GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.

LIVRE ONZIÈME.

PROBLÊMES DIVERS.

PROBLÊME.

151. *Etant donnée une échelle* SL, *trouver la surface du triangle* ABD, *et du quadrilatère* ABCD [fig. 76].

Solution. Faites à $BA = Ba$, et à $DA = Da$ [11]; portez sur l'échelle SL les distances Aa et BD prises avec le compas. Supposons, par exemple, que l'on trouve $Aa = 7$, $BD = 8$, multipliez ces deux nombres entr'eux; prenez le quart du produit $= 14$, ce nombre exprimera la surface du triangle ABD.

Pour trouver la surface du quadrilatère $ABCD$, après avoir déterminé le point a comme ci-dessus, on fera à $BC = Bc$ et à $DC = Dc$; on trouvera sur l'échelle les deux distances Aa, Cc; soit par exemple $Aa = 7$, $Cc = 5$; prenez la somme de ces deux quantités

tités $= 12$; multipliez par cette somme $= 12$ la valeur de *B D* trouvée sur l'échelle $= 8$; prenez le quart du produit $= 24$, ce nombre exprimera la surface du quadrilatère *A B C D*.

Démonstration. La ligne *A a* est double de la perpendiculaire qui tombe du point *A* sur la ligne *B D* (14); mais la surface du triangle *A B D* est égale à la moitié de la surface d'un parallélogramme qui auroit pour base la ligne *BD*, et pour hauteur cette perpendiculaire (41. *liv.* 1) : donc elle est égale au quart du produit de *A a* par *BD;* de même la surface du triangle *B CD* est égale au quart du produit de *C c* par *B D :* donc la surface du quadrilatère *A B C D* est égale au quart du produit de la somme des deux parallèles *A a*, *C c* par leur perpendiculaire *B D*.

152. Le problême précédent peut servir à mesurer la surface d'un espace renfermé par un polygone quelconque, en imaginant des droites qui le partagent en autant de triangles ou de quadrilatères que l'on jugera convenable; on pourroit proposer encore d'autres manières de la réduire en trapèzes; mais on peut facilement les déduire de la méthode avec laquelle on a résolu ce problême.

PROBLÊME.

153. *Etant donnés* [fig. 77] *les plans triangulaires qui comprennent une pyramide tétraèdre, trouver sur sa base le point où tombe la perpendiculaire abaissée du sommet, et trouver sa hauteur.*

Solution. Soit le triangle ABC la base de cette pyramide tétraèdre, et soient AEC, BDC, AFB les plans triangulaires qui vont se réunir à son sommet; du centre C et du rayon $CD = CE$, soit décrit un arc qui passe par les points e et d; du centre B et du rayon BD, soit décrit un arc qui coupe le premier en d; du centre A et du rayon AE, soit décrit un arc qui coupe le rayon en e; soit trouvé le point P où se coupent les deux droites Dd, Ee [112]; ce point sera celui où tombe la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide.

Soit divisée par moitié la droite CE au point m [66]; du centre m et du rayon mC, soit décrite la demi-circonférence CpE; soit fait à $CP = Cp$; la ligne Ep sera la hauteur de la pyramide.

Démonstration. Si dans la pyramide $SABC$ qui a pour base le triangle ABC, et pour sommet le point S, on mène dans le triangle SCB la droite $S\delta$ perpendiculaire à CB, et si on élève du point δ pris dans le plan de la base ACB la perpendiculaire δd, elle contiendra le point P, où tombe du sommet la perpendiculaire SP [11. *liv.* 11]; de même, si du point S dans le plan SAC, on mène à AC la perpendiculaire $S\varepsilon$, et si du point ε dans le plan de la base ACB, on mène à la même droite AC la perpendiculaire εe; elle contiendra le point P: donc ce point sera l'intersection des deux droites δd, εe. Mais dans la fig. 77, où les points D et E représentent le point S de la fig. 78, Dd est perpendiculaire à BC en un point δ [14]; de même aussi Ee est perpendiculaire à AC en un point ε : donc le point P est le point cherché.

De plus, les deux triangles CPS [*fig.* 78], CpE [*fig.* 77], étant rectangles en P et p, le premier par supposition, et le second par la 31.e prop. du liv. 3; et CS étant la même ligne que CE, on a $CP = Cp$; on aura encore $PS = pE$; car [*fig.* 78] (47. *liv.* 1):

$$(CS)^2 - (CP)^2 = (PS)^2;$$

de même on a [*fig.* 77]:

$$(CE)^2 - (Cp)^2 = (pE)^2.$$

Mais $(CS)^2 - (CP)^2 = (CE)^2 - (Cp)^2$: donc $(PS)^2 = (pE)^2$; d'où $PS = pE$; donc pE est la hauteur de la pyramide.

154. Jusqu'ici toutes les démonstrations que nous avons données étoient fondées sur les élémens d'Euclide. Mais comme nous ne pourrions pas toujours suivre la même marche sans être trop prolixes, nous emploierons quelques équations qui sont démontrées dans tous les traités de trigonométrie plane.

155. Si, dans un cercle décrit avec un rayon égal à l'unité, on appelle x et y deux arcs quelconques, on aura :

$$sin.\,(x+y) = sin.\,x\; cos.\,y + sin.\,y\; cos.\,x.$$
$$sin.\,(x-y) = sin.\,x\; cos.\,y - sin.\,y\; cos.\,x.$$
$$cos.\,(x+y) = cos.\,x\; cos.\,y - sin.\,x\; sin.\,y.$$
$$cos.\,(x-y) = cos.\,x\; cos.\,y + sin.\,x\; sin.\,y.$$

156. Si dans la troisième équation l'on fait $x = y$, on aura :

$$cos.\,2x = (cos.\,x)^2 - (sin.\,x)^2;$$

et comme $(cos.\,x)^2 + (sin.\,x)^2 = 1$; d'où l'on tire : $(cos.\,x)^2 = 1 - (sin.\,x)^2$, on aura :

$$cos.\,2x = 1 - 2\,(sin.\,x)^2;$$

d'où : $(sin.\,x)^2 = \frac{1 - cos.\,2x}{2}$, et $sin.\,x = \sqrt{\left(\frac{1 - cos.\,2x}{2}\right)}$.

157. Si l'on ajoute les deux premières équations [155], on aura :

$sin.(x+y)+sin.(x-y)=2\,sin.\,x\,cos.\,y$;

d'où $sin.\,x\,cos.\,y=\frac{sin.(x+y)+sin.(x-y)}{2}$.

Si l'on fait $(x+y)=p$, $(x-y)=q$, on aura : $2x=p+q$, $2y=p-q$:

d'où : $sin.\,p+sin.\,q=2\,sin.\left(\frac{p+q}{2}\right).\,cos.\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

158. Si l'on ajoute les deux dernières équations (155), on aura :

$cos.\,x\,cos.\,y=\frac{cos.(x+y)+cos.(x-y)}{2}$:

d'où : $cos.\,p+cos.\,q=2\,cos.\left(\frac{p+q}{2}\right).\,cos.\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

159. Si l'on retranche la 3.ᵉ des mêmes équations de la 4.ᵉ, on aura :

$sin.\,x\,sin.\,y=\frac{cos.(x-y)-cos.(x+y)}{2}$.

d'où $cos.\,q-cos.\,p=2\,sin.\left(\frac{p+q}{2}\right).\,sin.\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

160. A cause de l'équation $2\,sin.\,x=corde\,2x$, on aura (156) :

$$corde\,2x=2\sqrt{\frac{1-cos.\,2x}{2}}.$$

et si l'on suppose $2x=x$, on aura :

$corde\,x=2\sqrt{\frac{1-cos.\,x}{2}}=\sqrt{(2-2\,cos.\,x)}$.

Si l'on appelle k la corde d'un arc, c le cosinus, s le sinus, h la corde du complément, on aura : $k^2 = 2 - 2c$, et $h^2 = 2 - 2s$.

La première de ces deux équations donne $c = 1 - \frac{1}{2}k^2$; et comme on a :
$s = \sqrt{(1 - c^2)} = \sqrt{(k^2 - \frac{1}{4}k^2)} = k\sqrt{(1 - \frac{1}{4}k^2)}$,
on aura : $h^2 = 2 - 2k\sqrt{(1 - \frac{1}{4}k^2)}$.

PROBLÈME.

161. *Dans un triangle équilatéral* ABC [fig. 79], *inscrire un quarré* e b c d [fig. 124].

I.ere *Solution.* Si on veut se servir des côtés donnés du triangle, soit décrit du centre A, et avec le rayon AB, le demi-cercle $BCDE$ [64].

Du centre E et avec le rayon EC, soit décrit un arc qui coupe le côté donné AB en b ; du centre A et avec le rayon Bb, soit décrit un arc qui coupe le même côté en e ; des centres e et b, et avec le rayon eb, soient décrits deux arcs qui coupent les côtés AC en d, et CB en c ; $ebcd$ sera le quarré cherché.

Démonstration. Faisant pour abréger $AB = 1$, on aura $Eb = EC = BD = \sqrt{3}$ [2] ; d'où : $Bb = BE - Eb = 2 - \sqrt{3} = Ae$; d'où on tire : $be = AB - 2\,Ae = 2\sqrt{3} - 3 = (2 - \sqrt{3}).\sqrt{3} = bc$; donc on aura :

$Bb : bc :: (2-\sqrt{3}) : (2-\sqrt{3}) . \sqrt{3} :: 1 : \sqrt{3}$.

Mais si on suppose que AB soit coupée au milieu en T par la perpendiculaire CT, on aura aussi :

$$BT : TC :: \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \,[104] ;$$

c'est-à-dire, $BT : TC :: 1 : \sqrt{3}$:
donc bc est parallèle à TC [2. *liv.* 6], et par conséquent perpendiculaire à AB [27. *liv.* 1] : on démontreroit la même chose pour la droite de : donc $ebcd$ est le quarré inscrit.

