GÉOMÉTRIE
DU COMPAS.

LIVRE TROISIÈME.

DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION DES DISTANCES EN LIGNE DROITE.

PROBLÈME.

64. *DOUBLER la distance* AB.

Solution. Du centre A, et d'un rayon AB, décrivez [*fig.* 2] une demi-circonférence $BCDE$; c'est-à-dire, faites à $AB = BC = CD = DE$ (10) : la ligne BAE sera droite et double de AB.

Démonstration. Voyez la 15.e du *liv.* 4.

PROBLÈME.

65. *Tripler, quadrupler, etc. une distance* AB.

Solution. Qu'on ajoute [*fig.* 1] à AB la droite égale AE (64); qu'on ajoute de la même manière la ligne égale EV, etc., la droite $BAEV$ sera égale à $3AB$: en continuant de la même manière, on quadruplera, etc.

Démonstration. La ligne BAE est droite (15. *liv.* 4), ainsi que la ligne AEV : donc, etc.

PROBLÈME.

66. *Partager en deux parties égales la distance* A B, *c'est-à-dire, trouver le point* M *qui soit au milieu de la droite* A B.

Solution I.re Après avoir décrit [*fig.* 14] la demi-circonférence $BCDE$ (64), du centre E et d'un rayon EB, soit décrit un arc indéfini PBp; du centre B et d'un rayon BA, soit encore décrite la demi-circonférence $pAPm$; ensuite, du centre P et du rayon PB, soit décrit l'arc BM, et qu'on fasse à $Pm = BM$; le point M sera le point cherché.

Démonstration. La ligne Bm sera sur le prolongement de Bp (15. *liv.* 4). Substituant les trois lignes égales BP, Bp, Bm aux trois lignes égales Ap, pB, pS du n.° 22, les trois lignes égales PE, BE, pE aux trois lignes AQ, pQ, BQ, et la ligne Pm à la ligne AS; l'équation $AS.pQ=(Ap)^2$ (22) deviendra : $Pm.BE=(BP)^2$. Mais $BE=2AB$, et $BP=AB$: donc $2AB.Pm$

$=(AB)^2$; et divisant par AB, on a $2Pm = AB = 2BM$. De plus, les triangles BPM, BPm ont leurs angles égaux (8. *liv.* 1) : donc mP est parallèle à BM (28. *liv.* 1). Mais les triangles BPm, BPE ont aussi les angles égaux (22) : donc mP est parallèle à BE (28. *liv.* 1) : donc les droites BM, BE se confondent.

Solution II. Du point A comme centre, et du rayon AB [*fig.* 15], soit décrite la demi-circonférence $BCDE$ (64); des points B et E comme centres, et du même rayon AB, soient décrits les deux arcs indéfinis CP, DQ; des mêmes points B et E comme centres, et du rayon BE, soient décrits les deux arcs EQ, BP; du centre P et d'un rayon PB soit décrit l'arc BM; enfin qu'on décrive du point E comme centre, et d'un rayon PQ un arc qui coupe l'arc BM au point M; le point M sera le point cherché.

Démonstration. Après avoir fait les substitutions nécessaires dans la *fig.* 5 (23), on aura : $PQ \cdot BE = (BE)^2 - (BP)^2$. Mais $BE = 2AB$, $BP = AB$, $PQ = ME$. Donc $2ME \cdot AB = 4(AB)^2 - (AB)^2 = 3(AB)^2$: donc, divisant par AB, on aura $2ME = 3AB$. Mais à cause de l'égalité des côtés opposés, $PQEM$ sera un parallélogramme qui, divisé en deux triangles équilatéraux par la diagonale QM, donne l'angle $PQM = QME$ (8. *liv.* 1) : d'où on voit que PQ est parallèle à ME (28. *liv.* 1), et PM parallèle à QE (33. *liv.* 1). De plus, on a PQ parallèle à BE (23) : donc ME, BE coïncident : donc, ayant $ME = MA + AE = MA + AB$, on aura : $2ME = 2MA + 2AB = 3AB$: d'où on tire $2MA = AB$.

Solution III. Du centre A et d'un rayon AB, soit décrite [*fig.* 16] la demi-circonférence $BCDE$ (64); du centre B et d'un rayon BE soit décrit l'arc indéfini PEp; du centre E et d'un rayon EC, qu'on décrive un arc qui coupe ce dernier aux points P et p; des centres P et p, et du même rayon PE, soient décrits deux arcs qui se coupent en M, le point M sera le point cherché.

