GÉOMÉTRIE DU COMPAS.

LIVRE SECOND.

DE LA DIVISION DE LA CIRCONFÉRENCE ET DES ARCS DU CERCLE.

PROBLÊME.

27. *PARTAGER la circonférence du cercle* BDd *en quatre parties égales.*

Solution. Soit fait dans la même circonférence [*fig.* 9.] au rayon $AB=Bc=BC=CD=DE=Ed$, avec le premier compas (8), on aura $dc=cB=BA$ (15. *liv.* 4).

Soit fait aussi à $BD=Ba=Ea$ avec le second compas, et à $Aa=BF=Bf$ avec le troisième compas. On aura divisé la circonférence en quatre parties égales BF, FE, Ef, fB.

Démonstration. BAE étant un diamètre (15. *liv.* 4.), et les triangles aAB, aAE ayant tous leurs côtés égaux, et, par conséquent les angles aAB, aAE aussi égaux

(8 *liv.* 1.), ces deux angles seront droits (13. *liv.* 1). Donc $(aB)^2 = (AB)^2 + (aA)^2$ (47. *liv.* 1); et soustrayant de part et d'autre $(AB)^2$, on a : $(aB)^2 - (AB)^2 = (aA)^2$. Soit fait pour abréger $AB = 1$, on aura $(aB)^2 = (BD)^2 = 3$ (2). Donc $(aA)^2 = 3 - 1 = 2$, et encore $(BF)^2 = (aA)^2 = 2 = 1 + 1 = (AB)^2 + (AF)^2$. Donc, dans le triangle FAB, l'angle FAB sera droit (48. *liv.* 1); et par conséquent aussi FAE (13. *liv.* 1). Donc les arcs BF, FE seront égaux entr'eux et quarts de cercle, ainsi que les arcs Bf, fE.

28. *Corollaire.* Les angles BAa, BAF étant droits, les trois points A, F, a seront dans la même ligne droite.

29. Nous avons donc déjà la circonférence divisée, savoir, en deux parties égales aux points B et E; en trois parties, aux points B, D, d (15. *liv.* 4); en quatre points, aux points B, F, E, f (27); en six parties, aux points B, C, D, E, d, c (15. *liv.* 4).

PROBLÊME.

Diviser une circonférence en huit parties égales.

Solution.

Solution. Tout étant comme au n.° 27, soit fait à $AB = aG = aH$ [*fig.* 9.], avec le premier compas, à $Aa = Gg = Hh$ avec le troisième compas, on aura aussi $gh = Aa$, et la circonférence sera divisée en huit parties égales aux points B, G, F, H, E, h, f, g.

Démonstration. Puisque $(Aa)^2 = 2.$ (27), on aura $(Aa)^2 = (AG)^2 + (aG)^2$. L'angle aGA sera donc droit (48. *liv.* 1). D'où, à cause du triangle isoscèle aGA, les deux autres angles GAa, GaA, égaux entr'eux, (5. *liv.* 1.) vaudront chacun la moitié d'un angle droit (32. *liv.* 1.) Donc l'angle GAF, qui est le même que l'angle GAa (28) sera la moitié de BAF: donc aussi l'arc $GF = BG$. Mais, par construction, on a $Gg = BF$ (26. *liv.* 3.): donc, ôtant de part et d'autre BG, on aura $GF = Bg$. On démontreroit de même que les autres arcs sont égaux. Donc la circonférence sera divisée en parties, égales chacune à la moitié du quart, et par conséquent en huit parties.

PROBLÊME.

31. *Diviser la circonférence en douze parties égales.*

Solution. Les choses étant comme au n.° 27, qu'on fasse [*fig.* 9.] à $AB = FN = Nn = FO = Oo$. La circonférence sera divisée en douze parties égales aux points $B, N, C, F, D, O, E, o, d, f, c, n$.