II.e *Solution.* Si on ne vouloit pas se servir de l'intersection des côtés donnés du triangle ABC, mais qu'étant donnés seulement les trois points A, B et C sommets des angles du triangle, on dût trouver les quatre points b, c, d, e du quarré à inscrire ; du centre E, comme dans la solution précédente, et avec le rayon EC, soit décrit un arc qui passe par b, C et a ; du centre B, et avec le même rayon, soit décrit un arc qui coupe en a celui qu'on vient de tracer ; du centre a, et avec le rayon AB, soit coupée la demi-circonférence $BCDE$ en H ; et soit fait dans cette circonférence à $Ha = HI = IK$; du centre D et avec le rayon aK, soit décrit un arc qui passe par b ; le point b sera déterminé ; du centre A et du rayon Bb, soit décrit un arc qui passe par le point e ; du centre C et du rayon Cb, soit décrit un autre arc qui coupe le dernier en e; des centres e et C, et du rayon be, soient décrits deux arcs qui se coupent en d; des centres b et C, avec le même rayon be, soient décrits deux arcs qui se coupent en c; $bcde$ sera le quarré cherché.

Ou bien en employant le cercle $BCDE\delta$, et faisant à $AB = E\delta$; des centres D et δ, et avec le rayon aK déterminé plus haut, soient décrits deux arcs qui se coupent en b; le reste se fait comme ci-dessus.

Démonstration. Le point K sera ici déterminé comme dans la fig. 9 (32) par le moyen du même point a, ainsi l'arc BK sera un vingt-quatrième de la circonférence. On a ensuite dans la fig. 9, $BK = Bk = EM$; si on compare les points a, K, B, k, A, M avec les points Q, A, R, S, p, B de la fig. 4, on tirera pour la fig. 9, de l'équation :

$$(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS.pQ [20]$$

celle-ci : $(aK)^2 = (Ba)^2 - Kk.Aa$:
or Kk est la corde d'un douzième de la circonférence. Pour trouver sa valeur, en supposant pour abréger $AB = 1$, on a le sinus de $BN = Kk = AX$ [*fig.* 12] $= \frac{1}{2}$, et le double de son cosinus, c'est-à-dire, $2\ NX = NO = BD = \sqrt{3}$: d'où substituant Kk pour x,

et $\sqrt{3}$ pour $2\ cos.\ x$, dans l'équation [159]:

$$corde\ x = \sqrt{(2 - 2\,cos.\ x)},$$

on aura la droite $K k = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}$;
d'où : $(aK)^2 = 3 - (\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}) \cdot \sqrt{2}$ [27]

$$= 3 - (\sqrt{3} - 1) = 4 - \sqrt{3}.$$

Maintenant, si des centres D et δ, et avec le rayon $a K$, on décrit deux arcs qui se coupent en b, le point b sera sur la droite BE[13], qui divisera en deux parties égales à angles droits la ligne $D\,\delta$ au point R [14], en faisant, $RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ [104] : donc, puisque [47. *liv.* 1] :

$$(D\,b)^2 = (D\,R)^2 + (b\,R)^2:$$

on aura : $(b\,R)^2 = (D\,b)^2 - (D\,R)^2$

$$= 4 - \sqrt{3} - \tfrac{3}{4} = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{4};$$

et de-là : $b\,R = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$, et $b\,E = \sqrt{3}$.

Donc par la démonstration de la solution, le point b est une des extrémités du quarré : on le trouvera de même avec les centres D et E, et avec les deux rayons $a\,K$ et $B\,D$ comme dans la première partie de la II.ᵉ solution ; puis les deux triangles $C\,A\,e$, $C\,B\,b$ ayant tous leurs côtés respectivement égaux, on aura l'angle $C\,B\,b = C\,A\,e$ [8. *liv.* 1] $= C\,B\,A$; d'où le point e sera sur la ligne $B\,A$ et sera une autre extrémité du quarré. Enfin, comme dans cette seconde solution les droites $C\,b$, $C\,e$ sont les mêmes de grandeur et de position que dans la première solution, et qu'on a aussi dans la première solution $Cd=ed$, $Cc=bc$ à cause du triangle équilatéral Ccd et de la ligne cd parallèle à AB [2. *liv.* 6], les points d et c seront déterminés dans cette seconde solution comme dans la première.

PROBLÈME.

162. *Inscrire dans le quarré* ABLF [fig. 80] *un triangle équilatéral, qui a un angle* B *à l'un des angles du quarré.*

I.ere *Solution.* Du centre A et du rayon AB, soit décrite la demi-circonférence BFE, en faisant à $FB=FE$; soit fait aussi à $BE=BQ=EQ$: si on veut se servir des sections des côtés donnés du quarré; du centre F et du rayon FQ, soit décrit un arc qui coupe deux côtés du quarré aux points M et N, les points B, M, N seront les sommets des angles du triangle cherché.

Démonstration. L'angle QAB étant droit (83), on aura :

$$(BQ)^2=(AB)^2+(AQ)^2 \text{ [47. } liv. \text{ 1]};$$

et faisant pour abréger $AB=1$, on aura :

$$4=1+(AQ)^2;$$

d'où : $AQ=\sqrt{3}$; $FQ=AQ-AF$
$=\sqrt{3}-1=FM=FN$;

d'où : $(FM)^2 = (FN)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$;
et par conséquent,
$(MN)^2 = (FM)^2 + (FN)^2 = 8 - 4\sqrt{3}$;
ensuite comme on a :
$LM = LF - FM = 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3}$;
on aura : $(LM)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$; d'où :
$(BM)^2 = (BL)^2 + (LM)^2 = 8 - 4\sqrt{3} = (MN)^2$:
on démontre de même que $(BN)^2 = (MN)^2$;
donc : $BM = MN = BN$.

II.e *Solution.* Si on ne suppose données que les quatre extrémités A, B, L, F du quarré, après avoir trouvé comme dans la première solution le point Q, soit décrite du centre F, et avec le rayon FQ, la circonférence $QRSNM$; puis faisant à $FQ = QR = RS = SN$, du centre B et avec le rayon BN, soit coupée cette circonférence au point M; les points B, N, M seront les sommets des angles du triangle cherché.

Démonstration. L'arc $QRSN$ est la moitié de la circonférence (15. *liv.* 4) : donc le point N est sur la droite QFA, et est aussi éloigné de F que dans la première solution; donc il est le même. Le point M se trouve aussi dans la première solution, comme dans la seconde, à l'intersection des deux arcs décrits des centres F et M et avec des rayons égaux à FQ et à BN; donc il est le même; donc, etc.

PROBLÈME.

163. *Dans un triangle équilatéral dont les sommets* p, q, R *sont donnés, inscrire un exagone régulier.*

Solution. Divisez la distance *QR* [*fig.* 81] en trois parties égales aux points *c* et *d* (68) ; des centres *c* et *d*, et du rayon *c d*, décrivez deux arcs qui se coupent en *A*, du même rayon et du point *A* pris pour centre, décrivez un cercle, faites sur la circonférence à $dc = cB = BC = CD = DE$; les points *B*, *C*, *D*, *E*, *d*, *e*, seront les sommets de l'exagone inscrit.

Démonstration. Le triangle *B c Q* a ses côtés *B c* et *Q c* égaux aux côtés *A d* et *c d* du triangle *A d c* : de plus, l'angle compris entre ces côtés est égal dans chaque triangle à cause du parallélisme des lignes *B c* et *A d* [27. *liv.* 1) : donc ces deux triangles sont égaux (4. *liv.* 1), et l'angle $c\,QB = dc\,A = c\,QP$: donc le point *B* est sur la droite *P Q* : on démontre de la même manière, que les autres points *C*, *D*, *E* sont sur les côtés du triangle proposé : donc, etc.

PROBLÊME.

164. *Dans un quarré donné* ABLF, *inscrire un octogone régulier.*

I.ere *Solution.* Si l'on veut se servir des intersections des côtés du quarré donné, du point A pris pour centre [*fig.* 82], et du rayon AB, décrivez la demi-circonférence $BCDE$, en faisant à $AB = BC = CD = DE$; faites à $BF = BQ$, à $EA = EQ$; du rayon AQ, et du centre A, déterminez les points b et g; puis du même rayon et des centres B, L et F, coupez les côtés aux points a, d, c, f, e, h, ces points seront les sommets de l'octogone $abcdefgh$.

II.e *Solution.* Ayant déterminé le point Q comme dans la première solution, du rayon AQ et des points A et B pris pour centre, décrivez deux arcs qui se coupent en O; avec le même rayon et du centre A, déterminez le point b sur le côté AB; du point O pris pour centre, et du rayon Ob, décrivez un cercle qui coupe les côtés du quarré dans les autres points c, d, e, f, g, h, a; ces points seront les sommets de l'octogone.

III.e *Solution.* En supposant que les côtés du quarré ne soient pas donnés, mais que l'on connût seulement les quatre sommets A, B, L, F, on déterminera le point Q comme dans la première solution; on fera à $EC = EM$, à $BF = BM$: du rayon AM et du centre A, décrivez un arc qui passe par les points c et d; du même rayon et du centre B, décrivez un arc qui passe par les points f et g; du même rayon et du centre L, décrivez un arc qui passe par les points h et a; du même rayon et du centre F, décrivez un arc qui passe par les points b et c; du rayon AQ et des centres A, B, L, F, coupez ces arcs aux points b, g, d, a, c, f, e, h; ces points seront les sommets de l'octogone.

Démonstration. Supposons pour plus de simplicité $AB = 1$, on aura : $AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ [104]; $AQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, et au moyen de l'équation $(Bd)^2 = (AQ)^2 = \frac{1}{2}$, on aura : $(Ad)^2 = (AM)^2 = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2} = (AB)^2 + (Bd)^2$: donc l'angle ABd sera droit (48. *liv.* 1), et par conséquent le point d sera sur la droite BL: on démontrera de la même manière que tous les autres points sont sur les côtés du quarré proposé; on aura de plus $Ld = BL - Bd = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = Le$, et $(de)^2 = (Ld)^2 + (Le)^2$ [47. *liv.* 1] $= 2(Ld)^2$: d'où l'on tire : $de = Ld . \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$. Mais on a $cd = BL - Ld - Bc = BL - 2Ld = 1 - 2 + \sqrt{2}$

$=\sqrt{2}-1$: donc $cd=de$; on démontrera de la même manière que tous les côtés de l'octogone sont égaux entr'eux. De plus, les triangles Lde, Bbc, Aah, Ffg étant égaux en tout, leurs angles aux points a, b, c, d, e, f, g, h seront égaux : donc leurs supplémens, c'est-à-dire, les angles de l'octogone seront aussi égaux (13. *liv.* 1).

