GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.

LIVRE NEUVIÈME.

DES FIGURES SEMBLABLES ET DES POLIGONES RÉGULIERS.

124. OBSERVATION. Quand nous dirons : *Construire une figure ou un polygone*, nous entendrons : *Trouver tous les points qui suffisent pour déterminer de grandeur et de position toutes les droites qu'il conviendroit de tirer pour construire entièrement le polygone.*

PROBLÊME.

125. *Sur un côté donné* ab, *construire un triangle semblable à un triangle donné* ABC [fig. 51].

Solution. Voyez 115.

PROBLÊME.

126. *Etant donnée* [fig. 58] *une figure*

ABCEFD, *construire une figure qui lui soit semblable, et dont la surface soit avec celle de cette figure dans un rapport donné.*

Solution. Si l'on veut, par exemple, que la surface de la nouvelle figure soit les deux cinquièmes de la surface de la figure donnée.

D'un rayon AB, le plus grand qu'il sera possible, construisez la figure 43 [100]: prenez dans cette figure la ligne $Aa = \sqrt{2}$ pour rayon: du centre O [*fig.* 58], décrivez le cercle plus petit, dans la circonférence duquel se trouve le point v. De la ligne $ET = \sqrt{5}$ [*fig.* 43], prise pour rayon, et du même centre O, décrivez le cercle plus grand, dans la circonférence duquel se trouve le point V, déterminé par rapport au point v, de telle manière que la ligne Vv soit à-peu-près tangente au point v du cercle intérieur.

Supposez la figure donnée divisée en autant de triangles ABC, ACD, CDE, EDF, en imaginant des droites AC, CD, etc. et placez les nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc. sur les distances AB, AC, CD, etc. qui mesurent les côtés de ces triangles; appliquez successivement les distances 1, 2, 3, etc. comme cordes à autant d'arcs consécutifs du cercle *V*; savoir : *AB* de *V* en 1, *A C* de 1 en 2, *B C* de 2 en 3, et ainsi de suite jusqu'à la fin. Ce que l'on fera en prenant la distance *A B* pour rayon, et en décrivant du point *V* pris pour centre un arc qui coupe cette même circonférence au point 1, etc.

D'un rayon égal à *V v*, et en prenant successivement pour centres les points 1, 2, 3, 4, etc., décrivez des arcs qui coupent successivement la plus petite circonférence aux points 1, 2, 3, 4, etc. jusqu'à la fin.

Les cordes du cercle intérieur, ou les distances de *v* à 1, de 1 à 2, de 2 à 3, de 3 à 4, etc. seront les côtés *a b*, *a c*, *b c*, *c d*, etc. de la nouvelle figure que l'on construira triangle par triangle ; avec la distance du point *v* au point 1, on déterminera les deux points *a* et *b* ; des centres *a* et *b*, et avec la seconde et la troisième distance, prise dans le cercle intérieur (la seconde du point 1 au point 2, et la troisième du point 2 au point 3), décrivez deux arcs qui se coupent en *c*; des centres *c* et *a*, et avec les distances quatrième et cinquième, prises dans le cercle intérieur (la quatrième, de 3 à 4, et la cinquième, de 4 à 5), décrivez deux arcs qui se coupent en *d* : on déterminera de la même manière les points e et f, et la figure sera construite.

Démonstration. Les cordes du cercle intérieur sont aux cordes homologues du cercle extérieur, comme le rayon Ov est au rayon OV [93], ou comme $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{5}$: donc tous les côtés des triangles de la figure $abcefd$, et les côtés homologues des triangles de la figure $ABCEFD$ sont dans le même rapport : donc les triangles des deux figures sont équiangles entr'eux, et par conséquent semblables (5. *liv.* 6. *déf.* 1) : donc les deux mêmes figures polygones sont semblables (20. *liv.* 6), et les surfaces étant entr'elles comme les quarrés des côtés homologues, la surface du polygone $abcefd$ sera à celle du polygone $ABCEFD$, comme 2 est à 5 : donc la surface de la plus petite des deux figures sera à celle de la plus grande, comme 2 est à 5.

D'après cet exemple, il est facile de voir la méthode à suivre pour résoudre le problême, quel que soit le rapport qu'on propose d'établir entre la surface de la figure à construire, et celle de la figure donnée.

