GÉOMÉTRIE DU COMPAS.

LIVRE CINQUIÈME.

DES DISTANCES PROPORTIONNELLES.

PROBLÊME.

86. *TROUVER une troisième proportionnelle à deux distances* Qp, MN (fig. 35), *dont la première* Qp *est plus grande que la seconde* MN.

Solution. Du centre Q et d'un rayon Qp, soit décrit un arc indéfini ApB; du centre p et d'un rayon MN soit décrite la demi-circonférence BAS; la ligne AS sera la troisième proportionnelle demandée.

Démonstration. Par le lemme du n.° 22, on aura : $AS.pQ=(Ap)^2$. Donc $AS.pQ=(MN)^2$, donc (17. *liv.* 6) :

$$pQ : MN :: MN : AS.$$

PROBLÊME.

87. *Trouver une troisième propor-*

tionnelle à deux distances Qp, MN (fig. 36), *dont la première est plus petite que la seconde, mais pourtant plus grande que la moitié de cette ligne.*

Observation. Nous serons assurés que la ligne *Q p* est plus grande que la moitié de *M N*, si les deux cercles décrits des centres *Q* et *p*, qui sont les extrémités de la première distance et des rayons *Q p* et *M N*, qui sont les deux distances données, se coupent comme dans la figure.

Solution. C'est la même que la précédente, appliquée à la figure 36.

Démonstration. Elle est la même que la précédente.

88. Si le cercle *p b Q'* [*fig.* 37], décrit du centre *Q* et du rayon *Q p* n'avoit aucun point d'intersection avec le cercle décrit du centre *p* et du rayon *M N* comme dans la figure 37, on se serviroit du problême suivant.

PROBLÊME.

89. *Trouver* (fig. 37) *une troisième proportionnelle à deux distances* Q p, MN, *dont la première est plus petite que la moitié de la seconde.*

Solution. Du centre p et du rayon MN, soit décrit un arc indéfini BAS; du centre Q et du rayon Qp soit décrite la demi-circonférence pbQ' (64); du centre Q' et du rayon $Q'p$ soit décrit un arc indéfini; si cet arc coupe l'arc BAS en deux points B et A, qu'on détermine la demi-circonférence BAS' (64); et qu'on ajoute en ligne droite à AS' (64) une droite égale $S'S$; la ligne AS sera la troisième proportionnelle cherchée.

Démonstration. On a [22] :

$$AS' \cdot pQ' = (Ap)^2 = (MN)^2.$$

Mais $pQ' = 2pQ$. Donc $2AS' \cdot pQ = (MN)^2$; ou bien $AS \cdot pQ = (MN)^2$, d'où (17. *liv.* 1) :

$$pQ : MN :: MN : AS.$$

90. Si cependant l'arc pcQ'' [*fig.* 38.] décrit du centre Q' et du rayon $Q'p$ coupoit l'arc BAS décrit du centre p et du rayon MN, déterminez la demi-circonférence pCQ'', et décrivez du centre Q'' et du rayon $Q''p$ un arc indéfini; s'il coupe l'arc BAS aux deux points A et B, déterminez la demi-circonférence BAS' (64); quadruplez AS' (65), et faites $AS = 4AS'$. Cette ligne sera la troisième proportionnelle cherchée.

Démonstration. En effet, on a (22) : $AS' \cdot pQ'' = (Ap)^2 = (MN)^2$, et $4AS' \cdot pQ$

$= (MN)^2 = AS \cdot pQ.$

D'où (17. *liv.* 6) :

$$pQ : MN :: MN : AS.$$

91. On procéderoit de la même manière, quand même la distance $Q''p$ seroit plus grande que la moitié de MN; c'est-à-dire, on prendroit une distance double de cette ligne, et huit fois plus grande que Qp, et on octupleroit la ligne AS', que l'on vient de déterminer. Cette distance octuple de AS' seroit la troisième proportionnelle cherchée, et ainsi de suite.

La démonstration est la même que celle qui précède.

92. Dans le cas encore où la première distance Qp seroit un peu plus grande que la moitié de la seconde MN, il faudroit doubler cette distance, afin que les intersections des des deux cercles se fassent à angles moins aigus et plus approchans de l'angle droit (9).

PROBLÊME.

93. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois distances* PQ, RS, TV, (fig. 32).

Solution. D'un même centre O, et avec les deux premières distances PQ et RS, prises pour rayon, décrivez les deux cercles BC, DE;

d'un rayon égal à la troisième distance TV, et d'un point quelconque B de la première circonférence, décrivez un arc de cercle qui la coupe en C; du même point B, et avec un rayon arbitraire, décrivez un arc de cercle qui coupe la seconde circonférence en D; du même rayon BD, et du centre C coupez la même circonférence en E; joignez les deux points par la droite DE; elle sera la quatrième proportionnelle cherchée.

