'âge des deux autres fait 29 ans ; on demande l'âge de chaque Enfant en particulier.*

Solution. L'âge du premier ſoit x ; celui du ſecond ſoit y ; celui du troiſiéme, z : or

I°. Selon les conditions du problême on aura les trois équations.

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=25,$$
$$y+\frac{x}{3}+\frac{z}{3}=26,$$
$$z+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=29;$$

ou en faiſant évanouir les fractions,

$$2x+y+z=50,$$
$$3y+x+z=78,$$
$$2z+x+y=58.$$

II°. Je cherche la valeur d'une inconnue, *par ex :* de y dans la premiere équation ; cette valeur eſt

$y=50-2x-z$; & je la substitue à la place de y dans les deux autres équations, qui deviendront par cette raison $150-6x-3z+x+z=78$,
$$2z+x+50-2x-z=58,$$
ou en simplifiant, $150-5x-2z=78$,
$$z-x+50=58.$$

III°. Les trois équations & les trois inconnues étant ainsi réduites à deux; je cherche encore la valeur d'une de ces inconnues, *par ex:* de z dans la derniere des deux équations précédentes, & cette valeur se trouve être $z=8+x$; je la substitue dans l'autre équation, qui deviendra
$$150-5x-16-2x=78,$$
donc $150-78-16=7x$,
donc $7x=56$,
& $x=\frac{56}{7}=8$.

IV°. Ayant la valeur de x toute connue, sçavoir, 8: je substitue cette valeur à la place de x dans quelques-unes des équations précédentes; *par ex:* dans l'équation $z-x+50=58$, qui par cette raison devient $z-8+50=58$, donc $z=58-50+8=16$.

V°. Si l'on substitue ensuite les valeurs de $x=8$, & de $z=16$, dans quelques-unes des équations où se trouvent les trois inconnues; on trouvera facilement la valeur de y, qui sera 18: les trois nombres cherchés sont donc 8, 16, 18, lesquels satisfont aux conditions du problême.

PROBLÊME X.

242. *Deux corps* A & B *parcourent une même circonférence de cercle,* A *avec quatre degrés de vîtesse,* & B *avec un degré seulement. Ils partent ensemble d'un même point* C *de la circonférence; on demande quel est le point où le corps* A *atteindra le corps* B?

SOLUTION. Je remarque que, lorsque le corps A aura décrit la circonférence entiere & sera revenu au point de départ C, le corps B qui a quatre fois moins de vîtesse, n'aura parcouru que le quart de la circonférence, ainsi la distance des deux corps A & B, sera pour lors mesurée par un arc qui sera le quart de la circonférence, & lequel j'appelle a : soit nommé x l'espace que le corps B parcourera encore, jusqu'à ce qu'il soit atteint par le corps A partant pour la seconde fois du point C. Il est évident que, puisque le corps A a quatre fois plus de vîtesse que B, l'espace qu'il parcourera pendant que le corps B fera le chemin x, sera quatre fois plus grand, & sera par conséquent $4x$: mais cet espace est égal à l'arc a plus au chemin x que le corps B a fait de plus. On aura donc $4x = a + x$; donc $4x - x = a$, ou $3x = a$; donc $x = \frac{a}{3}$; c'est-à-dire, que le corps A atteindra le corps B au tiers de la seconde division, ou du second quart de la circonférence.

Corollaire I.

243. On auroit encore pu résoudre le problême en donnant aux corps A & B des degrés de vîtesse qui fussent dans un tout autre rapport, que celui de $4 \cdot 1$; car *par ex :*

I°. Si l'on avoit supposé que A eût trois fois plus de vîtesse que B, alors pendant que A eût parcouru la circonférence entiere, B n'en eût parcouru que le tiers : ainsi au lieu de l'équation $4x = a + x$, on auroit eu $3x = a + x$, & par conséquent $3x - x = a$, ou $2x = a$: donc $x = \frac{a}{2}$, c'est-à-dire que, la circonférence du cercle étant supposée divisée en trois parties égales, le corps A auroit atteint le corps B à la moitié de la seconde division, ou du second tiers de la circonférence.

II°. Si l'on supposoit que A n'eût que le double de la vîtesse de B, l'on auroit dans ce cas $2x = a + x$: donc $2x - x = a$, ou $x = a$; c'est-à-dire, qu'ayant partagé la circonférence du cercle en deux moitiés, la jonction des deux corps se fera lorsque B aura parcouru la seconde moitié de la circonférence, ou, ce qui est le même, que le point de jonction sera le même que le point C du départ.

III°. C'est pourquoi lorsque les vîtesses de A & de B seront comme $2 \cdot 1$, l'on aura $x = a$: lorsqu'elles seront dans le rapport de $3 \cdot 1$, on aura $x = \frac{a}{2}$: lorsqu'elles seront dans celui de $4 \cdot 1$, on aura $x = \frac{a}{3}$: lorsque les vîtesses seront comme $5 \cdot 1$, l'on trouvera $x = \frac{a}{4}$: lorsqu'elles seront dans le rapport de $10 \cdot 1$, on aura $x = \frac{a}{9}$, & ainsi du reste.

IV°. En général si la vîtesse de A est représentée par l'indéterminée n, l'on trouvera dans tous les cas $x = \frac{a}{n-1}$ qui servira de formule générale pour résoudre ces sortes de problêmes.

Corollaire II.

244. Il est facile d'appliquer ces principes à différens exemples particuliers. En effet

I°. Si l'on demandoit à quel point du cadran d'une montre ou d'une pendule se doit faire la jonction de l'aiguille des heures & de celle des minutes, en supposant qu'elles partent toutes deux ensemble d'un même point, *par ex:* du point de midi, il sera aisé de l'assigner, en remarquant que l'aiguille des minutes a douze fois plus de vîtesse que celle des heures; car le cadran étant partagé en douze parties égales, ou en 12 heures, l'aiguille des minutes fait tout le tour du cadran, tandis que celle des heures n'en fait que la douziéme partie ; ainſi l'on aura dans ce cas $x = \frac{a}{n-1} = \frac{a}{11}$, c'eſt-à-dire que l'aiguille des minutes atteindra celle des heures à la onziéme partie de la ſeconde diviſion, ou de la premiere heure du cadran.

II°. Pareillement ſi l'on ſuppoſe que les deux planettes Mars & Jupiter partent enſemble d'un même point du zodiaque, *par ex :* du premier degré du *Bélier*, on trouvera aiſément le point où les deux planettes ſe rejoindront. Pour cela il faut remarquer que le zodiaque eſt partagé en douze portions égales, que l'on appelle *Signes*, & que chaque ſigne contient 30 degrés de la circonférence du cercle. Or comme Jupiter emploie douze ans à parcourir les douze ſignes, ou le zodiaque entier, tandis que Mars n'y emploie que trois ans, il s'enſuit que la vîteſſe de Mars eſt à celle de Jupiter (on entend ici les vîteſſes relatives), comme 12 eſt à 3, ou comme 4 · 1 ; d'où il ſuit que lorſque Mars aura décrit le zodiaque entier, ou les 12 ſignes, Jupiter n'aura parcouru que le quart du zodiaque, ou trois ſignes. Ainſi l'on aura dans ce cas $x = \frac{a}{n-1} = \frac{a}{3}$: c'eſt-à-dire que le point de jonction des deux planettes ſera au tiers du ſecond quart du zodiaque, ſçavoir au 10ᵉ degré du quatriéme ſigne (que l'on appelle le ſigne du *Cancer*).