1179

Lehrbuch
der
Gesetze des Gleichgewichts
und
der Bewegung
fester und flüssiger Körper

von

H. W. Brandes,
Professor an der Universität in Breslau.

Zweiter Theil.

Mit 5 Kupfertafeln.

Leipzig,
bei Paul Gotthelf Kummer
1818.

Vorrede.

Obgleich ich schon in der Vorrede zum ersten Theile den Zweck angezeigt habe, den ich mir bei der Ausarbeitung dieses Buches vorsetzte: so ist es doch wohl nicht überflüssig, auch hier noch einige Erörterungen hierüber mitzutheilen.

Daß ich den mit wenigen Vorkenntnissen ausgerüsteten Lesern ein ihnen völlig verständliches Buch, das zugleich über die meisten und wichtigsten Lehren der Mechanik gründlichen Aufschluß gäbe, in die Hände zu geben wünschte, habe ich schon in jener Vorrede gesagt. Ich wünsche aber nicht so verstanden zu werden, als wollte ich dadurch, daß ich eine möglichst vollständige Mechanik ohne höhere Analysis zu lehren versuche, diesen höheren Kenntnissen ihren Werth absprechen, oder als hegte ich den kühnen Gedanken, mein Buch könne für irgend eine Classe von Lesern die Anwendung der Analysis ganz entbehrlich machen. Wie weit ich hievon entfernt bin, habe ich an mehreren Stellen des Buches wohl deutlich genug gesagt, indem ich ausdrücklich aufmerksam darauf mache, wie oft die hier angestellten Betrachtungen zwar wohl zu Beantwortung der wichtigsten vorkommenden Fragen leiten, aber uns doch das eigentliche Gesetz nicht erkennen lassen, nach welchem die einzelnen Größen von einander abhängen, und so uns über das Wesentlichste nicht belehren. Jenen Vorwurf, daß ich die Nothwendigkeit der Analysis zweifelhaft machen wolle, habe ich also wohl nicht zu fürchten; aber vielleicht kann man mir dagegen einen andern Vorwurf machen, daß nämlich mein Buch alle Zwecke nur halb erfülle, indem es zu einer ersten populären Uebersicht der Mechanik schon zu gelehrt sei, und dennoch auch den Leser, der gern ganz in die Tiefe der Wissenschaft eindringen will, unbefriedigt lasse. Ich will diesen Vorwurf nicht dadurch abzuweisen suchen, daß ich an die zahlreiche Classe von Lesern erinnere, die grade auf dem Standpuncte stehen, welchen mein Buch voraussetzt, die nämlich Belehrung über alle Gegenstände der Mechanik bedürfen, ohne die erforderlichen Vorkenntnisse aus der höhern Analysis zu besitzen; sondern ich will meine aus der Natur der Sache hergenommene Ansicht mittheilen, die, wie mich dünkt, einen Grund angiebt, warum jeder Lehrling der Mechanik, wäre er auch mit den besten analytischen Vorkenntnissen ausgestattet, wohlthut, sein Studium mit einem elementarischen Buche anzufangen. Es ist bekannt, wie oft die geschickte Anwendung der Analysis, vorzüglich der Integralrechnung, uns auf einmal zu den Formeln führt, welche die Beantwortung aller Fragen enthalten, wie aber auch sehr oft durch diesen glücklichen Sprung der natürliche Zusammenhang der Formel mit der Sache selbst uns ganz unbemerkt bleibt. Wenn wir also gleich der höheren Rechnungen nothwendig bedürfen, um immer tiefer in die schwierigen Theile der Wissenschaft einzudringen, wenn wir gleich ihrer nicht entbehren können, wenn wir neue Forschungen anstellen wollen, und selbst schon, wenn wir den wahren Zusammenhang aller Erscheinungen in einem leichten Gesetze darstellen wollen: so ist es doch sehr nöthig, daß wir im Anfange unserer Forschungen uns jedes Schrittes deutlich bewußt werden, daß wir uns klar vorstellen, was uns zur Erreichung des Zieles führen soll und geführt hat, und uns üben, die in der Natur der Sache liegenden Umstände so zu erwägen, daß aus ihnen auch die entferntern Erfolge erkannt, und, wo möglich, die Gesetze, von denen sie abhängen, aufgefunden werden. Zu diesem Zwecke nun scheint mir für den Anfänger ein solches Buch sehr nützlich, welches, wie ich es hier zu leisten gesucht habe, an die leichtesten Lehren der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie die Lehrsätze der Mechanik anknüpft, das alle diese Lehrsätze in klaren Worten ausspricht und sich sogar nicht scheuet, oft die Sprache der Ungelehrten zu reden, um selbst da, wo sich bis zu den einfachen Hauptgesetzen nicht durchdringen läßt, doch die Betrachtungen vollständig anzudeuten, die man anstellen muß, um zu Resultaten zu gelangen.

Wenn man so den ganzen Zusammenhang der Erscheinungen übersehen, wenn man die Gesetze ihrer gegenseitigen Abhängigheit aufgesucht hat: so entsteht fast von selbst das Bedürfniß, mit Hülfe vollkommnerer Vorkenntnisse auch in Rechnungsformeln die Resultate auf die leichteste Weise darzustellen; und wer mit den Principien der Differentialrechnung bekannt ist, fängt von selbst schon an zu bemerken, wie nützlich ihm die Anwendung derselben hier werden könnte. Um nun hier den Leser bei der ersten Anwendung der Analysis auf den rechten Weg zu leiten, um ihm an einigen Beispielen zu zeigen, wie er verfahren muß, habe ich einige Zusätze für geübtere Leser beigefugt. Ich bin hierin Herrn Professor Bessels Rath gefolgt, der mir bemerklich machte, daß junge Leute, wenn sie auch die Sache selbst schon völlig übersehen, doch nicht sogleich ein Werk zu verstehen im Stande sind, das weitere Ausführungen mit Hülfe der Analysis enthält, und daß es daher nothwendig sei, auch schon bei Erklärung der Anfangsgründe zu zeigen, wie man durch die Analysis die Resultate in dem passendsten Ausdrucke darstelle. Diese Bemerkung bewog mich, meinen ersten Plan ein wenig zu erweitern, und ich hoffe, daß diese Zugabe den Anfängern um so angenehmer sein wird, da allerdings der Uebergang von den Elementen zu einem Buche, wie etwa Poissons Mechanik ist, viele Schwierigkeit hat. Daß ich diesen Zusätzen nicht die Ausführlichkeit und Vollständigkeit geben konnte, die man in einem Lehrbuch der analytischen Mechanik verlangen würde, bedarf wohl keiner Entschuldigung, da ich besorgen mußte, das Buch dadurch zu sehr zu vergrößern, und es hier auch in der That hinreicht, nur den Weg gezeigt zu haben, indem das Lesen vollständiger Bücher über diesen Gegenstand doch immer unentbehrlich geblieben wäre. In diesen Zusätzen habe ich mehrmals auf Pasquichs Unterricht in der mathematischen Analysis (Leipzig 1791.) verwiesen, wo man die Integrationen ausführlicher dargestellt findet.

Diejenigen, welche vollständigere Belehrung wünschen, habe ich zwar im Buche selbst auf die Schriften verwiesen, wo sie eine weitere Ausführung der hier abgehandelten Lehren finden, doch mögen hier noch die Titel einiger das Ganze umfassender Lehrbücher stehen. Für die Statik fester Körper verdient

Eytelweins Lehrbuch der Statik fester Körper (Berlin, 1808.) 3 Bände

vor allen empfohlen zu werden, da es zugleich leicht verständlich, recht vollständig und gründlich ist, und immer zugleich die Anwendungen berücksichtigt. Die Mechanik fester Körper mit Einschluß der Statik trägt Poissons traité de mécanique sehr vollständig und in vielen Beziehungen sehr gut vor; indeß muß man schon gute Vorkenntnisse auch in der Mechanik haben, um bei dem Reichthum von Gegenständen sich nicht überhäuft zu fühlen, und um unter den immerfort an einander gereiheten Entwickelungen nicht zu ermüden. Wer mit den Hauptsätzen, die in jedem Abschnitte vorkommen, schon vertraut ist, und also eine Menge von Anknüpfepuncten findet, an welche sich die Menge neuer Sätze anschließt, die er hier findet, der wird unstreitig hier reichliche Belehrung und volle Befriedigung finden. Um aber bloß die Sätze, welche astronomischen Lehren zum Grunde liegen, vollständiger kennen zu lernen, thut man wohl, sich lieber mit Schuberts theoretischer Astronomie bekannt zu machen, deren dritter Theil diese Lehren sehr gründlich und klar abhandelt. Doch wer diesen Studien mehr Zeit widmen kann, dem sind auch Eulers Schriften, weil sie so klar, so ruhig verweilend bei jedem einzelnen Umstande, den Leser ganz mit seinem Gegenstande vertraut machen, sehr zu empfehlen. Von der Hydrostatik und Hydraulik handelt zwar ebenfalls Poisson in dem angeführten Werke; aber ich kann nicht unterlassen, zu bemerken, daß mir hier Eulers Vortrag in den von mir übersetzten Gesetzen des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper (übersetzt mit Zusätzen von Brandes. Leipzig, 1806.) viele Vorzüge zu haben scheint, indem er mit Voraussetzung eben der Kenntnisse, die auch Poisson voraussetzt, den Leser viel vollständiger über alles belehrt, was unsre theoretische Hydraulik lehren kann. Für Leser von geringern Kenntnissen sind:

Bossut traité d'hydrodynamique (übers. von Langsdorf. Frankfurth, 1791.),
Eytelweins Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. (Berlin, 1801.),
Langsdorfs Lehrbuch der Hydraulik (Altenburg, 1794.),

sehr zu empfehlen. — Mehrere Bücher hier anzuführen, ist unnöthig, da meine Absicht nur ist, das zu bemerken, was sich als nächste Fortsetzung des Unterrichtes etwa an dieses Buch anknüpfen läßt.

Ueber die von mir befolgte Anordnung und Darstellung der einzelnen Materien in diesem Lehrbuche sage ich nichts, da, wie ich hoffe, fast überall die Gründe, warum ich so geordnet und so dargestellt habe, sich von selbst ergeben, auch bei vielen schwierigen Lehren der eigenthümliche Gang meiner Behandlung jedem Sachkundigen bemerklich werden wird, und hoffentlich den Fleiß, den ich auf jeden Gegenstand gewendet habe, bezeugen wird.

Breslau, am 18. März 1818.

H. W. Brandes.

Inhalt.

Die Gesetze der Bewegung fester Körper.

1. Abschnitt.

2. Abschnitt.

3. Abschnitt.

4. Abschnitt.

5. Abschnitt.

Die Gesetze der Bewegung flüssiger Körper.

1. Abschnitt.

2. Abschnitt.

3. Abschnitt.

4. Abschnitt.

5. Abschnitt.

Die Gesetze der Bewegung fester Körper.

Erster Abschnitt.

Von der Bewegung im Allgemeinen, und von der gleichförmigen Bewegung insbesondere.

§. 1. Bemerkung. Wenn ein Körper sich bewegt, so können entweder alle einzelne Puncte des Körpers nach parallelen Richtungen fortgehen, oder es ist mit dem Fortrücken des ganzen Körpers zugleich eine Drehung desselben, die sehr mannigfaltig verschieden sein kann, verbunden. Um diese zusammengesetztern Bewegungen zuerst ganz von unserer Betrachtung auszuschließen, beschränken wir unsre Untersuchung auf die Bewegung eines einzelnen Punctes.

Die Bewegung eines Punctes kann entweder mit immer gleicher Geschwindigkeit geschehen, oder sie kann ungleichförmig sein; der Punct kann entweder in grader oder in krummer Linie fortgehen; sein Weg kann entweder ganz frei sein, so daß der Punct den auf ihn wirkenden Kräften ohne Hinderniß folget, oder der bewegte Punct kann sich an der Oberfläche eines festen Körpers befinden, so daß er nicht nach allen Richtungen frei dem Eindrucke der auf ihn wirkenden Kräfte folgen kann.

§. 2. Bemerkung. Um die Bewegung eines Punctes genau zu kennen, muß in jedem Augenblicke seine

Lage und seine Geschwindigkeit bekannt sein. Seine Lage wird bestimmt, indem man sie in Beziehung auf eine bekannte Ebne und eine darin als bekannt angenommene grade Linie betrachtet. Man thut dies am besten nach Anleitung der einen oder der andern von folgenden zwei Methoden.

Erste Bestimmungsweise. Es sei (Fig. 1.) E der Punct, dessen Lage man angeben will: so zieht man von ihm auf die bekannte Ebne FGHI das Perpendikel ED, welches die Ebne in D schneidet. Ist nun in dieser Ebne die Linie AB in bekannter Lage gezogen und A ein bekannter Punct in ihr: so zieht man aus D, DC auf AB senkrecht. Wenn man jetzt AC und DC kennt, so ist des Punctes D Lage in der Ebne FGHI völlig bekannt. Senkrecht über diesem Puncte D befindet sich der zu bestimmende Punct E in dem Abstande = DE, und man sagt nun, daß die Lage von E durch drei auf einander senkrechte Coordinaten AC, CD, DE bestimmt sei, indem die eine DE seinen senkrechten Abstand von der Ebne FGHI, die man wohl die Abscissen-Ebne nennt, angiebt, die andre DC angiebt, wie weit die Senkrechte ED von der Abscissenlinie AB entfernt ist, und die dritte, die man auch die Abscisse auf AB nennt, den Punct C bestimmt, neben welchem D und E liegen.

Zweite Bestimmungsweise. Man denkt sich wieder (Fig. 2.) eine bekannte Ebne FGHI und in ihr einen Punct A, in Beziehung auf welchen die Lage des Punctes E soll bestimmt werden. Legt man nun durch EA eine auf FGHI senkrechte Ebne EAC, welche jene in AC schneidet: so ist die Lage von E völlig bestimmt, wenn man erstlich weiß, wie groß die Entfernung AE ist, zweitens unter welchem Winkel = EAC die Linie AE gegen die Ebne FGHI geneigt ist, und drittens, welchen Winkel = CAB die Durchschnittslinie AC der Ebnen EAC und FGHI mit einer in der letztern Ebne gegebenen Linie AB macht.

§. 3. Bemerkung. Wo sich in jedem Augenblicke der bewegte Punct befinde, muß aus der Geschwindigkeit desselben bestimmt werden. Ist die Bewegung gleichförmig, so ist die Geschwindigkeit oder der in einem Zeittheile, wofür man gewöhnlich eine Secunde annimmt, durchlaufene Raum immerfort gleich (vergl. Einleitg. §. 6.).

§. 4. Lehrsatz. Bei gleichförmiger Bewegung ist der durchlaufene Weg, der Geschwindigkeit und der Zeit proportional, und kann als ein Product aus beiden Größen dargestellt werden.

Beweis. Nennt man s den in der Zeit = t durchlaufenen Weg und c die Geschwindigkeit: so bedeutet ja (Einleitg. §. 10.) c den Weg, den der Punct in einem Zeittheilchen durchläuft, und t die Anzahl derjenigen Zeittheilchen, in welchen der Weg = s durchlaufen wird. Wegen der Gleichförmigkeit der Bewegung ist also

$$c : s = 1 : t, \text{ oder } s = c \cdot t.$$

§. 5. Dieses Product bedeutet also nichts anders, als der Weg = c ist so oft zu nehmen, als die Anzahl der Zeittheilchen angiebt.

§. 6. In dieser einzigen Formel liegen die Beantwortungen aller hier vorkommenden Fragen. Ist die Geschwindigkeit gegeben uud eine gewisse Zeit = t bestimmt, so wird der in dieser Zeit durchlaufene Weg gefunden. Kennt man den Weg, welcher durchlaufen ist = s, und die Geschwindigkeit = c, oder den Weg für jede Secunde, so findet man $t = \frac{s}{c}$ als Anzahl der Secunden, welche verwandt sind, um den Weg = s zu durchlaufen. Wenn endlich der Weg = s bekannt ist, welcher in einer gegebenen Anzahl von Secunden = t durchlaufen wird: so ist $c = \frac{s}{t}$ die Geschwindigkeit oder der Weg in einer Secunde.

Zusatz für den geübteren Leser.

Die Betrachtung der gleichförmigen Bewegung ist so einfach, daß man der Differential-Rechnung nicht dabei bedarf. Um indeß die in der Folge vorkommenden Anwendungen der Differential-Rechnung zu erleichtern und darauf vorzubereiten, theile ich hier die Darstellung so mit, wie sie den Bezeichnungen der Differential-Rechnung gemäß ist.

Heißt der in der ganzen Zeit $= t$ durchlaufene Weg $= s$, so wächst dieser um ds, indem die Zeit um dt zunimmt. Bei gleichförmiger Bewegung wird in der Zeit $= dt$ mit der Geschwindigkeit $= c$, der Weg $ds = cdt$ durchlaufen, woraus durch Integration die Formel $s = c \cdot t$ folgt. Eigentlich $s = c \cdot t + \text{Const}$, wenn nämlich der durchlaufene Weg nicht von dem Puncte an gerechnet wird, wo der Körper sich im Anfange der Zeit t befand. Rechnete ich zum Beispiel in Fig. 3. den Raum $= s$ von A an; der Körper wäre aber für $t = 0$ in B gewesen und nach D zu gegangen, so daß er nach Verlauf der Zeit $= t$ in D ankam: so ist $BD = c \cdot t$, aber s, welches von A an sollte gerechnet werden, ist $= AB + c \cdot t$, weil s schon $= AB$ war, für $t = 0$. Die bei der Integration unbestimmt hinzukommende beständige Größe wird also hier dadurch bestimmt, daß man für $\text{Const} = AB$ den Werth setzt, den s hatte, als $t = 0$ war. Soll s von B an gerechnet werden, so ist $\text{Const} = 0$. Die Geschwindigkeit ist nun aber nicht $= \frac{s}{t}$, wenn s aus einem nicht in der Zeit t durchlaufenen Stücke, und einem von t abhängigen Stücke besteht. Allemal ist die Geschwindigkeit $= \frac{ds}{dt}$; und da $\frac{ds}{dt} = \frac{c \cdot dt}{dt} = c$, unveränderlich bleibt, so ist hier $dc = 0$, oder $\frac{d^2s}{dt} = 0$, woraus umgekehrt $\frac{ds}{dt} = \text{Const}$, oder die Zunahme des Weges als der Zunahme der Zeit proportional folgen würde, wenn man nach einer Bewegung gefragt hätte, für welche $\frac{d^2s}{dt} = 0$ sei.

§. 7. **Aufgabe.** Wenn ein Punct sich in grader Linie gleichförmig fortbewegt, den Ort zu bestimmen, wo er sich in jedem Zeitpuncte befindet.

Auflösung. Damit dieses geschehen könne, muß die Lage der Linie, auf welcher es fortgeht, und des Körpers Lage in einem gewissen Zeitpuncte gegeben sein.

Erster Fall. Wenn die Lage des bewegten Punctes bezogen wird auf eine Linie, die mit dem von ihm durchlaufenen Wege in derselben Ebne liegt. (Fig. 3.)

Es sei AD die bekannte Linie, auf welcher die Entfernungen von dem Anfangspuncte A an gerechnet werden; der gradlinigte Weg CE des Körpers $= \alpha$ gegen AD geneigt. Wenn nun bekannt ist, daß beim Anfange der Bewegung der bewegte Punct sich in C, in der Entfernung $BC = b$ von der Linie AD befand, und daß $AB = a$, damals den Abstand des von C auf AD gesetzten Perpendikels von dem bekannten Punkte A angab: so ist, wenn der bewegte Punct in der Zeit $= t$ den Weg $= c \cdot t = CE$ durchläuft, am Ende der Zeit $= t$, sein Abstand von AD,

$$= ED = b + c \cdot t \cdot \sin\alpha,$$

und des Punctes D, neben welchem er sich befindet, Abstand von A, $= AD = a + c \cdot t \cdot \cos\alpha$.

Zweiter Fall. Wenn die grade Linie CE, auf welcher der bewegte Punct fortrückt, nicht in der Ebne FGHI (Fig. 4.) liegt, in welcher sich die zur Bestimmung des Ortes dienende Linie AB befindet: so muß erstlich die Lage des Punctes C, wo sich der bewegte Punct im Anfange der Zeit t befand, durch Coordinaten $AB = a$, $BD = b$ senkrecht auf AB, und $DC = f$ senkrecht auf die Ebne ABD gegeben sein; zweitens muß man die Geschwindigkeit $= c$ des Körpers und folglich seinen in der Zeit $= t$ durchlaufenen Weg $= CE = c \cdot t$ kennen; drittens muß der Neigungswinkel $= \alpha$ der Linie CE gegen die Ebne FGHI bekannt sein, nebst dem Winkel $= \beta$, unter welchem die Durchschnittslinie DK der durch CE auf FGHI senkrecht gesetzten Ebne CDKE mit jener, gegen AL geneigt ist. Heißt hier $CE = c \cdot t$, so ist $DK = c \cdot t \cdot \cos\alpha$, und die mit AB parallele $DM = DK \cdot \cos\beta$; $MK = DK \cdot \sin\beta$. Die Lage E des bewegten Punctes wird also am Ende der Zeit $= t$

bestimmt durch die Abscisse $= AB + BL = AB + DM =$
$= a + c.t.\,Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta;$
durch die in der Ebne FGHI liegende Ordinate
$LK = LM + MK = DB + MK =$
$= b + c.t.\,Cos\,\alpha\,.\,Sin\,\beta$
und durch die auf jene Ebne senkrechte Ordinate
$KE = f + c.t.\,Sin\,\alpha = CD + NE$, wenn CN mit DK und DM mit AB parallel ist.

§. 8. Der Abstand KE des bewegten Körpers von der Ebne FGHI (Fig. 4.) nimmt also in gleichen Zeiten gleich viel zu, wenn die Bewegung gleichförmig und gradlinigt ist; denn in der Zeit $= t$ hat dieser Abstand um $= c.t.\,Sin\,\alpha$ zugenommen und diese Zunahme ist der Zeit proportional. Auf eben diese Weise ist im zweiten Falle das Wachsen der beiden andern Coordinaten der Zeit proportional; und auch im ersten Falle ist
$DE - BC = c.t.\,Sin\,\alpha$, und
$AD - AB = c.t.\,Cos\,\alpha$, also das Zunehmen der Coordinaten gleichförmig.

§. 9. Erklärung. Man nennt es, die Bewegung nach den Richtungen der Coordinaten zerlegen, wenn man so, wie wir eben gethan haben, sucht, um wie viel jede der Coordinaten zunimmt, indem der bewegte Punct den Weg $= c.t$ in gegebener Richtung zurücklegt. Sucht man bloß, wie viel jede Coordinate in einem Zeittheilchen zunimmt, so heißt der so gefundene Weg: die mit dieser Coordinate parallele Geschwindigkeit des bewegten Punctes.

In unserm eben betrachteten Falle würde also die mit AL parallele Geschwindigkeit $= c.\,Cos\,\alpha\,.\,Cos\,\beta$.
die mit BD oder LK parall. Geschw. $= c.\,Cos\,\alpha\,.\,Sin\,\beta$
die mit DC oder KE parall. Geschw. $= c.\,Sin\,\alpha$ sein.

§. 10. Aufgabe. der in der Zeit $= t$ von einem bewegten Puncte durchlaufene Weg $= CE$ (Fig. 5.) ist gegeben; zu bestimmen, wie viel der Punct nach Richtungen mit CD, CB parallel fortgerückt ist.

Auflösung. Man ziehe vom Endpuncte E aus die

Linie EG mit BC und EF mit DC parallel: so sind die abgeschnittenen Stücke CF, CG die Wege, welche jener Punct mit CB und CD parallel durchlaufen hat. Heißt also BCE $= \alpha$; DCE $= \beta$, so ist der mit CB parallel durchlaufene Weg CF $= \frac{CE \cdot \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)}$; der mit CD parallel durchlaufene Weg CG $= \frac{CE \cdot \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)}$.