Démonstration. En effet, si des arcs égaux BF, FE, on retranche les arcs égaux BC, DE, les arcs restans CF, FD seront égaux. Or l'arc CD est la sixième partie de la circonférence; donc l'arc CF sera la moitié de cet arc, et par conséquent le douzième de la circonférence. A cause de $FN = CD$, on aura encore $CF = CN$. Donc aussi à cause de $FN = CB$, on aura $CN = NB$. On démontrera de la même manière que chacun des autres arcs est le douzième de la circonférence.

PROBLÊME.

32. *Diviser la même circonférence en vingt-quatre parties égales.*

Solution. Les choses étant comme ci-dessus (30 et 31), soit fait [fig. 9.] à $AB = GL = LM = Gk = ki = HI = IK = Hm = ml$, de la première ouverture decompas, et le problême sera résolu.

Démonstration. En effet, si des arcs égaux

GF, GB (30), on retranche les arcs égaux CF, NB (31), les restes GC et GN seront égaux. Or CN est la douzième partie de la circonférence. Donc GC et GN en seront les vingt-quatrièmes parties.

On a ensuite $FN = GL$; retranchant la partie commune FG, on aura $NG = FL$. Donc aussi FL sera la vingt-quatrième partie de la circonférence, et par conséquent, la moitié de FD (31). On démontrera de la même manière que les arcs DH, HO, FI, IC sont égaux, ainsi que tous les autres qui ont été déterminés ci-dessus.

33. Pour être plus courts, nous continuerons à nous servir, sans les citer, ainsi que nous venons de le faire, des propositions 26 et 27 du *livre* 3 *d'Euclide*, que dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les droites égales sous-tendent des arcs égaux.

34. Les Anciens, au moyen du centre A et du rayon AB, divisoient, avec le compas seulement, la circonférence en six parties égales. Ils obtenoient les autres divisions avec la règle et le compas, en prenant différens points hors de la circonférence. Nous sommes parvenus à déterminer un point a,

qui seul suffit pour la diviser en vingt-quatre parties égales avec le compas seulement ; ce qui est en même-tems plus expéditif, plus commode, et beaucoup plus exact que les méthodes des Anciens.

35. On peut remarquer en même-tems la loi élégante que suivent les ouvertures de compas suffisantes pour cette division.

L'ouverture du premier compas $= \sqrt{1}$, celle du 3.^{e} $= \sqrt{2}$, et celle du 2.^{e} $= \sqrt{3}$.

36. *Lemme.* Si dans le cercle BGE, on a le rayon $AB = 1$, et que l'arc BG soit la huitième partie de la circonférence, on aura le quarré de sa corde BG, c'est-à-dire $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$.

Démonstration. Sur le diamètre BE, soit abaissée la perpendiculaire GP. Dans le triangle rectangle GPA, à cause de l'angle $BAP = 45°$ on aura aussi $AGP = 45°$ (32. *liv.* 1.), et par conséquent $GP = PA$. Or, on a $(AG)^2 = (PG)^2 + (AP)^2$ (47. *liv.* 1). Donc $(AG)^2 = 2(AP)^2$, ou $2(AG)^2 = 4(AP)^2$, ou encore $2 = (2AP)^2$: donc $\sqrt{2} = 2AP$; $AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $BP = AB - AP = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. On a ensuite, à cause de l'angle droit BGE (31. *liv.* 3.) BP :

$BG :: BG : BE$ (8. 4. *liv.* 6). Donc (17. *liv.* 6.) $(BG)^2 = BP \times BE = 2\,BP$. Donc $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$.

37. *Lemme.* Les choses étant comme au n.° 36, on aura $(GE)^2 = 2 + \sqrt{2}$.

Démonstration. $(BE)^2 = (GE)^2 + (BG)^2$ (47. *liv.* 1). Mais $(BE)^2 = 4$; $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (36) : donc $4 = (GE)^2 + 2 - \sqrt{2}$: donc $2 = (GE)^2 - \sqrt{2}$, et par conséquent $(GE)^2 = 2 + \sqrt{2}$.

PROBLÊME.

38. *La circonférence étant déjà divisée en vingt-quatre parties égales* (32), *la sous-diviser en quarante-huit.*

Solution. Soit fait à $aN = Be = Ee$ (11) avec un quatrième compas, et à $AB = e\mu = e\nu$ avec le premier compas. Les arcs $K\mu$, μN, $M\nu$, νO seront les quarante-huitièmes parties de la circonférence.