Démonstration. Les triangles COE, BOD, ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $COE = BOD$ (8. *liv.* 1); retranchant l'angle commun BOE (ou l'ajoutant), on aura $COB = EOD$. Donc $OCB + OBC = OED + ODE$ (32. *liv.* 1). Mais les deux triangles COB, EOD sont isoscèles : donc les demi-sommes, c'est-à-dire, les angles à la base, sont égaux. Donc ces deux triangles sont semblables, et on a : $CO : DO :: CB : DE$; ou bien $PQ : RS :: TV : DE$.

94. *Observation* I. Il conviendra de prendre le rayon arbitraire BD, tel que l'angle BDO soit à-peu-près droit (9) : ce qui peut se faire à vue-d'œil.

95. *Observation.* II. Si la troisième distance TV ne peut pas être placée comme corde sur BC, ce qui arrivera lorsque TV sera plus

grande que deux fois la ligne $P\,Q$, il faudra doubler les deux distances $P\,Q$, $R\,S$ (64), et avec ces deux distances ainsi doublées, décrire les deux cercles $B\,C$, $D\,E$, et achever la construction comme ci-dessus (93). Si cela ne suffisoit pas, on les tripleroit, etc. quand même $T\,V$ pourroit s'appliquer comme corde au premier cercle; si elle est presque égale au diamètre de ce cercle, il faudra doubler ou tripler ces distances pour éviter les sections à angles aigus, et en obtenir d'autres plus approchantes de l'angle droit.

La démonstration est fondée sur la proportion suivante :

$PQ : RS :: 2PQ : 2RS :: 3PQ : 3RS ::$, etc.

Donc, lorsqu'on aura fait :

$BC : DE :: 2PQ : 2RS :: 3PQ : 3RS ::$, etc.

ce qui suit de la construction, on aura aussi :

$$P\,Q : R\,S :: B\,C : D\,E;$$

ou $P\,Q : R\,S :: T\,V : D\,E$ (4. *liv.* 5).

PROBLÊME.

96. *Diviser la droite* MN *en* P *en parties proportionnelles à deux distances données* PQ, RS.

Solution. Portez sur le prolongement de $P\,Q$, la droite $Q\,V = R\,S$ (73); cherchez une quatrième proportionnelle aux trois droites PV, MN, PQ [93] : portez-la sur la ligne MN en MP, en la soustrayant de MN (72); le point P où elle tombera sera le point cherché.

Démonstration. On a par construction :

$$PV : MN :: PQ : MP;$$

on aura donc aussi (*5. liv. 5*) :

$$PV : MN :: QV : PN.$$

D'où :

$$PQ : MP :: QV : PN;$$

ou bien $PQ : QV :: MP : PN$;
et en mettant pour QV sa valeur :

$$PQ : RS :: MP : PN.$$

PROBLÊME.

97. *Diviser la droite* AB (fig. 41) *en moyenne et extrême raison.*

Solution. Du centre A et du rayon AB, décrivez le cercle BDd; soit fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE = Ed$; faites à $BD = Ba = Ea$; faites à $Aa = Eb = db$; la droite AB sera divisée en moyenne et extrême raison au point b, et on aura : $BA : Ab :: Ab : bB$.

Démonstration. Voyez le n.° 46.

98. Ce dernier problême est encore un de ceux que l'on résout au moyen du compas

seul, plus simplement qu'avec la règle et le compas réunis. On peut s'en convaincre, en comparant cette solution avec celles données dans les traités ordinaires de Géométrie. Cependant la démonstration en est plus compliquée.

PROBLÊME.

99. *Trouver une moyenne proportionnelle entre les distances données* AB *et* CD (fig. 42).

Solution. Sur la droite AB, portez CD de B en H (73); divisez AH en deux parties égales au point F (66); prolongez la ligne BF de la partie égale Bf (64); des points F et f pris pour centre et avec un rayon égal à AF, décrivez deux cercles qui se coupent au point M, BM sera la moyenne proportionnelle demandée.

Démonstration. Les points f, B, F étant sur la même droite HA, et les triangles MBf, MBF ayant les côtés respectivement égaux, on aura l'angle $MBF = MBf$ (8. *liv.* 1), et par conséquent chacun de ces angles sera droit (13 *liv.* 1); donc MB sera perpendiculaire sur le diamètre du demi-cercle HMA. De-là on a (13 *liv.* 6) : $AB : BM :: BM : BH$;
ou bien : $AB : BM :: BM : CD$.