GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.

LIVRE DOUZIÈME.

PROBLÊMES RÉSOLUS PAR APPROXIMATION.

192. Tous les problêmes supérieurs au second degré ne peuvent être résolus géométriquement seulement avec la règle et le compas; mais ils exigent des intersections de courbes coniques ou de degré supérieur; et par conséquent on ne peut les résoudre exactement avec la seule Géométrie du compas. Les instrumens faits pour décrire la cicloïde, la conchoïde, la cissoïde, la trajectoire et d'autres courbes semblables qui servent à la résolution de ces problêmes, sont assurément d'une invention très-ingénieuse et d'un prompt et élégant usage dans la pratique. Pourtant, lorsqu'on n'a pas besoin d'avoir toute la trace de la courbe à laquelle ils sont destinés, et qu'il suffit d'obtenir un point par l'intersection de cette courbe avec d'autres lignes, comme ils laissent toujours quelques soupçons

de petites erreurs qu'on ne peut pas quelquefois bien calculer, il vaudra mieux, dans beaucoup de cas, préférer à l'exactitude théorique de ces méthodes l'approximation pratique suffisante d'une construction faite avec la règle et le compas. Alors je dis que le plus souvent une solution obtenue avec le seul compas sera encore préférable. On pourra s'en convaincre par des exemples, en comparant nos solutions avec celles déjà connues.

193. Comme il n'y a encore aucune méthode générale pour obtenir par la Géométrie élémentaire ces approximations, on ne doit pas attendre que j'en propose aucune par ma Géométrie du compas. Je n'appelle point méthode géométrique d'approximation celle par laquelle on obtient une valeur approchée à l'aide d'une de ces échelles qu'on nomme géométriques, puisqu'avant de s'en servir il faut faire un calcul arithmétique : une telle méthode doit être plutôt appelée arithmétique. Supposons par exemple, qu'on veuille la racine cubique du nombre 2, l'extraction qu'on veut faire arithmétiquement de cette racine, pour pouvoir ensuite prendre les portions décimales ou une fraction quelconque sur une échelle géométrique avec le com-

pas, afin de doubler un cube, se fait par un moyen qui est plutôt du ressort de l'Arithmétique que de celui de la Géométrie.

194. Je n'ai pu encore jusqu'ici appercevoir d'autre moyen d'obtenir d'une manière très-approchée la solution de plusieurs problêmes utiles supérieurs au second dégré, que celui de trouver des genres, et pour ainsi dire des classes différentes de construction de figures élémentaires ; puis de soumettre au calcul le plus grand nombre possible de cas particuliers presqu'innombrables qui en résultent, et de choisir parmi ceux qui tendent le mieux au but qu'on se propose, et les employer à résoudre le problême.

195. J'ai déjà examiné plusieurs de ces genres, et pour ainsi dire de ces classes de constructions, et j'ai entre les mains des recherches sur cette matière. La classe la plus simple est celle dont nous ferons presqu'uniquement usage dans ce dernier livre de notre Géométrie. Elle est fondée sur les trois points remarquables *a*, *b* et *e* [*fig.* 9, 11 et 12] (59), qui nous ont déjà tant servi dans les livres précédens, et sur lesquels nous avons à donner les douze équations que nous avons promises [59].

196. Soit le point *Z* un point quelconque

pris sur le quart de la circonférence BF dans la fig. 12 construite comme dans le livre second, et soit pris dans l'autre quart Bf le point z, de manière qu'on ait $Bz = BZ$, on aura [20 et 21]:

$$[A] \ldots (aZ)^2 = (aB)^2 - Zz.Aa$$
$$[B] \ldots (bZ)^2 = (bB)^2 + Zz.Ab$$
$$[E] \ldots (eZ)^2 = (eB)^2 - Zz.Ae$$

197. Si on veut avoir les équations pour les distances des trois points a, b et e du point z, on n'aura qu'à changer les signes du second membre des équations précédentes, et on aura [20 et 21]:

$$[A'] \ldots (az)^2 = (aB)^2 + zZ.Aa$$
$$[B'] \ldots (bz)^2 = (bB)^2 - zZ.Ab$$
$$[E'] \ldots (ez)^2 = (eB)^2 + zZ.Ae.$$

198. La droite Zz étant la corde de l'arc double de $BZ = 2\,sin.\,BZ$, et supposant $AB = 1$, ce que nous sous-entendrons toujours, on aura : $(aB)^2 = (BD)^2 = 3$ [2]; $(Aa)^2 = 2$ [27]; $(Bb)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ [181]; $(Ae)^2 = 2 - \sqrt{2}$ [38]; d'où $(eB)^2 = (AB)^2 + (Ae)^2 = 3 - \sqrt{2}$; et $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ [180]: si on fait $aZ = a$, on aura : $[A'] \ldots a^2 = 3 - 2\,sin.\,A.\sqrt{2}$. Cette équation comprend aussi le cas où l'arc A est négatif comme Bz, dans lequel le signe $-$ placé devant $2\,sin.\,A\sqrt{2}$ se change en $+$.

199. La valeur de a peut toujours être celle d'une corde quelconque du cercle BDd, excepté dans le cas où la valeur de la distance az exprimée par a est plus grande que 2. Pour calculer alors plus facilement la valeur de a, comme on a :

$$\sqrt{2} = BF = 2\, sin.\, 45^\circ,$$

et $2\, sin.\, A\, .\, sin.\, 45^\circ = cos.\, (A - 45^\circ) - cos.\, A + (45^\circ)$
$= cos.\, (45^\circ - A) - sin.\, (45^\circ - A)$ [158];
on aura :

$$[*]\ a^2 = 3 - 2\, cos.\, (45^\circ - A) + 2\, sin.\, (45^\circ - A).$$

200. Dans les autres cas où a est plus petit que 2, en appelant A' l'arc dont a est la corde, on aura :

$$\frac{a^2}{4} = sin.^2\, .\, \tfrac{1}{2} A' = \frac{1 - cos.\, A'}{2} \ [155]$$
$$= \tfrac{3}{4} - sin.\, A\ \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{3}{4} - sin.\, A\, .\, cos.\, 45^\circ;$$

d'où réduisant $cos. A' = 2\, sin.\, A\, .\, cos.\, 45^\circ - \tfrac{1}{2}$;
d'où encore [159],

$$cos.\, A' = sin.\, (A + 45^\circ) + sin.\, (A - 45^\circ) - sin.\, 30^\circ,$$

ou bien,

$$[1]\ cos.\, A' = cos.\, (45^\circ - A) - sin.\, (45^\circ - A) - sin.\, 30^\circ.$$

201. Si on veut se servir de cette équation pour obtenir une des divisions de la circonférence que l'on ne peut pas avoir exactement, on y introduira au lieu de A un arc précis, par exemple, la vingtième partie de la circon-

férence

férence $= 18^{\circ}$, en faisant $BZ = 18^{\circ}$ [*fig.* 12], et on aura :

$$\cos. A' = \cos. 27^{\circ} - \sin. 27^{\circ} - \sin. 30^{\circ}.$$

$$\begin{array}{rl} \text{Or } \sin. 27^{\circ} = & 0{,}4539905 \\ \sin. 30^{\circ} = & 0{,}5000000 \\ \hline & 0{,}9539905 \\ \cos. 27^{\circ} = & 0{,}8910065 \\ \hline \end{array}$$

d'où $\cos. A' = -0{,}0629840$.

On trouve ensuite dans les tables :

$$0{,}0629840 = \sin. 3^{\circ}\ 36'\ \tfrac{1935}{2903}.$$

Or comme la valeur de $\frac{1935}{2903}$ approche tellement de $\frac{2}{3}$, qu'il n'y a pas seulement erreur d'une unité entière dans le dernier chiffre du nombre 1935, on pourra prendre 0,0629840 pour le sinus de $3^{\circ}\ 36'\ 40''$, sans qu'on puisse reconnoître avec les tables ordinaires, s'il y a erreur d'une tierce. Donc l'arc A', qui a son cosinus négatif, sera $= 93^{\circ}\ 36'\ 40''$, et BZ étant supposé $= 18^{\circ}$, la distance aZ sera la corde de cet arc. Donc en appliquant pour corde sur la circonférence la distance aZ prise avec le compas, on déterminera un arc $= 93^{\circ}\ 36'\ 40''$ avec une approximation suffisante.

202. Pour rechercher l'erreur qui se trouve dans les nombres des tables ordinaires, on observe que le sinus de 18° étant égal à la

moitié de la corde de la dixième partie de la circonférence, c. à. d. $=\frac{1}{2}Ab=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, et le cosinus de $45°$ étant égal à $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, l'équation $cos.A' = 2\,sin.A.cos.45° - \frac{1}{2}$ [200]
donne $cos.A' = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)-\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{4}(\sqrt{10}-\sqrt{2})-\frac{1}{2}=0{,}0629839824$.
Puis, calculant aussi avec plus de chiffres le sinus de $3° 36' 40''$, on trouve $0{,}062984061154$, et en se tenant à huit décimales,
on trouve $sin.\,3° 36' 39'' = 0{,}06297921$
la différence pour $1''$ ou $60'''$ est de 485;
donc si 485 donne $60'''$, 8 donnera $\frac{96'''}{97}$, et par conséquent ne donnera pas une tierce entière. Donc l'arc qui a pour corde la distance aZ n'excède pas d'une tierce entière $93° 36' 40''$.

203. D'après cela, voici l'usage qu'on pourroit faire de cette valeur pour l'ancienne division du cercle. Il est clair qu'elle pourroit servir à diviser une minute en trois parties, dans des cercles où on auroit marqué les minutes; car on trouveroit les $40''$, c'est-à-dire, $\frac{2}{3}'$ entre une minute et la suivante, et cela sans erreur d'une tierce. On peut encore l'employer pour trouver la troisième partie d'un degré. En effet, comme l'arc $cBN = 90°$, et $Np = 3°$ [31. 43], si on prend $BZ = Kp$,

alors on aura l'arc $BZ = 18°$ [32]; du point c pris pour centre avec le rayon aZ, soit décrit un arc, il coupera la circonférence entre p et P en un point distant de p de $36' \ 40''$ à très-peu de chose près. Nommons y ce point, et triplons par exemple l'arc $Ny = 3° \ 36' \ 40''$, nous aurons un arc $= 10° \ 50'$, sans qu'il y ait une erreur de trois tierces, et si c'est de N vers G qu'on triple cet arc, la dernière division tombera entre π et ϕ; nommons η le point où elle tombe, de manière qu'on ait $N\eta = 10° \ 50'$; nommons ensuite μ le point qui est à la moitié de l'arc $\pi\phi$ obtenu par le n.° 58, on aura l'arc $\mu\eta = 20'$ sans qu'il y ait erreur de trois tierces, c'est-à-dire, qu'on aura obtenu un tiers de degré de l'ancienne division avec une telle précision, que je ne crois pas qu'on en puisse desirer une plus grande dans la pratique.

