LIVRE PREMIER.

DES PRINCIPES DU CALCUL.

NOus allons confidérer le calcul & dans fes élémens, & dans fes progrès. Les élémens du calcul font le calcul fimple des *quantités*, & il confifte dans la combinaifon fimple des quantités entr'elles, & c'eft ce que l'on appelle proprement *Calcul*. Le progrès du calcul eft le calcul des *rapports* des quantités, & il confifte à combiner les rapports qu'ont entr'elles les quantités, & c'eft ce que l'on appelle *Analogie* ou *Proportion*.

SECTION I.

Du Calcul fimple des Quantités.

18. LE calcul proprement dit confifte à combiner des quantités homogênes, ou de même efpéce; car on ne peut pas combiner & affembler des quantités hétérogênes ou de différente efpéce, telles que feroient, *par ex:* des *heures* & des *toifes*. Or cette combinaifon fe fait par la voie de l'*Addition* ou de la *Souftraction*. L'addition eft l'affemblage de deux ou plufieurs quantités: la fouftraction fe fait en retranchant une quantité d'une autre quantité. L'addition & la fouftraction peuvent fe diverfifier par des méthodes, d'où réfultent de nouvelles opérations,

que l'on appelle *Multiplication* & *Diviſion*, *Exaltation* & *Extraction*.

19. Le calcul a pour objet les quantités diſcretes : les quantités diſcretes ſont ou déterminées ou indéterminées. Les quantités déterminées ſont celles qui expriment une grandeur plutôt qu'une autre : *par ex :* le nombre 8, qui ſignifie une grandeur de huit parties, plutôt que de ſept, ou de neuf, ou de, &c. Les quantités indéterminées ſont celles qui expriment une grandeur qui n'eſt pas plutôt l'une que l'autre : *par ex :* la lettre *a*, laquelle ne ſignifie rien de fixe & de précis, n'exprime pas plutôt un mouvement qu'une étendue, un pied plutôt qu'un pouce.

20. Les quantités ou les grandeurs déterminées ſe repréſentent par les caracteres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que l'on appelle *Chiffres*, leſquels nous ſont venus des Arabes, & les quantités ainſi exprimées s'appellent *Nombres*, ou quantités *numériques*. Les grandeurs indéterminées s'expriment par les lettres de l'Alphabet *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, &c. leſquelles, ne ſignifiant rien pat elles-mêmes, ſont propres par cette raiſon à déſigner & à repréſenter toutes ſortes de grandeurs : or les quantités ainſi exprimées s'appellent quantités *algébriques*.

21. Le calcul des quantités déterminées s'appelle calcul des *nombres*, ou calcul *arithmétique :* celui des quantités indéterminées s'appelle calcul des *lettres*, ou calcul *algébrique*. Nous allons expoſer les principes de l'un & de l'autre.

CHAPITRE I.

Du Calcul des Nombres, ou l'Arithmétique.

DÉFINITIONS.

I.

22. LE nombre eſt un aſſemblage de pluſieurs unités, ou de parties de l'unité; *par ex :* 3 eſt un nombre, parce qu'il eſt compoſé de trois unités; $\frac{3}{4}$ ou trois quarts ſont un nombre, parce que c'eſt l'aſſemblage de trois parties de l'unité; ſavoir, trois de ces parties, dont chacune eſt la quatriéme partie de l'unité.

I I.

23. On appelle Nombre *entier* un aſſemblage de pluſieurs unités, ou de pluſieurs tous; tels ſont 4, 7, 8, 9, &c. On appelle Nombre *Fractionnaire*, ou *Fraction*, celui qui exprime des parties de l'unité; *par ex :* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, &c. Ce qui ſignifie une demie, un tiers, un quart, deux tiers, trois cinquiémes, &c.

I I I.

24. Dans la fraction le nombre ſupérieur s'appelle *Numérateur*, & le nombre inférieur s'appelle *Dénominateur :* celui-ci s'appelle dénominateur; parce qu'il déſigne la qualité & la grandeur des parties auxquelles on a diviſé le tout, en exprimant ſi elles ſont des moitiés, ou des tiers, ou des quarts, ou, &c. Celui-là s'appelle numérateur, parce qu'il exprime combien l'on prend de ces parties.

I V.

25. On appelle *Numération*, l'art d'exprimer &

d'énoncer les nombres : pour cela il faut ſavoir combiner & arranger dix caracteres, que l'on appelle *chiffres*, & qui ſont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui ſignifient *zero*, *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *ſix*, *ſept*, *huit*, *neuf*. La combinaiſon & l'arrangement de ces chiffres donne l'art d'exprimer en chiffres les nombres énoncés dans le diſcours, & d'énoncer dans le diſcours les nombres exprimés en chiffres; c'eſt ce que l'on appelle la *Numération*.

Principe.

26. On eſt convenu (& c'eſt ici le fondement de toute l'Arithmétique,) que lorſque des dix caracteres ou chiffres dont il vient d'être parlé, il s'en trouveroit pluſieurs de ſuite, leur valeur augmenteroit en proportion décuple, allant de droite à gauche, c'eſt-à-dire qu'une unité du chiffre précédent vers la gauche ſeroit dix fois plus grande qu'une unité du chiffre ſuivant vers la droite; *par ex :* dans la ſuite des chiffres 46527, chaque unité du chiffre 2 eſt dix fois plus grande que chaque unité du chiffre 7; pareillement chaque unité du chiffre 5 eſt dix fois plus grande que chaque unité du chiffre 2, & ainſi de ſuite. Zero tout ſeul ne ſignifie rien; mais étant précédé d'un chiffre, il rend ſa valeur dix fois plus grande. C'eſt pourquoi le chiffre 1 tout ſeul ſignifie une unité, mais s'il eſt ſuivi d'un zero, on aura 10, qui ſignifie *dix* unités, ou une *dixaine :* s'il eſt ſuivi de deux zero, on aura 100, qui exprime dix fois dix, ou *cent* unités, ou une *centaine*, & ainſi du reſte.

PROBLÊME I.

27. *Exprimer en chiffres des nombres énoncés dans le Diſcours.*

SOLUTION. I°. Prenez l'unité, & ajoutez-lui toujours des zero pour augmenter ſa valeur en proportion décuple, & vous aurez 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, qui ſignifient *un, dix, cent, mille, dix mille, cent mille, un million*, &c.

II°. Prenez ces nombres déja trouvés deux à deux, & vous trouverez des nombres intermédiaires & interceptés, en mettant ſucceſſivement les neuf caracteres à la place de l'unité; *par ex :* entre 1 & 10 vous aurez 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: entre 10 & 100 vous trouverez 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, qui ſignifient *vingt, trente, quarante, cinquante, ſoixante, ſoixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix :* & entre 100 & 1000 vous trouverez 200, 300, 400, 500, 600, 700, &c. qui ſignifient *deux cens, trois cens, quatre cens, cinq cens, ſix cens, ſept cens*, &c.

III°. Ces nombres intermédiaires admettent encore d'autres nombres intermédiaires, que vous trouverez en mettant ſucceſſivement les neuf caracteres à la place du zero, ou du dernier zero; *par ex :* entre 10 & 20 vous aurez 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, qui ſignifient *onze, douze, treize, quatorze, quinze, ſeize, dix-ſept, dix-huit, dix-neuf :* pareillement entre 20 & 30, vous trouverez 21, 22, 23, 24, &c. qui ſignifient *vingt-un, vingt-deux, vingt-trois, vingt-quatre*, &c. entre 100 & 200, vous aurez 101, 102, 103, 104, &c. qui ſignifient *cent-un, cent-deux, cent-trois, cent-quatre*, &c.

IV°. Si au lieu de mettre ſucceſſivement les neuf caracteres à la place du dernier zero, vous les euſſiez mis à la place du premier, ou du ſecond, ou du troiſiéme, &c. zero, vous auriez trouvé d'autres nombres intermédiaires; *par ex :* entre 1000 & 2000 ſubſtituant les neuf caracteres à la place du premier zero, vous trouverez 1100, 1200, 1300, &c. en les ſubſtituant à la place du ſecond, vous aurez 1010, 1020, 1030, &c.

V°. Enfin, combinant toujours les nombres qui ſont au-deſſous de dix (& que l'on appelle nombres *ſimples*) avec ceux qui ſont au-deſſus de neuf (& que l'on appelle nombres *compoſés*) & mettant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, &c. (que l'on appelle *poſitifs*) à la place ſoit du premier, ſoit du ſecond, ſoit du troiſiéme, &c. zero, ou même à la place de tous les zero, vous trouverez tous les nombres que vous voudrez.

Exemple.

Soit propoſé d'exprimer en chiffres le nombre un *million, ſix cens, vingt-quatre mille, huit cens, quarante-deux*; lequel nombre eſt la même choſe que un million, ſix cens mille, vingt mille, quatre mille, huit cens, quarante, & deux: exprimez d'abord le nombre donné par parties.

Un million,	1000000
Six cens mille,	600000
Vingt mille,	20000
Quatre mille,	4000
Huit cens,	800
Quarante,	40
Deux,	2

& comme dans cette ſuite les zero ne ſervent qu'à faire garder aux chiffres poſitifs les rangs qu'ils doivent tenir pour conſerver leur valeur, ſupprimez les zero, & écrivez tous les chiffres poſitifs ſur une même ligne,

1624842.

& cette ſuite de chiffres exprimera le nombre énoncé dans le diſcours. Si dans l'énoncé il ſe trouvoit quelques nombres intermédiaires ſupprimés, mettez des zero à leur place, afin de conſerver aux chiffres précédens leur rang & leur valeur, *par ex: vingt mille cinquante* s'exprime par 20050.

PROBLÊME II.

¶ 28. *Enoncer dans le Diſcours des Nombres exprimés en Chiffres.*

Solution. Il faut remarquer :

I°. Que dans une ſuite de chiffres donnés, on doit diſtinguer pluſieurs tranches, allant de droite à gauche, & que chaque tranche eſt compoſée de trois ordres ou chiffres.

II°. Que la premiere tranche à droite s'appelle la tranche des *unités*; la ſeconde, la tranche des *mille*; la troiſiéme, la tranche des *millions*; la quatriéme, la tranche des *billions*, & ainſi de ſuite.

III°. Que chaque tranche contient toujours trois ordres ou trois chiffres, excepté la derniere à gauche, qui quelquefois ne contient que deux chiffres, ou même un ſeul. Le premier ordre eſt celui des *unités*; le ſecond, celui des *dixaines*; le troiſiéme, celui des *centaines*; *par ex :*

Millions,			Mille,			Unités.		
3	4	5,	8	7	6,	3	2	5.
Centaines.	Dixaines.	Unités.	Centaines.	Dixaines.	Unités.	Centaines.	Dixaines.	Unités.

IV°. On commence par la tranche qui eſt à gauche, & il ne faut énoncer le nom propre à chaque tranche, qu'à la fin de cette tranche; *par ex :* la ſuite 345876325 ſignifie *trois cens quarante-cinq millions, huit cens ſoixante ſeize mille, trois cens vingt-cinq*. On doit s'abſtenir de nommer les ordres dans leſquels il ſe trouve des zero à la place des chiffres poſitifs; *par ex :* la ſuite des chiffres 30421 ſignifie *trente mille, quatre cens, vingt-un.*

L'objet de l'Arithmétique ſont les opérations que l'on peut faire ſur les nombres, ſoit entiers, ſoit fractionnaires : nous en allons parler.

ARTICLE I.

Des opérations ſur les Nombres entiers.

Les opérations auxquelles on peut aſſujettir les nombres entiers, ſont l'Addition & la Souſtraction, la Multiplication & la Diviſion, l'Exaltation & l'Extraction.

PARAGRAPHE I.

De l'Addition & de la Souſtraction.

DÉFINITIONS.

I.

29. L'Addition eſt une opération dans laquelle on joint enſemble pluſieurs nombres donnés, pour avoir un réſultat que l'on appelle *Somme*; *par ex:* ſi l'on ajoute enſemble 5 & 7, il eſt facile d'en trouver la ſomme qui eſt 12, ce qui s'exprime d'une maniere abrégée par $5+7=12$, c'eſt-à-dire, 5 *plus* 7 *égal à* 12.

II.

30. La Souſtraction eſt une opération inverſe de l'addition. Dans l'addition on ajoute un nombre à un autre, pour avoir un réſultat qu'on appelle *Somme:* dans la ſouſtraction on retranche un nombre d'un autre, pour avoir un réſultat que l'on appelle *Différence*, *Reſte* ou *Excès*. Si on veut ſouſtraire 3 de 9, il reſte 6 qui ſera la *différence* des deux nombres, ou l'*excès*, dont le plus grand ſurpaſſe le plus petit, ce qui s'exprime ſimplement de cette maniere, $9-3=6$, c'eſt-à-dire 9 *moins* 3 *égal à* 6.

PROBLÊME I.

31. *Faire l'Addition, ou chercher la Somme de pluſieurs Nombres donnés.*

SOLUTION. I°. Si les nombres donnés ſont ſimples, il n'y a nulle difficulté, comme nous venons de le voir; *par ex:* $3+4=7$.

II°. Mais ſi les nombres donnés ſont compoſés, il faut les écrire les uns ſous les autres obſervant de mettre les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, les mille, &c.

III°. On commence par la colonne des unités, & on en cherche la ſomme, laquelle s'exprime ou par un nombre ſimple, ou par un nombre composé de deux chiffres, ou par un nombre composé de pluſieurs chiffres: dans le premier cas on écrit cette ſomme ſous la colonne des unités, & l'on paſſe à la colonne des dixaines, pour opérer ſur elle comme on a fait ſur celle des unités: dans le ſecond cas on écrit ſous la colonne des unités le dernier des chiffres du nombre composé, & on retient le premier (qui exprime des dixaines, à cauſe de ſa valeur décuple, voyez le N° 26.) pour l'ajouter par la penſée à la colonne des dixaines, dont enſuite il faut chercher la ſomme & l'écrire de la même maniere, comme on l'a fait pour la colonne des unités: dans le troiſiéme cas, on écrit ſous la colonne des unités le dernier des chiffres du nombre composé, & on retient les autres pour les ajouter à la colonne des dixaines, & l'on prend la ſomme tant des chiffres qui composent cette colonne, que de ceux que l'on a retenus, pour l'écrire comme on l'a fait dans le ſecond cas.

IV°. On continue la même opération & de la même maniere ſur la colonne des centaines, des mille, & ſur toutes les colonnes ſuivantes.

Exemples.

	4382		2040
	463		3705
	5370		6003
Somme	10215	Somme	11748

Dans le premier exemple commencez par la colonne des unités, & dites 0 & 3 font 3, & 2 font 5, écrivez 5 ſous la colonne des unités;

passez à la colonne des dixaines, & dites 7 & 6 font 13, & 8 font 21, laquelle somme 21 contient 21 dixaines, ou 2 centaines & 1 dixaine (26); posez donc 1 sous la colonne des dixaines, & vous retiendrez 2 centaines, que vous ajouterez à la colonne des centaines, en disant, 3 & 4 font 7, & 3 font 10, & 2 que vous avez retenus font 12; j'écris donc 2 sous la colonne des centaines, & je retiens 1 (qui vaut mille), que je transporte à la colonne des mille, & je dis 5 & 4 font 9, & 1 de retenu font 10; j'écris 0 sous la colonne des mille, & j'écris 1 plus avant, n'y ayant plus de colonne à laquelle je puisse le transporter, & la somme est 10215.

Démonstration. Il est clair qu'en suivant les régles ci-dessus l'on doit trouver la somme des nombres donnés à ajouter: car l'on prend la somme des unités, celle des dixaines, celle des centaines, & celle de toutes les autres parties qui composoient les nombres donnés; or quand on prend toutes les parties qui composent un tout, on prend le tout lui-même, puisque le tout n'est pas distingué de toutes ses parties prises ensemble (8), donc, &c.

Problême II.

32. *Faire la Soustraction, ou chercher la Différence de deux Nombres donnés.*

Solution. I°. Si les nombres donnés sont simples, il n'y a nulle difficulté; *par ex:* $8 - 6 = 2$.

II°. Si les nombres donnés sont composés, il faut faire l'opération par parties, comme on a fait dans l'addition, c'est-à-dire, qu'il faut soustraire les unités des unités, les dixaines des dixaines, &c. & écrire sous chaque colonne la différence des deux nombres; *par ex:* si de la somme 897, je veux soustraire 753, j'opérerai de la maniere suivante.

De 7 ôtez 3, il reſte 4 que j'écris ſous la colonne des unités : je paſſe aux dixaines ; de 9 ôtez 5, reſte 4 que je poſe ſous les dixaines, & ainſi de ſuite.

$$\begin{array}{r} 897 \\ 753 \\ \hline 144 \end{array}$$

III°. Lorſque le chiffre ſupérieur eſt plus petit que l'inférieur qui eſt à ſouſtraire, il faut alors augmenter le chiffre ſupérieur d'une unité priſe ſur le chiffre précédent, laquelle unité eſt une dixaine (26) par rapport au chiffre ſuivant, pour lequel on l'emprunte. Or le chiffre précédent ſur lequel on emprunte cette unité, doit être diminué d'autant, lorſqu'on opérera ſur lui ; ou bien on peut le laiſſer tel qu'il eſt, & augmenter le chiffre inférieur qui lui eſt correſpondant de cette unité : car ces deux procédés reviennent au même ; *par ex :* ſi de 625 je veux retrancher 453, je dirai de 5 ôtez 3, reſte 2 que j'écris ſous la colonne des unités ; je paſſe aux dixaines, de 2 ôtez 5, cela ne ſe peut : j'emprunte une unité ſur le chiffre précédent 6, que je marque d'un point, afin de m'en ſouvenir, & cette unité ajoutée à 2 fait alors 12, dont ôtant 5, reſte 7, que j'écris ſous la colonne des dixaines : je paſſe aux centaines, & le point qui eſt au-deſſus de 6 m'avertiſſant que j'en ai emprunté une unité, il ne vaut plus que 5, & je dis, de 5 ôtez 4, ou, ce qui revient au même, de 6 ôtez 5, reſte 1 que j'écris ſous la colonne.

$$\begin{array}{r} \dot{6}25 \\ 453 \\ \hline 172 \end{array}$$

IV°. On trouve quelquefois des zero dans le nombre ſupérieur ; il faut dans ce cas emprunter une unité du premier chiffre poſitif à gauche, laquelle ajoutée à zero, fait une dixaine, & enſuite opérer comme dans l'exemple ſuivant.

De 0 ôtez 1, cela ne ſe peut ; j'emprunte du 3 une unité qui vaut 10 ; ſi de 10 j'ôte 1, reſte 9 ; enſuite de 2 ôtez 2, ou (laiſſant le chiffre ſupérieur tel qu'il eſt, & augmentant le chiffre

$$\begin{array}{r} \dot{4}\dot{5}0\dot{3}0 \\ 32621 \\ \hline 12409 \end{array}$$

inférieur de l'unité empruntée) de 3 ôtez 3, reſte rien, & je mets o ſous la colonne; & comme le chiffre ſuivant dans le nombre ſupérieur ſe trouve être un o, j'opére comme j'ai déjà fait, c'eſt-à-dire que j'emprunte une unité du chiffre voiſin à gauche.

V°. Si dans le nombre ſupérieur il ſe trouvoit pluſieurs zero de ſuite devant le chiffre pour lequel il faut emprunter, alors l'unité doit être empruntée du premier chiffre poſitif qui précéderoit à gauche; mais dans ce cas tous les zero interceptés entre ce chiffre poſitif & le chiffre pour lequel on emprunte, ſe changent en 9. En effet, ſi de 402 il falloit retrancher 3, il eſt évident qu'après avoir emprunté une unité du 4 pour la donner à 2, le nombre 40 qui précéde, ne vaut plus que 39, & par conſéquent le zero intercepté entre 4 & 2 ſe change en 9. Voici un exemple.

$$\begin{array}{r} 30002 \\ 12851 \\ \hline 17151 \\ \hline \end{array}$$

De 2 ôtez 1, reſte 1. Je paſſe à la colonne des dixaines; de o ôtez 5, cela ne ſe peut; j'emprunte une unité du chiffre 3, & je dis de 10 ôtez 5, reſte 5. Je paſſe à la colonne des centaines, & le zero étant changé en 9, je dis de 9 ôtez 8, reſte 1. Dans la colonne ſuivante, je dis pareillement de 9 ôtez 2, reſte 7. Enfin pour la derniere colonne, de 2 ôtez 1, reſte 1.

VI°. Mais l'opération ſera plus aiſée en empruntant toujours l'unité ſur le zero précédent (comme ſi ce zero étoit un chiffre poſitif) & en ſe ſouvenant d'augmenter de l'unité empruntée le chiffre inférieur & correſpondant au zero duquel on l'aura empruntée; ainſi dans l'exemple précédent je dis, de 2 ôtez 1, reſte 1. Je paſſe à la colonne des dixaines; de o ôtez 5, cela ne ſe peut, mais j'emprunte une unité du zero précédent, & je dis de 10 ôtez 5, reſte 5. Dans la colonne des centaines je dis, de o ôtez 9, cela ne ſe peut, j'emprunte encore une unité ſur le zero précédent, & je dis de 10 ôtez 9, reste 1. Je passe à la colonne des mille, de 0 ôtez 3, cela ne se peut encore; mais empruntant une unité sur le chiffre précédent, je dis de 10 ôtez 3, reste 7. Enfin dans la derniere colonne, de 3 ôtez 2, reste 1.

DÉMONST. En suivant les régles ci-dessus, l'on a dû trouver la différence ou le reste que laisse le nombre supérieur, après en avoir soustrait le nombre inférieur: car par le procédé ci-dessus l'on trouve infailliblement la différence des unités, celle des dixaines, celle des centaines & celle de toutes les autres parties qui composoient les deux nombres donnés; donc l'on trouve la différence des deux nombres eux-mêmes; puisque chacun d'eux est égal (8) à toutes ses parties prises ensemble; donc, &c.

Corollaire I.

33. Toutes les parties de l'Arithmétique se prouvent par leurs contraires; c'est par la soustraction que l'on s'assure qu'on a bien opéré dans l'addition, & par l'addition que l'on s'assure qu'on a bien opéré dans la soustraction: si l'on veut prouver, *par ex:* que 4 & 3 font 7, on s'assurera aisément que la somme 7 est juste, en faisant voir que 3 retranché de 7 laisse 4; car $4+3=7$, parce que $7-3=4$, & réciproquement. La raison est que ces deux opérations sont opposées, & que l'une détruit ce que fait l'autre.

Corollaire II.

34. La même chose a lieu lorsque les nombres sont composés; en effet soient donnés deux nombres composés, tels que les nombres 897 & 589.

I°. Si vous les ajoutez pour en avoir la somme, sçavoir

$$\begin{array}{r} 897 \\ 589 \\ \hline 1486 \end{array}$$

& si vous voulez vous assurer que vous ne vous êtes point trompé dans l'addition, retranchez chacune des colonnes en commençant par la gauche, du chiffre ou des chiffres qui lui répondent au-dessous dans la somme trouvée; & s'il y a un reste, rejettez ce reste au chiffre suivant de la somme, & ainsi de suite: or si après avoir soustrait la derniere colonne à droite, du chiffre ou des chiffres qui lui répondent, il ne reste rien, ce sera une marque que vous avez bien opéré. Dans cet exemple prenez la somme 13 des chiffres 8 & 5 qui forment la colonne des centaines, & retranchez-la de 14 qui est le nombre qui répond à cette colonne, il reste 1, portez au chiffre suivant 8 ce reste 1 (lequel est une dixaine par rapport à 8 (26) & joint avec lui donne 18). Ensuite dites, 9 & 8 qui forment la colonne des dixaines, donnent 17, de 18 ôtez 17, reste 1, que vous portez pareillement au chiffre suivant 6, & joint avec lui donne 16; puis dites 7 & 9, donnent 16; or 16 ôté de 16, reste 0, d'où l'on conclut que la somme trouvée est la véritable : car puisque le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble (8), il s'ensuit que, si vous retranchez du tout toutes les parties qui le composent, successivement ou les unes après les autres, il ne doit rien rester à la fin.

II°. S'il s'agit de retrancher le nombre 589 de 897 pour en avoir la différence, sçavoir

$$\begin{array}{r} 897 \\ 589 \\ \hline 308 \\ \hline \end{array}$$

vous vous assurerez d'avoir trouvé la véritable différence, en ajoutant ensemble la différence & le nombre inférieur: car si la somme qui en résulte, est égale au nombre supérieur, c'est une marque que la différence trouvée est la véritable. En effet le nombre ſupérieur eſt un tout dont le nombre inférieur eſt une partie, & la différence eſt l'autre partie : or le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble ; donc, ſi la différence trouvée eſt la véritable, la ſomme faite de la différence & du nombre inférieur, doit par conſéquent être égale au nombre ſupérieur, ou au tout.

PARAGRAPHE II.

De la Multiplication & de la Diviſion.

DÉFINITIONS.

I.

35. Si les nombres dont il faut trouver la ſomme, étoient tous les mêmes ; *par ex :* 4, 4, 4, au lieu d'écrire le chiffre 4, trois fois, pour avoir $4+4+4=12$, il ſera plus court de ne l'écrire qu'une ſeule fois, & de mettre au-deſſous de 4 le chiffre 3, pour marquer que le premier doit être pris trois fois : or 4 pris trois fois donne le même réſultat, ſçavoir, 12 ; & alors l'opération s'appelle *Multiplication ;* le premier nombre s'appelle *Multiplicande ;* le ſecond, *Multiplicateur ;* & le troiſiéme, *Produit.*

II.

36. Multiplier, c'eſt donc prendre ou ajouter une quantité qu'on appelle *Multiplicande*, autant de fois qu'il y a d'unités dans une autre quantité, qu'on nomme *Multiplicateur*, pour avoir un réſultat, qu'on appelle produit ; *par ex :* ſi l'on multiplie 2 par 3, l'on aura 6 pour réſultat ou produit, ce qui s'exprime plus briévement de cette maniere, $2 \times 3 = 6$, c'eſt-à-dire, 2 *par* 3 *égal à* 6.

Corollaire.

37. Il ſuit de cette définition, que le produit contient le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient l'unité ; & par conſéquent ſi le multiplicateur eſt égal à l'unité, le produit

ſera égal au multiplicande ; ſi le multiplicateur eſt plus grand que l'unité, le produit ſera plus grand que le multiplicande ; & ſi le multiplicateur eſt plus petit que l'unité, le produit ſera plus petit que le multiplicande ; *par ex :* on aura $2 \times 3 = 6$; $2 \times 1 = 2$; $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

PROBLÊME I.

38. *Faire la Multiplication, c'eſt-à-dire, chercher le Produit d'un Nombre par un autre, lorſque le Multiplicateur eſt plus grand que l'unité.*

SOLUTION. Ou le multiplicande & le multiplicateur ſont tous les deux des nombres ſimples ; ou l'un des deux eſt un nombre compoſé, & l'autre un nombre ſimple ; ou bien le multiplicande & le multiplicateur ſont tous les deux des nombres compoſés.

Premier Cas.

39. Si le multiplicande & le multiplicateur ſont tous les deux des nombres ſimples, il n'y a nulle difficulté ; *par ex :* $4 \times 3 = 12$; $5 \times 4 = 20$. Pour trouver tout d'un coup le produit de deux nombres ſimples, on peut s'aider de la table ſuivante, qui contient les produits de chaque nombre ſimple par tous les autres.

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

C D

Car dans cette table tous les nombres ſimples étant à côté les uns des autres dans la ligne AB, & au-deſſous les uns des autres dans la ligne AC, ſi vous voulez multiplier un nombre; *par ex:* 7 pris dans la ligne AC, par un autre nombre 6, pris dans la ligne AB, vous en trouverez le produit 42 dans la caſe qui répondra tant au chiffre ſupérieur 6, qu'au nombre collatéral 7.

Second Cas.

40. Si des deux nombres que l'on multiplie, l'un étoit un nombre composé, & l'autre un nombre ſimple, ſi, *par ex:* le multiplicande eſt un nombre composé & le multiplicateur un nombre ſimple, il faudra multiplier ſucceſſivement les unités, les dixaines, les centaines, &c. du multiplicande par le multiplicateur: comme on va le voir.

Multiplicande,	3421
Multiplicateur,	3
Produit	10263

Je dis 3 fois 1 font 3, j'écris 3 ſous le 3; enſuite 3 fois 2 ſont 6, j'écris 6 ſous le 2; trois fois 4 font 12, j'écris 2 ſous le 4, & retient 1; 3 fois 3 font 9 & 1 de retenu font 10, que j'écris en mettant le o ſous le 3, & avançant la dixaine.

Or ce produit contenant le produit des unités, des dixaines, &c. du multiplicande par le multiplicateur, eſt par conſéquent le véritable produit.

Si le multiplicande étoit un nombre ſimple, & le multiplicateur un nombre composé, on feroit du multiplicateur le multiplicande, & du multiplicande le multiplicateur, & on opéreroit comme ci-deſſus. En effet, il eſt indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4; 2 par 15, ou 15 par 2; car le réſultat ſera toujours le même, puiſque $3 \times 4 = 12$, auſſi bien que $4 \times 3 = 12$.

Troiſiéme Cas.

