GÉOMÉTRIE DU COMPAS.

LIVRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES.

1. J'APPELLE *Géométrie du compas*, celle qui, par le moyen du compas seulement, et sans le secours de la règle, détermine la position des points.

Etant donnés, par exemple, deux points *A* et *E* [*figure* 1.re], si l'on cherche le troisième point *D*, qui soit aussi éloigné de chacun d'eux qu'ils le sont entr'eux, qu'on décrive d'un intervalle égal au rayon *AE*, et des points *A* et *E* comme centres, les deux cercles *EDB*, *ADV*, qui se coupent au point *D*, ce point *D* sera le point cherché, puisqu'il sera éloigné des points *A* et *E* d'un intervalle égal à *AE*. (*Prop.* 1, *liv.* 1 *des Elémens d'Euclide.*) Ce point *D* a été trouvé avec le seul compas, sans le secours de la règle.

2. Il peut arriver que l'on trouve la position d'un point avec le seul compas, mais que pour démontrer la proposition, on ait besoin de la règle dans la construction de la figure.

Soient, par exemple, donnés deux points A et B [*fig.* 2] qui soient éloignés entr'eux d'un certain intervalle pris pour unité, ou qu'on fait $= 1$, si on cherche un point D qui soit éloigné de B de l'intervalle $BD = \sqrt{3}$, on résoudra le problême de la manière suivante :

Du centre A et d'un rayon AB, soit décrit le cercle BCD; avec le même rayon et du centre B, soit décrit un arc qui coupe la circonférence au point C; puis du centre C et avec le même rayon, soit décrit un arc qui coupe plus loin la circonférence en D; on aura en D le point cherché, ainsi trouvé sans le secours de la règle.

Pour démontrer néanmonis que l'intervalle $BD = \sqrt{3}$, on aura besoin de lignes droites qui se tracent avec la règle. Soit BE le diamètre du cercle BCD, si on mène les droites BD, DE, le triangle BDE sera rectangle en D (31. *liv.* 3), et on aura : $(BE)^2 = (BD)^2 + (DE)^2$; d'où $(BD)^2 =$

$(BE)^2 - (DE)^2$. Mais l'intervalle BC étant égal à $CD = AB$, on aura encore $DE = AB$ (15. *liv.* 4), ou $DE = 1$, et $BE = 2$. On aura donc : $(BD)^2 = 4 - 1 = 3$: d'où $BD = \sqrt{3}$; ce qu'il falloit démontrer, et ce qu'on ne pouvoit faire sans la règle. Cette proposition est la 12.ᵉ du livre 13 d'Euclide.

3. De la définition précédente (1), il résulte qu'à la géométrie du compas appartiennent tous les problêmes que l'on peut résoudre avec le seul compas, quoiqu'on ne puisse pas les démontrer avec ce seul instrument. Tel est le problême précédent (2).

4. Cette géométrie sera, comme on le verra dans les exemples, d'un très-grand usage dans la pratique pour trouver des points avec la plus grande précision possible, et même beaucoup plus promptement avec le seul compas, qu'en y joignant le secours de la règle.

5. Nous résoudrons donc les problêmes avec le seul compas, et on pourra ensuite, pour les démonstrations, se servir de constructions faites suivant l'usage, avec la règle

et le compas. C'est pourquoi nous citerons les propositions et les livres d'Euclide.

6. Nous verrons aussi, au commencement de ce traité, que l'on n'a omis aucun des élémens nécessaires pour que l'on puisse, avec le seul compas, déterminer tous les points, de quelque problême que ce soit, qui jusqu'ici n'ont pu être déterminés qu'avec la règle et le compas réunis.

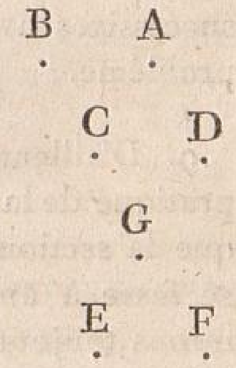
7. Nous ne placerons pourtant pas ici tous ces problêmes : mais après avoir démontré les élémens nécessaires et suffisans pour tous, nous en résoudrons un grand nombre des principaux, et sur-tout ceux qui sembleront les plus utiles ou préférables à cause de leur élégance.

8. Nous ajouterons ici en faveur des artistes pour lesquels, en grande partie, cet ouvrage est écrit, que bien convaincus de l'importance des erreurs qui résultent de l'écart et du rapprochement des branches du compas pour obtenir avec précision des ouvertures différentes, nous aurons soin de résoudre les problêmes avec le moindre nombre possible d'ouvertures de compas. Il seroit même mieux que l'artiste eût à sa dis-

position autant de ces compas *fidèles* (ainsi appelés, parce qu'on peut s'assurer qu'ils conservent exactement l'ouverture donnée), qu'il y a d'ouvertures exigées par la solution du problême ; car il arrivera souvent que nous serons obligés de nous servir plusieurs fois de la même ouverture, après en avoir employé une ou plusieurs autres : alors, sans élargir ou resserrer un seul compas, nous reprendrons le compas mis de côté qui conserve cette ouverture. C'est pourquoi nous appellerons quelquefois du nom de premier, second, troisième compas, les ouvertures successives avec lesquelles on aura résolu le problême.