204. Nous avons pris cet exemple parmi toutes les valeurs de $cos. A'$ calculées en introduisant successivement, dans l'équation [1] au lieu de A, les arcs 90°, 88° 30', 87°, et ainsi de suite jusqu'à 0°, puis — 1° 30', — 3°, etc. jusqu'à — 19° 30' inclusivement; au-delà de cet arc, l'équation [1] n'a plus lieu, parce que ses valeurs deviennent plus grandes que l'unité.

205. Nous allons maintenant continuer la recherche des autres équations.

Toute distance du point b des points de la circonférence, qui sera plus petite que le diamètre 2, pourra être corde d'un arc. Nommons B' l'arc qui a pour corde la distance $b\,Z$, on aura $\frac{b\,Z}{2} = sin.\,\frac{1}{2}\,B'$; et nommant B l'arc BZ, on aura $Z\,z = 2\,sin.\,B$; puis, divisant par 4 l'équation [B] du n.° 196, on aura :

$sin.\,\frac{1}{2}B' = \frac{1-cos.\,B'}{2}\,[155] = \frac{5-\sqrt{5}}{8} - sin.\,B.\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}$:

d'où $cos.\ B' = 1 - \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right) - sin.\ B.\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$= 1 - 2\ sin.^2\,36^\circ - 2\ sin.\,B.\,sin.\ 18^\circ$

$= cos.\,72^\circ - cos.\,(B-18^\circ) + cos.\,(B+18^\circ)$ [155, 158] :

donc on aura :

[2] $cos.\,B' = sin.\,18^\circ + cos.\,(B+18^\circ) - cos.\,(B-18^\circ)$.

206. Pareillement si on nomme E' l'arc qui a pour corde la distance $e\,Z$, et E l'arc $B\,Z$, l'équation [E] du n.° 196 donnera :

$sin.^2\,\frac{1}{2}\,E' = \frac{1-cos.\,E'}{2} = \frac{3-\sqrt{2}}{4} - sin.\ E.\,\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}$;

d'où où tire :

$cos.\ E' = \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} + 2\ sin.\ E\ .\ \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}$

$= sin.\,45^\circ - sin.\,30^\circ + 2\,sin.\,E\ sin.\,22^\circ 30'$;

et enfin :

[3] $cos.\ E' = sin.\ 45^\circ - sin.\ 30^\circ$
$+ cos.\ (E - 22^\circ\,30') - cos.\ (E + 22^\circ\,30')$.

207. Au moyen de ces trois équations, un

arc A, B ou E étant donné, on aura, avec les tables des sinus et cosinus naturels, et par de simples additions ou soustractions, les cosinus et les arcs A', B' et E', qui ont pour cordes les distances aZ, bZ, eZ, que l'on trouvera être les mêmes, en doublant le sinus de la moitié des arcs A', B' et E'.

208. Réciproquement si la distance aZ est égale à une corde d'un arc connu A', et si on cherche de quel arc Zz deviendra la corde, ou de combien de degrés deviendra l'arc BZ, qui en est la moitié, et est $= A$; de l'équation [198]:

$$a^2 = 3 - 2\, sin.\, A \sqrt{2};$$

on tirera $sin.\, A = \frac{3-a^2}{2\sqrt{2}}$; et substituant la valeur de $a^2 = 4\, sin.^2 . \frac{1}{2} A' = 2 - 2\, cos.\, A'$ [155], on aura : $sin.\, A = \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{2}} + cos.\, A' \sqrt{\frac{1}{2}}$ $= sin.\, 30° . sin.\, 45° + cos.\, A'\, sin.\, 45°$; et [156, 158] comme $sin. (45° + A') = cos. (45° - A')$ on aura cette équation : [4] $sin.\, A =$ $\frac{1}{2}\left(sin.\, 45° + sin.\, (45° - A') + cos.\, (45° - A')\right)$.

229. De même si on connoît l'arc B', qui a pour corde la distance bZ, et si on cherche l'arc $B = BZ$ par le moyen de Zz,

qui est la corde de $2B$, en multipliant l'équation [B] du n.° 196 par $\sqrt{5}+1$; et à cause de $(bB)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, et de $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, on aura : $(bZ)^2 . (\sqrt{5}+1) = 2\sqrt{5} + 4 \sin. B$; et substituant pour $(bZ)^2$ sa valeur

$$4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} B' = 2 - 2 \cos. B' . \ [155],$$

on aura, après avoir fait les réductions :

$$\sin. B = \tfrac{1}{2} - 2 \cos. B' . \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right).$$

Or Bb, étant le côté du pentagone $= \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$ corde de 72°, sera

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} = \sin. 36° ;$$

d'où : $$\tfrac{1}{4} \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = \sin.^2 36° ;$$

or : $$1 - \sin.^2 36° = \cos.^2 36° = \sin.^2 54° = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 :$$

d'où on tirera $\sin. B = \frac{1}{2} - 2 \cos. B' \sin. 54°$; et enfin [156]

$$[5] \quad \sin. B = \sin. 30° - \sin. (54° + B') - \sin. (54° - B').$$

210. De même si on connoît l'arc E', qui a pour corde la distance eZ, et si on cherche le degré de l'arc $BZ = E$, égal à la moitié de l'arc qui a pour corde $Zz = \sin. E$, en substituant dans l'équation [E] du n.° 196 pour $(eZ)^2$ sa valeur $2 - 2 \cos. E'$;

pour $(eB)^2$ sa valeur $3 - \sqrt{2}$, et pour AE sa valeur $\sqrt{(2 - \sqrt{2})} = 2 \; sin. \; 22^\circ \; 30'$ [198. 38], on aura :

$$2 \; sin. \; E \sqrt{(2 - \sqrt{2})} = 2 \; cos. \; E' + 1 - \sqrt{2};$$

ce qui, en multipliant par $\sqrt{(2 + \sqrt{2})} \sqrt{2}$ donne :

$$4 \; sin. \; E = 2 \; cos. \; E' \cdot \sqrt{2} \sqrt{(2 + \sqrt{2})}$$
$$- (\sqrt{2} - 1) \sqrt{2} \sqrt{(2 + \sqrt{2})}$$
$$= 2 \; cos. \; E' \sqrt{(2+\sqrt{2})} \sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) \sqrt{(2 + \sqrt{2})}$$
$$= 2 \; cos. \; E' \; \sqrt{(2+\sqrt{2})} \sqrt{2} - \sqrt{(2-\sqrt{2})} \; \sqrt{2};$$

puis divisant par 4, et considérant que l'on a : $\sqrt{(2 + \sqrt{2})} = 2 \; sin. \; 67^\circ \; 30'$ [37], et $\sqrt{2} = 2 \, sin. \; 45^\circ$, on aura [156, 157, 158] :

$$sin. \; E = 2 \; cos. \; E' \; sin. \; 67^\circ \; 30' \; sin. \; 45^\circ$$
$$- \; sin. \; 22^\circ \; 30' \; sin. \; 45^\circ, \text{ ou } sin. \; E =$$
$$cos. \; E' \big(cos. (67^\circ 30' - 45^\circ) - cos. (67^\circ 30' + 45^\circ) \big)$$
$$- \; sin. \; 22^\circ \; 30' \; sin. \; 45^\circ;$$

ou bien $sin. \; E = cos. \; E' \; cos. \; 22^\circ \; 30'$ $+ \, cos. \; E' \; sin. \; 22^\circ 30' - sin. \; 22^\circ 30' \; sin. \; 45^\circ$; ou enfin :

$$[6] \; sin. \; E = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} cos. \; (E' + 22^\circ \; 30') + sin. \; (E' + 22^\circ \; 30') \\ + \; sin. \; 22^\circ \; 30' + cos. \; (E' \; 22^\circ \; 30') \\ - \; sin. \; (E' - 22^\circ \; 30') - cos. \; 22^\circ \; 30' \end{array} \right\}.$$

211. Ainsi des trois équations [A], [B], et [E] nous en avons tiré six au moyen desquelles, des arcs étant donnés, nous pourrons

en obtenir de nouveaux, ainsi que leurs nouvelles cordes, à l'aide des trois seuls points a, b et e.

212. Comme il peut y avoir une infinité d'arcs, chacune de ces équations donne une infinité de solutions. Mais si on ne veut avoir la valeur que des arcs que l'on peut trouver par le moyen des mêmes points a, b et e, on en trouvera 120 pour chaque équation, quand il n'y aura de limites particulières pour aucune d'elles. En effet, on pourra, par le moyen de ces trois points, diviser la circonférence en 240 parties égales (57), et par conséquent la demi-circonférence en 120; on aura donc 60 points Z et 60 points z, qui pris ensemble détermineront 120 cas pour chaque équation. Mais aucune d'elles n'aura de limites particulières.

213. Si on vouloit prendre avec le compas, par exemple, la corde de 3°, c'est-à-dire, de la cent vingtième partie de la circonférence (42), et décrire un arc en plaçant en a la pointe du compas, cet arc ne pourroit couper la circonférence en aucun point Z, attendu que sa corde est plus petite que la distance $aF = \sqrt{2} - 1$. On ne pourra donc pas dans l'équation [4] mettre au lieu de A' l'arc de

3°, et si on veut le faire, on trouvera pour *sin.* A une valeur plus grande que l'unité, c'est-à-dire, une valeur absurde. Pour voir quel est le premier arc qu'on pourra mettre à la place de A' entre les arcs de la série 1° 30', 3°, 4° 30', etc. on observera quel est l'arc qui a pour corde la distance aF, qui est la plus petite entre le point a et le cercle, et qui est égale à $\sqrt{2}-1=2\,sin.\,45°-\frac{1}{2}=0{,}91421356$ $=cos.\,23°\,54'+$. Donc le premier arc qu'on puisse employer de ceux qu'on trouve par le moyen des trois points a, b et e sera celui de 24°. Après cet arc, on pourra employer tous les autres arcs de la suite 25° 30', 27°, 29° 30' jusqu'à 180°; car les cordes de tous ces arcs peuvent être des distances du point a à quelque point Z ou z de la circonférence.

214. Les équations [5] et [6] sont plus limitées; car dans l'équation [5] on ne peut pas employer les arcs B' dont la corde est plus petite que bf ou plus grande que bF: de même l'équation [6] n'admet aucun des arcs E' dont la corde est plus petite que eF et plus grande que ef.

215. Nous verrons dans la suite dans quel cas on peut se servir avantageusement de quelques-unes de ces valeurs pour la division du

cercle ou pour quelqu'autre problême qu'on ne peut résoudre que par approximation, en choisissant celles qui approchent le plus de la valeur qu'on cherche, et se déterminent en même-tems par des sections d'arcs qui diffèrent moins de l'angle droit.

216. Pourtant, afin de retirer tous les avantages possibles des trois points a, b et e sans en introduire de nouveaux, des trois équations [A], [B] et [E] nous en tirerons six autres pour avoir de nouvelles valeurs d'arcs et de cordes.