Démonstration. Si on conçoit les droites Aa, Nn, aN, aB (12), l'angle BAa étant droit, l'angle $BAN = BAn$ (31) et les trois rayons AN, AB, An égaux, on aura $(aN)^2 = (aB)^2 - Nn \,.\, Aa$ (20). Donc, à cause de $aN = Be$, on aura aussi

$(Be)^2 = (aB)^2 - Nn \cdot Aa$. De plus, les triangles eAB, eAE étant rectangles en A (8. 13. *liv.* 1), puisque leurs côtés sont respectivement égaux, on aura $(Be)^2 = (AB)^2 + (Ae)^2$ (47. *liv.* 1), et par conséquent $(AB)^2 + (Ae)^2 = (aB)^2 - Nn.Aa$; mais on a $(aB)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2$. Donc $(AB)^2 + (Ae)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2 - Nn \cdot Aa$; d'où, retranchant $(AB)^2$ de part et d'autre, on a $(Ae)^2 = (Aa)^2 - Nn \times Aa$. Mais $(Aa)^2 = 2$ (27) et $Nn = 1$, puisque Nn est la corde d'un arc de 60 degrés (31). Donc $(Ae)^2 = 2 - \sqrt{2} =$ le quarré de la corde de l'arc BG, qui est la huitième partie de la circonférence (30 et 36). On aura donc l'arc $B\mu = \mu G$ (24); retranchant ensuite de chacun de ces arcs, les arcs égaux BK, NG (32), les restes $K\mu$, μN seront égaux; et comme l'arc KN est la vingt-quatrième partie de la circonférence (32), chacun d'eux en sera la moitié, et par conséquent la quarante-huitième partie de la circonférence. Il en sera de même des arcs $K\mu$, μN, $M\nu$, et νO.

39. On pourroit aussi avec la même construction [*fig.* 11], par le moyen des quatre compas ci-dessus indiqués, diviser la circonférence en quarante-huit parties égales (8).

En effet, si avec le premier compas d'une ouverture $= A\,B$, on divise la circonférence en six parties, en commençant du point μ, les arcs IF, HO, mo, fl, ng seront partagés en deux parties égales ; puis divisant la circonférence en six parties, en commençant du point ν, on aura divisé en deux parties égales les arcs oh, fi, nk, NG, FL. Divisant ensuite la circonférence en quatre parties avec le troisième compas d'une ouverture égale à $A\,a$, en partant du point μ, les arcs restans LD, ic seront divisés en deux parties égales; et en partant du point ν, on partagera de même les arcs IC, ld. Enfin divisant encore avec le premier compas la circonférence en six parties égales, mais en partant des derniers points trouvés avec le troisième compas, tous les autres arcs seront divisés en deux parties égales.

La démonstration est la même que celle n.º 32.

PROBLÊME.

40. *Diviser la circonférence* BDd *en cinq parties égales.*

Solution. Tout étant comme dans le problême du numéro 31, qu'on fasse [*fig.* 12] à $Aa = Nb = Ob$, avec le troisième compas. Qu'on fasse à $Bb = BQ$, l'arc BQ sera la cinquième partie de la circonférence.

Démonstration. Si on conçoit menées les deux droites NO, AF, qui se coupent en X, à cause des triangles équilatéraux FNA, FOA, la droite AF sera divisée en deux parties égales au point X (10. *liv.* 1), ainsi que NO (14). Puis l'arc NFO étant égal à l'arc BCD (31), le quarré de sa corde NO sera égale au quarré de la corde $BD = 3$ (2). D'où le quarré de sa moitié, c'est-à-dire, $(NX)^2 = \frac{3}{4}$ (*prop.* 4. *liv.* 2. *coroll.*). De plus, les points b, A, X sont en ligne droite, et le triangle NbX est rectangle (12, 13, 14). On a aussi $(Nb)^2 = (Aa)^2 = 2$ (27). D'où on tire : $(Xb)^2 = (Nb)^2 - (NX)^2$ (47. *liv.* 1) $= 2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$.