§. 11. Alle hier vorkommende Aufgaben werden auf ähnliche Weise, mit Hülfe des Parallelogramms, ganz so wie es beim Parallelogramm der Kräfte der Fall war, aufgelöst.

Zusatz für geübtere Leser.

Wenn in Fig. 4. der Punct nach der Richtung CE mit der Geschwindigkeit $= c$ fortgeht, so durchläuft er den kleinen Raum eE $= ds = c.dt$ in der Zeit $= dt$. Offenbar ist hier kK $= c.dt . \operatorname{Cos} \alpha$ und mM $= c.dt . \operatorname{Cos} \alpha . \operatorname{Cos} \beta$, also wenn AL $=$ S heißt, mM $=$ eL $= dS = c.dt . \operatorname{Cos} \alpha . \operatorname{Cos} \beta$ und AL $= \text{Const} + c.t . \operatorname{Cos} \alpha . \operatorname{Cos} \beta$. Da hier für $t = 0$ schon die Abscisse $=$ AB war oder $= a$, so ist Const $= a$ und AL $= a + c.t . \operatorname{Cos} \alpha . \operatorname{Cos} \beta$.

Auf ganz ähnliche Weise wird die Betrachtung in Beziehung auf die übrigen Coordinaten angestellt.

§. 12. Bemerkung. Wenn ein Körper sich so bewegt, daß alle seine einzelnen Puncte nach parallelen Richtungen fortgehen: so ist die Bewegung des ganzen Körpers oder jedes Punctes in ihm bekannt, wenn man die Bewegung des Schwerpunctes kennt. Eine solche Bewegung heißt eine parallele Bewegung des Körpers, und läßt sich völlig nach denselben Gesetzen betrachten, wie die Bewegung eines einzelnen Punctes.

Zweiter Abschnitt.

Von der relativen und scheinbaren Bewegung.

§. 13. Erklärung. Relativ heißt eine Bewegung, wenn man die jedesmalige Lage des bewegten Punctes auf einen Punct bezieht, der selbst nicht ruhet. Stellt man sich in dem letztern Puncte einen Beobachter vor, welcher die Bewegung des erstern bloß nach der in Beziehung auf sich veränderten Lage und Entfernung beurtheilte: so hieße das, bloß die scheinbare Bewegung bestimmen.

§. 14. Wenn der Beobachter von A nach D (Fig. 6.) fortrückt, und nun, etwa so wie wir auf Norden und Süden, Westen und Osten zu beziehen gewohnt sind, die Lage eines andern Körpers auf Richtungslinien bezieht, die mit den auf einander senkrechten Linien AB, AC parallel sind: so wird er den bewegten Körper E immerfort nach der Richtung AB hin zu sehen glauben, wenn dieser in eben der Zeit gleichförmig von E nach F fortgeht, in welcher A gleichförmig nach a fortgeführt wird. Die scheinbare Bewegung des Punctes E wird also in einer bloßen Annäherung bestehen, da Fa kleiner als EA ist. Hätte der Beobachter seine eigne Bewegung gar nicht empfunden, so würde er glauben, der Punct E sei bloß von E nach f gerückt, weil er selbst immer noch in A zu sein glaubt, und er ihn immer noch nach der mit AB parallelen Richtung (z. B. nach Norden hin) sieht.

Auf eine ähnliche Weise wird jede relative Lage bestimmt.

§. 15. Aufgabe. Die relative Bewegung eines gradlinigt und gleichförmig fortrückenden Punctes E in

Beziehung auf einen gleichfalls gradlinigt und mit gleichförmiger Bewegung fortrückenden Punct A zu bestimmen. (Fig. 7.)

Auflösung. Man ziehe durch die anfängliche Lage A des letztern Punctes die auf einander senkrechten Linien AB, AC, deren man sich zu Bestimmung der Richtung bedienen will; so wird die anfängliche Lage E, des Punctes E leicht bestimmt. Ist nun A nach D gekommen, während E nach F kömmt: so hat F gegen Db und Dc, welche mit AB, AC parallel sind, eben die Lage, welche φ gegen AB und AC hat; und wenn der Beobachter sich als ruhend in A denkt, so wird er glauben, der Punct E sei nach φ gerückt.

Auf diese Weise könnte man die gegenseitige Lage beider bewegten Puncte, oder die relative Bewegung des einen gegen den andern in jedem Zeitpuncte bestimmen.

§. 16. Lehrsatz. Wenn der Punct E (Fig. 7.) gradlinigt und gleichförmig fortrückt: so ist auch seine relative Bewegung auf einen gleichfalls gradlinigt und gleichförmig fortgehenden Punct, eine gradlinigte und gleichförmige; oder ein mit dem letztern Puncte fortbewegter Beobachter würde die Bewegung des erstern für gradlinigt und gleichförmig halten, wenn er selbst zu ruhen glaubte.

Beweis. Es sei A die anfängliche Stellung des Beobachters, E die anfängliche Stellung des beobachteten Punctes: so ist des letztern Lage durch die Entfernung AE $=$ a und den Winkel EAC $= \alpha$, welchen AE mit der fest bestimmten Linie AC macht, gegeben, und es ist nun des Punctes E senkrechter Abstand von AB $=$ a . Cos α,

sein senkrechter Abstand von AC $=$ a . Sin α.

Die Linie AD, auf welcher der Beobachter sich fortbewegt, sei unter dem Winkel CAD $= \beta$, die Linie EF, auf welcher sich der beobachtete Punct fortbewegt, sei unter dem Winkel FGC $= \gamma$ gegen AC geneigt. Bewegt nun jener sich mit der Geschwindigkeit $=$ C, dieser mit der Geschwindigkeit $=$ c fort: so ist nach Verlauf einer Zeit

$= t$, des Beobachters durchlaufener Weg $= C.t = AD$, sein senkrechter Abstand von AB, $= DH = C.t.\text{Cos}\beta$, sein senkrechter Abstand von AC, $= DI = C.t.\text{Sin}\beta$. Der beobachtete Punct hat in der Zeit $= t$, den Weg $= EF = c.t$ zurück gelegt, und wenn EK mit AC, EL mit AB parallel ist, so hat man nach Verlauf dieser Zeit den senkrechten Abstand von
$AB = FL + LP = FL + EQ = c.t.\text{Cos}\gamma + a.\text{Cos}\alpha$, den senkrechten Abstand von
$AC = FM + MN = FM + EO = c.t.\text{Sin}\gamma + a.\text{Sin}\alpha$.

Hieraus ergiebt sich, wenn man HDc durch D mit AC und bDI durch D mit AB parallel zieht, nach Verlauf der Zeit $= t$, des beobachteten Punctes Abstand von Db,

$$= c.t.\text{Cos}\gamma + a.\text{Cos}\alpha - C.t.\text{Cos}\beta;$$

des beobachteten Punctes Abstand von Dc oder HD,

$$= c.t.\text{Sin}\gamma + a.\text{Sin}\alpha - C.t.\text{Sin}\beta.$$

Wenn also der Beobachter seine Bewegung nicht empfindet und in A zu ruhen glaubt, so wird er des bewegten Punctes in der Zeit $= t$ erlangten Abstand von AB, $= FR = \varphi S = c.t.\text{Cos}\gamma + a.\text{Cos}\alpha - C.t.\text{Cos}\beta$, ansetzen, und den erlangten Abstand von AC, so ansehen, als ob er $= FT = \varphi U$
$= c.t.\text{Sin}\gamma + a.\text{Sin}\alpha - C.t.\text{Sin}\beta$ wäre. Die relative Bewegung stellt sich also dar als eine durch $= t\,(c.\text{Sin}\gamma - C.\text{Sin}\beta)$ ausgedrückte Zunahme der senkrechten Entfernung von AC, und als eine durch $= t\,(c.\text{Cos}\gamma - C.\text{Cos}\beta)$ ausgedrückte Zunahme der senkrechten Entfernung von AB. Beide Abstände wachsen also gleichförmig, oder im Verhältniß der Zeit, und folglich ist auch der scheinbar durchlaufene Weg $E\varphi$ der Zeit proportional oder gleichförmig durchlaufen; er ist aber auch grade, weil in dem rechtwinklichten Dreiecke $EV\varphi$, für jeden Zeitpunct $EV : V\varphi =$

$$(c.\text{Cos}\gamma - C.\text{Cos}\beta) : (c.\text{Sin}\gamma - C.\text{Sin}\beta),$$

also $E\varphi$ für jeden Zeitpunct mit EV einen Winkel macht, dessen Tangente $= \dfrac{c.\text{Sin}\gamma - C.\text{Sin}\beta}{c.\text{Cos}\gamma - C.\text{Cos}\beta}$ ist.

§. 17. Der aus A nach D fortrückende Beobachter, welcher in A zu ruhen glaubt, betrachtet also die von E nach F gehende Bewegung des Punctes E als eine von E nach φ gehende. Es kann sich daher ereignen, wie es die Figur vorstellt, daß der Beobachter glaubt, der bewegte Punct rücke z. B. ostwärts fort, obgleich beide Bewegungen nach Westen gehen; dieses geschieht nämlich dann, wenn der Beobachter ihm in der westlichen Bewegung voreilt, also ihn ostwärts hinter sich zurück läßt, und so in ähnlichen Fällen.

§. 18. Wenn der Punct E ganz ruhet, so kann dennoch von einer relativen Bewegung desselben in Beziehung auf A die Rede sein. In unsern Formeln wäre dann $c = 0$, und folglich $\varphi U = a . \mathrm{Sin}\,\alpha - C . t . \mathrm{Sin}\,\beta$
$= EO - DI$
und $\varphi S = a . \mathrm{Cos}\,\alpha - C . t . \mathrm{Cos}\,\beta = AO - AI$ der Beobachter in A würde also, indem er alle Bewegung auf E bezieht und sich selbst ruhend glaubt, es so ansehen, als ob (Fig. 8.) E die Linie Eφ, welche seinem eignen Wege gleich und parallel ist, rückwärts durchlaufen hätte; denn E scheint senkrecht gegen AB zu um $= C . t . \mathrm{Cos}\,\beta$ und senkrecht gegen AC zu um $= C . t . \mathrm{Sin}\,\beta$ fortgegangen zu sein, also eine Bahn $= \sqrt{(C^2 . t^2 . \mathrm{Sin}^2\beta + C^2 t^2 . \mathrm{Cos}^2\beta)} = C . t$ durchlaufen zu haben, die gegen AC unter einem Winkel CRE geneigt ist, dessen Tangente $= \frac{C . t . \mathrm{Sin}\,\beta}{C . t . \mathrm{Cos}\,\beta} = \mathrm{tang}\,\beta$ ist.

§. 19. Lehrsatz. Wenn ein Beobachter seine eigne Bewegung nicht bemerkt, sondern sie als Bewegung der ihn umgebenden Körper ansieht: so muß er glauben, die um ihn ruhenden Körper liefen in Bahnen, die seiner Bahn gänzlich gleich sind, aber die entgegengesetzte Lage hätten. (Fig. 9.)

Beweis. Indem A nach D geht, glaubt er den ruhenden Punct E von E nach F gehen zu sehen, und der dem E beigelegte scheinbare Weg EF ist gleich und parallel AD; indem der Beobachter von D nach G geht, legt er dem ruhenden Puncte die Bewegung nach FH bei und FH ist gleich und parallel der DG, also auch die Winkel ADG = EFH. Und so wird die ganze Figur EFHKM gleiche Seiten und Winkel wie die Figur ADGIL haben, wenn man jene so zeichnet, daß F eben die Lage gegen A hat, welche E gegen D hat, daß H eben so gegen A liegt, wie E gegen G, daß K eben so gegen A liegt, wie E gegen I und so weiter.

Die bekannte Erfahrung, daß der Beobachter auf der Erde, der Sonne grade eben die Kreisbewegung zuschreibt, welche der Erde wirklich eigen ist, erklärt sich hieraus völlig.

§. 20. Aufgabe. Wenn beide Körper sich in krummen Linien und ungleichförmig bewegen, die scheinbare Bewegung des einen Körpers in Beziehung auf den andern bewegten Körper zu bestimmen.

Auflösung. Man bemerke die von beiden Körpern gleichzeitig erreichten Standpuncte; ziehe für irgend einen Augenblick die grade Linie zwischen diesen gleichzeitigen Standpuncten, und damit durch den Standpunct, wo der Beobachter zu ruhen glaubt, eine jener Abstandslinie gleiche und parallele Linie, so ist die scheinbare Lage des andern bewegten Punctes in Beziehung auf den als ruhend gedachten bestimmt. Sind zum Beispiel (Fig. 10.) E, F, G, H, K die Orte, welche der beobachtete Körper erreicht, indem der Beobachter in A, B, C, D, I ankömmt: so zieht man die Linien EA, FB, GC, HD, KI zwischen den gleichzeitigen Standpuncten, nimmt

fA gleich und parallel mit FB,
gA gleich und parallel mit GC,
hA gleich und parallel mit HD,
kA gleich und parallel mit KI:

so sind f, g, h, k Puncte in der relativen Bahn des beobachteten Körpers, oder dem Beobachter, der sich in A ruhend glaubt, scheint der Körper in der Bahn Efghk um A herumzugehen.

Anmerkung. In den hier betrachteten Fällen lag immer der beobachtete Punct in derselben Ebne, in welcher der Beobachter sich fortbewegt; es ist aber leicht zu übersehen, wie die scheinbare Bahn bestimmt würde, wenn nicht alle zu bestimmende Puncte in derselben Ebne lägen.

Dritter Abschnitt.

Von den beschleunigenden Kräften, von der Schwerkraft und dem freien Falle der Körper.

§. 21. Erfahrung. Die Schwerkraft verursacht nicht bloß, daß die Körper vertical herabwärts zu fallen anfangen, sondern wir bemerken, daß der Körper im freien Falle eine immer größere Geschwindigkeit erlangt, und sehen dieses als einen Beweis an, daß die Schwerkraft fortdauernd auf den Körper wirkt, und seine Bewegung immer mehr beschleuniget.

§. 22. Erfahrung. Obgleich zwei ungleiche Körper, während sie ruhen, einen verschiedenen Druck ausüben: so bewegen sie sich doch mit gleicher und auf gleiche Art zunehmender Geschwindigkeit, sobald sie ohne alles Hinderniß fallen können.

§. 23. Wir schließen aus diesen Erfahrungen, daß die Schwerkraft auf alle Theilchen der Materie mit gleicher Gewalt wirkt, und daß sie daher alle Theilchen in gleich schnellem Falle herunter zieht. Verhält es sich so, so kann der schwerere Körper nicht schneller fallen, als der leichtere, weil jeder so fällt, wie die einzelnen Theilchen fallen würden, wenn sie ohne festen Zusammenhang neben einander herabsänken, indem sie auch dann ihre gegenseitige Lage unverändert behalten würden.

§. 24. Das verschiedene Gewicht der Körper deutet uns allerdings eine verschiedene Einwirkung der Schwerkraft an; aber diese, bei doppeltem Gewichte doppelt so große, Einwirkung wird verwandt, um einer doppelt so großen Masse Bewegung zu ertheilen, und daraus erklärt sich, warum die Bewegung nicht schneller wird, als bei einem Körper von geringerm Gewichte.

§. 25. Bemerkung. Da die Erfahrung zeigt, daß die Bewegung frei fallender Körper immer schneller wird: so ist es am natürlichsten, zu vermuthen, daß die Schwerkraft immerfort mit gleicher Gewalt auf die Körper wirke oder die Bewegung gleichförmig beschleunige. Ist dieses wirklich so, so muß es sich in einer immer gleichen, oder der Zeit proportionalen Zunahme der Geschwindigkeit zeigen, indem diese immer gleiche Einwirkung der Schwere in jedem folgenden Zeitraume die Geschwindigkeit um eben so viel vermehren wird, als in jedem vorhergehenden Zeitraume. Nach dieser Voraussetzung werden wir die Wirkungen der Schwere berechnen und dann Mittel finden, aus Beobachtungen die Richtigkeit unsrer Voraussetzungen darzuthun.

§. 26. Bemerkung. Wir könnten uns andre Kräfte denken, die auf ähnliche Weise wie die Schwere, aber mit ungleicher Gewalt auf die Körper wirkten. Eine solche Kraft würde doppelt so mächtig als die Schwerkraft heißen, wenn sie verursachte, daß derselbe Körper ruhend einen doppelt so großen Druck ausübte, und bei freier Bewegung in gleicher Zeit eine doppelt so große Geschwindigkeit erhielte. So würde uns also die in bestimmter Zeit erlangte Geschwindigkeit als Maaß der beschleunigenden Kraft dienen.

§. 27. Erklärung. Schon die Ueberlegung, daß der doppelt so schwere Körper mit doppelter Gewalt zur Erde hin getrieben wird, und dennoch nicht schneller fällt, als der nur halb so schwere, veranlaßt uns, die bewegende Kraft von der beschleunigenden Kraft zu unterscheiden. Die gesammte, offenbar dem Gewichte des Körpers proportionale, Einwirkung der Schwere, ist hier die bewegende Kraft: aber da sie verwandt wird, um alle körperlichen Theilchen in Bewegung zu setzen, so kömmt auf jedes zur Beschleunigung seiner Bewegung nur ein der Masse umgekehrt proportionaler Theil.

Im Allgemeinen heißt also bewegende Kraft die gesammte Gewalt, mit welcher der ganze Körper zur Bewegung angetrieben wird; diese wird als beschleunigende Kraft zur Vermehrung der Geschwindigkeit jedes Theilchens verwandt, und man kann daher, wenn man diesen Ausdruck richtig versteht, sagen, man finde die beschleunigende Kraft, wenn man die bewegende Kraft durch die in Bewegung gesetzte Masse dividirt.

§. 28. Wir können offenbar die bewegenden Kräfte, wie Zahlen, mit einander vergleichen, und folglich auch eine bestimmte bewegende Kraft als Einheit bei der Abmessung der übrigen zum Grunde legen. Diese als einwirkend gedacht, auf eine als Einheit angenommene Masse gäbe uns also die Einheit der beschleunigenden Kräfte. Wirkt eben jene bewegende Kraft $= 1$ auf eine Masse $= 2$, so bringt sie in Beziehung auf jedes Theilchen nur die beschleunigende Kraft $= \frac{1}{2}$ hervor, eine beschleunigende Kraft, die jedem Theilchen in derselben Zeit nur eine halb so große Geschwindigkeit ertheilt. Und so läßt es sich nun leicht übersehen, warum wir die beschleunigende Kraft $= \frac{P}{M}$ setzen, wenn P die bewegende Kraft und M die bewegte Masse ist.

Bei der Einwirkung der Schwerkraft ist P allemal der Masse proportional, und folglich der Quotient $\frac{P}{M}$ immer gleich. Wir pflegen ihn hier $= 1$ zu setzen, und die Schwere als Einheit zu Vergleichung andrer beschleunigender Kräfte zu gebrauchen. Bei andern Kräften, die so wie die Schwerkraft auf alle körperliche Theilchen zu wirken scheinen, ist auch der Quotient $\frac{P}{M}$ unveränderlich; er könnte aber größer oder kleiner als für die Schwerkraft sein, und darnach würden wir die Größe der beschleunigenden Kraft bestimmen.

Es giebt andre Kräfte, die nicht mit einer der Masse proportionalen Gewalt den ganzen Körper zur Bewegung antreiben. So zum Beispiel reißt ein Strom den schwimmenden Körper mit fort, und übt auf ihn eine bloß von des Körpers Größe und Gestalt abhängende Gewalt aus. Diese bewegende Kraft = P, treibt jedes Theilchen des Körpers mit desto mehr Stärke zur Bewegung an, je geringer die Zahl der Theilchen ist, auf die sie sich vertheilen, oder die sie in Bewegung setzen muß, und wenn folglich die Masse = M heißt, so ist hier $= \frac{P}{M}$ der Ausdruck für die beschleunigende Kraft.

§. 29. Bemerkung. Die Vergleichung der beschleunigenden Kräfte unter einander beruhet in den meisten Fällen nur auf der Vergleichung ihrer Wirkungen. Wenn eine mit immer gleicher Gewalt wirkende Kraft dem ihrer Wirkung frei folgenden Körper am Ende der ersten Secunde die Geschwindigkeit = n . k ertheilt hat, so nennen wir diese Kraft das nfache derjenigen, die ihm in 1 Secunde nur die Geschwindigkeit = k ertheilt u. s. w. Aber selbst die Bestimmung dieser Geschwindigkeit ist nicht so leicht; denn da die stetig fortwirkende Kraft in jedem noch so kleinen Zeitmomente die Geschwindigkeit vermehrt, so können wir nicht unmittelbar beobachten, wie groß die Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde oder in irgend einem andern Zeitpunct war, sondern müssen erst aus andern Umständen schließen, welchen Raum der Körper mit dieser Geschwindigkeit in 1 Secunde durchlaufen hätte, wenn sie durch diesen Zeitraum unverändert geblieben wäre.

§. 30. Lehrsatz. Wenn eine gleichförmig beschleunigende Kraft auf den frei beweglichen Körper wirkt: so ist der Weg, welchen er vom Anfange der Bewegung an durchläuft, dem Quadrate der Zeit proportional.

Beweis. Wir denken uns einen ruhenden Körper, der durch die Einwirkung der beschleunigenden Kraft grade anfängt, sich zu bewegen, und wir fangen die Zeit von eben diesem Momente zu zählen an. Da nun die gleichförmig beschleunigende Kraft dem Körper in jedem Zeittheilchen gleich viel Geschwindigkeit ertheilt, oder seine schon erlangte Geschwindigkeit um gleich viel vermehrt: so ist die Geschwindigkeit $= \frac{1}{n} kt$ am Ende des Zeittheilchens $= \frac{1}{n} t$, wenn sie $= kt$ ist am Ende der Zeit $= t$, oder $= k$ ist am Ende der ersten Secunde. Ist also t die ganze seit Anfang der Bewegung verflossene Zeit, so können wir uns diese in n gleiche Theile zerlegt denken, und haben dann im Anfange der Bewegung oder für die Zeit $= 0$, die Geschwindigkeit $= 0$;

am Ende des ersten Zeittheilchens, oder nach Verlauf der

Zeit $= \frac{1}{n} . t$, die Geschwindigkeit $= \frac{1}{n} kt$,

am Ende des zweiten Zeittheilchens, oder nach Verlauf der

Zeit $= \frac{2}{n} . t$, die Geschwindigkeit $= \frac{2}{n} kt$

u. s. w.

Da die Geschwindigkeit anzeigt, welchen Raum der Körper in der Zeit-Einheit durchlaufen würde, so bedeutet eine Geschwindigkeit $= \frac{m}{n} kt$, daß der Körper vermöge derselben in der Zeit $= \frac{1}{n} t$ den Raum $= \frac{m}{n^2} k . t^2$ durchlaufen würde. Offenbar nun legt der Körper in jedem Zeittheilchen, das $= \frac{1}{n} t$ ist, einen größern Weg zurück als der Geschwindigkeit gemäß ist, welche er im Anfange dieses Zeittheilchens hatte, und einen kleinern als der Geschwindigkeit am Ende dieses Zeittheilchens gemäß sein würde. Folglich ist der durchlaufene Weg, wenn wir jedes Zeittheilchen $= \frac{1}{n} t$ setzen,

im 1. Zeitth. größer als $= 0$; kleiner als $= \frac{1}{n^2} kt^2$;

im 2. Zeitth. größer als $= \frac{1}{n^2} kt^2$; kleiner als $= \frac{2}{n^2} kt^2$;

im 3. Zeitth. größer als $= \frac{2}{n^2} kt^2$; kleiner als $= \frac{3}{n^2} kt^2$;

im 4. Zeitth. größer als $= \frac{3}{n^2} kt^2$; kleiner als $= \frac{4}{n^2} kt^2$;

u. s. w.

im nten Zeitth. gr. als $= \frac{n-1}{n^2} kt^2$; kleiner als $= \frac{n}{n^2} kt^2$.

