GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.

LIVRE HUITIÈME.

DE LA CONSTRUCTION, DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION DES ANGLES, ET DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

113. OBSERVATION. Quand nous dirons : *construire un angle* a b c [*fig.* 51] *avec le compas*, nous entendrons : *trouver avec le compas trois points* a, b, c, *ou un de ces points étant donnés, trouver les autres, de manière qu'en tirant ensuite par deux de ces points* a, b, *une droite, et par un de ces deux points* b, *et le troisième* c, *une autre droite, on ait un angle* a b c *aussi grand qu'on veut.* Quoique l'angle *a b c* ne soit pas réellement construit, les droites *ab*, *bc* n'étant pas encore tirées, ce qui ne peut se faire avec le compas seulement, néanmoins nous adopterons la première phrase, en y attachant le sens dont nous sommes convenus.

PROBLÊME.

114. *Etant donné un angle* ABC *au moyen des trois points* A, B, C, *et deux autres points* b *et* a, *trouver un point* c *tel que l'angle* abc *soit égal à* ABC.

Solution. Cherchez (93) une quatrième proportionnelle aux trois distances *AB*, *ab*, *BC*; avec cette ligne prise pour rayon, et du centre *b*, décrivez un arc qui passe par le point *c*; cherchez de même une quatrième proportionnelle aux trois distances *AB*, *ab*, *AC*, et avec cette ligne prise pour rayon, du point *a* pris pour centre, décrivez un autre arc qui coupe le premier en *c*, on aura l'angle *abc* = *ABC*.

Démonstration. Puisque les deux triangles *ABC*, *abc* ont leurs côtés proportionnels, les angles opposés aux côtés proportionnels seront égaux (5. *liv.* 6).

115. La solution du problême précédent [114] servira donc aussi à résoudre le problême suivant : *Etant donnés trois points* A, B, C [*fig.* 51], *qui forment les sommets des trois angles d'un triangle, et deux autres* a *et* b, *et qui soient les sommets de deux*

angles d'un autre triangle, trouver un troisième point c, *de manière que le triangle* a b c *soit semblable au triangle* A B C.

PROBLÈME.

116. *Doubler, tripler, quadrupler, etc. un angle donné* B A C (113).

Solution. Du centre *A* [*fig.* 52], et avec les côtés *A B*, *A C*, pris pour rayons, décrivez deux arcs indéfinis *B D F*, *C E*;
faites à *C B* = *C D*, l'angle *B A D* sera double de *B A C*;
faites à *C D* = *D E*, l'angle *B A E* sera triple de *B A C*;
faites à *D E* = *E F*, l'angle *B A F* sera quadruple de *B A C*, etc.
Pour quadrupler l'angle proposé, on pourroit encore faire à *B D* = *D F*.

Démonstration. Les triangles *B A C*, *C A D*, *D A E*, *E A F* ayant leurs côtés respectivement égaux, les angles *B A C*, *C A D*, *D A E*, *E A F*, etc. (8. *liv.* 1), seront égaux. Donc, etc. : d'où, l'angle *B A D* étant égal à *D A F*, on aura aussi : *B D* = *D F* (4. *liv.* 1).

PROBLÈME.

117. *Reconnoître si l'angle* B A G

donné au moyen des trois points B, A, G *est égal à la moitié d'un angle droit.*

Solution. Du rayon AB [*fig.* 53], et du centre A, décrivez la demi-circonférence BFE [64]; faites à $GB = GF$ [10]. Si l'on a $BF = FE$, l'angle BAG sera égal à la moitié d'un angle droit; si BF est plus petit ou plus grand que FE, l'angle BAG sera plus petit ou plus grand que la moitié d'un angle droit.

Démonstration. Puisque l'angle BAF est double de l'angle BAG [116]; si l'angle BAG est égal à la moitié d'un angle droit, l'angle BAF sera droit, et par conséquent l'on aura $BF = FE$ [83]. Mais si BAG est moindre ou plus grand que la moitié d'un angle droit, BAF sera moindre ou plus grand qu'un angle droit, et par conséquent BF plus petit ou plus grand que FE (24. *liv.* 1).

PROBLÈME.