PROBLÊME.

165. *Etant donné un octogone régulier* ABhgfFGH, *trouver facilement* [fig. 66], 1.° *le côté d'un octogone régulier dont la surface soit double;* 2.° *le côté d'un octogone dont la surface soit triple.*

Solution. Avec le côté AB de l'octogone donné, pris pour rayon, des points F et H comme centres, soient décrits deux arcs qui se coupent en a.

1.° af ou aA sera le côté de l'octogone double.

2.° AB ou ag sera le côté de l'octogone triple.

Démonstration. Si on suppose $AB=1$, on aura :

$aA=af=\sqrt{2}$ [139]; $aB=ag=\sqrt{3}$ [2] :

mais les surfaces des figures semblables sont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues (20. *liv.* 6) : donc aA sera le côté d'un octogone double et AB celui d'un triple.

PROBLÊME.

166. *Dans un cercle d'un rayon* AB [fig. 83], *inscrire trois cercles qui le touchent et se touchent entr'eux.*

Solution. Dans la circonférence du cercle donné, soit fait à $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$; du centre B et du rayon BD, soit décrit un arc qui passe par les points a, p, et α : du centre E et du même rayon BD, soit coupé cet arc en a et α; avec le même rayon, des centres C et c, soient décrits deux arcs qui se coupent en V, et des centres D et d, deux autres arcs qui se coupent en v; des centres V et v, et avec le même rayon, soient décrits deux arcs qui passent par m et n; des centres a et α et du rayon AB, soit coupée la circonférence du cercle donné en G, H, et en g, h; soit fait dans cette circonférence au même rayon $AB = GL = HI = gl = hi$; soit fait à $Aa = BF$; à $IL = LY = IY = ly = iy$; à $Yy = Fm = Fn$; à $Dn = Dp$: du centre A

A et du rayon mn, soit décrit le cercle $PSRXQT$, sur la circonférence duquel, prenant un point arbitraire P, on fasse à $PA = PS = SR = RX = XQ = QT$: enfin, des centres P, Q, R et du rayon pn, soient décrits trois cercles ; ils seront tangens au cercle donné, et tangens entr'eux.

Démonstration. La droite IL étant corde d'un douzième de la circonférence (32), on aura :

$$IL = \sqrt{(2-\sqrt{3})}\ [160];$$

et comme on a (47. *liv.* 1. 31. *liv.* 3) :
le carré du diamètre $(Li)^2 = (IL)^2 + (Ii)^2$,
on aura : $4 = 2 - \sqrt{3} + (Ii)^2$;
d'où : $(Ii)^2 = 2 + \sqrt{3}$, et $Ii = \sqrt{(2+\sqrt{3})}$.
On aura ensuite (20) :

$$(aI)^2 = (aB)^2 - Ii.Aa = 3 - \sqrt{(4+2\sqrt{3})}$$
$$= 3 - (1+\sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3};$$

d'où $aI = IL = \sqrt{(2-\sqrt{3})}$;
on aura par les mêmes raisons $aL = LI$;
d'où $aIYL$ sera un rhombe, et on aura (139) :

$$(aY)^2 = 4(aI)^2 - (IL)^2 = 3\,(IL)^2;$$

d'où : $aY = IL.\sqrt{3}$: mais les points I et L étant également éloignés du point A, les trois points a, Y, A seront dans la même droite (13) ; d'où :

$$AY = Aa - aY = \sqrt{2} - \sqrt{(6-3\sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{2} - (3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{3}{2}}) = \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} = IL.$$

La même démonstration s'applique à la ligne Ay; ensuite le point y étant sur la ligne $a\alpha$, c'est-à-dire, sur aA (13), on aura $Yy = 2AY$: or les points V, B, A, E, v sont dans la même droite (13). Si on suppose pour un moment que les points m, n soient dans la même droite, on aura :

$$Am = AV - Vm = 2 - \sqrt{3}.$$

En effet, si on compare les points C, c, V, B, A, E avec les points A, B, Q, P, p, q de la fig. 3, on aura dans cette fig. 83 : $VB = AE$ (14) : d'où $AV = 2$ et $Vm = \sqrt{3}$; on démontrera de même qu'on a $An = 2 - \sqrt{3}$; d'où on aura : $(Fm)^2 = (Am)^2 + (AF)^2$ (47. *liv.* 1)

$$= 7 - 4\sqrt{3} + 1 = 4(2 - \sqrt{3});$$

d'où : $Fm = 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 2AY$;

de plus on a, par la construction de la figure :

$$Fn = 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})};$$

donc le point m sera dans la droite VA: on démontrera la même chose pour le point n: donc, puisque $Am = 2 - \sqrt{3}$, on aura : $mn = 4 - 2\sqrt{3}$; puis les triangles BpD, vnD ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $Dvn = DBp$ (8. *liv.* 1). Mais l'angle Dvn qui est le même que l'angle DvB, étant égal à l'angle DBV (5. *liv.* 1), on aura l'angle $DBp = DBv$: donc le point p est dans la droite AE; on a ensuite $Dn = Dp$: on démontre de même que $dn = dp$: donc comparant les points D, d, A, n, p, E de la fig. 83, avec les points A, B, Q, P, p, q de la fig. 3, on trouvera [*fig.* 83] :

$$pE = An = 2 - \sqrt{3}; \text{d'où}:$$
$$pn = AE - 2An = 1 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3.$$

De plus, le triangle équilatéral PQR étant semblable au triangle équilatéral BDd, et par conséquent aussi le triangle ABD semblable au triangle APR (20. *liv.* 6), on aura :

$$AB : BD :: AP : PR;$$

c'est-à-dire,

$$1 : \sqrt{3} :: 4 - 2\sqrt{3} : PR;$$

d'où on tire : $PR = 4\sqrt{3} - 6 = 2pn$.
Donc la ligne PR étant coupée par moitié au point p, le point p se trouvera également sur les deux circonférences des cercles décrits des centres P et R, et sera le point de contact (12. *liv.* 3) ; qu'on ajoute ensuite à la droite $AR = mn = 4 - 2\sqrt{3}$, le rayon du cercle décrit du centre R, ou bien la droite $Rr = np = 2\sqrt{3} - 3$, on aura :

$$Ar = 4 - 3 = 1 = AB.$$

Donc le point r sera également sur les deux circonférences, et le cercle décrit du centre R touchera intérieurement le cercle donné (11. *liv.* 3) ; on démontrera la même chose pour les autres cercles ; donc, etc.

Ce problême se trouve élégamment résolu avec la règle et le compas, par Thomas Simpson, dans son ouvrage : *Select Exercises, etc. Géometrical Problems, problême* 13 : on voit qu'on peut par notre construction résoudre ce problême avec la règle et le compas plus brièvement encore que ne le fait Simpson, en menant la droite Vav, et après y avoir pris à $AB = BV = Ev$, en faisant à $BD = Vm = Bp = vm$; puis en décrivant du centre A et du rayon mn le cercle PQR, et faisant tout le reste de la construction comme dans la solution précédente.

PROBLÊME.

167. *Du centre* A [fig. 83], *décrire un cercle qui touche extérieurement les trois cercles inscrits par le problême précédent* (166) *à un cercle donné.*

Solution. Cherchez une troisième proportionnelle aux deux droites AB, Am [86]; avec cette ligne prise pour rayon et du centre A, soit décrit un cercle; ce sera le cercle cherché.

Démonstration. AB étant $=1$, et $Am = 2-\sqrt{3}$, on aura la troisième proportionelle $= 7 - 4\sqrt{3}$. Si maintenant du rayon $Ar = 1$, on soustrait le diamètre qr du cercle décrit du centre R, c'est-à-dire, si on soustrait $2np = 4\sqrt{3} - 6$, on aura précisément $7 - 4\sqrt{3}$: donc un cercle décrit du centre A et avec cette troisième proportionnelle pour rayon, sera tangent au point q à ce cercle inscrit (12. *liv.* 3), et aux deux autres cercles.

PROBLÈME.

168. *Inscrire dans un cercle d'un rayon donné* AB [fig. 84], *quatre cercles qui lui soient tangens, et qui soient tangens entr'eux.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné, à $AB = BC = CD = DE$; à $BD = Ba = Ea$; à $Aa = BF = Bf$; à $AB = FN = FO$; et à $BD = NP = OP$; du centre A et du rayon aP, soit décrit le cercle $QRST$; puis prenant un point arbitraire Q sur la circonférence, soit fait à $BQ = FR = ES = fT$; enfin des centres Q, R, S, T, et du rayon aF, soient décrits quatre cercles : ils seront les cercles demandés.

Démonstration. Comme on a (27) :

$$BF = FE = Ef = fB,$$

on aura aussi (93) :

$$QR = RS = ST = TQ:$$

donc l'angle TAQ sera droit ; donc :

$$(TQ)^2 = (AT)^2 + (AQ)^2 = 2\,(AT)^2\,;$$

puis ayant fait $AB = 1$, on aura aussi (165) : $FP = 1$; d'où : $AP = 2$; on aura encore (27) : $Aa = \sqrt{2}$; d'où : $aP = 2 - \sqrt{2}$; $aF = \sqrt{2} - 1$; d'où on tire :

$$2\,(AT)^2 = 2\,(aP)^2 = (TQ)^2 = 2\,(2 - \sqrt{2})^2\,;$$

et

$$TQ = (2 - \sqrt{2})\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) = 2\,aF:$$

donc la distance des deux centres T et Q est égale à la somme des rayons des deux cercles décrits de ces points comme centres : donc ils sont tangens en p au milieu de TQ. On prouveroit la même chose pour deux autres quelconques. Soit ensuite r le point, où la ligne Ar prolongée coupe le cercle décrit du centre R, on aura :

$$Ar = AR + Rr = aP + aF = PF = 1 = AB:$$

donc le point r sera sur la circonférence du cercle donné ; d'où on voit que la ligne Ar passant par les deux centres A et R, sera perpendiculaire à la tangente qui les touche tous deux au point r : donc ils seront tangens entr'eux (13 et 16. *liv.* 3) ; la même démonstration s'applique aux autres cercles.