41. Si le multiplicande & le multiplicateur ſont des nombres compoſés, il faudra multiplier tout le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur; ſavoir, par les unités, par les dixaines, par les centaines, &c. du multiplicateur: or le multiplicande multiplié par les unités du multiplicateur, donnera un produit d'*unités*; multiplié par les dixaines du multiplicateur, donnera un produit de *dixaines*; multiplié par les centaines du multiplicateur, donnera un produit de *centaines*, & ainſi de ſuite: c'eſt pourquoi l'on aura différens produits d'*unités*, de *dixaines*, de *centaines*, &c. qu'il faudra écrire les uns ſous les autres, obſervant de garder les rangs propres à chaque ordre; la ſomme de ces produits partiels donnera le produit total; *par ex :*

		234
		125
Produit	des unités,	1170
	des dixaines,	468
	des centaines,	234
Produit total,		29250

Commencez par le premier chiffre du multiplicateur, & vous direz 5 fois 4 font 20, écrivez 0 ſous le 5, & retenez 2; 5 fois 3 font 15, & 2 de retenus font 17, écrivez 7, & retenez 1; 5 fois 2 font 10, & 1 de retenu font 11, & vous aurez 1170, qui ſera le produit des unités. Vous paſſerez au ſecond chiffre 2 du multiplicateur, & vous direz 2 fois 4 font 8, qu'il faut avancer d'un rang ſur la gauche, parce que le multiplicateur 2 étant au rang des dixaines, le produit 8 eſt un produit de dixaines. Continuez à multiplier les autres chiffres du multiplicande par ce chiffre 2 du multiplicateur, & vous aurez 468 pour produit des dixaines. Paſſez enſuite au troiſiéme chiffre 1 du multiplicateur, & dites 1 fois 4 font 4, que vous reculerez encore d'un rang vers la gauche pour le mettre au rang des centaines; continuez à multiplier les autres chiffres du multiplicande, & vous aurez 234 pour produit des centaines. Ajoutez ces trois produits, & vous aurez le produit total.

Corollaire.

42. Pour multiplier tout d'un coup un nombre quelconque; *par ex :* 24 par 10, il n'y a qu'à lui ajouter un zero; ce qui fait $24 \times 10 = 240$: pour le multiplier par 100, il n'y a qu'à lui ajouter deux zero, ce qui fait $24 \times 100 = 2400$. En un mot pour multiplier tout d'un coup par un nombre *décimal*, il n'y a qu'à ajouter au multiplicande autant de zero qu'il s'en trouve dans le nombre décimal: car ajoutant un zero, vous rendez le multiplicande dix fois plus grand, ou vous le multipliez par 10; ajoutant deux zero, vous rendez le multiplicande cent fois plus grand, ou vous le multipliez par 100: ce qui eſt fondé ſur la valeur des chiffres, laquelle augmente en proportion décuple d'un rang à un autre. Pareillement toutes les fois qu'il ſe trouve des zero à la fin, ſoit du multiplicande, ſoit du multiplicateur, ſoit de l'un & de l'autre en même tems, on peut abréger l'opération en multipliant les chiffres poſitifs du multiplicande & du multiplicateur les uns par les autres, & en écrivant à la fin du produit tous les zero qui ſe trouveront à la fin du multiplicande & du multiplicateur.

PROBLÊME II.

43. *Faire la Multiplication, lorſque le Multiplicateur eſt égal à l'unité.*

SOLUTION. Il n'y a nulle difficulté: car le produit eſt alors toujours égal au multiplicande (37): l'on a donc $24 \times 1 = 24$; $35 \times 1 = 35$, & ainſi du reſte.

PROBLÊME III.

44. *Faire la Multiplication, lorſque le multiplicateur eſt plus petit que l'unité.*

SOLUTION. Lorſque le multiplicateur eſt plus petit que l'unité, le produit doit être autant de fois plus petit par rapport au multiplicande, que le multiplicateur eſt plus petit par rapport à l'unité (37); *par ex:* $12 \times \frac{1}{2} = 6$: $12 \times \frac{1}{3} = 4$; $12 \times \frac{1}{4} = 3$.

Corollaire.

45. Dans les exemples ci-deſſus pour avoir le produit de 12 par $\frac{1}{2}$, par $\frac{1}{3}$, par $\frac{1}{4}$, on a pris la moitié, le tiers, le quart du multiplicande; c'eſt-à-dire que l'on a réellement diviſé 12 par les nombres 2, 3, 4: on voit donc que lorſque le multiplicateur eſt une fraction qui a l'unité pour numérateur, on trouvera tout d'un coup le produit, en diviſant le multiplicande par le dénominateur de la fraction.

DÉFINITIONS.

I.

46. Si d'un nombre donné il falloit retrancher un même nombre pluſieurs fois; *par ex:* ſi de 8 il falloit retrancher 2 autant de fois qu'il eſt poſſible de le faire, en faiſant $8 - 2 = 6$; $6 - 2 = 4$; $4 - 2 = 2$; $2 - 2 = 0$: on verroit que 2 peut être retranché de 8, ou que 2 eſt contenu dans 8 quatre fois, & cette opération ſeroit une *ſouſtraction* répétée quatre fois. Or il eſt plus court de demander tout d'un coup, en 8 combien de fois eſt contenu 2? On trouve qu'il y eſt contenu quatre fois, ce qui s'exprime d'une maniere plus abrégée de cette façon, $\frac{8}{2} = 4$, c'eſt-à-dire 8 *diviſé par* 2 *égal à* 4, & cette opération abrégée s'appelle *Diviſion;* le premier nombre 8 s'appelle *Dividende;* le ſecond 2 s'appelle *Diviſeur;* & le réſultat 4 ſe nomme *Quotient.*

II.

I I.

47. La diviſion eſt donc une opération dans laquelle on cherche combien de fois un nombre, qu'on appelle *Diviſeur*, eſt contenu dans un autre qu'on nomme *Dividende*, & ce *combien de fois* eſt exprimé par un troiſiéme nombre qui s'appelle *Quotient*.

Corollaire I.

48. Il s'enſuit que, comme la multiplication n'eſt qu'une addition pluſieurs fois réitérée, de même la diviſion n'eſt qu'une souſtraction pluſieurs fois répétée. Comme dans la multiplication on ajoute le multiplicande à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur; de même dans la diviſion on retranche le diviſeur du dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient.

Corollaire II.

49. Comme le diviſeur eſt contenu dans le dividende autant de fois que l'unité eſt contenue dans le quotient, de même le quotient eſt contenu dans le dividende autant de fois que l'unité eſt contenue dans le diviſeur: c'eſt pourquoi ſi le diviſeur eſt plus grand que l'unité, le quotient ſera plus petit que le dividende: *par ex:* $\frac{12}{3} = 4$; ſi le diviſeur eſt égal à l'unité, le quotient ſera égal au dividende; *par ex:* $\frac{12}{1} = 12$; ſi le diviſeur eſt plus petit que l'unité, le quotient ſera plus grand que le dividende, $\frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$.

PROBLÊME I.

50. *Faire une Diviſion, c'eſt-à-dire, chercher le Quotient d'un nombre diviſé par un autre, lorſque le Diviſeur eſt plus grand que l'unité.*

SOLUTION. Ou le dividende & le diviſeur ſont tous les deux des nombres ſimples; ou le dividende eſt un nombre composé, & le diviſeur un nombre ſimple; ou le dividende eſt un nombre ſimple, & le diviſeur un nombre composé; ou le dividende & le diviſeur ſont tous les deux des nombres composés.

Premier Cas.

51. Si le dividende & le diviſeur ſont des nombres ſimples, il n'y a nulle difficulté; *par ex :* $\frac{8}{4}=2$; $\frac{4}{2}=2$, comme il eſt évident.

Second Cas.

52. Si le dividende eſt un nombre composé, & le diviſeur un nombre ſimple.

I°. Prenez le premier chiffre du dividende à gauche, ou les deux premiers chiffres du dividende, (ſi le diviſeur ne ſe trouve point contenu dans le premier,) & ce ſera un premier *membre* de diviſion que vous diviſerez par le diviſeur donné, ſous lequel écrivez le quotient.

II°. Multipliez le chiffre trouvé au quotient par le diviſeur, & retranchez le produit du membre de diviſion, afin de voir ſi le diviſeur eſt contenu un certain nombre de fois dans le dividende ſans reſte, ou avec un reſte: s'il y a un reſte, il ſera ou plus grand que le diviſeur, ou égal au diviſeur, ou plus petit que le diviſeur: s'il eſt plus grand que le diviſeur, ou s'il eſt égal au diviſeur, c'eſt une marque que vous n'avez pas retranché le diviſeur du membre de diviſion autant de fois qu'il y étoit contenu, & par conſéquent, que le chiffre écrit au quotient eſt trop petit, & qu'il faut l'augmenter: ſi le reſte eſt plus petit que le diviſeur, abaiſſez à côté de ce reſte le chiffre ſuivant du dividende, lequel augmenté de ce reſte, donnera le ſecond *membre* de diviſion, ſur lequel vous opérerez comme ſur le premier.

III°. Continuez de même l'opération, en diviſant ſucceſſivement chaque chiffre du dividende, & lorſque le chiffre à diviſer ſe trouvera plus petit que le diviſeur, mettez zero au quotient, afin de conſerver aux chiffres qui le composent, leur rang & leur valeur; voici un exemple:

Dividende,	3748	4	Diviſeur.
	36	937	Quotient.
	14		
	12		
	28		

Dites en 3 combien de fois 4; il n'y eſt pas contenu : mais en 37 combien de fois 4? il y eſt 9 fois; écrivez 9 au quotient, & multipliez 9 par 4, ce qui donne le produit 36 que vous écrirez ſous 37; puis ôtez 36 de 37, reſte 1, à côté duquel abaiſſez le chiffre 4, qui augmenté de ce reſte fera 14, & dites en 14 combien de fois 4? 3 fois; écrivez 3 au quotient, & multipliez 3 par 4, ce qui fait 12, que vous écrirez ſous 14: ôtez 12 de 14, reſte 2, & à côté de 2 abaiſſez le chiffre ſuivant 8, ce qui fera 28, lequel diviſé par 4 donnera 7 juſte au quotient, qui ſera 937.

Troiſiéme Cas.

53. Si le dividende eſt un nombre ſimple & le diviſeur un nombre composé, la diviſion ne peut point s'effectuer; on ne peut dans ce cas que l'indiquer, & cette diviſion indiquée donne alors une *fraction*, laquelle eſt ſoumiſe à des regles particulieres dont nous parlerons dans la ſuite.

Quatriéme Cas.

54. Si le dividende & le diviſeur ſont tous les deux des nombres composés, il faut faire la diviſion par parties, comme il ſuit.

I°. Il faut prendre dans les premiers chiffres du dividende à gauche un nombre dans lequel ſoit contenu le diviſeur, & ce ſera le premier *membre* de diviſion.

II°. Il faut diviſer ce premier membre par le diviſeur, ou pour abréger, par le premier caractere ou chiffre du diviſeur, & l'on aura un quotient, lequel peut être ou trop grand, ou trop petit, ce que l'on connoîtra par l'opération ſuivante.

III°. Il faut multiplier le quotient trouvé par le diviſeur, comme dans le ſecond cas, & ſouſtraire le produit du premier membre de diviſion. Or ſi ce produit ne peut pas être ſouſtrait du membre de diviſion, c'eſt une marque que le quotient eſt trop grand, & par conſéquent il faut le diminuer d'une unité, & le diminuer toujours d'une unité, juſqu'à ce que cette ſouſtraction devienne poſſible. Si ce produit peut être ſouſtrait du membre de diviſion, & qu'il n'y ait point de reſte, alors le quotient trouvé eſt juſte, & il faut l'écrire; s'il ſe trouve un reſte, & qu'il ſoit plus petit que le diviſeur, le chiffre trouvé au quotient eſt encore bon, & il faut l'écrire : mais ſi le reſte étoit égal au diviſeur, ou plus grand que le diviſeur, ce ſeroit une marque, comme nous l'avons déjà dit, que le diviſeur ſeroit encore contenu dans le dividende, & qu'il en pourroit être encore retranché, & par conſéquent que le chiffre trouvé pour le quotient ſeroit trop petit; il faudroit donc l'augmenter d'une unité, & l'augmenter toujours d'une unité, juſqu'à ce que le reſte, s'il s'en trouve encore après la ſouſtraction, ſoit plus petit que le diviſeur.

IV°. Lorſqu'après la ſouſtraction il ſe trouve un reſte, il faut ajouter ce reſte au chiffre ſuivant du dividende, ou plus commodément, il faut écrire le chiffre ſuivant du dividende à côté de ce reſte, & l'on aura un *ſecond membre* de diviſion, ſur lequel il faut opérer comme ſur le premier, & ainſi de ſuite.

V°. Il faut obſerver de mettre o au quotient toutes les fois que le diviſeur ne ſe trouve pas contenu dans le membre de diviſion, afin de conſerver l'ordre & le rang que doivent tenir les chiffres du quotient.

VI°. Lorſque le quotient n'eſt pas juſte, mais qu'il ſe trouve un reſte après la diviſion, il faut écrire ce reſte à côté du quotient, & le diviſeur au-deſſous de ce reſte, ce qui donne une fraction ou une diviſion indiquée.

Exemple I.

Dividende,	8428	24	Diviſeur.
Produit,	72	$351 + \frac{4}{24}$	Quotient.
Reſte,	12		
Second memb.	122		
Produit,	120		
Reſte,	2		
Troiſiéme memb.	28		
Produit,	24		
Reſte,	4		

Exemple II.

Je veux diviſer 56034030 par 30, j'opere en ſuivant la méthode précédente.

	56034030	30
Produit,	30	1867801
Reſte,	26	
II. Memb.	260	
Produit,	240	
Reſte,	20	
III. Memb.	203	
Produit,	180	
Reſte,	23	
IV. Memb.	234	
Produit,	210	
Reſte,	24	
V. Memb.	240	
Produit,	240	
Reſte,	0	
VI. Memb.	030	
Produit,	30	
Reſte,	0	

Dans le premier exemple, le diviſeur 24 contenant deux chiffres, il faut prendre pour premier *membre* de diviſion 84, & dire, en 8 combien de fois 2? Il y eſt quatre fois; mais le chiffre 4 multiplié par le diviſeur 24, donne le produit 96, qui ne peut être ſouſtrait de 84, & par conſéquent il eſt trop grand: il faut donc le diminuer d'une unité, & prendre 3, lequel multiplié par le diviſeur, donne le produit 72, qui peut être ſouſtrait de 84; c'eſt pourquoi j'écris 3 au quotient, & 72 ſous 84: je ſouſtrais 72 de 84, il reſte 12 que j'écris au-deſſous, & à côté de ce reſte j'abaiſſe le chiffre ſuivant 2 du dividende, ce qui donne 122 pour ſecond *membre* de diviſion. Je dis donc en 12 combien de fois 2? 6 fois. Mais pour la même raiſon que ci-deſſus, je trouve que 6 eſt trop grand, mais que 5 eſt bon: j'écris donc 5 au quotient, & je multiplie le diviſeur par ce chiffre 5, ce qui donne le produit 120, que j'écris au-deſſous, & que je ſouſtrais de 122; il reſte 2, à côté duquel ayant abaiſſé le dernier chiffre 8, j'ai 28 pour troiſiéme membre de diviſion, & continuant à opérer comme ci-deſſus, je trouve pour quotient le nombre 351, avec le reſte 4, qui ne pouvant être diviſé par 24, donne la fraction $\frac{4}{24}$.

Dans le ſecond exemple, ayant pris pour premier membre de diviſion les deux premiers chiffres du dividende, je dis, 3 en 5 ſe trouve une fois; j'écris 1 au quotient, & je multiplie 1 par 30, ce qui donne 30, lequel ſouſtrait de 56, laiſſe le reſte 26, à côté duquel j'abaiſſe 0, & j'ai 260 pour ſecond membre de diviſion. Je dis donc en 26 combien de fois 3? huit fois: je multiplie 8 par 30, & j'ai le produit 240, lequel retranché de 260, donne le reſte 20: à côté de 20 j'abaiſſe 3, & je dis en 20 combien de fois 3? Je trouve 6, qui multiplié par 30, donne 180: 180 retranché de 203, reſte 23, à côté duquel j'abaiſſe 4, & je dis 3 en 23 ſe trouve 7 fois, or 7 multiplié par 30 donne 210: je retranche 210 de 234, reste 24, à côté duquel j'abaisse 0, & je dis 3 en 24 se trouve 8 fois, dont le produit par 30 est 240, qui soustrait de 240, ne laisse rien. J'abaisse donc 3, & je dis 3 ne peut pas être divisé par 30, je mets donc un 0 au quotient, & à côté de 3 j'abaisse 0, ce qui donne 30 pour dernier membre de division, & je dis 3 se trouve une fois dans 3, & 1 multiplié par 30 donne 30, que je soustrais de 30, il reste 0, & l'opération est finie.

Remarque I.

55. Quand il se trouve trois chiffres au quotient, le produit du diviseur par le premier chiffre trouvé au quotient est un produit de centaines; & c'est pour cette raison que dans le premier exemple, le premier produit 72 doit être écrit sous le membre 84, de façon que le dernier chiffre 2 de 72 se trouve au rang des centaines; pareillement le produit du diviseur par le second chiffre trouvé au quotient est un produit de dixaines; & c'est pour cette raison que dans le second produit 120 le dernier caractere 0 doit être au rang des dixaines, & ainsi du reste. Il faut faire une remarque toute semblable, si le quotient étoit composé de 4, de 5, de 6, &c. chiffres.

Remarque II.

56. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient pour chaque membre de division: car si l'on pouvoit mettre 10 au quotient, il s'ensuivroit que le membre de division seroit dix fois plus grand que le diviseur: or le membre de division sur lequel on opere, ne peut jamais être dix fois plus grand que le diviseur: s'il l'étoit, & si l'on avoit *par ex:* pour membre de division 3250, lorsqu'on a pour diviseur 325, retranchez le zero du membre de division, afin de le rendre dix fois plus petit; donc en ce cas vous le

rendez précisément égal au diviseur, & vous pourrez par conséquent le diviser par ce diviseur 325 : donc vous ne le pouvez prendre pour membre de division, qu'après avoir retranché le zero ; donc le membre de division ne peut jamais être dix fois plus grand que le diviseur, ou ce qui revient au même, vous ne pouvez jamais écrire 10 au quotient.

Corollaire I.

57. Il y a toujours autant de caracteres ou chiffres au quotient, qu'il y a de membres de division ; car chaque membre donne au quotient un chiffre ou un o.

Corollaire II.

58. Le diviseur multiplié par le quotient est égal au dividende : car on a retranché le diviseur du dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient ; donc si l'on prend le diviseur autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, c'est-à-dire, si l'on multiplie le diviseur par le quotient, on aura un produit égal au dividende.

C'est pourquoi la multiplication & la division se servent réciproquement de preuve : car si l'on veut faire voir que $\frac{8}{4}=2$, il n'y a qu'à faire voir que $4 \times 2 = 8$: car de ce que le diviseur a été retranché du dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, il s'ensuit que le diviseur pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, doit donner le dividende.

Corollaire III.

59. Pour diviser tout d'un coup par un nombre décimal, il n'y a qu'à retrancher dans le dividende sur la fin autant de caracteres ou chiffres qu'il y a de zero dans le diviseur décimal ; *par ex :* $\frac{240}{10}=24$; $\frac{2400}{100}=24$; & $\frac{345}{10}=34+\frac{5}{10}$; & ainsi du reste. Car lorsque vous retranchez un chiffre, vous rendez le nombre 10 fois plus petit,

ou vous le divisez par 10 ; lorsque vous retranchez deux chiffres, vous le rendez 100 fois plus petit, ou vous le divisez par 100 ; ce qui est toujours fondé sur la valeur des chiffres, laquelle croît en proportion décuple.

Remarquez que lorsque les chiffres retranchés sont positifs, la division n'est pas juste, mais que l'on a un reste exprimé par les chiffres positifs retranchés ; *par ex :* $\frac{2473}{100} = 24$, avec le reste 73 que l'on ne peut point diviser par 100, mais dont on doit faire une fraction, comme nous l'allons dire ci-après.

PROBLÊME II.

60. *Faire la Division, lorsque le Diviseur est l'unité.*

SOLUTION. Il n'y a nulle difficulté ; le quotient dans ce cas est égal au dividende ; car l'unité qui multiplie ou qui divise une quantité, ne l'augmente, ni ne la diminue point : $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{45}{1} = 45$, & ainsi du reste.

PROBLÊME III.

61. *Faire la Division, lorsque le Diviseur est plus petit que l'unité.*

SOLUTION. Le quotient doit être dans ce cas autant de fois plus grand par rapport au dividende, que le diviseur est plus petit par rapport à l'unité, suivant le principe énoncé ci-dessus (49). Ainsi 24 divisé par $\frac{1}{2}$ donne 48 ; divisé par $\frac{1}{3}$ donne 72 ; divisé par $\frac{1}{4}$ donne 96.

Corollaire.

62. On voit donc par les exemples ci-dessus, que lorsque le diviseur est une fraction dont le numérateur est l'unité, on trouvera tout d'un coup le quotient, en multipliant le dividende par le dénominateur de la fraction ; de même que dans la multiplication, lorsque le multiplicateur est une fraction, on trouve tout d'un coup le produit, en divisant le multiplicande par le dénominateur de la fraction.

Remarque.

63. La diviſion n'eſt pas toujours juſte, mais ſouvent elle laiſſe un reſte que l'on ne peut plus diviſer par le diviſeur, *par ex :* ſi l'on avoit à diviſer 19 par 3, le quotient ſeroit 6 avec le reſte 1, qui ne peut plus être diviſé par 3. Dans ce cas on doit écrire à côté du quotient ce reſte, & en indiquer la diviſion par le diviſeur, ce qui donnera une fraction jointe au quotient, comme il eſt aiſé de le voir $\frac{19}{3} = 6 + \frac{1}{3}$, d'où l'on voit que les fractions prennent leur origine dans les diviſions qui ne peuvent pas ſe faire exactement & ſans reſte.

PARAGRAPHE III.

De l'Exaltation & de l'Extraction.

DÉFINITIONS.

I.

64. *L'exaltation* eſt une multiplication dans laquelle le multiplicande & le multiplicateur ſont un même nombre, ou, ce qui eſt le même, dans laquelle on multiplie un nombre par lui-même: & alors l'opération s'appelle *Exaltation ;* le produit ſe nomme *Puiſſance ;* & le nombre qui multiplié par lui-même a donné cette puiſſance s'appelle *Racine.*

II.

65. Le produit d'un nombre multiplié par l'unité, eſt regardé comme premiere Puiſſance & premiere Racine; *par ex :* $3 \times 1 = 3$, eſt la premiere puiſſance & la premiere racine du nombre 3.

III.

66. Le produit d'un nombre multiplié une fois par lui-même s'appelle ſeconde Puiſſance, ou *Quarré*, & ſa racine ſe nomme Racine ſeconde, ou *quarrée ; par ex :* $3 \times 3 = 9$, donne 9 pour la

seconde puissance, ou *Quarré*, & 3 pour la racine seconde, ou *quarrée*.

IV.

67. Le produit d'un nombre multiplié deux fois par lui-même, s'appelle troisiéme Puissance, ou *Cube*, & sa racine s'appelle Racine troisiéme, ou *cubique; par ex*: $3 \times 3 \times 3 = 27$ donne 27 pour la troisiéme puissance, ou le *Cube*, & 3 pour la racine troisiéme, ou *cubique*.

V.

68. Le produit d'un nombre multiplié trois fois par lui-même s'appelle quatriéme Puissance, ou *Quarré-quarré*; la racine de cette puissance s'appelle Racine quatriéme, ou *quarrée-quarrée; par ex*: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ donne 81 pour la quatriéme puissance, ou le *Quarré-quarré*, & 3 pour la racine quatriéme, ou *quarrée-quarrée*: il en est de même pour les autres puissances: 5^e, 6^e, 7^e, &c.

VI.

69. On appelle *Exposant* de la puissance, ou de la racine, le nombre qui exprime le degré de la puissance ou de la racine. L'exposant de la premiere puissance & de la premiere racine est 1; celui de la seconde puissance & de la seconde racine est 2; celui de la troisiéme puissance & de la troisiéme racine est 3, & ainsi du reste.

VII.

70. *L'extraction* est une division dans laquelle le diviseur & le quotient se trouvent être un même nombre, comme il arrive, lorsque *par ex*: on divise 9 par 3; car $\frac{9}{3} = 3$. pareillement lorsqu'après avoir divisé le dividende, il est encore possible de diviser le premier, le second, le troisiéme, &c. quotient par le même diviseur, & que le dernier quotient qui résulte est le même nombre que le diviseur, comme il arrive; *par ex*: en divisant 64 par 4, ou 125 par 5, l'opération

s'appelle encore *Extraction* ; & dans les deux cas le dividende s'appelle *Puissance* ; & le diviseur, ainsi que le quotient ou le dernier quotient, se nomment *Racines*.

L'extraction est donc une opération par laquelle on cherche un nombre qui, multiplié un certain nombre de fois par lui-même, donne la puissance proposée.

Corollaire I.

71. Il suit en général de ce que nous avons dit que, pour élever un nombre à une puissance quelconque, il n'y aura qu'à le multiplier par lui-même autant de fois moins une, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance proposée; pour élever le nombre 3 à la troisiéme puissance, il n'y a qu'à le multiplier trois fois moins une, ou deux fois par lui-même, & l'on aura $3 \times 3 \times 3 = 27$. En effet nous avons dit que la troisiéme puissance d'un nombre étoit le produit de ce nombre multiplié deux fois par lui-même.

Corollaire II.

72. Puisqu'une puissance quelconque, *par ex :* la troisiéme puissance 27 est le produit d'un multiplicande 3 multiplié deux fois par un multiplicateur 3; il s'ensuit que la racine troisiéme de la puissance 27 doit être un quotient 3 du dividende 27 divisé deux fois par un diviseur 3.

Corollaire III.

73. Quand on propose une puissance, *par ex :* 27, pour en chercher la racine, cette racine n'est pas aisée à trouver tout d'un coup; elle résulte d'une division dans laquelle on connoît, il est vrai, le dividende qui est la puissance proposée; mais on ne connoît pas le diviseur, parce que ce diviseur est le même nombre que le quotient que l'on cherche, & qui est inconnu.

C'est pourquoi la régle générale pour extraire la racine quelconque d'une puiſſance donnée, eſt de chercher un nombre tel, qu'étant multiplié par lui-même autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de la puiſſance propoſée, ou de la racine cherchée, il devienne égal à cette puiſſance, ou du moins en approche le plus près qu'il ſoit poſſible.

Nous donnerons dans la ſuite des regles & des méthodes pour trouver les puiſſances, & extraire les racines des nombres & des quantités quelconques.

Corollaire IV.

74. Il s'enſuit que l'exaltation & l'extraction ſont des opérations oppoſées, & qui ſe ſervent mutuellement de preuve; car ſi l'on veut s'aſſurer, *par ex:* que 3 eſt la racine quarrée de 9, il n'y a qu'à faire voir que 9 eſt le quarré de 3; car, puiſque $3 \times 3 = 9$, il ſuit que $\frac{9}{3} = 3$.

ARTICLE II.

Des opérations ſur les Fractions.

I°. L'*Unité* eſt un tout diviſible en pluſieurs parties, mais regardé comme ſimple & non encore diviſé. Le *nombre entier* eſt un aſſemblage de pluſieurs unités de même eſpece; la *fraction* eſt ou une partie de l'unité, comme $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. ou un aſſemblage de parties d'une même unité, comme $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. En effet, ſi l'on ſuppoſe l'unité diviſée en trois parties égales, la fraction $\frac{2}{3}$ eſt un aſſemblage de deux de ces parties; ſi l'on ſuppoſe l'unité diviſée en quatre parties égales, la fraction $\frac{3}{4}$ fera l'aſſemblage de trois de ces parties.

II°. Les fractions peuvent être conſidérées ou en général, ou dans leurs différentes eſpéces; on appelle fraction en général toute quantité qui eſt ou partie de l'unité, ou aſſemblage de parties de l'unité. Les différentes eſpéces de fractions ſont les parties de différentes unités, comme du cercle, de la toiſe, de l'heure, &c. ſoit qu'elles ſoient repréſentées ſous l'expreſſion de *fractions*; ou ſous celle d'*entiers*.

PARAGRAPHE I.

Des Fractions conſidérées en général.

I°. La *fraction* eſt une diviſion ſeulement indiquée : ce que l'on appelle *dividende* & *diviſeur* dans la diviſion, s'appelle *numérateur* & *dénominateur* dans la fraction. Comme la diviſion donne un réſultat que l'on appelle *quotient*, de même la fraction donne un réſultat que l'on appelle *valeur* ou *expoſant* de la fraction.

II°. Dans la diviſion on trouve le *quotient* en diviſant le dividende par le diviſeur, ce qui eſt toujours poſſible, parce que le dividende eſt plus grand que le diviſeur; de même dans la fraction on trouve la *valeur* en diviſant le numérateur par le dénominateur, lorſque la diviſion eſt poſſible; mais lorſque la diviſion n'eſt pas poſſible, comme il arrive dans toute fraction proprement dite, où le numérateur eſt toujours plus petit que le dénominateur, on trouve alors la *valeur*, ou l'expoſant de la fraction, en réduiſant la fraction à ſes plus ſimples termes, comme nous le dirons ci-après.

III°. Les fractions conſidérées en général ſont ſuſceptibles de toutes les opérations que l'on fait ſur les nombres entiers. Mais pour pouvoir être aſſujetties au calcul, elles ont quelquefois beſoin d'être préparées par des opérations qui leur ſont propres, & que l'on appelle par cette raiſon préliminaires.

Des opérations préliminaires ſur les Fractions.

Les opérations préliminaires ſur les fractions ſont différens changemens qu'on leur fait ſubir, ſans en changer la valeur, pour en rendre le calcul & la comparaiſon plus facile & plus commode; ces opérations s'appellent *transformations*.

PRINCIPE I.

75. La valeur d'une fraction ne change pas ; ſoit qu'on multiplie, ſoit qu'on diviſe ſes deux termes par une même troiſiéme quantité : ſi vous multipliez, *par ex :* les deux termes de la fraction $\frac{1}{2}$ par 3, vous aurez la fraction $\frac{3}{6}$, qui eſt la même choſe que $\frac{1}{2}$: pareillement, ſi vous diviſez les deux termes de la fraction $\frac{3}{6}$ par 3, vous aurez la fraction $\frac{1}{2}$, qui eſt la même choſe que $\frac{3}{6}$.