On décrira deux circonférences v et V avec des rayons qui soient entr'eux comme les racines des nombres qui expriment le

rapport

rapport des surfaces ; sur celle des deux circonférences qui correspond à la figure donnée, on portera successivement comme cordes les côtés des triangles dans lesquels cette figure est supposée divisée. On déterminera, par la méthode ci-dessus exposée, dans l'autre circonférence des cordes proportionnelles qui seront les côtés respectifs des triangles de la nouvelle figure.

Le rapport des moitiés des racines étant le même que celui des racines entières, la figure 45 servira dans plusieurs cas (104). Pour les autres cas, voyez les numéros 101, 102 et 103.

On prend ensuite un rayon *AB* [*fig.* 44 et 45], le plus grand que l'on peut employer commodément, pour que les cercles puissent mieux recevoir les longueurs des cordes à appliquer, et pour que les intersections qui en résultent se fassent à angles plus approchans de l'angle droit.

127. Si on avoit donné le rapport des côtés *AB* et *ab* entr'eux, ou de deux autres droites quelconques entr'elles, on choisiroit dans ce rapport les deux rayons *OV*, *Ov*, les plus grands possibles.

PROBLÊME.

128. *Inscrire à un cercle donné un quelconque des polygones réguliers que l'on peut y inscrire en se servant de la règle et du compas.*

Solution. Divisez la circonférence en autant de parties égales que le polygone qu'on veut inscrire a de côtés (27, 29, 30, 31, 32, 38, 40, 41, 42, 53, 57, 60, 63), les points de division seront les sommets des angles du polygone régulier cherché, et les cordes des arcs en seront les côtés.

Démonstration. Tous les côtés étant égaux comme cordes d'arcs égaux, les angles qu'ils forment seront égaux, puisqu'ayant leur sommet à la circonférence, ils sont tous appuyés sur des arcs égaux (21. *liv.* 3). On a donc inscrit au cercle un polygone régulier d'autant de côtés que l'on vouloit (*déf.* 1. *liv.* 3).

129. Puisqu'avec trois points seulement pris hors de la circonférence, et six ouvertures de compas au plus (59), on peut la diviser en 240 parties égales (57), on pourra inscrire au cercle avec ces trois points et ces six ouvertures, autant de polygones réguliers qu'il y a

de nombres exactement diviseurs de 240 : or ces nombres sont : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240 ; on pourra donc, en omettant le diviseur 2, inscrire au cercle un polygone régulier de 3, de 4, de 5, de 6, de 8, de 10, etc., et enfin de 240 côtés.

130. Si le nombre des côtés du polygone que l'on veut inscrire se trouve être un de ceux dans lesquels on a divisé la circonférence, par les méthodes enseignées (27, 30, etc.), par exemple, le nombre 12, on divisera la circonférence en douze parties égales (31) ; les deux extrémités de chacune de ces divisions seront les sommets des angles du polygone qu'il étoit question d'inscrire, ou, ce qui est la même chose, les cordes de ces arcs seront les côtés du polygone.

Si le nombre des côtés du polygone à inscrire ne se trouve point précisément dans les problêmes du liv. II ; par exemple, si l'on veut inscrire un polygone de 60 côtés, on doublera, triplera, quadruplera, etc. ce nombre jusqu'à ce qu'on parvienne à avoir un de ceux exprimés dans les problêmes précédens : c'est ainsi qu'en doublant 60, nombre des côtés du polygone indiqué, on a 120. Or on a donné (42) le moyen de diviser la circonférence en 120 parties égales. Ces parties prises deux à deux fourniront 60 arcs égaux dont les cordes sont les côtés du polygone en question.

S'il avoit fallu tripler le nombre, par exemple si on eût voulu inscrire un polygone de 16 côtés, on auroit alors, comme au problême (38), divisé la circonférence en 48 parties, nombre triple de 16; on auroit pris ensuite trois de ces arcs pour en avoir un qui fût la seizième partie de la circonférence, et chacun de ces arcs égaux auroit eu pour corde un côté du polygone de 16 côtés.

PROBLÊME.