Denn im Anfange des ersten Zeittheilchens ist die Geschwindigkeit $= 0$; am Ende desselben $= \frac{1}{n} kt$; im Anfange des zweiten Zeittheilchens $= \frac{1}{n} kt$, am Ende des zweiten Zeittheilchens $= \frac{2}{n} kt$ u. s. w. Der gesammte in der Zeit $= t$ oder in n jener Zeittheilchen durchlaufene Weg ist also größer als

$$\frac{k \cdot t^2}{n^2} (1+2+3+4+5+\ldots+\ldots+(n-1))$$

und kleiner als $\frac{k \cdot t^2}{n^2} (1+2+3+4+5+\ldots\ldots+n)$, da der eingeschlossene Factor eine arithmetische Reihe ist, und aus der Summe der natürlichen Zahlen, in der ersten Formel bis $(n-1)$, in der zweiten bis n fortgezählt, besteht, so ist der durchlaufene Weg größer als $\frac{k \cdot t^2}{n^2} (\frac{1}{2} n(n-1))$ und kleiner als $\frac{k \cdot t^2}{n^2} (\frac{1}{2} (n+1) \cdot n)$. (Arithmetik. §. 136.)

also der durchlaufene Weg $> \frac{1}{2} k . t^2 - \frac{\frac{1}{2} k . t^2}{n}$,

und zugleich $< \frac{1}{2} k . t^2 + \frac{\frac{1}{2} k . t^2}{n}$.

Diese beiden Grenzen sind strenge richtig, wir mögen die Zeit $= t$, in welche Anzahl $= n$ von Zeittheilen wir wollen, zerlegen; je größer aber n wird, desto unbedeutender wird $\frac{\frac{1}{2} k . t^2}{n}$ und da für jeden Werth von n,

der Weg $> \frac{1}{2} k . t^2 - \frac{\frac{1}{2} k . t^2}{n}$

und $< \frac{1}{2} k . t^2 + \frac{\frac{1}{2} k . t^2}{n}$ ist,

so muß er nothwendig $= \frac{1}{2} k . t^2$ sein, also der in jeder Zeit $= t$ durchlaufene Weg dem Quadrate der Zeit proportional.

§. 31. Diese Regel giebt uns nun ein Mittel, um erstlich zu bestimmen, ob die Schwerkraft wirklich eine beschleunigende sei, und zweitens zu bestimmen, welche Geschwindigkeit sie dem frei fallenden Körper am Ende irgend einer Zeit ertheilt hat. Genaue Versuche zeigen, daß der Weg frei fallender Körper wirklich dem Quadrate der Zeit proportional ist, und folglich die Schwere als gleichförmig beschleunigende Kraft wirkt; sie zeigen auch, daß $k = 30, 2$ pariser Fuß die Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde ist, indem jeder wirklich durchlaufene Weg $= 15, 1 . t^2$ in t Secunden gefunden wird.

§. 32. Aus der Formel, daß der durchlaufene Weg $= s = \frac{1}{2} k . t^2$ sei, folgt für $t = 1$ Sec., daß der in 1 Secunde durchlaufene Weg $= \frac{1}{2} k$, halb so groß sei, als derjenige, welchen der Körper mit seiner am Ende der ersten Secunde erlangten Geschwindigkeit durchlaufen würde, wenn er diese Geschwindigkeit eine Secunde lang unverändert behielte. Diesen Fallraum in der ersten Secunde, den wir mit g bezeichnen wollen, $g = \frac{1}{2} k$, pflegt man am liebsten in den Formeln zu gebrauchen und $s = g \cdot t^2$ zu setzen.

§. 33. Aufgabe. Die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche ein frei fallender Körper erlangt hat, wenn er fallend den gegebenen Raum $= s$ durchlaufen hat, oder wenn während seines Fallens die Zeit $= t$ verflossen ist.

Auflösung. Wenn k die Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde bedeutete, so ist (§. 32.) $k = 2g$, und folglich am Ende der Zeit $= t$, die Geschwindigkeit, die wir mit v bezeichnen, $v = 2g \cdot t$.

Ist s gegeben, so gehört ein bestimmter Weg $= s$ zu der Zeit $= t = \sqrt{\frac{s}{g}}$, weil $s = g \cdot t^2$ ist, und folglich wird $v = 2g \cdot t = 2\sqrt{gs}$, oder $v^2 = 4g \cdot s$.

§. 33*. Man findet daher auch $s = \frac{v^2}{4g}$, als den Weg, welchen der Körper frei fallend muß durchlaufen haben, damit er die Geschwindigkeit $= v$ erlange. Dieser Weg heißt: die der Geschwindigkeit v zugehörige Höhe.

§. 34. Diese Formeln $v = 2g \cdot t$;

$$s = g \cdot t^2; \quad t = \frac{v}{2g};$$

$$s = \frac{v^2}{4g}; \quad t = \sqrt[2]{\frac{s}{g}}; \quad v = 2\sqrt[2]{gs},$$

beantworten alle Fragen, die bei der freien Bewegung fallender Körper vorkommen können.

Zusätze für geübtere Leser.

Wenn (Fig. 14.) der frei fallende Körper, welcher in C ohne alle anfängliche Geschwindigkeit seine Bewegung anfing, den Weg $CB = s$ in der Zeit $= t$ durchlaufen, und hier die Geschwindigkeit $= v$ erlangt hat: so wissen wir, daß er den sehr kleinen Weg $Bb, = v \cdot dt$ in der Zeit $= dt$ zurücklegen würde, wenn die Geschwindigkeit unveränderlich bliebe. Obgleich nun hier die Geschwindigkeit veränderlich ist, so erhellt doch aus den Principien der Differential-Rechnung, daß man $ds = vdt$ setzen dürfe;

denn gewiß ist, da die Bewegung eine beschleunigte ist, ds $>$ vdt und $<$ $(v+dv)\,dt$, wenn die Geschwindigkeit bis zu $v+dv$ zunimmt, während des kleinen Zeittheilchens dt, und die Differential-Rechnung giebt die Gründe an, warum das Product $dv.dt$ hier nicht beachtet wird.

Bei dem freien Falle der Körper ist (§. 25.) die Geschwindigkeit der Zeit proportional, wenn zu Anfang der Bewegung die Geschwindigkeit $= 0$ war. Es ist also $v = k.t$ und folglich $ds = kt.dt$, woraus durch Integration folgt $s = \text{Const} + \frac{1}{2}kt^2$ oder, wenn $s = 0$ ist, für $t = 0$, das heißt, wenn man den Weg von da an rechnet, wo die Bewegung anfing, $s = \frac{1}{2}kt^2$. Woran sich dann alle Schlüsse, wie in §. 31. 32. knüpfen.

Die Geschwindigkeit selbst erhält in jedem Zeitmomente einen gleichen Zuwachs, welche der Länge dieses Zeitmomentes proportional ist, also $dv = k.dt$, woraus $v = \text{Const} + kt$ folgt, oder hier $v = k.t$, weil für $t = 0$ die Geschwindigkeit $= 0$ sein sollte.

§. 35. Bemerkung. Ganz ähnliche Formeln gelten offenbar für jede andre gleichförmig beschleunigende Kraft, und sie würden sich von diesen, die sich auf die Wirkungen der Schwere beziehen, nur darin unterscheiden, daß statt g derjenige Raum müßte gesetzt werden, welchen ein, dieser andern Kraft frei folgender Körper in der ersten Secunde durchlaufen würde. Nenne ich diesen Raum $= G$, so wäre hier die am Ende jeder Zeit $= t$ erlangte Geschwindigkeit $= 2G.t$, statt daß sie bei Einwirkung der Schwere $= 2g.t$ war; wir würden also (nach §. 29.) sagen, jene beschleunigende Kraft verhalte sich zur beschleunigenden Kraft der Schwere wie $G : g$, oder sie verhalten sich zu einander, wie die in gleichen Zeiten vermöge der Einwirkung der einen und der andern durchlaufenen Wege.

§. 36. Bemerkung. Da die Schwere auf alle Körper mit gleicher Gewalt einwirkt, sie mögen schon eine beträchtliche Geschwindigkeit erlangt haben oder nicht: so ist wohl einleuchtend, daß ein vertical niederwärts geworfener Körper, der also gleich im Anfange seiner Bewegung eine gewisse Geschwindigkeit $= c$ nach der Richtungslinie der Schwere hat, eben so an Geschwindigkeit gewinnen wird, wie ein ohne anfängliche Geschwindigkeit bewegter Körper. Fing er also an, sich nach verticaler Richtung niederwärts mit der Geschwindigkeit $= c$ zu bewegen, so wird seine am Ende der ersten Secunde erlangte Geschwindigkeit $= c + 2g$, und seine nach Verlauf der Zeit $= t$ erlangte Geschwindigkeit $= c + 2gt$ sein.

Eben so wenn der Körper mit der Geschwindigkeit $= c$ vertical aufwärts, der Richtung der Schwere grade entgegen, geworfen wird, so raubt ihm die Schwere in der Zeit $= t$ eben so viel von seiner Geschwindigkeit, als sie ihm ertheilen würde, wenn er frei fiele; seine Geschwindigkeit ist also am Ende der Zeit $= t$, nur noch $= c - 2g.t$.

§. 37. Lehrsatz. Wenn ein Körper mit einer gewissen anfänglichen Geschwindigkeit vertical niederwärts oder vertical aufwärts geworfen wird: so ist im ersten Falle der in der Zeit $= t$ durchlaufene Weg gleich der Summe desjenigen Weges, welchen er in derselben Zeit gleichförmig mit der anfänglichen Geschwindigkeit, und desjenigen, welchen er vermöge der Schwere ohne anfängliche Geschwindigkeit durchlaufen würde; im zweiten Falle ist der durchlaufene Weg der Differenz dieser Wege gleich.

Beweis. Erster Fall. Es sei c die anfängliche, niederwärts gerichtete Geschwindigkeit, so würde der Körper vermöge dieser Geschwindigkeit in der Zeit $= t$, den Raum $= ct$ durchlaufen; vermöge der Schwere durchliefe er den Raum $= g.t^2$; wir behaupten also, daß der wirklich durchlaufene Raum $= ct + gt^2$ sei. Theilen wir wieder die Zeit $= t$ in n gleiche Theile: so ist am Anfange des ersten Zeittheiles die Geschwindigkeit $= c$, am Ende des ersten Zeittheiles die Geschwindigkeit $= c + 2g.\frac{t}{n}$; am Ende des zweiten Zeittheiles die Geschwindigkeit $= c + 2g \cdot \frac{2t}{n}$ u. s. w., weil jedes Zeittheilchen $= \frac{t}{n}$ ist.

Der durchlaufene Weg ist also

im 1. Zeittheile größer als $\frac{ct}{n}$; kleiner als $\frac{ct}{n} + \frac{2g \cdot t^2}{n^2}$;

im 2. Zeittheile $> \frac{ct}{n} + \frac{2g \cdot t^2}{n^2}$; und $< \frac{ct}{n} + \frac{4g \cdot t^2}{n^2}$;

im 3. Zeittheile $> \frac{ct}{n} + \frac{4g \cdot t^2}{n^2}$; und $< \frac{ct}{n} + \frac{6g \cdot t^2}{n^2}$;

im nten Zeitth. $> \frac{ct}{n} + \frac{2g \cdot (n-1)t^2}{n^2}$; u. $< \frac{ct}{n} + \frac{n \cdot 2g \cdot t^2}{n^2}$;

also der in allen diesen Zeittheilen oder in der Zeit $= t$ durchlaufene Weg

$$> \frac{n \cdot ct}{n} + \frac{2g \cdot t^2}{n^2}(1 + 2 + \ldots\ldots + (n-1)),$$

und zugleich

$$< \frac{n \cdot ct}{n} + \frac{2g \cdot t^2}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n);$$

das ist, der durchlaufene Weg $> ct + gt^2 - \frac{gt^2}{n}$

und zugleich $< ct + gt^2 + \frac{gt^2}{n}$;

also $= ct + gt^2$, da jene Grenzen gelten für jeden Werth von n.

Zweiter Fall. Wird der Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ aufwärts geworfen, so würde er vermöge dieser Geschwindigkeit gleichförmig den Weg $= ct$ in der Zeit $= t$ aufwärts durchlaufen, wenn die Schwere nicht auf ihn wirkte. Diese dagegen würde, allein wirkend, ihn durch den Raum $= gt^2$ herabwärts treiben. Wir behaupten daher, daß er wirklich den Raum $= ct - gt^2$ aufwärts in der Zeit $= t$ durchlaufe. Der Beweis wird völlig, wie im ersten Falle geführt, nur daß jetzt die Geschwindigkeit am Ende des ersten Zeittheiles $= c - 2g\frac{t}{n}$, am Ende des zweiten Zeittheiles $= c - \frac{4g.t}{n}$ ist u. s. w.

Der Weg in dem ersten Zeittheile ist also

$$< \frac{c.t}{n} \text{ und größer als } \frac{c.t}{n} - \frac{2g.t^2}{n^2},$$

im zweiten $< \frac{c.t}{n} - \frac{2g.t^2}{n^2}$ und $> \frac{c.t}{n} - \frac{4g.t^2}{n^2}$,

also in allen n Zeittheilen zusammen

$$< ct - gt^2 + \frac{gt^2}{n} \text{ und } > ct - gt^2 - \frac{gt^2}{n},$$

das ist, da diese Grenzen immer gelten, man mag n so groß man will nehmen

$$\text{der Weg} = ct - gt^2.$$

§. 38. Man kann hier sowohl als in §. 30. den durchlaufenen Weg durch einen ihm proportionalen Flächenraum geometrisch darstellen. Trägt man nämlich auf der graden Linie AB (Fig. 11.) gleiche Stücke von A an auf, um gleiche Zeittheile bildlich darzustellen: so würde, wenn man bei gleichförmiger Bewegung die Geschwindigkeit $= c$ durch die immer gleiche senkrechte Linie AC = DE vorstellte, das Recht-Eck ACFB = c. AB oder = c.t, wenn man AB = t als die Zeit darstellend betrachtet oder der Zeit = t proportional setzt, das ist ABFC dem von dem bewegten Körper durchlaufenen Wege proportional sein.

Läßt man eben so bei gleichförmig beschleunigter Bewegung die auf AB (Fig. 12.) genommenen Stücke Am die Zeit bedeuten, und trägt in jedem Puncte m die Senkrechte mn derjenigen Geschwindigkeit proportional auf, welche am Ende der Zeit = Am = t Statt findet, so ist der von dem Körper durchlaufene Weg dem Flächenraume ACnm proportional. Hier ist nämlich AC der anfänglichen Geschwindigkeit gleich = c aufgetragen, und jede

Senkrechte mn, welche dem Ende der Zeit Am = t entspricht, ist $= c + 2g.t$ genommen.

Es ist leicht zu übersehen, daß die durch alle so bestimmte Puncte n gezogne Linie Cn eine grade Linie ist, weil, wenn CD mit AB parallel gezogen worden, $n'p' : np = Am' : Am$ ist, welches zeigt, daß $n'Cp'$, nCp ähnliche Dreiecke sind, also die Linie n'n sich als Verlängerung an Cn' anschließt. Wenn man sich die durch Am vorgestellte Zeit = t in n gleiche Theile getheilt denkt, und es stellen Aa, ab zwei dieser Theile dar, so ist $AC = c$, $ad = Ah = c + 2g.\frac{t}{n}$; $bg = ae = c + \frac{4gt}{n}$, und der trapezische Raum ACda ist $< Aa . Ah$ und $> Aa . AC$, oder

$$ACda < \frac{t}{n}.\left(c + \frac{2g.t}{n}\right) \text{ und } > c.\frac{t}{n};$$

und eben so

$$adgb < \frac{t}{n}\left(c + \frac{4g.t}{n}\right) \text{ und } > \frac{t}{n}\left(c + \frac{2g.t}{n}\right),$$

und wenn man diese Betrachtung, welche mit der in §. 37. genau übereinstimmt, fortsetzt, so erhellt, daß $ACnm = ct + gt^2$ eine dem durchlaufenen Wege proportionale Größe ist.

§. 39. Dieses führt uns zu einer, oft sehr vortheilhaften Darstellung des von bewegten Körpern durchlaufenen Weges. Wäre nämlich die Bewegung nicht gleichförmig beschleunigt, das heißt, nähme die Geschwindigkeit nicht in gleichen Zeiten um gleich viel zu, so könnte man eben so die Zeiten durch Stücke einer Linie Am (Fig. 13.) = t vorstellen, und in jedem so bestimmten Puncte m eine senkrechte Linie mn der Geschwindigkeit proportional errichten. Wenn die Zunahme der Geschwindigkeit nicht gleichförmig ist, so liegen die Puncte n', n in einer krummen Linie, aber auch hier stellt der durch Am, mn und den Bogen An'n eingeschlossene Flächenraum den Weg dar, oder ist dem in jeder Zeit = t durchlaufenen

Wege proportional. Hat man also Mittel, um den krummlinigt begrenzten Flächenraum zu berechnen, so ist mit dem Gesetze für die Geschwindigkeiten zugleich bestimmt, wie sich die in verschiedenen Zeiten durchlaufenen Wege zu einander verhalten. (vergl. §. 56.)

§. 40. Aufgabe. Wenn der Körper mit einer anfänglichen, vertical niederwärts gehenden Geschwindigkeit $= c$ geworfen wird, und zugleich der Wirkung der Schwere überlassen, frei fällt, die Zeit zu bestimmen, in welcher er den gegebenen Raum $= s$ durchlaufen wird, und die Geschwindigkeit zu bestimmen, die er am Ende des Weges $= s$ erlangt hat.

Auflösung. Da §. 37. $s = ct + gt^2$ gefunden wurde, und die Geschwindigkeit $= v$ in jedem Augenblicke $v = c + 2gt$ ist, so hat man

$$t^2 + \frac{c}{g} t = \frac{s}{g},$$

$$\text{also } t + \frac{c}{2g} = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g^2} + \frac{s}{g}\right)},$$

$$t = -\frac{c}{2g} + \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g^2} + \frac{s}{g}\right)},$$

und folglich $v = 2g.\sqrt{\left(\frac{c^2}{4g^2} + \frac{s}{g}\right)} = \sqrt{(c^2 + 4g.s)}$;

oder $v^2 = c^2 + 4g.s.$

§. 41. Auf ähnliche Art würde dieselbe Aufgabe aufgelöst, wenn der Körper aufwärts geworfen wäre.

§. 42. Aufgabe. Wenn ein Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ vertical aufwärts geworfen wird, die Höhe zu bestimmen, welche er erreicht, und die Zeit, die er zu seinem Steigen verwendet.

Auflösung. Da die Geschwindigkeit des steigenden Körpers immer abnimmt, und (§. 36. 37.) nach Verlauf der Zeit $= t$ nur noch $= v = c - 2g.t$ ist, so ist $v = 0$, für $t = \frac{c}{2g}$. Dieses ist also die Zeit, nach welcher der Körper zu steigen aufhört, oder wenn er seinen höchsten Punct erreicht hat. Da nun für jeden Werth von t die erreichte Höhe $= s = ct - gt^2$ ist, so ist für $t = \frac{c}{2g}$, $s = \frac{c^2}{2g} - \frac{c^2}{4g} = \frac{c^2}{4g}$ die ganze Höhe, welche der Körper erreicht. Sie ist einerlei mit derjenigen Höhe, durch welche der Körper fallen müßte, um die Geschwindigkeit $= c$ zu erlangen.

§. 43. Man hätte den größten Werth von s auch so finden können. Da allgemein $s = ct = gt^2$, oder $t^2 - \frac{ct}{g} = -\frac{s}{g}$; oder $t = \frac{c}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g^2} - \frac{s}{g}\right)}$ ist, so wird t unmöglich für $s > \frac{c^2}{4g}$, und s kann folglich keinen größern Werth erlangen.

Hier hat der doppelte Werth für t eine richtige und leicht nachzuweisende Bedeutung. Wenn der Körper von A aus (Fig. 14.) aufwärts geht, so erreicht er den Punct B oder die Höhe $AB = s$ erstlich beim Steigen, wenn die Zeit $= \frac{c}{2g} - \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g^2} - \frac{s}{g}\right)}$ verflossen ist, und zweitens beim Fallen, wenn die Zeit $= \frac{c}{2g} + \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g} - \frac{s}{g}\right)}$ vorbei gegangen ist.

Beispiel. Hiernach also sollte eine mit 2000 Fuß Geschwindigkeit vertical aufwärts abgeschossene Canonenkugel eine Höhe von 66225 Fuß oder 5 Meilen erreichen und 66 Sec. steigen. Der Widerstand der Luft verursacht, daß die Höhen unvergleichlich viel geringer ausfallen.

§. 44. Am Ende der Zeit $t = \frac{c}{g}$ kömmt der Körper im Fallen wieder in A an, oder s ist dann $= 0$, und seine Geschwindigkeit $= v = c - 2g.t = c - 2g . \frac{c}{g}$ ist $= - c$ geworden. Er hat also beim Fallen in A eben die Geschwindigkeit niederwärts (welches durch das — Zeichen angedeutet wird), welche er im Anfange der Bewegung aufwärts hatte.

Zusatz für geübtere Leser.

Bei jedem der Schwere frei folgenden, in verticaler Richtung bewegten Körper erhält die Geschwindigkeit in dem Zeittheilchen $= dt$ einen Zuwachs $= dv$, der $= kdt$ oder (§. 32.) $= 2g.dt$ ist. Dieses ist eine wirkliche oder positive Zunahme der Geschwindigkeit, wenn der Körper sich herabwärts bewegt; hingegen eine Abnahme oder negative Zunahme der Geschwindigkeit, wenn der Körper sich vertical aufwärts bewegt.

Wir haben also ganz allgemein $dv = 2g.dt$ und folglich $v = \text{Const} + 2gt$, wenn positive Werthe von v einer herabwärts gehenden Bewegung angehören sollen. War nun am Anfange der Zeit t, oder für $t = 0$ die Geschwindigkeit $= c$, so ist allgemein $v = c + 2gt$, und diese Formel gilt für alle verschiedenen anfänglichen Geschwindigkeiten, nur daß man c als positiv ansehen muß, wenn der anfängliche Wurf herabwärts, als negativ, wenn er hinaufwärts gerichtet war. Im ersten Falle also ist $v = c + 2gt$, und bei der Bewegung niederwärts nimmt der in der Zeit $= t$ durchlaufene Weg $= s$, um $ds = vdt = cdt + 2gt\,dt$ während der Zeit $= dt$ zu. Die Integration lehrt, daß hieraus $s = \text{Const} + ct + gt^2$ folge, oder, weil wir am natürlichsten s von da an rechnen, wo der Körper sich befand, als $t = 0$ war, $s = ct + gt^2$.

War die anfängliche Geschwindigkeit aufwärts gerichtet, so würde $s = -ct + gt^2$ werden, wenn man auch hier den Weg $= s$ positiv nennt, wenn er herunterwärts gerechnet wird. Der Weg also, der aufwärts durchlaufen worden, ist

$$= -s = ct - gt^2 = S.$$

Wollen wir hier den Werth finden, welchen s hat, wenn der Körper seine höchste Stelle erreicht hat: so suchen wir, wenn $ct - gt^2$ seinen größten Werth erhält. Da $S = ct - gt^2$ war, so ist $\frac{dS}{dt} = c - 2gt = 0$ die Gleichung für die Zeit, da der Körper den höchsten Punct erreicht hat. Diese giebt $t = \frac{c}{2g}$,

$$\text{also } S = \frac{c^2}{4g}$$

Für $t > \frac{c}{2g}$ erhält S eben die Werthe wieder, die es schon einmal hatte. Setze ich nämlich allgemein $t = \frac{c}{2g} \pm \tau$, so ist

$$S = ct - gt^2 = \frac{c^2}{2g} \pm c\tau - \frac{c^2}{4g} \mp c\tau - g\tau^2;$$

$$S = \frac{c^2}{4g} - g\tau^2,$$ es mag τ positiv oder negativ sein.