Mais à cause de l'angle droit XAB, qui est le même que FAB, on a $(BX)^2 = (AB)^2 + (AX)^2$ (47. *liv.* 1). D'ailleurs, on a : $(AX)^2 = \frac{1}{4}(AF)^2$ (*prop.* 4. *du liv.* 2. *coroll.*). Donc $(BX)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = (Xb)^2$. Donc les droites BX, Xb sont égales. Donc on aura le point b, le même qu'emploie Ptolomée dans le premier livre de l'Almageste, pour inscrire dans un cercle un pentagone et un décagone régulier. *Voyez* la démonstration de Clavius dans le scholie dépendant de la proposition 10. du liv. 13 d'Euclide. *Voyez* aussi les numéros suivans (45, etc.) qui fourniront la démonstration complète de cette proposition et des suivantes.

PROBLÈME.

41. *Diviser la circonférence en dix parties égales.*

Solution. Tout étant comme dans le problême précédent (40), qu'on fasse [*fig.* 12] à $A\,b = B\,P$, on aura $B\,P = P\,Q$. Chacun de ces arcs est égal à la dixième partie de la circonférence.

Démonstration. Voyez la 10. propos. du livre 13 d'Euclide.

PROBLÊME.

42. *Diviser la circonférence en cent vingt parties égales.*

Solution. Tout étant comme dans les numéros 32 et 40, $Q\,I$ [*fig.* 12] sera la cent vingtième partie de la circonférence.

Démonstration. En effet, l'arc $B\,I$ est égal à cinq vingt-quatrièmes (32), et l'arc $B\,Q$

à la cinquième partie de la circonférence. Donc $QI = BI - BQ = \frac{5}{24} - \frac{1}{5} = \frac{25 - 24}{120}$ $= \frac{1}{120}$.

43. Maintenant on pourra, quand on voudra, avec quatre compas seulement, ou quatre ouvertures du même compas, et avec les deux seuls points a et b pris hors de la circonférence, diviser la circonférence du cercle en cent vingt parties égales. En effet, après avoir, avec le point a, et avec trois compas, divisé la circonférence en vingt-quatre parties (*problême du numéro* 32), et ayant trouvé le point b (40), qu'on fasse, avec le quatrième compas, à $Ab = BP = PQ = QR = RS$, et par conséquent aussi $= SE$ (41). Ensuite, pour diviser l'arc NG en cinq parties égales, dont chacune soit la cent vingtième de la circonférence, qu'on fasse à $Ab = Lq = qp = I\pi = O\rho = \rho\omega = \omega\phi$. L'arc NG sera divisé en cinq parties égales, et on pourra diviser de la même manière tous les autres arcs GC, CI, etc.

Démonstration. Puisqu'on a $BQ = RE$, $BF = FE$, $IF = FL$, on aura aussi $IQ = LR$; et comme $Lq = QR$, on aura aussi $Qq = LR = QI$. De même QP étant égal à qp, Qp sera aussi égal à Pp et à QI. Pareillement, à cause de $I\pi = QP$, on aura $\pi P = QI$; et comme on a $O\omega = BQ$, $OI = IB$, on aura encore $I\omega = QI$. De plus, à cause de $\omega\phi = I\pi$, on a $I\omega = \phi\pi = QI$: puis, comme on a $O\phi = O\rho + \rho\omega + \omega\phi = BP + PQ + QR = BR$, en retranchant de part et d'autre les arcs égaux OG, BL, on aura pour reste $G\phi = LR = QI$. Enfin, à cause de $BI = LN$, si on retranche les arcs égaux BQ, Lp, on aura pour reste $QI = Np$. Donc on aura divisé l'arc NG en cinq arcs Np, pP, $P\pi$, $\pi\phi$, ϕG égaux chacun à l'arc QI, et par conséquent égaux entr'eux; et puisque l'arc NG est un vingt-quatrième de la circonférence (32), sa cinquième partie en sera le cent vingtième.