131. *Circonscrire un triangle équilatéral* (124) *à un cercle donné* BCDd [fig. 59.].

Solution. Soit fait au rayon AB de ce cercle $= BC = CD$, et à $BD = BL = DL = Dd = DN = dN = dM = BM$.

Les trois points L, M, N seront les sommets des angles du triangle équilatéral circonscrit au cercle.

Démonstration. Le triangle *B D d*, inscrit au cercle (29, 130), étant équilatéral, les triangles *D L B*, *N D d*, *d B M* auront leurs côtés égaux à ceux de ce triangle; donc leurs angles seront égaux (8. *liv.* 1); les trois angles *N D d*, *d D B*, *B D L* seront donc égaux aux trois angles du triangle inscrit, c'est-à-dire, à deux droits (32. *liv.* 1) : donc la ligne *N D L* sera droite (14. *liv.* 1.) : on démontreroit la même chose pour les deux lignes *L B M*, *N d M*; et comme chacune d'elles est double du côté *B D*, elles seront par conséquent égales entr'elles. Donc le triangle *L M N* est équilatéral; ensuite les angles *N D d*, *D L B* étant égaux, la droite *D d* sera parallèle à *L B* (29. *liv.* 1), ou à *L M*. Or les points *N*, *A*, *B* sont dans une même droite perpendiculaire à *D d* (13, 14). Donc *A B* est aussi perpendiculaire à *L M* (27. *liv.* 1) : donc *L M* est tangente au cercle (16. *liv.* 3). On démontreroit la même chose pour les deux lignes *N L*, *N M* : donc le triangle *N L M* est équilatéral et circonscrit au cercle (*déf.* 2. *liv.* 4).

PROBLÈME.

132. *Circonscrire un quarré à un cercle donné* [fig. 60].

Solution. Divisez la circonférence de ce cercle en quatre parties égales aux points *B*, *F*, *E*, *f* [27]; de ces points comme centres, et du rayon *A B*, décrivez des arcs qui se coupent en *R*, *S*, *T*, *V*, ces quatre derniers points seront les sommets des angles du quarré circonscrit au cercle.

Démonstration. Les angles *T B A*, *S B A* étant droits (100), la ligne *T S B* est une droite (14. *liv.* 1) perpendiculaire au diamètre *B E*, et par conséquent tangente au cercle (16. *liv.* 3): on démontreroit la même chose pour les autres lignes *T F V*, *V E R*, *R f S*. De plus, les triangles *BFT*, *B F A* ayant les côtés respectivement égaux, on aura l'angle $BTF = BAF$ (8. *liv.* 1), et par conséquent droit (27): la même chose se démontreroit pour les autres angles *V*, *R*, *S*: donc, etc.

PROBLÈME.

133. *Circonscrire à un cercle donné un pentagone régulier.*

Solution. Soit le cercle *B D E* [*fig.* 61], décrit avec le rayon *A B*; divisez sa circonférence en cinq parties égales (40) aux points *B*, *C*, *D*, *E*, *F*; d'un de ces points *C* comme centre, et du rayon CB décrivez la demi-circonférence BDP [64]; prenant pour centre le point E opposé à l'arc CB, et avec le rayon EC coupez l'arc BDP en p; des centres B, C, D, E, F et avec le rayon Pp, décrivez des arcs qui se coupent aux points b, c, d, e, f; ces points d'intersection seront les sommets des angles du pentagone circonscrit au cercle.

La démonstration eſt la même que celle du problême suivant.

PROBLÊME.

134. *Etant donnés les sommets des angles d'un polygone régulier quelconque inscrit au cercle, trouver les sommets des angles d'un polygone semblable circonscrit.*

Solution. Soient les points B, C, D, E [*fig.* 62] les sommets des angles du polygone inscrit : de l'un de ces points C pris pour centre, et d'un rayon égal à la distance CB, de deux d'entr'eux, décrivez la demi-circonférence BDP [64]; des centres B et C, et avec le rayon BD, décrivez deux arcs qui se coupent au point V (dans le cas du problême précédent, [*fig.* 61], le point V coïncide avec le point E) : de ce même rayon BD, et du point V comme centre, coupez la circonférence BDP en p; avec Pp pour rayon, et des centres B, C, D, E, etc., qui sont les sommets des angles du polygone inscrit, décrivez les arcs qui se coupent aux points b, c, d, e, etc.; ces points seront les sommets des angles du polygone régulier circonscrit.