9. D'ailleurs, comme pour la précision pratique de la position d'un point, il importe que la section des lignes qui le déterminent se fasse à angle droit ou approchant, nous ferons toujours en sorte qu'un arc en coupe un autre, ou à angle droit, ou au moins sous un angle qui en diffère peu.

Afin d'être plus courts, sans cependant devenir obscurs, en indiquant la construction des figures, nous emploierons souvent des expressions abrégées, que la seule inspection de la figure fera bientôt comprendre. Par exemple, dans la figure 2, au lieu de dire : « *Avec le rayon* AB, *et du centre* B, *soit* » *décrit un arc qui coupe la circonférence* » BCD *au point* C ; *puis avec le même* » *rayon et du centre* C, *qu'on décrive un* » *arc qui coupe la même circonférence en* » D, *etc.* », nous dirons seulement : « *Soit* » *fait à* AB = BC = CD, etc. » En effet, c'est assez dire que les points *B*, *C* et *D*, avec lesquels on indique la même circonférence *BCD*, sont des points de cette circonférence ; ainsi il n'y a aucun risque d'équivoque.



11. De même étant donnés, par exemple, trois intervalles *AB*, *CD*, *EF*, quand on dira : « *Soit fait à* CD = EG, *à* AB = FG, » on devra entendre ceci : « *Avec* » *un rayon* CD, *et du centre* » E, *soit décrit un cercle* » *dans la circonférence duquel soit le point* » G ; *ensuite, avec l'intervalle* AB *et du* » *centre* F, *soit décrit un autre cercle qui* » *coupe le premier au point* G. »

12. D'autres fois, dans les démonstrations,

nous désignerons quelques lignes droites qui ne seront pas dans la figure, en nommant les deux points extrêmes auxquels elles devroient être menées, comme si, dans la figure 11, on nommoit la droite AB, ou bien CD. C'est ainsi que nous ferons quand il n'y aura pas à craindre d'obscurité, pour conserver la figure nette, et faire mieux paroître la construction faite avec le seul cercle.

13. *Lemme.* Si des deux centres A et B, et avec les rayons AP et AQ, on décrit des arcs qui se coupent en P et p, Q et q, les points Q, q, P et p seront dans la même ligne droite.

Démonstration. Tous les côtés des triangles APp, BPp [*fig.* 3], étant respectivement égaux entr'eux par construction, l'angle APp sera égal à l'angle BPp, (8. *liv.* 1). On démontre de même que $APQ = BPQ$. Donc $APp + APQ = BPp + BPQ$. Mais la somme de ces quatre angles est égale à quatre angles droits (13. *liv.* 1. *coroll.*). Donc chacune des sommes de deux angles est égale à deux angles droits. Donc la ligne QPp est droite (14. *liv.* 1). On démontre de la même manière que la ligne Ppq est droite. Donc les points Q, P, p, q sont dans la même ligne droite.

14. Les choses étant comme au numéro précédent, les droites AB, Bp, ainsi que celles AB, Qq, se couperont à angles droits en deux parties égales au point M, et les droites QP, qp seront égales.

Démonstration. En effet, à cause de l'égalité des côtés des deux triangles APB, ApB, on a l'angle $PAB = pAB$ (8. *liv.* 1). Mais on a encore $APp = ApP$ (5. *liv.* 1). Donc aussi $AMP = AMp$ (*coroll. prop.* 32, *liv.* 1). Donc ces deux angles sont droits (13. *liv.* 1), et la ligne Pp sera partagée en deux parties égales au point M par la démonstration de la propos. 10. liv. 1. On démontrera de la même manière que les droites Qq et AB sont divisées en deux parties égales au point M. Donc, en retranchant des droites égales QM et qM, les parties égales PM, pM, les restes QP, qp seront égaux.

15. *Corollaire.* On aura donc : $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$ (47. *liv.* 1).

16. *Lemme.* Tout étant comme au numéro 13, on aura :

$$(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ.$$

Démonstration. Car on a $(AQ)^2 = (AP)^2$

$+ (PQ)^2 + 2\,MP.PQ$ (12. *liv.* 2). Mais on a $2MP = Pp$ (14). Donc, etc.

17. *Lemme.* On aura donc $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - Pp \cdot pQ$.

Démonstration. Car on a $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - 2\,pM . pQ$ (13. *liv.* 2). Mais on a $2\,pM = pP$ (14). Donc, etc.