44. Nous avons donc jusqu'à présent fait, sans aucun autre instrument que le compas, les mêmes divisions en parties égales de la circonférence, que celles que faisoient les Anciens en inscrivant au cercle les cinq polygones réguliers; savoir: le triangle, le quarré, le pentagone, l'exagone et le décagone, et en joignant l'usage de la règle à celui du compas, tandis que l'on y est parvenu d'une manière commode, en prenant seulement deux points hors de la circonfé-

rence, et en n'employant que quatre ouvertures d'un seul compas, ou bien quatre compas (43. 8). En comparant cette méthode avec la méthode connue, on pourra juger de sa simplicité, de sa briéveté et de sa précision dans la pratique.

45. Comme on a par le n.º 40 :

$$Xb + XF = Fb = Xb + XA$$

$$\text{et } Ab = Xb - XA,$$

on aura $Fb \,.\, Ab = (Xb)^2 - (XA)^2 = (XB)^2 - (XA)^2 = (AB)^2$; ou bien $Fb \,.\, Ab = (FA)^2$: donc la droite Fb sera divisée au point A en moyenne et extrême raison (30. *liv.* 6).

46. On aura donc $Fb \,.\, Ab = (FA + Ab) \,.\, Ab = (fA)^2 = (fA + Ab) \,.\, Ab = fA \,.\, Ab + (Ab)^2 = fA(fA - fb) + (Ab)^2 = (fA)^2 - fA \,.\, fb + (Ab)^2$. Ayant donc $(fA)^2 = (fA)^2 - fA \,.\, fb + (Ab)^2$, retranchant $(fA)^2$, et ajoutant $fA \,.\, fb$, on aura $fA \,.\, fb = (Ab)^2$: donc aussi la ligne Af sera divisée en b, en moyenne et extrême raison.

47. Si du centre b, et d'un rayon bA, on décrit un arc qui coupe la circonférence au point T, on aura $Tf = Tb = bA$. En effet, on aura $fA \,.\, fb = (Ab)^2 = (Tf)^2$:

d'où (17. *liv.* 6) on tire cette proportion $fA : fT :: fT : fb$. Donc les deux triangles fAT, fbT, qui ont l'angle en f commun, auront leurs côtés contigus proportionnels : donc (6. *liv.* 6) ils seront semblables : donc aussi le triangle fbT sera isoscèle ; ce qui donne $Tb = Tf$.

48. L'angle $TbA = Tfb + bTf$ (32. *liv.* 1) $= Tbf + bAT$; en ajoutant Tbf, on aura $TbA + Tbf = 2\,Tbf + bAT$; mais $TbA + Tbf$ valent deux angles droits (13. *liv.* 1.) : donc $2\,Tbf + bAT$ valent deux angles droits. Mais $Tbf = bAT + bTA$ (32. *liv.* 1) $= 2\,bAT$. (5. *liv.* 1). Donc $2\,Tbf + bAT = 5\,bAT =$ deux angles droits. Donc l'angle bAT, qui est le même que l'angle fAT, sera un cinquième de deux angles droits, et l'arc fT un dixième de la circonférence.

49. Si on prend la corde $ft = fT$, on aura aussi $bt = ft$ (47), et les deux droites tT, bf se couperont au milieu à angles droits en un point y (14) ; alors on aura $(Tf)^2 = (Ty)^2 + (fy)^2$; d'où on tire $4(Tf)^2 = 4(Ab)^2 = 4(Ty)^2 + 4(fy)^2 = (Tt)^2 + (fb)^2$; et $(Tt)^2 = 4(Ab)^2 - (fb)^2$. Mais $(fb)^2 = (fA - Ab)^2 = (fA)^2 -$

$2fA.Ab+(Ab)^2$. Donc $(Tt)^2=3(Ab)^2-(fA)^2+2fA.Ab$. Or $2fA.Ab=2fA(fA-fb)=2(fA)^2-2fA.fb=2(fA)^2-2(Ab)^2$. Donc $(Tt)^2=3(Ab)^2-(fA)^2+2(fA)^2-2(Ab)^2=(fA)^2+(Ab)^2=(BA)^2+(Ab)^2=(Bb)^2$. Donc aussi $Tt=Bb$; mais Tt est la corde de deux dixièmes, ou d'un cinquième de la circonférence. Donc Bb l'est aussi; donc:

50. *Dans le triangle rectangle* A B b, *le quarré du côté du pentagone est égal à la somme des quarrés des côtés de l'exagone et du décagone.* Cette proposition est la 10.e du *liv.* 13 d'Euclide.