Démonstration. On a : $pP.\,VC = (CD)^2$ [22], c'est-à-dire, $cC.\,BD = (BC)^2$; d'où (17. *liv.* 6) :

$$BD : BC :: BC : Cc :$$

mais $BC = CD$, et $Bc = cC$: donc les deux triangles isoscèles BCD, BcC auront leurs côtés proportionnels : donc (5. *liv.* 6) l'angle cCB sera égal à l'angle CBD; d'où il suit que les deux lignes cC, BD seront parallèles (28. *liv.* 1); on prouveroit de même que Cd est aussi parallèle à BD. Les points c, C, d seront donc dans la même ligne droite : mais de ce que $BC = CD$, il suit que le rayon AC est perpendiculaire à BD [14]; il le sera donc aussi à la droite cd (29. *liv.* 1) : donc cd est tangente à sa moitié en C (16. *liv.* 3); on démontreroit de même que $de = cd$ est tangente à sa moitié en D; ainsi des autres. Le nombre de ces lignes sera égal à celui des points *B*, *C*, *D*, *E*, etc. Donc, etc. (*déf.* 2. *liv.* 4).

PROBLÈME.

135. *Sur un côté donné* AE [fig. 1], *construire un triangle équilatéral.*

Solution. On trouvera le point *D* suivant la méthode indiquée (1); le triangle *A D E* sera le triangle cherché.

PROBLÈME.

136. *Sur un côté donné* AB [fig. 43], *construire un quarré.*

Solution. Les deux points *F*, *T* étant trouvés d'après la méthode prescrite (100), le quarré *A B T F* sera le quarré cherché.

Démonstration. *B T* étant égale et parallèle à *F A*, et par conséquent perpendiculaire à *A B* (100), la ligne *F T* sera aussi parallèle à *B A* (33. *liv.* 1); d'où aussi les angles *B T F*, *A F T* seront droits (27. *liv.* 1), et *A B T F* sera un quarré (*déf.* 32. *liv.* 1).

PROBLÈME.

137. *Sur un côté donné* AB [fig. 63], *construire un pentagone régulier.*

Solution I. Avec le rayon AB et du centre A, décrivez la circonférence $BCDEd$, et faites à $AB = BC = CD = DE = Ed$; faites encore à $BD = Ba = Ea$, et ensuite à $Aa = Db = db$; du centre B, et avec le rayon BA, décrivez l'arc indéfini ACL, dans lequel vous ferez à $Ab = AH = HK = KL$: pareillement, dans la circonférence BCD, faites à $Ab = BQ = QP = PN$. Des points L et N pris pour centres et du rayon AB, décrivez deux arcs qui se coupent en M; les points A, B, L, M, N seront les sommets des angles du pentagone régulier cherché.

Démonstration. L'angle CBF [*fig.* 61] du pentagone régulier $BCDEF$, a pour mesure la moitié de l'arc $CDEF$ (20. *liv.* 3); cet angle étant donc égal à trois cinquièmes de la circonférence, l'angle CBF du pentagone a pour mesure les trois dixièmes : or les arcs $AHKL$, $BQPN$, qui mesurent les angles ABL, BAN, valent chacun les trois dixièmes de la circonférence (41) : donc ces angles

$A B L$, $B A N$ sont ceux du pentagone régulier à construire sur $A B$; ensuite les trois côtés AB, BL, AN, côtés du pentagone, sont égaux entr'eux; donc, en comparant les points L, B, A, N de la figure 63, avec les points C, B, F, E de la figure 61, le triangle $L M N$ de la première figure, ayant les côtés respectivement égaux aux côtés du triangle $C D E$ de la seconde, ils auront aussi les angles égaux (8. *liv.* 1), et tout coïncidera parfaitement : donc, etc.