PROBLÈME.

169. *Du centre* A (fig. 84), *décrire un cercle qui touche les quatre que l'on vient d'inscrire* (168) *dans un cercle donné.*

Solution. Cherchez une troisième proportionnelle aux deux droites FP, Fa [86] ; avec cette ligne prise pour rayon et du centre A, soit décrit un cercle, il sera le cercle cherché.

Démonstration. PF étant égal à 1, et $Fa = \sqrt{2} - 1$, on aura la troisième proportionnelle $= 3 - 2\sqrt{2}$; or soit q le point où le rayon Ar coupe le cercle décrit du centre R : qr en sera le diamètre $= 2aF = 2\sqrt{2} - 2$; soustrayant de $1 = Ar$ cette valeur, on aura : $Aq = 3 - 2\sqrt{2} =$ cette troisième proportionnelle : donc le point q sera dans les deux circonférences ; mais il se trouve dans la droite AR; donc la perpendiculaire à cette droite sera tangente en q, aux deux cercles, lesquels se toucheront au point q (13 et 16. *liv.* 3); on démontrera la même chose pour les autres cercles.

PROBLÈME.

170. *Trouver* [fig. 85] *un arc de cercle dont le cosinus égale la corde.*

Solution. D'un rayon AB qu'on fait $= 1$, soit décrit l'arc $BCDE$, et soit fait à $AB = BC = CD = DE = DP = CP$; soit fait ensuite à $BD = Ba = Ea$, et à $Aa = BF$: du centre B, et du rayon PF, soit décrit un arc qui coupe l'arc BC en Q; l'arc BQ sera celui que l'on cherche.

Démonstration. Les points A, F, a, P sont dans la même droite (13); puis les points B, A, D, P étant tous éloignés du point C de la distance CB, sont dans la circonférence d'un cercle qu'on décriroit du centre C et du rayon CB: comme on a de plus à $CB = BA = AD = DP$, BCP sera le diamètre de ce cercle (15. *liv.* 6), et on aura $PA = \sqrt{3}$ [2]; d'où :

$$PF = \sqrt{3} - 1 = BQ:$$

si maintenant on abaisse sur AB la perpendiculaire QR, on aura (13. *liv.* 2) :

$$(BQ)^2 = (AB)^2 + (AQ)^2 - 2\,AB.AR;$$

c'est-à-dire :

$$(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3} = 2 - 2\,AR;$$

d'où : $AR = \sqrt{3} - 1 = BQ$;

ainsi qu'on s'étoit proposé de le faire. Ces derniers problêmes sont d'Ozanam, qui les a résolus avec la règle et le compas.

Problême.

171. *Etant donnés les axes* BE, MN *d'une hélice, décrire autour d'eux un ovale composé de cercles qui soient tangens entr'eux.*

Solution. Du centre A où les axes se coupent et du rayon AB qui est la moitié du plus grand axe, soit décrite la demi-circonférence BDE, et soit fait à $EA = ED$; du centre B et du rayon BD, soit coupé l'axe BE en d: du centre A et du rayon AM, soit coupé le demi-axe AE en m; du même centre A et du rayon Ad, soit décrit l'arc de, et soit fait à $Em = de$; des centres d et e et d'un rayon pris arbitrairement, soit coupé l'arc BDE en δ et ε; du centre A et du rayon $\delta\varepsilon$, soit coupé l'axe BE en P et Q; des centres P et Q et du rayon $PB = QE$, soient décrits les arcs FBf, GEg, et soit fait à $PB = BF = Bf = EG = Eg$; soit fait ensuite à $PQ = PR = Pr = QR = Qr$; puis du centre R et du rayon RF, soit décrit l'arc FG qui passera par M: enfin du centre r et du rayon $RF = rf$, soit décrit l'arc fg qui passera par N, et toute la construction sera faite.

Démonstration. Les triangles BFP, PQR étant équilatéraux, les angles BPF, QPR seront égaux (8. *liv.* 1); et les deux lignes FP, PR formeront une seule droite, parce que les deux angles $FPA + APR$ sont égaux aux deux angles $FPA + APN$ (13 et 14. *liv.* 1) : donc les deux arcs BF, FG seront tangens l'un à l'autre en F (13. *liv.* 3) : la même démonstration s'applique aux points de contact f, G, g.

Soit fait ensuite pour abréger $AB = 1$, on aura : $BD = \sqrt{3}$ [2] $= Bd$; d'où :

$$Ad = \sqrt{3} - 1;$$

et comme on a [93] :

$$Ad : de :: A\delta : \delta\varepsilon.$$

On aura encore en multipliant les deux termes du premier rapport par $\sqrt{3}+1$ (4. *liv.* 5) :

$$Ad(\sqrt{3}+1) : de(\sqrt{3}+1) :: A\delta : \delta\varepsilon;$$

puis substituant les valeurs numériques de Ad et $A\delta$, et exécutant la multiplication dans le premier terme, on aura :

$$2 : de(\sqrt{3}+1) :: 1 : \delta\varepsilon;$$

d'où :

$$2\delta\varepsilon = 2AP = de(\sqrt{3}+1) = PQ = PR.$$

De plus, $PRQr$ étant un rhombe, on

aura (139) :

$$(Rr)^2 = 4(PR)^2 - (PQ)^2 = 3(PR)^2;$$

d'où :

$$Rr = PR . \sqrt{3} = de(3 + \sqrt{3});$$

et $RA = \frac{1}{2} de(3 + \sqrt{3})$.

On a ensuite :

$$AM = Am = AE - Em = AE - de = 1 - de;$$

d'où : $RA + AM = 1 + \frac{1}{2} de(1 + \sqrt{3})$;

ou bien : $RM = 1 + \frac{1}{2} PR$;

et comme on a :

$$PF = PB = 1 - AP = 1 - \frac{1}{2} PR,$$

on aura :

$PF + PR = 1 + \frac{1}{2} PR$, c'est-à-dire, $FR = RM$. Donc l'arc FG passera par M : on feroit voir de même que l'arc fg passe par n : donc, etc.

PROBLÊME.

172. *Décrire* [fig. 87] *une spirale* BLEMFNGPH, *composée de plusieurs arcs de cercle.*

Solution. Soit $BE = BF$ la distance qu'on veut donner aux révolutions de cette spirale ; après avoir divisé BE en deux parties égales au point A (66) ; de ce point comme centre et d'un rayon AB, soit décrite la demi-circonférence BLE (64); du centre B et du rayon BE, soit décrite la demi-circonférence EMF; soit encore décrite du centre A, et avec le rayon AF la demi-circonférence FNG; soit encore décrite du centre B, et avec le rayon BG la demi-circonférence GPH, on pourroit ainsi continuer cette spirale à l'infini.

On pourra de la même manière doubler cette spirale, en décrivant des centres A et B alternativement les demi-circonférences ble, emf, fng, gph, etc.; après avoir pris le point b à une distance arbitraire de B sur la ligne AB (73).

Ce problême n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÊME.

173. *Trouver* $\sqrt{\sqrt{2}}$ *et* $\sqrt{3}$.

Solution. Avec le rayon $AB=1$, et du centre A, décrivez (*fig.* 88) la demi-circonférence $BCDE$, en faisant à $AB=BC=CD=DE$; puis faites à $BD=Ba=Ea$; à $Aa=BP$; à $AB=EP$; marquez sur la demi-circonférence les points H, I, K, en faisant à la même ligne $AB=aH=HI=IK$.

Des centres E et H, et du rayon AP, soient décrits deux arcs qui se coupent en L et M; on aura : $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Des centres a et K, avec le rayon AB, soient décrits deux arcs qui se coupent en Q et R; on aura $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

Démonstration. $ELHM$ étant un rhombe, on aura (139) :

$$(LM)^2 = 4(LH)^2 - (HE)^2 = 4(AP)^2 - (AE)^2.$$

Mais,

$(AP)^2 = \frac{1}{2}$ [104], $(HE)^2 = 2 - \sqrt{2}$ [30 et 36] : donc $(LM)^2 = \sqrt{2}$; d'on on tire : $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

$aQKR$ étant aussi un rhombe, on aura également :

$$(QR)^2 = 4(aQ)^2 - (aK)^2.$$

Mais $(AQ)^2 = (AB)^2 = 1$; $(aK)^2 = 4 - \sqrt{3}$ [160] : donc $(QR)^2 = \sqrt{3}$; d'où on tire : $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

174. On pourroit, par de semblables artifices, obtenir les racines quatrièmes des autres nombres entiers, sans employer la méthode de trouver les moyennes proportionnelles (99). Pour avoir $\sqrt{\sqrt{2}}$ par cette méthode, on auroit eu à trouver une moyenne proportionnelle entre 1 et $\sqrt{2}$, ou entre $\frac{1}{2}$ et $2\sqrt{2}$, ou entre deux autres quantités qui, multipliées l'une par l'autre, fussent égales à $\sqrt{2}$. Mais cette marche seroit beaucoup plus compliquée.

En cultivant cette géométrie du compas,

on en retirera de très-grands avantages. J'ai sur cette matière d'autres recherches toutes prêtes qui pourront trouver place dans un ouvrage plus étendu que celui-ci. Voici une application du problême précédent relative à la pyramide tétraèdre régulière.

PROBLÊME.