PRINCIPE II.

76. Une fraction eſt d'autant plus grande ou plus petite, qu'elle approche plus ou moins de l'unité, ou qu'elle contient plus ou moins de parties de l'unité dont elle eſt fraction.

Corollaire.

77. D'où il ſuit que, lorſque deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande eſt celle dont le numérateur eſt plus grand, parce qu'elle contient plus de parties de l'unité, *par ex :* $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$; & lorſqu'elles ont le même numérateur, la plus grande eſt celle dont le dénominateur eſt plus petit : *par ex :* $\frac{4}{5} > \frac{4}{7}$; en effet plus le dénominateur eſt petit, le numérateur reſtant le même, plus il eſt contenu ou approche d'être contenu dans le numérateur, & par conſéquent la fraction approche plus d'être égale à l'unité.

REGLE I.

La premiere eſpéce de transformation ſe fait par le changement, ou d'une fraction en une autre fraction, ou d'un entier en fraction, ou d'une fraction en entier.

78. *Premier Cas.* On peut transformer une fraction en une autre fraction.

I°. En multipliant par une même quantité le numérateur & le dénominateur de la fraction ; *par ex :* au lieu de la fraction $\frac{1}{2}$, on peut avoir, en ſe ſervant du multiplicateur 2, les fractions

$\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{16}{32}$, &c. lesquelles ont différentes expressions; mais conservent la même valeur (75).

II°. En divisant par une même quantité le numérateur & le dénominateur de la fraction, lorsque cette division se peut faire sans reste; *par ex :* au lieu de la fraction $\frac{16}{32}$, on peut avoir, en se servant du diviseur 2, les fractions $\frac{8}{16}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$. Cette opération réduit la fraction à une expression plus simple, & par cette raison s'appelle *réduction* des fractions *à de plus simples termes.*

79. *Second Cas.* On transforme un entier en fraction en multipliant & divisant l'entier par le dénominateur que l'on veut donner à la fraction; *par ex :* on aura $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8}$, &c. Or l'entier sous ces différentes expressions conserve toujours la même valeur; parce qu'étant multiplié & divisé par une même quantité, la division détruit ce qu'avoit fait la multiplication, & réciproquement.

80. *Troisiéme Cas.* On transforme une fraction en entier, en divisant le numérateur par le dénominateur, lorsque la division est possible; $\frac{8}{4} = 2$.

Corollaire.

81. On peut réduire tout d'un coup une fraction à ses plus *simples termes*, ou à la plus simple expression qu'il soit possible, en divisant le numérateur & le dénominateur de la fraction par leur plus grand commun diviseur; c'est-à-dire, par le plus grand nombre qui puisse diviser l'un & l'autre exactement & sans reste, *par ex :* divisant les deux termes de la fraction $\frac{4}{8}$ par leur plus grand commun diviseur qui est 4, elle deviendra $\frac{1}{2}$. Or une fraction ainsi réduite est la *valeur* ou l'*exposant* de la fraction qui étoit à réduire.

Regle II.

La seconde espéce de transformation se fait en réduisant les fractions, soit à un dénominateur commun, soit à un dénominateur quelconque.

82. *Premier Cas.* La réduction des fractions à un dénominateur commun se fait, en multipliant les termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre fraction, s'il n'y a que deux fractions ; ou par le produit des dénominateurs des autres fractions, s'il y en a plusieurs ; *par ex :* les fractions $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ se réduisent à $\frac{1\times4}{3\times4}=\frac{4}{12}$, & $\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{3}{12}$.

Le but & l'usage de cette réduction est de transformer les fractions en des quantités homogênes ou de même espèce, pour les rendre susceptibles de comparaison & de calcul. Car lorsque des fractions ont un même dénominateur elles sont entr'elles comme leur numérateurs ; & l'on peut ainsi supprimer leur dénominateur commun, en le sous-entendant, & opérer sur ces fractions de la même maniere que sur les entiers.

83. *Second Cas.* On réduit une fraction ; *par ex :* $\frac{1}{2}$ à un dénominateur quelconque, tel que 4 ; 1°. en multipliant les termes de la fraction par le dénominateur donné 4, ce qui donne $\frac{4}{8}$; 2°. en divisant ensuite les deux termes de la fraction nouvelle par le dénominateur 2 de la premiere fraction, ce qui donnera la fraction réduite $\frac{2}{4}$, dont le dénominateur est devenu 4.

Cette réduction s'appelle *évaluation*, & sert à évaluer les fractions en parties connues ; *par ex :* les fractions ou parties de livres en sols, ou en parties *vingtiémes*, qui sont des parties connues ; car le sol est la $\frac{1}{20}$ partie de la livre. C'est pourquoi étant donné ; *par ex :* les $\frac{3}{4}$ d'une livre, si je veux savoir combien cette fraction vaut de sols, ou de parties vingtiémes de la livre, je n'ai qu'à réduire la fraction $\frac{3}{4}$ au dénominateur 20 suivant la regle prescrite ci-dessus, & j'aurai la fraction réduite $\frac{15}{20}$ qui signifie quinze vingtiémes parties de la livre, ou quinze sols.

Corollaire.

84. De deux fractions dans lesquelles la diffé-

rence du numérateur au dénominateur eſt la même, la plus grande eſt celle qui eſt exprimée par de plus grands nombres; *par ex :* l'on a $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$. Car réduiſant au même dénominateur, ou aura $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, & $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$; or $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$.

Du Calcul des Fractions.

Le calcul des fractions conſiſte dans les opérations ordinaires d'addition & de ſouſtraction, de multiplication & de diviſion; d'exaltation, &c.

Regle I.

85. L'addition & la ſouſtraction des fractions ne ſouffrent aucune difficulté, lorſqu'elles ont le même dénominateur; il eſt évident que $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$; que $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}$; c'eſt-à-dire, que l'on trouve la ſomme ou la différence des fractions qui ſont de même dénomination, en prenant la ſomme ou la différence des numérateurs

Mais loſque les fractions ſont de différente dénomination; 1°. on doit les réduire à un même dénominateur; 2°. il faut prendre la ſomme ou la différence des numérateurs des fractions réduites; *par ex :* $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$.

Regle II.

86. La multiplication des fractions conſiſte à multiplier ou une fraction par une fraction, ou une fraction par un entier, ou un entier par une fraction.

I°. La multiplication d'une fraction par une autre fraction ſe fait *en multipliant les numérateurs par les numérateurs, & les dénominateurs par les dénominateurs; par ex :* $\frac{9}{3} \times \frac{4}{2} = \frac{9 \times 4}{3 \times 2} = \frac{36}{6} = 6$; car $\frac{9}{3} = 3$, & $\frac{4}{2} = 2$; or $3 \times 2 = 6$: pareillement on aura $\frac{3}{9} \times \frac{2}{4} = \frac{3 \times 2}{9 \times 4} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; car $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, & $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; or $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ par la raiſon contraire à ce que $3 \times 2 = 6$.

II°. Lorſqu'on multiplie une fraction par un entier; *par ex :* $\frac{2}{7}$ par 3, l'entier peut être regardé comme une fraction qui a pour dénominateur l'unité (78) ; ainsi l'on aura, en suivant le principe ci-dessus, $\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2}{7} \times \frac{3}{1} = \frac{2 \times 3}{7 \times 1} = \frac{6}{7}$: c'est-à-dire, que pour avoir le produit d'une fraction par un entier, il n'y a qu'à *multiplier le numérateur de la fraction par l'entier donné.*

III°. Si l'on multiplie un entier par une fraction, *par ex :* 3 par $\frac{2}{7}$, il est évident par ce qui vient d'être dit, que l'on aura $3 \times \frac{2}{7} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{1 \times 7} = \frac{6}{7}$: c'est-à-dire, qu'il faut *multiplier l'entier par le numérateur de la fraction, & conserver le même dénominateur.*

Corollaire.

87. Si le numérateur d'une fraction est plus grand que l'unité, la fraction pourra toujours être décomposée en deux facteurs, dont l'un sera un nombre entier, & l'autre une fraction; *par ex :* $\frac{2}{3}$, ou $\frac{2 \times 1}{3}$ sera la même chose que $\frac{2}{3} \times 1$, ou $\frac{1}{3} \times 2$; comme on le voit évidemment après ce qui a été dit (86). D'où il suit que ce sera la même chose de prendre les deux tiers d'un tout simple, ou le tiers d'un tout double; *par ex :* les deux tiers d'un écu, ou le tiers de deux écus, de même que pour avoir le produit $2 \times 3 = 6$, c'est la même chose de prendre le double de 3, ou le triple de 2.

Regle III.

88. La division des fractions consiste à diviser ou une fraction par une fraction, ou une fraction par un entier, ou un entier par une fraction.

I°. La division d'une fraction par une autre fraction se fait *en multipliant le numérateur de la premiere fraction par le dénominateur de la seconde, & le dénominateur de la premiere par le numérateur de la seconde ;* & on l'indique par cette marque X, que l'on interpose entre la fraction dividende & la fraction qui sert de diviseur, (ce qui s'appelle multiplier en *croix*, ou en *sautoir*) *par ex :* $\frac{12}{2}$ divisé par $\frac{6}{3}$, ou $\frac{12}{2}$ X $\frac{6}{3}$ donnera pour quotient $\frac{12 \times 3}{2 \times 6} = \frac{36}{12} = 3$: car

$\frac{12}{2}=6$, & $\frac{6}{3}=2$: or $\frac{6}{2}=3$. Pareillement $\frac{2}{12}$ diviſé par $\frac{3}{6}$, ou $\frac{2}{12} X \frac{3}{6}$ donnera pour quotient $\frac{2\times6}{12\times3}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$; car $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, & $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; or $\frac{1}{6} X \frac{1}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, par la raiſon contraire à ce que $\frac{6}{2}=3$.

II°. Si l'on veut diviſer une fraction par un entier, l'entier peut être regardé comme une fraction qui a pour dénominateur l'unité (79); ainſi en ſuivant le principe ci-deſſus, $\frac{4}{7}$ diviſé par 3 ſera $\frac{4}{7} X \frac{3}{1}=\frac{4}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{4\times1}{7\times3}=\frac{4}{21}$; c'eſt-à-dire, que pour diviſer une fraction par un entier, il n'y a qu'à *multiplier le dénominateur de la fraction par l'entier.*

III°. Si l'on diviſe un entier par une fraction, il eſt évident par ce qui vient d'être dit, que, *par ex :* 4 diviſé par $\frac{3}{5}$ ſera $\frac{4}{1} X \frac{3}{5}=\frac{4}{1}\times\frac{5}{3}=\frac{4\times5}{1\times3}=\frac{20}{3}$; c'eſt-à-dire, qu'on doit *multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction, & le diviſer par le numérateur.*

Regle IV.

89. L'exaltation d'une fraction à une puiſſance quelconque ſe fait, en élevant le numérateur & le dénominateur, chacun à la puiſſance propoſée; *par ex :* le quarré de $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{4}{9}$; car le quarré de $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{2\times3}=\frac{4}{9}$ (86) : pareillement le cube de $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$.

L'extraction des fractions ſe fait, en prenant la racine, tant du numérateur que du dénominateur; *par ex :* $\frac{2}{3}$ eſt la racine quarrée de $\frac{4}{9}$, & la racine cubique de $\frac{8}{27}$.

Corollaire.

90. Les fractions décroiſſent dans l'exaltation, & croiſſent dans l'extraction; c'eſt-à-dire, que dans les fractions la racine eſt plus grande que la puiſſance, au lieu que dans les nombres entiers la puiſſance eſt plus grande que la racine; *par ex :* la fraction $\frac{1}{2}$ eſt plus grande que ſon quarré $\frac{1}{4}$, que ſon cube $\frac{1}{8}$, &c. comme il eſt évident.

D'où l'on conclud qu'un nombre entier ne peut avoir pour racine une fraction : car une fraction racine eſt toujours plus grande que ſa puiſſance; or dans les nombres entiers la puiſſance au contraire eſt toujours plus grande que la racine.

NOMBRE II.

Des Fractions conſidérées dans leurs eſpéces.

91. Les différentes eſpéces de fractions ne ſont autre choſe que les parties auxquelles on diviſe & on ſoudiviſe les meſures que l'on eſt obligé d'employer dans l'uſage ordinaire, ces parties diviſées & ſoudiviſées prennent différens noms ſelon la meſure dont on fait uſage. La meſure eſt regardée comme étant l'*unité* ou le *tout*, & les parties auxquelles on la diviſe, en ſont des *fractions*. Les meſures qui ſe rencontrent le plus ſouvent, ſont *par ex:*

Le cercle qui ſe diviſe en 360 parties égales, qu'on appelle *degrés ;* le degré ſe diviſe en 60 *minutes ;* chaque minute en 60 *ſecondes ;* chaque ſeconde en, &c.

Le tems qui ſe diviſe en *jours ;* chaque jour ſe diviſe en 24 parties égales, qu'on appelle *heures ;* chaque heure en 60 *minutes ;* chaque minute en 60 *ſecondes*, &c.

La diſtance qui ſe meſure par des *toiſes ;* la toiſe contient 6 *pieds ;* le pied ſe diviſe en 12 *pouces ;* le pouce en douze *lignes*, &c.

La monnoie qui ſe diviſe en *livres ;* la livre contient 20 *ſols ;* le ſol 12 *deniers.*

Le poids qui s'exprime par des *livres ;* la livre contient 16 *onces ;* l'once 8 *gros ;* le gros 72 *grains.* Il en eſt de même de toutes les autres meſures. Or

I°. Les parties de ces meſures ſont autant d'eſpéces de fractions, qui ſe rencontrent ſouvent dans le calcul & qu'il faut combiner ſoit entr'elles, ſoit avec les meſures elles-mêmes. Car le cercle, *par ex :* étant diviſé en 360 *degrés*, un degré, deux degrés, trois degrés, &c. ſont $\frac{1}{360}$, $\frac{2}{360}$, $\frac{3}{360}$, &c. parties, où ſont des fractions d'un cercle : le degré étant diviſé en 60 *minutes*, une minute, deux minûtes, &c. ſont $\frac{1}{60}$, $\frac{2}{60}$ parties, où ſont des fractions d'un degré : la monnoie étant diviſée en *livres ;* la livre en 20 *ſols ;* le ſol en 12 *deniers*, un ſol, deux ſols, trois ſols, &c. ſont $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{20}$, &c. parties, où ſont des fractions de la livre, & un denier, quatre deniers, &c. ſont, $\frac{1}{12}$, $\frac{4}{12}$ parties, où ſont des fractions d'un ſol ; & ainſi du reſte.

II°. D'où il ſuit que les parties d'une meſure quelconque, qui auront un même nom, ou ſeront de même dénomination, ſeront des fractions qui auront un même dénominateur : or ce dénominateur étant commun, peut par conſéquent être ſous-entendu dans la pratique. C'eſt pourquoi on exprime ces parties ou fractions par des nombres entiers ; ainſi au lieu de dire $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{20}$ de livres, on dit 1 *ſol*, 2 *ſols ;* au lieu de dire $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, de ſols, on dit 2 *deniers*, 5 *deniers ;* & ainſi du reſte.

III°. Or le calcul de ces fractions ſouffre quelque difficulté, lorſqu'on combine des fractions de différente dénomination ſoit entr'elles, ſoit avec des entiers ; & ce ſont ces fractions de différente dénomination qui étant exprimées de la même maniere que les entiers donnent les nombres que l'on appelle *complexes*.

PROBLÊME I.

92. *Ajouter enſemble des nombres complexes ; c'eſt-à-dire, des Fractions de différente dénomination*, par ex : *des Livres, des Sols & des Deniers.*

SOLUTION. 1°. Il faut diſpoſer ces fractions en colonne, chacune ſelon leur dénomination ; c'eſt-à-dire, les deniers ſous les deniers, les ſols ſous les ſols, les livres ſous les livres. 2°. Il faut prendre la ſomme de chaque colonne, allant de droite à gauche, & diviſer cette ſomme par le dénominateur commun. 3°. S'il y a un reſte, il faut écrire ce reste sous la colonne, & garder le quotient pour l'ajouter à la colonne suivante.

	325 liv.	17 sols	4 den.
	15	11	6
	25	15	9
Somme,	367	4	7

PROBLÊME II.

93. *Faire la Soustraction des Quantités ou Nombres complexes.*

SOLUTION. I°. Il faut écrire la quantité que l'on veut soustraire au-dessous de celle dont on veut soustraire, de façon que les parties de même dénomination se trouvent les unes sous les autres; les deniers sous les deniers, les sols sous les sols, &c.

II°. A chaque colonne il faut soustraire le nombre inférieur du nombre supérieur à l'ordinaire, & écrire le reste ou la différence sous la colonne.

III°. Lorsque le nombre inférieur est plus grand que le nombre supérieur, il faut emprunter une unité de la colonne précédente pour l'ajouter à ce nombre supérieur trop petit, (laquelle unité est toujours égale au dénominateur de ce nombre supérieur) *par ex:* si de 8 deniers il faut retrancher 9 deniers, il faudra emprunter sur la colonne des sols une unité, c'est-à-dire, un sol que l'on évalue à 12, qui est le dénominateur commun des deniers, & qui doit être ajouté à 8 deniers, ce qui fait 20, dont retranchant 9, il reste 11 deniers, que l'on écrit sous la colonne des deniers.

IV°. Il faudra diminuer d'une unité le nombre dont on aura emprunté, ou bien augmenter le nombre qui lui est inférieur, de cette unité.

	655 liv.	3 sols	4 den.
	30	4	6
Reste,	624	18	10

Problême III.

94. *Faire la Multiplication des Nombres complexes*.

Solution. I°. Le principe d'où dépend cette opération, eſt que le produit contient toujours le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient l'unité. Or cette unité doit être bien conſidérée & déterminée dans l'opération.

II°. Qu'on propoſe cet exemple, ſçavoir, combien doit couter un ouvrage de 4 toiſes, 5 pieds, 8 pouces, à trois liv. 2 ſols, 4 den. la toiſe. Pour réſoudre la queſtion, il faut multiplier 4 toiſes 5 pieds 8 pouces, par 3 liv. 2 ſols 4 den. Or il eſt clair que l'unité que l'on doit conſidérer dans le multiplicande, eſt la toiſe; car c'eſt la toiſe, & non le pied, ou le pouce, qui eſt ſuppoſée couter 3 liv. 2 ſols 4 deniers. Maintenant pour faire cette opération, il faut réduire les termes, tant du multiplicande que du multiplicateur, à leurs plus petites eſpéces; c'eſt-à-dire, il faut tout réduire en deniers, s'il s'agit de livres, ſols & deniers; il faut tout réduire en pouces, s'il s'agit de toiſes, pieds & pouces: on aura donc dans l'exemple précédent pour multiplicande & pour multiplicateur,

356 pouces,
748 deniers.

III°. Il faut multiplier l'un par l'autre, le multiplicande & le multiplicateur ainſi réduits: & l'on aura un produit exprimé en la plus petite eſpéce du multiplicateut, ſçavoir, en deniers; ce produit ſera 266288 deniers.

IV°. Il faudra diviſer le produit trouvé par le nombre de fois que la plus petite eſpéce du multiplicande eſt contenue dans la plus grande; c'eſt-à-dire, dans l'exemple précédent par le nombre 72, qui exprime combien de fois le pouce eſt contenu dans la toiſe, & l'on aura le quotient 3698, avec le reſte $\frac{32}{72}$, que l'on peut négliger, parce qu'il ne vaut pas un denier.

V°.

V°. Comme le produit ainsi divisé est exprimé en deniers, il faut le réduire en sols, puis en livres; ce qui se fait en divisant la somme des deniers par le nombre de fois que le denier est contenu dans le sol, & la somme des sols par le nombre de fois que le sol est contenu dans la livre.

Démonstration. La raison de toutes ces opérations est claire; il ne peut y avoir de difficulté que pour le quatriéme article, & dont voici la raison. Puisque l'unité que l'on considére dans le multiplicande est la toise, il s'ensuit que le nombre 356, qui exprime des pouces, n'exprime que des parties ou fractions de l'unité, sçavoir, de la toise; donc le multiplicande 356, selon son expression naturelle, doit être $\frac{356}{72}$: or $\frac{356}{72} \times 748 = \frac{266288}{72} = 3698$; donc, &c.

Problême IV.

95. *Faire la division des Nombres complexes.*

Solution. I°. Le principe de cette opération est que le quotient est toujours contenu dans le dividende, autant de fois que l'unité est contenue dans le diviseur (49); d'où il suit que lorsque le diviseur est plus grand, ou égal, ou plus petit que l'unité, alors le quotient est plus petit, ou égal, ou plus grand que le dividende.

II°. Qu'on propose cet exemple, 7 marcs & 2 onces d'argent ayant coûté 346 liv. 18 sols 6 deniers; à combien revient le marc? Pour résoudre la question, il faut diviser 346 livres 18 sols 6 den. par 7 marcs & 2 onces. Or il est évident que l'unité que l'on doit considérer dans le diviseur, est le marc; car c'est le prix du marc & non de l'once, ou de &c. que l'on cherche. Cela posé, il faut réduire le diviseur à la plus petite espéce qu'il contient, c'est-à-dire, en onces; & commençant la division par les plus grandes espéces du dividende, on aura le quotient 5 livres, 19 sols, 7 deniers.

liv.	sols.	den.		liv.	sols.	den.
346	18	6	58 onces.			
				5	19	7

avec le reste $\frac{12}{58}$, que l'on peut négliger, parce qu'il ne vaut pas un denier.

III°. Il faut multiplier le quotient par le nombre qui exprime combien de fois la plus petite espéce du diviseur est contenue dans la plus grande, & le produit qui en résultera, sera le véritable quotient.

DÉMONSTRATION. La raison de ces opérations ne peut souffrir aucune difficulté, si ce n'est par rapport au troisiéme article, & dont voici la raison: si j'ai à diviser, *par ex:* 3 liv. 12 sols par un marc & 4 onces; ou, (réduisant le dividende & le diviseur à leurs plus petites espéces) si j'ai à diviser 72 sols par 12 onces; il est clair que le quotient 6 qui en résulte, doit être multiplié par 8, (lequel nombre exprime combien de fois l'once est contenue dans le marc) pour avoir le résultat 48 sols, lequel exprimera le prix du marc. Car puisque l'unité que l'on considére dans le diviseur est le marc; il s'ensuit que le diviseur 12 n'exprime que des parties ou fractions de cette unité: donc le diviseur, selon son expression naturelle, doit être $\frac{12}{8}$; or (88) 72 divisé par $\frac{12}{8} = \frac{72 \times 8}{12} = \frac{376}{12} = 48$: donc, &c.

Remarque.

96. Lorsqu'après avoir divisé une espéce du dividende, il se trouve un reste; il faut réduire ce reste aux petites espéces que contient immédiatement le dividende, & diviser ce reste ainsi réduit par le diviseur. Dans l'exemple ci-dessus après avoir divisé 346 livres par 58 onces, on trouve le reste 56 livres; lequel ne pouvant être divisé par 58, doit être réduit en *sols*, auxquels ajoutant les 18 *sols* du dividende, il vient 1138 *sols*, qu'il faut diviser par le diviseur; & ainsi du reste.

CHAPITRE II.

Du Calcul des Lettres, ou l'Algébre.

L'ALGEBRE eſt un Calcul qui a pour objet les quantités indéterminées, de même que l'Arithmétique eſt le calcul qui a pour objet les quantités déterminées. Les quantités ou grandeurs déterminées ſont repréſentées, comme nous l'avons dit, par les caracteres ou chiffres 1, 2, 3, &c. auxquels on a donné des valeurs préciſes & qu'il n'eſt plus permis de changer. Mais les grandeurs indéterminées ſont repréſentées par des caracteres qui n'ont aucune valeur fixe, & qui n'ont que celle qu'on leur donne pour le moment & dans l'opération actuelle, pouvant en avoir une toute différente & même oppoſée dans une autre opération.

PRINCIPE.

97. Si j'avois à combiner, *par ex:* les grandeurs 3 & 4, pour en avoir la ſomme $3+4=7$, il eſt clair :

I°. Qu'il m'eſt permis de repréſenter les grandeurs 3, 4, 7, par tels autres ſignes, ou caracteres qu'il me plaira, différens des chiffres, *par ex :* par les lettres a, b, c, & qu'en ce cas la ſomme $3+4=7$ ſera repréſentée ſous un autre expreſſion, ſçavoir, $a+b=c$.

II°. Que les lettres a, b, c, pourroient auſſi bien repréſenter les quantités 5, 7, 12, que les quantités 3, 4, 7, & par conſéquent que l'expreſſion $a+b=c$ peut indifféremment repréſenter, ſoit la ſomme $3+4=7$, ſoit la ſomme $5+7=12$; ſoit telle autre ſomme que l'on voudra.

III°. Que toutes ces suppositions sont possibles, & qu'elles sont fondées sur ce que les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. n'ayant aucune valeur, & ne signifiant rien par elles-mêmes, je puis leur donner telle valeur & telle signification que je voudrai. C'est pourquoi l'expression $a + b = c$, représente bien une somme plutôt qu'une différence ou un produit, ou &c.; mais une somme de quantités dont la valeur n'est pas précise, mais a besoin d'une détermination particuliere, laquelle est différente suivant l'exigence des cas.

DÉFINITIONS.

I.

98. Les grandeurs qui sont représentées par les lettres de l'alphabet, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, &c. ou par tel autre signe de cette nature, s'appellent *Grandeurs indéterminées* : les lettres de l'alphabet qui représentent ces grandeurs, & qui en sont comme le symbole & l'expression, s'appellent *Quantités algébriques* ; & le calcul qui opére sur les grandeurs ainsi exprimées, s'appelle *Algébre*, ou *Calcul Algébrique.*

II.

99. Lorsque les grandeurs sur lesquelles on opére, sont connues, on les représente par les premieres lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. Lorsqu'elles sont inconnues, on les représente par les dernieres lettres *x*, *y*, *z*. Or les lettres de l'alphabet combinées les unes avec les autres par le moyen des signes + & —, & d'autres dont nous allons parler, donnent en Algébre des *Termes*, des *Sommes*, des *Différences*, des *Produits*, des *Quotiens*, de même que les nombres en Arithmétique.

III.

100. On appelle Terme algébrique une lettre, ou même plusieurs lettres jointes ensemble, mais sans interposition des signes + ou — ; *par ex : a*, *b*,

ab, *abc*, &c. sont des termes algébriques. On appelle Termes *positifs* ceux qui sont précédés du signe $+$, & Termes *négatifs* ceux qui sont précédés du signe $-$. Dans la quantité $a + ab - abc - bc + acd$, il y a trois termes positifs, & deux termes négatifs.

Lorsqu'un terme n'est précédé d'aucun signe, alors il est censé avoir le signe $+$.

IV.

101. On appelle Quantités simples ou incomplexes celles qui n'ont qu'un terme, & Quantités complexes, celles qui ont plusieurs termes, comme $ab - bc$; $a - b + abc$; &c. La quantité simple s'appelle autrement *Monôme*, la quantité complexe s'appelle ou *Binôme*, ou *Trinôme*, ou *Quadrinôme*, &c. suivant qu'elle est composée ou de deux, ou de trois, ou de quatre termes, &c. En général on appelle *Polynôme* une quantité composée de plusieurs termes.

V.

102. On appelle Termes *semblables*, ceux dans lesquels toutes les lettres de l'un se trouvent précisément dans l'autre, ou dans les autres, & écrites chacune un même nombre de fois; *par ex:* dans la quantité $ab - ab + 3ab + abcd + 2bc$, les trois premiers termes sont semblables.

Remarque I.

103. Observez que les termes négatifs sont appellés tels, non parce que ce seroient de pures négations, ou des zero, mais parce qu'ils ont des fonctions opposées à celle des termes positifs: la fonction de ceux-ci consistant à être ajoutés, celle de ceux-là à être retranchés, ce qui est représenté par les signes contraires $+$ & $-$.

En effet, *par ex:* si l'on imprime à un même corps 12 degrés de vitesse vers l'orient, & 8 degrés vers l'occident, la vitesse vers l'orient étant exprimée par $+ 12$, la viteſſe vers l'occident, étant en ſens oppoſé, ſera par conſéquent $- 8$, ce qui donnera $+ 12 - 8 = + 4$ degrés de viteſſe vers l'orient; ſi la premiere étant $+ 12$, la ſeconde eut été $- 12$, on auroit eu $+ 12 - 12 = 0$, c'eſt-à-dire, que la viteſſe eut été nulle, ou que le corps ſeroit reſté en repos: ſi la viteſſe vers l'orient étant $+ 12$, la viteſſe vers l'occident étoit $- 18$, on auroit $+ 12 - 18 = - 6$ degrés de viteſſe vers l'occident, où il faut remarquer que la quantité négative détruit toujours dans la poſitive une portion égale à elle-même, & réciproquement, d'où il réſulte que le contraſte des quantités poſitives & négatives rend la grandeur quelquefois plus grande, quelquefois égale, quelquefois plus petite que 0, ſelon que les quantités poſitives ſont ou plus grandes, ou égales, ou plus petites que les négatives.

Or les quantités négatives ſervant, comme on le voit, à diminuer les quantités poſitives, ſont par conſéquent des quantités réelles & non des zero: car zero ajouté ou retranché n'augmente ni ne diminue la grandeur, puiſque $3 + 0 = 3$, & $3 - 0 = 3$: les ſignes $+$ & $-$ qui affectent les quantités algébriques ne déſignent donc pas des grandeurs de différente nature, mais ſeulement des fonctions oppoſées de ces grandeurs; ainſi le mouvement vers l'occident étant exprimé dans le troiſiéme cas par $- 6$, ſera une quantité négative par rapport au mouvement vers l'orient, non parce qu'il n'eſt pas mouvement réel, mais parce qu'il eſt mouvement en ſens oppoſé.