Solution II. Décrivez comme ci-dessus, du rayon $A B$ et du centre A, la circonférence $B D d$ [*fig.* 64]; faites-y à $A B = B C = C D = D E = E d$; à $B D = B a = E a$; et enfin, à $A a = D b = d b$; ensuite, avec le rayon $b E$, et du centre A, décrivez un arc qui passe par les points L et M; du centre B, et avec le même rayon $b E$, coupez cet arc au point M et la circonférence en N; enfin avec le même rayon, et du centre N, coupez l'arc $L M$ en L; les points A, B, L, M, N seront les sommets des angles du pentagone régulier.

Démonstration. On a (4. *liv.* 2):

$$(BE)^2 = (bE)^2 + (Bb)^2 + 2Bb.bE:$$

l'angle $B N E$ étant inscrit et appuyé sur le diamètre, on a (31. *liv.* 3, 47. *liv.* 1) :

$$(BE)^2 = (BN)^2 + (NE)^2:$$

en comparant les deux valeurs de $(BE)^2$, dans lesquelles $(bE)^2 = (BN)^2$, il résulte que :
$$(Bb)^2 + 2\,Bb\,.\,bE = (NE)^2 :$$
puis bE étant égal à $bA + AE = Ab + AB$, on aura :
$$(Bb)^2 + 2Bb\,.\,Ab + 2Bb\,.\,AB = (NE)^2 :$$
mais $2\,Bb\,.\,AB = 2(Ab)^2$ [46] ;
donc
$$(Bb)^2 + 2Bb\,.\,Ab + (Ab)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2 :$$
or, $(Bb)^2 + 2Bb\,.\,Ab + (Ab)^2 = (AB)^2$:
donc : $(AB)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2$:
NE sera donc le côté du pentagone inscrit au cercle BDd [50] (10. *liv.* 13). L'arc NE étant égal à deux dixièmes de la circonférence, l'arc BCN sera égal à trois dixièmes, et l'angle BAN sera l'angle du pentagone régulier. Substituant ensuite la droite BN aux deux côtés BA, AN du pentagone régulier, elle deviendra le côté du triangle isoscèle qui a pour base AB, et chacun des angles à la base sera double de l'angle au sommet (11. *liv.* 4) ; les points L et M seront donc aussi les sommets du pentagone régulier que l'on avoit à construire.

PROBLÊME.

138. *Construire un exagone régulier sur un côté donné* AB [fig. 65].

Solution. Du rayon AB et des points A et B, comme centres, soient décrits deux arcs qui se coupent au point O; avec le même rayon, et du centre O, soit décrit un cercle dans la circonférence duquel on fera à $AB = BC = CD = DE = EF$; l'exagone $ABCDEF$ sera l'exagone demandé.

Voyez pour la démonstration, la quinzième du *liv*. 4.

PROBLÊME.

139. *Sur un côté donné* AB [fig. 66], *construire un octogone régulier.*

Solution I. Des points A et B pris pour centres, et avec le rayon AB, décrivez les deux demi-circonférences $BCDE$, $ACde$ [64]; faites à $CE = Ea = Ba = A\alpha = e\alpha$; avec le rayon AB et du centre a, coupez l'arc DE au point H; avec le même rayon, et du centre α, coupez l'arc de au point h: encore avec le même rayon et des points H, h comme centres, décrivez deux arcs qui passent par les points G, g; avec le rayon Ba et des points a, α pris pour centres, coupez ces deux arcs en g, G; avec le rayon AB, et des centres G et g, soient décrits deux arcs qui passent par les points F et f; coupez ces deux arcs en

f, F avec le rayon $A\,a$, et des centres a, α; les points A, B, h, g, f, F, G, H seront les sommets de l'octogone régulier construit sur le côté $A\,B$.