51. Les côtés du triangle rectangle ABb sont cordes d'arcs qui sont en progression contre harmonique. Car ces arcs sont $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ de la circonférence, et on trouve cette proportion : $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}:\frac{1}{6}-\frac{1}{10}::\frac{1}{10}:\frac{1}{5}$.

52. Des proportions $fb:bA::bA:Af$ (46), et $fb:bA::bA:AF$, il suit que le diamètre Ff est divisé aux points A et b en trois parties qui sont en proportion continue.

PROBLÊME.

53. *Diviser la circonférence en vingt parties, c'est-à-dire trouver la vingtième partie de la circonférence.*

Solution. Tout étant comme au n.° 40, soit fait dans lequart de cercle BVf, $fv = Bb$, l'arc BV sera la vingtième partie de la circonférence.

Démonstration. En effet, on a $BV = Bf - fV = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ (40) $= \frac{1}{20}$.

Autre solution. Tout étant aussi comme au n.° 40, soit fait dans le quart de cercle BVf, $bV = AB$, l'arc BV sera la vingtième partie de la circonférence.

Démonstration. La droite Ab étant la corde de la dixième partie de la circonférence, l'arc BV sera la moitié de cette dixième partie, c'est-à-dire, la vingtième (24).

54. A cause de $Vb = VA$, le triangle AVb est isoscèle, ainsi que bTf. De plus, comme on a $FA : Ab :: Ab : bf$ (52), ou en substituant des valeurs égales : $VA : Ab :: Tb : bf$, les deux triangles isoscèles auront leurs côtés proportionnels : donc ils seront semblables. (6. *liv.* 6.)

55. Comme on a aussi $bF : FA :: FA : Ab$ (45, et 17. *liv.* 6), en substituant des valeurs égales, on aura $bF : bV :: bV : Ab$. Donc les côtés qui forment l'angle commun en b, dans les deux triangles bFV, bVA, seront proportionnels, et par conséquent ces triangles seront semblables (6. *liv.* 6). Donc aussi le triangle bFV sera isoscèle, et on aura $FV = Fb$.

56. L'arc fV étant un cinquième (53), et l'arc fT un dixième de la circonférence (47), l'arc TV en sera aussi un dixième ; d'où la corde $TV = Tf = Tb = bA$. Mais on a aussi $Vb = TA$ (53). Donc les deux triangles VTb, TbA seront égaux, puisqu'ils auront tous leurs côtés respectivement égaux. (8. 4. *liv.* 1.)

PROBLÊME.

57. *Diviser une circonférence en 240 parties égales.*

Solution. Tout étant comme au n.° 43, soit divisé par le moyen donné (38, 39) l'arc NG au point δ en deux parties égales, ce qu'on peut faire en faisant les cordes $\nu\beta$, $\beta\delta$ égales au rayon $e\nu$. Les deux arcs $P\delta$, $\delta\pi$ vaudront

vaudront chacun la deux cent quarantième partie de la circonférence. *Voyez* encore le n.° 58.

Démonstration. En effet, soustrayant des deux moitiés $N\delta$, $G\delta$, les arcs égaux NP, $G\pi$ (43), il restera $P\delta = \delta\pi$. Mais $P\pi$ est la cent vingtième partie de la circonférence (43); donc, etc.

58. On pourra, avec une ouverture de compas prise du point δ à un point quelconque N de la division déjà obtenue (43), continuer à diviser en deux toutes les cent vingtièmes parties de la circonférence. Par exemple, avec cette ouverture, en plaçant le centre en p, on divisera l'arc $\pi\phi$; en plaçant le centre en P, on divisera l'arc ϕG, et ainsi de suite.