Démonstration. Le point M sera sur la droite BE (13); et en substituant dans l'équation (19) $pP.pQ = (Ap)^2$ les distances, c'est-à-dire les droites correspondantes de cette figure, on aura l'équation $EM.EB = (PE)^2$. D'où, à cause de $(PE)^2 = (EC)^2 = 3(AB)^2$ (12. *liv.* 13) (2), on aura : $2AB.EM$

$= 3(AB)^2$; et divisant par AB, $2EM = 3AB$, ou bien $2AE + 2AM = 3AB$: d'où, retranchant les quantités égales $2AE$, $2AB$, il reste $2AM = AB$.

Solution IV. La demi-circonférence $BCDE$ [*fig.* 17] étant décrite (64); du centre B et d'un rayon BD, soit décrit un arc indéfini aDp; du centre E et du même rayon BD, soit décrit un arc qui coupe celui aDp au point a. Puis du rayon Aa et du centre E, soit décrit un arc qui coupe cet arc aDp en P et p; enfin du même rayon Aa et des centres P et p, soient tracés deux arcs qui se coupent en M, le point M sera le point cherché.

Démonstration. Le point M sera sur la droite BE (13); puis, faisant les substitutions nécessaires dans l'équation :

$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$ (18),

on aura : $(PB)^2 = (PE)^2 + EB \cdot MB$;

ou $(BD)^2 = (Aa)^2 + 2AB \cdot MB$;

ou bien (12. *liv.* 13) (2) :

$3(AB)^2 = 2(AB)^2$ [27] $+ 2AB \cdot MB$:

d'où, soustrayant $2(AB)^2$, $AB = 2MB$.

On peut donner plusieurs autres solutions de ce problême, ou en employant de nouveaux rayons de cercle, ou en combinant entr'elles les solutions précédentes : mais je crois inutile de les indiquer. En voici une assez simple, mais qui pourtant n'est pas très-exacte dans la pratique, parce que les arcs s'y coupent à angles trop aigus.

Solution V. Après avoir décrit [*fig.* 14], 1.° du centre A et d'un rayon AB la demi-circonférence $BCDE$ (64); 2.° du centre E et d'un rayon EB l'arc indéfini PBp, qu'on décrive du centre B et d'un rayon AB un arc qui coupe l'arc PBp en P et p; soient encore décrits, des centres P et p et du même rayon AB, deux arcs qui se coupent en M, le point M sera le point cherché.

Démonstration. Le point M sera sur la droite BE (13); et comme à cause d'un angle à la base commun en B (5, 32. *liv.* 1. 4. *liv.* 6), les deux triangles isoscèles PBM, PBE sont semblables, on aura :

$$BE : BP :: BP : BM :$$

d'où (17. *liv.* 6) :

$$BE \,.\, BM = (BP)^2 = (AB)^2,$$

ou $2AB \,.\, BM = (AB)^2$;

et divisant par AB :

$$2BM = AB.$$

PROBLÈME.

67. *Continuer la sous-division en deux parties égales, avec une cons-*

truction plus simple, de AM *en* N, *de* AN *en* O, *etc. à l'infini.*

Solution I. Après avoir décrit [*fig.* 18] du rayon AB la demi-circonférence $BCDE$ (64); du centre B avec le même rayon AB, l'arc indéfini $P'CAp'$; des centres E et B et du rayon BE les deux arcs $R'Q'P'Bp'q'r'$, $PQRErqp$; et du centre E, du rayon EC l'arc PCp; si on décrit des centres P' et p' et du rayon AB deux arcs, ils se couperont en M au milieu de la droite AB [*solution* V (66)]. Si des centres P et p et du rayon PE on décrit deux arcs, ils se couperont aussi au même point M [*solution* III (66)]. Qu'on fasse maintenant à $AP' = BQ' = Bq' = q'N = Q'N$ (11), le point N sera au milieu de la droite AM. Qu'on fasse à $AQ' = BR' = Br' = r'O = R'O$. Le point O sera au milieu de la droite AN. En continuant ainsi, on diviseroit de la même manière AO en deux parties égales, etc. à l'infini.

