GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.

LIVRE SIXIÈME.

DES RACINES.

PROBLÊME.

100. TROUVER *facilement les racines des nombres entiers, depuis un jusqu'à dix, en prenant pour unité la distance* AB (fig. 43).

Solution. Du rayon AB, décrivez le cercle BDd; faites à $AB=BC=CD=DE=Ed=dc$; des points B et E pris pour centre, et du rayon BD, décrivez les arcs de cercle qui se coupent en a et ; du même rayon BD et des centres D et d, décrivez des arcs de cercles qui se coupent au point V. Du rayon Aa, et du centre B, coupez la circonférence au point F; des centres R et F et du rayon AB, décrivez deux arcs de cercle qui se coupent au point T; on aura :

$AB = \sqrt{1}$	$aV = \sqrt{6}$
$Aa = \sqrt{2}$	$CV = \sqrt{7}$
$BD = \sqrt{3}$	$a\alpha = \sqrt{8}$
$BE = \sqrt{4}$	$BV = \sqrt{9}$
$ET = \sqrt{5}$	$TV = \sqrt{10}$.

Démonstration. On a prouvé [27], que $(Aa)^2 = 2$; donc $Aa = \sqrt{2}$. On sait aussi [2] que $BD = \sqrt{3}$; on a ensuite $BE = 2 = \sqrt{4}$.

Les triangles BTA, TAF, ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $BTA = TAF$ (8. *liv.* 1), et par conséquent BT parallèle à FA (28. *liv.* 1) : donc BT sera perpendiculaire sur BA, de même que FA [27] (27 *liv.* 1) : de plus, les points A et E étant à la même distance des points D et d, ainsi que les points B et V, les quatre points B, A, E, V, seront dans la même droite [13], et on aura $EV = BA$ [14]. On aura donc :

$$(ET)^2 = (TB)^2 + (BE)^2 \text{ (47. liv. 1)}$$
$$= (AB)^2 + 4(AB)^2 = 5.$$

d'où : $ET = \sqrt{5}$.

De même $(aV)^2 = (Aa)^2 + (AV)^2$.

et comme $EV = BA$, on aura :

$$AV = BE = 2AB;$$

d'où : $(AV)^2 = 4(AB)^2 = 4$.

On a de plus $(Aa)^2 = 2$ [27]; donc $(aV)^2 = 6$, et $aV = \sqrt{6}$. Comparant ensuite les points C, B, c, A, V avec les points A, p, B, P, Q de la figure 3, et substituant dans l'équation :

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ . PQ \text{ [18]};$$

on aura :

$$(CV)^2 = CB)^2 + BV . AV = 1 + 3 . 2 = 7.$$

d'où : $CV = \sqrt{7}$; et comme $Aa = A\alpha$ [14], on aura :

$$(a\alpha)^2 = 4(Aa)^2 = 8.$$

d'où : $a\alpha = \sqrt{8}$. On a ensuite $BV = 3 = \sqrt{9}$.
Enfin on a :

$$(TV)^2 = (TB)^2 + (BV)^2 = 1 + 9 = 10;$$

donc $TV = \sqrt{10}$.

PROBLÈME.

101. *Par le moyen des racines trouvées dans le problême précédent, trouver* (fig. 44) *les autres racines des nombres entiers, depuis 10 jusqu'à 36.*

Solution. Soit soustrait le nombre dont on veut avoir la racine du nombre quarré immédiatement plus grand, qui sera, ou 16, ou 25, ou 36; avec la racine du reste que l'on trouvera [100], prise pour rayon, et du centre A, soit décrite la demi-circonférence QLR [64]; avec la racine du nombre quarré immédiatement plus grand, prise pour rayon (on la trouvera par la méthode du n.º 65), et des centres Q et R, soient décrits deux arcs qui se coupent en P; la ligne AP sera la racine cherchée.

Par exemple, si on veut la racine de 29, on aura $36 - 29 = 7$; du rayon $CV = \sqrt{7}$ [100], après avoir décrit la demi-circonférence QLR, soient des centres Q et R, et d'un rayon $= 6$, tracés deux arcs qui se coupent en P, on aura $AP = \sqrt{29}$.