217. Soit BZ un arc connu, par exemple, un de ceux qu'on obtient par les problêmes du livre second et nommons B cet arc; on prendra avec le compas la distance bZ, qu'on portera de a à quelqu'autre point Z' qui détermine un autre arc $BZ' = A$, et comparant les deux équations [A] et [B], on en tirera une nouvelle équation qui fait connoître sa valeur. En effet, si dans ces deux équations, on fait $bZ = aZ'$, en faisant dans la première [A] $Zz = 2\,sin.\,A$, puis dans la seconde [B] $Zz = 2\,sin.\,B$, on aura :

$$(aB)^2 - 2\,sin.\,A\,.\,Aa = (bB)^2 + 2\,sin.\,B.Ab,$$

ou bien [198] :

$$3 - 2\,sin.\;A\,.\,\sqrt{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} + sin.\,B\,(\sqrt{5}-1);$$

et dégageant $sin.\ A$, on aura :

$$sin.\ A = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 2\,sin.\ B.\ \frac{\sqrt{5}-1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= sin.\,54^\circ\,sin.\,45^\circ - 2\,sin.\,B.sin.\,18^\circ\,sin.\,45^\circ [209]$$

$$= \tfrac{1}{2}(cos.\,9^\circ + sin.\,9^\circ) - sin.\,B(cos.\,27^\circ - sin.\,27^\circ) [158];$$

d'où (155 et suiv.) :

$$[7]\ sin.\,A = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} cos.\ 9^\circ + sin.\ 9^\circ \\ + cos.\ (B-27^\circ) - sin.\,(B-27^\circ) \\ - cos.\ (B-63^\circ) + sin.\ (B-63^\circ) \end{array}\right\}$$

218. On ne pourra pas non plus prendre ici pour B tous les arcs, mais seulement ceux qui donnent une distance $b\,Z$ ou $b\,z$ qui ne soit pas plus petite que $a\,F$.

219. Maintenant soit connu un arc $B\,Z$ que l'on nomme A, si on porte la distance $a\,Z$ prise avec le compas de b à quelqu'autre point Z' de la même circonférence, qui détermine l'arc $B\,Z' = B$, on connoîtra cet arc B, et si on veut sa corde, en dégageant $sin.\ B$ de l'équation [217]

$$sin.\ A = \frac{\sqrt{5+1}}{4}.\ \sqrt{\tfrac{1}{2}} - 2\,sin.\ B.\ \frac{\sqrt{5-1}}{4}.\ \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Multipliant cette équation par le facteur $2(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}$, on aura :

$$2\,sin.\ A\,(\sqrt{5}+1)\sqrt{2} = 3 + \sqrt{5} - 4\,sin.\ B;$$

d'où on tire :

$$sin.\ B = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 4\,sin.\ A.\ \frac{\sqrt{5+1}}{4}.\ \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= 2\,sin.^2\,54^\circ - 4\,sin.\,A\,sin.\,54^\circ\,sin.\,45^\circ [209];$$

et traitant comme ci-dessus les équations [155 et suiv.], on aura enfin :

[8.] $sin.\, B = 1 + sin.\, 18^\circ - sin.\, (A + 9^\circ) + cos.\, (A + 9^\circ) - sin.\, (A - 9^\circ) - cos.\, (A - 9^\circ)$.

220. On ne pourra pas dans cette équation [8] employer pour A les arcs BZ qui donnent une distance aZ plus grande que bF.

221. Actuellement si dans l'équation [A] du n.° 196, on fait $Zz = 2\, sin.\, A$ et dans l'équation [E] une autre distance $Zz = 2 sin.\, E$, en faisant en outre dans ces deux équations $(aZ)^2 = (eZ)^2$, on aura, après les substitutions nécessaires (198) :

$$3 - 2\, sin.\, A . \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} - 2\, sin.\, E \sqrt{(2 - \sqrt{2})};$$

$$sin.\ A = \tfrac{1}{2} + 2\ sin.\ E . \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2} . \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2} + 2\ sin.\ E\, sin.\ 22^\circ\, 30'\ sin.\ 45^\circ, \text{ et [158]}$$

$$= \tfrac{1}{2} + sin.\ E\, cos.\ 22^\circ\, 30' - sin.\, E\, sin.\ 22^\circ\, 30';$$

d'où enfin [156, 158] :

$$[9]\ sin.\ A = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} + sin.\, (E + 22^\circ 30') \\ + cos.\, (E + 22^\circ 30') \\ + sin.\, (E - 22^\circ 30') \\ - cos.\, (E - 22^\circ 30') \end{array} \right\}.$$

222. On peut encore trouver cette neuvième équation d'une autre manière pour rendre le calcul plus facile par le moyen des sinus et cosinus artificiels que l'on trouve dans les

tables de dix en dix secondes. C'est pourquoi comme on a :

$$sin.\, A = \tfrac{1}{2} + 2\, sin.\, E \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2} . \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{(4-2\sqrt{2})}} + sin.\, E \right) \frac{\sqrt{(4-2\sqrt{2})}}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} + sin.\, E \right) \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

$$= (sin.\, 67^\circ\, 30' + sin.\, E) \frac{sin.\ 22^\circ\, 30'}{sin.\ 45^\circ} \ [37];$$

et faisant $67^\circ\, 30' = p$; $E = q$, on aura [156] :

$$(9) | sin.\, A = \frac{sin.\, \frac{67^\circ\, 30' + E}{2}\ cos.\, \frac{67^\circ\, 30' - E}{2}}{cos.\ 22^\circ\, 30'} ;$$

équation qu'il sera facile de calculer par le moyen des logarithmes des sinus et des cosinus.

223. Si donc on prend avec le compas une distance du point e à un point quelconque Z, extrémité d'un arc connu $BZ = E$, et qu'on la porte du point a à quelqu'autre point Z' de la circonférence, on connoîtra le nouvel arc $BZ' = A$ par le moyen de l'équation [9] ou de celle (9). Ces équations auront leurs limites, puisque l'arc BZ devra être tel que la distance eZ ne soit pas plus petite que aF.

224. On a trouvé [221] :

$$2\, sin.\, A \sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\, sin.\, E . \sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

multipliant cette équation par $\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$,
on aura :

$$2\,sin.\,A\sqrt{(2+\sqrt{2})}=\sqrt{(2+\sqrt{2})}+2\,sin.\,E\,;$$

d'où $sin.\,E=2\,sin.\,A\,.\,\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}-\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$

$=2\,sin.\,A\,.\,sin.\,67^{\circ}\,30'-sin.\,67^{\circ}\,30'$ [37];
d'où [158] :

$$[10]\,sin.\,E=cos.\,(A-67^{\circ}\,30')-cos.\,(A+67^{\circ}\,30')-sin.\,67^{\circ}\,30'.$$

225. On peut encore préparer autrement cette équation pour la rendre soluble par l'usage des logarithmes. En effet, puisqu'on a :

$$sin.\,E=2\,sin.\,(A-\tfrac{1}{2})\,\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$$

$=2\,(sin.\,A+sin.\,-30^{\circ})\,sin.\,67^{\circ}\,30'$
en faisant $A=p\,;\,-30^{\circ}=q$, on aura [156] :

$$[10]\,sin.\,E=4\,sin.\,\frac{A-30^{\circ}}{2}\,cos.\,\frac{A+30^{\circ}}{2}\,sin.\,67^{\circ}30'.$$

226. Il est évident que cette dixième équation aura aussi ses limites, puisque l'on ne pourra pas y introduire toutes les valeurs de l'arc BZ ou $Bz\pm A$, qui donneroient la distance aZ plus grande que ef.

227. Enfin on peut de la comparaison de l'équation [B] avec celle [E], tirer deux autres équations. Car si on porte une distance du point e à un point quelconque Z de la

circonférence, qui soit l'extrémité d'un arc connu $BZ = E$, et que du point b comme centre et de cette distance eZ prise pour rayon, on décrive un arc qui coupe la circonférence en quelqu'autre point Z' qui détermine l'arc $BZ' = B$, on connoîtra cet arc au moyen de son sinus de la manière suivante : soit fait dans l'équation [B] du n.° 196, $Zz = 2\,sin.\,B$, dans celle [E] $Zz = 2\,sin.\,E$, et dans toutes les deux $bZ = eZ$, on aura, après avoir fait les substitutions nécessaires [198] :

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} + sin.B\,(\sqrt{5}-1) = 3-\sqrt{2}-2sin.E\sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

d'où on tire :

$$2sin.B(\sqrt{5}-1) = \sqrt{5}+1-2\sqrt{2}-4\,sin.E\sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

et multipliant les deux membres de l'équation par $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$, on aura :

$$sin.B = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}.\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 4sin.E\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}.\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$
$$= 2\,sin.^2\,54^\circ - 2\,sin.\,54^\circ\,sin.\,45^\circ$$
$$- 4\,sin.\,E\,sin.\,22^\circ\,30'\,sin.\,54^\circ \text{ [209]};$$

d'où on tire [168] :

$$sin.\,B = 1 - cos.\,108^\circ - cos.\,9^\circ - sin.\,9^\circ$$
$$- 2\,sin.\,E\,(cos.\,31^\circ\,30' - cos.\,76^\circ\,30');$$

et par conséquent [156] :

$$[11]\quad sin.\,B = 1 + sin.\,18^\circ - cos.\,9^\circ - sin.\,9^\circ$$
$$- sin.\,(E + 31^\circ\,30') - sin.\,(E - 31^\circ\,30')$$
$$+ sin.\,(E + 76^\circ\,30') + sin.\,(E - 76^\circ\,30').$$

228. L'équation [11] aura aussi des limites de deux côtés; car la distance la plus petite $eF = 1 - \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$, est moindre que celle $bf = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, et la plus grande ef est plus grande que bF.