175. *Etant donné le côté* AB *d'une pyramide tétraèdre régulière* SABC [*fig.* 89], *trouver*, 1.° *sa hauteur*; 2.° *le côté d'un quarré qui lui soit égal en surface*; 3.° *le côté du quarré, sur lequel il faudroit construire une pyramide qui eût pour hauteur le côté de celle proposée, pour qu'elle lui fût égale en solidité*; 4.° *le côté du quarré sur lequel il faudroit construire une pyramide de hauteur égale à celle de la pyramide proposée, pour qu'elle lui fût aussi égale en solidité*; 5.° *le rayon d'une sphère circonscrite.*

Solution. La figure 88 étant construite avec le rayon AB, comme dans le problême 173, du centre B et du rayon Ba, soit décrit l'arc aN, et soit fait à $Aa = EN$; des centres A et E, avec le rayon AN, soient décrits deux arcs qui se coupent en n; du même rayon nA, coupez la demi-circonférence $BCDE$ au point S. Enfin divisez en deux parties égales LM au point m (66), ainsi que QR en q. 1.° BS sera la hauteur de la pyramide; 2.° QR sera le côté du quarré qui lui est égal en surface; 3.° Mm sera le côté du quarré qui forme la base d'une pyramide de hauteur égale au côté de celle proposée, et qui lui est égale en solidité; 4.° Qq sera le côté du quarré qui sert de base à une pyramide égale en hauteur et en solidité à celle proposée; 5.° AN est le diamètre d'une sphère circonscrite.

Démonstration. Si du sommet S de la pyramide on abaisse une perpendiculaire Sm sur le côté AB, à cause du triangle équilatéral SAB, elle coupera par moitié au point m la droite AB (12. *liv.* 1). Donc si, sur la base ABC, on élève au point m de la droite AB la perpendiculaire mT, elle passera par C (11. *liv.* 1), et contiendra le point T où tombe la perpendiculaire abaissée du sommet S sur la base (11. *liv.* 11).

On démontre de même que le point T est dans la droite Bn, qui divise en deux parties égales le côté AC. Soit menée la droite mn, elle sera parallèle à BC (2. *liv.* 6), et le triangle Amn sera équiangle au triangle ABC (27. *liv.* 1), et BC sera double de mn (4. *liv.* 6); puis les triangles BCT, mnT auront les angles égaux chacun à chacun, et on aura (4. *liv.* 6) :

$$BC : mn :: CT : mT.$$

Donc CT est double de mT; d'où $mT = \frac{1}{3}Cm$; puis faisant $AB = 1$, on a $Cm = Sm = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ [104] : donc $Tm = \frac{1}{6}\sqrt{3}$. De plus, comme on a :

$$(Sm)^2 = (mT)^2 + (ST)^2 \text{ [47. } liv. \text{ 1];}$$

c'est-à-dire, $\frac{1}{4} = \frac{1}{12} + (ST)^2$;

on aura : $(ST)^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; d'où $ST = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

On a ensuite (*fig.* 88) :

$$AN = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,[104] = \sqrt{\tfrac{6}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = An:$$

on a aussi (*fig.* 89) :

$$An : AS :: AS : SB\ [86];$$

c'est-à-dire, $\sqrt{\frac{3}{2}} : 1 :: 1 : SB$;

d'où on a : $SB = \sqrt{\frac{2}{3}} = ST$; ce qu'il falloit 1.° démontrer.

Ensuite la surface de la pyramide tétraèdre est égale au quadruple de la surface de la base ABC [*fig.* 89]; laquelle étant égale à $\frac{1}{2}AB \cdot Cm = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ [41. *liv.* 1], sera la surface

surface de la pyramide $=\sqrt{3}$; d'où le côté du quarré qui lui est égal $=\sqrt{\sqrt{3}}$. Mais on a (*fig.* 88) : $QR=\sqrt{\sqrt{3}}$ [173] : donc QR est le côté du quarré cherché. C. Q. F. 2°. D.

Dans les pyramides égales, les bases étant en raison inverse des hauteurs (9. *liv.* 12), on aura :
$1 : \sqrt{\frac{2}{3}} :: \frac{1}{4}\sqrt{3}$: à la base de la pyramide qui a pour hauteur $AB=1$; d'où la surface de cette base $=\frac{1}{4}\sqrt{2}$, et le côté du quarré de cette surface $=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}}=Mm$ [173]. C. Q. F. 3°. D.

Les pyramides de hauteur égale étant entr'elles comme leurs bases, le quarré, qui est égal au triangle $ABC=\frac{1}{4}\sqrt{3}$, aura pour côté $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}}=Qq$ [173]. C. Q. F. 4°. D.

Enfin le quarré du diamètre de la sphère circonscrite à la pyramide tétraèdre vaut une fois et demie le quarré du côté de la pyramide (13. *liv.* 13), c'est-à-dire le diamètre $=\sqrt{\frac{3}{2}}$: il est donc égal à AN. C. Q. F. 5°. D.

PROBLÈME.

176. *Etant donnée la hauteur* ST [fig. 89 et 88] *d'une pyramide tétraèdre régulière, trouver son côté* AB.

Solution. Avec un rayon AB (*fig.* 88) égal à ST (*fig.* 89), soit décrit le demi-cercle $BCDE$ en faisant à $AB=BC=CD=DE$; du centre B et du rayon BD, soit décrit l'arc DNa; du centre E et avec le même rayon, soit coupé cet arc au point a; du même centre et avec le même rayon Aa, soit coupé le même arc en N; AN sera le côté cherché égal au côté AB de la figure 89.

Démonstration. On a dans la figure 88 :

$$AB : AN :: 1 : \sqrt{\tfrac{3}{2}} \, [175];$$

et comme on a : $1 : \sqrt{\frac{3}{2}} :: \sqrt{\frac{2}{3}} : 1$, ainsi que cela se démontre en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens, on aura :

$$AB : AN :: \sqrt{\tfrac{2}{3}} : 1;$$

c'est-à-dire, que AB est à AN dans le rapport de la hauteur de la pyramide tétraèdre à son côté (175). Donc, etc.

PROBLÈME.

177. *Diviser* [fig. 90] *la ligne* AB=1, *en cinq parties égales, lors même qu'on ne peut pas avoir une ligne quintuple de* AB, *comme au* n.° 69.

Solution. Après avoir, du centre A et du rayon AB, décrit le cercle BDp, et avoir fait dans sa circonférence à $AB=BC=CD=DE$, et à $BD=Ba=B\alpha=Ea=E\alpha$, soit du centre α et du rayon AB, coupée la circonférence en g; de ce point g comme centre et du même rayon, soit décrit l'arc $An\alpha$; maintenant du centre a et du rayon BE, soit coupé cet arc en n; du centre B et du rayon αn, soit coupée la circonférence en P et p; des centres p et P, et du même rayon pB, soient décrits deux arcs qui se coupent en Q; AQ sera un cinquième de AB, et sera placée sur sa direction.

Démonstration. Si on prend un point u sur la direction de AE, et qu'on aie $Au=Aa$, on aura, à cause des angles droits aAu, αAu:

$(au)^2=2(Aa)^2=2(\alpha A)^2=(\alpha u)^2=4=(BE)^2$;

d'où: $au=\alpha u=BE=an$;

puis les angles égaux gAB, $gA\alpha$ valant chacun la moitié d'un angle droit (30), les angles gAa, gAu égaux entr'eux, vaudront chacun trois fois la moitié d'un angle droit. D'où les deux triangles gAa, gAu ayant un angle égal compris entre côtés égaux, le troisième côté ga sera aussi égal au troisième côté gu (4. *liv.* 1): donc un cercle décrit du centre g et du rayon ga, passera par le point u, et sera concentrique au cercle $A n \alpha$.

On a ensuite $g a = \sqrt{5}$ [185] ; et comme $a n = u \alpha$, on a [93] :

$$g a : g A :: a u : n \alpha ;$$

c'est-à-dire, $\sqrt{5} : 1 :: 2 : n \alpha$:

donc on aura : $n \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; d'où aussi chaque côté du rhombe $P B p Q = n \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$:

donc si on compare les points P, B, p, Q, A de la fig. 90 avec les points A, p, B, P, Q de la fig. 3, on aura pour la fig. 90 :

$BQ . B A = (B P)^2$ [19], c'est à-dire, $B Q = \frac{4}{5}$; d'où $A Q$ qui est dans la même droite [13] $= \frac{1}{5}$.

178. Ce problême, qui a une solution assez simple, devoit trouver place ici à cause de la division décimale qu'on exécute en divisant en deux, puis en cinq ou réciproquement. Le problême suivant est aussi de quelqu'utilité.

PROBLÊME.

179. *Former* [fig. 90] *un triangle rectangle dont les côtés soient en proportion arithmétique.*

Solution. Après avoir fait la construction de la solution précédente (177), du centre E

et du rayon EQ, soit coupée la circonférence en N; le triangle BNE sera le triangle cherché.

Démonstration. Ce triangle sera rectangle (31. *liv.* 3); puis faisant $AB=1$, on aura :

$$EQ=EA+AQ=\tfrac{6}{5}=EN;$$

de plus on a (47. *liv.* 1) :

$(BE)^2=(EN)^2+(BN)^2$, c. à d. $4=\frac{36}{25}+(BN)^2$; on aura donc : $(BN)^2=\frac{64}{25}$; d'où $BN=\frac{8}{5}$; d'où on voit que les côtés $EN=\frac{6}{5}$, $BN=\frac{8}{5}$, $BE=\frac{10}{5}$ seront en proportion arithmétique.

PROBLÈME.

180. *Former* (fig. 91) *un triangle rectangle dont les côtés soient en proportion géométrique.*

Solution. Du centre A avec un rayon AB, soit décrit un cercle BDd, et soit fait dans sa circonférence à $AB=BC=CD=DE=Ed=dc$; soit fait ensuite à $BD=Ba=Ea$ et à $Aa=Db=db=C\beta=c\beta$; maintenant du centre E et du rayon $b\beta$, soit coupée la circonférence du cercle en N; le triangle BNE sera le triangle cherché.

Démonstration. La ligne AB est divisée en b en moyenne et extrême raison (46): donc si on fait $AB=1$, $Ab=x$, on aura :

$$Bb=1-x, \qquad \text{et } x^2=1-x;$$

et résolvant cette dernière équation,

$$x = Ab = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

d'où résulte :

$$b\beta = 2Ab = \sqrt{5} - 1 = EN;$$

on a ensuite (31. *liv.* 3) (47. *liv.* 1) :

$$(BE)^2 = (EN)^2 + (BN)^2;$$

c'est-à-dire,

$$4 = 6 - 2\sqrt{5} + (BN)^2;$$

d'où on tire :

$$(BN)^2 = 2(\sqrt{5} - 1) = BE.NE:$$

donc on a (17. *liv.* 6) :

$$BE : BN :: BN : NE:$$

donc, etc.