Démonstration. L'angle PAQ étant droit [83], on aura :

$(PQ)^2 = (AQ)^2 + (AP)^2$ (47. *liv.* 1) :

d'où :

$$(PQ)^2 - (AQ)^2 = (AP)^2.$$

Maintenant supposant $(PQ)^2 = 36$, et égalant successivement $(AQ)^2$ aux nombres entiers compris depuis 1 jusqu'à 10, $(AP)^2$ sera successivement égal aux quarrés compris depuis 36 jusqu'à 25. Donc on aura successivement pour AP les racines de tous ces nombres. Mais la racine de 25 est 5 [65] : donc supposant $(PQ)^2 = 25$, on aura de la même manière les racines depuis 25 jusqu'à 16; et faisant $(PQ)^2 = 16$, on aura les autres racines depuis 16 jusqu'à 10.

Dans l'exemple que nous avons pris, on aura : $(PQ)^2 - (AQ)^2 = 36 - 7 = (AP)^2 = 29$: d'où $AP = \sqrt{29}$.

PROBLÈME.

102. *Trouver les racines de tous les nombres entiers.*

Solution. Il est clair qu'en employant la même méthode (101), on peut, avec les racines que l'on a déjà trouvées, avoir les autres racines des nombres supérieurs, et avec celles-ci continuer ainsi à l'infini. Nous avons donc déjà le moyen d'obtenir les racines de tous les nombres entiers.

PROBLÈME.

103. *Trouver la racine d'un nombre fractionnaire quelconque.*

Solution. Trouvez la racine du dénominateur (102), puis celle du numérateur, et faites cette proportion :

La première racine est à la seconde, comme l'unité est à une quatrième proportionnelle (93) ; ce quatrième terme sera la racine cherchée.

Démonstration. Soit en effet d le dénominateur, et n le numérateur ; si on fait cette proportion :

$\sqrt{d} : \sqrt{n} :: 1 :$ à une 4.e proportionnelle $= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}}$.

Mais $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{n}{d}}$: donc, etc.

PROBLÊME.

104. *Trouver facilement* (fig. 45) *la moitié des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 25.*

Solution. Du rayon $AB = 1$, et du centre A, soit décrit le cercle BDd, et dans sa circonférence soit fait à $AB = BC = CD = DE = Ed$.

Du centre B et du rayon BD, soit décrit un arc qui passe par les points a, N, D, d, n, α.

Du même rayon et du centre E, soit décrit un arc qui passe par les points a, M, C, m, α.

Du rayon Aa et du centre B, soit décrit un arc qui passe par les points M, F, Q, q, m.

Du même rayon et du centre E, soit décrit un arc qui passe par les points N, F, P, p, n.

Du rayon AB et du centre B, soit décrit un arc qui passe par les points P et p.

Du même rayon et du centre E, soit décrit un arc qui passe par Q et q.

Du même rayon et du centre P, soit décrit un arc qui passe par R, et coupe la circonférence en S; du centre p, soit décrit un autre arc qui coupe le premier en R, et la circonférence en s.

Du même rayon et des centres Q et q, soient décrits deux arcs qui se coupent en T, et coupent la circonférence en O et o.

Du même rayon et du centre α, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en g; du centre R, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en L et l; des centres O et o, soient décrits deux arcs qui se coupent en H; des centres H et T, soient décrits deux arcs qui se coupent en V et v.

on aura :

$RA = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$HF = \frac{1}{2}\sqrt{13}$
$RQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$EO = \frac{1}{2}\sqrt{14}$
$RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$Ll = \frac{1}{2}\sqrt{15}$
$RP = \frac{1}{2}\sqrt{4}$	$BE = \frac{1}{2}\sqrt{16}$
$RF = \frac{1}{2}\sqrt{5}$	$Ha = \frac{1}{2}\sqrt{17}$
$AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}$	$HN = \frac{1}{2}\sqrt{18}$
$Qq = \frac{1}{2}\sqrt{7}$	$HD = \frac{1}{2}\sqrt{19}$
$Aa = \frac{1}{2}\sqrt{8}$	$ag = \frac{1}{2}\sqrt{20}$
$BR = \frac{1}{2}\sqrt{9}$	$dV = \frac{1}{2}\sqrt{21}$
$BL = \frac{1}{2}\sqrt{10}$	$HS = \frac{1}{2}\sqrt{22}$
$pS = \frac{1}{2}\sqrt{11}$	$Mm = \frac{1}{2}\sqrt{23}$
$BD = \frac{1}{2}\sqrt{12}$	$Mn = \frac{1}{2}\sqrt{24}$
	$HE = \frac{1}{2}\sqrt{25}$.