§. 45. **Bemerkung.** Um zu prüfen, ob die Gesetze des freien Falles genau den in §. 30 bis 34. gelehrten Bestimmungen gemäß sind, dienen zwar allerdings genaue Beobachtungen über die Zeit des Falles von bestimmten Höhen (*); aber da die Beschleunigung bei freiem Falle so sehr groß ist, so hat man es bequemer gefunden, die Versuche mit einer verminderten beschleunigenden Kraft anzustellen. Dieses geschieht durch die von Atwood angegebne Einrichtung. Hängen an einem über die Rolle A (Fig. 15.) geschlagenen Faden an den entgegengesetzten Enden die ungleichen Gewichte P und p, so ist es so gut, als ob die auf das größere P wirkende bewegende Kraft nur $= P - p$ wäre; diese muß die Masse $= P + p$ in Bewegung setzen, und folglich wirkt auf die Beschleunigung der Bewegung nur eine Kraft $= \frac{P - p}{P + p}$, wenn man die beschleunigende Kraft der Schwere $= 1$ setzt. Das Gewicht P sinkt also zwar auch mit gleichförmig wachsender Geschwindigkeit; aber wenn man p so nimmt, daß $\frac{P - p}{P + p}$ zum Beispiel nur $\frac{1}{10}$ ist, so wird G (§. 35.) nur $= \frac{1}{10}\, g, = 1{,}51$ Fuß, und man kann bei dieser langsamen Bewegung an einer angebrachten Scale bequem genug sehen, daß das Gewicht in

---

(*) Benzenbergs Versuche über den Fall der Körper, den Widerstand der Luft und die Umdrehung der Erde (Dortmund 1804.), zeigen, wie genau sich solche Beobachtungen anstellen lassen.

einer Secunde den Raum von 1,51 Fuß, in zwei Secunden den Raum von 6,04 Fuß und so weiter durchläuft.

Man muß bei diesen Versuchen allerdings noch wegen der Friction eine kleine Correction der Gewichte anbringen, was sich aber auch leicht ausführen läßt.

Vierter Abschnitt.

Vom Falle der Körper auf einer geneigten Ebne.

§. 46. **Bemerkung.** Wenn ein Körper auf der geneigten Ebne AB ohne Reibung hinabgleitet: so ist es (Fig. 16.) nicht die ganze Kraft der Schwere, die ihn auf AB herabwärts treibt; sondern es ergiebt sich, indem wir uns die vertical niederwärts wirkende Kraft $= P$ in eine mit AB parallele und eine darauf senkrechte Kraft zerlegt denken, nur $P \,.\, \mathrm{Sin}\, ABC$ als die nach AB wirkende Kraft, welche sich zur Schwere wie $\mathrm{Sin}\, ABC$ zu 1 verhält. (Statik. §. 177.)

Wir setzen also die nach AB wirkende beschleunigende Kraft $= \mathrm{Sin}\, ABC$.

§. 47. **Aufgabe.** Der Körper bewegt sich frei auf einer unter dem Winkel $ABC = \alpha$ geneigten Ebne; man sucht den in der Zeit $= t$ durchlaufenen Weg $= s$, und die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit $= v$.

Auflösung. Da ein frei fallender Körper in einer Secunde vermöge der $= 1$ gesetzten beschleunigenden Kraft der Schwere den Raum $= g$ durchläuft: so wird (§ 35.) der Körper auf der geneigten Ebne in 1 Secunde den Raum $= g \,.\, \mathrm{Sin}\, \alpha$, vermöge der beschleunigenden Kraft $= \mathrm{Sin}\, \alpha$ durchlaufen.

Da diese Kraft gleichförmig beschleunigend wirkt, so ist der in t Secunden zurückgelegte Weg $= gt^2 . \text{Sin}\,\alpha$, und die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit $= 2gt . \text{Sin}\,\alpha$.

§. 48. Wenn (Fig. 16.) der Körper auf der geneigten Ebne in der Zeit $= t$ den Weg $= As$ durchlaufen hat: so findet man den Weg $= At$, den er in eben der Zeit frei fallend durchlaufen hätte, wenn man in s die Linie st auf AB senkrecht errichtete, und At durch den Anfangspunct A der Bewegung vertical zieht. Hier ist nämlich $ABC = \alpha = Ats$, und $As = At . \text{Sin}\,\alpha$. Es war aber der Weg auf der geneigten Ebne $= gt^2 . \text{Sin}\,\alpha = As$, und der in eben der Zeit in freiem Falle durchlaufene Weg $= gt^2 = \frac{As}{\text{Sin}\,\alpha} = At$.

§. 49. Lehrsatz. Der auf der geneigten Ebne von A an, ohne Einwirkung einer andern Kraft, außer der Schwere, frei herabgleitende Körper hat in jedem Puncte s (Fig. 16.) eben die Geschwindigkeit, welche ein vertical und frei herabfallender Körper erlangt hätte, wenn er von A an frei fallend bis zu der durch s gezognen Horizontallinie gelangt wäre.

Beweis. Da der Körper in der Zeit $= t$ auf der geneigten Ebne die Geschwindigkeit $= v = 2gt . \text{Sin}\,\alpha$ erreicht hat, nach Vollendung des Weges $s = gt^2 . \text{Sin}\,\alpha$: so ist hier $t = \sqrt{\frac{s}{g . \text{Sin}\,\alpha}}$ und $v = 2\sqrt{gs . \text{Sin}\,\alpha}$, oder $v = 2\sqrt{g . Au}$, wenn $As = s$ und su horizontal ist. Aber auch der von A aus vertical herabfallende Körper hat (§. 34.) in der Tiefe $= Au$ die Geschwindigkeit $= v = 2\sqrt{g . Au}$ erlangt; beide Geschwindigkeiten sind also gleich.

§. 50. Hätte der auf der Ebne herabgehende Körper in A eine anfängliche Geschwindigkeit $= c$ gehabt: so wäre in s seine Geschwindigkeit $= c + 2\sqrt{g . Au}$, und eben diese Geschwindigkeit hätte er erlangt, wenn er frei fallend den Weg $= \frac{c^2}{4g} + Au$ zurückgelegt hätte.

§. 51. Lehrsatz. Es ist (Fig. 17.) ABCD ein verticaler Kreis, in welchem der verticale Durchmesser AD gezogen ist. Stellt man sich nun mehrere durch den Endpunct D dieses Durchmessers gezogene Sehnen BD, CD vor, auf welchen, wie auf geneigten Ebnen, Körper herabfallen: so kommen Körper, welche durch die Schwere angetrieben auf den Sehnen und auf dem verticalen Durchmesser herabfallend, ihre Bewegung gleichzeitig in A, in B, in C anfangen, gleichzeitig in D an.

Beweis. Wenn der Winkel ADB $= \beta$ ist, so ist die Sehne DB unter dem Winkel $=$ BDF $= 90° - \beta$ gegen den Horizont geneigt. Die Sehne BD wird also in der Zeit $= t = \sqrt{\frac{BD}{g \, . \, \text{Sin BDF}}} = \sqrt{\frac{BD}{g \, . \, \text{Cos}\beta}}$ durchlaufen. (§. 48. 49.)

Da aber BED $= 2$. BDF (Geom. §. 269.), so ist BD $= 2$. EB . Sin $\frac{1}{2}$ BED $= 2$. EB . Cosβ und folglich $t = \sqrt{\frac{2 \, . \, EB}{g}}$. Eben diesen Ausdruck fände man für die Sehne DC und jede andre. Aber auch der durch AD $= 2$. EB vertical und frei herabfallende Körper durchläuft den Weg $= 2$. EB in der Zeit $= t$ $= \sqrt{\frac{2 \, . \, EB}{g}}$, (§. 34.) folglich kommen alle von A, B, C ohne anfängliche Geschwindigkeit auf AD, BD, CD fortlaufende Körper gleich schnell in D an.

§. 51*. Erklärung. Die so in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege AD, BD, CD heißen isochronische oder gleichzeitige.

Fünfter Abschnitt.

Von ungleichförmig beschleunigenden Kräften, und von der durch sie bewirkten gradlinigten Bewegung.

§. 52. Bemerkung. Die beschleunigenden Kräfte, welche einen Körper zur Bewegung antreiben, sind oft nicht in allen Puncten des Raumes gleich, und ihre Einwirkung wird daher anders und anders, wenn der Körper nach und nach in andre Stellungen gelangt. Diese Verschiedenheit würde schon beim freien Falle der Körper merklich sein, wenn sie aus sehr großen Höhen herabfielen, indem die Schwere in größern Entfernungen von der Erde geringer ist.

Zuweilen wirken auch die beschleunigenden Kräfte mit mehr oder minderer Gewalt auf den schnell bewegten, als auf den langsam bewegten Körper, wie dieses z. B. bei dem Widerstande der Luft der Fall ist.

§. 53. Erklärung. Wenn man auf eine grade Linie AB (Fig. 18.) Stücke AT von A her gerechnet der Zeit $= t$ proportional aufträgt, und in dem Endpuncte jedes Stückes eine Senkrechte TS, der am Ende jener Zeit erlangten Geschwindigkeit proportional zeichnet: so bestimmt sich eine Reihe von Endpuncten dieser Senkrechten, und durch diese eine grade oder krumme Linie, die nun die Scale der Geschwindigkeiten in Beziehung auf die verflossene Zeit heißt.

Beispiel. Wenn die Geschwindigkeit der verflossenen Zeit proportional ist, so wird, wenn AT eine bestimmte und AT′ eine andre bestimmte Zeit darstellt, TS die Geschwindigkeit am Ende jener, T′S′ die Geschwindigkeit am Ende dieser vorstellen, wenn $TS : T'S' =$

AT : AT′ ist. Hier würde die Scale der Geschwindigkeiten eine grade Linie; aber wenn sie auch in andern Fällen eine Curve wird, so ist sie doch, wenn das Gesetz für die Geschwindigkeiten gegeben war, bekannt, weil sich so viele Puncte der Curve, als man verlangt, ergeben. Diese Scale legt nun deutlich das Gesetz des Wachsens oder Abnehmens der Geschwindigkeit vor Augen.

§. 54. Man könnte eben so eine Scale der Geschwindigkeit in Beziehung auf die durchlaufenen Wege zeichnen. Würden nämlich auf AB (Fig. 18.) die durchlaufenen Wege aufgetragen, und in jedem Puncte T die Senkrechte = TS so genommen, daß sie derjenigen Geschwindigkeit proportional wäre, welche der Körper nach Vollendung des Weges = AT grade erreicht hat: so würde der Endpunct jeder dieser Senkrechten einen Punct in der verlangten Scale der Geschwindigkeiten bestimmen.

Beispiel. In Fig. 19. stellt CSS′ die Scale der Geschwindigkeiten eines der Schwere frei folgenden, mit der anfänglichen Geschwindigkeit = AC fortgehenden Körpers, in Beziehung auf die verflossenen Zeiten vor, wenn nämlich diese in AT, AT′ aufgetragen sind.

Dagegen ist Css′ die Scale derselben Geschwindigkeiten in Beziehung auf die durchlaufenen Wege, wenn diese durch AT, AT′ dargestellt wären.

Die Figur zeigt, daß die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleich viel zunimmt, daß aber am Ende des doppelten Weges die Geschwindigkeit nicht um das doppelte dessen gewachsen ist, was sie am Ende des einfachen Weges zugenommen hatte, welches auch mit §. 36. 40. übereinstimmt.

Fig. 19. b. stellt ebenfalls beide Scalen für die anfängliche Geschwindigkeit = 0 oder für den Fall dar, da der Körper ganz allein den Wirkungen der Schwere folgt.

§. 55. Erklärung. Auf ganz ähnliche Weise würde sich eine Scale der Kräfte in Beziehung auf den zurückgelegten Weg ergeben, wenn man in dem Endpuncte jedes von A her auf AB aufgetragenen Weges eine Senkrechte, derjenigen beschleunigenden Kraft proportional, zeichnete, die grade am Ende dieses durchlaufenen Weges auf den Körper wirkte.

Eine ähnliche Scale ließe sich in Beziehung auf die verflossene Zeit denken, wenn man die Abscissen AT, AT′ den Zeiten proportional nähme und TS, T′S′ den Kräften proportional, die grade am Ende dieser Zeiten auf den Körper wirken. Endlich erhielte man eine Scale der durchlaufenen Wege für bestimmte Zeiten, wenn man die Abscissen den Zeiten, die Ordinaten dem in jeder dieser Zeiten durchlaufenen Wege proportional nähme.

§. 56. Lehrsatz. Wenn man eine Scale der Geschwindigkeiten in Beziehung auf die verflossenen Zeiten zeichnet, so daß (Fig. 20.) jede auf AB aufgetragene Entfernung AT eine Zeit, die Senkrechte TS die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit darstellt: so ist der krummlinigt begrenzte Flächenraum ACST genau dem Wege proportional, der in jener Zeit durchlaufen wird.

Beweis. Wenn AC die anfängliche Geschwindigkeit vorstellt, und Ct mit AT parallel gezogen wird, so ist die Fläche ACtT dem Wege proportional, welchen der Körper mit dieser anfänglichen Geschwindigkeit in der Zeit $AT = t$ zurücklegen würde, und diese Fläche kann uns zum Maaße bei Vergleichung andrer Bestimmungen dienen. (§. 38.)

Stellt man sich nun die Zeit $= t = AT$ in n gleiche Theile zerlegt vor, von denen AD, DE, EF einige darstellen: so bedeutet hier AC die anfängliche Geschwindigkeit $= v$; $DG = v'$ die Geschwindigkeit am Ende des ersten Zeittheilchens; $EH = v''$ die Geschwindigkeit am Ende des zweiten Zeittheilchens. Nun ist offenbar, wenn die Geschwindigkeit zunehmend ist, der durchlaufene Weg in der Zeit $= \frac{1}{n} . t$, größer als $\frac{1}{n} t . v$ u. kleiner als $\frac{1}{n} t . v'$; der in der Zeit $= \frac{2}{n} t$ durchlaufene Weg

größer als $\frac{1}{n} t . v + \frac{1}{n} t . v'$ u. kleiner als $\frac{1}{n} t . v' + \frac{1}{n} t . v''$, und so weiter, und dieses gilt, man mag die Theilchen $= \frac{1}{n} t$ so klein nehmen als man will. Und eben so ist der Flächenraum ACGD größer als ACgD oder AC . AD $= \frac{1}{n} t . v$; u. kleiner als AcGD oder GD . AD $= \frac{1}{n} t . v'$. Der Flächenraum ACGHE größer als

$$ACgD + DGhE \text{ oder } \frac{1}{n} t (v + v'),$$

und kleiner als AcGD + DgHE oder $\frac{1}{n} t (v' + v''$.)

Der zurückgelegte Weg in den Zeittheilchen $= \frac{1}{n} t$, $= \frac{2}{n} t$, und so in allen folgenden, ist also allemal zwischen Grenzen eingeschlossen, die sich zu dem mit der Geschwindigkeit = AC = v gleichförmig in der Zeit $= \frac{1}{n} t$ oder $= \frac{2}{n} t$ durchlaufenen Wege genau so verhalten, wie die eben erwähnten Parallelogramme und Summen von Parallelogrammen zu ACgD oder $v . \frac{1}{n} t$, zu 2ACgD oder $v . \frac{2}{n} t$ und so weiter. Da nun diese Parallelogramme und Summen von Parallelogrammen zugleich Grenzen sind, zwischen denen die krummlinigt begrenzte Fläche liegt, und dieses immer der Fall ist, man mag für t, welchen Werth man will, annehmen, und man mag t in eine willkürlich große Zahl = n von Theilen theilen: so verhält sich allemal der in der Zeit AT = t durchlaufene Weg zu dem Wege, der mit der Geschwindigkeit = AC gleichförmig durchlaufen wäre, wie der krummlinigt begrenzte Raum ACST zu ACtT.

§. 57. Wir könnten sagen, die Fläche ACST stelle den durchlaufenen Weg dar; denn sie enthält eben so viele bei der Flächenmessung zum Grunde gelegte Einheiten, als der zurückgelegte Weg Längen-Einheiten enthält. Jene bei der Flächenmessung zum Grunde liegenden Einheiten sind aber Rechtecke, deren eine Seite durch die Linie, welche die Zeit-Einheit vorstellt, die andre durch die Einheit der Geschwindigkeiten gegeben ist.

§. 58. Lehrsatz. Wenn (Fig. 21.) gGG′ die Scale der beschleunigenden Kräfte in Beziehung auf die verflossenen Zeiten darstellt, das ist, wenn überall die Senkrechten TG, T′G′ sich so zu Ag verhalten, wie die am Ende der Zeiten = AT, = AT′ wirkenden beschleunigenden Kräfte zu der im ersten Augenblicke der Bewegung wirkenden beschleunigenden Kraft: so ist der Flächenraum AgGT allemal der in der Zeit = AT erlangten Geschwindigkeit proportional, oder proportional dem Unterschiede der anfänglichen und der am Ende der Zeit = AT Statt findenden Geschwindigkeit.

Beweis. Da wir die Größe einer gleichförmig beschleunigenden Kraft (§. 29.) nach der Geschwindigkeit abmessen, welche sie den Körpern in der Zeit-Einheit ertheilt, oder (§. 35.) nach dem Raume, welchen der Körper vermöge ihrer Einwirkung in der Zeit-Einheit, wofür ich 1 Sec. setze, durchläuft: so werden hier die Ordinaten Ag, TG und so weiter den Geschwindigkeiten gleich oder proportional genommen, welche ein von diesen Kräften beschleunigter Körper am Ende der ersten Secunde angenommen hätte, wenn die Kraft so lange gleichförmig gewirkt hätte.

Nennen wir also die beschleunigende Kraft der Schwere = 1, und bezeichnen durch Zahlen = G das Ver-

hältniß irgend einer andern beschleunigenden Kraft zur Schwere: so ist $v = 2g.G.t$ der allgemeine Ausdruck für die vermöge der Kraft $= G$ in der Zeit $= t$ erlangte Geschwindigkeit, wenn g den Fallraum in der ersten Secunde für die Einwirkung der Schwerkraft bezeichnet. Diese Geschwindigkeit ist also einem Rechtecke proportional, dessen eine Seite der Zeit proportional, die andre $= 2g.G$ ist. Bei unsrer jetzigen Betrachtung sehen wir die beschleunigende Kraft als veränderlich an, und folglich ist, bei wachsender beschleunigender Kraft, diese in jedem folgenden Zeittheilchen größer, als sie im vorigen war, so wie bei abnehmender Kraft das Gegentheil Statt findet. Denken wir uns also die Zeit $AT = t$ in n gleiche Theile getheilt, von denen AC, CE einige andeuten, so ist bei wachsender beschleunigender Kraft,
wenn im Anfange die Kraft $= G$,

am Ende des Zeittheilchens $= \frac{1}{n} t$, die Kraft $= G'$,

am Ende des Zeittheilchens $= \frac{2}{n} t$, die Kraft $= G''$

war, die im ersten Zeittheilchen erlangte Geschwindigkeit größer als $2g.G.\frac{1}{n} t$ und kleiner als $2g.G'.\frac{1}{n} t$, weil die Beschleunigung in dieser Zeit von G auf G' stetig zunahm. Diese Geschwindigkeit wird also durch einen Flächenraum dargestellt, der größer als ein Rechteck von den Seiten $= 2gG$ und $= \frac{1}{n} t$, und kleiner als ein Rechteck von den Seiten $= 2gG'$ und $= \frac{1}{n} t$ ist. Eben so ist die in zwei Zeittheilchen oder in der Zeit $= \frac{2}{n} t$ erlangte Geschwindigkeit größer als sie sein würde, wenn, während jedes Zeittheilchens die anfängliche Kraft, $= G$ im ersten, $= G'$ im zweiten gewirkt hätte; aber kleiner als sie sein würde, wenn während des ganzen ersten Zeittheilchens schon die erst am Ende eintretende Kraft $= G'$, während des ganzen zweiten die Kraft $= G''$ gewirkt hätte. Die am Ende der Zeit $= \frac{2}{n} t$ erlangte Geschwindigkeit ist also größer als $2g \cdot \frac{1}{n} t\,(G + G')$ und kleiner als $2g \cdot \frac{1}{n} t\,(G' + G'')$; der ihr entsprechende Flächenraum also größer, als zwei Rechtecke über den Grundlinien $= \frac{1}{n} t$, von den Höhen $= G$ und $= G'$, und kleiner als zwei Rechtecke über denselben Grundlinien, deren Höhen $= G'$ und $= G''$.

Ist also unsre Scale der beschleunigenden Kräfte so gezeichnet, daß $Ag = 2g \cdot G$; $CD = 2g \cdot G'$; $EF = 2g \cdot G''$ u. so ferner: so ist der Flächenraum $AgDC > 2g \cdot G \cdot \frac{1}{n} t$, und $< 2g \cdot G' \cdot \frac{1}{n} t$; der Flächenraum $AgFE > 2g \cdot (G + G') \frac{1}{n} t$, und $< 2g \cdot (G' + G'') \frac{1}{n} t$. Diese Flächenräume liegen also zwischen denselben Grenzen, zwischen welchen die Flächenräume liegen sollten, die wir als den Geschwindigkeiten entsprechend fanden, und da dies immer Statt findet, wie klein man auch die Zeittheilchen $= \frac{1}{n} t$ nehme: so erhellt deutlich genug, daß die in der Zeit $= AT = t$, vermöge der einwirkenden beschleunigenden Kräfte erlangte Geschwindigkeit, durch den von der Scale der Kräfte begrenzten Flächenraum $AgGT$ dargestellt wird, oder daß die hier erlangte Geschwindigkeit sich zu der Geschwindigkeit, die durch eine gleichförmig beschleunigende Kraft $= G$ in eben der Zeit bewirkt wäre, verhält, wie der Flächenraum $AgGT$ zu dem Rechtecke $2g\,G \cdot t = Ag \cdot AT$.

Hatte der Körper schon eine anfängliche Geschwindigkeit $= c$, so muß man diese zu der eben bestimmten erlangten Geschwindigkeit hinzurechnen, um die gesammte am Ende der Zeit $= t$ Statt findende Geschwindigkeit zu haben.

§. 59. Anmerkung. Fig. 20. und Fig. 21. b stellen ein wirkliches Beispiel zu §. 56 und 58. dar. Die Scale der Geschwindigkeiten in Fig. 20. ist nämlich so gezeichnet, daß allemal $v = c + h \cdot t^{\frac{3}{2}}$, nämlich $AC = c$, $gG = h$ und jede Ordinate $= v$ ist, AD stellt die Zeit-Einheit vor. Fig. 21. b. zeigt diejenige Scale der Kräfte, welche die in Fig. 20 angegebnen Aenderungen der Geschwindigkeit bewirken. Hier ist nämlich für jedes $AT = t$, die Ordinate $TG = 2g \cdot G = \frac{3}{2} h \cdot t^{\frac{1}{2}}$ und folglich für die Zeit-Einheit $= AC$, $CD = \frac{3}{2} h$. Da die Zeichnungen denselben Bewegungsgesetzen entsprechen und $AT = AT$, $AT' = AU'$ in beiden Figuren ist: so ergiebt sich, daß

$$TS - AC : T'S' - AC = AGT : AG'T'$$

oder $gG : hH$ (Fig. 20.) $= ACD : AFE$ (Fig. 21. b.)

Auch Fig. 22. giebt ein Beispiel von Scalen der Kräfte und Geschwindigkeiten, die eben den Zeitpuncten entsprechen; AT stelle nämlich die Zeit, TG die am Ende derselben wirkende Kraft, TV die erlangte Geschwindigkeit des Körpers dar. Hier ist also $TV : T''V'' = AgGT : AgG''T''$ und so für alle Werthe von t.