181. *Lemme.* Si on fait les côtés des cinq polyèdres réguliers $= 1$, on aura le rayon d'une sphère

$$\text{circonscrite} \begin{cases} \text{au tétraèdre} & = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \\ \text{au cube} & = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \\ \text{à l'octaèdre} & = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \text{au dodécaèdre} & = \tfrac{1}{4}\sqrt{3}.(\sqrt{5}+1) \\ \text{à l'icosaèdre} & = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}. \end{cases}$$

Démonstration. Le quarré du diamètre de la sphère circonscrite à la pyramide comprise entre quatre triangles équilatéraux vaut (13. *liv.* 13), une fois et demi le quarré du côté de la pyramide, c'est-à-dire, en faisant le côté

$= 1$, le diamètre est égal à $\sqrt{\frac{3}{2}}$; d'où le rayon $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Le quarré du diamètre de la sphère circonscrite au cube, vaut (15. *liv.* 13) trois fois le quarré du côté de la pyramide, c'est-à-dire, le diamètre $= \sqrt{3}$; d'où le rayon $= \frac{1}{2} \sqrt{3}$.

Le quarré du diamètre de la sphère circonscrite à l'octaèdre (corps régulier terminé par huit faces qui sont toutes des triangles équilatéraux), est (14. *liv.* 13), double du quarré du côté d'un de ces triangles, c'est-à-dire, le diamètre $= \sqrt{2}$; d'où le rayon $= \frac{1}{2} \sqrt{2}$.

La sphère circonscrite au dodécaèdre (corps régulier, terminé par douze faces qui sont toutes des pentagones réguliers), est aussi circonscrite (17. *liv.* 13) à un cube qui a pour côté une diagonale de ces pentagones. Mais si on fait [*fig.* 64] le côté $AB = 1$, la diagonale BN du pentagone $ABLMN$ $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$; en effet, on a (137) : $BN = bE$ $= Ab + AE = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) + 1$ [180] $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$: donc BN ou la diagonale d'un pentagone qui a le côté $= 1$, est égale à $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Si sur cette ligne on forme un cube, on aura le quarré du diamètre de la sphère qui lui sera circonscrite $= 3\,(BN)^2$, et le diamètre $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) . \sqrt{3}$: donc le rayon de la sphère qui comprend le dodécaèdre $= \frac{1}{4} \sqrt{3} . (\sqrt{5} + 1)$.

Si AB est le diamètre de la sphère qui comprend l'icosaèdre, [*fig.* 92], et qu'après avoir pris sur ce diamètre $AC=4CB$, et élevé la perpendiculaire CD qui rencontre en D la demi-circonférence ADB, on décrive avec le rayon DB un cercle, et dans ce cercle un pentagone régulier, le côté de ce pentagone sera [16. *liv.* 13] le côté de l'icosaèdre (corps régulier terminé par vingt faces qui toutes sont des triangles équilatéraux); or le côté du pentagone est au rayon du cercle circonscrit comme Bb est à BA [*fig.* 12] (40); mais faisant $AB=1$, on a :

$$Ab=\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1);$$

$$(Ab)^2=\tfrac{1}{4}(6-2\sqrt{5})=\tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5});$$

$(Bb)^2=(AB)^2+(Ab)^2$ [47. *liv.* 1] $=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$;

d'où on aura : $Bb : AB :: \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} : 1$;

mais on a : $\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} : 1 :: 1 : \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}$.

Donc supposant le côté de l'icosaèdre $=1$, on aura :

$$BD\ [\textit{fig. } 92]=\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}.$$

On a ensuite :

$(AB)^2=5(BD)^2$ [16. *liv.* 13] $=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$:

donc $AB=\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$, et le rayon $=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

PROBLÊME.

182. *Etant donné le côté* AB *des cinq corps réguliers* (fig. 93), *trouver le rayon des différentes sphères qu'ils comprennent.*

Solution. Du centre A avec le rayon AB, soit décrit le cercle BDd, et soit fait dans sa circonférence à $AB=BC=CD=DE=Ed$; soit fait ensuite à $BD=Ba=B\alpha=E\alpha=Ea$; du centre α et avec le rayon αa, soit décrit l'arc aP; du même centre α et avec le rayon αB, soit décrit l'arc $Bpqs$; du même centre α et avec le rayon AB, soit décrit l'arc grt; du même centre α et avec le rayon BE, soit décrit l'arc $MQRST$; des centres D et d, avec le rayon Aa, soient décrits deux arcs qui se coupent en b; du centre E et avec le rayon Ab, soit coupée la circonférence en L; soit fait à $AB=aP=MQ$; à $Aa=MR$; à $Eb=MS$; et à $BL=MT$; soit fait ensuite à $aB=Pp$; à $MB=Qq=Ss$; et à $Mg=Rr=Tt$;

$$\left.\begin{array}{l} Bp \\ Bq \\ gr \\ Bs \\ gt \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{sera le rayon} \\ \text{de la sphère} \\ \text{qui comprend} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \text{le tétraèdre,} \\ \text{le cube,} \\ \text{l'octaèdre,} \\ \text{le dodécaèdre,} \\ \text{l'isocaèdre.} \end{array}\right.$$

Démonstration. En faisant $AB = 1$, on a :

$$\alpha a = 2\sqrt{2}\ [100]\ ,\ \alpha B = \sqrt{3}.$$

on a ensuite : $\alpha a : \alpha B :: aP : Bp$ [93] ;
c'est-à-dire, $2\sqrt{2} : \sqrt{3} :: 1 : Bp$;
on aura donc : $Bp = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$; d'où, etc. [181].
On a aussi [93] : $\alpha M : \alpha B :: MQ : Bq$;
c'est-à-dire, $2 : \sqrt{3} :: 1 : Bq$; d'où $Bq = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
On a de même : $\alpha M : \alpha g :: MR : gr$;
c'est-à-dire,

$$2 : 1 :: \sqrt{2} : gr\text{ ; d'où } gr = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ ;$$

on a également $\alpha M : \alpha B :: MS : Bs$.
Mais $MS = bE = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ [181] :
donc $2 : \sqrt{3} :: \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) : Bs$;
d'où $Bs = \frac{1}{4}\sqrt{3}.(\sqrt{5} + 1)$.
On a enfin $\alpha M : \alpha g :: MT : gt$; mais $MT = BL$.
De plus, $(BL)^2 = (BE)^2 - (EL)^2$ [31. *liv*. 3. 47. *liv*. 1] ;
c'est-à-dire, $(BL)^2 = (BE)^2 - (Ab)^2$
$= 4 - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ [181] $= \frac{5+\sqrt{5}}{2}$;
d'où $BL = MT = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$;
et par conséquent $2 : 1 :: \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} : gt$:
d'où $gt = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

Donc les distances Bp, Bq, gr, Bs, gt seront respectivement les rayons des sphères qui comprennent les cinq corps réguliers, savoir : la pyramide, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

PROBLÊME.

183. *Etant donné* (fig. 94) *le rayon* AB *de la sphère qui comprend les cinq corps réguliers, trouver leurs cotés.*

Solution. Du centre A avec le rayon AB, soit décrit le plus grand cercle de la sphère BDd, et soit fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE = Ed$; puis à $BD = Ba = Ea$, et à $Aa = Db = db$; soit fait ensuite dans la circonférence à $AB = aH$, et à $Aa = EF = Hh$; du centre a et avec le rayon aE, soit décrit l'arc $ESQP$; du même centre a et avec le rayon ah, soit décrit l'arc hT; soit fait à $Aa = EP$; à $AB = EQ$; à $Ab = ES$; à $bF = hT$. Puis, soit fait à $EL = Pp = Qq = Ss$, et à $hL = Tt$:

Lp sera le côté du tétraèdre,
Lq . . . . du cube,
Aa . . . . de l'octaèdre,
Ls . . . . du dodécaèdre,
Lt . . . . de l'icosaèdre.

Démonstration. On a l'arc Eh égal à un huitième de la circonférence (30); d'où $ah = \sqrt{5}$ [185]; et comme l'angle droit bAF est le même que BAF, parce que le point b

est sur la ligne AE [13. 27], bF sera le côté du pentagone (40), et Ab le côté du décagone inscrit au cercle BDd [41]; faisant donc $AB=1$, on aura : $Ab=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ [180]; et $(bB)^2=(AF)^2+(Ab)^2 = 1+\frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$; d'où $bF = hT=\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$.

On aura ensuite : $aE : aL :: EP : Lp$ [93], c'est-à-dire, $\sqrt{3} : 2 :: \sqrt{2} : Lp$: donc on aura : $Lp=2\sqrt{\frac{2}{3}}$. Or le rayon de la sphère est au côté du tétraèdre qu'elle contient comme $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} : 1$ [181] $:: 1 : 2\sqrt{\frac{2}{3}}$: donc faisant le rayon AB de la sphère $=1$, Lp sera le côté du tétraèdre qui y est contenu.

On aura aussi (93) : $aE : aL :: EQ : Lq$, c'est-à-dire,

$$\sqrt{3} : 2 :: 1 : Lq;\ \text{d'où}\ Lq=2\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Or le rapport du rayon de la sphère au côté du cube qui y est contenu, est :

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3} : 1\ [181] :: 1 : 2\sqrt{\tfrac{1}{3}};\ \text{donc, etc.}$$

On aura de même $Aa=\sqrt{2}$ pour côté de l'octaèdre ; car le rapport du rayon de la sphère au côté de l'octaèdre qui y est contenu est : $\frac{1}{2}\sqrt{2} : 1$ [181] $:: 1 : \sqrt{2}$, donc, etc.

On aura également : $aE : aL :: ES : Ls$, c'est-à-dire, $\sqrt{3} : 2 :: \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) : Ls$;

d'où $Ls = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$. Or le rapport du rayon de la sphère au côté du dodécaèdre qui y est contenu, est :

$\frac{1}{4}\sqrt{3}.(\sqrt{5}+1) : 1$ [181] $:: 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$;

donc, etc. Enfin on aura :

$$ah : aL :: hT : Lt \text{ [93]},$$

c'est-à-dire, $\sqrt{5} : 2 :: \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} : Lt$:

d'où : $Lt = 2\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$. Or le rapport du rayon de la sphère au côté de l'icosaèdre qui y est contenu, est :

$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} : 1$ [181] $:: 1 : 2\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$.