Démonstration. Si on compare les points P, B, p, R, E de cette figure avec les points A, p, B, P, Q de la fig. 3 par le moyen de l'équation du n.° 18 :

$$(AQ)^2=(Ap)^2+pQ\cdot PQ);$$

on aura pour cette figure :

$$(PE)^2=(PB)^2+BE\,.\,RE;$$

ou :

$$(Aa)^2=(AB)^2+2AB\,.\,RE;$$

ou bien (27) :

$$2=1+2RE;$$

d'où on tire $RE=\frac{1}{2}AE$;

et puisque le point R est sur la même droite BAE [13], on aura aussi :

$$RA=\tfrac{1}{2}AE=\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{1}.$$

Le point T étant au milieu de AB, par la même raison que le point R est au milieu de AE, ce qu'on a démontré, on aura $AT=RE$; d'où on voit, en comparant les points Q, T, q, E, R de cette fig. 45, avec les points A, q, B, Q, P de la fig. 3, le point A de la fig. 45 sera le point p de la fig. 3. Donc de l'équation du n.° 16 :

$$(AQ)^2=(AP)^2+(PQ)^2+Pp\,.\,PQ$$

on tirera pour cette fig. 45, l'équation :

$$(QE)^2=(RQ)^2+(RE)^2+AR\,.\,RE;$$

et substituant les valeurs numériques :

$$1=(RQ)^2+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4};$$

d'où

d'où on tire :

$$(RQ)^2 = \tfrac{1}{4} \cdot 2 \,;\; RQ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Comparant les points D, A, d, E de la fig. 45, avec les points P, A, p, B de la fig. 3, il restera démontré (14) que les deux droites AE, Dd se coupent réciproquement en deux parties égales. Mais AE est coupée en deux parties égales au point R : donc Dd l'est aussi. Mais $Dd = BD = \sqrt{3}$ [2] : donc $RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Qu'on se rappelle que DRd est aussi perpendiculaire à AE (14). On a ensuite $RP = 1$: donc $RP = \frac{1}{2}\sqrt{4}$.

L'angle FAR étant droit (27), on a :

$$(RF)^2 = (FA)^2 + (AR)^2 = 1 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}\,;$$

donc : $RF = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

La base BAE du triangle BME étant coupée au milieu par la droite AM, on aura (26) :

$$(BM)^2 + (EM)^2 = 2(AB)^2 + 2(AM)^2\,;$$

c'est-à-dire,

$$(Aa)^2 + (BD)^2 = 2(AB)^2 + 2(AM)^2\,;$$

ou bien :

$$2 + 3 = 2 + 2(AM)^2\,;$$

d'où : $6 = 4(AM)^2$, $\sqrt{6} = 2AM$, $AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

De la comparaison que l'on vient de faire des points Q, T, q, E, R, A, de la figure 45, avec les points A, q, B, Q. P, p de la fig. 3, il résulte (13) qu'on a dans la figure 45, $AQ = Aq = QR = Rq$. On verra par les mêmes raisons que les droites AP, Ap, PT, Tp sont égales entr'elles, et aux quatre lignes AQ, Aq, QR, Rq. Donc les deux triangles isoscèles PTA, QAR ayant tous les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $PAT = QRA$ (8. *liv.* 1) ; et comme la ligne TAR est droite, PA sera parallèle à QR (29. *liv.* 1); d'où on voit aussi que PQ est égale et parallèle à AR (33. *liv.* 1).

Mais Qq est perpendiculaire à AR (14) ; donc elle l'est aussi à PQ (27. *liv.* 1). Ensuite dans les triangles PAT, RAq, les deux angles PAT, RAq seront égaux (8. *liv.* 1), et la ligne TAR sera droite. Donc les deux angles PAT, PAR étant égaux à deux angles droits, (13. *liv.* 1), les deux angles PAR, RAq le seront aussi. D'où la ligne PAq sera droite aussi (14. *liv.* 1). Donc : $(Pq)^2 = (2RQ)^2 = (PQ)^2 + (Qq)^2$ (47. *liv.* 1);

c'est-à-dire, $2 = \frac{1}{4} + (Qq)^2$;

d'où : $\frac{7}{4} = (Qq)^2$ et $Qq = \frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Puis on a $(Aa)^2 = 2[27] = \frac{8}{4}$:

d'où $Aa = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{8}$.

On a aussi $BR = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{9}$.

