GÉOMÉTRIE DU COMPAS.

LIVRE DIXIÈME.

DES CENTRES.

PROBLÈME.

143. *TROUVER le centre d'un cercle donné* MAB [fig. 71].

Solution. Ayant pris pour centre un point quelconque A de sa circonférence, d'un rayon arbitraire AB, plus petit que le diamètre du cercle donné, et plus grand que le quart de ce diamètre, soit décrite la demi-circonférence $BCDE$, en faisant à $AB = BC = CD = DE$; soit M le point où elle coupe la circonférence du cercle donné; des centres E et A avec le rayon EM, soient décrits deux arcs qui se coupent en L; du centre L et du même rayon LA, soit coupé le cercle BME en Q; des centres B et A et du rayon BQ, soient décrits deux arcs qui se coupent en O; le point O sera le point cherché.

Démonstration. La ligne *B A E* étant droite (15. *liv.* 4), l'angle extérieur *L A B* est égal aux deux angles intérieurs opposés *A L E*, *A E L* pris ensemble, dans le triangle *A L E* (32. *liv.* 1). Or les triangles *L A E*, *LAQ* ont tous les côtés égaux entr'eux, et par conséquent les angles opposés aux côtés égaux sont aussi égaux (8. *liv.* 1). Donc l'angle *A E L* = *Q A L*, et l'angle *A L E* = *A L Q* : donc l'angle *L A B* est égal aux deux angles *Q A L* et *Q L A* pris ensemble; et retranchant de part et d'autre l'angle *Q A L*, on a l'angle restant *QAB*=*QLA*. Donc la somme des deux angles *L A Q*, *L Q A* dans le triangle *L A Q*, est égale à la somme des deux angles *A Q B*, *A B Q* dans le triangle *A B Q* (32. *liv.* 1). Mais ces deux triangles *L A Q*, *A B Q* sont isoscèles par construction : donc les angles à leurs bases seront égaux chacun à la demi-somme (5. *liv.* 1), et par conséquent égaux entr'eux dans l'un et l'autre triangle : donc les triangles *L A Q*, *A B Q* seront semblables (4. *liv.* 6), et on aura :

$$LA : AQ :: AQ : QB;$$

et substituant les valeurs égales,

$$ME : EA :: AB : OB:$$

donc les triangles isoscèles *M A E*, *A O B* ayant les côtés proportionnels, sont équiangles entr'eux (5. *liv.* 6), et on a l'angle $OAB = AME = AEM$. Mais l'angle extérieur MAB est égal à la somme des deux angles intérieurs AME, AEM égaux entr'eux, dans le triangle AEM (32. *liv.* 1) : donc il sera égal à l'angle OAB pris deux fois ; ou bien on aura $OAB = OAM$. Mais les deux triangles OAB, OAM ont encore les côtés AB, AM égaux entr'eux, et de plus le côté OA commun, c'est-à-dire, ces deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux : donc (4. *liv.* 1) le troisième côté OB de l'un de ces triangles sera aussi égal au troisième côté OM de l'autre : donc les trois lignes OB, OA, OM sont égales, et par conséquent le point O est le centre que l'on cherchoit du cercle MAB (9. *liv.* 3).

144. Quand on a trouvé la valeur de QB, troisième proportionnelle aux deux lignes LA, AQ, ou aux deux lignes EM, EA, valeur qui est celle du rayon du cercle dont on cherche le centre, il suffit de prendre deux points à volonté dans la circonférence du cercle, et de ces points comme centres avec le même rayon, décrire deux arcs qui

se coupent ; le point de leur intersection sera le centre du cercle.

145. Pour obtenir des sections à angles moins aigus, il sera utile, dans la pratique, de choisir à vue d'œil un rayon AB, qui approche de la valeur du rayon du cercle que l'on cherche.

Problème.

146. *Circonscrire et inscrire un cercle à un triangle équilatéral donné* [fig. 72].

Solution. Soient A, B et M les sommets des angles du triangle donné ; du centre A et du rayon AM, soit tracé l'arc MDE, et soit fait à $AM = MD = DE$; des centres B et A, avec le rayon BD, soient tracés deux arcs qui se coupent en L; du centre L, avec le même rayon LA, soit décrit un arc qui coupe l'arc DE en Q; des sommets de deux angles du triangle, des points A et B, par exemple, pris pour centres, avec le rayon QE, soient décrits deux arcs qui se coupent en O; du centre O et du même rayon OA, soit décrit un cercle : il sera circonscrit au triangle.

Soit divisée la ligne QE en deux parties égales au point m [66]; du même centre O et du rayon Qm, soit décrit un autre cercle; il sera inscrit au triangle.

Démonstration. De la démonstration du n.° 142, il résulte que la ligne BAE étant droite, QE est troisième proportionnelle aux deux lignes EM, EA. Donc QE sera le rayon d'un cercle qui passe par les trois points M, A, B; et le point O en sera le centre (143).