229. Si on multiplie par $\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{4\sqrt{2}}$ l'équation

$$2\,sin.\,B(\sqrt{5}-1) = \sqrt{5}+1-2\sqrt{2}-4\,sin.\,E\,\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

que l'on a trouvé plus haut [227], on aura :

$$sin.\ E = 2\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}.\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}.\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$$
$$- 4\,sin.\,B\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}.\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$= 2\,sin.\,54^{\circ}\,sin.\,67^{\circ}\,30'\,sin.\,45^{\circ} - sin.\,67^{\circ}\,30'$$
$$- 4\,sin.\,B\,sin.\,18^{\circ}\,sin.\,67^{\circ}\,30'\,sin.\,45^{\circ}$$
$$= sin.\,67^{\circ}\,30'(cos.\,9^{\circ} + sin.\,9^{\circ}) - sin.\,67^{\circ}\,30'$$
$$-2\,sin.\,B.\,sin.\,67^{\circ}30'(cos.\,27^{\circ} - sin.\,27^{\circ})$$
$$= \tfrac{1}{2}(sin.\,76^{\circ}\,30' - cos.\,76^{\circ}\,30'$$
$$+ sin.\,58^{\circ}\,30' + cos.\,58^{\circ}\,30')$$
$$- sin.\,67^{\circ}\,30' - sin.\,B\,(sin.\,85^{\circ}\,30'$$
$$+ sin.\,40^{\circ}30' - cos.\,40^{\circ}\,30' - cos.\,85^{\circ}\,30');$$

d'où on a enfin :

$$[12]\ sin.\,E = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} sin.\,76^{\circ}\,30' - cos.\,76^{\circ}\,30' \\ + sin.\,58^{\circ}30' + cos.\,58^{\circ}\,30' \end{array}\right\} - sin.\,67^{\circ}\,30'$$
$$- \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} cos.\,(85^{\circ}\,30' - B) + sin.\,(85^{\circ}\,30' - B) \\ - cos.\,(85^{\circ}\,30' + B) - sin.\,(85^{\circ}\,30' + B) \\ + cos.\,(40^{\circ}\,30' - B) + sin.\,(40^{\circ}\,30' - B) \\ - cos'\,(40^{\circ}\,30' + B) - sin.\,(40^{\circ}\,30' + B) \end{array}\right\}$$

équation qui n'a pas de limites.

230. Si par hasard quelqu'une des valeurs qu'on trouve avec ces douze équations est au premier abord très - approchante de quelque valeur utile et cherchée dans la solution des problêmes, on aura l'avantage de parvenir au même but par un moyen très-simple. Car on n'aura à employer d'autres points pris hors de la circonférence que les trois seuls points a, b et e que l'on a déjà remarqué tant de fois, et dans la circonférence quelqu'un de ceux qui servent à la division exacte de la circonférence par le moyen des solutions des problêmes du livre second. Nous allons actuellement donner quelques exemples.

231. Nous verrons d'abord comment on peut diviser le cercle à l'ancienne manière en degrés et minutes sans erreur d'une seconde. Pour cela, nous supposerons que la circonférence du cercle BDd [*fig.* 12], est divisée en deux cent quarante parties [57, 58] dont chacune comme $P\delta$ contient 1° 30′, que l'on commence à compter les quantités positives de B vers F, et de même les quantités négatives de B vers f, et que les points Z et Z' sont des points vagues soumis pour le moment à la seule condition de se trouver, savoir : les points Z et Z' entre B et F sur

la circonférence, et les points z et z' entre les points B et f. Nous en agissons ainsi, pour éviter le trop grand nombre de figures dont on auroit besoin si on en répétoit une pour chaque problême. D'ailleurs, la petitesse des divisions les laisseroit à peine appercevoir même dans une figure beaucoup plus grande que la figure 12.

PROBLÊME.

232. *Trouver* [fig. 12] *l'arc d'un degré de l'ancienne division, ou de* 1° *sans erreur d'une demi-seconde.*

I.ere *Solution.* Soit l'arc $Bz = -55^\circ\ 30'$ [231]. Prenez avec le compas la distance bz, et du point e comme centre, décrivez un arc qui coupe la circonférence en un point Z; on aura l'arc $BZ = 52^\circ\ 59'\ \frac{1739}{1751}$, c'est-à-dire, de 53° sans qu'il y manque vingt-cinq tierces. On a ensuite dans les divisions de B vers F exécutées par le problême du n.° 42, l'arc de $54^\circ = \frac{18}{120}$. On aura donc aussi l'arc $54^\circ - 53^\circ = 1^\circ$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation [12] on fait $B = -55^\circ\ 30'$, on trouve à la fin du calcul $sin.\ E = 0{,}7986343 = sin.\ 52^\circ\ 59'\ \frac{1739}{1751}$.

II.^{e} *Solution*. Soit l'arc $BZ = 10^\circ\ 30'$; du centre a et avec la distance bZ prise pour rayon, décrivez un arc qui coupe la circonférence en un autre point Z' ; on aura l'arc $BZ' = 29^\circ\ 29'\ \frac{2511}{2532}$, c'est-à-dire, $= 29^\circ\ 30'$ sans erreur d'une demi-seconde. On trouve ensuite dans les divisions du cercle faites au n.° 58 l'arc de $28^\circ\ 30' = \frac{19}{240}$ de la circonference. Donc on aura la différence des deux arcs égale à 1° avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation [7] on fait $B = 10^\circ\ 30'$, on trouvera à la fin du calcul

$$sin.\ A = 0{,}4924215 = sin.\ 29^\circ\ 29'\ \tfrac{2511}{2532}:$$

donc les arcs ne différeront pas de $29'''$, de la valeur d'un degré.

233. Cette seconde solution est moins approchée que la première, de $5'''$, mais les sections des arcs s'y font sous un angle qui diffère moins de l'angle droit.

234. Puisqu'on a l'arc de $1^\circ\ 30'$ [225], et qu'on a trouvé [226] l'arc de 1°, on aura aussi en soustrayant l'un de l'autre l'arc de $30'$, ou le demi-degré, et par conséquent on aura la manière de diviser toute la circonférence en demi-degrés sans accumulation d'erreurs, et sans qu'aucun point soit éloigné, d'une demi-seconde, de sa véritable situation.

P 2

PROBLÈME.

235. *Trouver l'arc d'un quart de degré ou de* $15'$, *sans erreur d'une tierce.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -12°$, la distance ez sera égale à la corde de $87° 15'$; d'un rayon égal à cette distance prise avec le compas et du point B comme centre, coupez l'arc BF en un point Z', on aura l'arc $BZ' = 87° 15'$. On a de plus par les divisions du cercle faites au n.° 42 l'arc de $87° = \frac{29}{120}$ de la circonférence. On aura donc la différence de ces deux arcs $= 15'$.

Démonstration. Si dans l'équation [3] (206)
$cos.\, E' = sin.\, 45° - sin.\, 30° + cos.\, (E - 22° 30')$
$- cos.\, (E + 22° 30')$,
on fait $E = -12°$, on aura :

$$\begin{aligned} sin.\, 45° - sin.\, 30° &= 0,2071068 \\ cos.\, -34° 30' &= 0,8241262 \\ -cos.\, 10° 30' &= -1,0167451 \\ \hline cos.\, E' &= 0,0479781. \end{aligned}$$

Or dans les tables qui donnent les sinus naturels avec sept chiffres, on trouve $0,0479781 = cos.\, 87°\, 15'$ sans aucune différence même dans le dernier chiffre. En employant ensuite plus de décimales, on trouve :

$$cos.\ E' = 0{,}0479780622$$

$$cos.\ 87^\circ.\ 15' = 0{,}047978128520\ ;$$

et ne prenant que huit décimales, on a :

$$cos.\ 87^\circ\ 15'\ 1'' = 0{,}04797229.$$

On a donc pour $1''$ la différence 584. Or si 584 donne $60'''$ de différence, 7 donnera $\frac{105}{146}$ de tierces. On aura donc l'arc E', qui a pour corde la distance eZ', $= 87^\circ\ 15'$ avec une erreur plus petite que $1'''$.

236. On pourra, par le moyen de ce problême, diviser la circonférence en 1440 parties, c'est-à-dire, en 1440 quarts de degrés sans qu'il y ait en aucun point de division une erreur de trois tierces. Car si on fait sur chaque arc $P\delta$ de $1^\circ\ 30'$ trois divisions de $15'$ en $15'$ de P vers δ et deux de δ vers P, l'arc $P\delta$ se trouvera divisé en six parties, dont chacune sera d'un quart de degré sans qu'il y ait erreur de $1'''$ dans la position d'aucun point de division ; il en sera de même pour le reste de la circonférence. D'après cela, nous supposerons dorénavant la circonférence divisée en degrés et quarts de degrés, en les considérant comme exacts, afin de simplifier le calcul. On pourra, quand on voudra, tenir compte des erreurs.

PROBLÈME.

237. *Trouver un arc de* $10'$ *ou la sixième partie d'un degré, sans erreur de* $10'''$ *ou de la sixième partie d'une seconde.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -49^\circ\ 30'$; la distance bz sera égale à la corde de l'arc de 38° $50'$ sans erreur de $10'''$: puis soustrayant l'arc de $38^\circ\ 50'$ de celui de $39^\circ = \frac{13}{120}$ de la circonférence qu'on a par le n.° 42, on aura l'arc de $10'$.

Démonstration. Si dans l'équation [2] on fait $B = -49^\circ\ 30'$, elle deviendra :

$cos.\ B' = 0,7789738 = cos.\ 38^\circ\ 49'\ \frac{1819}{1824}$;

on a donc $B' = 38^\circ\ 50'$ à moins de $9'''$ près.

238. Soustrayant d'un arc de $50'$ auquel manquent $9'''$ un arc de $45'$ [236] auquel il manque quelques tierces, on aura l'arc de $5'$ ou la douzième partie d'un degré sans qu'il y ait une erreur de $9'''$.

PROBLÈME.

239. *Trouver l'arc de* $6'$ *ou un dixième de degré sans erreur de* $13'''$.

Solution. Soit l'arc $Bz = 45^\circ$, c'est-à-dire, soit l'arc BG; du point b comme centre et avec

la distance BG prise pour rayon, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en z; on aura, sans erreur de 13‴, l'arc $Bz = -40° \, 6'$,
et soustrayant [236] l'arc de. . . . . . . $-40°$;

on aura pour reste l'arc de. . . . . $6'$.

Démonstration. Si dans l'équation [5] on fait $B' = 45°$, elle deviendra :

$$sin.\, B = -0,\, 6441228 = sin. -40° \, 5' \tfrac{2217}{2225}.$$

On aura donc l'arc $B = Bz = -40° \, 6'$ à moins de 12‴ près.

240. Soustrayant de l'arc de $6'$ [239] l'arc de $5'$ [238], l'arc restant sera de $1'$ avec une erreur de quelques tierces. Mais on peut trouver immédiatement cet arc par le problême suivant.

PROBLÊME.

241. *Trouver immédiatement l'arc de $1'$ sans erreur de 22‴.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -27°$; du point e comme centre et avec un rayon égal à la distance bz prise avec le compas, soit coupée la circonférence en Z. On aura l'arc $BZ = 29° \, 59'$ avec un excès de 10‴ : donc l'arc BN étant de 30° [31], l'arc ZN sera de $1'$ avec 10‴ de moins.

Démonstration. Si dans l'équation [12] on fait $B = -27^\circ$, on aura :

$sin.\ E = 0{,}4997496 = sin.\ 29^\circ\, 59'\, \frac{15}{2519}$:
donc, etc.

PROBLÊME.

242. *Trouver l'arc de 9' sans qu'il y ait erreur de 7'''.*

Solution. Du point e comme centre, avec la distance $b\,K$ prise pour rayon, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en z; on aura l'arc $Bz = -4^\circ\, 21'$ avec un excédent de $6'''$, lequel soustrait de $-4^\circ\, 30'$ donne pour reste 9' sans erreur de 7'''.