Démonstration. Si on imagine une droite $P'A$ qui divise en deux parties la base BE du triangle $P'BE$ (12), on aura (26):

$$(BP')^2 + (P'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP')^2$$

D'où, après avoir substitué les valeurs de

$BP' = AB$ et de $P'E = 2\,AB$; et soustrayant $2\,(AB)^2$, on aura $3\,(AB)^2 = 2\,(AP')^2$. D'où on tirera en divisant par 2, $(AP')^2 = (BQ')^2 = \frac{3}{2}\,(AB)^2$; et comme le point N est sur la droite BE (13), le triangle isoscèle $Q'BN$, à cause de l'angle commun en B (5 et 32. *liv.* 1, 4. *liv.* 6), sera semblable au triangle $Q'BE$. D'où $(BQ')^2 = BN\,.\,BE$ (17. *liv.* 6). Puis, comparant entr'elles les deux valeurs de $(BQ')^2$, on aura $\frac{3}{2}\,(AB)^2 = BN\,.\,BE = 2\,BN\,.\,AB$, et divisant par $2\,AB$, $\frac{3}{4}\,AB = BN$: donc $AN = \frac{1}{4}\,AB$.

De même on aura (26) :

$$(BQ')^2 + (Q'E)^2 = 2\,(AB)^2 + 2\,(AQ')^2.$$

D'où : $\frac{3}{2}\,(AB)^2 + 4\,(AB)^2 = 2\,(AB)^2 + 2\,(AQ)^2$;
et réduisant : $\frac{7}{4}\,(AB)^2 = (AQ')^2 = (BR')^2$.
Mais $(BR')^2 = BO\,.\,BE = 2\,AB.BO$;
Donc aussi : $\frac{7}{4}\,(AB)^2 = 2\,AB\,.\,BO$;
d'où : $\frac{7}{8}\,AB = BO$; et $AO = \frac{1}{8}\,AB$, etc.

Solution II. Qu'on fasse à $AP = EQ = Eq = qN = QN$, le point N sera au milieu de la droite AM.

Qu'on fasse à $AQ = ER = Er = rO = RO$, le point O sera au milieu de la droite AN. Continuant de la même manière, on partageroit en deux la droite AO, et ainsi de suite à l'infini.

Démonstration. En effet, on a (26) : $(PE)^2+(PB)^2=2(AB)^2+2(AP)^2$; puis, substituant les valeurs de $(PE)^2=(CE)^2=3(AB)^2$ (12. *liv.* 3) (2), et de $(PB)^2=(BE)^2=4(AB)^2$, on aura : $7(AB)^2=2(AB)^2+2(AP)^2$. D'où ôtant $2(AB)^2$, et divisant par 2, on a : $\frac{5}{2}(AB)^2=(AP)^2=(EQ)^2$. Mais à cause des triangles isoscèles semblables EQN, EQB (13) (5, et 32. *liv.* 1. 4 et 17. *liv.* 6), $(EQ)^2=EN.EB$. Donc, $\frac{5}{2}(AB)^2=EN.EB=2EN.AB$; et divisant par $2AB$, on a : $\frac{5}{4}AB=EN$, et $AN=\frac{1}{4}AB$.

En raisonnant de la même manière, on aura : $(QE)^2+(QB)^2=2(AB)^2+2(AQ)^2$; d'où : $\frac{5}{2}(AB)^2+4(AB)^2=2(AB)^2+2(AQ)^2$: d'où aussi : $\frac{9}{4}(AB)^2=(AQ)^2=(ER)^2=EO.EB=2AB.EO$; et divisant par $2AB$, $\frac{9}{8}AB=EO$, et $AO=\frac{1}{8}AB$, etc.

Solution III. Du centre A et du rayon AB [*fig.* 19], soit décrite la demi-circonférence $BCDE$ (64); avec le même rayon AB et des centres B et E soient décrits les arcs indéfinis CP, Dp; des mêmes centres B et E et du rayon BE soient décrits les arcs $Epqr$, $BPQR$, on pourra trouver le point M, en faisant $PM=PB$, $EM=Pp$ [*Solu-*

tion II. (66)]. Actuellement, qu'on fasse à $AP = BQ = QN = Eq$; Qu'on fasse aussi à $Qq = EN$, le point N sera au milieu de la droite AM. Soit fait pareillement à $AQ = BR = RO = Er$, et à $Rr = EO$, le point O sera au milieu de la droite AN.