Remarque I I.

104. Les lettres ne pouvant ſe combiner les unes avec les autres, comme les chiffres; on eſt obligé, pour abréger le diſcours, de ſe ſervir de quelques ſignes, qui ſont:

Le ſigne $+$, ou d'addition, qui ſignifie *plus*, *par ex :* $a+b$, ſignifie *a plus b*, ou que la quantité *b* eſt ajoutée à la quantité *a*.

Le ſigne —, ou de ſouſtraction, qui ſignifie *moins*; *par ex :* $a-b$, ſignifie *a moins b*, ou que *b* eſt retranché de la quantité *a*.

Le ſigne ×, ou de multiplication, qui ſignifie *multipliant*; *par ex :* $a \times b$, ſignifie *a multipliant b*, ou que *b* eſt multiplié par *a*.

Le ſigne :, ou de diviſion, lequel ſignifie *diviſé par*, $a : b$, ſignifie que *a* eſt diviſé par *b*; au lieu de $a : b$, on met auſſi $\frac{a}{b}$.

Le ſigne =, ou d'égalité, qui ſignifie *égal à*, *par ex :* $a = b$, ſignifie que *a* eſt égal à *b*.

Le ſigne <, qui ſignifie *moindre que*, *par ex :* $a < b$, ſignifie que *a* eſt moindre que *b*.

Le ſigne >, qui ſignifie *plus grand que*, ainſi $a > b$, ſignifie que *a* eſt plus grand que *b*.

Le ſigne ∞, qui ſignifie *infini*, *par ex :* $\infty\, a$, ſignifie que la quantité *a* eſt infinie.

Le ſigne radical √, qui ſignifie la *racine de*, *par ex :* $\sqrt{a}$ ſignifie la racine de *a*.

Les lettres de l'alphabet n'ayant par elles-mêmes aucune valeur, il eſt libre de faire ſignifier à ces lettres telles grandeurs ou quantités que l'on voudra; mais il faut obſerver que lorſqu'on a une fois donné à une lettre une valeur ou une ſignification dans une opération, il faut toujours la lui conſerver dans la ſuite de cette opération.

Les quantités algébriques ſont ſuſceptibles des mêmes opérations que les quantités numériques: nous en allons parler.

ARTICLE I.

De l'Addition & de la Souſtraction Algébrique.

Regle I.

105. Les Géométres ajoutent les quantités algébriques, en les écrivant à côté les unes des au-

tres, sans rien changer aux signes dont elles sont affectées. Pour ajouter $+a$ & $+b$, on écrit simplement $a+b$; pour ajouter abc, $+ab$, $-acd$, on écrit $abc+ab-acd$, & ainsi du reste.

Corollaire.

106. Dans l'addition il se fait quelquefois une véritable soustraction; *par ex:* quand on ajoute ensemble la quantité positive $+ab$, & la négative $-bc$, pour avoir la somme $ab-bc$, on soustrait réellement la quantité bc de la quantité ab; d'où il suit qu'en Algébre c'est une même chose d'*ajouter une quantité négative*, ou *de retrancher une quantité positive.*

Regle II.

107. La soustraction algébrique se fait en écrivant les quantités algébriques à côté l'une de l'autre, & en changeant les signes de la quantité que l'on soustrait, les $+$ en $-$, & les $-$ en $+$; *par ex:* pour soustraire $+a$ de $+b$, on écrit $b-a$; pour soustraire $-b$ de $+c$, on écrit $c+b$; pour soustraire $ab-cd$ de la quantité $bc+cd$, on écrit $bc+cd-ab+cd$: la raison en est, que

I°. Lorsqu'on soustrait une quantité positive $+b$, d'une grandeur quelconque $+a$, celle-ci est diminuée de toute la quantité que l'on soustrait; on doit donc écrire $a-b$.

II°. Celui qui soustrait une quantité négative $-b$ d'une grandeur quelconque $+a$, augmente cette derniere de toute la quantité b; on doit donc écrire $a+b$.

Corollaire I.

108. La soustraction algébrique est quelquefois une véritable addition; car lorsque la quantité que l'on soustrait est négative, on ajoute réellement une quantité positive; *par ex:* si de ab on soustrait $-bc$, pour avoir la différence $ab+bc$, on ajoute réellement la quantité bc à la quantité

ab : d'où il suit qu'en Algébre c'est une même chose *de soustraire une quantité négative, ou d'ajouter une quantité positive.*

Corollaire II.

109. En général c'est une même chose en Algébre de soustraire +, ou de donner —; de soustraire —, ou de donner +.

Regle III.

110. Pour abréger l'expression algébrique, au lieu de $a + a$, on écrit $2a$: car comme dans les nombres, $4 + 4$ est la même chose que deux fois 4, ou $2 \times 4 = 8$; de même pour les lettres, $a + a$ est la même chose que deux fois a, ou $2 \times a = 2a$. Par la même raison, au lieu de $a + a + a$, on écrit plus briévement $3a$; on aura de même $+ 3a + a = 4a$; on a aussi $4a + 3a = 7a$; $b + b + b - ac - ac = 3b - 2ac$; & ainsi des autres.

Ce chiffre qui précéde un terme algébrique, s'appelle *Coefficient*, & sert à exprimer combien de fois le même terme doit être écrit, soit avec le signe +, soit avec le signe —; ou plutôt combien de fois il doit être, ou ajouté, ou retranché. Cette méthode d'abréger les expressions algébriques s'appelle *Réduction*, & elle a lieu toutes les fois que les termes sont semblables. De-là

I°. Il suit que $2a + 4a$ se réduisent à $6a$; pareillement que $- a - 2a - 5a$ se réduisent à la quantité $- 8a$: c'est pourquoi, *lorsque les signes des termes semblables sont les mêmes, la réduction se fait en ajoutant les coefficiens.*

II°. Mais les termes $+ a - a$ se détruisent & deviennent zero, parce qu'une grandeur retranchée d'elle-même, devient nulle; d'où il suit que $5a - 2a$ se réduisent à $3a$; que $9ab - 5ab$ se réduisent à $4ab$; que $- 5ac + ac$ deviennent $- 4ac$; c'est pourquoi, *lorsque les signes des termes semblables sont différens, la réduction se fait en retranchant le plus petit coefficient du plus grand.*

Rermarque I.

111. Tout terme algébrique qui n'a point de coefficient, eſt toujours cenſé avoir l'unité pour coefficient.

Remarque II.

112. Obſervez qu'après l'addition & la ſouſtraction, & généralement après toute opération algébrique, il faut réduire les termes ſemblables, s'il s'en trouve, afin d'abréger l'expreſſion.

ARTICLE II.

De la Multiplication & de la Diviſion algébrique.

Regle I.

113. La multiplication algébrique ſe fait en joignant le multiplicande & le multiplicateur par le ſigne de multiplication: pour multiplier a par b, on écrit $a \times b$, ou plus ſimplement ab; car en Algébre $a \times b$ eſt la même choſe que ab; parce qu'en Algébre on eſt convenu que, lorſque deux ou pluſieurs lettres ſe trouveroient écrites à côté les unes des autres ſans interpoſition de ſignes, elles ſeroient cenſées multipliées les unes par les autres: pareillement $ab \times ab = aabb$; obſervant pour l'ordre & la clarté de ranger les lettres ſuivant l'ordre alphabétique. Or:

I°. Si le multiplicande & le multiplicateur ſont des quantités incomplexes; il n'y a nulle difficulté, comme nous venons de le voir.

II°. Si le multiplicande eſt une quantité complexe, & le multiplicateur une quantité incomplexe, il faudra multiplier chaque terme du multiplicande par le multiplicateur; *par ex:* $a+b$ multiplié par c donne le produit $ac+bc$, laquelle opération s'indique & s'effectue de cette maniere, $\overline{a+b} \times c = ac+bc$.

La ligne qui eſt au-deſſus de la quantité $a+b$ ſignifie que tous les termes qui ſont joints par cette ligne, ſont ſoumis à la même opération;

c'eſt-à-dire, que dans cet exemple ils doivent être multipliés tous deux par le terme c.

III°. Si le multiplicande & le multiplicateur ſont des quantités complexes, on opere comme dans les nombres; c'eſt-à-dire, on multiplie tout le multiplicande par chaque terme du multiplicateur : *par ex :* $a + b$ multiplié par $a + b$ donne le produit $aa + ab + ab + bb$; ce qui s'exprime en ſtyle algébrique de cette maniere $\overline{a+b} \times \overline{a+b} = aa + ab + ab + bb = aa + 2ab + bb$; dans laquelle expreſſion on doit remarquer que le premier membre eſt l'opération indiquée, le ſecond eſt l'opération effectuée, & le troiſiéme eſt l'opération réduite.

Regle II.

114. Si les termes que l'on multiplie ſont affectés de coefficiens, on multiplie les coefficiens les uns par les autres; *par ex :* $3a$ multiplié par $2b$, donne $6ab$, ou, ce qui eſt le même, $3a \times 2b = 6ab$; la raiſon en eſt que $3a = a + a + a$, comme on l'a dit (110), pareillement $2b = b + b$; or, $\overline{a+a+a} \times \overline{b+b}$ donne $ab + ab + ab + ab + ab + ab = 6ab$, (110) donc, &c.

Corollaire.

115. Si on multiplie une quantité par elle-même ; *par ex :* a par a, on aura $a \times a = aa$, & pour abréger, au lieu de aa on écrit a^2. Ce chiffre 2 que l'on met au-deſſus de la lettre à droite, s'appelle *Expoſant*, & ſert à marquer combien de fois la même lettre doit être écrite à côté d'elle-même ; pareillement au lieu de aaa on écrit a^3 ; on aura par la même raiſon $bb = b^2$; $aabbbcc = a^2 b^3 c^2$, & ainſi du reſte.

Remarquez qu'il y a de la différence entre le *coefficient* & l'*expoſant* ; *par ex :* entre $4a$ & a^4 ; car $4a = a + a + a + a$ (110) ce qui donne une ſomme, au lieu que $a^4 = aaaa$ ce qui donne un produit (113). Le coefficient dénote une addition,

& l'expoſant une multiplication ou une exaltation.

Remarquez auſſi que dans les quantités algébriques toute lettre qui n'a point d'expoſant, eſt cenſée avoir l'unité pour expoſant.

Regle III.

116. Si les quantités que l'on multiplie, ſont exprimées par les mêmes lettres affectées d'expoſans, on abrége l'opération, en ajoutant les expoſans; *par ex :* $a^3 \times a^2$ donne a^5 ; la raiſon eſt que $a^3 = aaa$ & $a^2 = aa$, or $aaa \times aa = aaaaa = a^5$.

Regle IV.

117. Lorſque les ſignes du multiplicande & du multiplicateur ſont les mêmes, le produit doit avoir le ſigne $+$, & lorſqu'ils ſont différens, le produit doit avoir le ſigne $-$; en effet

I°. Si le multiplicande & le multiplicateur ont tous les deux le ſigne $+$, le produit doit avoir le ſigne $+$, *par ex :* $+a \times +b = +ab$; car une quantité poſitive multipliée par une quantité poſitive doit donner un produit poſitif, comme il eſt évident, ou $+ \times + = +$.

II°. Si le multiplicande a le ſigne $+$, & le multiplicateur le ſigne $-$, le produit doit avoir le ſigne $-$, *par ex :* $+a \times -b = -ab$: la raiſon en eſt ſenſible dans les nombres; car, *par ex :* $\overline{5-3} \times 6 = 30 - 18$, ce qui donne 12, & non pas $= 30 + 18$, ce qui donneroit 48; car le multiplicande $\overline{5-3} = 2$, or $2 \times 6 = 12$.

Ce ſeroit la même choſe ſi le multiplicande avoit le ſigne $-$ & le multiplicateur le ſigne $+$; car dans la multiplication l'une ou l'autre des quantités que l'on multiplie peut être indifféremment priſe, ſoit pour multiplicande, ſoit pour multiplicateur; c'eſt pourquoi $- \times +$, ou $+ \times - = -$.

III°. Si le multiplicande & le multiplicateur ont tous les deux le ſigne —, le produit doit avoir le ſigne +; *par ex* : $-a \times -b = +ab$: la raiſon eſt ſenſible dans les nombres ; car $\overline{6-2} \times \overline{4-2} = 24 - 8 - 12 + 4$, ce qui donne 8, où l'on voit que le produit de -2 par -2 donne $+4$, & non pas -4 ; en effet le multiplicande $6 - 2 = 4$, de même le multiplicateur $4 - 2 = 2$: or $4 \times 2 = 8$.

Regle V.

118. La diviſion eſt une opération inverſe de la multiplication ; c'eſt pourquoi, ſi le dividende & le diviſeur ſont des quantités incomplexes.

I°. Comme dans la multiplication, pour avoir le produit de deux quantités incomplexes, on écrit les lettres du multiplicateur à côté de celles du multiplicande : au contraire dans la diviſion, il faut effacer dans le dividende les lettres qui lui ſont communes avec le diviſeur, & celles qui y reſtent donneront le quotient ; *par ex* : l'on a dans la multiplication $a \times b = ab$, & l'on aura au contraire dans la diviſion $\frac{ab}{a} = b$.

II°. Si le dividende & le diviſeur ſont affectés de coefficiens, il faut diviſer les coefficiens pour une raiſon contraire à celle pour laquelle on les multiplie dans la multiplication ; *par ex* : $\frac{6ab}{2a} = 3b$.

III°. Si le dividende & le diviſeur ſont exprimés par les mêmes lettres affectées d'expoſans, il faut ſouſtraire les expoſans par une raiſon contraire à celle pour laquelle on les ajoute dans la multiplication ; c'eſt pourquoi $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$. En effet le dividende $a^6 = aaaaaa$, & le diviſeur $a^2 = aa$; or effaçant les lettres communes au dividende & au diviſeur, il reſtera pour le quotient $aaaa = a^4 = a^{6-2}$, ce qui ſe voit d'un ſeul coup d'œil dans les expreſſions ſuivantes

$\frac{a^6}{a^2} = \frac{aaaaaa}{aa} = aaaa = a^4 = a^{6-2}$.

IV°. Si le dividende & le diviſeur ſont affectés des mêmes ſignes, le quotient doit avoir le ſigne $+$; s'ils ont différens ſignes, le quotient doit avoir le ſigne $-$; comme il eſt aiſé de le voir par ce ſeul exemple: $\frac{+ba}{-a} = -b$, & non pas $+b$; car le quotient doit être tel, qu'étant multiplié par le diviſeur, il donne le dividende juſte: or pour cela il faut que le quotient ſoit $-b$.

Remarque.

119. Lorſque le dividende & le diviſeur n'ont point de lettres communes, on ne peut point effectuer la diviſion, mais ſeulement l'indiquer; *par ex:* on ne peut point effectuer la diviſion de a par b, mais on l'indique ſeulement, en écrivant $\frac{a}{b}$. Pareillement ſi l'on avoit ab à diviſer par c, on écriroit $\frac{ab}{c}$.

Ces diviſions indiquées ſont autant de fractions algébriques, leſquelles de même que les fractions numériques, prennent leur origine dans la diviſion, comme il eſt aiſé de le voir. Or on fait ſur ces fractions algébriques les mêmes opérations & de la même maniere que ſur les fractions numériques; on peut les transformer, les ajouter, les ſouſtraire, &c. en obſervant préciſément les mêmes régles qui ont été données ci-devant, en parlant des fractions.

Corollaire I.

120. Si le dividende & le diviſeur ſont des quantités incomplexes, & ſont les mêmes lettres affectées d'expoſans, il peut arriver,

I°. Que l'expoſant du dividende ſoit plus grand que l'exposant du diviseur, & alors l'exposant du quotient sera positif; *par ex :* $\frac{a^5}{a^2} = a^3$, parceque $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$.

II°. Que l'exposant du dividende & celui du diviseur soient égaux, & dans ce cas l'exposant du quotient sera zero; *par ex :* $\frac{a^3}{a^3} = a^0$, parce que $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$.

III°. Que l'exposant du dividende soit plus petit que celui du diviseur, & alors l'exposant du quotient sera négatif; *par ex :* $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$, car $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$.

Regle VI.

121. Si le dividende est une quantité complexe, & le diviseur une quantité incomplexe, il faut diviser chaque terme du dividende par la quantité incomplexe, & chaque fois écrire le quotient, lequel doit être multiplié aussi chaque fois par le diviseur pour en retrancher le produit du dividende, comme dans la division numérique, afin de connoître le reste, s'il y en a un; *par ex :* si j'ai la quantité $8abbc - 12abcc + 4bbcf$ à diviser par $4bc$.

$$\left.\begin{array}{r} \overset{\circ}{8}abbc - \overset{\circ}{12}\,abcc + \overset{\circ}{4}bbcf \\ \hline -\overset{\circ}{8}abbc + \overset{\circ}{12}abcc - \overset{\circ}{4}\,bbcf \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4bc \\ \hline 2ab - 3ac + bf \end{array}$$

I°. Je divise le premier terme $8abbc$ par le diviseur $4bc$, & effaçant les lettres communes à l'un & à l'autre j'ai pour quotient $2ab$. Je multiplie le quotient trouvé par le diviseur, & j'ai le produit

$+ 8abbc$, que je soustrais du dividende, en changeant son signe de $+$ en $-$; puis faisant la réduction, j'efface les deux termes $8abbc$ & $-8abbc$, qui se détruisent, ce que je désigne en écrivant o au-dessus de ces termes.

II°. Je divise le second terme $-12abcc$ par le diviseur $4bc$, & faisant les mêmes opérations que ci-dessus, j'ai pour quotient $-3ac$, & après la réduction des termes semblables, il ne reste plus que $-4bbcf$.

III°. Divisant ce terme $+4bbcf$ par le diviseur, j'ai pour quotient $+bf$, & après la réduction il ne reste rien, & l'opération est finie.

Regle VII.

122. Si le dividende & le diviseur sont tous les deux des quantités complexes, on opere comme dans la division numérique, observant seulement de plus qu'il faut employer la réduction des termes semblables chaque fois que l'on a operé sur un membre de division; *par ex*: si l'on veut diviser $6abb - 2bbc - 3aab + abc$ par $2b - a$, après avoir disposé les quantités comme il suit;

$$\left.\begin{array}{l} \overset{o}{6abb} - \overset{o}{2bbc} - \overset{o}{3aab} + \overset{o}{abc} \\ \hline \mp \overset{o}{6abb} \pm \overset{o}{3aab} \pm \overset{o}{2bbc} \mp \overset{o}{abc} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2b - a \\ \hline 3ab - bc \end{array}$$

Il faut:

I°. Diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, & on aura le quotient $3ab$, qu'il faut écrire sous le diviseur.

II°. Multiplier le quotient trouvé $3ab$ par le diviseur $2b - a$, ce qui donne le produit $6abb - 3aab$, qu'il faut écrire sous le dividende.

III°. Soustraire du dividende le produit que l'on vient d'écrire, en changeant les signes, ce qui donne $-6abb + 3aab$.

IV°. Faire la réduction des termes qui se trouvent semblables dans le dividende & dans le produit soustrait, & effacer les termes qui se détruisent, ou mettre un point ou un zero dessus.

V°. Cela fait, il reste dans cet exemple les termes $-2bbc+abc$ au dividende, qui sont le second membre de division, sur lequel on doit opérer comme sur le premier; & comme après la réduction des termes semblables il ne reste plus rien, la division est achevée.

ARTICLE III.

De l'Exaltation & de l'Extraction algébrique.

L'Exaltation algébrique, de même que la numérique, est une opération, dans laquelle on éleve une quantité à une puissance quelconque. L'extraction algébrique est une opération, dans laquelle on cherche la racine d'une puissance algébrique proposée. Nous parlerons 1°. de l'exaltation & de l'extraction pour les quantités incomplexes: 2°. de l'exaltation & de l'extraction pour les quantités complexes.

PARAGRAPHE I.

De l'Exaltation & de l'Extraction des Quantités incomplexes.

Regle I.

123. Pour élever une quantité algébrique incomplexe à une puissance quelconque, il faut la multiplier (71) par elle-même autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance; *par ex:* pour avoir la seconde, la troisiéme, la quatriéme, &c. puissance de a, il faut multiplier a par lui-même une fois, deux fois, trois, &c. & l'on aura la seconde puissance aa, ou a^2; la troisiéme aaa, ou a^3; la quatriéme $aaaa$, ou a^4.

Corollaire.

124. D'où il suit évidemment;

I°. Que l'on peut élever tout d'un coup une quantité algébrique incomplexe qui n'a point d'exposant écrit, à une puissance quelconque, en l'affectant d'un exposant qui exprime le degré de la puissance, *par ex:* la sixiéme puissance de a est a^6; de ab est $a^6 b^6$; de cd est $c^6 d^6$.

II°. Que pour élever à une puissance quelconque une quantité affectée d'un exposant, il n'y a qu'à multiplier l'exposant de la quantité par l'exposant de la puissance; *par ex :* pour élever a^2, à la troisiéme puissance, l'on écrit $a^{2\times 3} = a^6$; la raison en est que la troisiéme puissance de a^2 est, comme nous venons de le dire, $a^2 \times a^2 \times a^2$; or $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2}$ (116) $= a^6$.

III°. Qu'en général pour élever à une puissance quelconque une quantité incomplexe, affectée, ou non, d'un exposant, la regle sera toujours de multiplier l'exposant de la quantité par l'exposant de la puissance: car une quantité telle que a qui n'a point d'exposant écrit, a cependant l'unité pour exposant, & est a^1; c'est pourquoi, lorsque pour l'élever à la deuxiéme, troisiéme, &c. puissance, vous écrivez a^2, a^3, &c. c'est la même chose que si vous écriviez $a^{1\times 2}$, $a^{1\times 3}$, &c. ce qui donne a^2, a^3, &c.

Regle II.

125. L'extraction des racines est une opération inverse de l'exaltation : c'est pourquoi, puisque pour élever une quantité à une puissance, il n'y a qu'à multiplier son exposant par l'exposant de la puissance; pour extraire une racine quelconque, il n'y aura au contraire qu'à diviser l'exposant de la puissance donnée par l'exposant de la racine que l'on cherche; *par ex :* la troisiéme puissance de a, ou a^1, est $a^{1\times 3} = a^3$; & au contraire la racine troisiéme de a^3, sera $a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$; pareillement la racine seconde de a^3 sera$^{\frac{3}{2}}$, & ainsi du reste.

Corollaire I.

126. Il suit de ce que nous venons de dire, que,

comme les puiſſances ſont indiquées ou repréſentées par des expoſans qui ſont des nombres entiers, de même les racines peuvent être indiquées ou repréſentées par des expoſans fractionnaires; *par ex :* les racines premiere, ſeconde, troiſiéme, &c. de a, ou a^1, seront $a^{\frac{1}{1}}$, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{5}}$, $a^{\frac{1}{6}}$, &c.

On peut auſſi indiquer ou repréſenter les racines, en ſe ſervant ſimplement du ſigne radical $\sqrt{\ }$, & en affectant ce ſigne de l'expoſant de la racine; *par ex :* les racines premiere, ſeconde, troiſiéme, &c. de la quantité a, ou a^1, peuvent ſe repréſenter par

$$\sqrt[1]{a},\ \sqrt[2]{a},\ \sqrt[3]{a},\ \sqrt[4]{a},\ \sqrt[5]{a},\ \sqrt[6]{a},\ \sqrt[7]{a},\ \&c.$$

Remarquez 1°. que lorſque le ſigne radical n'eſt affecté d'aucun expoſant, il indique alors toujours la ſeconde puiſſance.

Remarquez 2°. que la premiere méthode d'exprimer les racines eſt plus commode, parce qu'elle les aſſujettit au calcul, de même que les quantités ordinaires.

Corollaire I I.

127. Comme il eſt permis de repréſenter une racine de deux manieres; ſavoir, ou en donnant à la quantité un expoſant fractionnaire, ou en lui donnant le ſigne radical avec un expoſant qui ſoit un nombre entier; de même on pourra auſſi repréſenter une puiſſance de deux manieres; ſavoir, ou en lui donnant un expoſant qui ſoit un nombre entier, ou en lui donnant le ſigne radical affecté d'un expoſant fractionnaire: ainſi l'on peut exprimer la ſuite de toutes les puiſſances conſécutives de a, ou a^1, en commençant par la puiſſance zero, dans cet ordre.

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ a^8,\ \&c.$$

ou bien,

$$\sqrt[\frac{1}{0}]{a},\ \sqrt[\frac{1}{1}]{a},\ \sqrt[\frac{1}{2}]{a},\ \sqrt[\frac{1}{3}]{a},\ \sqrt[\frac{1}{4}]{a},\ \sqrt[\frac{1}{5}]{a},\ \sqrt[\frac{1}{6}]{a},\ \sqrt[\frac{1}{7}]{a},\ \sqrt[\frac{1}{8}]{a},\ \&c.$$

Corollaire III.

128. Lorſqu'on ne peut pas extraire la racine juſte d'une quantité donnée telle que *a*, on ſe contente de l'indiquer en affectant la quantité du ſigne radical √ affecté lui-même de l'expoſant de la racine cherchée. Dans ce cas les quantités qui ſont affectés du ſigne √, s'appellent quantités *radicales*, ou ſimplement *radicaux*; or l'on voit évidemment que les radicaux prennent leur origine dans l'extraction, de même que les fractions dans la diviſion. C'eſt pourquoi les radicaux ſont par rapport à l'extraction, ce que les fractions ſont par rapport à la diviſion; c'eſt-à-dire, que les radicaux ſont ou des extractions indiquées, ou des reſtes après l'extraction, de même que les fractions ſont des diviſions indiquées, ou des reſtes après la diviſion.

Remarque.

129. Lorſqu'on trouve dans le calcul des quantités affectées du ſigne √, ces quantités s'appellent quantités *radicales*, ou ſimplement *radicaux*, comme nous venons de le dire. Les quantités qui ſuivent le ſigne √, s'appellent grandeurs *ſous le ſigne*; & celles qui précédent le ſigne, s'appellent *coefficiens* du ſigne; le nombre qui eſt au-deſſus du ſigne √, s'appelle *expoſant* du radical : ſi ce nombre eſt entier, la quantité affectée du ſigne √ eſt une racine; & ſi ce nombre eſt fractionnaire, la quantité eſt une puiſſance.

PARAGRAPHE II.

De l'Exaltation & de l'Extraction des Quantités complexes.

Nous allons parler, 1°. De la formation des puiſſances des quantités complexes; 2°. De l'extraction de leurs racines.

NOMBRE I.

De la Formation des Puissances des Quantités complexes.

I°. Si l'on veut seulement indiquer la puissance d'une quantité complexe, *par ex :* $a+b$, on écrit simplement $\overline{a+b}^2$ pour la seconde puissance, $\overline{a+b}^3$ pour la troisiéme puissance, & ainsi du reste.

II°. Si l'on veut atteindre à la puissance réelle de la quantité, il faudra multiplier cette quantité par elle-même autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance, comme le prescrit (123) la regle générale.

C'est pourquoi la premiere puissance de $a+b$ est $a+b$, ou $\overline{a+b} \times 1 = a \times b$.

La seconde puissance de $a+b$ est $\overline{a+b} \times \overline{a+b} = a^2 + 2ab + b^2$.

La troisiéme puissance de $a+b$ est $\overline{a-b} \times \overline{a+b} \times \overline{a+b} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & ainsi du reste.

III°. Mais, sans avoir recours à ces multiplications réitérées, on peut former immédiatement, & trouver tout d'un coup les différentes puissances d'une quantité complexe; & pour cela il ne s'agit que de connoître les parties & les circonstances qui concourent à la formation de la puissance, lesquelles sont le nombre des termes, les signes, les exposans, & les coefficiens. Or les propositions & les regles suivantes nous en donneront la méthode, que nous allons appliquer à une *binôme* quelconque $a+b$.

IV°. On pourra raisonner des autres quantités complexes, *trinômes*, *quatrinômes*, &c. comme du *binôme* $a+b$; car toute quantité complexe, telle que le *trinôme* $a+b+c$, peut être regardée comme *binôme*, ou comme n'étant composée que de deux termes, dont le premier seroit $\overline{a+b}$, & le second $+c$.

REGLE I.

130. Toute puissance contient autant de ter-

mes, & un de plus, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance; la seconde puissance $a^2 + 2ab + b^2$ de $a + b$, contient trois termes; sa troisiéme puissance $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ en contient quatre; la quatriéme puissance $a^4 + 4a^3b$, &c. en contient cinq, & ainsi du reste.

La raison en est que dans toute puissance considérée comme *produit*, le nombre des termes est égal au produit du nombre des *facteurs* multiplians, par le nombre des facteurs multipliés; mais dans la puissance considérée comme *quantité algébrique*, la réduction des termes semblables diminue le nombre des termes & le réduit dans la seconde puissance à trois, sçavoir, $a^2 + 2ab + b^2$; dans la troisiéme puissance à quatre $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; dans la quatriéme puissance, &c.

Corollaire I.

131. Dans toute puissance, si l'on ordonne les termes par rapport à une lettre, *par ex :* à la lettre a, le nombre des termes sera déterminé par les puissances consécutives de cette lettre a; comme on le voit évidemment,

dans le quarré, $a^2 + 2ab + a^0 b^2$

dans le cube, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^0 b^3$;

& de même dans toutes les autres puissances du binôme $a + b$.

Corollaire I I.

132. Par conséquent, lorsqu'on a la puissance d'une quantité complexe quelconque, soit *binôme*, soit *trinôme*, soit, &c. on peut, en ordonnant les termes par rapport à une même lettre a, écrire les uns sous les autres tous les termes dans lesquels la lettre a se trouvera élevée à une même puissance, *par ex :* la puissance $a^2 + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$ s'écrira de cette maniere :

$$\begin{array}{lll} a^2 + 2ab + bb & & \\ \quad\;\; + 2ac + cc & & \\ \quad\;\; \quad\;\; + 2bc. & & \end{array}$$

Car les termes où la lettre a ſe trouve élevé à une même puiſſance, ne ſont cenſés former qu'un ſeul & même terme a, ou a^2, ou a^3, ou &c. lequel eſt multiplié par une quantité complexe, qui s'appelle le coefficient de ce terme a, ou a^2, ou a^3, ou, &c. Dans l'exemple ci-deſſus la quantité $2ab + 2ac$ n'eſt autre choſe que le terme a multiplié par le coefficient $2b+2c$. Il faut dire la même choſe de tous les autres termes.