Démonstration. Si dans l'équation [12] on fait $B = 15^\circ = BK$ [32], on aura :
$sin.\ E = -0{,}0758494 = sin. -4^\circ\, 21'\, \frac{5}{2901}$:
donc l'arc $B\,z = -4^\circ\, 21'\, 0''\, 6'''$.
Ce problême servira encore à la nouvelle division du cercle, ainsi que nous le verrons ci-après [256].

243. L'arc de 15' manquant de moins de 1''' [235],
celui de 10' excédent de moins de 10''' [237],
celui de 6' manquant de moins de 13''' [239],
celui de 1' . . . . . de moins de 22''' [241],
et celui de 9' . . . . de moins de 7''' [242],
on pourra les combiner par addition ou sous-

traction, sans accumuler beaucoup les erreurs, de manière qu'à la fin toute la circonférence se trouve divisée en degrés et minutes, sans autre erreur que de très-peu de tierces. En effet, en doublant, par exemple, l'arc de $9'$, on aura un arc de $18'$ à moins de $14'''$ près; et soustrayant de cet arc celui de $6'$ approché à moins de $13'''$, on aura l'arc de $12'$ à moins d'environ $1'''$. Soustrayant maintenant cet arc de celui de $15'$ approché à moins d'une tierce [235], on aura l'arc de $3'$ avec à peine une erreur d'une tierce. Par ce moyen, on pourra diviser en cinq parties chaque arc de $15'$, et toute la circonférence se trouvera divisée de trois en trois minutes avec une erreur moindre de six tierces sur cette dernière division; erreur qui deviendra encore moindre, si on la porte en sens contraire de celle de trois tierces au plus qu'on commet dans la division de $15'$ en $15'$ [235]. Puis employant l'arc de $1'$ qui a $4'''$ de moins [240] à diviser chaque arc de $3'$, on ne commettra plus une erreur de $10'''$, et on aura divisé la circonférence en degrés et minutes.

On pourroit aussi combiner ces arcs ou d'autres tirés des douze équations précédentes, de manière que l'on parvînt à commettre de moindres erreurs, et nous emploierions pour cela quelques problêmes, si d'un côté la division du cercle en 360° ne devoit pas avec le tems cesser d'être employée, et si d'ailleurs nous croyions que les artistes qui voudroient continuer à s'en servir, trouvassent ces recherches avantageuses pour la pratique. Nous ne croyons pourtant pas devoir omettre les problêmes suivans, dans la solution desquels nous supposerons que le cercle entier est divisé en anciens degrés et minutes que, pour la simplicité du calcul, nous considérerons comme exacts.

PROBLÊME.

244. *Trouver l'arc de 20″ ou un tiers de minutte qui ait à peine 1‴ de trop.*

I.ere *Solution*. On trouve [201] l'arc de 40″ avec moins d'une tierce de trop. Donc aussi l'arc de 20″, complément d'une minute, n'a pas tout-à-fait 1‴ de moins.

II.e *Solution*. Du point e comme centre et avec un rayon égal à la corde de l'arc de 61° 30′ prise avec le compas, soit coupée la circonférence en Z; on aura l'arc $BZ =$ 20° 39′ 40″ avec à peine une tierce de trop; puis soustrayant cet arc de celui de 20° 40′, l'arc restant sera de $20'$ avec à peine $1'''$ de moins.

Démonstration. Si dans l'équation [6] on fait $E' = 61^{\circ}\ 30'$, en employant de plus grandes tables de sinus, on aura :

$$sin.\ BZ = sin.\ E = 0{,}35283991\ ;$$

on a ensuite $sin.\ 20^{\circ}\ 39'\ 40'' = 0{,}35283984.$

Or $log.\ 0{,}3528399 \quad = 9{,}5475777$

$log.\ sin.\ 20^{\circ}\ 39'\ 40'' = 9{,}5475776$

$log.\ sin.\ 20^{\circ}\ 39'\ 50'' = 9{,}5476334$

différence = 558.

Donc E surpassera l'arc $20^{\circ}\ 39'\ 40''$ de $\frac{10}{558}$ environ, c'est-à-dire, de $1'''$ et un peu plus.

PROBLÈME.

245. *Trouver l'arc de $15''$ ou un quart de minute à moins de $10'''$ près, ou environ.*

Solution. Du point e comme centre, avec un rayon égal à la corde de $31^{\circ}\ 30'$ prise avec le compas, soit coupée la circonférence en un point Z; on aura l'arc $BZ = 57^{\circ}\ 30'\ 15''$ à $9'''$ de moins près.

Démonstration. Si dans l'équation [6] on fait $E' = 31^{\circ}\ 30'$, on trouvera $E = 57^{\circ}\ 30'\ \frac{386}{1563}$; mais on a $\frac{390}{1563} = \frac{1}{4}$. Donc ce qui lui manque est de $\frac{4}{1563}$ environ, c'est-à-dire, d'environ $10'''$.

PROBLÈME.

246. *Trouver l'arc de* $12''$, *ou un cinquième de minute à* $1'''$ *de moins près ou environ.*

Solution. Soit $Bz = -10^{\circ}\ 30'$; du point a comme centre et d'un rayon égal à la distance bz prise avec le compas, soit coupée la circonférence en Z : on aura l'arc $BZ = 40^{\circ}\ 40'\ 12''$ avec environ $1'''$ de moins.

Démonstration. Si dans l'équation [7] on fait $B = -\ 10^{\circ}\ 30'$, on trouvera par le calcul $A = 40^{\circ}\,40'\ \frac{440}{2206}$. Or on a $\frac{441}{2206} = \frac{1}{5}$: on a donc en moins une erreur de $\frac{1}{2206}$, c'est-à-dire, de $1'''$ environ.

Si on avoit fait le calcul avec de plus grandes tables, on auroit relevé l'erreur avec plus de précision.

PROBLÈME.

247. *Trouver l'arc de* $10''$ *ou un sixième de minute qui surpasse d'environ* $1'''$.

Solution. Soit l'arc $Bz = -24^{\circ}$. Du point a comme centre et d'un rayon égal à la distance ez prise avec le compas, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en Z; on aura l'arc $BZ = 16^{\circ}\ 15'\ 10''$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation [9] on fait $E = -24^{\circ}$, on trouvera pour résultat :

$$log.\ sin.\ A = 9,4469652.$$

Ce logarithme se trouve être celui du sinus de $16^{\circ}\ 15'\ 10''\ \frac{20}{722}$: donc l'excès ne va pas à deux tierces.

PROBLÈME.

248. *Trouver l'arc de 5″ ou d'un douzième de minute avec une erreur inappréciable par les tables ordinaires et moindre que 2‴.*

I.ere *Solution.* Soit l'arc $BZ = 4^{\circ}\ 30'$; du point a comme centre avec un rayon égal à la distance eZ prise avec le compas, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en un autre point Z' ; on aura l'arc $BZ' = 32^{\circ}\ 51'\ 5''$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si dans l'équation (9) on fait $E = 4^{\circ}\ 30'$, on aura pour résultat :

$$log.\ sin.\ A = 9,7343692\ ;$$

or $log.\ sin.\ 32^{\circ}\ 51' = 9,7343529$,

et la différence est 163; de plus, dans les tables, la différence pour dix minutes est 326, c'est-à-dire, précisément double de 163 : donc, etc.

En calculant l'erreur avec de grandes tables, on la trouve moindre que $2'''$.

II.ᵉ *Solution*. Soit l'arc $BZ = 31^\circ\, 30'$. Du centre a avec un rayon égal à la distance eZ prise avec le compas, soit coupée la circonférence en un autre point Z' ; on aura l'arc $BZ' = 51^\circ\, 30'\, 55''$ trop petit de moins d'une tierce.

Démonstration. Si dans l'équation (9) on fait $E = 31^\circ\, 30'$, on trouvera par le moyen des tables ordinaires :
$log.\, sin.\, A = 9{,}8936365 = log.\, sin.\, 51^\circ 30'\, 50''\, \frac{84}{167}$; laquelle fraction $\frac{84}{167}$ se comparant à $10''$, donnera $5''$ avec un excès moindre de $1'''$. On aura donc $A = 51^\circ\, 30'\, 55''$, lequel arc soustrait de $51^\circ\, 31'$ donnera $5''$ avec l'approximation demandée.

Mais il est tems de passer à la démonstration de l'usage qu'on peut faire des douze équations précédentes quand on veut diviser la circonférence du cercle suivant la nouvelle manière des Français.

249. Suivant cette manière, la circonférence se trouve divisée en 400 degrés, afin que le quart de cercle qui est le fondement de toute

la trigonométrie soit par-là divisée en 100 degrés. Chaque degré est divisé en 100 minutes, chaque minute en 100 secondes, et ainsi de suite. On peut, si on veut, se dispenser de dénommer les degrés, minutes ou secondes, la position des décimales faisant assez connoître la nature de ces fractions.

250. Par conséquent on voit que neuf degrés anciens valent 10 degrés nouveaux, ou bien que $9^{\circ} = 0,10$; que $54' = 0,01$; que $27' = 0,005$; que $5'\ 24'' = 0,001$; que $32''\ 24''' = 0,0001$; c'est-à-dire, qu'un degré nouveau vaut 54 minutes anciennes, qu'une minute nouvelle vaut $32''\ 24'''$ de l'ancienne division, etc.

251. Les divisions obtenues exactement par le moyen des trois points a, b, et e dans le second livre donnent jusqu'à la 240.me partie de la circonférence [59]. L'arc qui forme cette partie est exactement de $1^{\circ}\ 30'$ de l'ancienne division. Il ne s'exprime pas également avec un nombre fini de décimales dans la division moderne; le premier arc, formé par l'assemblage de plusieurs 240.mes, qu'on exprime avec un nombre fini de décimales du quart de cercle est celui de $\frac{3}{240}$ ou de $\frac{1}{80}$ de la circonférence, lequel est de $4^{\circ}\ 30' = 0,05$ du quart de cercle, c'est-à-dire, de 5 degrés de la nouvelle divi-

sion. On peut donc avec les méthodes du livre second et par le moyen des trois seuls points *a, b* et *e* pris hors de la circonférence, la diviser en deux parties égales, chacune de cinq degrés modernes, et cela avec la précision géométrique, ce qui est un des avantages de cette Géométrie.

252. On pourroit, si on vouloit, par la division des arcs en deux parties égales [60], diviser ensuite la circonférence en arcs de deux degrés et demi chacun ou de 0,025 et continuer ainsi cette division; mais il est clair que par ce moyen on ne pourra pas avoir un degré avec précision. Il ne reste donc d'autre moyen à la Géométrie, pour obtenir l'arc d'un degré [63], que celui de chercher quelque construction qui le donne au moins par approximation.

PROBLÈME.