18. *Corollaire* 1.er Puisque $pQ = pP + PQ$, on aura : $(pQ)^2 = pP.pQ + PQ.pQ$ (2. *liv.* 2) : d'où, en soustrayant $pP.pQ$, on a : $(pQ)^2 - pP.pQ = PQ.pQ$; et substituant cette valeur dans celle de $(AQ)^2$ (17), on aura :

$$(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \,.\, PQ.$$

D'où l'on tire, en soustrayant $(Ap)^2$ de part et d'autre : $(AQ)^2 - (Ap)^2 = pQ.PQ$.

Donc (en effectuant la multiplication de $AQ + Ap$ par $AQ - Ap$) on trouvera : $(AQ + Ap)(AQ - Ap) = (AQ)^2 - (Ap)^2$; et par conséquent : $(AQ + Ap)(AQ - Ap) = pQ \cdot PQ$: d'où (par la 16.e propos. du liv. 6) on déduit la proportion

$$pQ : AQ + Ap :: AQ - Ap : PQ :$$

où substituant de même AP au lieu de Ap, et transposant les extrêmes :

$$PQ : AQ + AP :: AQ - AP : PQ.$$

De ces deux proportions, on déduit expressément ce fameux théorême :

Dans un triangle quelconque, un côté quelconque est à la somme des deux autres côtés, comme leur différence est à la différence ou à la somme des segmens que fait sur ce côté la perpendiculaire menée de l'angle opposé, suivant qu'elle tombe en dedans ou au dehors du triangle.

19. *Corollaire* 2. On aura $AQ = pQ$. Otant de part et d'autre les deux termes égaux $(AQ)^2$, $(pQ)^2$, et ajoutant des deux côtés la partie $pP.pQ$, on aura $pP.pQ = (Ap)^2$.

20. *Lemme.* Tout étant comme dans le n.° 13, si l'angle RpQ est droit, [*fig.* 4.] et que l'angle $RpS = RpA$, et $pS = pR = pA$, AS sera parallèle et égale à Pp; et on aura $(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS.PQ$.

Démonstration. En effet, si des deux angles droits RpQ, Rpq, on soustrait les deux angles égaux RpA, RpS, il restera les deux angles égaux ApP, Spq. Mais $ApP = APp$. (5. *liv.* 1.) Donc $Spq = APq$. Donc AP, Sp sont parallèles (29. *liv.* 1.) Mais elles sont aussi égales par construction. Donc les deux droites AS, Pp, sont égales et parallèles (33. *liv.* 1.)

On a aussi $(RQ)^2 = (Rp)^2 + (pQ)^2$ (47. *liv.* 1.) $= (Ap)^2 + (pQ)^2$; et par le *lemme* 17, $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2$

$-pP.pQ$. Donc $(AQ)^2=(RQ)^2-pP.pQ,=(RQ)^2-AS.pQ$.

21. *Lemme*. Tout étant comme dans les n.os 13 et 20, on aura $(SQ)^2=(RQ)^2+AS.pQ$.

Démonstration. En effet, si on fait $ST=Sp$, $pT=pP$, (11) les deux triangles SpT, APp auront les angles SpT, APp égaux entr'eux (8. *liv.* 1.) Donc la ligne PpT est droite. (27. *liv.* 1.) On aura ensuite $(SQ)^2=(pS)^2+(pQ)^2+pQ.pT$ (16.) Mais on a $(pS)^2+(pQ)^2=(pR)^2+(pQ)^2=(RQ)^2$; et $pT=pP=AS$. Donc $(SQ)^2=(RQ)^2+AS.pQ$.

Des deux *lemmes* précédens, il résulte ce corollaire que : $(AQ)^2+(SQ)^2=2(RQ)^2$.

22. *Lemme*. Si on a $AQ=pQ=BQ$, et $Ap=pB=pS$, pS étant sur le prolongement de Bp, on aura $AS.pQ=(Ap)^2$.

Démonstration. Les triangles isoscèles AQp, BQp ayant les côtés égaux entr'eux, on aura l'angle $QpA=QpB$ (8. *liv.* 1.) On aura ensuite l'angle ApB, qui est la somme des deux autres, égal aussi à la somme des deux angles SAp, ASp (32. *liv.* 1.); qui sont égaux entr'eux, parce que le triangle

$A\,p\,S$ est isoscèle (5. *liv* 1.); chacun d'eux sera égal à l'angle $A\,p\,Q = p\,A\,Q$ (5. *liv*. 1.) On aura donc le triangle $p\,A\,S$ semblable au triangle $Q\,p\,A$ (32. *liv*. 1. 4. *liv*. 6.) Et de-là, $p\,Q : A\,p :: A\,p : A\,S$ et $A\,S \,.\, p\,Q = (A\,p)^2$. (17. *liv*. 6.)