Donc, etc.

PROBLÈME.

184. *Etant donné un point* B *sur la circonférence d'un cercle donné* [fig. 95], *trouver deux autres points* L *et* M, *tels que le triangle* BLM *soit équilatéral et touche le cercle par le côté* LM *au point* E *qui en est le milieu.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné à son rayon $AB = BC = CD = DE = Ed$; puis, soit fait à $BD = Ba = Ea$:

du centre a, et avec le rayon aA, soit décrit un arc qui passe par α; du centre E et avec le rayon EA, soit décrit un arc qui coupe le précédent en α; du centre α, avec le même rayon αE, soit coupée la circonférence en P. Puis, du centre E et du rayon EP, soit décrit un arc qui passe par L et M; des centres D et d avec le rayon aP, soient décrits deux arcs qui coupent le précédent en L et M; les points L et M seront les deux points cherchés.

Démonstration. Si on compare les points a, A, E, α, P de la fig. 95, avec les points Q, A, p, B, P de la fig. 3, de l'équation :

$$(AQ)^2=(Ap)^2+(pQ)^2-pP.pQ$$

qui appartient à la fig. 3, on tirera pour la fig. 95 celle-ci :

$$(Aa)^2=(AE)^2+(Ea)^2-EP.Ea;$$

et substituant les valeurs numériques [27] :

$$2=1+3-EP.\sqrt{3},$$

d'où : $2=EP.\sqrt{3}$ et $EP=\frac{2}{3}\sqrt{3}$;

et comme les trois points E, P, a sont dans la même droite [13], on aura :

$$Pa=Ea-EP=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Si on suppose menée la ligne BE qui coupe en R la ligne Dd, on aura [104] :

$$BR=\tfrac{2}{3};\ RD=\tfrac{1}{2}\sqrt{3};\ BE=2;$$

d'où la quatrième proportionnelle aux trois lignes BR, RD, BE sera égale à $\frac{2}{3}\sqrt{3}=EM$:

on aura aussi [104] : $RE = \frac{1}{2}$, $BD = \sqrt{3}$ [2]; d'où la quatrième proportionnelle aux trois lignes BR, BD, RE sera égale à $\frac{1}{3}\sqrt{3} = DM$: donc les lignes EM, DM seront de la longueur nécessaire pour que le triangle BEM soit semblable au triangle BRD (2. *liv.* 6): donc ils seront semblables; car le point M ne peut être placé dans un autre endroit (8. *liv.* 1). On prouvera de la même manière que le triangle BRd est semblable au triangle BEL; d'où on voit que le triangle BDd est semblable au triangle BML (20. *liv.* 6): donc aussi ce dernier est équilatéral. De plus, les angles BEM, BEL égaux aux angles BRD, BRd sont droits, et les lignes EN, EL sont égales: donc BLM est le triangle cherché.

PROBLÊME.

185. *Dans un cercle dont le rayon* AB *soit donné* [fig. 96], *inscrire cinq quarrés égaux, dont l'un soit concentrique au cercle et les autres le touchent, chacun ayant un côté commun avec le quarré du milieu.*

Solution. Soient faites égales au rayon AB les cordes BC, CD, DE. Soit fait à $BD =$

$Ba = Ea$; faites encore égales à Aa les cordes BF, Bf: du centre a, avec le rayon AB, coupez le cercle en G et faites la corde $Gg = Aa$; du centre g avec le rayon ga, décrivez un arc aP et faites sa corde $aP = aA$; du même centre g et avec le rayon gA, décrivez un arc Ap sur la direction de l'arc aP; faites à $aA = Pp$; faites maintenant égales à Ap les cordes Bq, fn, Em, Fl; avec le même rayon Ap et des centres B, q, f, n, E, m, F, l, décrivez des arcs qui se coupent dans le cercle en L, Q, N, M; $LMNQ$ sera le quarré central, et $BLQq$, $fQNn$, $ENMm$, $FMLl$ seront les autres quarrés cherchés.

Démonstration. Si on compare les points a, A, G, B, g de cette figure avec les points Q, p, A, R, S de la fig. 4, on aura (21) pour la fig. 87 l'équation :

$$(ag)^2 = (aB)^2 + Gg . Aa,$$

c'est-à-dire, en faisant le rayon $AB = 1$,

$$(ag)^2 = 3 + 2 = 5 \,[27]; \quad \text{d'où } ag = \sqrt{5}.$$

De plus, on a $aP = aA = \sqrt{2}$.

Or : $ga : aP :: gA : Ap$ [93],

c'est-à-dire, $\sqrt{5} : \sqrt{2} :: 1 : Ap$;

d'où $Ap = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = EM$;

et comme $BCDE$ est une demi-circonférence [64], BmE sera un angle droit (31 *liv.* 3);

d'où :

d'où :
$(BE)^2=(Bm)^2+(mE)^2$; c. à. d. $4=(Bm)^2+\frac{2}{5}$;
d'où $(Bm)^2=9.\frac{2}{5}$, et $Bm=3\sqrt{\frac{2}{5}}=3mE$.
On trouvera la même valeur pour qE, et on démontrera que tous les autres angles du quadrilatère $BmEq$ qui sont inscrits et appuyés sur un diamètre sont droits : donc ce quadrilatère est un parallélogramme rectangle. On démontre de même que $Flfn$ est un parallélogramme rectangle.

Si on fait la corde $Em=k$, mF sera la corde du complément de l'angle droit $=h$ [159], et on aura $h^2=2-2k\sqrt{(1-\frac{1}{4}k^2)}$; d'où, à cause de $k^2=\frac{2}{5}$, on aura :
$h^2=2=2k\sqrt{\frac{9}{10}}=2-2\sqrt{\frac{9}{25}}=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}=2k^2$,
c'est-à-dire, $(Fm)^2=(FM)^2+(Mm)^2$;
d'où l'angle FMm sera droit (48. *liv.* 1), ainsi que les autres angles BLl, fQq, ENn.
Puis, si on appelle x la distance du point m à celui où tombe du point F la perpendiculaire sur Bm, on aura (13. *liv.* 2) :

$$(BF)^2=(Fm)^2+(Bm)^2-2Bm.x,$$

c'est-à-dire, $2=\frac{4}{5}+\frac{18}{5}-6x\sqrt{\frac{2}{5}}$;
d'où $x\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}$, et divisant par $\sqrt{\frac{2}{5}}$,

$$x=\sqrt{\frac{2}{5}}=mM.$$

Ensuite, si on nomme y la perpendiculaire qui tombe du point F sur Bm, on aura :

$$y^2=(Fm)^2-x^2=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{2}{5};$$

d'où on tire : $y = \sqrt{\frac{2}{5}} = FM$.
On démontre par-là que les points M et L sont sur la ligne $B\,m$; et comme on a :

$$B\,m = 3\,.\,E\,m = M\,m + B\,L + E\,m;$$

on aura donc aussi : $L\,M = E\,m$.
De plus, on démontre que les autres côtés $M\,N$, $N\,Q$, $L\,Q$ ont la même valeur. De tout ce qui précède, il résulte que les angles extérieurs au quadrilatère $L\,M\,N\,Q$ qui ont leurs sommets aux points L, M, N, Q sont droits : donc les angles intérieurs le seront aussi : donc on aura les cinq quarrés demandés.

PROBLÊME.

186. *Etant donnés les cinq points* A, B, C, D, E, *sommets des angles d'un pentagone régulier* [fig. 97], *trouver les cinq points* a, b, c, d, e *où se coupent les diagonales de ce pentagone.*

Solution. Des centres A, B, C, D, E avec le côté $A\,B$ du pentagone pris pour rayon, soient décrits des arcs qui se coupent en a, b, c, d, e; ces points seront ceux d'intersection des diagonales.

Démonstration. Si on suppose les diagonales menées et les côtés du pentagone $A\,B\,C\,D\,E$ tracés, on aura l'angle $BAC = BDA$ (29. *liv.* 3)

$=CAD$: d'où $Ab=bD$ (6. *liv.* 1). On aura ensuite $BbA=bDA+bAD$ (32. *liv.* 1) $=BAb+bAD=BAD=ABD$ (5. *liv.* 1); d'où le triangle ABb sera isoscèle (6. *liv.* 1), c'est-à-dire, on aura $AB=Ab=bD$; donc, etc.

PROBLÊME.

187. *Dans un cercle d'un rayon* AB *donné* [fig. 98], *inscrire six pentagones réguliers.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné, à $AB=BC=CD=DE=Ed$; à $BD=Ba=Ea$; et à $Aa=BF=Db=db$; soit aussi fait dans la même circonférence à $bF=BP=PQ=QR=RS$; avec le même rayon bF et des centres B, P, Q, R, S, soient décrits des arcs qui se coupent en β, p, q, r, s. Maintenant des centres β, P avec le rayon βp, soient décrits deux arcs qui se coupent en c; avec le même rayon et des centres P, p, soient décrits deux arcs qui se coupent en d; on aura deux des pentagones cherchés, savoir : $\beta pqrs$ qui a son centre en A, et $\beta pdPc$ qui touche le cercle donné en P. On trouvera de la même manière les sommets des angles des quatre autres pentagones $pqfQe$, $qrhRg$, $rskSi$, $s\beta mBl$.