253. *Trouver l'arc d'un nouveau degré, ou de* 0,01 *sans qu'il excède d'un sixième de seconde de la nouvelle division ou de* 3 *tierces de l'ancienne.*

Solution. Prenez avec le compas la corde de 138° de l'ancienne division, ou de quarante-six vingtièmes de la circonférence [42], et et du point a comme centre, décrivez un arc qui coupe le quart de cercle Bf en un point z, l'arc Bz sera de 11 degrés de la nouvelle division; d'où soustrayant l'arc de $9^\circ = 0,10$ [252], on aura pour reste un arc $= 0,01$ avec l'approximation demandée.

Démonstration. Si, dans l'équation [4], on fait $A' = 138^\circ$, on aura :

$$sin. A = \tfrac{1}{2} (sin. 45^\circ + sin. 183^\circ + sin. -93^\circ)$$
$$= \tfrac{1}{2} (sin. 45^\circ - sin. 3^\circ - sin. 87^\circ).$$

On a ensuite $-sin. 3^\circ = -0,0523360$

$$-sin. 87^\circ = -0,9986295$$
$$sin. 45^\circ = 1,2928932$$
$$-0,3438587$$
$$-0,1719293$$

On a de plus $sin.\ 9^\circ\ 54' = 0,1719291$

$$sin.\ 9^\circ\ 55' = 0,1722156.$$

Donc l'arc $Bz = A = 9^\circ\ 54'$, avec le seul excès de $\frac{2}{2865}$ d'une minute de l'ancienne division, c'est-à-dire, sans qu'il y ait un excédent de $4'''$, et par conséquent sans qu'il y ait erreur d'une seconde de la nouvelle division.

254. On pourroit, avec des tables un peu plus étendues que celles ordinaires, rechercher cette erreur avec plus de précision. Dans tous les cas, elle est si petite, qu'en

l'accumulant encore deux ou trois fois, elle ne seroit pourtant pas sensible dans les plus grands quarts de cercle. Or, dans leurs divisions, on n'a pas besoin de l'accumuler plus de deux fois ; car on a déjà, avec la précision géométrique, l'arc de 0,05 [251]. Si sur cet arc on trace deux divisions d'un degré en commençant des deux extrémités, et allant en sens contraire, on aura marqué sur cet arc quatre points qui en donneront la division en cinq degrés, et chacun de ces points ne sera pas éloigné de sa véritable position de six tierces entières de l'ancienne division, ou d'un tiers de seconde de la nouvelle.

255. D'après ce problême, on supposera maintenant la circonférence divisée en 400 degrés de la nouvelle division.

PROBLÊME.

256. *Trouver l'arc d'un nouveau demi-degré, sans qu'il y ait excès de six tierces de l'ancienne division ou d'un tiers de seconde de la nouvelle.*

Solution. Prenez avec le compas la distance du point b au point K, et du point e

comme centre avec ce rayon $b\,K$, décrivez un arc qui coupe la circonférence en un point z, vous aurez l'arc $Bz = -4^\circ\,21'$, avec un excès moindre que $7'''$; soustrayez en un arc de $3^\circ = Np$ [43], il viendra pour reste $1^\circ\,21'$, c'est-à-dire, un degré et demi de la nouvelle division; alors de tous les points des degrés [225] pris pour centre, et d'un rayon égal à la corde de cet arc, on pourra diviser tous ces mêmes degrés en deux parties égales.

Démonstration. Si dans l'équation (12) on fait $B = B\,K = 15^\circ$ [32], on aura $E = -4^\circ\,21'\,\frac{5}{2901}$. Donc, etc. [242].

PROBLÈME.

257. *Trouver l'arc d'un cinquième de degré de la nouvelle division, sans qu'il y ait excès d'une seconde ancienne.*

Solution. Du point e comme centre, avec un rayon égal à la corde de 51°, prise avec le compas, décrivez un arc qui coupe le quart de cercle en Z, l'arc $B\,Z$ sera de trente-sept degrés nouveaux plus un cinquième de degré avec la précision demandée.

Démonstration. Si dans l'équation [6]

on fait $E' = 51^{\circ}$, on aura :
$E = 33^{\circ}\ 28'\ \frac{1968}{2426} = 33^{\circ}\ 28'\ 48''\ \frac{1632}{2426}$.
Mais $33^{\circ}\ 28'\ 48'' = 0{,}372$. Donc, etc.

PROBLÊME.

258. *Trouver l'arc de 4 dixièmes d'un nouveau degré, sans qu'il y ait excès de 16‴ anciennes.*

Solution. Soit l'arc $BZ = 76^{\circ}\ 30'$; puis du point a comme centre, et d'une ouverture de compas $= bZ'$, prise pour rayon, décrivez un arc qui coupe le quart de cercle en un point Z'; on aura l'arc $BZ' = 0{,}094$, c'est-à-dire, de neuf nouveaux degrés et quatre dixièmes, avec l'excès indiqué.

Démonstration. Si dans l'équation [7] on fait $B = 76^{\circ}\ 30'$, elle deviendra $A = 8^{\circ} 27'\ \frac{1738}{2877}$.
Mais $8^{\circ}\ 27'\ \frac{1726}{2877} = 0{,}094$. Donc, etc.

PROBLÊME.

259. *Diviser un degré de la nouvelle division en dix parties égales.*

Solution. Après avoir divisé cet arc en deux parties égales [256], ôtez de l'arc de 0,005 les arcs de 0,004 [258] et de 0,002 [257], et on aura les arcs de 0,001, et de 0,003, avec une erreur de quelques tierces de l'ancienne division seulement; on aura donc tous les arcs, par la division de l'arc de 0,005 en cinq parties; et divisant ensuite de la même manière l'autre moitié de l'arc, il sera divisé en dix parties égales.

260. On pourra soustraire et ajouter ces arcs de manière que balançant les erreurs en plus et en moins, on obtienne exactement la millième partie d'un nouveau degré : on pourra donc par la suite supposer le quart de cercle divisé en millièmes ou de dix en dix nouvelles minutes. On les considérera comme exacts, pour la simplicité du calcul.

PROBLÊME.

261. *Trouver l'arc d'une nouvelle minute, sans erreur d'une tierce ancienne.*

Solution. Soit un arc $Bz = - 1^\circ\, 30'$; la distance az sera corde d'un arc de 1,3609, sans erreur d'une tierce ancienne. Soustrayant cet arc de celui de 1,361 [260], on aura l'arc de 0,0001.

Démonstration. Si dans l'équation [1] on fait $A = -1^{\circ} 3'$, elle devient $A' = 122^{\circ} 28' \frac{2111}{2454}$ $= 122^{\circ} 28' 51' 36''' = 1{,}3609$ [250]. Donc, etc.

PROBLÈME.

262. *Trouver l'arc de deux nouvelles minutes, sans erreur d'une tierce ancienne.*

Solution. Soit l'arc $Bz = -48^{\circ}$; la distance bz sera corde d'un arc de 0,4422 avec la précision demandée. Soustrayant de cet arc celui de 0,442 [260], l'arc restant sera de 0,0002.

Démonstration. Si dans l'équation [2] on fait $B = -48^{\circ}$, elle devient : $B = 39^{\circ} 47' \frac{1639}{1862} = 39^{\circ}' 52'' 48''' = 0{,}4422$ [250]. Donc, etc.

PROBLÈME.

263. *Trouver l'arc de trois nouvelles minutes, sans erreur d'une nouvelle tierce.*

Solution. Soit un arc $Bz = -78^{\circ}$; du point a comme centre, avec la distance ez prise pour rayon, soit décrit un arc qui coupe le quart de cercle Bf en un point z' ; on aura l'arc $Bz' = - 0{,}0187$ avec la précision demandée; et soustrayant celui-ci de l'arc $= - 0{,}019$ [260], on aura l'arc restant $= - 0{,}0003$.

Démonstration. Si dans l'équation [9] on fait $E = - 78°$, le sinus de A devient négatif; en changeant les signes dans les deux membres de l'équation, on a *log. sin.* $A = 8{,}4678991$. Or dans les nouvelles tables de *Callet* pour la nouvelle division du cercle, on trouve :

$$8.4678990 = \textit{log. sin. } 0{,}0187;$$

puis de *log. sin.* $A = 8{,}4678991$
soustrayant $D\,S = 6{,}1960574$ (*V.* CALLET.)

on aura $2{,}2718417 = \textit{log.}\,187{,}00004$.

On a donc $A = - 0{,}018700004$; l'erreur se trouve encore moins forte, si on emploie plus de chiffres dans les logarithmes.

264. On a pour la position du point dans les trois problêmes précédens, et spécialement dans le dernier, une telle approximation, qu'on n'en peut pas desirer une plus grande. Au moyen des arcs trouvés par ces problêmes, on peut diviser de plusieurs manières un millième du quart de cercle [260] en deux parties égales, c'est-à-dire en minutes de la nouvelle division du cercle.

265. On pourroit de même obtenir des divisions plus petites; mais il faudroit employer des tables plus grandes que celles dont je me suis généralement servi dans les calculs des douze équations précédentes. On pourroit aussi, si on en avoit besoin, étendre la division de la circonférence au-delà des minutes du nouveau systême français.

PROBLÊME.

266. *Dans un cercle d'un rayon donné* AB, *trouver une corde* Bb *qui approche d'être égale au quart de la circonférence.*

Solution. Faites (*fig.* 101) sur la circonférence à $AB = BC = CD = DE$; puis à $BD = Ba = Ea$; du point C pris pour centre, et du rayon Ca, décrivez un arc qui coupe la circonférence en b, Bb sera la corde cherchée.

Démonstration. AB étant supposée $= 1$, si l'on fait $BC = A = 60°$ dans l'équation [1], on aura $A' = 43° 33' \frac{286}{2005} = Cb$. Donc l'arc BCb sera de $103° 33' \frac{286}{2005}$; sa moitié, qui est de $51° 46' \frac{1145}{2005}$, a pour sinus 0,7855998. Donc la corde Bb aura pour valeur 1,5711996;

le quart de la circonférence étant ensuite égal à 1,5707663, l'erreur ne sera donc que de 0,0004 environ.

267. Suivant le rapport d'Archimède, en supposant le rayon $= 1$, on trouve pour le quart de la circonférence $\frac{11}{7} = 1,5714$. Donc la construction du problême ci-dessus [266] donne une plus grande approximation. Cette construction étant d'ailleurs très-simple, il sera plus commode de l'employer dans la pratique que les autres que nous pourrions bien donner aussi; mais quoique susceptibles de donner dans la théorie un plus grand degré d'approximation, elles seroient plus compliquées, et par conséquent plus sujettes à erreur.

PROBLÊME.