§. 60. Lehrsatz. Wenn man eine krumme Linie zeichnet, deren Abscissen AS den von einem bewegten Körper durchlaufenen Wegen direct proportional, und deren Ordinaten SV den am Ende dieser Wege erlangten Geschwindigkeiten umgekehrt proportional sind: so ist der von ihr begrenzte Flächenraum AUVS der während der Bewegung durch AS verflossenen Zeit proportional. (Fig. 23.)

Beweis. Bei gleichförmiger Bewegung wird der Weg $= s$ in der Zeit $t = \frac{s}{c}$ durchlaufen, wenn c die immer gleiche Geschwindigkeit ist. (§. 4.) Wenn die Bewegung ungleichförmig ist, so stelle $AS = s$ den in der Zeit $= t$ durchlaufenen Weg vor, und man theile diesen in n gleiche Theile, so daß $AB = BD = \frac{1}{n}s$ ist; war nun im Anfange der Bewegung die Geschwindigkeit $= v$, am Ende des Weges $= \frac{1}{n}$ s die Geschwindigkeit $= v'$, am Ende des Weges $= \frac{2}{n}$ s die Geschwindigkeit $= v''$, am Ende des Weges $= s$ die Geschwindigkeit $= V$ und so ferner, so nehme man $AU = \frac{a^2}{v}$; $BC = \frac{a^2}{v'}$; $DE = \frac{a^2}{v''}$; $SV = \frac{a^2}{V}$ und so weiter, wo a eine willkürliche Linie ist, die nach eben dem Maaße wie v und AU abgemessen wird. Nach dieser für alle Puncte geltenden Bestimmung zieht man nun die Curve UCEV. Dann ist, wenn v wachsend war im Fortgange der Bewegung, der Flächenraum AUCB kleiner als $AU \cdot AB = \frac{a^2}{v} \cdot \frac{1}{n}s$ und größer als $BC \cdot AB = \frac{a^2}{v'} \cdot \frac{1}{n}s$; aber $\frac{\frac{1}{n}s}{v}$ würde die Zeit sein, die der Körper gebrauchte, um mit der Geschwindigkeit $= v$ den Weg $= \frac{1}{n}s$ zu durchlaufen, $\frac{\frac{1}{n}s}{v'}$ würde die bei der Geschwindigkeit $= v'$ für eben den Weg erforderliche Zeit sein, und zwischen diesen Grenzen liegt die wirklich verwandte Zeit, indem die Geschwindigkeit allmählig von v bis v′ wächset. Die für den Weg $= AB = \frac{1}{n}s$ erforderliche Zeit liegt also, n mag, welche Größe man will, haben, zwischen eben den Grenzen, zwischen welchen $\frac{AUCB}{a^2}$ liegt. Eben so erhellt, daß die Zeit, in welcher der Weg $= \frac{2}{n}s$ durchlaufen wird, allemal zwischen eben den Grenzen ist, zwischen welchen

$\frac{AUED}{a^2}$ liegt, wenn AUED den krummlinigt begrenzten Flächenraum anzeigt. Und so ließen sich die Schlüsse fortsetzen. Jene Grenzen aber, deren eine etwas zu großes, die andre etwas zu kleines gab, lassen sich so nahe als man will an einander rücken, indem man die Theile $= \frac{1}{n}$ s sehr verkleinert, und da die beiden erwähnten Größen immer zwischen denselben Grenzen bleiben, wie sehr man sie auch einander nähern mag, so müssen jene beiden Größen gleich, die für $\frac{1}{n}$ s verwandte

Zeit $= \frac{AUCB}{a^2}$, die für $\frac{2}{n}$ s verwandte

Zeit $= \frac{AUED}{a^2}$, die für den Weg AS verwandte

Zeit $= \frac{AUVS}{a^2}$ sein.

§. 61. Lehrsatz. Wenn gEG (Fig. 24.) die Scale der beschleunigenden Kräfte in Beziehung auf die in AS aufgetragenen Wege ist: so verhalten sich die Flächenräume AgED, AgGS und alle ähnlichen, wie die Differenz der Quadrate der anfänglichen Geschwindigkeit und der am Ende der zugehörigen Wege AD, AS erlangten Geschwindigkeiten.

Beweis. Da bei der Einwirkung einer gleichförmig beschleunigenden Kraft, die sich zur Schwere wie G zu 1 verhält, $v^2 = 4g \cdot Gs$ ist und g . G der in der ersten Secunde durchlaufene Weg (§. 34. 35.): so erhellt, daß für verschiedene durchlaufene Wege s und S, die Quadrate der am Ende derselben erlangten Geschwindigkeiten durch $v^2 = 4g\, G \,.\, s$ und $V^2 = 4g\, G \,.\, S$ ausgedrückt werden. Der Unterschied der Quadrate derjenigen Geschwindigkeiten also, welche nach Vollendung der Wege = s und = S vermöge der beständigen Kraft = G erlangt sind, wird dem Unterschiede der Wege proportional sein. Das ist $V^2 - v^2 = 4g.G(S-s)$. Eben das findet Statt, wenn der Körper schon mit einer gewissen anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ seine Bewegung anhob. Dann nämlich ist (§. 37.) $s = ct + gGt^2$ und $v = c + 2g.Gt$, also $v^2 = c^2 + 4.g.G.ct + 4.g.G.g.Gt^2$, oder $V^2 = 4g.G.s + c^2$ und folglich

$$v^2 - c^2 = 4g\,G\,s.$$

Auf ähnliche Art wird die am Ende des Weges $= S$ erlangte Geschwindigkeit $= V$ bestimmt und

$$V^2 - c^2 = 4g.G.S \text{ gefunden.}$$

Denken wir uns in unserm Falle, wo ungleichförmig beschleunigende Kräfte wirken, den ganzen durchlaufenen Weg $= AS = s$ in n Theile, $AB = \frac{1}{n}s$, $BD = \frac{1}{n}s$ und so ferner getheilt und nennen G, G', G'' u. s. w. die beschleunigenden Kräfte, die im Anfange der Bewegung, die nach Vollendung des ersten Theilchens, die nach Vollendung des zweiten u. s. w. wirken: so ist für die anfängliche Geschwindigkeit $= v$, für die am Ende des Weges $= \frac{1}{n}s$ Statt findende $= v'$, und die am Ende des Weges $= \frac{2}{n}s$ Statt findende $= v''$, gewiß für wachsende beschleunigende Kräfte

$$v'^2 - v^2 > 4g\,G\,\frac{s}{n} \text{ und } < 4g\,G'\,\frac{s}{n},$$

$$v''^2 - v'^2 > 4g\,G'.\frac{1}{n}s \text{ und } < 4g\,G''\,\frac{1}{n}s,$$

$$v'''^2 - v''^2 > 4g\,G''\,\frac{1}{n}s \text{ und } < 4g\,G'''\,\frac{1}{n}s,$$

also, wenn man addirt,

$$v'''^2 - v^2 > 4g.\frac{1}{n}s\,(G + G' + G'') \text{ und}$$

$$> 4g\,\frac{1}{n}s\,(G' + G'' + G''').$$

Aehnliche Bestimmungen gelten für die am Ende aller übrigen Theile erlangten Geschwindigkeiten.

Ist nun unsre Scale der beschleunigenden Kräfte so gezeichnet, daß $\frac{Ag}{4g} = G$, die im Anfange der Bewegung; $\frac{BC}{4g} = G'$, die am Ende des Weges $= \frac{1}{n}$ s wirkende; $\frac{DE}{4g} = G''$, die am Ende des Weges $= \frac{2}{n}$ s wirkende Kraft darstellt: so ist der Flächenraum

$$AgcB > 4g \,.\, G \,.\, \frac{1}{n} s \text{ und } < 4g \,.\, G' \,.\, \frac{1}{n} s$$

$$BCED > 4g \,.\, G' \,.\, \frac{1}{n} s \text{ und } < 4g \,.\, G'' \,.\, \frac{1}{n} s \text{ u. s. w.,}$$

und es erhellt leicht, daß der Flächenraum AgED allemal zwischen denselben Grenzen enthalten ist, zwischen welchen $v''^2 - v^2$ liegt, und auf ähnliche Weise der ganze Flächenraum AgGS zwischen denselben Grenzen, zwischen welchen $V^2 - v^2$ liegt, wenn V die Geschwindigkeit am Ende, v die Geschwindigkeit am Anfange des Weges AS = s bezeichnet. Jener Flächenraum stellt also diesen Unterschied der Quadrate der Geschwindigkeiten genau dar, da beide zwischen einerlei, einer willkürlichen Annäherung fähigen Grenzen liegen.

§. 62. Bemerkung. Alle bisherigen Sätze hätten eigentlich in Beziehung auf zwei Fälle bewiesen werden sollen, nämlich theils so gut in Beziehung auf abnehmende als auf wachsende Kräfte, theils so gut in Beziehung auf abnehmende als auf wachsende Geschwindigkeiten. Ich habe nur einen dieser Fälle durchgeführt, indem der Beweis für den andern, der eben so geführt wird, dann leicht zu übersehen ist.

Zusätze für geübtere Leser.

Alle in diesem Abschnitte vorgetragenen Sätze lassen sich mit Hülfe der Integral-Rechnung viel leichter darstellen.

Wenn allgemein s den am Ende der Zeit $= t$ zurückgelegten Weg bezeichnet, und v die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit: so ist $ds = vdt$. Wir dürfen nämlich es so ansehen, als ob die Geschwindigkeit, während des kleinen Zeitmomentes $= dt$, unverändert $= v$ bliebe, weil, wie die Differential-Rechnung lehrt, wir nur das erste Glied, oder dasjenige Glied, worin die erste Potenz der Differenzen vorkömmt, zu berücksichtigen brauchen. Jene Differentialgleichung giebt also $s = \int vdt$, welches Integral gefunden wird, wenn v als Function von t gegeben ist. Aus der Integral-Rechnung ist zugleich bekannt, daß $\int vdt$ die Fläche angiebt, welche durch die Curve begrenzt wird, deren Abscissen $= t$ und Ordinaten $= v$ sind; es erhellt also von selbst, wie die bildliche Darstellung in §. 56. sich hieran anschließt.

Auf ganz ähnliche Weise läßt sich §. 58. mit Hülfe der Integral-Rechnung betrachten. Wenn eine unveränderliche beschleunigende Kraft $= G$ während der Zeit $= t$ auf einen bewegten Körper wirkt: so nimmt seine Geschwindigkeit um $2gGt$ zu (§. 35.). Hier, wo G eine veränderliche Kraft sein soll, können wir sie doch so ansehen, als ob sie während des kleinen Zeittheilchens $= dt$ unveränderlich bliebe, und wir sagen daher: die während dieses Zeitmomentes $= dt$ erfolgende Vermehrung der Geschwindigkeit sei $= dv = 2gG.dt$, woraus $v = 2g\int Gdt$ folgt, wenn G als Function von t gegeben ist. Und hier ist das Integral $2g\int Gdt$ wieder der Inhalt einer krummlinigt begrenzten Fläche, wenn der Curve Abscissen $= t$ und Ordinaten $= 2Gg$ sind.

An diese Formeln schließen sich mit Leichtigkeit zwei andre, erstlich $ds = vdt$, giebt offenbar $\frac{ds}{v} = dt$, und folglich $t = \int \frac{ds}{v}$, wenn etwa v als Function von s gegeben wäre, wie §. 60.; und zweitens aus $dv = 2g\,G\,.\,dt$ folgt die Formel $\frac{dv}{G} = 2gdt$ und $2gt = \int \frac{dv}{G}$, die man oft gebraucht, wenn G als Function von v ausgedrückt wird. Uebrigens erhellt leicht, daß §. 60. eben das darstellt, was wir hier in der Formel $t = \int \frac{ds}{v}$ übersehen.

In unsrer jetzigen Darstellung läßt sich das, was §. 61. enthält, überaus leicht ableiten.

$$\begin{aligned} \text{Wir hatten } ds &= vdt, \\ \text{und } dv &= 2g.Gdt, \\ \text{also } 2vdv &= 4g.Gvdt, \\ &= 4g.G\,ds, \end{aligned}$$

woraus sich durch die Integralrechnung ergiebt:

$$\text{Const} + v^2 = 4g\int G ds.$$

Hier ist $4g\int G ds$ die in §. 61. betrachtete Fläche, die mit $s = 0$ anfängt, also $= 0$ ist für $s = 0$. Aber für $s = 0$ soll v einen bestimmten Werth haben, den ich $v = c$ setzen will, also da $\int G ds$ mit s zugleich verschwindet,

$$\text{Const} + c^2 = 0, \text{ oder Const} = -c^2,$$

wodurch die allgemeine Gleichung in $v^2 - c^2 = 4g\int G ds$ übergeht, wie in §. 61.

Wäre G als Function von v gegeben, so hätte man auch

$$\frac{2vdv}{G} = 4gds$$

$$\text{oder } \int \frac{2vdv}{G} = 4gs.$$

§. 63. **Bemerkung.** Wenn, wie wir hier offenbar immer voraussetzen, die Richtung der beschleunigenden Kraft mit der Richtung der Bewegung zusammen fällt: so geht der Körper immer in derselben gradlinigten Richtung fort, und seine Bewegung wird nun beschleuniget, wenn die Kraft nach eben derselben, sie wird verzögert, wenn die Kraft nach der entgegengesetzten Richtung wirkt.

Ein Beispiel solcher Bewegungen können wir von dem Falle eines aus großen Höhen herabfallenden Körpers hernehmen. Die Schwerkraft ist in großen Entfernungen von der Erde nicht überall gleich, sondern verhält sich umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernungen vom Centro der Erde. Nennen wir also die Schwerkraft $= 1$ in der Entfernung $= R$ vom Mittelpuncte, so ist sie $= \frac{R^2}{h^2}$ in der Entfernung $= h$ vom Mittelpuncte; und es wird folglich ein von der Entfernung $= h$ gegen den Mittelpunct herabfallender Körper, wenn er den Weg $= s$ durchlaufen hat, also sich in der Entfernung $= h - s$ vom Centro befindet, von der Kraft $= \frac{R^2}{(h-s)^2}$ beschleuniget, und diese würde ihm, wenn sie unveränderlich fortwirkte in 1 Secunde die Geschwindigkeit

$$= 2g \cdot \frac{R^2}{(h-s)^2} \text{ ertheilen.}$$

§. 64. Aufgabe. Ein von sehr großer Höhe herabfallender Körper, dem keine anfängliche Geschwindigkeit ertheilt war, hat einen bestimmten Raum $= s$ durchlaufen; man verlangt die Geschwindigkeit zu bestimmen, die er grade dort erlangt hat.

Auflösung. Befand er sich im Anfange der Bewegung in der Entfernung $= h$ vom Mittelpuncte, also in dem Momente, für welchen die Bestimmung der Geschwindigkeit $= v$ verlangt wird, in der Entfernung $= h - s$, so ist $v^2 = \frac{4g R^2 s}{h(h-s)}$, wenn R den Halbmesser der Erde bedeutet, und g den der Kraft $= 1$ entsprechenden Fallraum in 1 Secunde.

Beweis. Denke ich mir (Fig. 25.) die Scale der beschleunigenden Kräfte in Beziehung auf die durchlaufenen Wege gezeichnet, so daß jedes auf der Abscissenlinie aufgetragene Stück $AS = s$ den durchlaufenen Weg darstellt, und jede zugehörige Ordinate SG der am Ende desselben wirkenden beschleunigenden Kraft, oder vielmehr derjenigen Geschwindigkeit, welche sie dem Körper in 1 Secunde mittheilen würde, wenn sie unverändert wirkte, proportional ist: so kann ich in jedem Puncte, für den $AS = s$ ist, $SG = 4g \cdot \frac{R^2}{(h-s)^2}$ nehmen, da die Kraft $= \frac{R^2}{(h-s)^2}$ dem Körper die Geschw. $= 2g \cdot \frac{R^2}{(h-s)^2}$ ertheilen würde.

Der Weg AS sei in n gleiche Theile getheilt, von denen Aa, ab die ersten vorstellen mögen, so ist der Flächenraum

$$Aac\gamma > 4g \cdot \frac{1}{n} s \frac{R^2}{h^2} \text{ und } < 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2},$$

weil $A\gamma = \frac{R^2}{h^2} 4g$ und $ac = 4g \cdot \frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2}$ ist.

Eben so ist der Flächenraum

$$acdb > 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2} \text{ u. } < 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \frac{R^2}{(h - \frac{2}{n} s)^2}$$

u. s. w. Der ganze Flächenraum $A\gamma GS$ ist also

$$> 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \left(\frac{R^2}{h^2} + \frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2} + \frac{R^2}{(h - \frac{2}{n} s)^2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{R^2}{(h - \frac{(n-1)}{n} s)^2} \right)$$

und

$$< 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \left(\frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2} + \frac{R^2}{(h - \frac{2}{n} s)^2} + \frac{R^2}{(h - \frac{3}{n} s)^2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{R^2}{(h - s)^2} \right).$$

Es läßt sich aber leicht beweisen, (vergl. §. 65.) daß $\frac{4g R^2 s}{h(h-s)}$ immer zwischen diesen Grenzen liege, wie groß man auch n nehme, obgleich dadurch diese Grenzen nach Belieben verengert werden können, und folglich ist

$A\gamma GS = \frac{4g R^2 s}{h(h-s)}$, und $v^2 = \frac{4g R^2 . s}{h(h-s)}$, weil auch hier $SG = 4g . G$ genommen ist, wie in §. 61.

§. 65. Daß $\frac{4g R^2 s}{h(h-s)}$ allemal zwischen den erwähnten Grenzen liege, läßt sich so erweisen.

Die Vergleichung

$$\frac{4g R^2 s}{h(h-s)} > 4g R^2 . \frac{s}{n} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{(h - \frac{1}{n} s)^2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1}{(h - \frac{n-1}{n} s)^2} \right)$$

$$\text{und} < 4g R^2 . \frac{s}{n} \left(\frac{1}{(h - \frac{1}{n} s)^2} + \frac{1}{(h - \frac{2}{n} r)^2} + \ldots + \frac{1}{(h-s)^2} \right)$$

giebt

$$\frac{n}{h(h-s)} > \frac{1}{h^2} + \frac{1}{(h-\frac{1}{n}s)^2} + \frac{1}{(h-\frac{2}{n}s)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(h-\frac{n-1}{n}s)^2};$$

und

$$< \frac{1}{(h-\frac{1}{n}s)^2} + \frac{1}{(h-\frac{2}{n}s)^2} + \frac{1}{(h-\frac{3}{n}s)^2} + \ldots + \frac{1}{(h-s)^2},$$

oder wenn ich $u = \frac{1}{n} s$ setze

$$\frac{n}{h(h-nu)} > \frac{1}{h^2} + \frac{1}{(h-u)^2} + \frac{1}{(h-2u)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(h-(n-1)u)^2};$$

und

$$< \frac{1}{(h-u)^2} + \frac{1}{(h-2u)^2} + \frac{1}{(h-3u)^2} + \ldots + \frac{1}{(h-nu)^2}.$$

Diese Grenzen sind richtig für $n = 1$, da

$\frac{1}{h.(h-u)} > \frac{1}{h^2}$ und $< \frac{1}{(h-u)^2}$ ist.

Sie sind noch richtig für $n = 2$, weil der vor dem Ungleichheitszeichen stehende Theil aus $\frac{1}{h(h-u)}$ in $\frac{2}{h(h-2u)}$ übergeht, wenn man statt $n = 1$, jetzt $n = 2$ setzt, dieser also um

$$\frac{2}{h(h-2u)} - \frac{1}{h(h-u)} = \frac{1}{(h-u)(h-2u)}$$ wächst,

statt daß der erste nach dem Ungleichheitszeichen stehende Ausdruck um weniger, nämlich nur um $\frac{1}{(h-u)^2}$, welches $< \frac{1}{(h-u)(h-2u)}$ ist, wächst, und der zweite nach dem Ungleichheitszeichen stehende Ausdruck um zu viel, nämlich um $\frac{1}{(h-2u)^2} > \frac{1}{h(-u)(h-2u)}$ wächst.

Es läßt sich auch zeigen, daß diese Grenzen richtig bleiben für $n = m + 1$, wenn sie richtig waren für $n = m$. Ist nämlich wirklich

$$\frac{m}{h(h-mu)} > \frac{1}{h^2} + \frac{1}{(h-u)^2} + \frac{1}{(h-2u)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(h-(m-1)u)^2}$$

und $< \frac{1}{(h-u)^2} + \frac{1}{(h-2u)^2} + \ldots + \frac{1}{(h-mu)^2}$,

so geht, indem man n um eins größer $= m + 1$ nimmt, das vor dem Ungleichheitszeichen stehende Glied in $\frac{m+1}{h(h-(m+1)u)}$ über, oder ist um

$$\frac{m+1}{h(h-(m+1)u)} - \frac{m}{h.(h-mu)} = \frac{1}{(h-mu)(h-(m+1)u)}$$

größer geworden; die nach dem Ungleichheitszeichen stehende erste Reihe erhält dagegen nur das neue Glied $= \frac{1}{(h-mu)^2}$, welches kleiner als $\frac{1}{(h-mu)(h-(m+1)u)}$ ist, und die zweite Reihe erhält das neue Glied $= \frac{1}{(h-(m+1)u)^2}$, welches größer als

$\frac{1}{(h-mu)(h-(m+1)u)}$ ist. War also die erste Reihe zu klein und die andre zu groß, so bleibt das auch noch jetzt der Fall. Da nun die Grenzen gelten für $n = 1$ und $n = 2$, so gelten sie für $n = 3$ u. s. f.

Aber auch das läßt sich leicht übersehen, daß der für v^2 gefundene Ausdruck $= \frac{4g R^2 s}{h(h-s)}$ zwischen immer engere Grenzen eingeschlossen wird, je größer man n nimmt. Denn diese Grenzen waren

$$4gR^2.\frac{s}{n}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{(h-\frac{1}{n}s)^2}+\frac{1}{(h-\frac{2}{n}s)^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{(h-\frac{n-1}{n}s)^2}\right),$$

und

$$4gR^2.\frac{s}{n}\left(\frac{1}{(h-\frac{1}{n}s)^2}+\frac{1}{(h-\frac{2}{n}s)^2}+\ldots+\frac{1}{(h-s)^2}\right),$$

und da diese fast ganz aus denselben Gliedern bestehen, so erhellt sogleich, daß ihr Unterschied

$= 4gR^2.\frac{s}{n}\left(\frac{1}{(h-s)^2}-\frac{1}{h^2}\right)$ ist, welches, weil h und s ihre Werthe behalten, desto kleiner ist, je größer n wird, und folglich durch die Vergrößerung von n, oder durch die Zerlegung der s in mehrere Theile so klein als man verlangt, werden kann.

Beispiel. Wäre $h = 2R$ und R der Halbmesser der Erde, so käme der Körper, welcher in der Höhe $= R$ über der Erdoberfläche sich zu bewegen anfing, mit der Geschwindigkeit $= v = 2\sqrt{g\frac{R}{2}}$ auf der Oberfläche der Erde an, nachdem er den Weg $s = R$ durchlaufen hätte. Diese Geschwindigkeit hingegen wäre $= 2\sqrt{gR}$ gewesen, wenn während der ganzen Bewegung die Schwere $= 1$ beschleunigend auf den Körper gewirkt hätte.