Dans la figure 59, où le cercle DBd est inscrit au triangle NLM, AD est perpendiculaire à LD, et NAB à LB (131): donc les triangles rectangles NDA, NBL, qui ont un angle commun en N, ont aussi le troisième angle égal (32. *liv.* 1); d'où on a la proportion (4. *liv.* 6):

$$NL : LB :: NA : DA.$$

Mais NL est double de LB: donc aussi NA est double de DA, c'est-à-dire, le rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral, est double du rayon du cercle inscrit: donc, etc.

PROBLÊME.

147. *Circonscrire et inscrire un cercle à un quarré donné* [fig. 73].

Solution. Soient A, B, T, F les sommets des angles du quarré donné ; soit fait à $AB = AE$; à $FB = FE$; du centre B, avec le même rayon BF, soit décrit un arc qui passe par Q et q; du centre E et du rayon EA, soit coupé cet arc en Q et q; des centres Q et q, et du même rayon AE, soient décrits deux arcs qui se coupent en M; des centres A et B, et du rayon AQ, soient décrits deux arcs qui se coupent en O; du centre O et du même rayon OB, soit décrit un cercle; il sera circonscrit au quarré; du même centre O et du rayon OM, soit décrit un autre cercle : il sera inscrit au quarré.

Démonstration. Si on fait, pour abréger, $AB = 1$, on aura :

$$AQ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ [104] = AO = BO;$$

on aura donc :

$$(AO)^2 + (BO)^2 = 1 = (AB)^2 :$$

d'où l'angle BOA sera droit (48. *liv.* 1), et les angles OAB, OBA seront égaux chacun à la moitié d'un angle droit (5, et 32. *liv.* 1) : de plus, l'angle BAF du quarré étant droit, l'angle OAF en vaudra la moitié : donc dans les deux triangles BAO, FAO, on aura un angle égal compris entre côtés égaux : d'où on aura aussi $OB = OF$ (4. *liv.* 1); on démontre de la même manière que l'on a aussi $OB = OT$: donc le cercle $ABTF$ est circonscrit au quarré.

La ligne OM est perpendiculaire à MA [83] : donc BMA est tangente au cercle décrit avec le rayon OM; on démontre la même chose pour les autres côtés AF, FT, TB : donc le cercle décrit du centre O et du rayon OM est incrit au quarré.

PROBLÈME.

148. *Circonscrire et inscrire un cercle à un polygone régulier quelconque* [fig. 74].

Solution. Soient B, A, M les sommets de trois angles de ce polygone régulier, dont celui du milieu A soit également éloigné des deux autres B et M; du point A comme centre et du rayon AB, soit décrite la demi-circonférence $BCDE$ (64) ; des centres A et E, et du rayon ME soient décrits deux arcs qui se coupent en L; du centre L et du même rayon LA soit coupée la demi-circonférence $BCDE$ en Q : la ligne BQ sera le rayon du cercle circonscrit ; puis, des sommets B et A, par exemple, de deux des angles du polygone comme centres, et du rayon $B Q$ soient décrits deux arcs qui se coupent en O; le point O sera le centre de ce cercle.

Si $A B$ est un côté du polygone, on le divisera en deux parties égales au point T (66), $O T$ sera le rayon du cercle inscrit que l'on décrira du même centre O; si une autre ligne quelconque $A b$ est un des côtés du polygone, on la divisera en deux parties égales au point t, et $O t$ sera le rayon du cercle à inscrire avec le même centre O.

Démonstration. Il résulte de la démonstration du n.° 14, que O est le centre du cercle qui passe par les trois points B, A, M: donc il est le centre du cercle circonscrit, puisque par les trois points B, A, M, on ne peut faire passer qu'un seul cercle (25. *liv.* 3). On a ensuite $O T$ perpendiculaire à $T A$ [83] : d'où $T A$ sera tangente au cercle décrit du centre O avec le rayon $O T$ (16. *liv.* 1). La même démonstration s'applique à tous les autres côtés égaux à $A B$: donc ce cercle est inscrit au polygone qui a pour côté $A B$; on démontre de même que le cercle décrit du centre O, et du rayon $O t$, est inscrit au polygone, qui a pour côté $A b$.

149. Si $A B$ est un côté du polygone dans

lequel on veut inscrire le cercle, il y aura plusieurs manières de le diviser en deux parties égales (66); nous avons donné la plus simple pour le quarré (147) : pour le triangle seul (146), le rayon du cercle inscrit est la moitié du rayon du cercle circonscrit; dans le quarré seul, il est égal à la moitié du côté.

PROBLÊME.

150. *Trouver le centre* S [fig. 75] *d'un cercle qui passe par trois points donnés* P, Q, R.

Solution. Des points *P* et *Q* comme centres et d'un rayon arbitraire, soient décrits deux arcs qui se coupent en *A* et *B;* des centres *Q* et *R* et d'un rayon arbitraire, soient décrits deux arcs qui se coupent en *C* et *D :* le point *S* où les lignes *AB, CD* se coupent (112), sera le centre cherché.

Démonstration. Voyez (25. *liv.* 3).