N 2

Démonstration. Les points B, P, Q, R, S seront les sommets des angles d'un pentagone régulier inscrit au cercle donné (40. 128); d'où les points β, p seront dans la diagonale BQ, et les points p, q dans la diagonale PR [186]; et comme $Bp = \beta Q$, on aura $B\beta = pQ$. On prouvera de même que $Pp = qR$, et à cause de $BQ = PR$ 27. *liv*. 3], on aura aussi $B\beta = Pp$, et $\beta p = pq$. On prouvera aussi de la même manière que tous les côtés du pentagone $\beta pqrs$ sont égaux entr'eux. De plus, on a l'angle βpq, c'est-à-dire, $BpR = BPR + PBp$ [32. *liv*. 1]; mais PBp, c'est-à-dire, $PBQ = QPR$: donc $\beta pq = BPQ$. On démontre de même que les autres angles du pentagone $\beta pqrs$ sont égaux aux angles du pentagone $BPQRS$: donc ils sont tous deux réguliers. En outre, l'angle QBR formé par deux diagonales du pentagone $BPQRS$, qui est l'angle βBs sera égal à l'angle βqs formé par deux diagonales du pentagone $\beta pqrs$ (20. *liv*. 6). Or comme les triangles βBs, βqs sont isoscèles, ils auront aussi les angles à la base commune βs égaux entr'eux (5. 32. *liv*. 1); d'où aussi les triangles seront en tout égaux (26. *liv*. 1); d'où les triangles $Bm\beta$, βpq ayant tous les côtés égaux entr'eux, auront aussi les angles égaux (8. *liv*. 1), ainsi que les triangles Bls, srq : donc tous les côtés et tous les angles du pentagone $Bm\beta sl$ seront égaux aux côtés et aux angles du pentagone $\beta pqrs$; ils seront donc tous deux réguliers. On démontre la même chose pour les autres pentagones $\beta cPdp$, $peQfq$, $qgRhr$, $riSks$: donc, etc.

188. Le point b sera le centre du pentagone $\beta mBls$, et la distance bB le rayon du cercle circonscrit à ce pentagone et aux autres qui lui sont égaux, ainsi que nous le démontrerons bientôt : ce qui ajoute encore une belle propriété au point b que nous avons déjà remarqué tant de fois dans cette géométrie. Car, outre les divisions en moyenne et extrême raison qu'il nous a fait obtenir dans le diamètre BAE (45, 46), outre qu'il a servi à déterminer le côté bF du pentagone inscrit au cercle du rayon AB [40], le côté bA du décagone inscrit au même cercle (41) ; on a encore le rayon Bb du cercle circonscrit aux six pentagones qu'on peut inscrire au plus grand cercle du rayon AB, comme dans le présent problême ; car si on suppose le rayon $AB=1$, on a : $Ab=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ [180] ; et comme (31. *liv.* 3)

$$(BE)^2=(BQ)^2+(QE)^2=(BQ)^2+(Ab)^2;$$

on aura : $BQ=\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

On a ensuite : $\beta Q=BP=bF=\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$ [181] ;

d'où : $BQ:\beta Q::BQ.\beta Q:(\beta Q)^2::\sqrt{5}:\frac{5-\sqrt{5}}{2}$

$::1:\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)::BA:bA:$

d'où : $BQ:BQ-\beta Q::BA:BA-bA$,

c'est-à-dire, $BQ:B\beta::BA:Bb$.

Donc les deux diagonales des pentagones $BPQRS$, $Bm\beta sl$ seront entr'elles comme $BA:bA$: donc BA étant le rayon du premier pentagone, Bb sera le rayon du second (20. *liv.* 6).

PROBLÊME.

189. *Etant donnés les sommets des angles d'un exagone régulier* BCDEdc [fig. 99], *trouver les points* l, m, n, g, p, q *où se coupent celles de ses diagonales qui ne passent pas par le centre.*

Solution. Soit fait à $BD=Ba=Ea$; puis à $BC=BA=CA=B\alpha$; à $aA=a\alpha$; à $\alpha B=\alpha P=AP$. Maintenant des centres B, C avec le rayon aP, soient décrits deux arcs qui se coupent en l ; des centres C, D, soient décrits deux autres arcs qui se coupent en m, et ainsi de suite ; ces points l, m, etc. seront les points cherchés.

Démonstration. Supposons que les diagonales indiquées se coupent en $l, m, n, g; p, q$, comme on a l'angle $BDc = DcE$ (29. *liv.* 3), BD sera parallèle à cE (28. *liv.* 1) : donc le triangle Clm sera semblable au triangle CcE (2, 5. *liv.* 6), et par conséquent équilatéral. De même on aura le triangle Blq semblable au triangle BDd, puis les triangles CcE et BdD ayant les côtés égaux, seront égaux (2) (8. 4. *liv.* 1) ; et le côté BD, et par conséquent lm étant à égale distance du côté cE que le côté Cc, ainsi que ql du côté dD (14. *liv.* 3), si on applique le triangle BdD sur le triangle CcE, la droite ql tombera sur la droite lm, et elles seront égales ; mais $Bl = lq$: donc $Bl = lm$. De même on démontre que $Dm = ml$. Donc, en faisant le rayon du cercle $BC = AB = 1$ [2], on a :

$$Bl = \tfrac{1}{3} BD = \tfrac{1}{3} \sqrt{3};$$

de même $Cl = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. mais on a fait précisément

$$Bl = Cl = aP = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \text{ [184] :}$$

donc l est un des points cherchés. On démontre la même chose pour les autres points m, n, g, p, q ; donc, etc.

PROBLÈME.

190. *Dans le cercle du rayon donné* AB [fig. 100], *inscrire sept exagones réguliers, dont un soit concentrique au cercle, et les autres soient disposés autour du premier.*

Solution. Soit fait dans la circonférence du cercle donné à $AB = BC = CD = DE = Ed$; puis à $DB = DV = dV$. Des centres C et A, avec le rayon CV, soient décrits deux arcs qui se coupent en P; du centre P, avec le même rayon PC, soit coupée la circonférence du cercle en δ; $d\delta$ sera le côté des exagones à inscrire, et que l'on inscrira facilement l'un près de l'autre. Ensuite, des centres d et δ, avec le même côté $d\delta$ pris pour rayon, soient décrits deux arcs qui se coupent en α; du centre α et avec le même rayon, soit décrit un cercle dans lequel on inscrive (15. *liv.* 4) un exagone régulier $d\delta mnpq$. Du centre A avec le même rayon, soit décrit un cercle qui passera par np; soit décrit dans ce cercle l'exagone qui a pour un des côtés la ligne pn; sur les côtés de cet exagone, soient décrits les autres exagones, comme on a fait d'abord sur le côté $d\delta$, et on aura les sept exagones demandés.

Démonstration. En faisant pour abréger $AB = 1$, on aura $CP = CV = \sqrt{7}$ [100] $= AP$: puis on aura $AP : A\delta :: A\delta : \delta d$ [86], c'est-à-dire, $\sqrt{7} : 1 :: 1 : \delta d$; d'où $\delta d = \sqrt{\frac{1}{7}}$. Supposons pour un moment inscrits les exagones cherchés, et soit leur côté $d\delta$ qui est la quantité inconnue $= x$; on divisera cette ligne en deux parties égales au point v, et on menera la droite Av, qui lui sera perpendiculaire [83], et passera par α centre de l'exagone, dont $d\delta$ est le côté, en coupant aussi par moitié au point μ le côté pn de l'exagone central; et comme on a dans le triangle équilatéral Apn:

$$pn : A\mu :: 1 : \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ [104]};$$

on aura $x : A\mu :: 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$; d'où $A\mu = \frac{1}{2}x\sqrt{3}$, et $Av = 3A\mu = \frac{3}{2}x\sqrt{3}$, et encore $dv = \frac{1}{2}x$; puis, comme $1 = (Ad)^2 = (Av)^2 + (dv)^2$, on aura :

$$1 = \tfrac{27}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x^2 = 7x^2; \text{ d'où } x^2 = \tfrac{1}{7} \text{ et } x = \sqrt{\tfrac{1}{7}}$$

valeur qui est précisément celle déterminée pour la ligne $d\delta$ dans la solution du problême, ainsi qu'on vient de le démontrer; donc, etc.

On trouve dans Pappus, *liv*. 8, *probl.* 15, *prop*. 19, ce problême résolu avec la règle et le compas, d'une manière qui n'est pas plus simple que la précédente. Il y a aussi ajouté une construction mécanique.

191. Nous croyons avoir jusqu'ici rempli les promesses que nous avons faites (6 et 7). Quant au premier point, nous avons déjà donné tous les élémens de la *Géométrie du compas*, c'est-à-dire, la totalité des problêmes qui suffisent pour trouver avec le compas seul et sans la règle tous les points qu'on peut trouver avec ces deux instrumens réunis. Pour démontrer ceci [71], on observe d'abord que la géométrie élémentaire fournit le moyen de trouver les points d'un problême, ou par la section des arcs entr'eux (et ce moyen est tout-à-fait propre à la Géométrie du compas), ou par la section des arcs et des lignes droites, ou par celle des lignes droites entr'elles (et tout cela se trouve compris dans le livre 7), [110 et suivans]. Ensuite une droite quelconque nécessaire à la solution d'un problême se trouve déterminée de grandeur et de position. Par rapport à la grandeur, nous avons enseigné dans le liv. 3, [64 et suivans], et dans le liv. 4, [72, 73, 74], à aggrandir, diminuer, diviser une grandeur quelconque finie en un nombre quelconque de parties ; puis, dans le livre 5, [86 et suiv.], à trouver les troisièmes, les quatrièmes, les moyennes proportionnelles, ainsi qu'à diviser une droite dans un rapport quelconque donné. Quant à la position des droites,

elle se détermine par la position de deux points pour chacune d'elles ; or le livre 4 [76 et suivans] enseigne à trouver les points pour tous les cas des perpendiculaires et des parallèles. Le livre 8 [113 et suiv.] donne tout ce qui est nécessaire pour déterminer la position des lignes droites entr'elles sous un angle quelconque, donné par le moyen de deux points. On a épuisé dans le liv. 2 [27 et suiv.] les divisions de la circonférence du cercle et de tous les arcs qui sont du ressort de la Géométrie élémentaire. Je ne vois plus d'après tout cela quels autres élémens on pourroit desirer. A l'égard du choix des problêmes que nous avons recueillis ici, nous laisserons aux Mathématiciens le soin de juger si dans un grand nombre de cas utiles ou récréatifs, il n'est pas préférable, non-seulement pour la précision du résultat, mais encore pour la promptitude de la construction, d'abandonner la règle et de se servir du compas seulement, jusqu'à ce qu'ayant trouvé les points nécessaires au problême, on mène, s'il le faut, d'un point à l'autre une ou plusieurs droites que l'on ne peut pas à la vérité tracer avec le compas seul, et qui exigent l'usage de la règle.