Démonstration. Les côtés $A\,B$, $B\,h$, $h\,g$, $g\,f$, $A\,H$, $H\,G$, $G\,F$ sont tous égaux par construction. Maintenant, si l'on considère un octogone régulier inscrit au cercle, on trouvera que chacun de ses angles à la circonférence a pour base un arc égal aux $\frac{6}{8}$ de la circonférence, et par conséquent $\frac{3}{8}$ pour mesure (20. *liv.* 3); on a ensuite l'arc $B\,C\,H$ égal à $\frac{3}{8}$ (30) : donc l'angle $B\,A\,H$ est un angle de l'octogone, ainsi que l'angle $A\,B\,h$: ensuite $a\,A$, $\alpha\,B$ étant perpendiculaires à $A\,B$ [27], elles seront parallèles entr'elles (29. *liv.* 1) : donc la droite $H\,a$ qui fait un angle de 45° avec $a\,A$ (27), en fera encore un semblable avec la ligne $\alpha\,B$ (27. *liv.* 1); mais $h\,B\,\alpha$ est aussi de 45° : donc $a\,H$ est parallèle à $h\,B$ (28. *liv.* 1) : donc aussi $a\,h$ est égale et parallèle à $H\,B$ (33. *liv.* 1); d'où l'angle $h\,a\,H = h\,B\,H$ (34. *liv.* 1); or l'angle $h\,B\,H = h\,B\,E - H\,B\,E = h\,B\,E - \frac{1}{2}\,H\,A\,E$ (20. *liv.* 3), il aura donc pour mesure $\frac{3}{8} - \frac{1}{16}$, c'est-à-dire, $\frac{5}{16}$ de la circonférence : donc l'angle $B\,h\,a$ qui avec l'angle $h\,a\,H$ équivaut à deux droits (27. *liv.* 1), aura pour mesure $\frac{3}{16}$ de la circonférence. Ensuite les deux triangles $a h B$, $a h g$ ayant tous leurs côtés égaux entr'eux, l'angle $a h g = a h B$ (8. *liv.* 1); d'où l'angle total $g h B$ aura pour mesure $\frac{3}{8}$ de la circonférence, et sera angle de l'octogone, ainsi que l'angle AHG. L'angle $h g a$ sera encore égal à l'angle $h B a$, et les deux triangles $g f a$, $B A a$ ayant aussi les côtés égaux entre eux, l'angle $f g a$ sera égal à $A B a$ (8. *liv.* 1). L'angle $h g f$ sera donc composé de deux angles respectivement égaux aux deux qui composent l'angle $h B A$: ces deux angles seront donc égaux, et chacun d'eux sera par conséquent angle de l'octogone : il en sera de même pour l'angle $H G F$; les points f et F seront donc aussi sommets d'angles de l'octogone comme tous les autres.

Solution II. Avec le rayon AB et des points A et B pris pour centres, décrivez comme ci-dessus les deux demi-circonférences $B C D E$, $A C d e$; et ayant fait à $C E = E a = B a = A \alpha = e \alpha$, du rayon $A B$ et du centre a, décrivez un arc qui coupe l'arc $D E$ en H, et passe par le point F; avec le même rayon, et du centre α, décrivez encore un arc qui coupe l'arc $d e$ en h et passe par le point f; du rayon aA et du centre a, décrivez un arc qui passe par le point f; avec le même rayon et du centre α, décrivez un arc qui passe par le point F : enfin, avec le rayon AB et des centres H et F, h et f, décrivez des arcs qui se coupent aux points G et g.

Démonstration. D'après la démonstration de la première solution, les droites AB, $a\alpha$ étant parallèles et égales entr'elles, ainsi que les droites aA, αB, avec lesquelles elles forment des angles droits, si on fait, pour abréger $AB = 1$; on aura aussi $a\alpha = \alpha f = aF = 1$: on a ensuite $(Aa)^2 = 2 = (af)^2 = (aF)^2$: donc les angles $f\alpha a$, $Fa\alpha$ seront droits (48. *liv.* 1), et les points f, α, B dans la même droite (14. *liv.* 1), comme aussi les points F, a, A dans la même parallèle : ensuite de l'égalité de $f\alpha$, Fa, il résulte que fF sera aussi égale et parallèle à $\alpha a = 1$, et $Fa\alpha f$ sera un quarré. De plus, les triangles FGa, HGa ayant les côtés égaux entr'eux, ont aussi les angles égaux (8. *liv.* 1), et l'angle FGa est égal à GaH ; les deux droites GH, Fa seront donc parallèles, comme aussi FG, aH (33. *liv.* 1) : mais l'angle FaH extérieur au triangle aHA est égal aux deux angles intérieurs opposés aHA, aAH (32. *liv.* 1), c'est-à-dire, à trois angles demi-droits : donc on a l'angle $FaH = BAH$: donc aussi les angles opposés dans les parallélogrammes,

lélogrammes étant égaux (34. *liv.* 1), $FGH = BAH$; on a ensuite l'angle $AaH = aHG$: de plus, l'angle AHa est droit; donc aussi l'angle AHG vaut trois demi-droits : de même l'angle fFa étant droit, et l'angle aFG étant égal à aHG qui est demi-droit, l'angle fFG sera aussi égal à trois demi-droits : on démontre la même chose pour les angles en f, g et h: donc tous les côtés et tous les angles étant égaux, la figure sera un octogone régulier.