Démonstration. Après avoir fait dans la *fig.* 5 (23) les substitutions nécessaires, on aura : $Qq . BE = (BE)^2 - (BQ)^2$. Mais $BE = 2AB$, et $(BQ)^2 = \frac{3}{2}(AB)^2$ [*voyez la démonstration de la solution* I.] Donc $2Qq . AB = 4(AB)^2 - \frac{3}{2}(AB)^2$; puis, divisant par $2AB$, et réduisant, on a $Qq = \frac{5}{4}AB$. Donc aussi $EN = \frac{5}{4}AB$; donc la droite AB étant la même dans les deux *fig.* 18 et 19, les côtés des deux triangles $Q'NE$ [*fig.* 18], QNE [*fig.* 19], seront aussi les mêmes. D'où en superposant les trois points B, Q, E de la *fig.* 19, sur les trois points B, Q', E de la *fig.* 18, les points N des deux figures se confondront aussi. Donc, etc.

De même, faisant les substitutions nécessaires dans la figure 5 (23), on a : $Rr . BE = (BE)^2 - (BR)^2$. Mais $(BR)^2 = \frac{7}{4}(AB)^2$ [*démonstration de la solution* I]; donc $Rr . BE = (BE)^2 - \frac{7}{4}(AB)^2$; ou bien substituant $2AB$ à BE, on a $2AB . Rr = 4(AB)^2 - \frac{7}{4}(AB)^2$. Puis, divisant par 2 AB, et réduisant : $Rr = \frac{9}{8} AB = OE$. Donc les points E, R, B de la fig. 19 coïncidant avec les points E, R', B de la fig. 18, et les lignes RO et EO y étant respectivement égales aux lignes $R'O$, EO de la fig. 18, le point O coïncidera aussi. D'où l'on voit que le point O se trouvera au milieu de la ligne AN. On démontreroit de même pour les autres divisions jusqu'à l'infini.

On pourroit employer d'autres moyens pour trouver les mêmes points : mais nous passerons à d'autres divisions de la ligne AB en un nombre différent de parties.

PROBLÊME.

68. *Diviser la distance* AB *en trois parties égales.*

Solution. Qu'on ajoute en ligne droite de part et d'autre à AB [*fig.* 20] les deux distances AE, BV qui lui sont égales (64); des centres E et V et du rayon EV soient décrits les deux arcs indéfinis QVq, PEp; des mêmes centres E et V et du rayon EB soient décrits deux autres arcs qui coupent les premiers en Q, q, et P, p; avec ce même rayon EB, et des centres P et p soient décrits deux arcs qui se coupent en T; enfin, avec le même rayon, et des centres Q, q soient décrits deux arcs qui se coupent en t, la ligne AB sera divisée en trois parties égales aux deux points T et t.

Démonstration. Les points T, t seront dans la ligne droite VE (13); puis, à cause de l'angle commun en E (5 *et* 32. *liv.* 1. 4. *liv.* 6), le triangle isoscèle EPT sera semblable au triangle isoscèle EPV; donc $(PE)^2 = ET \cdot EV$ (17. *liv.* 6). Substituant dans cette équation $2AB$ pour PE, et $3AB$ pour EV, elle deviendra $\frac{4}{3}AB = ET$; d'où $AT = \frac{1}{3}AB$. On démontreroit de même que Bt est un tiers de AB, et par conséquent aussi Tt.

PROBLÈME.

69. *Diviser une distance* AB *en un nombre quelconque de parties égales.*

Solution. Un exemple ou deux feront mieux sentir la règle générale.

Exemple I. Soit [*fig.* 21] la distance AB à diviser en cinq parties égales; qu'on lui ajoute en ligne droite les quatre distances AE, EF, FG, GH (65) qui lui sont égales, de manière qu'elle soit quintuplée en BH, c'est-à-dire, multipliée par autant d'unités qu'il qu'il y en a dans le nombre qui indique en combien de parties on veut la diviser. Des extrémités *B* et *H* comme centres, et avec un rayon *A B* de la longueur de la distance qu'on veut diviser, qu'on décrive deux arcs indéfinis *A C*, *G I*; des mêmes centres *B* et *H*, et avec un rayon *B H*, soient décrits les deux arcs *H I*, *B C*; puis du centre *C* et du premier rayon *A B*, qu'on décrive un arc indéfini *B Q*; enfin, du centre *H* avec le rayon *C I*, qu'on décrive un arc qui coupe l'arc *B Q* en *Q*; la distance *B Q* sera sur la direction de la ligne *B A*, et en sera la cinquième partie.