23. *Lemme*. Si on a $A\,B = A\,C = B\,D$, et $A\,D = B\,C$, on aura : $D\,C \,.\, A\,B = (A\,B)^2 - (A\,D)^2$.

Démonstration. Les deux triangles $A\,D\,B$, $A\,C\,B$ [*fig*. 5.] ayant les côtés respectivement égaux, seront égaux. (8. et 26. *liv*. 1.) Puis tous les deux étant posés sur la même base $A\,B$, seront compris entre les mêmes parallèles $D\,C$, $A\,B$, (39. *liv*. 1.) Si donc sur la ligne $B\,A$ on prend $B\,E = D\,C$, $D\,E$ sera égale et parallèle à $B\,C$ (33. *liv*. 1.) et aussi égale à $D\,A$; d'où les deux triangles isoscèles $B\,D\,A$, $D\,A\,E$, qui ont un angle commun en A, seront semblables (5, 32. *liv*. 1, et 4. *liv*. 6.) et on aura $A\,B : A\,D :: A\,D : A\,E$; ce qui donne $A\,B \,.\, A\,E = (A\,D)^2$ (17. *liv*. 6.) On a ensuite $A\,B \,.\, A\,E + A\,B \,.\, B\,E = (A\,B)^2$ (2. *liv*. 2.); et substituant pour $A\,B \,.\, A\,E$ sa valeur $(A\,D)^2$ et $D\,C$ à la place de $B\,E$, on a $(A\,D)^2 + A\,B \,.\, D\,C = (A\,B)^2$. Enfin, soustrayant $(A\,D)^2$ on aura $D\,C \,.\, A\,B = (A\,B)^2 - (A\,D)^2$.

24. *Lemme.* Si dans le cercle $B\mu G$, [*fig.* 6] décrit d'un rayon AB, on élève au centre A la perpendiculaire Ae égale à la corde BG de l'arc $B\mu G$, et que du point e comme centre, et d'un rayon AB, on décrive un arc qui coupe la circonférence au point μ, l'arc $B\mu$ sera égal à la moitié de l'arc $B\mu G$.

Démonstration. A cause de l'égalité des côtés des deux triangles ABG, $A\mu e$, on a l'angle $GAB = A\mu e$ (8. *liv.* 1.) Soit divisé par la moitié l'angle $A\mu e$ par la droite μM, le triangle $\mu e A$ étant isoscèle, on a l'angle $\mu e M = \mu AM$; ensuite les deux triangles $\mu e M$, μAM ayant leurs deux autres angles égaux, on aura encore le triangle $\mu Me = \mu MA$. (*Coroll.* 32. *liv.* 1.); d'où μM est perpendiculaire à Ae (13 *liv.* 1.), et parallèle à AB, (29. *liv.* 1.), et on aura l'angle $M\mu A = \mu AB$, (27. *liv.* 1.) : donc μAB sera la moitié de l'angle GAB; donc aussi l'arc $B\mu$ sera la moitié de l'arc $B\mu G$.

25. Si dans le parallélogramme $ABMN$, [*fig.* 7] on a la diagonale MA égale aux côtés opposés MB, AN, le quarré de l'autre diagonale BN est égal au quarré de la première, plus aux deux quarrés des deux autres côtés.

Démonstration. Soit divisé AB en deux parties égales au point m par la perpendiculaire Mm (10. 11. *liv.* 1.); et sur la droite BA prolongée, soit pris $An = Bm$, on aura $mn = BA = MN$. On aura donc le parallélogramme $MNnm$ (33. *liv.* 1.), et l'angle NnB sera droit (27. *liv.* 1). D'où $(BN)^2 = (AB)^2 + (AN)^2 + 2AB \cdot An$ (12. *liv.* 2). Mais $An = \frac{1}{2} AB$. Donc $(BN)^2 = (AN)^2 + 2(AB)^2 = (AN)^2 + (AB)^2 + (MN)^2$.

26. Si dans un triangle quelconque BPE, [*fig.* 8] on coupe en deux parties égales au point A la base BE, et que de l'angle opposé P, on mène la droite PA, la somme des quarrés des côtés BP et PE sera égale à la somme des quarrés égaux des deux segmens, en y ajoutant le double quarré de la droite AP.

Démonstration. En effet, si on abaisse la perpendiculaire PR sur la base BE, on aura $(BP)^2 = (BA)^2 + (AP)^2 + 2BA \cdot AR$ (12. *liv.* 2). On aura donc $(PE)^2 = (AE)^2 + (AP)^2 - 2AE \cdot AR$ (13. *liv.* 2). Donc après avoir formé la somme des valeurs des deux quarrés $(BP)^2$ et $(PE)^2$, et de plus BA étant égal à AE, on aura $(BP)^2 + (PE)^2 = (BA)^2 + (AE)^2 + 2(AP)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$.