Si on compare les points B, L, R, l, A de la figure 45, avec les points Q, A, p, B, P de la figure 3, de l'équation :

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp.PQ \ (16)$$

on tirera pour la fig. 45 l'équation :

$$(BL)^2 = (LA)^2 + (AB)^2 + AR.AB;$$

ou bien $(BL)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{10}{4}$:
d'où $BL = \frac{1}{2}\sqrt{10}$.

Les deux triangles PSA, PBA ont les angles respectivement égaux. Donc on a l'angle $SPA = PAB$ (8. *liv.* 1); d'où les lignes PS, BA sont parallèles (28. *liv.* 1). Mais Pp coupe BR à angles droits (14). Donc elle sera aussi perpendiculaire à PS (27. *liv.* 1). On démontrera ensuite que $(Pp)^2 = \frac{7}{4}$ de la même manière que l'on a démontré que $(Qq)^2 = \frac{7}{4}$. D'où, à cause de

$$(pS)^2 = (Pp)^2 + (PS)^2 \ (47. \ liv. \ 1);$$

on aura $(pS)^2 = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4}$;
d'où $pS = \frac{1}{2}\sqrt{11}$.

On a ensuite $(BD)^2 = 3\,[2] = \frac{12}{4}$;
d'où $BD = \frac{1}{2}\sqrt{12}$.

On a aussi : $(HF)^2 = (HA)^2 + (AF)^2$; et en démontrant que QO est parallèle à BE, de la même manière qu'on l'a fait pour PS, les points O, P, Q, S seront dans la même droite; et :

$$PO = QO - PQ = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} = PQ.$$

Donc OP étant égale et parallèle à TA et à TB, les lignes OT, PA seront aussi égales et parallèles, ainsi que les lignes OB, PT (33. *liv.* 1). Mais on a démontré plus haut que $PT = PA$. Donc OT, OB seront aussi égales à ces lignes. Par la même raison, les lignes oT, oB de l'autre côté seront égales à $pA = PA$. Si maintenant on compare les points O, o, A, T, B, H avec les points A, B, Q, P, p, q de la figure 3, on tirera [14] :

$HB = AT = \frac{1}{2}$.

On aura donc $(HA)^2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$;

d'où $(HF)^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$,

et $HF = \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Si on compare les points E, O, H, o, A avec les points Q, A, p, B, P de la fig. 3, de l'équation :

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp.PQ$$

[16], on tirera pour la fig. 45 :

$$(EO)^2 = (OA)^2 + (AE)^2 + HA.AE.$$
$$= 1 + 1 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = \frac{14}{4}:$$

d'où, $EO = \frac{1}{2}\sqrt{14}$.

Ensuite si on compare les points A, R, L, Q, q, l de la figure 45, avec les points A, B, Q, P, p, q de la figure 3, on a [15] pour la figure 3, l'équation : $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$; et multipliant par 4,

$$4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2,$$

ou : $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$,
on tirera pour la figure 45 :
$(Ll)^2 = 4(AL)^2 - 4(AR)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$.
d'où résulte : $Ll = \frac{1}{2}\sqrt{15}$.
On a ensuite : $BE = 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{2}\sqrt{16}$.

A cause de l'angle droit aAH (27), on a :
$(Ha)^2 = (HA)^2 + (Aa)^2 = (\frac{3}{2})^2 + 2 = \frac{17}{4}$:
d'où $Ha = \frac{1}{2}\sqrt{17}$.

Démontrant que $(AN)^2 = \frac{3}{2}$ de la même manière qu'on l'a fait pour $(AM)^2$, et aussi que $(An)^2 = \frac{3}{2}$; et parce que NR coupe par moitié la base AE du triangle ANE, on aura (26) :
$(AN)^2 + (NE)^2 = 2(AR)^2 + 2(RN)^2$;
c'est-à-dire, $\frac{3}{2} + 2 = \frac{2}{4} + 2(RN)^2$;
et réduisant, on trouve : $(RN)^2 = \frac{3}{2} = (AN)^2$.
De même on trouve $(Rn)^2 = \frac{3}{2}$. Si maintenant on compare les points H, N, R, n, A de la figure 45, avec les points Q, A, p, B, P de la figure 3, de l'équation :

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$$

[16], on tirera pour la figure 45 l'équation :
$(HN)^2 = (AN)^2 + (AH)^2 + AR \cdot AH$;
c'est-à-dire, $(HN)^2 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{18}{4}$:
d'où résulte $HN = \frac{1}{2}\sqrt{18}$.