118. *Diviser en deux parties égales l'angle* B A C *donné au moyen des trois points* B, A, C *seulement, le point* A *n'étant pas pris à la même distance du point* B *que du point* C.

Solution. Du centre *A* [*fig.* 54], et du rayon *AB*, décrivez l'arc *BMD*; faites à $CB = CD$; divisez l'arc *BMD* en deux parties égales au point *M* [60]; divisez l'arc *BN* en deux parties égales en *N*; l'angle *BAN* sera la moitié de l'angle *BAC*.

Démonstration. L'angle *BAD* étant double de *BAC* [116], et double aussi de *BAM*, (33. *liv*. 6), l'angle *BAC* sera le même que *BAM*; mais l'angle *BAN* est la moitié de *BAM*: donc aussi *BAN* sera la moitié de *BAC*.

PROBLÈME.

119. *Etant donné l'arc* BC [fig. 55] *décrit du point* A *pris pour centre, en trouver le sinus, le cosinus, la tangente et la sécante.*

Solution. Dans la circonférence décrite avec le rayon *AB*, faites à $BC = Bc$; divisez en deux parties égales la corde *Cc* au point *M* [66]; *CM* sera le sinus et *MA* le cosinus de l'arc donné.

Du point *M* pris pour centre, et du rayon *MA*, décrivez un arc qui coupe, s'il est possible, la circonférence en *D* et en *d*; déterminez la demi-circonférence *dD*δ [64]; prolongez *BA* de *B* en *V*, en faisant *BV*

$= BA$: des centres A et V, et du rayon $D\delta$, décrivez deux arcs qui se coupent en S, BS sera la tangente, et SA la sécante.

Démonstration. La ligne BA coupe au point M la corde Cc en deux parties égales, et à angles droits [14] : donc CM est le sinus, et MA le cosinus de l'arc BC.

SB est perpendiculaire à AB [83] ; $D\delta$ est troisième proportionnelle aux deux lignes AM, AC [87] : il en sera de même de AS qui est égal à $D\delta$. Donc, dans les deux triangles rectangles AMC, ABS, on a la proportion : $AM : AC :: AB : AS$,

et *invertendo* (4. *liv*. 5) :

$$AC : AM :: AS : AB.$$

On tire de-là (35. *liv*. 5) :

$$(AC)^2 : (AM)^2 :: (AS)^2 : (AB)^2 ;$$

et en substituant pour $(AC)^2$ et $(AS)^2$ leurs valeurs tirées de la 47.e proposition du *liv*. 1, on aura :

$$(AM)^2 + (MC)^2 : (AM)^2 :: (AB)^2 + (BS)^2 : (AB)^2.$$

D'où (17 *liv*. 5) :

$$(MC)^2 : (AM)^2 :: (BS)^2 : (AB)^2 ;$$

et (34. *liv*. 5).

$$MC : AM :: BS : AB :$$

donc, les côtés MC, BS seront aussi proportionnels : donc l'angle MCA sera le même que

B S A (5. *liv.* 6) : donc les points *A*, *C*, *S* seront dans la même droite, et *B S* sera la tangente, et *A S* la secante de l'arc *B C*.

Si le cercle décrit du centre *M* et du rayon *M A* ne coupoit pas la circonférence, ou la coupoit sous des angles trop aigus, il faudroit avoir recours aux moyens indiqués (89 ou 90 et 91).

Autre Solution pour trouver la tangente et la sécante.

Décrivez [64] la demi-circonférence *B C E* [*fig.* 56]; du rayon *B C* et du centre *E*, coupez-la au point *Q*; du rayon *C Q* et des centres *A* et *B*, décrivez deux arcs indéfinis qui se coupent en *V*; avec le même rayon *C Q* et du centre *V*, coupez la circonférence en *e*; du rayon *E e* et des centres *A* et *B*, décrivez deux arcs qui se coupent en *m*; du même rayon *E e* et du centre *m*, décrivez la demi-circonférence *A B S* [64], *S B* sera la tangente et *S A* la sécante de l'arc *B C*.