59. Les trois points a et b [*fig.* 12] et e [*fig.* 11] sont très-remarquables. Car, au moyen de ces seuls points pris hors de la circonférence, nous avons divisé la même en deux cent quarante parties égales, et nous sommes ensuite parvenus à en déterminer la deux cent quarantième partie, en n'employant que les cinq ouvertures de compas AB, BD, Aa, aN, Ab. Comme ces points peuvent servir dans la suite à plusieurs autres usages

importans, nous trouverons, par rapport à eux, trois équations fondamentales, desquelles nous retirerons, quand il sera à propos, douze autres équations, et dont nous ferons voir les applications, lorsque l'occasion s'en présentera.

PROBLÊME.

60. *Diviser un arc quelconque* BC [fig. 13] *en deux parties égales en* G.

Solution. Avec le rayon AB, qui a décrit l'arc BC à diviser, et des centres B et C, qui sont les deux extrémités de l'arc, soient décrits les arcs AD, AE; qu'on fasse à $BC = AD = AE$ (10); puis des centres D et E, et d'un rayon $DC = BE$, soient décrits deux arcs qui se coupent en F. Maintenant avec le rayon AF, et des mêmes centres D et E, qu'on décrive deux autres arcs qui se coupent en G, le point G sera sur la circonférence, et on aura l'arc $BG = GC$.

Démonstration. Les côtés des trois triangles DBA, BAC, ACE, étant respectivement égaux, on aura l'angle $BCA = CAE$ (8. *liv.* 1). Donc BC sera parallèle à AE (28. *liv.* 1) : donc $BAEC$ sera un parallélogramme (33. *liv.* 1).

On prouvera de la même manière que $BCAD$ est un parallélogramme. On a ensuite, dans le parallélogramme $BCAD$, la diagonale AB égale aux côtés opposés BD, AC. Donc le quarré de la diagonale DC sera égal à la somme du quarré de l'autre diagonale AB, et des quarrés des deux côtés AD, BC (25), c'est-à-dire, $(DC)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$; et comme les deux droites DA, AE sont parallèles à la droite BC, les points D, A, E seront dans la même ligne droite. De plus, les triangles FAD, FAE ayant tous leurs côtés égaux, les angles FAD, FAE seront égaux (8. *liv.* 1), et par conséquent droits (13. *liv.* 1). On aura donc $(DF)^2 = (AD)^2 + (AF)^2$; mais $(DF)^2 = (DC)^2$. Donc $(AD)^2 + (AF)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$; et ôtant $(AD)^2$, on aura $(AF)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$. Mais $(DG)^2 = (AF)^2$: donc $(DG)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$; et parce les triangles GAD, GAE ont leurs côtés égaux, les angles GAD, GAE sont égaux et droits (8) (13. *liv.* 1). Donc $(DG)^2 = (AG)^2 + (AD)^2$: donc $AB = AG$, et par conséquent le point G est sur la circonférence. Otant ensuite des angles droits GAD, GAE, les angles égaux BAD, CAE, les angles restans

BAG, GAC seront égaux. Donc l'arc BC est divisé en deux parties égales au point G (33. *liv.* 6).

61. *Remarque.* Si l'arc à diviser étoit très-petit comme bc [*fig.* 13], il vaudroit mieux, dans la pratique, y ajouter de part et d'autre des arcs égaux un peu grands, comme bC, cC, et diviser ensuite l'arc BC en deux parties égales au point G; l'arc bc se trouveroit ainsi divisé en deux parties égales.

62. Si au contraire l'arc à diviser étoit trop grand comme PGQ, il faudroit en retrancher de part et d'autre des arcs égaux PB, QC, afin de donner une grandeur moyenne à la moitié de l'arc BC, et ensuite diviser cet arc par le milieu au point G; l'arc PGQ se trouveroit ainsi divisé en deux parties égales.

63. On voit donc que tous les problêmes relatifs à la division de la circonférence, ou des arcs de cercle qu'on peut résoudre avec la règle et le compas, peuvent se résoudre aussi avec le compas seul.