GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.

LIVRE SEPTIÈME.

DE L'INTERSECTION DES LIGNES DROITES AVEC LES ARCS DE CERCLE ET ENTRE ELLES.

PROBLÈME.

110. *ETANT donnés deux points* L *et* M *d'une droite* (fig. 46) , *et le centre* A *avec le rayon* AB *d'un arc* BCD , *trouver les deux points* P *et* Q *auxquels la ligne* LM *coupe ledit arc , si toutefois elle le coupe.*

Solution. Des points *L* et *M* donnés sur la droite , pris pour centres , et avec leurs distances respectives *MA* , *LA* du centre donné , prises pour rayons , soient décrits deux arcs qui se coupent en *V*; du centre *V* et du rayon donné *A B*, soit décrit un arc indéfini *EFG*; si cet arc coupe l'arc donné en *P* et *Q*, ces deux points seront les points cherchés ; s'il ne le coupoit pas , la droite *L M* n'en couperoit pas moins l'arc donné.

Démonstration. Les quatre distances *AP*, *A Q*, *V P*, *V Q* étant égales entr'elles, et les deux autres *A M*, *VM* aussi égales entr'elles, les trois points *P*, *M*, *Q* seront dans la même droite (13). On démontre de la même manière que les trois points *Q*, *P*, *L* sont dans la même ligne droite : donc la droite *L M* passe par les points *P* et *Q*, quand ces points d'intersection s'y trouvent.

Si le cercle *E F G* [*fig.* 47], décrit du centre *V* et du rayon *A B*, ne coupoit pas le cercle *B C D*, *L M* ne couperoit pas ce même cercle. En effet, si on conçoit la droite *V A* qui coupe les cercles en *C* et *F*, *C F* étant divisée par moitié en *m*, on aura $Vm = mA$. Donc *L M* coupera perpendiculairement *VA* en *m* [14] hors du cercle *B C D*; si on prend un autre point quelconque *P* sur la droite *L M*, dans le triangle rectangle *P m A*, on aura le côté *P A* plus grand que *mA*, parce qu'il est opposé à un plus grand angle (32, et 18. *liv.* 1). Donc le point *P* sera beaucoup plus hors du cercle que le point *m* : donc la droite *L M* ne coupera dans aucun point le cercle *B C D*.

PROBLÊME.

111. *Etant donné* [fig. 48.] *un arc* BCD *décrit du centre* A, *trouver les deux points où la circonférence est coupée par la droite qui passe par* A *et par un autre point donné* L.

Solution. Du centre L et d'un rayon arbitraire LP, soit décrit un arc qui coupe l'arc BCD en P et en Q; soit partagé l'arc PQ en deux parties égales au point m (60); soit déterminée la demi-circonférence mDn (64); les points m et n seront les deux points cherchés.

Démonstration. Les trois points A, m et L étant à la même distance des points P et Q, seront dans la même ligne droite (13). Mais la droite mA contient aussi le point n, extrémité du diamètre mn (15. *liv.* 4) : donc, etc.

PROBLÊME.

112. *Etant donnés deux points* A, B *d'une droite* [fig. 49 et 50.], *et deux points* C, D *d'une autre droite, trouver le point* S *où elles se coupent.*

Solution. De deux points d'une des deux droites, par exemple, des points A et B pris pour centres, et avec les distances respectives AC, AD de ces points, et BC, BD des deux points C, D de l'autre droite, prises pour rayons, soient décrits quatre arcs, dont deux se coupent aux points C et c, et les deux autres aux points D et d.

Soit trouvé le quatrième point δ du parallélogramme $CDd\delta$, en faisant à $Dd = C\delta$, et à $DC = d\delta$ (11).

Soit trouvée la quatrième proportionnelle aux trois lignes $c\delta$, CD, Cc.

Avec cette distance prise pour rayon et des centres C et c, soient décrits deux arcs qui se coupent en S; le point S sera celui de l'intersection des deux droites AB, CD.

Démonstration. Les droites AB, Cc seront perpendiculaires l'une à l'autre (13, 14), ainsi que AS, Cc : donc le point S sera dans la même ligne AB; puis AB ou AS étant aussi perpendiculaire à Dd [13, 14], la même ligne Dd sera parallèle à Cc (29. *liv.* 1). Mais à cause des côtés égaux entre eux dans les deux triangles $dC\delta$, dCD, on a les angles $dC\delta$, CdD égaux (8. *liv.* 1).

Donc

Donc les deux lignes $C\delta$, Dd sont aussi parallèles (28. *liv.* 1) : donc les points c, C, δ sont dans la même droite. Maintenant, à cause des deux côtés égaux dans les deux triangles CBA, cBA, les angles CBA, cBA seront égaux (8. *liv.* 1) ; par la même raison, on trouvera les angles ABD, ABd égaux dans les triangles ABD, ABd : donc, dans la figure 49, l'angle cBd, qui est la somme des deux angles cBA, ABd, sera égal à l'angle CBD, somme des deux angles CBA, ABD. Dans la figure 50, l'angle cBd, qui est la différence des deux angles ABd, cBA, sera aussi égal à l'angle CBD, qui est la différence des deux angles ABD, CBA : donc pour les deux figures dans les triangles cBd, CBD, qui ont deux côtés et l'angle compris égaux, le troisième côté cd sera égal au troisième côté CD (4. *liv.* 1). Mais $CD = d\delta$: donc le triangle $cd\delta$ est isoscèle ; de plus, le triangle cCS étant aussi isoscèle, on a la proportion :

$$c\delta : CD \text{ ou } d\delta :: Cc : CS ;$$

d'où vient encore :

$$c\delta : cd :: cC : cS.$$

Donc les deux triangles $c\delta d$, cCS ont les angles égaux entr'eux (5. *liv.* 6); d'où l'angle $c\delta d$ étant égal à l'angle cCS, CS sera parallèle à δd (29. *liv.* 1). Or CD est aussi parallèle à δd: donc le point S sera sur cette ligne: donc, etc.