268. *Dans un cercle d'un rayon donné* AB, *trouver l'arc qui approche le plus d'être égal au rayon.*

Solution. Faites sur la circonférence $BLCMFDOEd$ (*fig.* 102) à $AB = BC = CD = DE = Ed$; à $BD = Ba = Ea$; à $Aa = BF = Db = db = aL$; à $AB = FO$, et enfin à $bF = OM$; l'arc LM

sera celui qui approchera le plus d'être égal au rayon.

Démonstration. Si dans l'équation [4] on fait $A' = 90°$, cet arc ayant pour corde aL, on aura $BL = A = 20° \, 42' \, \frac{786}{2721}$, comme on a de plus $OM = bF$ corde de la cinquième partie de la circonférence [40], ou de $72°$, et l'arc $FG = 60°$, on aura l'arc $Fm = 12°$, et par conséquent l'arc $LM = BF\text{-}BL\text{-}FM = 57° \, 17' \, \frac{1935}{2721} = 57° 17' \, 43'' + \ldots$; on aura donc pour l'arc égal au rayon $57° \, 17' \, 44''$, comme on le sait déjà. Donc, etc.

PROBLÈME.

269. *Trouver le côté d'un quarré qui approche le plus d'être égal en surface à un cercle d'un rayon donné* AB.

Solution. Faites sur la circonférence $BPCQDRE$ (*fig.* 103), à $AB = BC = CD = DE$; du même rayon BA et des centres B et E, décrivez les deux arcs ALc, AMd; des centres C et D et du rayon DB, décrivez les arcs cNM, dNL; faites à $AN = BP = PQ$; puis à $LM = QR$, BR sera le côté cherché.

Démonstration. Si dans le triangle isoscèle CND on suppose la base $CD = 1$, divisée en μ en deux parties égales, on aura $(CN)^2 = (C\mu)^2 + (N\mu)^2$, ou $[2] = 3 = \frac{1}{4} + (N\mu)^2$. Donc $N\mu = \frac{1}{2}\sqrt{11}$; ensuite on a $(Ca)^2 = (C\mu)^2 + (A\mu)^2$, et par conséquent $A\mu = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Donc on aura $AN = \frac{1}{2}(\sqrt{19} - \sqrt{2}) = 0{,}7922869$, valeur qui se trouve être celle de la corde de l'arc de $46^\circ\ 40'\ \frac{1272}{2671} = BP = PQ$. Donc l'arc BQ sera de $93^\circ\ 20'\ \frac{2544}{2671}$; tirez les droites BL divisées par le milieu au point n, BD, Dn, BE, et les perpendiculaires $D\delta$, Ll, Mm perpendiculaires à la même ligne BE aux points δ, l et m. L'angle DBE étant égal à 30° [20. *liv.* 3], on aura : $sin.\ DBE = \frac{1}{2}$; $cos.\ DBE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. On a ensuite, suivant les propositions de la trigonométrie : $cos.\ DBn = \frac{Bn}{DB}$; $sin.\ DBn = \frac{Dn}{DB}$ ou $cos.\ DBn = \frac{1}{6}\sqrt{3}$; et comme l'on a

$$Dn = \sqrt{\left((DB)^2 - (Bn)^2\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{11},$$

on aura $sin.\ DBn = \frac{1}{6}\sqrt{33}$. On a ensuite [154] $cos.\ LBl = 6\,(DBn - DBE) = cos.\ DBn.\,cos.\ DBE + sin.\ DBn.\ sin.\ DBE = \frac{1}{12}(3 + \sqrt{33}) = \frac{Bl}{BL} = Bl$ (BL étant égal à $BA = 1$). Donc $Al = AB - Bl = \frac{1}{12}(9 - \sqrt{33})$, et par conséquent $lm = LM = 2Al = \frac{1}{6}(9 - \sqrt{33}) = 0{,}5425729$, valeur qui est celle de la corde de $31^\circ\ 28'\ \frac{1518}{2799}$

$= QR$. Donc l'arc BQR sera de $124^{\circ}\ 49'\ \frac{6370}{7476}$; sa moitié $62^{\circ}\ 24'\ \frac{6923}{7476}$ a pour sinus 0,8863283, et par conséquent on aura la corde de $BQR = 1{,}7726566$. Or en faisant le rayon $= 1$, on a la surface du cercle $= 3{,}1415926$, qui a pour logarithme 0,4971499. La moitié de ce logarithme, c'est-à-dire, $0{,}2485749 = log.\ \sqrt{3{,}1415926}$ se trouve être $log.\ 1{,}772453$. On n'a donc qu'une errreur de 0,002 environ ; ce qui donne une approximation suffisante.

270. Au lieu de AN, on auroit pu employer les lignes dL ou cM, qu'on doit trouver égales à cette ligne AN.

Démonstration. Menez les droites dL et Dp au point p milieu de AN, on aura $sin.\ LDp = \frac{Lp}{DL}$. Mais l'angle $LDp = \frac{1}{2} LDd = \frac{1}{2}(BDd - BDL) = 30^{\circ} - BDn$. Donc [154] :

$$sin.\ LDp = \tfrac{1}{2}\ cos.\ BDn - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ sin.\ BDn$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{6}\sqrt{33} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{6}\sqrt{3};$$

d'où $Lp = DL\ sin.\ LDp = \frac{1}{4}\sqrt{11} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$,

et $Ld = \frac{1}{2}\sqrt{11} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = AN$.

PROBLÊME.

271. *Etant donné le côté* AB *d'un quarré* [fig. 104], *trouver le rayon d'un*

cercle qui approche de lui être égal en surface.

Solution. Du centre A, avec le rayon AB, décrivez la circonférence $BCFDLPMEd$; faites à $AB = BC = CD = DE = Ed$; du centre B et avec le rayon BD, décrivez l'arc $dnNDa$; du centre E et avec le même rayon, coupez cet arc en a; faites à $Aa = BF = Db = db$, et à $AB = Dn = dN$; du centre C et avec le rayon CN, coupez la circonférence en P; faites à $Nn = PM$, et à $FB = CL$; on aura LM pour le côté cherché.

Démonstration. Si on fait $AB = 1$, le triangle BNd ayant les côtés respectivement égaux à ceux du triangle BDL de la fig. 103, on aura :

$sin.\,\frac{1}{2}\,dBN = \frac{1}{6}\sqrt{3}$; $cos.\,\frac{1}{2}\,dBN = \frac{1}{6}\sqrt{33}$ [270];

d'où :

$sin.\,dBN = 2\,sin.\,\frac{1}{2}dBN.\,cos.\,\frac{1}{2}dBN$ [154] $= \frac{1}{6}\sqrt{11}$;

$$cos.\,dBN = \sqrt{(1 - sin.^2\,dBN)} = \tfrac{5}{6}.$$

De plus, l'angle CBd étant droit (31. *liv.* 3), on aura :

$$cos.\,CBN = sin.\,dBN = \tfrac{1}{6}\sqrt{11}.$$

Mais on a par la trigonométrie :

$(CN)^2 = (BC)^2 + (BN)^2 - 2BC.BN.\,cos.\,CBN$:

donc :

$CN = \sqrt{(4 - 2\sqrt{3}.\frac{1}{6}\sqrt{11})} = \sqrt{(4 - \frac{1}{3}\sqrt{33})}$

$= 1{,}4440025$, que l'on trouve être la corde de $92^\circ\ 26'\ \frac{804}{2013} = CP$;
puis on a :

$$sin.\ NBE = \frac{\frac{1}{2}Nn}{BN} = sin.\,(CBE - CBN)$$
$$= [154]\ sin.\ 60^\circ\ cos.\ CBN - cos.\ 60^\circ\ sin.\ CBN$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\tfrac{1}{6}\sqrt{11} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{6};$$

on aura $Nn = 2\,BN \,.\, sin.\ NBE$

$$= \tfrac{1}{6}\,(3\sqrt{11} - 5\sqrt{3}) = 0{,}2149367,$$

que l'on trouve être la corde de $12^\circ\ 20'\ \frac{946}{2892}$ $= PM$. On aura donc l'arc $CPM =$ $104^\circ\ 46'\ \frac{4220}{5821}$; d'où soustrayant l'arc CL, qui est un cinquième de la circonférence [40] $= 72^\circ$, il restera l'arc $LM = 32^\circ\ 46'\ \frac{4220}{5821}$ dont on trouve la corde $= 0{,}5643274$. Or nommant π le rapport de la circonférence au diamètre, et R le rayon du cercle, on a, comme on sait, sa surface $= \pi R^2$; faisant donc $\pi R^2 = 1$, qui est la surface du quarré du rayon $AB = 1$, auquel on veut que le cercle soit égal, on aura $R = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$, et $log.\ R = -\tfrac{1}{2}\,.\,log.\ \pi = -\,0{,}2485749$ $= -\,1 + {,}7514251 = log.\ 0{,}5641896$; l'erreur ne sera donc pas de $0{,}0002$.

PROBLÊME.

272. *Etant donné le rayon* AB *d'une*

sphère [fig. 105], *trouver le côté d'un cube dont la solidité approche d'être égale à la moitié de celle de la sphère.*

Solution. Après avoir décrit du centre A avec le rayon AB la circonférence $BGCDPEd$; faites à $AB = BC = CD = DE = Ed$; du centre B, avec le rayon BD, décrivez l'arc $aDNd$; du centre E, et avec le même rayon, soit coupé cet arc en a; faites à $AB = aG = dN$; et à $CN = CP$; PG sera le côté cherché.

Démonstration. En effet, on aura [271] CN corde de $92^o\ 26'\ \frac{804}{2013}$. On aura ensuite $GC = 15^o$ [32]; d'où $PG = 107^o\ 26'\ \frac{804}{2013}$ dont la corde, en faisant $AB = 1$, se trouve être égale à 1,6122696. Or dans la même hypothèse, et supposant le rapport de la circonférence au diamètre $= \pi$, on a la solidité de la sphère $= \frac{4}{3}\pi$, et son logarithme $= log.4 + log.\pi - log.3 = 0{,}6220886$, dont le tiers 0,2073628 se trouve être le logarithme de 1,611991; et par conséquent l'erreur qui en résulte ne va pas à 0,0003.

PROBLÊME.

173. *Etant donné le côté* AB *d'un*

cube [fig. 106], *trouver le rayon d'une sphère qui approche de lui être égale en solidité.*

Solution. Du centre A avec le rayon AB, décrivez la circonférence $BLCMFDE$; faites à $AB = BC = CD = DE$; à $BD = Ba = Ea$; à $Aa = BF$; puis à $Fa = FM$, et à $FA = FL$; LM sera le rayon cherché.