§. 65. Anmerkung. Könnte der Körper sich im Fallen bis an den Mittelpunct der Erde fort bewegen, und würde er immerfort nach demselben Gesetze beschleunigt, so würde s sich dem Werthe $= h$ immer mehr nähern, und der Werth von v also ohne Grenzen wachsen; der Körper würde also dann, im Mittelpuncte der Kräfte selbst, mit einer unendlichen Geschwindigkeit ankommen. Versucht man $s > h$ zu setzen, so scheint $v = \sqrt{\frac{4gR^2s}{h(h-s)}}$ unmöglich zu werden; es läßt sich aber durch einige Ueberlegung leicht einsehen, daß dieses hier nicht heißen kann, s könne nie größer als h werden, oder der Körper könne nicht über den Mittelpunct hinausgehen; vielmehr ist offenbar, daß seine im Mittelpuncte erlangte ungeheure Geschwindigkeit ihn über denselben hinausführt, und daß nun die Kraft, welche ihn zurück gegen den Mittelpunct treibt, seine Geschwindigkeit nach und nach eben so vermindert, wie die anziehende Kraft sie vorhin verstärkte, so daß die Geschwindigkeit vor der Ankunft im Centro und bei dem Hinausgehen über dasselbe in gleichen Entfernungen gleich ausfallen wird.

Daß dieses in der That so sei, und daß in unsrer Analysis nur darum dieses nicht hervortrete, weil in dem Ausdrucke für die Kraft das Quadrat von $(h - s)$ vorkömmt, läßt sich leicht zeigen. Die Kraft ist immer gegen den Mittelpunct wirkend, sie ist also keinesweges, wie ihr Werth $\frac{R^2}{(h-s)^2}$ anzugeben scheint, auch dann positiv oder die Bewegung beschleunigend, wenn $s > h$ oder der Körper schon über den Mittelpunct hinausgegangen ist; sondern die Natur der Sache fordert, daß wir die Kraft als negativ zu betrachten anfangen, sobald $h - s$ negativ wird. In unsrer vorigen Reihen-Entwickelung läßt sich dies darstellen, wenn man die Eintheilung von s in n Theile so annimmt, daß der Mittelpunct der Kräfte mitten zwischen zwei Abtheilungen der $m$ten und der $(m+1)$ten fällt, ist nämlich $h = \frac{m+\frac{1}{2}}{n} s$ und $\frac{m+\frac{1}{2}}{n} < 1$, so würde

$$v^2 > 4gR^2 \cdot \frac{s}{n}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{(h-\frac{s}{n})^2} + \frac{1}{(h-\frac{2s}{n})^2} + \ldots \right.$$

$$\ldots + \frac{1}{(h-\frac{m-1}{n}s)^2} + \frac{1}{(h-\frac{m}{n}s)^2} - \frac{1}{(h-\frac{m+1}{n}s)^2}$$

$$\left. - \frac{1}{(h-\frac{m+2}{n}s)^2} \ldots\ldots - \frac{1}{(h-\frac{n-1}{n}s)^2}\right)$$

und auf ähnliche Weise würde die Reihe, welche $> v^2$ ist, ausgedrückt. Hier heben nun die Glieder

$\frac{1}{(h-\frac{m}{n}s)^2} - \frac{1}{(h-\frac{m+1}{n}s)^2}$ und eben so

$\frac{1}{(h-\frac{m-1}{n}s)^2} - \frac{1}{(h-\frac{m+2}{n}s)^2}$ einander auf, da die ersteren, wenn man den Werth von h berücksichtigt, geben

$$\frac{1}{(+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{n})^2} - \frac{1}{(-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{n})^2} = 0,$$

die zweiten $\frac{1}{(+\frac{3}{2}\cdot\frac{s}{n})^2} - \frac{1}{(-\frac{3}{2}\cdot\frac{s}{n})^2} = 0$, und so alle übrigen auf ähnliche Weise bestimmten Glieder.

Hier tritt also ein Fall ein, wo die Analysis nicht, wie wir es sonst gewohnt sind, alles von selbst rein ausspricht, was sich in allen Umständen ereignet, sondern weil es uns an einer Bezeichnung fehlt, wodurch das Quadrat einer positiven Größe anders als das Quadrat einer eben so großen negativen in Rechnung gebracht würde, so sind wir hier genöthigt, die Untersuchung da zu schließen und neu anzufangen, wo die bisher beschleunigende Kraft in eine verzögernde übergeht. (*)

§. 67. Mit Hülfe unsrer vorigen Lehrsätze ließe sich nun auch die Zeit bestimmen, in welcher der hier betrachtete Körper einen gewissen Raum durchläuft. Man hätte nämlich nur nöthig, auf eine grade Linie die Abscissen gleich den durchlaufenen Wegen aufzutragen, und die senkrechten Ordinaten den Geschwindigkeiten umgekehrt proportional oder $= \frac{a^2}{2R}\sqrt{\frac{h.(h-s)}{g.s}}$ zu nehmen: so würde der durch die so bestimmte Curve begrenzte Flächenraum, dividirt durch a^2, die Zeit darstellen. Aber einen analytischen Ausdruck hierfür kann man nur mit Hülfe der Integral-Rechnung mit einiger Leichtigkeit finden.

Zusatz für geübtere Leser.

Die weitläuftigen Rechnungen in §. 63 bis 67. kürzen sich sehr ab, wenn man höhere Rechnungen zu Hülfe nimmt.

(*) Anm. Daß hiebei dennoch einige Schwierigkeit übrig bleibt, ist nicht zu leugnen.

Wenn der Körper den Weg $= s$ durchlaufen hat, also sich in der Entfernung $= h - s$ vom Mittelpuncte der Erde befindet: so ist die beschleunigende Kraft der Schwere $= \frac{R^2}{(h-s)^2}$,

also $dv = 2g \cdot \frac{R^2}{(h-s)^2} dt$,

oder da $vdt = ds$ ist, $vdv = 2g \cdot \frac{R^2}{(h-s)^2} ds$.

das ist, da $d.(h-s) = -ds$,

$$v.dv = -2g.R^2 \frac{d.(h-s)}{(h-s)^2},$$

also, integrirt, $\frac{1}{2} v^2 = \text{Const} + \frac{2g.R^2}{h-s}$.

Da nun $v = 0$ sein soll, für $s = 0$, so ist

$$0 = \text{Const} + \frac{2gR^2}{h};$$

$$\text{Const} = -\frac{2gR^2}{h},$$

$$\frac{1}{2} v^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{h-s} - \frac{1}{h}\right) = 2gR^2 \cdot \frac{s}{h(h-s)},$$

wie es in §. 64. 65. gefunden ward.

Hier wird $v^2 = 4g.R^2 \cdot \frac{s}{h(h-s)}$, unendlich für $s = h$, oder bei der Ankunft des Körpers im Mittelpuncte der anziehenden Kräfte. Die Bestimmung der über den Mittelpunct hinausgehenden Bewegung hat wegen der beständigen Größe einige Schwierigkeit.

Hier läßt sich nun auch die Zeit $= t$ bestimmen, in welcher der Körper einen bestimmten Raum $= s$ durchlaufen hat, denn da $ds = vdt$ oder $dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{2R} \sqrt{\frac{h(h-s)}{gs}}$ ist, so findet sich t durch die Integration der Formel $ds . \sqrt{\frac{h.(h-s)}{g.s}}$.

Wenn man hier, um die Formel rational zu machen, $\sqrt{\frac{h-s}{s}} = w$ setzt, also $s = \frac{h}{1+w^2}$ und $ds = -\frac{h\, 2wdu}{(1+w^2)^2}$,

so ist $dt = \frac{ds.h^{\frac{1}{2}}}{2R.g^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{h-s}{s}} = -\frac{h^{\frac{3}{2}}}{R^2.g^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{w^2 dw}{(1+w^2)^2}$

$$= -\frac{h^{\frac{3}{2}}}{R.g^{\frac{1}{2}}} \left(-\frac{dw}{(1+w^2)^2} + \frac{dw}{1+w^2}\right)$$

und $t = \frac{h^{\frac{3}{2}}}{R \cdot g^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{w}{2(1+w^2)} - \frac{1}{2} \text{Arc.tang}\, w \right) + \text{Const}$

$$= \frac{h^{\frac{3}{2}}}{R \cdot g^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\sqrt{(hs - s^2)}}{2h} - \frac{1}{2} \text{Arc tang} \left(\sqrt{\frac{h-s}{s}} \right) \right\} + \text{Const}$$

(Pasquichs Analysis. 2. Band §. 38. 6. Zusatz.)

Soll $t = 0$ sein, für $s = 0$, so ist

$$\text{Const} = \frac{1}{2} \frac{h^{\frac{3}{2}}}{R \cdot g^{\frac{1}{2}}} \cdot \text{Arc.tang}\, \infty,$$

oder $\text{Const} = \frac{1}{2} \frac{h^{\frac{3}{2}}}{R \cdot g^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \pi.$

folglich

$$t = \frac{h^{\frac{3}{2}}}{2R \cdot g^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\sqrt{(hs - s^2)}}{h} + \frac{1}{2}\pi - \text{Arc.tang} \left(\sqrt{\frac{h-s}{s}} \right) \right\}$$

$$= \frac{h^{\frac{3}{2}}}{2R \cdot g^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\sqrt{(hs - s^2)}}{h} + \text{Arc.Cotang} \left(\sqrt{\frac{h-s}{s}} \right) \right\}$$

$$= \frac{h^{\frac{3}{2}}}{2R \cdot g^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\sqrt{(hs - s^2)}}{h} + \text{Arc.Cosin} \sqrt{\frac{h-s}{s}} \right\}$$

Für den Fall also, da $h = 2R$ war, oder der Körper beim Anfange seines Fallens um einen ganzen Erdhalbmesser über der Oberfläche der Erde sich befand, gebraucht er, um die Oberfläche der Erde zu erreichen, oder den Weg $= s = R$ zurück zu legen, die Zeit $= \frac{\sqrt{2R}}{\sqrt{g}} \left(\frac{1}{2} + \text{Arc Cos} \sqrt{\frac{1}{2}} \right)$

$$= \sqrt{\frac{R}{2g}} + \frac{1}{4}\pi \sqrt{\frac{2R}{g}};$$

weil zum Bogen $= \frac{1}{4}\pi$ der Cosinus $= \sqrt{\frac{1}{2}}$ gehört. Fiele der Körper aus der Höhe $h = 2R$ bis zum Centro selbst, so wäre $s = h$ und die Fallzeit $= \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$.

Sechster Abschnitt.

Von der Bahn geworfener Körper, auf welche die Schwere wirkt.

§. 68. Bemerkung. Wenn ein Körper nach der Richtung AB geworfen wird, (Fig. 26.) und es wirket auf ihn eine beschleunigende Kraft nach einer Richtung, die nicht mit AB übereinstimmt: so kann der Körper nicht der graden Linie AB folgen, sondern, indem die beschleunigende Kraft ihn nöthiget, von ihr abzuweichen, zwingt sie ihn, in einer gekrümmten Bahn fortzugehen.

Sind die Richtungen der beschleunigenden Kraft in allen den Orten, die der Körper bei seiner Bewegung erreicht, unter sich parallel: so ist es hier am bequemsten, die anfängliche Geschwindigkeit nach Richtungen, mit der Richtung der beschleunigenden Kraft parallel und auf diese senkrecht, zu zerlegen, indem es einleuchtend ist, daß die beschleunigende Kraft nur eine Geschwindigkeit nach der Richtung hervorbringen oder zerstören kann, nach welcher sie wirkt, und folglich die auf die Richtung senkrechte Geschwindigkeit ganz ungeändert läßt.

§. 69. Aufgabe. Ein der Schwere unterworfener Körper wird mit einer Geschwindigkeit $= c$, nach der Richtung AB (Fig. 26.), die unter dem Winkel BAC gegen den Horizont geneigt ist, geworfen: man sucht eine Bestimmung für den Ort, welchen der Körper am Ende der Zeit $= t$ erreicht hat.

Auflösung. Man trage auf der anfänglichen Richtungslinie den Weg $= c.t =$ AE auf, den der Körper vermöge seiner anfänglichen Geschwindigkeit ohne Einwirkung der Schwere würde durchlaufen haben; durch den so bestimmten Punct E ziehe man eine Verticallinie EF und nehme auf ihr $EG = gt^2$, gleich dem Raume, welcher ein frei fallender Körper in der Zeit $= t$ durchläuft: dann ist G der Punct, welchen der geworfene Körper am Ende der Zeit $= t$ erreicht hat.

Beweis. Da die Schwere, als eine nach verticaler Richtung wirkende Kraft, die horizontale Bewegung des Körpers weder beschleunigen noch verzögern kann; so ist es offenbar, daß der Körper in jeder gegebenen Zeit sich bis zu eben der Verticallinie fortbewegt hat, die er ohne Einwirkung der Schwere in eben der Zeit erreicht hätte. Seine verticale Bewegung dagegen wird durch die Schwere, welche auf bewegte und auf ruhende Körper ganz gleich einwirkt, eben so verzögert, wie es bei einem vertical aufwärts geworfenen Körper geschieht; sie zieht ihn nämlich in jedem Momente um eben so viel niederwärts, als einen ihrer Einwirkung ganz frei folgenden Körper, und der Körper befindet sich also in der verticalen Tiefe $= gt^2$ unter dem Puncte E, den er ohne Einwirkung der Schwere erreicht hätte.

§. 70. Diese geometrische Bestimmung läßt sich leicht in einer Formel darstellen, welche dann besser dient, um das Gesetz der ganzen Bewegung zu übersehen. Die Richtung der anfänglichen Bewegung sei unter dem Winkel $BAC = \alpha$ gegen den Horizont geneigt: so hat man für jede Zeit $= t$, die Entfernung $AE = c.t$, die horizontale Entfernung $AF = c.t.\mathrm{Cos}\,\alpha$; die Höhe $FE = c.t.\mathrm{Sin}\,\alpha$, also $FG = c.t.\mathrm{Sin}\,\alpha - gt^2$, wenn g den Fallraum schwerer Körper in der ersten Secunde bedeutet.

§. 71. Aufgabe. Die Höhe zu bestimmen, in welcher der Körper, bei den eben angenommenen Bedingungen der Bewegung, sich befindet, wenn er eine gewisse horizontale Entfernung $= x$ vom Anfangspuncte der Bewegung erreicht hat.

Auflösung. Da die erlangte horizontale Entfernung in der Zeit $= t$, durch $= c.t.\mathrm{Cos}\,\alpha$ ausgedrückt wurde, wenn wir alle vorigen Bezeichnungen beibehalten, so ist $c.t.\mathrm{Cos}\,\alpha = x$, oder es muß die Zeit $= t = \frac{x}{c\,\mathrm{Cos}\,\alpha}$ verflossen sein, wenn der Körper eine gewisse horizontale Entfernung $= x$ soll erlangt haben. Da nun am Ende irgend einer Zeit $= t$, die erreichte Höhe des Körpers $= c.t.\mathrm{Sin}\,\alpha - g.t^2$ ist, so wird diese für $t = \frac{x}{c\,\mathrm{Cos}\,\alpha}$ durch $x\,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{gx^2}{c^2\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}$ ausgedrückt.

§. 72. Aufgabe. Zu bestimmen 1, wenn und an welchem Orte der Körper seine größte Höhe erreicht, und 2, wenn und wo er zu der Horizontallinie wieder zurückkehrt, von welcher er ausgegangen war.

Auflösung. 1. Nenne ich die zu irgend einer Zeit erreichte Höhe $= y$, so ist $y = ct\,\mathrm{Sin}\,\alpha - gt^2$, oder $y = x.\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{gx^2}{c^2\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}$, woraus, wenn man die quadratischen Gleichungen auflöset,

umgekehrt $t = \frac{c\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2\,\mathrm{Sin}^2\,\alpha}{4g^2} - \frac{y}{g}\right)}$

und $x = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4\,\mathrm{Sin}^2\,\alpha\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}{4g^2} - \frac{c^2\,y\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}{g}\right)}$

folgt. Es würden also t sowohl als x unmögliche Werthe erhalten, wenn man $y > \frac{c^2\,\mathrm{Sin}^2\,\alpha}{4g}$ setzen wollte, und folglich ist $y = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}^2\,\alpha}{4g}$ die größte Höhe, die der Körper erreicht. Wann er diese Höhe erreicht hat, wird durch $t = \frac{c\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{2g}$ bestimmt, und seine horizontale Entfernung von A ist, indem er diese Höhe erreicht, durch $x = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2g}$ oder $x = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,2\alpha}{4g}$ ausgedrückt.

2. Wenn der Körper sich wieder in derselben Horizontallinie befinden soll, von welcher er ausgegangen war, so muß $y = o$ sein. Aber $y = o$ giebt

$$o = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha},$$ also entweder $x = o$, oder

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{gx}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha},$$ das ist $$x = \frac{c^2 \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha}{g} = \frac{c^2 . \operatorname{Sin} 2\alpha}{2g}.$$

In den beiden Puncten, welche durch diese Werthe von x bestimmt werden, schneidet die Curve die Horizontallinie AC, und diese Entfernungen $= x$ hat der Körper erreicht, die erste, wenn $t = o$ ist, oder im Anfange der Bewegung; die andre, wenn $t = \frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{g}$ ist; letzteres ist also die Zeit, welche der Körper gebrauchen würde, um wieder bis auf die Erde zu fallen, wenn er sich in A an der Oberfläche der Erde befand.

§. 73. Die größte Höhe, und die Zeit, wenn sie erreicht wird, hätte sich auch dadurch finden lassen, daß man bestimmte, wenn die immer verminderte verticale Geschwindigkeit ganz verschwindet; denn dann muß, indem der Körper zu steigen aufhört, sein Fallen wieder anfangen. Des Körpers verticale Geschwindigkeit ist $= c \operatorname{Sin} \alpha$ und diese wird eben so wie bei verticaler Bewegung in der Zeit $= t$ um $2gt$ vermindert, sie wird also durch $= c \operatorname{Sin} \alpha - 2g . t$ am Ende der Zeit $= t$ ausgedrückt, und verschwindet folglich, wenn $t = \frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{2g}$, welches mit dem Vorigen übereinstimmt.

§. 74. Wir fanden die Weite des Wurfes auf der Horizontal-Ebne $= AC = \frac{c^2 . \operatorname{Sin} 2\alpha}{2g}$. Diese wird bei gleichen Werthen von c am größesten, wenn $\alpha =$ 45 Grade ist, indem dann $\operatorname{Sin} 2\alpha = 1$ wird. Für andre Werthe von α wird diese Weite des Wurfes auf der horizontalen Ebne kleiner; erhält aber für die Winkel $= \alpha$ und $= 90^\circ - \alpha$ gleiche Werthe, oder erhält gleiche Werthe, wenn man den Winkel um gleich viel über oder unter 45 Grad nimmt.

§. 75. Wenn man (§. 72. 1.) t und x durch y bestimmt, so erhalten jene Größen einen doppelten Werth, weil das irrationale Glied das positive Zeichen so gut als das negative haben kann. Der kleinere dieser Werthe ergiebt, wenn und wo der Körper vor seinem höchsten Steigen die bestimmte Höhe erreicht, der größere, wenn und wo der Körper nach seinem höchsten Steigen wieder zu jener Höhe zurückkehrt.

Will man aus der Gleichung (§. 72.)

$$x = \frac{c^2 \operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Cos} \alpha}{2g} \pm \frac{c \operatorname{Cos} \alpha}{2g} \sqrt{(c^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha - gy)}$$

den Punct auftragen, über welchem sich der Körper befindet, indem er die gegebene Höhe $= y$ erreicht hat oder fallend zum zweiten Male erreicht: so muß man auf AC zuerst $AI = \frac{c^2 \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha}{2g} = \frac{1}{2} AC$ oder gleich der Entfernung, in welcher der höchste Punct H der Bahn liegt, nehmen, und von da an

$IO = \frac{c \operatorname{Cos} \alpha}{2g} \sqrt{(c^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha - 4g\, y)}$ vorwärts oder $IF = IO$ rückwärts auftragen. Hieraus ergiebt sich, daß die gleich hohen Puncte G, N in gleicher horizontaler Entfernung von dem höchsten Puncte liegen, und daß folglich die durch den höchsten Punct der Bahn gezogne Verticallinie HI die Curve in zwei symmetrische Hälften theilt.

Eben so zeigt der Werth für t

$$t = \frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha}{4g^2} - \frac{y}{g}\right)},$$ an, daß die bestimmte Höhe $= y$, um eben so lange vor, als nach dem Eintreffen im höchsten Puncte erreicht wird,

denn $\frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{2g}$ ist die Zeit, welche verflossen ist, indem der Körper im höchsten Puncte der Bahn ankömmt.

§. 76. Beispiele. Nach diesen Formeln sollte eine mit 2000 Fuß anfänglicher Geschwindigkeit $= c$ unter dem Winkel $\alpha = 45$ Grad abgeschossene Canonenkugel eine Höhe von 33112 Fuß erreichen, oder etwa $1\frac{1}{3}$ Meile steigen, und erst in einer Entfernung $= 132450$ Fuß oder $5\frac{1}{2}$ Meilen wieder auf die Erde fallen. Bei 3000 Fuß anfänglicher Geschwindigkeit und eben dem Richtungswinkel würde die größte Schußweite 298013 Fuß oder $12\frac{1}{2}$ Meilen betragen und die Kugel ginge bis zu 74500 Fuß oder 3 Meilen Höhe.

Anmerkung. Es ist bekannt, daß wir so große Entfernungen und Höhen bei weitem nicht mit unsern Canonenschüssen erreichen können. Der Widerstand der Luft ist die einzige Ursache dieser so stark verminderten Wirkung unsrer Schüsse.

§. 77. Aufgabe. Es ist die Entfernung $AD = a$ (Fig. 26.) und Höhe $DP = b$ nebst der anfänglichen Wurfgeschwindigkeit $= c$ gegeben; man sucht den Winkel $BAC = \alpha$, unter welchem der Körper muß geworfen werden, damit er den Punct P treffe.

Auflösung. Allgemein war (§. 72. 1.)

$$y = x \cdot \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha},$$ also hier, wo $y = b$ und $x = a$ gegeben ist,

$$b = a \cdot \operatorname{tang} \alpha - \frac{ga^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha} = a \operatorname{tang} \alpha - \frac{ga^2 \operatorname{Sec}^2 \alpha}{c^2}$$

$$= a \cdot \operatorname{tang} \alpha - \frac{ga^2}{c^2} (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha).$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich die unbekannte Größe $\operatorname{tang} \alpha$, durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$\operatorname{tang}^2 \alpha - \frac{c^2}{ga} \cdot \operatorname{tang} \alpha = -1 - \frac{bc^2}{ga^2},$$

welche $\tan g\,\alpha = \frac{c^2}{2ga} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{4g^2 a^2} - 1 - \frac{bc^2}{ga^2}\right)}$ giebt.

Diese Formel findet auch da Anwendung, wo P tiefer als A oder unterhalb AC liegt, wo also b negativ ist.

§. 78. Die gefundenen zwei Werthe für $\tan g\,\alpha$ zeigen, daß man den Punct P bei zwei verschiedenen Richtungen des anfänglichen Wurfs treffen kann.

Der Werth von $\tan g\,\alpha$ wird unmöglich, wenn $\frac{c^4}{4g^2 a^2} < 1 + \frac{c^2 b}{g\,a^2}$; oder $c^4 < 4g^2 a^2 + 4gbc^2$ ist, oder wenn $c^4 - 4gbc^2 < 4g^2 a^2$,

oder $c^4 - 4gbc^2 + 4g^2 b^2 < 4g^2 (a^2 + b^2)$

oder $c^2 - 2gb < 2g\sqrt{(a^2 + b^2)}$

oder $c^2 < 2g\,(b + \sqrt{(a^2 + b^2)})$ ist. Dieses hat darin seinen Grund, weil Höhe und Entfernung des gegebenen Punctes so groß sein könnten, daß sie bei der gegebenen Geschwindigkeit $= c$ unter keinem Neigungswinkel erreicht werden könnte.

Setzt man $c^2 = 2gb + 2g\sqrt{(a^2 + b^2)}$, so ist

$$\tan g\,\alpha = \frac{b}{a} + \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}.$$

Bei kleinern Werthen von c wird die Gleichung unmöglich.

Wir werden die Umstände, wenn dieses Unmöglich werden eintritt, noch näher untersuchen. (§. 88.)