La ligne DR étant perpendiculaire à AE, c'est-à-dire, à HR, on aura :

$$(HD)^2 = (HR)^2 + (RD)^2 \text{ (47. \textit{liv.} 1)}$$
$$= 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4} ;$$

d'où $HD = \frac{1}{2}\sqrt{19}$.

La base $aA\alpha$ du triangle $ag\alpha$ étant coupée au milieu par la droite gA, on aura (26) :

$$(ag)^2 + (\alpha g)^2 = 2(Aa)^2 + 2(Ag)^2,$$

ou $(ag)^2 + 1 = 4 + 2$; et $(ag)^2 = 5 = \frac{20}{4}$; d'où $ag = \frac{1}{2}\sqrt{20}$.

Les deux triangles HTV, AED ayant les côtés égaux entr'eux, l'angle $VTH = DEA$ (8. *liv.* 1), et les points H, T, A, E étant sur la même droite, VT sera parallèle à son égale DE (29. *liv.* 1) : d'où VD est aussi parallèle et égale à TE (33. *liv.* 1). Mais Dd est perpendiculaire à AE, c'est-à-dire, à TE ; donc elle l'est aussi à VD (27. *liv.* 1) ; d'où $(dV)^2 = (VD)^2 + (Dd)^2 = (TE)^2 + (BD)^2 = (\frac{3}{2})^2 + 3.[2] = \frac{9}{4} + \frac{12}{4} = \frac{21}{4}$: d'où $dV = \frac{1}{2}\sqrt{21}$.

Ayant démontré PS égale et parallèle à AE, ainsi que ps par la même raison, SE sera aussi égale et parallèle à AP (33. *liv.* 1), de même que sE l'est à Ap. A cause de l'égalité et du parallélisme des trois droites PS, TR, ps, on prouvera de même l'égalité de RS, Rs aux lignes PT, pT, toutes deux déjà démontrées égales à $AP = RQ$. Comparant maintenant les points H, S, E, s, R de cette figure 45, avec les points Q, A, p, B, P de la figure 3, de l'équation :

$$(AQ)^2=(Ap)^2+pQ\cdot PQ\,[18],$$

on tirera pour la figure 45 :

$(HS)^2=(SE)^2+EH.RH=(RQ)^2+EH.RH=\frac{2}{4}+\frac{5}{2}.2=\frac{22}{4}$:

d'où $HS=\frac{1}{2}\sqrt{22}$.

La base AE du triangle AME étant divisée en deux parties égales par la droite MR, on aura [26] :

$(AM)^2+(EM)^2=2(RA)^2+2(RM)^2$,

c'est-à-dire, $\frac{6}{4}+3=\frac{2}{4}+2(RM)^2$:

d'où il résulte après la réduction :

$$(RM)^2=2=(BM)^2=(Bm)^2;$$

de cette valeur, on déduiroit de la même manière celle de $(Rm)^2$: d'où $BM=MR=Rm=mB$. Si maintenant on compare les quatre points B, M, R, m de la figure 45 avec les quatre points A, Q, B, q de la figure 3, on a (15) :

$$(QM)^2=(AQ)^2-(AM)^2;$$

et de-là : $4(QM)^2=4(AQ)^2-4(AM)^2$;

c'est-à-dire, $(Qq)^2=4(AQ)^2-(AB)^2$;

on aura pour la figure 45 :

$(Mm)^2=4(BM)^2-(BR)^2=8-(\frac{3}{2})^2$

$$=\frac{32}{4}-\frac{9}{4}=\frac{23}{4}:$$

d'où $Mm=\frac{1}{2}\sqrt{23}$.

Les triangles BME, BnE ayant les côtés égaux entr'eux, et ayant tous deux la base commune BE divisée en deux parties égales par les lignes AM, An, de l'équation (26), il résultera la même valeur pour AM, An. Donc les triangles BAM, Ean ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $BAM = EAn$ (8. *liv.* 1); d'où, à cause de la droite BAE, la somme des angles MAB, MAE étant égale à deux droits (13. *liv.* 1); et substituant à l'angle MAB son égal EAn, la somme des deux angles MAE, EAn vaudra deux angles droits; d'où les deux lignes MA, An seront une seule ligne droite, (14. *liv.* 1).

On aura donc : $(Mn)^2 = 4\,(AM)^2 = \frac{24}{4}$: d'où $MN = \frac{1}{2}\sqrt{24}$.