Si on ajoute ainsi à *B Q* la droite égale *Q q* (64), et ensuite les autres lignes égales *q r*, *r s*, on aura déterminé toutes les cinquièmes parties de la droite *B A*.

Exemple II. Si on veut diviser la distance *A B* en sept parties égales [*fig.* 22], soit faite la ligne *B H* sept fois plus grande que *B A*; des extrémités de cette ligne, c'est-à-dire, des points *B* et *H*, et avec le rayon *A B*, soient décrits les arcs indéfinis *A C*, *G I*; des mêmes centres *B* et *H* et du rayon *B H*, soient décrits les deux arcs *H I*, *B C*; du centre *C* et du premier rayon *A B*, soit décrit un arc indéfini *B Q*; du centre *H* et du rayon *C I*, soit décrit un arc qui coupe cet arc *B Q* en *Q*; *B Q* sera sur la direction de *B A*, et en sera la septième partie.

Démonstration. Les triangles *C Q I*, *I H Q* ayant leurs côtés respectivement égaux, on aura l'angle *C I Q* = *I Q H* (8. *liv.* 1); donc *C I* est parallèle à *H Q* (28. *liv.* 1). De plus, la ligne *C I* étant aussi parallèle à *B H* (23), le point *Q* sera sur la ligne *B H*. D'où on voit que les deux triangles isoscèles *C B Q*, *C B H* ayant un angle à la base commun en *B*, seront semblables (5, 32. *liv.* 1. 4. *liv.* 6); Ce qui donne *H B* : *B C* :: *B C* : *B Q*, ou bien *H B* : *A B* :: *A B* : *B Q*: donc la ligne *A B* sera autant de fois plus grande que *B Q*, que la droite *H B* sera de fois plus grande que *A B*.

Solution II. Si on veut diviser [*fig.* 23], la ligne *A B*, par exemple, en cinq parties égales, après avoir déterminé, comme dans la *solution* I, la ligne *B H* cinq fois plus grande que la ligne *A B*, soit décrit du centre *H* et du rayon *A B* un arc indéterminé *C B c*; maintenant, du centre *B* avec le rayon *B A*, qu'on décrive la demi-circonférence *c C K* (64); puis, du centre *C* avec le même rayon *A B* soit décrit l'arc *B Q*; enfin, du centre *B* et du rayon *C K*, qu'on décrive un arc qui coupe cet arc *B Q* en *Q*, la ligne *B Q* sera la cinquième partie de la ligne *B A* et sera placée dans la même direction.

Démonstration. La droite *B K* sera sur le prolongement de la ligne *B C* (15. *liv.* 4). Après avoir fait les substitutions nécessaires (22), on aura : $KC.BH=(BC)^2=(AB)^2$; ce qui donne (17. *liv.* 6) : $BH : AB :: AB : KC$, ou bien $BH : AB :: AB : BQ$: donc la même ligne *A B* sera d'autant plus grande que *B Q*, que *B H* sera plus grande que *A B*; et quand on aura $BH = 5AB$, on aura aussi $AB = 5BQ$; ensuite les deux triangles *BKC*, *BCQ* ayant tous leurs côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $KCB = CBQ$ (8. *liv.* 1). Mais l'angle *CBH* est aussi égal à l'angle *K C B* (22) : donc *B Q* sera sur la direction de *B H*.

70. Il est clair que ce dernier problême (69) peut être très-utile dans la pratique pour diviser en lignes un pied déjà divisé en pouces, puisque *B H* étant égale à douze pouces, *BQ* deviendra égale à la douzième partie du premier pouce *A B*, c'est-à-dire, à une ligne. On pourra de la même manière sous-diviser en centimètres le mètre déjà divisé en décimètres. Quand la droite *A B*, sur laquelle on

doit trouver le point Q, sera décrite, l'opération sera plus simple, puisque, sans décrire du centre C, et avec le rayon $A\,B$ l'arc $B\,Q$, il suffira de couper en Q la droite donnée $A\,B$ avec les ouvertures de compas précédemment indiquées.