Regle II.

133. Lorſque les termes du binôme racine ſont tous les deux affectés du ſigne $+$, ou que l'on a, *par ex :* $a+b$, tous les termes de la puiſſance ſont affectés du ſigne $+$; car $+ \times + \times + \times +$, &c. $= +$.

Lorſqu'ils ſont affectés, l'un du ſigne $+$, & l'autre du ſigne $-$, ou que l'on a, *par ex :* $a-b$; alors les termes de la puiſſance ſont alternativement affectés des ſignes $+$ & $-$; car les puiſſances de la lettre b étant alternativement paires & impaires, tous les termes où ces puiſſances ſeront paires, auront le ſigne $+$; car $- \times - = +$: & tous les termes où ces puiſſances ſeront impaires, auront le ſigne $-$: car $- \times - \times - = -$.

Lorſqu'ils ſont tous les deux affectés du ſigne $-$; alors les puiſſances paires de la racine auront à tous leurs termes le ſigne $+$, & les puiſſances impaires à tous leurs termes le ſigne $-$.

Regle III.

134. La premiere puiſſance de $a+b$ eſt $\overline{a+b} \times 1 = a+b$; or cette premiere puiſſance peut être repréſentée par $a^1 + b^1$; elle peut auſſi être repréſentée par $a^1 b^0 + a^0 b^1$.

La ſeconde puiſſance, ou le quarré de $a+b$ eſt $a^2 + 2ab + b^2$; cette ſeconde puiſſance par la même raiſon peut être repréſentée par $a^2 b^0 + 2a^1 b^1 + a^0 b^2$.

Il faut faire une remarque ſemblable pour toutes les autres puiſſances : d'où il ſuit

I°. Que l'on trouvera aiſément les expoſans de tous les termes d'une puiſſance quelconque d'un binôme, parce que ces expoſans croiſſent & décroiſſent réguliérement ; *par ex :* la ſixiéme puiſſance de $a+b$ ſera

$a^6b^0+a^5b^1+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+a^1b^5+a^0b^6$, où il eſt à remarquer que dans chaque terme la ſomme des expoſans des deux lettres eſt toujours égale au degré de la puiſſance.

II°. Que pour trouver les expoſans des termes d'une puiſſance quelconque, il n'y a qu'à diminuer toujours d'une unité l'expoſant de la lettre a, lequel dans le premier terme eſt égal au degré de la puiſſance, juſqu'à ce qu'il devienne nul, ou $=0$, & augmenter celui de b, qui eſt nul, ou $=0$, dans le premier terme, juſqu'à ce qu'il devienne égal au degré de la puiſſance.

Regle IV.

135. La premiere puiſſance $a+b$ ſe peut repréſenter par $1a+1b$, parce que toute quantité qui n'a pas de coefficient, eſt cenſée avoir pour coefficient l'unité ; par conſéquent les coefficiens des termes de la premiere puiſſance ſont $1+1$; la ſeconde puiſſance $a^2+2ab+b^2$ a pour coefficiens $1+2+1$, la troiſiéme puiſſance $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ a pour coefficiens $1+3+3+1$, & ainſi du reſte.

136. Or ſi l'on ordonne les termes des puiſſances par rapport à une lettre, *par ex :* a, & ſi l'on écrit les puiſſances conſécutives les unes ſous les autres de cette maniere,

I. Puiſſ.	$1a^1+1a^0$
II.	$1a^2+2a^1+1a^0$
III.	$1a^3+3a^2+3a^1+1a^0$
IV.	$1a^4+4a^3+6a^2+4a^1+1a^0$
V.	$1a^5+5a^4+10a^3+10a^2+5a^1+1a^0$

&

& ainſi de ſuite; il eſt à remarquer que l'on trouvera *par ex :* le coefficient 3 du ſecond terme de la troiſiéme puiſſance, en ajoutant enſemble les coefficiens du ſecond & du premier terme de la ſeconde puiſſance, leſquels ſont $2+1=3$; on trouvera le coefficient 1 du quatriéme terme de la même troiſiéme puiſſance, en ajoutant le coefficient du quatriéme terme de la ſeconde puiſſance (lequel terme eſt zero) au coefficient de ſon troiſiéme terme qui eſt 1, ce qui donne $0+1=1$: pareillement on trouvera le coefficient 6 du troiſiéme terme de la quatriéme puiſſance, en prenant la ſomme des coefficiens du troiſiéme & du ſecond terme de la troiſiéme puiſſance, laquelle ſomme eſt $3+3=6$; & ainſi de ſuite, l'on trouvera toujours le coefficient d'un terme quelconque, en prenant le coefficient du terme qui répond au-deſſus & l'ajoutant à celui du terme qui le précéde immédiatement vers la gauche.

Cette régle eſt fondée ſur les obſervations faites des circonſtances qui arrivent dans l'exaltation d'un même binôme à ſes différentes puiſſances conſécutives.

NOMBRE II.

De l'extraction des Racines complexes.

Nous allons parler de l'extraction des racines complexes, 1°. pour les quantités algébriques, 2°. pour les quantités numériques.

De l'Extraction des Racines complexes algébriques.

DÉFINITIONS.

I.

136. On appelle puiſſance *parfaite*, celle dont on peut extraire la racine juſte, exacte & ſans reſte: la puiſſance eſt dite *imparfaite*, lorſqu'on ne peut point en extraire la racine juſte & exacte, mais qu'il ſe trouve un reſte après l'extraction. Nous parlerons ſur-tout des puiſſances parfaites.

D

II.

137. Toute puiſſance eſt en même-tems un *Produit* & une *Somme*. Elle eſt *produit* en tant qu'elle réſulte de la multiplication de racines égales, ou d'une racine multipliée par elle-même un certain nombre de fois. Elle eſt *ſomme*, parce que les racines en ſe multipliant, ont formé un tout composé de parties aſſemblées, *par ex :* le quarré $a^2 + 2ab + b^2$ eſt le produit des racines $a+b$ & $a+b$, & eſt la ſomme des quantités a^2, $2ab$, b^2.

III.

138. Extraire la racine d'une puiſſance, c'eſt décompoſer une puiſſance, ou chercher les parties dont elle eſt compoſée comme *produit*, & pour les trouver, il faut connoître les parties dont elle eſt compoſée comme *ſomme*.

IV.

139. Les parties dont une puiſſance eſt compoſée en tant que ſomme, ſont les termes qui combinés avec les ſignes + & —, donnent la puiſſance : or

I°. La ſeconde puiſſance, ou le quarré d'un binôme quelconque $a + b$, ſçavoir, $a^2 + 2ab + b^2$ renferme trois choſes; a^2, quarré du premier terme de la racine; b^2 quarré du ſecond terme; & $2ab$ double produit du premier terme de la racine par le ſecond.

II°. La troiſiéme puiſſance, ou le cube d'un binôme $a+b$, qui eſt $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, renferme quatre parties; ſçavoir a^3 cube du premier terme de la racine, b^3 cube du ſecond terme; $3a^2b$ triple produit du ſecond terme par le quarré du premier, & $3ab^2$ triple produit du premier terme par le quarré du ſecond.

III°. On peut faire une remarque toute ſemblable pour les autres puiſſances, en élevant un binôme quelconque $a+b$ à ſes différentes puiſſances conſécutives.

IV°. Ce que nous venons de dire d'un binôme, peut être appliqué à un polynôme quelconque $a+b+c$, pourvu qu'il ſoit conſidéré comme étant un binôme $\overline{a+b}+c$: c'eſt-à-dire que ſon quarré *par ex :* renfermera 1°. le quarré du premier terme $\overline{a+b}$, lequel eſt $a^2+2ab+b^2$; 2°. le quarré du ſecond terme, ſavoir, c^2 ; 3°. le double produit du premier terme $\overline{a+b}$ par le ſecond c, lequel eſt $2ac+2bc$.

PROBLÊME.

140. *Extraire la Racine quelconque d'une Puiſſance algébrique.*

SOLUTION. Après avoir ordonné les termes de la puiſſance par rapport à une des lettres, élevez un binôme quelconque, *par ex :* $a+b$, à une puiſſance de même degré que celle dont on veut extraire la racine : les puiſſances de ce binôme $a+b$, leſquelles ſont

Seconde . . . $a^2+2ab+b^2$
Troiſiéme . . $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
Quatriéme . . $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$,

& ainſi de ſuite, ſerviront de formules, & indiqueront les diviſeurs dont il faudra ſe ſervir pour trouver chacun des termes de la racine : c'eſt de l'attention faite à ces formules (dont on connoît les racines) que tout dépend, & nous en allons déduire les régles ſuivantes.

I°. Pour trouver le premier terme de la racine, il faudra extraire du premier terme de la puiſſance donnée (qui eſt ici le dividende) la racine propoſée, ſoit quarrée, ſoit cubique, ſoit &c. & l'écrire au quotient. Si le premier terme du dividende n'étoit pas une puiſſance parfaite, il faudroit prendre la plus grande puiſſance parfaite contenue dans ce terme, & en extraire la racine, pour l'écrire au quotient.

II°. Pour trouver les autres termes de la racine, il faudra, 1°. élever le quotient déjà trouvé au degré de la puiſſance donnée, & le retrancher du dividende pour avoir le reſte, s'il y en a un, & ajouter ce reſte au terme ſuivant de la puiſſance pour en faire un ſecond membre de diviſion. 2°. On diviſera ce ſecond membre, ou le ſecond terme de la puiſſance, (lequel ſecond terme ſera quelquefois une quantité incomplexe, comme dans les exemples ci-deſſus, & quelquefois une quantité complexe, comme dans l'exemple (n°. 132) on le diviſera, dis-je, par l'expoſant de la puiſſance; & encore par la puiſſance du terme déjà trouvé au quotient, moindre d'un degré que la puiſſance propoſée; c'eſt-à-dire, que l'on diviſera le ſecond membre par l'expoſant 2, ſi on cherche la racine quarrée; par l'expoſant 3, ſi on cherche la racine cubique; par l'expoſant 4, ſi on cherche, &c. & de plus on le diviſera encore, ou par la premiere, ou par la ſeconde, ou par la troiſiéme, &c. puiſſance du terme déjà trouvé pour la racine, ſi l'on opere ſur une ſeconde, ſur une troiſiéme, ſur une quatriéme, &c. puiſſance; & le quotient qui réſultera de cette diviſion, donnera le terme, ou les termes qui reſtoient à trouver pour la racine.

III°. Ou ſi l'on veut diviſer le ſecond membre tout d'un coup & par une ſeule opération; le diviſeur dont on doit ſe ſervir, ſera le produit fait de l'expoſant de la puiſſance propoſée, par la puiſſance du terme déjà trouvé, moindre d'un degré que la puiſſance propoſée, & ce diviſeur eſt repréſenté dans la ſeconde puiſſance par $2a$; dans la troiſiéme par $3a^2$; dans la quatriéme par $4a^3$, &c. comme on le voit dans les formules ci-deſſus.

IV°. Il faudra élever au degré de la puiſſance donnée toute la quantité trouvée à la racine, pour la ſouſtraire du dividende; & ſi après la ſouſtraction il ne reſte rien, c'eſt une marque

que la puiſſance donnée étoit parfaite, & que la racine trouvée eſt juſte & exacte.

Exemple.

La puiſſance donnée pour en extraire la racine ſoit le cube

$$\left.\begin{array}{r} 8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3 \\ +12a^2c+6ac^2+c^3 \\ +12abc+3bcc \\ +3bbc \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \hline 2a+b+c \end{array}$$

dont il faille extraire la racine troiſiéme ou cubique. Aprés avoir ordonné les termes par rapport à la lettre a, comme on voit ci-deſſus, j'éleve le binôme $a+b$ à la troiſiéme puiſſance, & je l'écris à côté du dividende, ou de la puiſſance donnée, pour qu'elle me dirige & me ſerve de formule : or

I°. Si je voulois extraire la racine cubique de la formule, je trouverois la premiere racine a, en prenant immédiatement la racine cubique du premier terme a^3 ; ce qui m'avertit d'extraire immédiatement la racine cubique du premier terme $8a^3$, laquelle eſt $2a$, que j'écris au quotient ou à la racine.

II°. J'éleve au cube le terme déja trouvé pour la racine, & je le ſouſtrais de la puiſſance donnée, pour avoir le reſte, s'il y en a, & l'ajouter au terme ſuivant. Il ne s'en trouve point dans cet exemple. Maintenant ſi je voulois trouver l'autre terme b de la racine dans la formule, il eſt évident que je n'ai qu'à diviſer le ſecond terme $3a^2b$ par 3, qui eſt le degré de la puiſſance, & encore par a^2 qui eſt la puiſſance du terme déja trouvé à la racine, mais moindre d'un degré que la puiſſance donnée, ou tout d'un coup par $3a^2$; ce qui m'indique que je dois diviſer le ſecond terme de la puiſſance donnée & par 3, qui eſt le degré de la puiſſance, & par $4a^2$, qui eſt la ſeconde puiſſance du terme déja trouvé à la racine, ou la puiſſance moindre d'un degré que celle ſur laquelle on opére; c'eſt-à-dire, que je dois diviſer par $3 \times 4a^2$, ou $12a^2$: or le ſecond terme de la puiſſance donnée eſt (131) & (132) la quantité complexe $12a^2b + 12a^2c$, laquelle diviſée par $12a^2$ donnera au quotient $b + c$, que j'écris à la racine.

III°. Ayant élevé à la troiſiéme puiſſance la quantité $2a + b + c$ trouvée à la racine, & l'ayant ſouſtraite du dividende, ou de la puiſſance donnée, il ne reſte rien; ce qui dénote que l'opération eſt finie, & que le quotient trouvé eſt la racine juſte & exacte de la puiſſance donnée.

Démonſtration.

Il eſt évident que pour trouver la premiere racine $2a$, on doit extraire immédiatement la racine cubique du premier terme $8a^3$; il n'y a nulle difficulté. Après avoir trouvé la premiere racine $2a$, il eſt aiſé d'appercevoir qu'on trouvera les autres racines $b + c$, en diviſant le ſecond terme $12a^2b + 12a^2c$ de la puiſſance par 3, qui eſt le degré de la puiſſance, & par $4a^2$, qui eſt la premiere racine élevée à un degré moindre que la puiſſance propoſée, ou en diviſant tout d'un coup par $12a^2$; la raiſon en eſt que dans une troiſiéme puiſſance, *par ex:* le premier terme eſt toujours le cube de la racine par rapport à laquelle on a ordonné les termes de la puiſſance; le ſecond terme eſt la ſomme des autres racines multipliées tant par le degré de la puiſſance, que par le quarré de la premiere racine: car dans l'exemple précédent le ſecond terme eſt $12a^2b + 12a^2c$ (132), lequel, comme on le voit, eſt la même choſe que $12a^2 \times \overline{b+c}$: donc en ſuivant la méthode preſcrite cideſſus, je dois trouver tous les termes qui compoſent la racine propoſée.

Il eſt facile d'appliquer les regles & la démonſtration que nous venons de donner à toute autre puiſſance quelconque donnée, parce qu'elles ſont générales & fondées ſur la nature & la formation des puiſſances.

Corollaire.

141. Une puiſſance quelconque étant donnée pour en extraire la racine, il ſera aiſé de connoître tout d'un coup de combien de termes doit être compoſée la racine que l'on cherche; car cette racine doit avoir autant de termes & un de plus qu'il y a de parties qui compoſent le ſecond terme de la puiſſance. En effet le ſecond terme d'une puiſſance quelconque eſt toujours celle des racines qui a ordonné les termes de la puiſſance, ou un degré de cette racine multiplié par la ſomme de toutes les autres racines. Ce ſecond terme n'a donc qu'une ſeule partie, lorſqu'il y a deux racines; il contient deux parties, lorſqu'il y a trois racines, & ainſi de ſuite.

De l'Extraction des Racines complexes numériques.

Les principes & les regles que nous venons de donner pour l'extraction des racines des puiſſances algébriques, s'appliquent auſſi à l'extraction des racines des puiſſances numériques. Avant d'en faire l'application, il eſt à propos de connoître les quarrés & les cubes des dix premiers nombres; ſçavoir,

Racines,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Quarrés,	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.
Cubes,	1,	8,	27,	64,	125,	216,	243,	512,	729,	1000.

On peut continuer cette table tant que l'on voudra.

Propoſition I.

142. De la table précédente il eſt aiſé de déduire les propriétés ſuivantes: ſçavoir,

1°. Un nombre quelconque ne peut jamais avoir à ſon quarré plus que le double du nombre des chiffres de la racine; car ſi parmi les nombres composés de deux chiffres, *par ex :* l'on prend le plus grand nombre possible, sçavoir 99, son quarré 9801 ne contiendra que le double précisément du nombre des chiffres de la racine.

II°. Un nombre quelconque ne peut jamais avoir à son cube plus que le triple du nombre des chiffres de la racine; car entre les nombres composés de deux chiffres, *par ex :* prenant le plus grand nombre possible, sçavoir 99, son cube 970299 ne contiendra précisément que le triple du nombre des chiffres de la racine.

III°. On doit raisonner de la même maniere des autres puissances; c'est-à-dire, qu'une quantité composée d'un certain nombre de chiffres ne pourra jamais avoir à sa quatriéme puissance, plus que le quadruple; à sa cinquiéme puissance plus que le quintuple du nombre de ses chiffres; & en général que le nombre des chiffres qui composent une puissance quelconque, ne peut jamais être plus grand que le produit de l'exposant de la puissance par le nombre des chiffres de la racine: de sorte qu'appellant z le nombre des chiffres de la puissance, n celui des chiffres de la racine, & p l'exposant de la puissance, on aura quelquefois $z < np$; & $z = np$; mais jamais $z > np$.

Corollaire.

143. Donc si l'on partage une puissance donnée en tranches allant de droite à gauche, de façon que chaque tranche contienne autant de chiffres qu'il est marqué par l'exposant de la puissance; sçavoir, deux chiffres pour la seconde puissance, trois chiffres pour la troisiéme puissance, & ainsi du reste, (excepté la premiere tranche à gauche, qui peut en contenir moins; sçavoir, lorsque $z < np$) la racine aura toujours autant de caracteres ou chiffres, qu'il y aura de tranches dans la puissance.

Propoſition II.

144. Le quarré d'un nombre renferme les mêmes parties que celui d'une quantité algébrique; ſçavoir,

I°. Le quarré d'un nombre compoſé de deux chiffres contient le quarré du premier chiffre, plus le double produit du premier chiffre par le ſecond, & le quarré du ſecond; c'eſt ce que l'on voit dans 625, quarré de $25 = 20 + 5$, dans lequel on trouve 400 quarré de 20, 200 double produit de 20 par 5, & 25 quarré de 5; car $400 + 200 + 25 = 625$: & c'eſt ce qui eſt repréſenté par la formule $a^2 + 2ab + b^2$, quarré du binôme $a + b$.

II°. Si le nombre eſt compoſé de trois chiffres, tel quel 125, on peut conſidérer les deux premiers chiffres, (ou, ſi l'on veut, les deux derniers chiffres) comme ne faiſant qu'un ſeul terme, & alors le quarré du nombre 125 contiendra le quarré du premier terme 12, (lequel terme 12 étant compoſé de deux chiffres, aura à ſon quarré toutes les parties dont nous venons de parler ci-deſſus) plus il contiendra le double produit du premier terme 12 par le ſecond 5, & le quarré du ſecond terme 5; c'eſt ce qui eſt encore repréſenté par la formule $a^2 + 2ab + b^2$.

III°. Ce ſera la même choſe, ſi la racine eſt compoſée de 4, de 5, de 6, &c. caractéres ou chiffres. De ſorte qu'en général le quarré d'une racine compoſée d'un nombre quelconque de chiffres, contiendra toujours le quarré du premier chiffre, plus le double produit du premier chiffre par le ſecond, avec le quarré du ſecond: plus le double produit des deux premiers chiffres par le troiſiéme, avec le quarré du troiſiéme: plus le double produit des trois premiers chiffres par le quatriéme, avec le quarré du quatriéme; & ainſi du reſte.

Proposition III.

145. Le cube d'un nombre quelconque renferme toutes les mêmes parties que celui d'une quantité algébrique; sçavoir,

I°. Le cube d'un nombre composé de deux chiffres contient le cube du premier chiffre, plus le triple produit du quarré du premier chiffre par le second, plus le triple produit du premier chiffre par le quarré du second, & le cube du second chiffre; c'est ce qui est représenté par la formule $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

II°. Si le nombre est composé de trois chiffres, tel que 435, on peut considérer les deux premiers chiffres, (ou, si l'on veut, les deux derniers) comme ne faisant qu'un seul terme; & en conséquence l'on doit faire ici une remarque toute semblable à celle que nous avons faite pour le quarré.

III°. On doit dire la même chose, si la racine est composée de 4, de 5, de 6, &c. caracteres ou chiffres. De sorte qu'en général le cube d'une quantité composée d'un nombre quelconque de chiffres renfermera, 1°. le cube du premier chiffre, plus le triple produit du quarré du premier chiffre par le second, plus le triple produit du premier chiffre par le quarré du second, avec le cube de ce second chiffre. 2°. Il contiendra le triple produit du quarré des deux premiers chiffres par le troisiéme, plus le triple produit des deux premiers chiffres par le quarré du troisiéme, avec le cube de ce troisiéme chiffre. 3°. Il renferme aussi le triple produit du quarré des trois premiers chiffres par le quatriéme, plus le triple produit des trois premiers chiffres par le quarré du quatriéme, avec, &c.

Proposition IV.

146. On peut déterminer d'une maniere toute semblable les parties qui composent la quatrié-

me, la cinquiéme, la ſixiéme, en un mot la puiſſance quelconque d'une racine composée de deux, de trois, de quatre, ou en général d'un nombre quelconque de chiffres. Mais nous nous arrêtons ici principalement aux ſecondes & troiſiémes puiſſances.

Corollaire I.

147. Si l'on partage en tranches un quarré dont la racine eſt composée de pluſieurs chiffres; la premiere tranche à gauche renferme le quarré du premier chiffre; le reſte de la premiere tranche, (s'il y en a un, après en avoir ôté le quarré du premier chiffre) joint à la ſeconde tranche, renferme le double produit du premier chiffre par le ſecond, avec le quarré du ſecond; le reſte de la ſeconde tranche, (s'il y en a un, après avoir ſouſtrait le quarré des deux premiers chiffres) joint à la troiſiéme tranche, contient le double produit des deux premiers chiffres par le troiſiéme, avec le quarré du troiſiéme.

Corollaire II.

148. Pareillement, ſi l'on partage en tranches un cube dont la racine contienne pluſieurs chiffres; la premiere tranche à gauche renfermera le cube du premier chiffre; le reſte de la premiere tranche, (s'il y en a un, après en avoir ôté le cube du premier chiffre) joint à la ſeconde tranche, contiendra le triple produit du quarré du premier chiffre par le ſecond, plus le triple produit du premier chiffre par le quarré du ſecond, avec le cube du ſecond chiffre; le reſte de la ſeconde tranche, (s'il y en a un, après avoir ſouſtrait des deux premieres tranches le cube des deux premiers chiffres) joint à la troiſiéme tranche, renfermera le triple produit du quarré des deux premiers chiffres par le ſecond, plus, &c.

Remarque.

149. Toutes ces parties qui compoſent une

puiſſance, ſont diſtinguées en Algébre par l'interpoſition des ſignes + & —; mais on les diſtingue dans les nombres par le rang que tiennent les chiffres dans la puiſſance; *par ex:* dans le quarré d'un nombre composé de trois chiffres, & qui aura par conſéquent, trois tranches (143), le quarré du premier chiffre ſera dans la premiere tranche à gauche; le double produit du premier chiffre par le ſecond ſera au premier rang de la ſeconde tranche, & le quarré du ſecond chiffre au ſecond rang de la même tranche; le double produit des deux premiers chiffres par le troiſiéme ſera au premier rang de la troiſiéme tranche, & le quarré du troiſiéme chiffre au ſecond rang de la même tranche. C'eſt ce que l'on peut voir dans le quarré 294849 du nombre 543, dans lequel vous trouverez tous les produits ci-deſſus dénommés, de façon qu'ils avancent tous les uns ſur les autres d'un rang ſur la droite:

		tranches.
Quarré de 5	25	I.
Doub. prod. de 5 × 4.	40 . . .	I. & II.
Quarré de 4	16 . .	II.
Doub. prod. de 54 × 3	324.	II. & III.
Quarré de 3	9	III.

294849 quarré de 543

Regles.

150. De tout ce que nous avons dit on peut déduire les regles ſuivantes:

I°. Pour trouver le premier chiffre de la racine d'une puiſſance donnée, il n'y a qu'à extraire immédiatement de la premiere tranche la racine propoſée.

II°. On trouvera le ſecond chiffre de la racine, en diviſant le reſte de la premiere tranche, (s'il y en a un, après en avoir ſouſtrait le quarré du premier chiffre déjà trouvé) joint au premier chiffre de la seconde tranche, par l'exposant de la puissance, & puis en le divisant encore par le chiffre déjà trouvé à la racine, mais élevé à un degré moindre d'une unité que celui de la puissance; ou tout d'un coup, par le produit fait de l'exposant de la puissance proposée, par la puissance du terme déjà trouvé, moindre d'un degré que la proposée.

III°. Pour trouver le troisiéme chiffre de la racine, on doit diviser le reste des deux premieres tranches, (s'il y en a un, après en avoir soustrait le quarré des deux chiffres déjà trouvés) joint au premier chiffre de la troisiéme tranche, & par l'exposant de la puissance, & par les deux chiffres déjà trouvés & élevés à une puissance moindre d'un degré que la puissance donnée.

IV°. On trouvera le quatriéme, le cinquiéme, & tous les termes suivans par la même méthode.

Remarque I.

151. Lorsqu'on ne peut pas soustraire des tranches sur lesquelles on a operé, la puissance requise du chiffre ou des chiffres trouvés à la racine; c'est une marque que le dernier chiffre écrit à la racine est trop grand: en ce cas il faut le diminuer d'une unité, & le diminuer toujours d'une unité, jusqu'à ce que cette soustraction devienne possible.

Remarque I I.

152. Dans l'extraction des racines, si le membre de division sur lequel on opere ne peut pas être divisé par le diviseur dont on se sert; il faut écrire zero à la racine, comme on l'écrit au quotient dans la division; afin de faire garder aux chiffres le rang qu'ils doivent avoir.

PROBLÊME I.

153. *Extraire la Racine quarrée d'un Nombre donné* 214369.

SOLUTION. Partagez le nombre donné en tranches de deux chiffres chacune; vous aurez trois tranches : il y aura donc trois chiffres à la racine.

$$\begin{array}{r} 21'\,43'\,69 \\ 16 \\ \hline 5'\,4 \\ 21\;16 \\ \hline 27'\;6 \\ 2\,1\,4\,3\,6\,9 \\ \hline 000000 \end{array} \left\} \begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ \hline 463 \end{array}\right.$$

I°. Cherchez le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche 21, lequel eſt 16 dont la racine eſt 4; écrivez 4 au quotient, & retranchez le quarré 16 de 21 pour avoir le reſte 5.

II°. A côté du reſte 5 abaiſſez le premier chiffre 4 de la tranche ſuivante, & vous aurez pour membre de diviſion 54 : diviſez 54 par l'expoſant 2 de la puiſſance & par la premiere puiſſance du chiffre 4 déjà trouvé à la racine ; ou plutôt, diviſez 54 par $2 \times 4 = 8$; & le quotient eſt 6. Or pour s'aſſurer que le chiffre 6 trouvé pour la racine eſt bon, il ne ſuffit pas de l'éprouver ſelon la méthode propre à la diviſion ; c'eſt-à-dire, qu'il ne ſuffit pas que le produit du quotient 6 par le diviſeur 8 puiſſe être ſouſtrait du membre de diviſion 54; mais il faut l'éprouver ſuivant la méthode propre à l'extraction des racines, qui conſiſte à élever au quarré les deux chiffres 46 déjà trouvés pour la racine, & à retrancher leur quarré 2116 des deux premieres tranches ; la ſouſtraction eſt ici poſſible : écrivez donc 6 à la racine, & le reſte 27 ſous le quarré 2116.

III°. A côté du reſte 27 abaiſſez le premier chiffre 6 de la troiſiéme tranche, & diviſez 276 par l'expoſant 2 de la puiſſance, & encore par la premiere puiſſance du nombre 46 déjà trouvé à la racine ; ou plutôt, diviſez par $2 \times 46 = 92$, en diſant, en 27 combien de fois 9 ? trois fois : écrivez 3 au quotient ; enſuite élevez le nombre trouvé 463 au quarré pour le ſouſtraire des trois tranches ; après la ſouſtraction il ne reſte rien : ce qui dénote que le chiffre 3 eſt bon, & que la racine trouvée eſt la véritable.

Remarque.