Enfin, $HE = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{25}$.

105. Comme on a $\frac{1}{2}\sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{4}}$; par exemple, $\frac{1}{2}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{4}}$, etc., on aura facilement, au moyen de ce problême, les racines de tous les quarts depuis un jusqu'à vingt-cinq : ce dont on fera usage, comme nous le verrons, dans la construction des figures semblables.

106. Si on avoit pris le rayon $AB = 2$, on auroit eu toutes ces distances doubles de valeur; d'où nous aurions eu les racines entières des nombres depuis 1 jusqu'à 25. On pourroit donc facilement doubler l'une quelconque de ces moitiés de racines, pour avoir la racine entière (64).

107. La facilité de cette construction qu'on exécute avec les trois seules ouvertures déjà observées (35); savoir :

la première $= \sqrt{1}$;
la troisième $= \sqrt{2}$;
la seconde $= \sqrt{3}$,

avec lesquelles on a déjà divisé le cercle en 24 parties égales, et trouvé ensuite les 25 racines successives des premiers nombres, fait voir l'excellence de la Géométrie du compas, et combien elle peut contribuer à la perfection des Arts.

108. On a eu soin, dans la construction précédente, d'employer le plus qu'il a été possible le premier compas dont l'ouverture $= 1$, qui a décrit la circonférence BDd, et qui, conservant l'ouverture fondamentale, mérite plus de confiance que les autres. C'est aussi pourquoi on n'a voulu employer que les trois premiers compas les plus remarquables (107); ce qui a fait que quelques-unes des sections des arcs se sont faites à angles un peu aigus, comme celles des points S, s, O, o, et sur-tout celles des points L et l. Si on vouloit avoir tous les angles d'intersection plus approchans de l'angle droit, on pourroit employer la construction suivante.

Autre construction de la figure 45.

109. Après avoir trouvé les points M et m, comme dans la solution (104); du rayon BD et des centres M et m, soient décrits deux arcs qui se coupent en H.

Du rayon AB, et du centre H, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en O et o; du même rayon soient déterminées les demi-circonférences OEs, oES (64); du rayon BE et du centre H, soit décrit un arc qui coupe la circonférence en L et l.

Tous les autres points de la figure se trouveront comme au n.° 104.

Démonstration. Nous démontrerons que les points que l'on trouve avec cette construction, sont les mêmes que ceux trouvés par la première.

Après avoir démontré [104] que $BM = MR = Rm = mB$, et que les trois points B, A, R sont dans la même droite, ayant de plus par construction $MH = ME = mH = mE$, H sera sur la même droite BAR [13], et on aura $HB = RE$ [14] : donc le point H sera le même que dans l'autre construction. Ensuite les lignes HO, Ho étant égales dans les deux constructions, les points O et o seront aussi les mêmes. Si on soustrait l'arc osE des deux demi-circonférences BsE, oES, les arcs restans Bo, ES seront égaux.

D'où : $ES = Bo = BO = AQ = RQ$:
d'où aussi le point S sera le même que dans la première construction ; le point s le sera également ; puis la base HTR du triangle HLR étant divisée par LT en deux parties égales, on aura (26) :

$(HL)^2 + (LR)^2 = 2(HT)^2 + 2(TL)^2$;
c'est-à-dire, $4 + (LR)^2 = 2 + 2(TL)^2$;
ou bien $2 + (LR)^2 = 2(TL)^2$.

Mais encore la base TR du triangle TLR étant divisée par moitié au point A par la droite LA, on aura (26) :

$(TL)^2 + (LR)^2 = 2(TA)^2 + 2(AL)^2$;
et doublant :
$2(TL)^2 + 2(LR)^2 = 4(TA)^2 + 4(AL)^2$
$= 1 + 4 = 5$;
d'où soustrayant $2(LR)^2$, on a :

$$2(TL)^2 = 5 - 2(LR)^2.$$

Mais on a trouvé ci-dessus :

$$2(TL)^2 = 2 + (LR)^2:$$

donc :

$$5 - 2(LR)^2 = 2 + (LR)^2.$$

Soustrayant 2, et ajoutant $2(LR)^2$, on a :

$$3 = 3(LR)^2;$$

d'où : $1 = (LR)^2 = (AB)^2$.

Donc on aura $LR = AB$ comme dans la première construction. On prouvera la même chose pour Rl; les autres points sont déterminés comme dans la construction précédente : donc tous les points de la figure sont les mêmes que dans cette construction.