Si on quadruple les deux membres de l'équation (15) :

$$(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2,$$

qui appartient à la figure 3 ; on aura :

$$4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2;$$

c'est-à-dire, $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$; d'où résulte le théorême suivant pour tout rhombe quelconque : *le quarré d'une des diagonales du rhombe vaut quatre fois le quarré d'un de ses côtés, moins le quarré de l'autre diagonale* : d'où, dans le rhombe $FaHG$, on aura : $(aG)^2 = 4(Fa)^2 - (FH)^2$. Mais comme l'angle $FGH = HAB$, et que les côtés qui comprennent ces deux angles égaux sont aussi égaux, on a aussi : $FH = BH$ (4. *liv.* 1). On aura donc :

$$(aG)^2 = 4(AB)^2 - (BH)^2 = (BE)^2 - (BH)^2:$$

mais (31. *liv.* 3, et 47. *liv.* 1) :

$$(BE)^2 = (BH)^2 + (HE)^2 :$$

donc $(aG)^2 = (HE)^2$; d'où $aG = HE$.

Solution III. Après avoir, du centre A et du rayon AB [*fig.* 67], décrit la demi-circonférence $BCDE$ (64), et avoir fait à $BD = Ba = Ea$; du centre a et du rayon AB soit décrit un arc qui coupe l'arc DE en H, et passe par F; du centre a et du rayon aA soit décrit un arc qui passe par f; du centre a et du rayon aB soit décrit un arc qui passe par g; du centre a et du rayon BH, soit décrit un arc qui passe par h; du centre a et du rayon HE soit décrit un arc qui passe par G; soit fait à $AB = Bh = hg = gf = fF = FG$; on aura aussi $FG = GH$, etc.

Démonstration. Les triangles aAB, aBh, ahg, agf, etc. qui ont leur sommet en a, et leurs bases sur les côtés de la figure, ont tous leurs côtés respectivement égaux à ceux des triangles affectés des mêmes lettres dans la figure 66 (voyez les deux démonstrations précédentes) : donc ils auront aussi leurs angles égaux (8. *liv.* 1); et comme ils sont semblablement ordonnés, les angles de la figure 67, qui sont composés des angles de ces triangles pris deux à deux, seront aussi égaux aux angles de l'autre figure ; donc, etc.

Solution IV. Après avoir, du centre A et du rayon $A\,B$, décrit la demi-circonférence $B\,C\,D\,E$, en y faisant à $A\,B = B\,C = C\,D = D\,E$, et avoir fait à $B\,D = B\,a = E\,a$; ayant du centre a et du rayon $A\,B$ coupé la demi-circonférence en H, soient des centres E et A, avec le rayon EH, décrits deux arcs qui se coupent en P; du centre P, avec le même rayon $P\,A$, soit coupée la demi-circonférence en Q; des centres B et H, avec le rayon BQ, soient décrits deux arcs qui se coupent en O: maintenant soit décrit du centre O et du même rayon $O\,H$, un cercle qui passera par A; soit fait dans sa circonférence à $A\,B = B\,h = h\,g = g\,f = f\,F = F\,G$; les points A, B, h, g, f, etc. seront les sommets des angles de l'octogone.

Démonstration. Comme on a $Q\,P = A\,P = E\,P$, ainsi que $QA = A\,E = AB$, et que AB est sur le prolongement de $A\,E$ (15. *liv.* 6), on aura [22] :

$$B\,Q \,.\, A\,P = (A\,Q)^2 :$$

d'où (17. *liv.* 6) : $A\,P : A\,Q :: A\,Q : B\,Q$;
ou bien : $H\,E : A\,E :: A\,B : B\,O$.