§. 79. Aufgabe. Außer der Entfernung $AD = a$ und Höhe $DP = b$, wo der beim Wurfe zu treffende Gegenstand liegt, ist der Neigungswinkel $= \alpha$ der anfänglichen Richtung gegeben; man sucht, wie groß die Geschwindigkeit $= c$ sein müsse, damit der Gegenstand getroffen werde.

Auflösung. Die Gleichung §. 77.

$$b = a \tang \alpha - \frac{g a^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}, \text{ giebt}$$

$$c^2 = \frac{g a^2}{a \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha - b \operatorname{Cos}^2 \alpha}, \text{ wodurch}$$

c bestimmt ist.

§. 80. c wird nur dann unmöglich, wenn $b \operatorname{Cos} \alpha > a \operatorname{Sin} \alpha$, oder $b < a \tang \alpha$, das ist, wenn der zu treffende Punct oberhalb der anfänglichen Richtungslinie liegt, in welchem Falle er freilich, wenn man den Werth von α nicht ändert, nicht kann getroffen werden.

§. 81. Bemerkung. Obgleich diese Sätze hinreichen, um alle Fragen zu beantworten, die hier vorzukommen pflegen, so zeigen sie uns doch noch nicht in der leichtesten Form das Gesetz, nach welchem die Wurflinie, — denn so können wir diese Curve am besten nennen, bestimmt wird.

Wir haben schon gesehen (§. 75.), daß die Verticallinie HI durch den höchsten Punct der Wurflinie, diese in zwei symmetrische Hälften theilt, und daraus läßt sich schon schließen, daß es eine bequemer zu übersehende Bestimmung der Curve giebt, wenn wir die horizontalen Entfernungen jedes Punctes in ihr von der verticalen Axe HI an rechnen. Die Angaben werden noch bequemer, wenn wir zugleich die Höhenbestimmung auf den höchsten Punct H zurück führen.

§. 82. Lehrsatz. Wenn man durch den höchsten Punct H der Wurflinie (Fig. 26.) eine Verticallinie zieht, und jedes andern Punctes P verticale Tiefe HL unter H und horizontalen Abstand = LP von HI bestimmt: so ist das Quadrat, welches diesen horizontalen Abstand LP zur Seite hat, allemal der verticalen Tiefe HL proportional.

Beweis. Da der Abstand des Anfangspunctes A von der Verticallinie HI, oder $AI = \frac{c^2 \operatorname{Sin} 2\alpha}{4g}$ (in §. 72. 1.), gefunden ist, so wird für irgend einen Punct P, dessen Abscisse AD = x war, $ID = x - \frac{c^2 \operatorname{Sin} 2\alpha}{4g}$, welches ich = z nennen will. Die Höhe IH wurde $= \frac{c^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha}{4g}$ (in §. 72. 1.) gefunden, also ist eines Punctes P, dessen Höhe über I, = y war, Tiefe unter $H = \frac{c^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha}{4g} - y$; nennen wir dieses = u, so ist

$$u = \frac{c^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha}{4g} - y, \text{ also } y = \frac{c^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha}{4g} - u,$$

und da allgemein (§. 71.) die Höhe durch

$$y = x . \operatorname{tang} \alpha - \frac{g x^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}$$ ausgedrückt wurde,

oder umgekehrt (§. 72.) die horizontale Entfernung durch

$$x = \frac{c^2 \operatorname{Sin} 2\alpha}{4g} \pm \frac{c \operatorname{Cos} \alpha}{\sqrt{g}} \sqrt{\left(\frac{c^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha}{4g} - y\right)},$$

so ist $x - \frac{c^2 \operatorname{Sin} 2\alpha}{4g} = z = \pm \frac{c \operatorname{Cos} \alpha}{\sqrt{g}} . \sqrt{u}$,

das ist $z^2 = \frac{c^2 u \operatorname{Cos}^2 \alpha}{g}$.

§. 83. Das Quadrat des horizontalen Abstandes z von der Axe HI ist also für alle Puncte der Curve gleich einem Rechteck aus der Tiefe = u unter dem höchsten Puncte und aus einer für alle Puncte gleich bleibenden Linie $= \frac{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}{g}$.

§. 84. Erklärung. Die Curve, deren Abscissen HL auf der Axe HI vom Scheitel H an gerechnet, dem Quadrate der auf sie senkrechten Ordinaten LP proportional sind, heißt die Parabel; die für alle Puncte gleich bleibende Linie $= \frac{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}{g}$ heißt ihr Parameter.

§. 85. Bei der Wurflinie ist also der Parameter $= \frac{c^2 \, \mathrm{Cos}^2 \alpha}{g}$ gleich der vierfachen Höhe, welche der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit, die $= c \, \mathrm{Cos}\, \alpha$ war, zugehören würde. (§. 33.)

§. 86. Anmerkung. Die Parabel ist eine von den Linien, die als Durchschnittslinien der Kegel-Oberfläche mit einer Ebne entstehen können. Zieht man nämlich in des graden Kegels Oberfläche eine grade Linie von der Spitze nach einem Puncte der Grundfläche, und legt mit ihr eine Ebne parallel: so ist dieser Ebne Durchschnittslinie mit der Kegelfläche eine Parabel.

§. 87. Bemerkung. Um die Wurflinie in allen Fällen zu zeichnen, dienen also folgende Regeln (Fig. 27.). Man trägt auf der durch A gezogenen Horizontallinie, wenn A der Punct ist, von wo aus mit der Geschwindigkeit $= c$ unter dem Neigungswinkel $= \alpha$ der Körper geworfen wird, die Entfernung $AI = \frac{c^2 \, \mathrm{Sin}\, \alpha \, . \, \mathrm{Cos}\, \alpha}{2g}$ auf, errichtet dort die Senkrechte $IH = \frac{c^2 \, \mathrm{Sin}^2 \alpha}{4g}$ $= \frac{1}{2} \, . \, AI \, . \, \mathrm{tang}\, \alpha$, oder zeichnet $MAI = \alpha$, und halbirt MI in H, um den höchsten Punct der Bahn zu finden. Ist so die Axe HI der Bahn und ihr höchster Punct bestimmt: so berechnet man den Parameter $= \frac{c^2 \, \mathrm{Cos}^2 \alpha}{g} = p$, trägt auf die Axe von H her die Abscissen $Hd = p$, $Hh = 2p$; $Hp = 3p$ und die zugehörigen Ordinaten $dn = p$, $hr = p . \sqrt{2}$, $pt = p . \sqrt{3}$, $uv = 2p$ u. s. w. auf; oder zu den Abscissen $= \frac{1}{4}$ p, $= \frac{1}{9}$ p; $= \frac{4}{9}$ p; die Ordinaten $= \frac{1}{2}$ p; $= \frac{1}{3}$ p; $= \frac{2}{3}$ p u. s. w.

§. 88. Bemerkung. Hier läßt sich nun auch etwas Näheres über die Umstände sagen, unter welchen es unmöglich wird, den in der Entfernung $= a$ und in der Höhe $= b$ liegenden Punct zu treffen, wenn die Geschwindigkeit gegeben ist. Wir fanden oben (§. 77.), daß c^2 nicht kleiner als $= 2gb + 2g\sqrt{(a^2+b^2)}$ sein dürfe, wenn sich für α ein möglicher Richtungswinkel, um jenen Punct zu treffen, ergeben sollte. Offenbar giebt es also für ein bestimmtes c eine ganze Folge von Puncten, welche die äußersten für diese Anfangsgeschwindigkeit noch erreichbaren sind; denn jeder Entfernung $= a$ entspricht ein andres b als Werth der Höhe. Soll nämlich c unveränderlich sein, so ergiebt die Gleichung

$$c^2 = 2gb + 2g\sqrt{(a^2+b^2)};$$

$$\text{oder } (c^2 - 2gb)^2 = 4g^2(a^2+b^2);$$

$$c^4 - 4gbc^2 = 4g^2a^2,$$

$$\text{das ist } b = \frac{c^2}{4g} - \frac{ga^2}{c^2},$$ als Bestimmung für die Höhe, welche der in der Entfernung $= a$ liegende Punct höchstens haben darf, um noch von dem mit der Geschwindigkeit $= c$ geschehenden Wurfe getroffen zu werden. Wenn man hier a veränderlich setzt, so liegen diese sämmtlichen Puncte auf einer Parabel, deren Axe die durch den Anfangspunct der Bewegung gezogne Verticallinie ist, deren Scheitel in der Höhe $= \frac{c^2}{4g}$, das ist in derjenigen Höhe liegt, welche die der Geschwindigkeit $= c$ zugehörige ist, und deren Parameter $= \frac{c^2}{g}$ ist.

Für $a = 0$ darf offenbar b nicht größer als $\frac{c^2}{4g}$ sein; denn eine größere verticale Höhe kann mit der Geschwindigkeit $= c$ nicht erreicht werden; für $b = 0$ darf a nicht größer als $= \frac{c^2}{2g}$ sein; denn dieses ist (§. 74.) die größte Entfernung, bis zu welcher man auf derselben Horizontallinie werfen kann. Beides giebt unsre Parabel richtig an.

Zeichnet man die eben angegebne Grenzparabel ABC Fig. 28., in welcher alle Puncte liegen, welche mit der Geschwindigkeit $= c$ noch als die äußersten erreichbar sind: so läßt sich leicht einsehen, daß irgend ein Punct B in derselben, bei einer größeren Geschwindigkeit $= C$ des anfänglichen Wurfes, auf doppelte Weise könnte getroffen werden, nämlich eben so gut in der Parabel DEBF, deren Parameter $= \frac{C^2 \, Cos^2 . IDC}{g}$, als in der Parabel DGBH deren Parameter $= \frac{C^2 . Cos^2 . KDC}{g}$ ist, und hier stellen IDC, KDC die beiden Werthe vor, die in §. 77. 88. α erhielte, wenn die Geschwindigkeit $= C$, größer als c wäre. In diesen beiden Parabeln ist B der Durchschnittspunct mit jener Grenzparabel und zwar (da jede die Grenzparabel zweimal schneidet,) bei der einen der oberste, bei der andern der unterste der beiden Durchschnittspuncte.

Die drei Durchschnittspuncte E, B, N jener beiden durch B gehenden Wurflinien mit der Grenzparabel rücken desto näher zusammen, je weniger C von c verschieden ist, oder je näher man der letzten, allenfalls noch brauchbaren Geschwindigkeit kömmt. Nimmt man diese äußerste Geschwindigkeit selbst zur Anfangsgeschwindigkeit, so bewegt sich der Körper in der Parabel DLBM, welche die Grenzparabel in B nur noch berührt, aber nicht mehr schneidet.

Die Grenzparabel ABC berührt also alle die Wurflinien, welche der kleinsten ebenfalls noch anwendbaren Wurfgeschwindigkeit $= c$ entsprechen, und diese ist für alle in derselben Grenzparabel liegenden Puncte als die kleinste passend.

Die Parabeln Debf, Dgbn, Debm zeigen eben das für einen andern Punct b.

§. 89. **Aufgabe.** Aus der gegebnen anfänglichen Richtung und Geschwindigkeit des Wurfes zu bestimmen, in welcher Richtung und mit welcher Geschwindigkeit sich der Körper in jedem Puncte seiner Bahn fortbewegt.

Auflösung. Man zeichne (Fig. 29.) die Bahn des geworfnen Körpers, wozu die nöthigen Stücke gegeben sind; ziehe die durch den höchsten Punct derselben gehende verticale Axe HI und verlängre sie unbestimmt oberhalb H; man ziehe nun durch den Punct G, für den man Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung zu bestimmen wünscht, die Horizontallinie GN, welche die Axe HI in N schneidet; endlich trage man HO = HN oberhalb auf der Verticallinie auf und ziehe GO, so ist GO die Richtung der Bewegung in G.

Um auch die Geschwindigkeit zu bestimmen, trage man auf die Horizontallinie GN eine Linie Gn gleich der horizontalen Geschwindigkeit des Körpers $= c \operatorname{Cos} \alpha$ auf, ziehe no vertical, so ist Go der Weg, welchen der Körper in 1 Secunde durchlaufen würde, wenn er die Richtung und Geschwindigkeit, die er in G hatte, so lange unverändert behielte.

Beweis. Wir haben uns (§. 68.) die anfängliche Geschwindigkeit in eine horizontale und verticale zerlegt vorgestellt; die horizontale war, wenn ich alle bisherigen Bezeichnungen beibehalte, $= c \operatorname{Cos} \alpha$, und da dieser keine Kraft entgegen wirkt, so bleibt sie während der ganzen Bewegung ungeändert. Die verticale anfängliche Geschwindigkeit fanden wir $= c \operatorname{Sin} \alpha$; sie erleidet aber im Fortgange der Zeit die ganze Aenderung, welche der Einwirkung auf fallende Körper gemäß ist, und ist daher am Ende der Zeit $= t$, nur noch $= c \operatorname{Sin} \alpha - 2gt$.

Der Körper hat also am Ende der Zeit $= t$, eine horizontale Geschwindigkeit $= c . \operatorname{Cos} \alpha = Gn$ (Fig. 29.) und eine verticale Geschwindigkeit $= c \operatorname{Sin} \alpha - 2gt = Gm$; er geht also nach der Richtung Go fort, die gegen den Horizont unter dem Winkel oGn geneigt ist, dessen Tangente $\operatorname{tang} oGn = \frac{Gm}{Gn} = \frac{c \operatorname{Sin} \alpha - 2gt}{c \operatorname{Cos} \alpha}$, und die Geschwindigkeit selbst ist

$$= \sqrt{(c^2 - 4gct \operatorname{Sin} \alpha + 4g^2 t^2)}.$$

Jener Richtungswinkel oGn oder OGn läßt sich noch bequemer ausdrucken. Es ist nämlich (§. 71.)

$x = ct\, \mathrm{Cos}\,\alpha$, also $t = \dfrac{x}{c\, \mathrm{Cos}\,\alpha}$ und folglich

$$\mathrm{tang}\, oGn = \frac{c\, \mathrm{Sin}\,\alpha - \dfrac{2gx}{c\, \mathrm{Cos}\,\alpha}}{c\, \mathrm{Cos}\,\alpha} = \frac{c^2\, \mathrm{Sin}\,\alpha . \mathrm{Cos}\,\alpha - 2gx}{c^2\, \mathrm{Cos}^2\,\alpha}.$$

In §. 82. aber fanden wir für jeden Punct G der Bahn $GN^2 = \dfrac{c^2 . HN . \mathrm{Cos}^2\,\alpha}{g}$, wenn H der höchste Punct der Bahn, HN vertical und GN horizontal ist. Diese Gleichung giebt $\dfrac{HN}{GN}$ oder $\mathrm{tang}\, HGN = \dfrac{g . GN}{c^2\, \mathrm{Cos}^2\,\alpha}$; aber GN ist $= \dfrac{c^2\, \mathrm{Sin}\,\alpha\, \mathrm{Cos}\,\alpha}{2g} - x$ (nach §. 72., wo AI (Fig. 29.) $= \dfrac{c^2\, \mathrm{Sin}\,\alpha\, \mathrm{Cos}\,\alpha}{2g}$ ist), also

tang HGN

$$= \frac{g . \left(\dfrac{c^2\, \mathrm{Sin}\,\alpha\, \mathrm{Cos}\,\alpha}{2g} - x\right)}{c^2\, \mathrm{Cos}^2\,\alpha} = \frac{\tfrac{1}{2} c^2\, \mathrm{Sin}\,\alpha\, \mathrm{Cos}\,\alpha - gx}{c^2\, \mathrm{Cos}^2\,\alpha}$$

das ist, wenn man den obigen Werth für tang oGn vergleicht, tang oGn $= 2$. tang HGN oder wenn O der Einschnittspunct von Go auf der Axe ist, NO $= 2$. HN.

Die Geschwindigkeit selbst war
$= \sqrt{(c^2 - 4gct . \mathrm{Sin}\,\alpha + 4g^2 t^2)}$, das ist
$= c\, \mathrm{Cos}\,\alpha$. Sec OGN, indem
$\mathrm{Sec}\, oGn = \dfrac{\sqrt{(c^2 - 4gt\, c\, \mathrm{Sin}\,\alpha + 4g^2 t^2)}}{c\, \mathrm{Cos}\,\alpha}$ ist, also ist
die Geschwindigkeit $=$ Go, wenn Gn $= c\, \mathrm{Cos}\,\alpha$.

§. 90. Die Geschwindigkeit
$= \sqrt{(c^2 - 4gct\, \mathrm{Sin}\,\alpha + 4g^2 t^2)}$ läßt sich, da (§. 71.) $FG = ct\, \mathrm{Sin}\,\alpha - gt^2$ ist, auch durch $v = \sqrt{(c^2 - 4g.FG)}$ ausdrücken, oder die Fallhöhe, welche der Geschwindigkeit in jedem Puncte zugehört, ist

$\frac{v^2}{4g} = \frac{c^2}{4g} - FG$, oder da $FG = \frac{c^2 \,\mathrm{Sin}^2 \alpha}{4g} - HN$ war (§. 72.), $\frac{v^2}{4g} = \frac{c^2 \,\mathrm{Cos}^2 \alpha}{4g} + HN$.

§. 91. Die Richtung der Bewegung in jedem Puncte G ist offenbar die Tangente der Wurflinie in diesem Puncte; denn sie ist diejenige Linie, auf welcher der Körper gradlinigt fortgehen würde, wenn die Kraft der Schwere in G aufhörte, auf ihn zu wirken. Die Tangente der Parabel an irgend einem Puncte schneidet also die Axe eben so hoch über dem Scheitel, als der Punct selbst unterhalb liegt, indem seine Tiefe = HN ist.

Siebenter Abschnitt.

Von der Bewegung im Kreise und von der Schwungkraft.

§. 92. **Aufgabe.** Ein Körper, der sich (Fig. 30.) auf der graden Linie ab mit der Geschwindigkeit = c fortbewegt, trifft in b auf die Ebne bc und ist genöthiget dieser zu folgen; eben so trifft er in c auf die Ebne cd, in d auf die Ebne de u. s. w.; welche Geschwindigkeit wird er auf jeder dieser Ebnen, deren Neigungswinkel gegen einander bekannt sind, haben.

Auflösung. Es sei cbf = α der Winkel, unter welchem die zweite Ebne gegen die erste geneigt ist, und eben so sei dcg = β, edh = γ für die folgenden Ebnen. Indem der Körper auf ab mit der Geschwindigkeit = c fortgeht, hat er eine mit bc parallele Geschwindigkeit = c Cos α und eine auf bc senkrechte Geschwindigkeit = c . Sin α. Die letztere wird, indem der Körper in b auf die Ebne bc übergeht, völlig aufgehoben, und der

Körper geht auf dieser Ebne mit der Geschwindigkeit $= c \operatorname{Cos} \alpha$ fort. Zerlegt man diese Bewegung wieder nach Richtungen mit cd parallel und darauf senkrecht: so ist die mit cd parallele Geschwindigkeit $= c \operatorname{Cos} \alpha . \operatorname{Cos} \beta$; und da bei dem Uebergange auf die Ebne cd die gegen diese senkrechte Geschwindigkeit zerstört wird, so ist die Geschwindigkeit auf der Ebne cd nur noch $= c . \operatorname{Cos} \alpha . \operatorname{Cos} \beta$. Aus ähnlichen Gründen ist die Geschwindigkeit auf de noch $= c . \operatorname{Cos} \alpha . \operatorname{Cos} \beta . \operatorname{Cos} \gamma$ u. s. w.

Wären alle Neigungswinkel gleich $= \alpha$, so würde die Geschwindigkeit auf der zweiten Ebne $= c . \operatorname{Cos} \alpha$; auf der dritten $= c . \operatorname{Cos}^2 \alpha$, auf der nten $= c . \operatorname{Cos}^{n-1} \alpha$ sein, oder nach n Ablenkungen $= c . \operatorname{Cos}^n \alpha$.

§. 93. Lehrsatz. Wenn (Fig. 31.) der Körper, auf den übrigens keine beschleunigenden Kräfte wirken, sich auf den Seiten eines gleichwinklichten Polygones fortbewegt, und bei dem Uebergange auf jede neue Seitenlinie den eben betrachteten Verlust an Geschwindigkeit leidet: so ist, bei gleicher gesammter Ablenkung von der anfänglichen Richtung, die Abnahme der Geschwindigkeit desto kleiner, je vielseitiger das Polygon ist, oder je mehr die Ablenkung allmählig hervorgebracht wird.

Beweis. Wenn die gesammte Ablenkung von der anfänglichen Richtung $= \beta$ heißt, oder der Winkel, welchen die erste und letzte Seite des polygonischen Bogens mit einander machen, $= \beta$ ist: so kann man sich immer ein gleichseitiges oder ungleichseitiges Polygon gezeichnet denken, dessen Seiten gegen einander unter gleichen Winkeln $= \frac{1}{n} \beta$ geneigt sind. Zeichnet man mehrere solche Polygone, wie ABCCCD, AEFFFGD (Fig. 31.), deren letzte Seiten dieselben sind: so ist die Geschwindigkeit in GD allemal $= c . \operatorname{Cos}^n \frac{1}{n} \beta$, und fällt also verschieden aus für verschiedene Werthe von n, wenn sie in AE, $= c$ war. Die Abnahme der Geschwindigkeit ist also

$= c\,(1 - \mathrm{Cos}^n \frac{1}{n}\beta)$, und diese ist desto kleiner, je größer n ist, indem $\mathrm{Cos}^2 \frac{1}{2}\beta > \mathrm{Cos}\,\beta$, weil $\mathrm{Cos}^2 \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Cos}\beta$, $\mathrm{Cos}^4 \frac{1}{4}\beta > \mathrm{Cos}^2 \frac{1}{2}\beta$ u. s. w.

Um sich zu überzeugen, daß diese Verminderung der Abnahme der Geschwindigkeit, so weit als man verlangt, getrieben werden kann, braucht man nur zu überlegen, daß für den Neigungswinkel $= \frac{1}{n}\beta$ die Geschwindigkeit um $c\,(1 - \mathrm{Cos}\frac{1}{n}\beta)$ abnimmt, indem der Körper von der ersten Seite auf die zweite übergeht. Die jetzt noch übrige Geschwindigkeit $= c\,\mathrm{Cos}\frac{1}{n}\beta$ geht in $= c\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{n}\beta$ über, indem der Körper auf die dritte Seite gelangt, und offenbar ist die jetzt erlittene Verminderung der Geschwindigkeit $= c\,\mathrm{Cos}\frac{1}{n}\beta\,(1 - \mathrm{Cos}\frac{1}{n}\beta)$, geringer, als bei der ersten eben so starken Ablenkung, und folglich die Verminderung bei zwei Ablenkungen kleiner als $2.c.(1 - \mathrm{Cos}\frac{1}{n}\beta)$. So erhellt, daß, nach n Ablenkungen von der ersten Richtung, die Verminderung der Geschwindigkeit kleiner als $n.c.(1 - \mathrm{Cos}\frac{1}{n}\beta$ ist, da bei jedem folgenden Winkel die gesammte Verminderung der Geschwindigkeit immer kleiner wird. Bekanntlich ist (Fig. 32.) $\frac{ad}{ac} = 1 - \mathrm{Cos}\frac{1}{n}\beta$, wenn bd auf ac senkrecht und $acb = \frac{1}{n}\beta$. Zugleich ergiebt die Aehnlichkeit der Dreiecke abd, aeb, daß

$$ad : ab = ab : ae,$$

oder $ad : ab = ab : 2ac$,

das ist $ad = \frac{ab^2}{2ac}$ oder $\frac{ad}{ac} = \frac{ab^2}{2ac^2}$.