154. La ſolution précédente eſt une application de la méthode générale que nous avons donnée ci-deſſus. On peut la ſimplifier pour l'extraction des racines quarrées de cette maniere :

$$
\begin{array}{llll}
21' & 43' & 69 & \Big\} \; a^2 + 2ab + b^2 \\
16 & & & \quad 463 \\
\hline
5' & 43 & & \\
 & 86 & & \\
\hline
5' & 16 & & \\
 & 27' & 69 & \\
 & 9 & 23 & \\
\hline
 & 27 & 69 & \\
\hline
 & 00 & 00 &
\end{array}
$$

Après avoir trouvé 4 à la racine & ſouſtrait le quarré 16 de la premiere tranche, ce qui donne le reſte 5 :

1°. A côté du reſte 5 abaiſſez la ſeconde tranche toute entiere, & vous aurez pour membre de diviſion 543, qu'il faut diviſer par $2 \times 4 = 8$, comme nous venons de le dire ; écrivez le diviſeur 8 ſous le premier chiffre de la tranche abaiſſée, & dites : en 54 combien de fois 8 ? ſix fois ; écrivez 6 à la racine, & à côté du diviſeur 8 ; puis multipliez 86 par 6, & vous aurez 516 ; (ce produit 516 renferme, comme il eſt aiſé de le voir, le double produit du premier chiffre 4 par le ſecond 6, plus le quarré de 6 plus avancé d'un rang vers la droite ; c'eſt-à-dire , que $86 \times 6 = 480 + 36 = 516$) retranchez ce produit du membre de diviſion , & il reſtera 27.

II°. A côté du reſte 27 abaiſſez la troiſiéme tranche, & prenez pour diviſeur $2 \times 46 = 92$, c'eſt-à-dire , le double du nombre 46 déjà trouvé à la racine ; écrivez le diviſeur 92 ſous le membre à diviſer, de façon que le dernier chiffre 2 du diviſeur réponde au premier chiffre 6 de la tranche abaiſſée, & dites : en 27 combien de fois 9 ? trois fois ; écrivez 3 au quotient , & à côté du diviſeur , & faites le reſte comme ci-deſſus.

PROBLÊME II.

155. *Extraire la Racine cubique d'un nombre donné* 47437928.

SOLUTION. Je partage le nombre donné en tranches qui contiennent chacune trois chiffres (excepté la premiere à gauche, qui peut en contenir moins) : il y a trois tranches , il y aura donc trois chiffres à la racine.

$$\begin{array}{l|l}
47'\ 437'\ 928 & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \hline
27 & 362 \\ \cline{1-1}
20'\ 4 & \\
46'\ 656 & \\
\quad 781,\ 9 & \\
47437928 & \\ \cline{1-1}
00000000 &
\end{array}$$

I°. Je cherche le plus grand cube contenu dans 47 , c'eſt 27 , dont la racine cubique eſt 3 ; je l'écris au quotient , & je ſouſtrais 27 de 47 ; reſte 20 , à côté duquel j'abaiſſe le premier chiffre de la ſeconde tranche ; ce qui me donne le nouveau membre de diviſion 204.

II°. Je diviſe ce membre & par l'expoſant 3 de la puiſſance , & par la ſeconde puiſſance 9 de la racine 3 déjà trouvée , (laquelle puiſſance eſt moindre d'un degré que la proposée) ou, ce qui revient au même, je divise par $3 \times 9 = 27$, disant en 204 combien de fois 27, ou en 20 combien de fois 2? il y est 9 fois : mais le 9 n'est pas bon suivant la division ; car le produit $27 \times 9 = 243$ ne peut pas être soustrait du dividende 204. Le 8 n'est pas bon pour la même raison. Le 7 est bon suivant la division; car le produit $27 \times 7 = 189$ peut être soustrait du dividende 204; mais il n'est pas bon selon l'extraction des racines : car le cube des deux chiffres 37 qui se trouveroient à la racine, ne pourroit pas être soustrait des deux premieres tranches. Mais je trouve que le 6 est bon; je l'écris donc à la racine, & j'éleve au cube le quotient 36 déjà trouvé, & je soustrais ce cube (qui est 46656) des deux premieres tranches; le reste est 781, à côté duquel j'abaisse le premier chiffre 9 de la troisiéme tranche; ce qui me donne 7819 pour membre de division.

III°. Je divise ce nouveau membre & par l'exposant 3 de la troisiéme puissance donnée, & par la seconde puissance 1296 des deux chiffres 36 déjà trouvés à la racine ; ou plutôt, par le triple du quarré de 36, ou par $3 \times 1296 = 3888$, disant en 7819 combien de fois 3888, ou en 7 combien de fois 3? deux fois. J'écris à la racine le chiffre 2, lequel est bon, & selon la division; car le produit 2×3888 peut être soustrait du dividende: & selon l'extraction des racines; car élevant au cube tout le quotient trouvé pour la racine, & retranchant ce cube de la puissance donnée, il ne reste rien : ce qui dénote que la racine trouvée est juste, & que l'opération est finie.

La démonstration de toutes ces regles est aisée à appercevoir, après ce que nous avons dit ci-dessus de l'extraction des racines, laquelle est une *décomposition* des puissances, & dont les regles se déduisent de la nature & de la *composition* même des puissances.

SECTION II.

Du Calcul des Rapports des Quantités, ou de l'Analogie & des Proportions.

I°. Dans la soustraction, si l'on compare la quantité dont on veut soustraire, avec celle que l'on veut soustraire; la maniere d'être d'une de ces quantités par rapport à l'autre, s'appelle *Raison* ou *Rapport*, & ce rapport est exprimé par la *Différence*. Pareillement dans la division, si l'on compare le *dividende* avec le *diviseur*, ces deux quantités ont aussi une maniere d'être, ou un *rapport*, qui est exprimé par le *quotient*.

II°. On connoît donc le *rapport* ou la *raison* d'une grandeur à une autre, ou par la *différence*, ou par le *quotient* que l'on trouve en comparant les deux grandeurs.

III°. Les rapports des grandeurs ou quantités peuvent être soumis au calcul, aussi bien que les grandeurs elles-mêmes; parce que ces rapports étant susceptibles de plus & de moins, peuvent admettre les mêmes combinaisons que les quantités elles-mêmes.

IV°. Les rapports sont ou de termes connus avec des termes connus, ou de termes connus avec des termes inconnus : dans le premier cas, le calcul consiste dans la comparaison des quantités connues, & s'appelle *Calcul des Rapports*, ou *Analogie* : dans le second cas il consiste à découvrir des quantités inconnues par le moyen de celles qui sont connues, & on l'appelle *Calcul analytique*, ou *Analyse*.

CHAPITRE I.

De l'Analogie, & des Proportions.

SI l'on compare ensemble deux quantités pour connoître combien de fois l'une est contenue dans l'autre, ou de combien l'une surpasse l'autre, ou aura un *rapport*, ou une *raison :* si deux raisons sont égales, cette égalité s'appelle *Analogie* ou *Proportion:* si on a une suite de raisons égales, cette suite s'appelle *Progression :* si la progression est continuée à l'infini, elle s'appelle *Suite, Serie,* ou *Progression infinie.* Nous allons parler, 1°. des raisons; 2°. des proportions; 3°. des progressions.

ARTICLE I.

Des Raisons.

Toutes les quantités homogênes ont entr'elles un rapport, ou une raison, parce qu'elles ont toujours ou une différence, ou un quotient; 6 & 8 ont une différence qui est 2; 12 & 4 ont un quotient qui est 3 : cette différence ou ce quotient s'appelle *Valeur* ou *Exposant* de la raison. Il est à remarquer,

I°. Que toute raison est composée de deux termes : car il ne peut y avoir de comparaison qu'entre deux termes; le premier s'appelle *Antécédent*, le second s'appelle *Conséquent.*

II°. Que toute raison est ou *Arithmétique* ou *Géométrique.* La raison arithmétique est celle où l'on cherche la différence, ou l'excès dont l'antécédent surpasse le conséquent, & on l'exprime ainsi; 5. 2, 7. 3, *a. b*, *c. f.* &c. La raison géométrique est celle où l'on cherche combien de fois, ou comment le conséquent est contenu dans l'antécédent, & on l'exprime ainsi; 2 : 3, 3 : 4, 5 : 9, *a* : *b*, &c. ou bien de cette maniere, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{a}{b}$, &c. La valeur de la raiſon arithmétique eſt la différence du conſéquent ſouſtrait de l'antécédent; & la valeur de la raiſon géométrique eſt le quotient de l'antécédent diviſé par le conſéquent. Nous parlerons ici ſur-tout des raiſons géométriques.

III°. Que deux raiſons qui ont une même valeur, ſont toujours égales, *par ex:* les raiſons géométriques 8 : 4 & 6 : 3 ſont égales, car 8 : 4, ou $\frac{8}{4} = 2$; pareillement 6 : 3, ou $\frac{6}{3} = 2$.

IV°. Que les raiſons prennent différens noms, ſuivant le rapport de l'antécédent au conſéquent. La raiſon 2 : 1, s'appelle raiſon *double;* celle de 3 : 1 s'appelle raiſon *triple;* &c. Celle de 1 : 2, s'appelle raiſon *ſous-double;* celle de 1 : 3, raiſon *ſous-triple*, &c. Celle de 3 : 2, raiſon *ſeſqui-altere.* En un mot les Géométres ont donné des noms à chaque eſpéce de raiſons pour les diſtinguer. De plus la raiſon géométrique s'appelle raiſon d'*Egalité*, lorſque l'antécédent & le conſéquent ſont égaux; *par ex:* 2 : 2, 3 : 3, $a : a$, $b : b$, &c. Elle s'appelle raiſon d'*Inégalité*, lorſque l'antécédent & le conſéquent ſont inégaux; *par ex:* 3 : 4, $a : b$, &c.

Propoſition I.

156. *Toute raiſon géométrique eſt, ou ſimple, ou compoſée.*

Démonstration. On appelle raiſon *ſimple* le rapport qui ſe trouve entre deux quantités ſimplement; on appelle raiſon *compoſée* le produit de deux raiſons ſimples multipliées l'une par l'autre, antécédent par antécédent, & conſéquent par conſéquent; *par ex :* la raiſon $\frac{2}{5}$ eſt ſimple; mais ſi j'ai *par ex :* les deux raiſons ſimples $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$ & ſi je les multiplie l'une par l'autre, antécédent par antécédent, conſéquent par conſéquent, pour avoir $\frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$; la raiſon $\frac{6}{20}$ eſt dite être *compoſée* des deux raisons simples $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$: pareillement la raison $\frac{abd}{cef}$ est composée de trois raisons simples $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{d}{f}$.

Proposition I I.

157. *Toute Raison simple est, ou* directe, *ou* réciproque.

Démonstration. La raison géométrique s'appelle *directe*, lorsque deux quantités telles que a & b sont entr'elles comme deux autres quantités, *par ex :* 6 & 3, prises dans le même ordre, c'est-à-dire, que a est double de b, de même que 6 est double de 3. Au contraire la raison est dite être *réciproque*, ou *indirecte*, ou *renversée*, lorsque les deux quantités a & b sont entr'elles comme deux autres 6 & 3, mais prises dans un ordre renversé, c'est-à-dire, que a & b sont entr'eux non comme 6 & 3 ; mais comme 3 & 6, ou que a n'est que la moitié de b, de même que 3 n'est que la moitié de 6.

Proposition I I I.

158 Toute raison composée de raisons simples & inégales, s'appelle simplement raison *composée*, ou raison *multiple ;* telle est la raison $\frac{6}{20}$, laquelle est composée de deux raisons, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, inégales entr'elles : mais une raison oompofée de raisons égales s'appelle autrement ; sçavoir, une raison composée de deux raisons égales s'appelle *doublée ; par ex :* la raison $\frac{4}{9}$ est doublée des raisons $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$; une raison composée de trois raisons égales s'appelle *triplée ; par ex :* la raison $\frac{8}{27}$ est triplée des raisons $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$; une raison composée de quatre raisons égales s'appelle *quadruplée ;* & ainsi du reste.

Proposition I V.

159. *Toute Raison composée est, ou* directement, *ou* indirectement *composée.*

Démonstration. En effet,

I°. Si je multiplie les deux raisons $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, l'une par l'autre, antécédent par antécédent; conſéquent par conſéquent, pour avoir la raiſon compoſée $\frac{6}{20}$; cette raiſon $\frac{6}{20}$ s'appelle raiſon *directement compoſée* des deux raiſons ſimples ou *compoſantes* $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$.

II°. Mais ſi je multiplie les deux raiſons $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, l'une par l'autre; multipliant, non l'antécédent par l'antécédent, & le conſéquent par le conſéquent, mais l'antécédent de l'une par le conſéquent de l'autre, & le conſéquent de l'une par l'antécédent de l'autre; la raiſon qui en réſultera ſera $\frac{10}{12}$, & s'appelle raiſon *réciproquement compoſée* des deux raiſons compoſantes $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$.

Propoſition V.

160. *Si les Raiſons ſimples ou compoſantes ſont égales entr'elles, la Raiſon qui en ſera réciproquement compoſée, ſera une Raiſon d'égalité.*

DÉMONSTRATION. Soient les deux raiſons égales $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$; la raiſon qui en ſera réciproquement compoſée, ſera la raiſon $\frac{12}{12}$, qui eſt une raiſon d'égalité: ce qui arrive à cauſe de la compenſation qui ſe trouve entre les multiplicateurs & les multiplicandes dans le cas des raiſons égales, compenſation d'où réſultent des produits égaux.

Cette propſition ſera énoncée dans la ſuite ſous d'autres expreſſions, lorſque nous dirons que dans toute proportion géométrique le *produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.*

Corollaire I.

161. Toute fraction eſt, & doit être regardée comme une raiſon géométrique: en effet, la *fraction*, la *raiſon*, la *diviſion*, ne ſont rien autre choſe que trois points de vue différents qui appartiennent à une même choſe. La *fraction* eſt le rapport d'une partie à ſon tout: la *raiſon* eſt le rapport d'un tout à un autre tout: La *diviſion* eſt l'opération dont on ſe ſert pour connoître le rapport, ou pour connoître la valeur ſoit de la raiſon, ſoit de la fraction. C'eſt pourquoi,

I°. Comme une *fraction* eſt d'autant plus grande que ſon numérateur eſt plus grand, le dénominateur reſtant le même; ou que ſon dénominateur eſt plus petit, le numérateur reſtant le même, de même la *raiſon* eſt d'autant plus grande que ſon antécédent eſt plus grand, le conſéquent reſtant le même; ou que ſon conſéquent eſt plus petit, l'antécédent reſtant le même.

II°. Et c'eſt pour cette raiſon que l'on dit que les valeurs des raiſons géométriques ſont entr'eux en *raiſon directe* des antécédents & en *raiſon réciproque* des conſéquents; & pareillement que les valeurs des fractions ſont en *raiſon directe* des numérateurs, & en *raiſon réciproque* des dénominateurs.

Corollaire I I.

162. Tous les nombres pris deux à deux ont entr'eux une raiſon géométrique; parce que l'un eſt toujours contenu un certain nombre de fois dans l'autre: ce *combien de fois* eſt exprimé par un troiſiéme nombre que l'on appelle *partie aliquote, meſure commune, quotient, ſous-multiple.* Tous les nombres pris deux à deux ont donc une partie aliquote qui leur ſert de meſure commune, ſçavoir, l'unité au moins; & alors on les appelle quantités *commenſurables*, ou *rationelles.*

C'eſt pourquoi deux quantités commenſurables ſont toujours entr'elles comme nombre à nombre; *par ex:* comme 2 : 3, ou comme 4 : 5, ou, &c. parce que leur rapport peut toujours être exprimé par deux nombres.

Mais il y a des quantités qui n'ont point de partie aliquote, aucune meſure commune: alors ces quantités s'appellent *incommenſurables* ou *irrationelles*; parce que l'on ne peut connoître le rapport de deux quantités, qu'autant qu'elles peuvent être exprimées ou repréſentées par des nombres.

ARTICLE II.

Des Proportions.

La proportion eſt l'égalité de deux raiſons: une raiſon renferme deux termes, ſçavoir, l'antécédent & le conſéquent; d'où il ſuit que la proportion renferme quatre termes, ſçavoir deux antécédens & deux conſéquens. Le premier & le dernier terme s'appellent *Extrêmes ;* les deux termes intermédiaires s'appellent *Moyens.* La proportion eſt, ou *arithmétique* ou *géométrique ;* la proportion arithmétique eſt l'égalité de deux raiſons arithmétiques; la proportion géométrique eſt l'égalité de deux raiſons géométriques.

LEMME I.

163. *Dans tout Rapport arithmétique, le Conſéquent eſt égal à l'Antécédent augmenté ou diminué de la différence qui ſe trouve entre les deux termes ; augmenté, ſi l'Antécédent eſt plus petit que le Conſéquent ; diminué, s'il eſt plus grand que le Conſéquent.*

DÉMONSTRATION. Dans le rapport arithmétique 8. 2, dont la différence eſt 6, il eſt évident que le conſéquent 2 eſt égal à l'antécédent 8 diminué de la différence 6, ou que l'on a $2=8-6$: de même dans le rapport arithmétique 2. 8, dont la différence eſt encore 6, on aura le conſéquent $8=2+6$. Pareillement ſi les deux termes a & b ont pour différence d ; dans le rapport $a \cdot b$, on aura $b=a+d$, ou $b=a-d$, ſelon que a ſera plus petit, ou plus grand que b.

Corollaire.

164. Donc en ſuppoſant que l'antécédent ſoit repréſenté par a, & la différence par d, le conſéquent ſera $a \pm d$. D'où il ſuit que toute raiſon arithmétique pourra être repréſentée par cette expreſſion, ou formule générale, $a \cdot a \pm d$.

LEMME II.

165. *Dans toute Proportion arithmétique, il regne une*

une même différence entre l'Antécédent & le Conſéquent dans chacune des deux raiſons.

DÉMONSTRATION. Dans une proportion arithmétique les deux raiſons ſont égales, & ont une même valeur : or la valeur d'une raiſon arithmétique conſiſte dans la différence des deux termes ; donc il regne une même différence dans les deux raiſons ; & par conſéquent ſi la différence de la premiere raiſon eſt exprimée par d, celle de la ſeconde ſera auſſi exprimée par d.

Corollaire.

166. Donc en ſuppoſant que a repréſente le premier antécédent, c le ſecond, & d la différence qui regne dans chacune des deux raiſons ; la proportion arithmétique pourra ſe repréſenter par cette expreſſion, ou formule générale, $a \cdot a \pm d \because c. c \pm d$.

THÉORÊME I.

167. *Dans une Proportion arithmétique la Somme des Extrêmes eſt égale à la Somme des Moyens.*

DÉMONSTRATION. Soit la proportion arithmétique $a \cdot b \because c \cdot f$; par le corollaire précédent cette proportion peut ſe repréſenter par cette expreſſion générale $a \cdot a \pm d \because c \cdot c \pm d$; or la ſomme des extrêmes $a + c \pm d = c + a \pm d$, ſomme des moyens comme il eſt évident.

Corollaire I.

168. Dans une proportion arithmétique *continue* ; c'eſt-à-dire, dans laquelle un même terme eſt tout à la fois *conſéquent* de la premiere, & *antécédent* de la ſeconde raiſon, comme dans la proportion $3 \cdot 2 \because 2 \cdot 1$, (laquelle s'exprime d'une maniere abrégée par $\div 3 \cdot 2 \cdot 1$,) la ſomme des extrêmes eſt double du moyen terme ; car $3 + 1 = 2 + 2$.

Corollaire II.

169. Dans une proportion arithmétique, ſi l'un des quatre termes ; *par ex :* le dernier eſt inconnu, il ſera aiſé de le trouver : ainſi dans la proportion

$8 \cdot 6 :: 4 \cdot x$, le dernier terme inconnu x eſt 2; car (167) $8+x=6+4$; donc ſi de la ſomme $6+4 = 10$, on retranche le terme 8, le reſte 2 ſera la valeur du terme inconnu x.

LEMME III.

170. *Dans une Raiſon géométrique, le Conſéquent eſt toujours égal à l'Antécédent diviſé par le Quotient de la Raiſon.*

DÉMONSTRATION. Dans la raiſon géométrique $12 : 4$, ou $\frac{12}{4}$, dont le quotient eſt 3, on aura le conſéquent $4=\frac{12}{3}$; pareillement dans la raiſon $4 : 12$, ou $\frac{4}{12}$, dont le quotient eſt $\frac{1}{3}$, on aura le conſéquent 12 égal à 4 diviſé par $\frac{1}{3}$, ou $12=\frac{4}{\frac{1}{3}}=\frac{4\times 3}{1}=4 \times 3=12$. La raiſon eſt qu'une raiſon géométrique eſt une diviſion : or dans une diviſion le diviſeur eſt toujours égal au dividende diviſé par le quotient.

Corollaire.

171. Donc ſi on ſuppoſe que l'antécédent de la raiſon géométrique ſoit a; & que le quotient ſoit $\frac{1}{p}$, le conſéquent ſera ap, & toute raiſon géométrique pourra être repréſentée par cette expreſſion, ou formule générale, $a : ap$.

LEMME IV.

172. *Dans toute Proportion géométrique; il regne un même Quotient dans la premiere & dans la ſeconde Raiſon.*

DÉMONSTRATION. Les deux raiſons d'où réſulte la proportion géométrique, ſont égales; donc elles ont une même valeur : or cette valeur conſiſte dans le quotient; donc elles ont un même quotient; & par conſéquent ſi le quotient de la premiere raiſon s'exprime par $\frac{1}{p}$, le quotient de la ſeconde raiſon doit auſſi s'exprimer par $\frac{1}{p}$.

Corollaire.

173. Donc en ſuppoſant que a repréſente l'antécédent de la premiere raiſon, c l'antécédent de la ſeconde, & $\frac{1}{p}$ le quotient des deux raiſons, toute proportion géométrique pourra être repréſentée par cette expreſſion, ou formule générale, $a : ap :: c : cp$.

THÉORÊME II.

174. *Dans toute Proportion géométrique le Produit des Extrêmes eſt égal au Produit des Moyens.*

DÉMONSTRATION. Soit la proportion géométrique $a : b :: c : f$; cette proportion peut être repréſentée, comme nous venons de le dire, par cette expreſſion, $a : ap :: c : cp$; or dans cette proportion le produit des extrêmes $acp = cap$ produit des moyens.

THÉORÊME III.

175. *Réciproquement, lorſqu'on a quatre Termes, tels que le produit des Extrêmes ſoit égal au produit des Moyens, les quatre Termes ſont en proportion géométrique.*

DÉMONSTRATION. Soient les quatre termes a, c, ap, cp, tels que le produit des extrêmes $acp = cap$ produit des moyens; il en réſultera la proportion $a : ap :: c : cp$, qui eſt juſte; car les deux raiſons ont un même quotient $\frac{1}{p}$; donc, &c.

Corollaire I.

176. Toutes les fois que l'on a deux produits égaux, on en peut toujours conclure une proportion, en prenant pour extrêmes de la proportion les deux racines d'un des produits, & pour moyens les deux racines de l'autre produit; *par ex :* de ce que l'on a $acp = cap$, on en peut conclure $a : ap :: c : cp$, comme il eſt évident. Cette égalité entre le produit des extrêmes, & celui des moyens s'ap-

pelle *Equation*. Il eſt donc toujours poſſible de déduire une *équation* d'une proportion donnée, & réciproquement de conclure *une proportion* d'une équation donnée.

Corollaire II.

177. Dans toute proportion géométrique *continue; par ex: $a : b :: b : c$*, (laquelle s'exprime d'une maniere abrégée par $\div a : b : c$,) le produit des extrêmes eſt égal au quarré du moyen terme; ce qui eſt évident.

Ce terme moyen entre les deux extrêmes s'appelle *Moyen proportionnel*. Or, ſi l'on a un produit ab compoſé de deux racines a & b, & qu'on prenne un moyen proportionnel x entre a & b, le quarré du moyen terme ſera égal au produit des racines; car par l'hypothèſe $\div a : x : b$; donc $xx = ab$.

Corollaire III.

178. Dans une proportion géométrique, on peut changer l'ordre & l'arrangement des termes qui la compoſent; pourvu que le changement ſoit tel, que le produit des extrêmes reſte toujours égal au produit des moyens. On a donné à ces changemens différens noms que voici: ſoit la proportion $a : b :: c : d$.

I°. Le premier changement que l'on peut faire dans cette proportion, s'appelle *alternando*, & conſiſte à mettre les moyens à la place l'un de l'autre $a : c :: b : d$.

II°. Le ſecond changement s'appelle *invertendo*, & conſiſte à mettre les moyens à la place des extrêmes $b : a :: d : c$.

Dans ce changement on peut introduire encore le changement *alternando*, ce qui donnera d'autres combinaiſons.

III°. Le troiſiéme changement s'appelle *permutando*, & conſiſte à mettre les extrêmes à la place l'un de l'autre, $d : b :: c : a$.

Dans ce changement on peut encore introduire les changemens *alternando* & *invertendo* ; ce qui donnera d'autres combinaisons.

IV°. Le quatriéme changement se fait, soit en ajoutant les conséquens aux antécédens, ou les antécédens aux conséquens ; ce qui s'appelle *addendo* ou *componendo*.

$$a + b : b :: c + d : d$$
$$a : a + b :: c : c + d$$

Soit en retranchant les antécédens des conséquens, ou les conséquens des antécédens ; ce qui s'appelle *substrahendo* ou *dividendo*.

$$a - b : b :: c - d : d$$
$$a : b - a :: c : d - c.$$

Corollaire IV.

179. Si deux quantités sont multipliées, ou divisées par une même troisiéme quantité, les produits ou les quotiens auront entr'eux la même raison qu'avoient les racines ou les dividendes.

DÉMONSTRATION. Si l'on multiplie les racines a, b, par une même troisiéme quantité m ; les produits am, bm, seront dans le même rapport que les racines a, b, c'est-à-dire, qu'on aura la proportion $am : bm :: a : b$; car le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, $abm = abm$. Il faut dire la même chose, lorsqu'on divise deux quantités par une même troisiéme quantité.

D'où il suit que les touts sont entr'eux comme leurs parties semblables ; c'est-à-dire, comme les *moitiés*, les *quarts*, les *tiers*, &c. & réciproquement. Car les parties semblables résultent de la division des touts par une même troisiéme quantité, & les touts résultent de la multiplication des parties semblables par une même troisiéme quantité.

Corollaire V.

180. Les produits qui ont une racine commune, sont entr'eux comme les racines inégales ;

par ex : les produits am, bm, qui ont la racine commune m, ſont entr'eux comme les racines inégales a & b : c'eſt une ſuite évidente du corollaire précédent.

Corollaire VI.

181. Les produits ſont en raiſon compoſée de leurs racines ; les quarrés ſont en raiſon doublée des racines ; les cubes ſont en raiſon triplée des racines ; les quatriémes puiſſances ſont en raiſon quadruplée des racines ; les cinquiémes puiſſances, &c.

Ou ce qui revient au même :

I°. Une raiſon compoſée eſt égale à la raiſon qu'ont entr'eux les produits qui réſultent des raiſons compoſantes, multipliées les unes par les autres ; *par ex :* la raiſon $\frac{ab}{cd}$, qui eſt compoſée des raiſons ſimples $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$, eſt $= \frac{a \times b}{c \times d}$, produit des raiſons ſimples compoſantes.

II°. Une raiſon doublée eſt égale à la raiſon qu'ont entr'eux les quarrés des termes de l'une ou l'autre des deux raiſons compoſantes ; *par ex :* ſi l'on a deux raiſons égales $a : ap :: b : bp$; la raiſon doublée de ces deux raiſons eſt $ab : abpp$: or l'on aura $ab : abpp :: aa : aapp$; ou bien $ab : abpp :: bb : bbpp$; car dans ces proportions le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

III°. Une raiſon triplée eſt égale à la raiſon qu'ont entr'eux les cubes des termes de l'une des trois raiſons compoſantes ; ce qui ſe prouve d'une maniere toute ſemblable.

IV°. Une raiſon quadruplée eſt égale à la raiſon qu'ont entr'elles les quatriémes puiſſances des termes de l'une des quatre raiſons compoſantes. Il faut dire la même choſe des raiſons quintuplées, ſextuplées, &c.

Corollaire VII.

182. Si l'on multiplie, ou si l'on divise les termes d'une proportion par les termes d'une autre proportion, les produits ou les quotiens seront proportionnels.

DÉMONSTRATION. Si l'on multiplie les termes de la proportion $a : ap :: b : bp$ par les termes de la proportion $c : cp :: d : dp$, on aura la proportion $ac : acpp :: bd : bdpp$, qui est juste; car le produit des extrêmes $acbdpp = acbdpp$, produit des moyens: on prouveroit de même qu'en divisant les termes d'une proportion par les termes d'une autre proportion, les quotiens seroient proportionnels.

Il suit de là que lorsque les puissances sont proportionnelles entr'elles, les racines sont aussi proportionnelles entr'elles, & réciproquement; mais les puissances ne sont point proportionnelles aux racines, ni les racines aux puissances.

Corollaire VIII.

183. Dans une proportion géométrique, si l'un des quatre termes; *par ex:* le dernier est inconnu, il sera facile de le trouver. Soit la proportion $4 : 8 :: 6 : x$, le dernier terme inconnu x se trouvera en prenant le produit des moyens, & en le divisant par l'extrême connu, ce qui donnera $\frac{48}{4} = 12 = x$: en effet de la proportion $4 : 8 :: 6 : x$ on déduit (174) $4x = 48$; & par conséquent divisant les deux quantités par 4, on aura $x = \frac{48}{4} = 12$; pareillement dans la proportion $a : b :: c : x$, on aura $x = \frac{bc}{a}$.

Si le terme inconnu eût été le troisiéme, comme dans la proportion $a : b :: x : c$; on auroit de même trouvé la valeur de x, en prenant le produit des extrêmes, & en le divisant par le moyen connu b, ce qui auroit donné $x = \frac{ac}{b}$.

Cette méthode de trouver un quatriéme terme proportionnel à trois autres, s'appelle *Regle de Trois*, dont nous parlerons plus au long dans la suite.

Corollaire IX.