Mais $H\,E$ est un côté de l'octogone inscrit au cercle qui a pour rayon AE: donc aussi $A\,B$ sera le côté de l'octogone inscrit au cercle qui a pour rayon $B\,O$.

PROBLÈME.

140. *Sur un côté donné* AB [fig. 69.] *construire un décagone régulier.*

Solution. Du centre A et du rayon AB, soit décrit le cercle BDd; soit fait dans sa circonférence à $AB = BC = CD = DE = Ed$; soit fait à $BD = Ba = Ea$; soit fait ensuite à $Aa = Db = db$. Maintenant des centres A et B avec le rayon bE, soient décrits deux arcs qui se coupent en V; du centre V et du même rayon bE, soit décrit le cercle $BLMNOPQRSA$, et soit fait à $AB = BL = LM = MN = NO = OP = PQ = QR = RS$; le point S sera dans la section des deux circonférences, et les points A, B, L, M, etc. seront les sommets des dix angles du décagone régulier cherché.

Démonstration. La ligne bE est un côté du triangle isoscèle qui, ayant pour base AB, a chacun des angles à la base double de l'angle au sommet (137). Donc, dans le triangle VAB, l'angle BVA sera égal à un cinquième de deux angles droits (32. *liv.* 1); l'arc BA qui le mesure sera donc égal à un dixième de la circonférence, ainsi que les autres arcs BL, LM, MN: donc le polygone $ABLMNOPQRS$ sera un décagone régulier inscrit au cercle qui a le point *V* pour centre, et construit sur le côté *AB*.

PROBLÊME.

141. *Sur un côté donné* AB [fig. 69], *construire un polygone régulier quelconque, de ceux qu'on peut inscrire au cercle* (128).

Solution. Du rayon *AB*, soit décrit un cercle *BDd*; soit inscrit à ce cercle un polygone régulier semblable à celui qu'on veut construire sur le côté *AB*, c'est-à-dire, d'un égal nombre de côtés (128), et soit *Bl* un côté de ce polygone inscrit; soit ensuite cherchée une troisième proportionnelle à ce côté *Bl* et au rayon *AB* (87, 89, 90, 91, 92); avec cette ligne prise pour rayon, et des centres *A* et *B*, soient décrits deux arcs qui se coupent en *V*; du point *V* comme centre, et du même rayon *VA*, soit décrit un cercle *ABLMN*, etc., et soit fait à $AB = BL = LM = MN$, etc.; les points *A*, *B*, *L*, *M*, *N*, etc. seront les sommets des angles du polygone cherché.

Démonstration. Les côtés du triangle *BAl* étant proportionnels à ceux du triangle *BVA*, on aura l'angle $BAl = BVA$ (5. *liv.* 6) : donc les arcs *Bl*, *BA* qui le mesurent, seront des portions égales de leurs circonférences; donc, etc.

PROBLÊME.

142. *Construire un quarré sur une diagonale* AB *donnée* [fig. 70].

Solution. Du centre A et du rayon AB, soit décrit l'arc $BCDE$; du centre B, avec le même rayon, soit décrit l'arc indéfini CP, et soit fait à $BC = CD = DE$; soit fait ensuite à $BD = Ba = Ea$. Maintenant, du centre E et du rayon Aa, soit coupé l'arc CP en P; des centres A et B, et du rayon AP, soient décrits deux arcs qui se coupent en L et M; $ALBM$ sera le quarré cherché.

Démonstration. Si on suppose pour abréger $AB = 1$, on aura :

$$AP = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ [104] = AL = BL:$$

d'où : $(AL)^2 = (BL)^2 = \frac{1}{2}$,

et $(AL)^2 + (BL)^2 = 1 = (AB)^2$.

Donc l'angle BLA est droit (48. *liv.* 1), et les deux angles LBA, LAB égaux entr'eux valent chacun la moitié d'un angle droit (5, et 32. *liv.* 1). On démontrera de même que l'angle BMA est droit, et que les angles MBA, MAB valent chacun la moitié d'un angle droit : donc les angles MBL, MAL seront droits, et $ALBM$ sera le quarré cherché.