Démonstration. On aura l'arc $FL = 60^\circ$ [15. *liv.* 4]. On a ensuite, en faisant $AB = 1$, $aF = Aa - AF = \sqrt{2} - 1$ [27] $= 0{,}4142136$, que l'on trouve être corde de $23^\circ\, 54'\, \frac{976}{2846}$. On aura donc l'arc $LM = 36^\circ\, 5'\, \frac{1870}{2846}$, qui a pour corde $0{,}6195986$. Or la solidité d'une sphère qui a R pour rayon, est, comme on sait, exprimée par la formule $\frac{4}{3}\pi R^3$: si on fait $\frac{4}{3}\pi R^3 = 1$, qui est la solidité du cube donné, on aura :

$$log.\ R = \frac{log.\ 3 - log.\ 4 - log.\ \pi}{3}$$

$$= -1 + ,7926371 = log.\ 0{,}6203504.$$

Donc l'erreur en moins qui en résulte, ne va pas à 0,0008.

274. Comme toutes ces approximations dans la rectification, la quadrature et la cubature de la circonférence, du cercle et de la

la sphère, et dans les problêmes inverses, ne font pas erreur d'une millième partie du rayon, on les regarde comme suffisantes dans la pratique. Quand on voudra pousser plus loin les approximations, il n'y aura autre chose à faire, qu'à trouver en degrés et minutes l'arc dont la quantité linéaire que l'on cherche est la corde ; puis tirer cette corde dans le cercle, après l'avoir divisé dans le nombre trouvé de degrés et minutes, en employant les méthodes précédemment démontrées [235, 243].

PROBLÊME.

275. *Doubler le cube par approximation.*

Solution. Soit AB le côté du cube qu'on veut doubler [*fig.* 107]; après avoir décrit du centre A avec le rayon AB la circonférence $BQMNCFPDEde$, et y avoir fait à $AB=BC=CD=DE$; à $BD=Ba=Ea$; à $Aa=BF$; et à $FA=FN$; aN sera, à très-peu de chose près, le côté du cube double.

Démonstration. L'arc BN sera un douzième de la circonférence [31] $=30°$; si on fait cet arc $BN=A$ dans l'équation [1], l'arc A', dont aN est la corde, sera $= 78^\circ\ 2'\ \frac{2358}{2846}$. On a donc, en faisant $AB=1$,

$$aN = 2\ sin.\ 39^\circ\ 1'\ \frac{1179}{2846} = 1{,}2592800.$$

On a ensuite $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209$.
L'erreur en moins qui en résulte n'est donc pas de 0,0007.

II.e *Solution.* Si on vouloit une plus grande approximation, après avoir fait la construction de la première solution, et avoir fait en outre à $AB = Ed = dc$; à $Aa = BF = Db = db$; à $aN = cM = MP$; à $Fb = FQ$; PQ sera le côté cherché, avec une approximation plus grande que dans la solution précédente.

Démonstration. Comme, pour la démonstration de la 1.re solution, on a l'arc $cM = 78^\circ\ 2'\ \frac{2358}{2846} = MP$, on aura l'arc $cMP = 146^\circ\ 5'\ \frac{1870}{2846}$; puis soustrayant l'arc $FQ = 72^\circ$ [40] de l'arc $FBc = 150^\circ$ [27, 29], on aura l'arc restant $cQ = 78^\circ$; en le soustrayant de l'arc cMP, on aura l'arc $QP = 78^\circ\ 5'\ \frac{1870}{2846}$, dont la corde se trouve être $= 1{,}2599190$; l'erreur en moins qui en résulte ne sera donc que de 0,000019, c'est-à-dire, à peine de deux millioniémes de rayon.

PROBLÊME.

276. *Tripler, quadrupler, etc. et octupler le cube* [fig. 108].

Solution. Soit AB le côté du cube donné; du centre A et avec le rayon AB, décrivez la circonférence $B\omega G\mu C\varepsilon\nu FLDOEdc$; faites y à $AB=BC=CD=DE=Ed=dc$; des centres B, c, d, E, D, avec le même rayon AB, décrivez les arcs $A\pi c$, Aqd, $c\beta A\delta E$, Apd, $A\tau E$; du centre B, avec le même rayon BD, décrivez l'arc $d\tau\delta Da$; du centre E et avec le même rayon, coupez cet arc en a; des centres C et D, et avec le même rayon, décrivez les arcs $cpqE$, $B\beta\pi d$; faites à $Aa=BF$; à $AB=FO=aG=GL$; à $EL=a\omega$; à $\pi\tau=B\varepsilon$; à $p\delta=B\mu$; et à $q\tau=\mu\nu$, on aura :

$$\left.\begin{array}{c} AO \\ C\delta \\ OG \\ O\omega \\ c\varepsilon \\ c\nu \\ BE \end{array}\right\} \text{pour côté du cube} \left\{\begin{array}{l} \text{double [275],} \\ \text{triple,} \\ \text{quadruple,} \\ \text{quintuple,} \\ \text{sextuple,} \\ \text{septuple,} \\ \text{octuple.} \end{array}\right.$$

Démonstration. Si on fait $AB=1$, on aura [271] : $C\delta=\sqrt{(4-\frac{1}{3}\sqrt{33})}=1{,}4422493$; on a ensuite $\sqrt[3]{3}=1{,}4422493$. Donc l'excès n'est pas de 0,002.

L'arc OFG étant de 105° [29, 30], sa corde OG sera égale à 2 *sin.* 52° 30′ = 1,5867066. On a de plus $\sqrt[3]{4} = 1,5874007$. Donc ce qui manque est de 0,0007 environ.

On aura ensuite l'arc $EL = \frac{5}{24}$ de la circonférence [32] = 75°; si dans l'équation [4], on fait $A' = 75°$, on a

$$\text{l'arc } A = B\omega = 32° \; 27' \; \tfrac{27}{2454};$$

et comme $FO = 60°$ (15. *liv.* 4), on aura l'arc $OF\omega = 117° \; 32' \; \frac{2427}{2454}$, qui a pour corde 1,7102744. On a ensuite $\sqrt[3]{5} = 1,7099757$. Donc l'excès n'est pas de 0,0003.

Puisque $BD = B\tau = D\pi = \sqrt{3}$, et $D\tau = B\pi = 1$, on aura [23] :

$\pi\tau . BD = (BD)^2 - (B\pi)^2$, c'est-à-dire, $\pi\tau . \sqrt{3} = 2$; d'où $\pi\tau = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1,1547005$, que l'on trouve être la corde de $70° \; 31' \; \frac{1725}{2375} = B\varepsilon$. On aura donc l'arc $cB\varepsilon$, de $130° \; 31' \; \frac{1725}{2375}$, qui a pour corde 1,8164964. On a ensuite $\sqrt[3]{6} = 1,8171204$. Donc on fait une erreur en moins qui n'est pas de 0,0007.

Les deux triangles $C\delta p$, $Bp\delta$ ayant les côtés respectivement égaux, seront égaux (8. et 26. *liv.* 1); et comme ils sont sur la même base $p\delta$, les droites $p\delta$, BC seront parallèles entr'elles (39. *liv.* 1). On aura donc l'angle $CB\delta = B\delta p$ (27. *liv.* 1).

Donc $cos.\ CB\delta = \frac{1}{6}\sqrt{11}$ [271] $= cos.\ B\delta p$. On a ensuite par la trigonométrie :
$(Bp)^2 = (B\delta)^2 + (p\delta)^2 - 2B\delta . p\delta . cos.\ B\delta p$;
et les lignes Bp et $C\delta$ étant égales, puisqu'on les détermine par la même construction, on aura :
$4 - \frac{1}{3}\sqrt{33} = 3 + (p\delta)^2 - 2p\delta . \sqrt{3} . \frac{1}{6}\sqrt{11}$;
d'où $\quad 1 - \frac{1}{3}\sqrt{33} = (p\delta)^2 - p\delta . \frac{1}{3}\sqrt{33}$:
ajoutant dans les deux membres de l'équation le quarré de $\frac{1}{6}\sqrt{33}$, on aura :

$$(1 - \frac{1}{6}\sqrt{33})^2 = (p\delta - \frac{1}{6}\sqrt{33})^2 ;$$

d'où $p\delta - \frac{1}{6}\sqrt{33} = \pm (1 - \frac{1}{6}\sqrt{33})$.
On a ensuite [23] $p\delta . dE = (dE)^2 - (pd)^2$, c'est-à-dire, $p\delta = 1 - (pd)^2$, et par conséquent la ligne $p\delta$ est plus petite que l'unité ; puis on déterminera $p\delta = \frac{1}{3}\sqrt{33} - 1 = 0{,}9148541$, que l'on trouve être corde de l'arc de $54° 26' \frac{1408}{2588}$. On a ensuite $q\tau = LM$ de la fig. 103 = la corde de l'arc de $31° 28' \frac{2518}{2799}$ [269]. Donc l'arc $cB\mu\nu = 60° + 54° 26' \frac{1408}{2588} + 31° 28' \frac{2518}{2799} = 145° 55' \frac{1607}{3622}$, arc dont on trouve la corde $c\nu = 1{,}9122214$. On a ensuite $\sqrt[3]{7} = 1{,}9129309$. Donc on fait une erreur en moins qui n'est pas de $0{,}000702$; on a enfin $BE = 2 = \sqrt[3]{8}$. Donc, etc.

PROBLÊME.

277. *Sous-doubler le cube par approximation* [fig. 108].

Solution. Soit AB le côté du cube donné ; du centre A avec le rayon AB, décrivez la circonférence $BCDEd$, et faites à $AB = BC = CD = DE = Ed$; du centre B, avec le rayon BD, tracez l'arc $D\delta d$; du centre d, avec le rayon dA, tracez l'arc $A\delta E$; $D\delta$ sera le côté cherché.

Démonstration. La droite $D\delta$ de cette figure a été déterminée comme celle dL de la figure 103. On aura donc [269] $D\delta = 0,7922869$. Or on a $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0,7937039$. Donc on fait une erreur en moins qui n'est pas de 0,002.

278. Nous n'avons pas voulu omettre les solutions de ces deux derniers Problêmes, quoiqu'il y ait erreur dans quelques résultats, savoir : d'un ou deux millièmes dans les uns, et de quelques dix millièmes dans les autres, parce que ces erreurs sont souvent négligeables et que d'ailleurs les solutions en sont simples. On peut avoir des valeurs beaucoup plus exactes que les précédentes, pour former

des cubes, non-seulement dans les rapports ci-dessus exprimés, mais eucore dans d'autres, si on cherchoit les arcs exprimés en degrés, minutes et parties de minutes, qui ont pour cordes les racines cubiques, ou leurs moitiés, leurs tiers, etc. nécessaires pour la construction du cube cherché ; on retireroit ensuite ces cordes du cercle divisé exactement en degrés, minutes, etc. [243, 244], et on les emploieroit ensuite, ainsi que leurs multiples, à la même construction du cube.

279. C'est ici que se termine enfin la Géométrie du Compas : si elle est accueillie favorablement des Géomètres, et si elle peut être de quelqu'utilité aux Artistes, aux Dessinateurs, et spécialement aux Ingénieurs en instrumens de mathématiques à l'usage des Géographes et des Astronomes, je me trouverai bien récompensé du long ennui que m'a coûté sa composition.

FIN.