Démonstration. Si l'arc *B C F* est égal au quart de la circonférence $= F E$; comme on a par construction $B C = Q E$, on aura aussi $C F = F Q$. On sait de plus, par les définitions trigonométriques, que le sinus de l'arc *C F* est le même que le cosinus de l'arc *B C*, et que la corde de l'arc CFQ double de l'arc CF, est double du sinus de l'arc CF ou du cosinus de l'arc BC : cette corde est égale à $CQ = AV$; on a de plus [22] :

$$AV . Ee = (AB)^2 :$$

la ligne AmS [64] étant droite $= 2 Ee$, et $aV = 2 \cos. BC$; on aura :

$2 Ee . \cos. BC = (AB)^2 = AS . \cos. BC$: donc (17. *liv.* 6) :

$$\cos. BC : AB :: AB : AS;$$

donc AS sera troisième proportionnelle au cosinus et au rayon, et par conséquent égale à la sécante, suivant les démonstrations trigonométriques. De plus, l'angle ABS étant droit [31. *liv.* 3], la sécante AS sera déterminée de position, et par conséquent BS sera la tangente.

PROBLÊME.

120. *Etant donné le sinus* mn *d'un arc d'un rayon donné* AB, *trouver cet arc.*

Solution. Décrivez [*fig.* 57] avec le rayon AB, le cercle CcK; doublez mn [64]; d'un rayon $= 2 mn$, et d'un point quelconque C de la circonférence, décrivez un arc qui la coupe en c : divisez l'arc Cc en deux parties égales au point B [60]; BC sera l'arc cherché.

Démonstration. Le sinus de l'arc $B\,C$, d'après les définitions trigonométriques, est la moitié de la corde double de $B\,C$: donc, etc.

PROBLÈME.

121. *Etant donné le cosinus* ma *d'un arc d'un rayon donné* AB, *trouver cet arc.*

Solution. Décrivez le cercle $C\,c\,K$ [*fig.* 57] avec le rayon $A\,B$, doublez $m\,a$ [64] : d'un point quelconque c de la circonférence pris pour centre, et d'un rayon $= 2\,m\,a$, coupez la circonférence au point K; déterminez la demi-circonférence $K\,c\,C$ [64]; divisez en deux parties égales l'arc $C\,c$ au point B [60]; $B\,C$ sera l'arc cherché.

Démonstration. Tirez l'autre corde $C\,c$, elle sera divisée au point M en deux parties égales et à angles droits par le rayon $A\,B$ [14], Mais l'angle $C\,c\,K$ étant inscrit et appuyé sur le diamètre, est aussi droit (31. *liv.* 3) : donc les deux triangles $C\,M\,A$, $C\,c\,K$, qui ont un angle commun en C, et chacun un angle droit, sont équiangles entr'eux (32. *liv.* 1) : donc on a (4. *liv.* 6) : $C\,M : C\,c :: M\,A : c\,K$: mais $C\,M$ est la moitié de $C\,c$; donc $M\,A = \frac{1}{2}\,c\,K = m\,a$; de plus, $M\,A$ est le cosinus de l'arc $B\,C$; donc, etc.

PROBLÊME.

122. *Etant donnée la tangente* s b *d'un arc d'un rayon donné* AB [fig. 55], *trouver cet arc.*

Solution. Décrivez avec le rayon *A B* le cercle *B C δ*; au point *B* élevez sur *A B* une perpendiculaire *B S* = *b s* [76]; trouvez [111] le point *C* où *S A* coupe la circonférence; *B C* sera l'arc cherché.

Cette solution n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÊME.

123. *Etant donnée* [fig. 55] *la sécante* s a *d'un arc d'un rayon donné* AB, *trouver cet arc.*

Solution. Décrivez avec le rayon *A B* la circonférence *B C δ*; sur *A B* portez *B V* = *A B* [64]; puis, des centres *A* et *V*, et du rayon *s a*, décrivez deux arcs qui se coupent en *S*; trouvez [111] le point *C* où la ligne *S A* coupe la circonférence, *B C* sera l'arc chérché.

Démonstration. La ligne *S B* sera perpendiculaire à *B A* [83] : donc elle sera la tangente de l'arc *B C*, et par conséquent *S A* en sera la sécante.