184. Toutes les fois qu'on aura une proportion $a : b :: c : d$, on en pourra déduire une fraction, en divisant le produit des moyens par un des extrêmes, ce qui donne $\frac{bc}{a}$ pour la valeur du second extrême d, & réciproquement d'une fraction donnée $\frac{bc}{a}$, on pourra toujours tirer une proportion dont les moyens seront les racines b, c du numérateur, le premier extrême sera le dénominateur a, & le dernier terme sera la fraction elle-même; sçavoir, $a : b :: c : \frac{bc}{a}$. Pareillement de la fraction $\frac{6}{5}$, qui est la même que $\frac{2 \times 3}{5}$, on peut déduire $5 : 2 :: 3 : \frac{6}{5}$; de la fraction $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 1}{3}$, on peut conclure $3 : 2 :: 1 : \frac{2}{3}$.

ARTICLE III.

Des Progressions.

On appelle *Raison* ou *Rapport*, la maniere d'être de deux quantités à l'égard l'une de l'autre; *par ex:* $1 : 3$, $a : b$, &c. On appelle *proportion*, ou *analogie*, l'égalité de deux raisons; *par ex :* $2 : 4 :: 6 : 12$. On appelle *proportionnalité* une suite de plusieurs raisons égales; *par ex :* $2 : 4 :: 6 : 2 :: 8 : 16 :: 9 : 18$. On appelle *progression* une proportionnalité continue, c'est-à-dire, dans laquelle chaque terme est en même-tems conséquent de la raison précédente, & antécédent de la suivante, *par ex :* $2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 :: 16 : 32$; ce qui s'écrit plus briévement de cette maniere $\div$ $2 : 4 : 8 : 16 : 32$. On distingue deux sortes de progressions, l'arithmétique & la géométrique.

THÉORÊME I.

185. *Dans une Progreſſion arithmétique, il regne par-tout une même différence entre deux termes immédiatement conſécutifs.*

DÉMONSTRATION. La raiſon qui eſt du premier terme au ſecond, eſt la même que celle qui eſt du ſecond au troiſiéme; du troiſiéme au quatriéme; du quatriéme, &c.

Corollaire I.

186. Donc dans une progreſſion arithmétique chaque terme eſt égal à celui qui le précéde immédiatement, augmenté ou diminué de la différence (163) qui regne dans la progreſſion; augmenté, ſi la progreſſion eſt croiſſante: diminué, ſi la progreſſion eſt décroiſſante.

Corollaire II.

187. Suppoſant que le premier terme ſoit a, & la différence d, on pourra repréſenter une progreſſion arithmétique par cette expreſſion, ou formule générale $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d \cdot a \pm 4d$, &c.

THÉOREME II.

188. *Dans une Progreſſion arithmétique, un Terme quelconque eſt égal à la Somme faite du premier Terme & de la différence commune multipliée par le nombre des Termes précédens.*

DÉMONSTRATION. Soit la progreſſion arithmétique $\div a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f$; elle peut être repréſentée par la formule, ou expreſſion générale, $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d \cdot a \pm 4d \cdot a \pm 5d$: or le cinquiéme terme $a \pm 4d$ eſt évidemment égal au premier terme a, plus à la différence d multipliée par 4, qui eſt le nombre des termes précédens.

Corollaire.

189. Il ſera facile de trouver un terme quelconque dans une progreſſion arithmétique, dans laquelle on connoîtra le premier terme a, la diffé-

rence commune d, & le nombre n des termes: car regardant le terme que l'on cherche, comme le dernier de la progreſſion, & le nommant x, le nombre des termes qui précédent celui que l'on cherche, ſera $n - 1$; & alors le terme cherché ſera repréſenté par l'expreſſion générale & indéterminée $x = a + dn - d$, ſi la progreſſion eſt croiſſante; ou par $x = a - dn + d$, ſi la progreſſion eſt décroiſſante. C'eſt pourquoi ſuppoſant le premier terme $a = 1$, la différence $d = 2$, & le nombre des termes $n = 5$, la valeur du cinquiéme terme x ſera, en ſuppoſant que la progreſſion eſt croiſſante,

$$x = a + dn - d = 1 + 10 - 2 = 1 + 8 = 9.$$

THÉORÊME III.

190. *Dans une Progreſſion arithmétique, la Somme des extrêmes eſt égale à la Somme de deux termes également éloignés des extrêmes.*

DÉMONSTRATION. Dans la progreſſion arithmétique $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d \cdot a \pm 4d \cdot a \pm 5d$, la ſomme des extrêmes, ſçavoir, $a + a \pm 5d$ eſt la même que $a \pm 2d + a \pm 3d$, ſomme du troiſiéme & du quatriéme termes également éloignés des extrêmes.

Corollaire.

191. Si le nombre des termes de la progreſſion étoit impair, alors la ſomme des extrêmes ſeroit égale au double du terme moyen.

THÉORÊME IV.

192. *Dans une Progreſſion arithmétique, la Somme de tous les termes eſt égale à la Somme des extrêmes multipliés par la moitié du nombre des termes.*

DÉMONSTRATION. Dans la progreſſion arithmétique $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d \cdot a \pm 3d$, composée de quatre termes, la ſomme de tous les termes, qui eſt $4a \pm 6d$, eſt évidemment égale à la ſomme des extrêmes $2a \pm 3d$ multipliée par 2, moitié du nombre des termes.

Corollaire I.

193. Si l'on appelle le premier terme a, le dernier x, le nombre des termes n, la ſomme des termes s; cette ſomme ſera repréſentée par l'expreſſion ou formule générale $s = \frac{an + nx}{2}$: laquelle fera trouver tout d'un coup la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique. Car ſoit ſuppoſé $a = 1$, $x = 11$, & $n = 6$; ſi l'on ſubſtitue à la place des indéterminées a, x, n, leurs valeurs, on trouvera

$$s = \frac{an + nx}{2} = \frac{\overline{1 \times 6} + \overline{6 \times 11}}{2} = \frac{6 + 66}{2} = \frac{72}{2} = 36.$$

Corollaire II.

194. Si la progreſſion arithmétique étoit priſe dans la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. & qu'elle commençât par l'unité; alors on auroit le dernier terme $x = n$, & la formule précédente $s = \frac{an + nx}{2}$, deviendroit $s = \frac{x + xx}{2}$, ou $s = \frac{n + nn}{2}$; c'eſt-à-dire, que l'on trouveroit tout d'un coup la ſommé de tous les termes, en prenant la moitié de la ſomme du dernier terme & de ſon quarré, ou la moitié de la ſomme faite du nombre des termes & de ſon quarré.

THÉORÊME V.

195. *Dans une progreſſion géométrique, il regne partout un même quotient entre deux termes immédiatement conſécutifs.*

DÉMONSTRATION. La raiſon qui eſt du premier terme au ſecond, eſt la même que celle qui eſt du ſecond au troiſiéme, du troiſiéme au quatriéme, &c. parce que chaque terme de la progreſſion géométrique contient celui qui le ſuit, de la même maniere qu'il eſt contenu lui-même dans celui qui le précéde.

Corollaire I.

196. Dans une progreſſion géométrique, un terme quelconque eſt égal (170) à celui qui le précede immédiatement, diviſé par le quotient commun qui regne dans la progreſſion.

Corollaire II.

197. En ſuppoſant que le premier terme ſoit a, & que le quotient ſoit $\frac{1}{p}$; on pourra repréſenter toute progreſſion géométrique, par cette expreſſion, ou formule générale.

$$\div\!\div\; a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5 : ap^6, \&c.$$

dans laquelle formule il faut remarquer que, lorſque la progreſſion ſera croiſſante, alors $\frac{1}{p}$ ſera une fraction, & p ſera un nombre entier; mais lorſque la progreſſion ſera décroiſſante, $\frac{1}{p}$ ſera un nombre entier, & p une fraction.

THÉORÊME VI.

198. *Dans toute progreſſion géométrique, un Terme quelconque eſt égal au premier Terme* a *diviſé par la puiſſance du quotient* $\frac{1}{p}$ *de même degré que le nombre des Termes précédens.*

DÉMONSTRATION. Dans la progreſſion $\div\!\div\; a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5$, il eſt évident que le cinquiéme terme ap^4 eſt égal au premier terme a diviſé par le quotient $\frac{1}{p}$ élevé à la quatiéme puiſſance, laquelle puiſſance eſt de même degré que le nombre des termes précédens. En effet la quatriéme puiſſance de $\frac{1}{p}$ eſt $\frac{1}{p^4}$: mais a diviſé par $\frac{1}{p^4} = \frac{ap^4}{1} = ap^4$; donc, &c.

Corollaire.

199. L'on peut regarder le terme que l'on cherche, comme le dernier de la progreſſion, & le nommer x; nommant le premier terme a, le quotient $\frac{1}{p}$, & le nombre des termes n; le nombre des termes qui précédent celui que l'on cherche, ſera $n-1$, & alors le terme cherché peut être repréſenté ſous l'expreſſion générale $x=ap^{n-1}$: ſoit donc le premier terme $a=1$, le nombre des termes $n=6$, & le quotient $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$, ce qui donne $p=2$, & ſuppoſons que la progreſſion ſoit croiſſante, l'on trouvera tout d'un coup la valeur du terme x cherché, & l'on aura $x=ap^{n-1}=1\times 2^{6-1}=2^5=2\times 2\times 2\times 2\times 2=32$.

Si la progreſſion étoit décroiſſante, alors le quotient $\frac{1}{p}$ ſeroit un nombre entier, & p un nombre fractionnaire : ainſi ſuppoſant $a=32$, $n=6$, & $\frac{1}{p}=2$; ce qui donneroit $p=\frac{1}{2}$, on auroit $x=ap^{n-1}=32\times\frac{1}{2^{6-1}}=\frac{32}{2^{6-1}}=\frac{32}{2^5}=\frac{32}{2\times 2\times 2\times 2\times 2}=\frac{32}{32}=1$.

Théorême VII.

200. *Dans une progreſſion géométrique, le produit des Extrêmes eſt égal au produit de deux termes quelconques également éloignés des Extrêmes.*

Démonstration. La raiſon eſt évidente par l'inſpection de la formule $\div\!\div\ a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5$, dans laquelle le produit aap^5 des extrêmes eſt le même que le produit du ſecond terme ap par le cinquiéme ap^4.

Corollaire.

201. Si le nombre des termes étoit impair, le

produit des extrêmes feroit égal au quarré du moyen terme.

Théorême VIII.

202. *Dans une progreſſion géométrique, la ſomme des Antécédens eſt à la ſomme des Conſéquens, comme un ſeul Antécédent eſt à ſon Conſéquent.*

Démonstration. Dans une progreſſion géométrique $\div a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4$, tous les termes ſont antécédens, excepté le dernier; donc la ſomme des antécédens eſt $a + ap + ap^2 + ap^3$: pareillement tous les termes ſont conſéquens, excepté le premier; donc la ſomme des conſéquens eſt $ap + ap^2 + ap^3 + ap^4$: or l'on a la proportion $a + ap + ap^2 + ap^3 : ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 :: a : ap$: laquelle eſt juſte, car dans cette proportion le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

Corollaire.

203. Nommant le dernier terme x, & la ſomme des termes s, la ſomme des antécédens ſera par conſéquent $s - x$, & la ſomme des conſéquens ſera $s - a$: c'eſt pourquoi le théorême précédent pourra s'énoncer en ſtyle algébrique & plus briévement par cette proportion $s - x : s - a :: a : ap$.

Théorême IX.

204. *Dans une progreſſion géométrique dont les termes ſont affectés d'expoſans, les expoſans ſont en progreſſion arithmétique.*

Démonstration. Cela ſe voit dans la formule $\div a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5 : ap^6$: &c. dont les expoſans 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · &c. ſont en progreſſion arithmétique.

Corollaire.

205. D'où il ſuit que ſi dans une progreſſion géométrique on prend quatre termes quelconques, dont les expoſans ſoient en proportion

arithmétique, alors les termes eux-mêmes feront en proportion géométrique; tels font les termes $ap : ap^3 :: ap^5 : ap^7$.

Remarque.

206. Toutes les fois que l'on a une fuite de termes en progreffion géométrique, & qui font affectés d'expofans, l'on a deux progreffions réunies, l'une géométrique qui regne entre les termes; & l'autre arithmétique qui regne entre les expofans. La réunion de ces deux progreffions eft le fondement & le principe d'un calcul célébre & utile, que l'on appelle *calcul logarithmique*, & dont nous parlerons dans la fuite.

CHAPITRE II.

Du Calcul Analytique, ou de l'Analyfe.

L'Analyfe peut être confidérée ou en général & dans fes principes, ou en particulier & dans fes applications; nous en allons parler fous ces deux rapports.

ARTICLE I.

Des Principes de l'Analyfe.

I°. Le but de l'analyfe eft de découvrir les quantités inconnues par les rapports qu'elles ont avec les quantités connues. Le moyen dont elle fe fert pour découvrir les quantités inconnues, eft la *double expreffion* d'une même quantité.

II°. La double expreffion d'une même quantité s'appelle *Equation; par ex :* la quantité *huit* peut être repréfentée par l'expreffion 8, ou par celle de $5 + 3$ égale à la premiere, d'où naît l'équation $8 = 5 + 3$, dans laquelle les quantités jointes par le figne $=$ s'appellent *membres ;* tous les termes qui fe trouvent à la gauche du *figne*, s'appellent *premier membre* ; tous ceux qui ſe trouvent à la droite, s'appellent *ſecond membre*.

III°. L'uſage des équations eſt fort étendu ; on peut par leur moyen réſoudre une infinité de *queſtions* ou *problêmes ; par ex :* ſi je diſois Pierre a 10 écus, & Paul a 15 écus ; quelle eſt la ſomme des écus qu'ils ont tous les deux ? il eſt clair que nommant x cette ſomme, la queſtion peut s'exprimer par l'équation $x=10+15$, & qu'elle eſt réſolue par l'équation $x=25$.

IV°. Le but de l'équation eſt donc de connoître la valeur d'une quantité ſous une expreſſion connue, lorſqu'on ne pouvoit la connoître ſous une autre expreſſion, dont la valeur étoit inconnue.

V°. Les équations ſont de différens degrés : ſavoir, du premier, du ſecond, du troiſiéme, &c. degré, ſelon que l'inconnue x ou y, &c. eſt élevée à la premiere, à la ſeconde, à la troiſiéme, &c. puiſſance. Nous ne parlerons que des équations du premier degré, que l'on appelle auſſi équations *ſimples* ou *linéaires*.

VI°. Le calcul analytique conſiſte à former & à réſoudre des équations ; la formation des équations s'appelle *Synthèſe*, ou compoſition des équations ; la réſolution des équations s'appelle *Analyſe*, ou décompoſition des équations.

PARAGRAPHE I.

La Synthèſe, ou Formation des Equations.

DÉFINITIONS.

I.

207. La *Synthèſe*, ou formation des équations, conſiſte en général à exprimer la double valeur d'une même quantité. La Synthèſe, ou formation des équations, conſidérée par rapport à la ſolution des problêmes, eſt l'art d'exprimer par des équations l'état de la *queſtion* propoſée, ou les conditions du problême qui eſt à réſoudre.

II.

208. On appelle *Conditions* du problême, des marques qui caractérisent les quantités inconnues dont on cherche la valeur, & qui servent à les faire connoître. Les conditions du problême sont, à proprement parler, les *rapports* que les quantités inconnues ont avec les quantités connues, lesquels rapports sont donnés dans l'état de la question.

III.

209. On appelle problême *déterminé*, celui dans lequel il y a autant de conditions, ou de rapports donnés, qu'il y a de quantités inconnues; & on appelle problême *indéterminé*, celui dans lequel il y a moins de conditions que de quantités inconnues.

IV.

210. On appelle problêmes *numériques*, ou problêmes d'*Arithmétique*, ceux que l'on peut résoudre, ou aux conditions desquels on peut satisfaire par des nombres: on appelle problêmes *géométriques*, ou de *Géométrie*, ceux aux conditions desquels il faut satisfaire en assignant de certaines lignes, ou de certaines positions de lignes. Les premiers sont ceux dont nous allons bientôt donner des exemples.

Proposition I.

211. Quand on veut résoudre un problême, il faut bien faire attention aux conditions qui sont énoncées dans l'état de la question: car il faut toujours un certain nombre de conditions, ou de rapports donnés pour rendre la solution possible, & ordinairement il faut autant de conditions, qu'il y a de quantités inconnues; savoir, lorsque le problême est *déterminé*.

Proposition II.

212. Après avoir bien déterminé les conditions

du problême, il s'agit de les exprimer algébriquement & par des équations : or

I°. Si l'état de la question, ou du problême proposé, énonce une proportion; *par ex :* de trouver un quatriéme terme x, proportionnel à trois autres donnés a, b, c, il ne sera pas difficile de former l'équation; car faisant $a : b :: c : x$, l'on déduit l'équation $ax = bc$, qui exprime la question proposée.

II°. Mais lorsque la question ne renferme pas de proportion, il faut alors former les équations immédiatement, & suivant les conditions qui sont énoncées dans le problême.

III°. Le moyen de parvenir à former ces équations, est d'exprimer *algébriquement* les conditions du problême; c'est-à-dire, qu'il faut exprimer en style *algébrique* les quantités & les rapports de ces quantités, qui dans l'état de la question sont énoncés en style ordinaire.

IV°. Le style algébrique est celui qui se sert de lettres & de signes. On représente donc les quantités par les lettres de l'alphabet; les quantités connues par les premieres lettres a, b, c, d, &c. les quantités *inconnues* par les dernieres lettres x, y, z, & les quantités *égales* par les mêmes lettres; & pour exprimer les rapports que ces quantités ont ent'relles, on les combine les unes avec les autres par le moyen des signes $+$, $-$, $\times$, $=$, $\sqrt{}$, &c. suivant l'état & la fonction qu'elles ont chacune dans le problême proposé.

V°. Il faut donc ajouter, soustraire, multiplier, &c. les quantités algébriques, autant & de la maniere qu'il est nécessaire, pour qu'elles représentent exactement les rapports énoncés dans le problême; ensorte qu'une quantité étant représentée par a, le double de cette quantité sera $2a$, le triple sera $3a$, &c. le quarré sera a^2, le cube sera a^3, &c. la somme de a ajoutée à une autre quantité b, sera $a+b$; la différence sera $a-b$; le produit ſera ab, le quotient $\frac{a}{b}$. Pareillement ſi la quantité a eſt ſuppoſée quatriéme proportionnelle à trois autres quantités b, c, d, on fera $b : c :: d : a$, d'où l'on tire $a = \frac{cd}{b}$, & l'expreſſion de la quantité a deviendra pour lors $\frac{cd}{b}$; ſi a eſt un moyen proportionnel entre b & c, on fera $b : a :: a : b$, d'où l'on tire $aa = bc$, & $a = \sqrt{bc}$, & alors l'expreſſion de a ſera $\sqrt{bc}$. Si l'on vouloit exprimer que la quantité x eſt la moitié de ab, moins les deux tiers de c. il faudroit diviſer ab par 2 pour en avoir la moitié, & multiplier c par $\frac{2}{3}$ pour en avoir les deux tiers; & après avoir retranché la quantité $\frac{2c}{3}$ de $\frac{ab}{2}$ par le moyen du ſigne —, on feroit $x = \frac{ab}{2} - \frac{2c}{3}$.

Propoſition III.

213. Pour mieux entendre comment on forme les équations, & comment on transforme le ſtyle *ordinaire* en ſtyle *algébrique*, nous allons donner quelques exemples.

I°. Soit propoſée cette queſtion: Pierre & Paul ont dépenſé enſemble 100 écus; mais la dépenſe de Pierre eſt trois fois plus grande que celle de Paul: quelle eſt la dépenſe de chacun? On voit aiſément que cette queſtion a deux inconnues, ſavoir, la dépenſe de Pierre que j'appelle x, & la dépenſe de Paul que j'appelle y: elle renferme une quantité connue; ſavoir, les 100 écus que j'appelle a: on voit auſſi qu'il y a deux conditions dans le problême.

La premiere eſt en ſtyle ordinaire, que la dépenſe de Pierre & celle de Paul priſes enſemble, font 100 écus, ce qui s'exprime en ſtyle algébrique par l'équation $x + y = a$.

La ſeconde condition eſt en ſtyle ordinaire, que la dépenſe de Pierre eſt triple de celle de Paul; donc x eſt triple de y, & par conſéquent pour rendre y égal à x, il faut multiplier y par 3; la ſeconde condition s'exprimera donc en ſtyle algébrique par l'équation $x = 3y$.

Nous avons deux équations, & il y a deux inconnues, ce qui fait voir que ce problême eſt déterminé.

II°. Soit propoſé de trouver deux nombres, tels que le premier ajouté au ſecond donne 12, & que la moitié du ſecond retranchée du premier laiſſe 6. Ayant appellé le premier nombre x, & le ſecond y; ayant déſigné la quantité connue 12 par a, & 6 par b; il eſt clair que la premiere condition du problême s'exprime en ſtyle algébrique par l'équation $x + y = a$;
& que pour exprimer la ſeconde condition, il n'y a qu'à prendre la moitié du ſecond nombre y, laquelle eſt $\frac{y}{2}$, la retrancher du premier nombre x, ce qui donne $x - \frac{y}{2}$, & l'égaler à la quantité b, & l'on exprimera la ſeconde condition du problême en ſtyle algébrique par l'équation

$$x - \frac{y}{2} = b,$$

ce qui donne deux équations, leſquelles ſont ſuffiſantes pour la ſolution du problême, où il n'y a que deux inconnues.

Propoſition IV.

214. Dans l'expreſſion des conditions, & lorſqu'on forme les équations, il ne faut point introduire de nouvelles inconnues ſans néceſſité; le but doit être au contraire d'en diminuer le nombre, autant qu'il eſt poſſible. Or il arrive ſouvent que toutes les inconnues d'un problême peuvent être repréſentées par une même lettre x ou y, & cela

arrive ſur-tout lorſque les inconnues ſont multiples, ou ſous-multiples les unes des autres. On le voit dans le premier exemple donné ci deſſus : car puiſque la dépenſe x de Pierre eſt triple de la dépenſe y de Paul ; il s'enſuit que celle-ci étant repréſentée par y, celle-là pourra être repréſentée par $3y$, & par ce moyen les deux inconnues x & y ſe trouvent réduites à une ſeule inconnue y, & les deux équations $x+y=a$, $x=3y$, ſe réduiront à une ſeule équation $3y+y=a$, ou $4y=a$ ce qui rendra la ſolution plus facile.

Propoſition V.

215. Lorſqu'on a formé les équations qui renferment les conditions du problême, il faut les préparer pour la ſolution. Cette préparation conſiſte à les ſimplifier : pour les ſimplifier, il faut modifier les membres de l'équation par la voie, ou de l'*addition*, ou de la *ſouſtraction*, ou de la *multiplication*, &c. Ces opérations introduiſent dans l'équation différens changemens que l'on appelle *transformations* : ces transformations rendent les équations plus aiſées à réſoudre ; mais elles doivent ſe faire de maniere que l'on ne détruiſe pas l'égalité qui ſe trouve entre les deux membres ; ainſi on ne doit rien faire d'un côté, qu'on ne faſſe préciſément la même choſe de l'autre.

Les regles ſuivantes donneront la méthode d'introduire dans une équation les différentes eſpéces de *transformations* qui peuvent la ſimplifier ſans détruire l'égalité des membres.

Regle I.

216. Si j'ai l'équation $x-b=ac$, il eſt évident que je puis (10), ſans détruire l'égalité, ajouter la quantité b de part & d'autre, & il viendra $x-b+b=ac+b$, & en réduiſant $x=ac+b$: d'où l'on déduit cette regle, que *dans une équation on*

peut faire paſſer une quantité négative d'un membre à l'autre, en changeant ſon ſigne — en +.

Regle II.

217. Soit l'équation $x+b=ac$, je puis (11) retrancher la quantité b de part & d'autre, & j'aurai $x+b-b=ac-b$, & en réduiſant $x=ac-b$: d'où ſuit la regle, que *dans une équation on peut faire paſſer une quantité poſitive d'un membre à l'autre, en changeant ſon ſigne + en —.*

Regle III.

218. L'équation $a+\frac{b}{c}=fx$ étant donnée, je puis (12) multiplier les deux membres par une même quantité; *par ex:* par le dénominateur c, & il viendra $ac+\frac{bc}{c}=cfx$, & réduiſant, $ac+b=cfx$: il eſt donc évident, que *dans une équation on peut faire évanouir une fraction qui s'y trouve, en multipliant par ſon dénominateur tous les autres termes de l'équation.*

Regle IV.

219. Dans l'équation $ab+cc=bx$, je puis (13) évidemment diviſer les deux membres par une même quantité b, & j'aurai $\frac{ab}{b}+\frac{cc}{b}=\frac{bx}{b}$, & réduiſant, $a+\frac{cc}{b}=x$: on peut donc *dans une équation dégager une quantité d'un coefficient qui la multiplie, en diviſant par ce coefficient tous les autres termes de l'équation:* dans l'équation précédente les deux quantités a & x ont été par ce moyen dégagées de la grandeur b qui les multiplioit.

Corollaire.

220. Toutes les fois que les deux membres de l'équation ſont des produits qui ont une racine commune, on ſimplifie l'équation en diviſant les

deux membres par la racine commune; *par ex :* on ſimplifie l'équation $ax + 2ay = 2abc - acd$, en diviſant le tout par a, & il vient $x + 2y = 2bc - cd$.

PARAGRAPHE II.

Analyſe, ou Réſolution des Equations.

Après avoir exprimé les conditions du problême en ſtyle algébrique & par des équations, après avoir ſimplifié & préparé ces mêmes équations par différentes transformations, il faut les réſoudre ou les *analyſer.*

Propoſition I.

221. La réſolution ou l'*analyſe* des équations conſiſte à trouver la valeur de chaque inconnue par les rapports qu'elle a avec des quantités toutes connues: ces rapports ſont enveloppés dans l'équation à cauſe de la pluralité des inconnues & de leur mêlange, ſoit entr'elles, ſoit avec les quantités connues; il s'agit de développer ces rapports.

Propoſition II.

222. Pour développer ces rapports & par-là trouver la valeur des quantités inconnues,

I°. Il faut choiſir à volonté une des inconnues, & la laiſſer toute ſeule pour faire un membre de l'équation; pour cela l'on fait-paſſer tous les autres termes de ce membre dans l'autre, & cet autre membre ſera la valeur de l'inconnue; *par ex :* ſi dans l'équation $x + y = a$, je cherche la valeur de x, je ferai $x = a - y$, & le ſecond nombre ſera la valeur de x.

II°. On ſubſtitue cette valeur à la place de l'inconnue, non dans l'équation où l'on a pris cette valeur, (ce qui donneroit deux membres ſous une même expreſſion) mais dans l'autre équation, ou les autres équations; *par ex :* ayant les deux équations

$$x + y = a$$
$$x = 3y,$$

je prends dans la premiere équation la valeur de x, laquelle eſt $a - y$, je la ſubſtitue à la place de x dans la ſeconde équation, qui devient

$$a - y = 3y$$

& dans laquelle il n'y a plus qu'une ſeule eſpéce d'inconnue, ſavoir y: cette opération peut être appellée *premiere ſubſtitution.*

III°. Cette ſubſtitution réduit, comme on le voit, les deux inconnues x & y à une ſeule y, & les deux équations à une ſeule $a - y = 3y$; d'où je conclus, en tranſpoſant,

$$a = 3y + y,$$

en réduiſant, $a = 4y$,

& en diviſant, $y = \frac{a}{4} = \frac{100}{4} = 25.$

IV°. La valeur de y étant toute connue, je m'en ſers pour connoître auſſi la valeur de x; & pour cela je mets cette valeur de y à la place de y dans toutes les équations où ſe trouvent x & y: & cette opération peut s'appeller *ſeconde ſubſtitution.* Dans l'exemple précédent je ſubſtitue 25, valeur de y, à la place de y dans l'équation $x = 3y$; & je trouve $x = 3 \times 25 = 75$; donc la valeur de x devient toute connue, & l'équation eſt réſolue.

V°. S'il reſtoit encore quelques inconnues, on prendroit de même & ſucceſſivement la valeur de chacune d'elles, & on la ſubſtitueroit à leur place dans les équations reſtantes, juſqu'à ce que l'on eût fait évanouir toutes les inconnues.

Remarque.

223. Il y a cette différence entre la premiere & la ſeconde *ſubſtitution*; que dans la premiere la valeur de l'inconnue n'eſt pas tout-à-fait connue, parce que cette valeur eſt encore un mélange de quantités connues & de quantités inconnues, au lieu que dans la ſeconde ſubſtitution la valeur de l'inconnue devient tout-à-fair connue, ne renfermant plus que des quantités connues.

Propoſition

Propoſition III.

224. Lorſqu'on ſubſtitue la valeur d'une inconnue à la place de cette inconnue, on doit ſubſtituer cette valeur ſelon l'état & la fonction que l'inconnue a dans l'équation, ou les équations dans leſquelles ſe fait cette ſubſtitution; c'eſt-à-dire, que ſi l'inconnue eſt ajoutée, ou ſouſtraite, on ajoute, ou l'on ſouſtrait ſa valeur; ſi l'inconnue eſt multipliée, ou diviſée, on multiplie, ou l'on diviſe ſa valeur par les mêmes quantités qui multiplient ou qui diviſent l'inconnue. Soient les deux équations

$$ax + 3x = b$$
$$x + y = c,$$

je veux ſubſtituer dans la premiere équation la valeur, de x, qui priſe dans la ſeconde équation, eſt $x = c - y$: je remarque que dans la premiere équation x eſt multipliée par la quantité $a + 3$; car $ax + 3x = x \times \overline{a+3}$: je dois donc multiplier la valeur $c - y$ par la quantité $a + 3$; ce qui donnera l'équation

$$ac - ay + 3c - 3y = b.$$

Propoſition IV.

225. Lorſque le problême eſt *déterminé*, il n'eſt ſuſceptible que d'une ſeule ſolution : car il n'y a qu'une valeur déterminée pour chaque inconnue, qui puiſſe ſatisfaire aux conditions du problême. Mais ſi le problême eſt *indéterminé*, il admet pluſieurs ſolutions; chaque inconnue pouvant alors avoir pluſieurs valeurs, qui toutes ſatisferoient aux conditions du problême.

Or dans un problême *indéterminé*, il y a plus d'inconnues que d'équations; & alors pour réſoudre le problême, on ſuppoſe à quelque-une des inconnues une valeur arbitraire que l'on ſubſtituera à la place de cette inconnue. Si la valeur ſuppoſée eſt juſte, vous aurez la ſolution du problême, en ſuivant les procédés que nous avons exposés ci-dessus. Mais si cette valeur n'étoit pas juste, il se rencontreroit dans la solution des contradictions & des oppositions avec les conditions du problême : alors on supposeroit une autre quantité pour la valeur de l'inconnue ; & on essayeroit ainsi successivement différentes quantités pour la valeur de cette inconnue, jusqu'à ce qu'on en eût trouvé une qui donne la solution du problême.

Proposition V.

226. Tout l'art de l'*Analyse* consiste à trouver successivement les valeurs de toutes les inconnues : pour cela on réduit par la voie de la *premiere substitution* le nombre des inconnues & des équations à une seule. Or n'y ayant plus qu'une seule inconnue, on en trouve aisément la valeur en la laissant toute seule pour faire un membre de l'équation, ou en faisant passer toutes les quantités connues dans l'autre membre ; lequel donnera par conséquent la valeur précise & toute connue d'une premiere inconnue : mais cette valeur par la voie de la *seconde substitution* fera connoître celle d'une seconde inconnue ; les deux valeurs substituées feront connoître celle d'une troisiéme inconnue, & ces trois valeurs substituées feront connoître celle d'une quatriéme, & ainsi des autres.

ARTICLE II.

Application de l'Analyse.

L'analyse peut s'appliquer à différens cas ; aux raisons, aux progressions, aux puissances, &c. & à une infinité de circonstances dans lesquelles on peut considérer la grandeur. L'objet de l'analyse est de résoudre des questions relatives à ces circonstances, & proposées avec certaines conditions ; c'est ce que l'on appelle *problêmes :* de la solution de ces problêmes résultent des vérités qui conduisent à la découverte de propriétés générales, & de-là naissent les *théorêmes*. C'est ainsi que par le moyen de l'analyse on parvient à la connoissance des vérités qui nous étoient inconnues : nous en allons donner des exemples.

PROBLÊME I.

227. *Diviser 1000 livres entre Pierre, Paul & Jacques, de maniere que la portion de Pierre soit double de celle de Paul, & celle de Paul triple de celle de Jacques.*

SOLUTION. I. Soit x la portion de Jacques; celle de Paul qui est triple, sera $3x$; & celle de Pierre qui est double de celle de Paul, $6x$: donc la condition du problême exprimée algébriquement sera $x + 3x + 6x = 1000$,

& en réduisant, $10x = 1000$,

& en divisant, $x = \frac{1000}{10} = 100$:

donc x portion de Jacques $= 100$ livres, $3x = 300$ livres, & $6x = 600$.

On voit dans ce problême que les parties auxquelles il faut diviser 1000 livres, ont entr'elles un certain rapport exprimé par les nombres 6, 3, 1; & que ce problême auroit pu être énoncé d'une façon générale, en disant, *diviser un tout en trois parties, telles que leur rapport soit comme* $6 \cdot 3 \cdot 1$.

SOLUTION. II. Si l'on supposoit la portion de Jacques $= 10$ livres; celle de Paul seroit 30 livres, & celle de Pierre 60 livres : dans ce cas la somme seroit 100 livres. Mais cette supposition est fausse, puisqu'il s'agit de diviser non 100 livres, mais 1000 livres; c'est ce qu'on appelle *fausse position*. Cependant cette supposition, quoique fausse, peut conduire à la vérité par le moyen de la regle de trois : en disant, si 100 livres donnent 10 livres pour la portion du troisiéme ; combien donneront 1000 livres pour la portion du même ? ou bien

$$100 : 10 :: 1000 : x;$$

donc $x = \frac{1000}{10} = 100$,

c'est-à-dire, que la portion qui écheoit au troisiéme, est 100 livres.

PROBLÊME II.

228. *On a donné à Pierre 12 livres, à Paul 8 livres, à Jacques 6 livres ; on veut donner à Jean une somme proportionnelle aux trois autres : on demande quelle doit être cette somme ? Ou pour énoncer le problême d'une façon plus générale, on demande que l'on trouve un quatriéme Terme proportionnel à trois autres donnés* 12, 8, 6.

SOLUTION. Ayant exprimé par x le terme inconnu que l'on cherche, il faut ranger les quatre termes en proportion $12 : 8 :: 6 : x$: donc (183)

$$x = \frac{8 \times 6}{12} = \frac{48}{12} = 4,$$

c'est-à-dire, que la somme qui doit écheoir à Jean est 4 livres.

Cette méthode de trouver un quatriéme terme proportionnel à trois autres termes donnés, s'appelle la *Regle de trois*, comme nous l'avons dit (183); elle s'appelle aussi *Regle d'or*, à cause de sa grande utilité. Elle est quelquefois *directe*, quelquefois *inverse*, ou *réciproque*.

Regle de Trois directe.

229. La regle de trois s'appelle *directe*, lorsque dans l'état de la question le quatriéme terme inconnu x que l'on cherche, doit être d'autant plus grand, ou plus petit par rapport au troisiéme, que le second est plus grand, ou plus petit par rapport au premier : tel est l'exemple du problême précédent. On y trouve alors la valeur de l'inconnu x, en prenant le produit des moyens, & le divisant par l'extrême connu : soit $a : b :: c : x$, on aura $x = \frac{bc}{a}$. Cette regle s'appelle *directe*, parce que dans l'état de la question les deux derniers termes sont entr'eux dans le même ordre que les deux premiers.

Regle de Trois inverse.

230. La regle de trois s'appelle *inverse*, ou *réciproque*, lorsque par l'état de la question on voit que le quatriéme terme inconnu doit être d'autant plus grand ou plus petit par rapport au troisiéme, que le second est plus petit, ou plus grand par rapport au premier; telle seroit cette question: trois ouvriers ont fait un certain ouvrage en 10 heures, six ouvriers en combien de tems l'auroient-ils fait? Et pour s'assurer si l'état de la question exprime une raison *directe*, ou *réciproque*, il faut mettre les termes homogênes avec les homogênes, les ouvriers avec les ouvriers, les heures avec les heures.

3 ouvriers : 6 ouvriers :: 10 heures : x.

Or l'on voit que les deux derniers termes ne sont point dans le même ordre que les deux premiers, ou que le quatriéme terme ne doit pas être plus grand que le troisiéme, de même que le second est plus grand que le premier; car six ouvriers doivent faire le même ouvrage en moins de tems que ne l'ont fait trois ouvriers: pour conserver la proportion juste, il faut donc placer au troisiéme rang le terme inconnu x;

3 ouvriers : 6 ouvriers :: x : 10 heures;

& on aura la valeur de x, en prenant le produit des extrêmes, & en le divisant par le moyen connu, savoir, $x = \frac{3 \times 10}{6} = \frac{30}{6} = 5$: car étant donnée la proportion $a : b :: x : c$, on auroit $bx = ac$; & par conséquent $x = \frac{ac}{b}$.

Cette regle s'appelle *inverse* ou *réciproque*, ou *indirecte*, parce que dans la question proposée les deux derniers termes homogênes sont entr'eux dans un ordre renversé des deux premiers.

Corollaire.

231. Pour exprimer que deux quantités quelconques x & y sont en raison directe de deux au-

tres 3 & 2, on fait $x : y :: 3 : 2$, ce qui eſt évident. Mais pour exprimer que deux quantités quelconques x & y ſont en raiſon *inverſe* ou *réciproque* de 3 & 2, on fait $x : y :: 2 : 3$. On peut auſſi exprimer cette raiſon réciproque, en faiſant $x : y :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$; car les produits des extrêmes & des moyens ſeront les mêmes dans les proportions; ſavoir, $3x = 2y$, & $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, ce qui revient au même.

PROBLÊME III.

232. *20 Hommes en 10 jours ont fait 100 toiſes; on demande, 30 Hommes en 6 jours combien feront-ils de toiſes?*

SOLUTION. Cette queſtion renferme cinq termes, ce que l'on appelle la *regle de cinq*: pour la réſoudre, on exprime l'état de la queſtion par deux proportions, en cette maniere: ſi 20 hommes on fait 100 toiſes, 30 hommes combien en feront-ils? ou

$$20 : 100 :: 30 : x;$$

& ſi en 10 jours on a fait 100 toiſes; en 6 jours combien en fera-t-on? ou

$$10 : 100 :: 6 : x;$$

les deux proportions ſont donc

$$20 : 100 :: 30 : x,$$
$$10 : 100 :: 6 : x,$$

ou plus ſimplement,

$$\begin{matrix}20\\10\end{matrix} : 100 :: \begin{matrix}30\\6\end{matrix} : x$$

Maintenant il n'y a qu'à multiplier le nombre des ouvriers par le nombre des jours, 20 par 10, ce qui donne 200, & 30 par 6, ce qui donne 180; car 20 ouvriers qui travaillent pendant 10 jours, font la même choſe que 200 ouvriers qui travaillent pendant un ſeul jour; pareillement 30 ouvriers qui travaillent pendant 6 jours, font la même choſe que 180 ouvriers qui travaillent pendant un ſeul jour; les deux proportions ſe réduisent donc à une seule, que l'on résout par la simple regle de trois,

$$200 : 100 :: 180 : x;$$

donc on aura $x = \frac{180 \times 100}{200} = \frac{18000}{200} = 90$.
Si la question proposée avoit renfermé sept termes, ce qui donne la *regle de sept*, il eût fallu faire trois proportions, qui par une multiplication de termes, semblable à celle qui a été faite ci-dessus, auroient été réduites à une seule : si elle avoit eu neuf termes, ce que l'on appelle *regle de neuf*, il eût fallu faire quatre proportions, qui, par la multiplication des termes auroient été réduites à une seule.

PROBLÊME IV.

233. *Pierre, Jacques & Jean ont fait un fonds de* 1800 *livres; Pierre y a mis* 300 *livres, Jacques* 600 *livres, & Jean* 900 *livres; ils ont fait sur ce fonds un gain de* 9000 *livres. On demande combien chacun doit participer au gain, à proportion de la mise qu'il a faite.*

Cette question peut être énoncée d'une maniere générale, en proposant de *diviser un tout en parties proportionnelles aux parties d'un autre tout.*

SOLUTION. Ce problême renferme ce que l'on appelle la *regle de compagnie;* il est clair que le gain qui doit revenir à chacun, doit être proportionnel à la mise qu'il a faite; cette question se résout donc par autant de proportions, qu'il y a de termes inconnus, en disant : le fond est au gain comme la mise de chacun est à la portion du gain qui revient à chacun : soit x la portion qui doit revenir à Pierre : celle de Jacques, y; & celle de Jean, z : on aura

$$1800 \cdot 9000 :: \begin{cases} 300 \cdot x \\ 600 \cdot y \\ 900 \cdot z; \end{cases}$$

donc $x = \frac{2700000}{1800} = 1500$,
& $y = \frac{5400000}{1800} = 3000$,
& $z = \frac{8100000}{1800} = 4500$.

PROBLÊME V.

234. *Etant donné des Quantités de différens prix, déterminer les portions qu'il faut prendre de chacune d'elles, pour faire soit un mêlange, soit un alliage, dont telle mesure ou tel poids soit à un prix moyen.*

Ce problême renferme ce que l'on appelle la *Regle d'alliage.* La regle d'alliage est la méthode dont on se sert, lorsqu'on veut mêler ensemble des matieres différentes, comme des vins de différente espéce, des bleds de différens prix, des métaux de différens titres : elle est de même que la regle de trois, ou *directe*, ou *inverse.*

Regle d'Alliage directe.

235. La regle d'alliage *directe* est la méthode de trouver le prix moyen d'un mêlange quelconque, lorsque les portions qui doivent le composer, sont données, & que les prix de ces portions sont connus.

EXEMPLE. On veut mêler ensemble des vins de différens prix; savoir, 4 pintes de vin à 10 sols, & 6 pintes de vin à 15 sols la pinte, on demande quel sera le prix moyen, ou le prix auquel reviendra la pinte après le mêlange fait ?

SOLUTION. Prenez la somme des portions ou mesures qui doivent composer le mêlange, prenez aussi la somme des prix de toutes ces mesures.

Mesures,	Prix
4 pintes à 10 s. font	40 s.
6 pintes à 15 s. font	90 s.
10 mesures.	130 s.

Faites ensuite la proportion; la somme des mesures ou le mêlange entier est au prix total, comme une seule mesure est au prix moyen, ou

$$10 \text{ pintes} : 130 :: 1 \text{ pinte} : x = \frac{130}{10} = 13.$$

Cette question se résout, comme l'on voit, par une simple *regle de trois*, & porte avec elle sa démonstration.

Regle d'Alliage inverse.

236. La regle d'alliage *inverse* eſt une méthode par laquelle étant donné le prix ou titre moyen que l'on veut faire réſulter d'un mêlange ou d'un alliage quelconque, étant auſſi donnés les prix particuliers des quantités que l'on veut mêler enſemble, il s'agit de déterminer les portions dont doit réſulter le mêlange, ou l'alliage.

Exemple. La livre d'étain étant ſuppoſée de 16 ſols, & la livre de plomb de 10 ſols, combien faut-il prendre de l'un & de l'autre pour faire un alliage dont la livre puiſſe être vendue à un prix moyen 12 ſols.

Solution. Dans l'exemple propoſé il y a deux prix, ou deux titres donnés : c'eſt pourquoi

I°. Comparez les deux prix avec le prix moyen pour en connoître les différences ; donnez au plus haut prix la différence du prix moyen avec le plus bas prix, & au plus bas prix la différence du prix moyen avec le plus haut, de cette maniere,

$$12\left\{\begin{array}{lcr} 16 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & 2 \\ 10 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & 4 \end{array}\right.$$

Ces différences dénotent combien il faut prendre de parties de chaque quantité pour faire l'alliage ou le mêlange ; dans la queſtion ci-deſſus il faut prendre deux parties d'étain & quatre de plomb ; & comme la ſomme des parties qui compoſeront l'alliage, eſt $2+4=6$; les parties qu'il faut prendre des deux quantités, ſont $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{6}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

II°. S'il y avoit trois titres donnés tels que 20, 16, 10, dont on voulût faire un alliage qui fût d'un titre moyen 14, après les avoir diſpoſés, comme il ſuit.

$$14\left\{\begin{array}{lcl} 20 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & 4 \\ 16 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & 4 \\ 10 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & 6+2 \end{array}\right.$$

Il faut prendre les titres donnés deux à deux, commençant par le plus haut & le plus bas, ſavoir, 20 & 10; les comparer avec le titre moyen pour en prendre les différences 6 & 4, que l'on écrit ſuivant le procédé ci-deſſus, 6 à côté de 10, & 4 à côté de 20: enſuite, comme le nombre des titres donnés eſt impair, pour comparer le titre reſtant 16, je prends avec lui l'un des autres déjà comparés, ſavoir ici 10 plutôt que 20, parce que le titre moyen 14 ſe trouve intercepté entre 16 & 10, & non entre 16 & 20; & prenant leurs différences qui ſont 2 & 4, je donne la différence 4 au titre 16, & la différence 2 au titre 10, lequel ſe trouve avoir ainſi deux différences écrites à côté; ſavoir, 6 & 2, parce qu'il a été comparé deux fois. Les différences trouvées ſont donc 4, 4, & $6 + 2 = 8$, dont la ſomme eſt 16 : ce qui fait voir que les portions qu'il faut prendre des titres 20, 16 & 10, ſont $\frac{4}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{8}{16}$, ou en réduiſant $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, leſquelles fractions évaluées donneront les nombres 5, 4, 5, dont la ſomme eſt 14, & qui par conſéquent ſatisfont aux conditions du problême.

III°. S'il y avoit quatre titres donnés, on les prendroit deux à deux, obſervant de prendre toujours l'un au-deſſus, & l'autre au-deſſous du titre moyen, (ſans quoi la ſolution ſeroit impoſſible, parce que le titre auquel on veut réduire, ne ſeroit plus moyen entre les titres comparés;) d'où il réſulte que dans quelques cas le même titre doit être comparé pluſieurs fois, comme dans cet exemple,

$$22 \left\{ \begin{array}{llll} 26 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 12 + 4 + 2 = 18. \\ 20 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 4 \\ 18 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 4 \\ 10 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 4 \end{array} \right.$$

où le même titre 26 eſt comparé avec chacun de trois autres titres, parce que ceux-ci ſont tous au-deſſous du titre moyen donné 22.

DÉMONSTRATION. La raiſon de cette opération eſt que les titres doivent fournir à l'alliage ou au mêlange, d'autant plus qu'ils différent moins du titre moyen, & d'autant moins qu'ils en différent plus : donc les portions qu'ils doivent fournir, ſont entr'elles réciproquement comme les différences qu'ont les titres avec le titre moyen : donc pour connoître ces portions, il n'y a qu'à donner au plus haut titre la différence du plus petit, & réciproquement.

PROBLÊME VI.

237. *La Somme de deux Nombres étant connue, & leur Différence étant auſſi connue, trouver quels ſont ces deux Nombres ?*

SOLUTION. Soient les deux nombres que l'on cherche, le plus grand déſigné par x, & le plus petit par y; leur ſomme ſoit $40 = a$, & leur différence ſoit $8 = d$: il eſt évident,

I° Que les deux nombres pris enſemble égalent la ſomme, ou $x + y = a$.

II°. Qu'en retranchant le plus petit du plus grand, on aura la différence, ou $x - y = d$.

Ces deux équations expriment les conditions du problême.

III°. Prenons la valeur de x dans la premiere équation; elle ſera $x = a - y$;
ſubſtituons-la dans la ſeconde équation, qui par conſéquent deviendra $a - y - y = d$,
ou $a - 2y = d$
& tranſpoſant, $a - d = 2y$
& diviſant par 2, $y = \frac{a}{2} - \frac{d}{2}$:
donc la valeur de y eſt toute connue.

IV°. Subſtituons cette valeur toute connue à la place de y dans la premiere équation, qui étant $x + y = a$, deviendra $x + \frac{a}{2} - \frac{d}{2} = a$;

donc $$x = a - \frac{a}{2} + \frac{d}{2},$$

ou $$x = \frac{2a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{d}{2},$$

& $$x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}:$$

c'est-à-dire, que la plus grande quantité est égale à la moitié de la somme, plus la moitié de la différence; & que la plus petite est égale à la moitié de la somme, moins la moitié de la différence.

V°. Si à la place des indéterminées a & d, nous substituons leur valeur, nous trouverons que $x = 24$, & $y = 16$.

PROBLÊME VII.

238. *Le rapport de deux nombres étant donné, & leur différence étant connue, trouver quels sont ces deux nombres?*

SOLUTION. Le rapport des deux nombres cherchés soit *par ex:* 3 · 5, & leur différence soit 10, multipliez les deux termes 3 & 5 du rapport donné chacun par la différence 10 & vous aurez les deux nombres 30 & 50, lesquels conservent le même rapport (179). Divisez ensuite les deux nombres 30 & 50, chacun par 2 qui est la différence des deux termes 3 & 5, & vous trouverez les nombres 15 & 25, qui conservent encore le même rapport (179) & dont la différence est 10, lesquels satisfont, par conséquent, aux conditions du problême & sont les nombres cherchés.

DEMONSTRATION. La raison est que, lorsque vous multipliez les deux termes 3 & 5 chacun par 10, ce qui donne les produits 30 & 50, la différence de ces deux termes qui étoit 2 doit devenir dix fois plus grande & sera par conséquent 20: pareillement lorsque vous divisez les produits 30 & 50 chacun par 2, leur différence qui est 20 doit devenir deux fois plus petite, & sera parconséquent 10 ; donc en suivant la méthode du problême vous devez trouver les deux nombres 15 & 25 lesquels sont dans le rapport de 3 à 5 & ont pour différence 10.

Corollaire.

239. On peut par ce moyen résoudre une infinité de question, *par ex :* une armée ayant été défaite, si l'on demandoit de combien d'hommes elle étoit composée avant la bataille, & combien il en est resté après la défaite, demandez quel est le rapport des deux nombres tant avant qu'après la bataille, & qu'elle en est la différence. Soit ce rapport comme $5 \cdot 2$, & la différence 9000. Multipliez 5 & 2 par par 9000 vous aurez les nombres 45000 & 18000, lesquels étant divisés par 3, différence des termes 5 & 2, donneront 15000 & 6000 pour les deux nombres cherchés.

PROBLÊME VIII.

240. *Trouver trois nombres* x, y, z, *dont la somme soit* 60, *& qui soient tels que la Différence de* x *&* y *soit double de la Différence de* y *& de* z.

SOLUTION. La premiere condition du problême est $$x+y+z=60.$$

La seconde condition étant que la différence $x-y$ est double de la différence $y-z$, il en résulte
$$x-y=2y-2z.$$

Les conditions du problême ne peuvent s'exprimer que par ces deux équations : or le problême renferme trois inconnues ; il a donc une inconnue de plus qu'il n'a de conditions, ou d'équations, d'où il suit qu'il est indéterminé.

Je prends la valeur de x dans la seconde équation ; & j'aurai $x=3y-2z$.

Je la substitue dans la premiere équation à la place de x, & j'aurai $3y-2z+y+z=60$, ou $$4y-z=60;$$
dans laquelle équation je ne puis faire évanouir ni

y, ni z ; il faut donc ſuppoſer une valeur, *par ex :* à y : je ſuppoſe $y=18$,
& j'aurai $72-z=60$;
donc $z=12$:
& ſubſtituant ces deux valeurs de y & de z dans la premiere équation, nous trouverons que

$$x=30.$$

Ces trois nombres 30, 18, 12, ſatisfont aux conditions du problême.

On auroit pu ſuppoſer $y=16$, & alors on auroit eu $z=4$, & $x=40$; ces trois nombres 40, 16 & 4, ſatisfont encore aux conditions du problême, ce qui fait voir que ce problême eſt ſuſceptible de pluſieurs ſolutions.

Problême IX.

241. *Un Pere a trois Enfans de différens âges ; l'âge du premier avec la moitié de l'âge des deux autres fait 25 ans ; l'âge du ſecond avec le tiers de l'âge des deux autres fait 26 ans ; l'âge du troiſiéme avec la moitié de l'âge des deux autres fait 29 ans ; on demande l'âge de chaque Enfant en particulier.*

Solution. L'âge du premier ſoit x ; celui du ſecond ſoit y ; celui du troiſiéme, z : or

I°. Selon les conditions du problême on aura les trois équations.

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=25,$$

$$y+\frac{x}{3}+\frac{z}{3}=26,$$

$$z+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=29;$$

ou en faiſant évanouir les fractions,

$$2x+y+z=50,$$
$$3y+x+z=78,$$
$$2z+x+y=58.$$

II°. Je cherche la valeur d'une inconnue, *par ex :* de y dans la premiere équation ; cette valeur eſt

$y=50-2x-z$; & je la ſubſtitue à la place de y dans les deux autres équations, qui deviendront par cette raiſon $150-6x-3z+x+z=78$,

$$2z+x+50-2x-z=58,$$

ou en ſimplifiant, $150-5x-2z=78$,

$$z-x+50=58.$$

III°. Les trois équations & les trois inconnues étant ainſi réduites à deux ; je cherche encore la valeur d'une de ces inconnues, *par ex :* de z dans la derniere des deux équations précédentes, & cette valeur ſe trouve être $z=8+x$; je la ſubſtitue dans l'autre équation, qui deviendra

$$150-5x-16-2x=78,$$

donc $150-78-16=7x$,

donc $7x=56$,

& $x=\frac{56}{7}=8$.

IV°. Ayant la valeur de x toute connue, ſçavoir, 8 : je ſubſtitue cette valeur à la place de x dans quelques-unes des équations précédentes ; *par ex :* dans l'équation $z-x+50=58$, qui par cette raiſon devient $z-8+50=58$, donc $z=58-50+8=16$.

V°. Si l'on ſubſtitue enſuite les valeurs de $x=8$, & de $z=16$, dans quelques-unes des équations où ſe trouvent les trois inconnues ; on trouvera facilement la valeur de y, qui ſera 18 : les trois nombres cherchés ſont donc 8, 16, 18, leſquels ſatisfont aux conditions du problême.

PROBLÊME X.

242. *Deux corps* A & B *parcourent une même circonférence de cercle,* A *avec quatre degrés de vîteſſe, &* B *avec un degré ſeulement. Ils partent enſemble d'un même point* C *de la circonférence ; on demande quel eſt le point où le corps* A *atteindra le corps* B ?

SOLUTION. Je remarque que, lorſque le corps A aura décrit la circonférence entiere & ſera revenu au point de départ C, le corps B qui a quatre fois moins de vîtesse, n'aura parcouru que le quart de la circonférence, ainsi la distance des deux corps A & B, sera pour lors mesurée par un arc qui sera le quart de la circonférence, & lequel j'appelle a : soit nommé x l'espace que le corps B parcourera encore, jusqu'à ce qu'il soit atteint par le corps A partant pour la seconde fois du point C. Il est évident que, puisque le corps A a quatre fois plus de vîtesse que B, l'espace qu'il parcourera pendant que le corps B fera le chemin x, sera quatre fois plus grand, & sera par conséquent $4x$: mais cet espace est égal à l'arc a plus au chemin x que le corps B a fait de plus. On aura donc $4x = a + x$; donc $4x - x = a$, ou $3x = a$; donc $x = \frac{a}{3}$; c'est-à-dire, que le corps A atteindra le corps B au tiers de la seconde division, ou du second quart de la circonférence.

Corollaire I.

243. On auroit encore pu résoudre le problême en donnant aux corps A & B des degrés de vîtesse qui fussent dans un tout autre rapport, que celui de $4 \cdot 1$; car *par ex :*

I°. Si l'on avoit supposé que A eût trois fois plus de vîtesse que B, alors pendant que A eût parcouru la circonférence entiere, B n'en eût parcouru que le tiers : ainsi au lieu de l'équation $4x = a + x$, on auroit eu $3x = a + x$, & par conséquent $3x - x = a$, ou $2x = a$: donc $x = \frac{a}{2}$, c'est-à-dire que, la circonférence du cercle étant supposée divisée en trois parties égales, le corps A auroit atteint le corps B à la moitié de la seconde division, ou du second tiers de la circonférence.

II°. Si l'on supposoit que A n'eût que le double de la vîtesse de B, l'on auroit dans ce cas $2x = a + x$: donc $2x - x = a$, ou $x = a$; c'est-à-dire, qu'ayant partagé la circonférence du cercle en deux moitiés, la jonction des deux corps se fera lorsque B aura parcouru la seconde moitié de la circonférence, ou, ce qui est le même, que le point de jonction sera le même que le point C du départ.

III°. C'est pourquoi lorsque les vîtesses de A & de B seront comme 2 · 1, l'on aura $x = a$: lorsqu'elles seront dans le rapport de 3 · 1, on aura $x = \frac{a}{2}$: lorsqu'elles seront dans celui de 4 · 1, on aura $x = \frac{a}{3}$: lorsque les vîtesses seront comme 5 · 1, l'on trouvera $x = \frac{a}{4}$: lorsqu'elles seront dans le rapport de 10 · 1, on aura $x = \frac{a}{9}$, & ainsi du reste.

IV°. En général si la vîtesse de A est représentée par l'indéterminée n, l'on trouvera dans tous les cas $x = \frac{a}{n-1}$ qui servira de formule générale pour résoudre ces sortes de problêmes.

Corollaire II.

244. Il est facile d'appliquer ces principes à différens exemples particuliers. En effet

I°. Si l'on demandoit à quel point du cadran d'une montre ou d'une pendule se doit faire la jonction de l'aiguille des heures & de celle des minutes, en supposant qu'elles partent toutes deux ensemble d'un même point, *par ex:* du point de midi, il sera aisé de l'assigner, en remarquant que l'aiguille des minutes a douze fois plus de vîtesse que celle des heures; car le cadran étant partagé en douze parties égales, ou en 12 heures, l'aiguille des minutes fait tout le tour du cadran, tandis que celle des heures n'en fait que la douziéme partie ; ainſi l'on aura dans ce cas $x = \frac{a}{n-1} = \frac{a}{11}$, c'eſt-à-dire que l'aiguille des minutes atteindra celle des heures à la onziéme partie de la ſeconde diviſion, ou de la premiere heure du cadran.

II°. Pareillement ſi l'on ſuppoſe que les deux planettes Mars & Jupiter partent enſemble d'un même point du zodiaque, *par ex :* du premier degré du *Bélier*, on trouvera aiſément le point où les deux planettes ſe rejoindront. Pour cela il faut remarquer que le zodiaque eſt partagé en douze portions égales, que l'on appelle *Signes*, & que chaque ſigne contient 30 degrés de la circonférence du cercle. Or comme Jupiter emploie douze ans à parcourir les douze ſignes, ou le zodiaque entier, tandis que Mars n'y emploie que trois ans, il s'enſuit que la vîteſſe de Mars eſt à celle de Jupiter (on entend ici les vîteſſes relatives), comme 12 eſt à 3, ou comme 4 · 1 ; d'où il ſuit que lorſque Mars aura décrit le zodiaque entier, ou les 12 ſignes, Jupiter n'aura parcouru que le quart du zodiaque, ou trois ſignes. Ainſi l'on aura dans ce cas $x = \frac{a}{n-1} = \frac{a}{3}$: c'eſt-à-dire que le point de jonction des deux planettes ſera au tiers du ſecond quart du zodiaque, ſçavoir au 10ᵉ degré du quatriéme ſigne (que l'on appelle le ſigne du *Cancer*).