Die gesammte Verminderung der Geschwindigkeit nach n Ablenkungen ist also kleiner als

$n.c.\frac{ad}{ac}$ oder kleiner als $n.c.\frac{ab^2}{2ac^2}$, folglich gewiß kleiner als $\frac{n \,.\, c \,.\, (\text{Bogen ab})^2}{2 \,.\, ac^2}$. Da der Bogen ab zu dem Winkel $= \frac{1}{n}\beta$ gehört, so ist seine Länge $= \frac{ac \,.\, \frac{1}{n}\beta \,.\, \pi}{180^\circ}$, wenn $\frac{1}{n}\beta$ in Graden ausgedrückt und π die bekannte Zahl $= 3{,}14159$ ist; also die Verminderung der Geschwindigkeit $< \frac{n \,.\, c}{2} \,.\, \frac{ac^2 \,.\, \frac{1}{n^2}\beta^2\,\pi^2}{180^2 \,.\, ac^2}$ oder $< \frac{c \,.\, \beta^2\,\pi^2}{2 \,.\, n \,.\, 180^2}$ und diese Verminderung kann offenbar bis zu jeder gegebenen Grenze und über sie hinaus verkleinert werden, wenn man n immer mehr vermehrt.

Zusatz für geübtere Leser.

Die Analysis lehrt, daß $\text{Cos}\,\frac{1}{n}\beta =$

$$1 - \frac{\frac{1}{n^2}\beta^2}{2} + \frac{\frac{1}{n^4}\beta^4}{2.3.4} - \frac{\frac{1}{n^6}\,.\,\beta^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

und nach dem Polynomischen Lehrsatze ergiebt sich daraus $\left(\text{Cos}\,\frac{1}{n}\beta\right) =$

$$1 - \frac{\beta^2}{2n} + \left(\frac{1}{n^3.2.3.4} + \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{8}\right)\beta^4 + \text{etc.}$$

wo alle folgende Glieder eine höhere als die zweite Potenz von n im Nenner haben. Hieraus ergiebt sich

$$1 - \text{Cos}^n.\frac{1}{n}\beta = \frac{\beta^2}{2n},$$

wenn man Glieder, die höhere Potenzen von n im Nenner enthalten, weg läßt. Daraus erhellt, daß für immer größere Werthe von n $1 - \text{Cos}^n.\frac{1}{n}\beta$ immer kleiner wird, und $= 0$ wird, für $n = \infty$, wie es bei stetiger Krümmung der Fall ist.

§. 94. Lehrsatz. Wenn ein Körper sich ohne Einwirkung fremder Kräfte auf der stetig gekrümmten Linie

AB (Fig. 33.) fortbewegt: so bleibt seine Geschwindigkeit ungeändert.

Beweis. Wenn man sich an zwei Puncte A, C der Curve Tangenten AD, CD gezogen denkt, so giebt der Winkel CDE an, um wie viel sich die Richtung des Körpers auf seiner ganzen Bahn AC geändert hat. Denkt man sich um den Bogen AC ein Polygon gezeichnet, dessen n Seiten unter den gleichen Winkeln $= \frac{1}{n}$ CDE gegen einander geneigt wären, so daß die erste mit der Tangente AD, die letzte mit der Tangente DC zusammen fiele: so würde die Geschwindigkeit, welche Anfangs $= c$ war, sich bis auf $= c . \mathrm{Cos}^n \frac{1}{n}$ CDE vermindert haben. Diese Verminderung wird immer unbedeutender, je größer die Anzahl der Polygonseiten ist, und durch Vermehrung der Seitenzahl kann man die Verminderung bis über jede gegebne Grenze verkleinern. Aber wie groß man auch die Anzahl der Seiten des Polygons nehmen mag, so ist doch immer ein vielseitigers möglich, und die zwischen den Tangenten AD, CD liegende Curve, die sich an beide anschließt, wird immer noch eine geringere Verminderung der Geschwindigkeit geben, indem sie über jedes, wenn gleich noch so vielseitige Polygon, hinausliegt, und auf ihr die Aenderungen der Richtung noch in unmerklichern Abstufungen erfolgen, als in irgend einem Polygone. Der Körper also, welcher die Curve selbst durchläuft, leidet gar keine Verminderung der Geschwindigkeit; denn da diese Verminderung schon auf den Polygonen von einer bestimmteren Anzahl Seiten kleiner werden kann, als irgend eine bestimmte Größe: so muß sie auf der Curve ganz verschwinden.

§. 95. Bemerkung. Wenn ein Körper auf der stetig gekrümmten Linie ACB (Fig. 33.) fortgeht, so behält er also seine Geschwindigkeit ungeändert; zugleich aber übt er einen Druck, der in jedem Puncte der Curve senkrecht gegen diese ist, aus, weil er immerfort das Bestreben behält, in jedem Puncte nach der Tangente der Curve fortzugehen, und sich von der Curve zu entfernen.

Stellen wir uns einen Körper A vor, der durch einen in C befestigten Faden von unveränderlicher Länge CA in C gehalten werde (Fig. 34.): so wird der Körper, wenn er nach einer auf den grade ausgedehnten Faden CA senkrechten Richtung AE zur Bewegung angetrieben wird, genöthiget sein, den Kreisbogen ABD zu durchlaufen, weil der Faden ihn hindert, die anfängliche Richtung AE seiner Bewegung zu verfolgen. Der Faden wird hier offenbar durch die Kraft, mit welcher der Körper sich vom Centro A zu entfernen strebt, gedehnt, ja diese Kraft könnte den Faden zerreißen, wenn er zu schwach wäre; und wenn das letztere erfolgte, so würde der Körper seinem Bestreben, in der Tangente der Curve fortzugehen, Folge leisten können.

§. 96. Erklärung. Die Kraft, welche den Faden spannt, oder welche grade vom Mittelpuncte abwärts wirkt, heißt die Schwungkraft oder Centrifugalkraft. Sie ist, da der Körper sich im Kreise, mit immer gleicher Geschwindigkeit bewegt, als eine beständig wirkende und immer gleiche Kraft anzusehen, welche in jedem Puncte der Kreisbahn gleich stark den Faden spannt, weil in jedem Puncte die Ablenkung von der schon erlangten Richtung gleich stark ist.

§. 97. Als eine gleichförmig wirkende bewegende Kraft, welche immer auf dieselbe Masse einwirkt, kann die Schwungkraft mit der Schwere verglichen werden, und wir können das Verhältniß beider Kräfte aus den Wegen bestimmen, welche ein Körper vermöge der Einwirkung der einen und der andern in gleichen Zeiten durchläuft oder durchlaufen würde.

§. 98. Lehnsätze. 1. Wenn man (Fig. 34.) am einen Endpuncte des Kreisbogens AB die Tangente AE zieht, und auf ihr das Stück AE durch den verlängerten Radius CB abschneidet: so ist AE größer als der Bogen AB.

Denn wenn man von E aus die zweite Tangente ED zieht, so ist gewiß der Bogen ABD kleiner als AE + ED oder 2AB < 2AE. (vergl. Geom. §. 258. 259.)

2. Wenn man vom einen Endpuncte B des Bogens AB eine Senkrechte BF auf den nach dem andern Endpuncte gezognen Radius AC zieht: so ist $AF = \frac{AB^2}{2r}$, wenn man hier unter AB die Sehne und unter r den Halbmesser des Kreises versteht.

Es ist nämlich $FC = r - AF$;

$$BF^2 = r^2 - FC^2 = 2r . AF - AF^2,$$

und $AB^2 = BF^2 + AF^2 = 2r . AF$,

oder $AF = \frac{AB^2}{2r}$.

3. Hieraus folgt, daß $AF < \frac{(\text{Bogen } AB)^2}{2r}$, weil der Bogen AB größer als seine Sehne ist.

4. Wenn man an einem Endpuncte A des Bogens die Tangente AE zieht, und diese durch den nach dem andern Endpuncte des Bogens gezognen, verlängerten Radius abschneidet: so ist das zwischen B und der Tangente abgeschnittene Stück BE kleiner als $\frac{AE^2}{2r}$.

Es ist $CE^2 = r^2 + AE^2$, also $BE = \sqrt{(r^2 + AE^2)} - r$; nun ist $\sqrt{(r^2 + AE^2)} < r + \frac{1}{2} \frac{AE^2}{r}$, indem, wenn man die Quadrate nimmt,

$$r^2 + AE^2 < r^2 + AE^2 + \frac{1}{4} \frac{AE^4}{r^2}, \text{ ist};$$

also $BE < \frac{1}{2} \frac{AE^2}{r}$.

§. 99. Lehrsatz. Wenn (Fig. 34.) ein Körper, der durch den Faden AC genöthiget wird, in der unveränderlichen Entfernung = AC vom Mittelpuncte C zu bleiben, sich auf dem Kreise ABD mit der Geschwindigkeit = c fortbewegt: so verhält sich die beschleunigende Kraft der Schwungkraft zur beschleunigenden Kraft der Schwere, wie $\frac{c^2}{2gr}$ zu 1, wenn r des Kreises Halbmesser und g den Fallraum in der ersten Secunde für einen der Schwere frei folgenden Körper bezeichnet.

Beweis. Wenn der Körper in einem kleinen Zeittheile = t den Kreisbogen AB durchläuft, so ist dieser = c.t, weil die Bewegung gleichförmig ist, indem (§. 94.) die Geschwindigkeit des, bloß vermöge der Trägheit fortgehenden Körpers keine Aenderung leidet.

In A hatte der Körper die Richtung der Tangente AE, und würde auf dieser fortgegangen sein, wenn nicht die gegen den Mittelpunct ziehende Kraft ihn genöthiget hätte, der Kreislinie zu folgen. Diese Kraft hat also durch ihre, während der ganzen Zeit = t thätige Einwirkung, ihn um so viel als die nach der Richtung der Kraft genommene Entfernung des Punctes B von der Tangente beträgt, von seinem Wege abgelenkt. Mißt man diese Entfernung, um welche der Körper von der Tangente abgelenkt ist, nach der Richtung AC der im Anfange wirkenden Kraft, so wird sie durch = AF angegeben; mißt man dagegen den Abstand von der Tangente nach der Richtung EC der am Ende wirkenden Kraft, so ist sie = EB. Da nun die Kraft während der verschiedenen Momente der Zeit = t immer gegen C gerichtet ist, so ist es irrig, wenn man jene Ablenkung ganz auf die anfänglich wirkende, aber auch irrig, wenn man sie ganz auf die am Ende wirkende Kraft bezieht, und wir müssen daher den Weg, um welchen diese während der Zeit = t wirkende Kraft den Körper von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt hat, oder den Weg, den er vermöge dieser Kraft in der Zeit = t durchlaufen hat, größer als AF und kleiner als EB ansehen.

Nenne ich die gegen den Mittelpunct treibende beschleunigende Kraft, welcher offenbar die Schwungkraft gleich ist, $= p$, oder setze ihr Verhältniß zur Schwere, wie $p : 1$, so ist der Weg, durch welchen sie den Körper in der Zeit $= t$ treibt $= p.g.t^2$, weil die Schwere ihn in eben der Zeit durch den Raum $= g.t^2$ treibt. (§. 35.) Dieser Weg ist aber $>$ AF und $<$ EB, wie klein man auch die Zeit $= t$ und folglich den Bogen AB nehmen mag.

Da nun (§. 98. No. 2. 3. 4.) $AF = \frac{(\text{Sehne } AB)^2}{2r}$

und $EB < \frac{AE^2}{2r}$,

so ist $pgt^2 > \frac{(\text{Sehne } AB)^2}{2r}$

und $pgt^2 < \frac{AE^2}{2r}$. Es ist aber auch

$\frac{(\text{Bogen } AB)^2}{2r} > \frac{(\text{Sehne } AB)^2}{2r}$,

und $\frac{(\text{Bogen } AB)^2}{2r} < \frac{AE^2}{2r}$, und folglich liegen $p.g.t^2$ und $\frac{(\text{Bogen } AB)^2}{2r}$ immer zwischen denselben Grenzen, wie klein man auch die Zeit und den Bogen nehme. Solche Größen, die allemal zwischen einerlei, einander so nahe als man will rückenden Grenzen liegen, sind gleich; und es ist folglich $p.g.t^2 = \frac{(\text{Bogen } AB)^2}{2r} = \frac{c^2 t^2}{2r}$, also $p = \frac{c^2}{2gr}$, gleich der beschleunigenden Kraft, welche auf jedes Theilchen des Körpers wirkt, um ihn in unveränderlicher Entfernung von C zu halten, oder gleich der Schwungkraft, die als Gegenwirkung jener gleich ist.

§. 100. Wenn man unter P die bewegende Kraft versteht, die bei der Schwungkraft wirksam ist, und unter M die Masse des bewegten Körpers: so ist

(§. 27.) $p = \frac{P}{M}$ und folglich $P = \frac{c^2 M}{2gr}$, und dieses ist die gesammte Kraft, welche den Faden zu zerreißen strebt.

§. 101. Aufgabe. Auf einem Kreise von gegebnem Halbmesser $= r$, bewegt sich ein Körper; wie groß muß seine Geschwindigkeit $= c$ sein, damit die Beschleunigung durch die Schwungkraft, gleich der Beschleunigung durch die Schwere sei.

Auflösung. Da hier $p = 1$ sein soll, so muß $c^2 = 2g\,r$ sein.

§. 102. Wenn ein Körper sich in einem Kreise bewegte, dessen Halbmesser $= r$ dem Halbmesser der Erde gleich ist: so wäre $c = \sqrt{2g.r}$ die erforderliche Geschwindigkeit, damit die Schwungkraft der Schwere gleich sei. Es wäre nicht grade nöthig, daß dieser Körper durch einen Faden festgehalten würde, sondern wenn er sich über einem größten Kreise der Erde frei fliegend fortbewegte, so würde die Schwere ihn in jedem Augenblicke gegen den Mittelpunct zu herabziehen, die Schwungkraft aber mit eben so vieler Gewalt ihn davon zu entfernen streben. Der Körper würde also mit der Geschwindigkeit $= \sqrt{2g\,r}$, über einem größten Kreise der Erde fortfliegend, seinen Kreislauf um die Erde unaufhörlich fortsetzen, ohne auf die Erde zu fallen.

Da r ohngefehr $= 19630000$ Fuß ist, u. $g = 15,1$, so müßte die Geschwindigkeit $c = 24360$ Fuß in 1 Secunde sein, damit ein solcher nahe an der Oberfläche der Erde hinfliegender Körper nicht auf sie herabfalle.

§. 103. Lehrsätze. 1. Die Schwungkraft verhält sich direct wie das Quadrat der Geschwindigkeit und umgekehrt wie der Halbmesser des durchlaufenen Kreises.

2. Die Schwungkraft wird ausgedrückt durch den Quotienten, welchen man erhält, wenn man die der Ge-

schwindigkeit zugehörige Höhe $= \frac{c^2}{g4}$ mit dem halben Halbmesser des Kreises dividirt.

3. Wenn ein Körper, dessen Masse $= M$ ist, sich mit der Geschwindigkeit $= c$ auf einem Kreise vom Halbmesser $= r$ fortbewegt, und M', c', r' haben für einen andern Körper eben die Bedeutungen, so ist das Verhältniß der den Faden spannenden Kräfte oder das Verhältniß der gesammten bewegenden Kräfte, zusammengesetzt aus dem directen Verhältnisse der Massen, dem directen Verhältnisse des Quadrates der Geschwindigkeiten, und dem umgekehrten Verhältnisse der Halbmesser, oder diese Kräfte verhalten sich wie $\frac{M\,c^2}{r}$ zu $\frac{M'\,c'^2}{r'}$.

Die Beweise sind schon im Vorigen enthalten.

§. 104. Lehrsatz. Wenn zwei Körper sich in Kreisen von ungleichen Halbmessern bewegen, so sind die bewegenden Kräfte P, P' der Schwungkraft, direct den Massen, direct den Halbmessern der Kreise, und umgekehrt den Quadraten der Umlaufszeiten proportional.

Beweis. Es sei T die Umlaufszeit des Körpers, der mit der Geschwindigkeit $= c$ den Kreis vom Halbmesser $= r$ durchläuft, so ist der in der Zeit $= T$ durchlaufene Weg $= 2r.\pi$, also $T = \frac{2r.\pi}{c}$, oder

$$c = \frac{2r.\pi}{T} \text{ und (§. 100.) } \frac{c^2\,M}{2rg} = \frac{2r.\pi^2 M}{g\,T^2} = P.$$

Eben so ist für den andern Körper, wenn M', r', T' die übereinstimmende Bedeutung haben, $P' = \frac{2.r'.\pi^2.M'}{g.T'^2}$, woraus die Richtigkeit des Lehrsatzes hervorgeht.

§. 105. Sollte hier $\frac{P}{M} = 1$ sein, so wäre

$T^2 = \frac{2r\pi^2}{g}$. Ein Körper also, der nahe über der Erde fortfliegend frei seinen Kreis durchlaufen, oder durch di

Schwungkraft grade genau am Fallen gehindert werden sollte, müßte eine Umlaufszeit $= T = \pi \sqrt{\frac{2r}{g}}$ haben, wenn man für r den Halbmesser der Erde setzte. Da der Durchmesser des Aequators = 6543210 Toisen, also sein Halbmesser = 19629630 Fuß ist, wofür ich 19630000 setze, so ist $T = \pi . \sqrt{\frac{39260000}{15,1}} = 5034$ Secunden, oder ohngefehr = 1 Stunde 24 Min., und in so kurzer Zeit müßte ein nahe über der Oberfläche der Erde hinlaufender Mond einen Umlauf vollenden, wenn nicht die Kraft der Schwere ihn aus seiner Bahn herabziehen und auf die Erde fallend machen sollte.

Achter Abschnitt.

Vom einfachen Pendel.

§. 106. **Erklärung.** Wenn ein der Schwere unterworfener Körper A (Fig. 34.) vermittelst eines Fadens oder dünner Stange an den festen Mittelpunct C geknüpft ist, so daß der Körper, indem die Schwere ihn herabwärts treibt, wenn er von der Verticallinie CG entfernt war, genöthigt ist, auf dem Kreisbogen ABG fortzugehen, so heißt diese Vorrichtung ein **Pendel**.

§. 107. Wenn das Pendel von der Verticallinie CG, in welcher es ruhen würde, entfernt und in eine Lage, wie CA gebracht wird: so wird der Körper A, vermöge seiner Schwere, mit beschleunigter Bewegung auf AG herabfallen; er wird in G mit einer gewissen Geschwindigkeit ankommen und vermöge dieser Geschwindigkeit über G hinaus nach H zu gehen, wo er aber, weil die Schwere seiner Bewegung entgegen wirkt, nach und nach seine Geschwindigkeit verliert, gegen G zurück zu gehen anfängt, und so seine Bewegung in abwechselnden Hingängen und Rückgängen fortsetzt.

§. 108. Erklärung. Diese Bewegung heißt die Schwingungsbewegung des Pendels; ein einzelner solcher Hingang oder ein einzelner Rückgang heißt eine ganze Pendel-Schwingung, oder wenn sie sehr klein ist, wenn nämlich das Pendel nur wenig aus der verticalen Lage gerückt war und folglich sehr kleine Hin- und Hergänge macht, eine Oscillation des Pendels.

§. 109. Erklärung. Das Pendel heißt ein einfaches Pendel, wenn bloß ein Punct A desselben als der Schwere unterworfen betrachtet wird. Die in der Wirklichkeit vorkommenden Pendel, bei denen nicht bloß jeder Punct des Körpers A, sondern auch der Faden oder die Stange CA der Schwere unterworfen ist, heißen zusammengesetzte Pendel.

Wir sehen für jetzt das Pendel als ein einfaches an, indem wir bloß A als einen schweren Punct, und die übrigen Puncte dagegen als der Schwere nicht unterworfen betrachten.

§. 110. Bemerkung. Wenn ein der Schwere unterworfener Körper auf der Ebne ab (Fig. 35.) ohne anfängliche Geschwindigkeit herabsinkt: so erlangt er (§. 49.) in b eben die Geschwindigkeit, die er bei freiem Falle in e, welcher Punct mit b in einerlei Horizontale liegt, erlangt hätte. Ginge er nun mit dieser schon erlangten unverminderten Geschwindigkeit $= 2 . \sqrt{g . ae}$ auf die Ebne bc über, so hätte er in c die Geschwindigkeit $= v = 2\sqrt{g . ae} + 2gt . \text{Sin } bcf$, wenn cf horizontal und t die zu dem Falle durch bc verwandte Zeit ist. In dieser Zeit ist der durchlaufene Weg

$$bc = 2t\sqrt{g . ae} + gt^2 \text{ Sin } bcf,$$

$$\text{also } t^2 + \frac{2t\sqrt{\frac{ae}{g}}}{\text{Sin } bcf} = \frac{bc}{g . \text{Sin } bcf},$$

das ist $t = -\frac{\sqrt{\frac{ae}{g}}}{\text{Sin bcf}} + \sqrt{\left(\frac{bc\,.\,\text{Sin bcf} + ae}{g\,.\,\text{Sin}^2\,\text{bcf}}\right)}$,

oder $t = -\frac{\sqrt{ae}}{\sqrt{g}\,.\,\text{Sin bcf}} + \sqrt{\left(\frac{ef + ae}{g\,.\,\text{Sin}^2\,\text{bcf}}\right)}$

folglich $v = 2\sqrt{g}\,.\,\sqrt{(ef + ae)} = 2\sqrt{g\,.\,af}$.

Die Geschwindigkeit würde also in c eben so groß sein, als die, welche ein von a bis zu der Horizontallinie fe frei herabfallender Körper in f erlangt hätte. Und so läßt sich ferner zeigen, daß der auf den aneinander gefügten Ebnen herabfallende Körper in jedem Puncte d die seiner verticalen Tiefe unter dem Anfangspuncte entsprechende Geschwindigkeit $= 2\sqrt{g\,.\,ag}$ würde erreicht haben, wenn er ohne Verlust an Geschwindigkeit von einer Ebne zur andern hinüberginge.

§. 111. Lehrsatz. Wenn ein schwerer Körper auf der stetig gekrümmten Linie AC (Fig. 36.) vom Puncte A an sich ohne anfängliche Geschwindigkeit herabbewegt: so hat er in jedem Puncte C völlig eben die Geschwindigkeit erlangt, die er bei freiem Falle von A aus, in dem, mit C auf einerlei Horizontallinie liegenden Puncte D erlangt hätte.

Beweis. Da bei der krummlinigten Bewegung (§. 94.) kein Verlust an Geschwindigkeit Statt findet, obgleich der bewegte Körper seine Richtung ändert: so ist klar, daß der im letzten §. als hypothetisch gesetzte Fall, hier wirklich eintritt. Der Körper erlangt also in jedem Puncte C die Geschwindigkeit oder geht in C auf der krummen Linie mit der Geschwindigkeit fort, die er bei freiem Falle bis zu dieser Tiefe unter dem Anfangspuncte würde erreicht haben.

§. 112. Bemerkung. Dieser Satz könnte in manchen Fällen zu sehr bequemer Darstellung der Zeit dienen, die der Körper gebraucht, um gewisse Theile seines Weges zu durchlaufen.

Zeichnet man nämlich, so wie in §. 60. (Fig. 36.), eine Curve, deren Abscissen ac gleich den vom fallenden

Körper auf AB durchlaufenen Wegen sind, also ac = AC, ae = AE, ab = AB, und nimmt die Ordinaten ag, ch u. s. w. den Geschwindigkeiten umgekehrt proportional, also $ag = \frac{a^2}{c}$, $ch = \frac{a^2}{v}$, wenn c die Geschwindigkeit in A, und v die Geschwindigkeit in C bedeutet: so ist die Fläche aghc der auf dem Wege = ac verwendeten Zeit proportional.

Wenn ich die anfängliche Geschwindigkeit in A als der Höhe $= GA = \frac{c^2}{4g}$ zugehörend ansetze, so würde in C die Geschwindigkeit (§. 50.) $= 2\sqrt{g \,.\, GD}$; in E die Geschwindigkeit $= 2\sqrt{g \,.\, GF}$ sein; und die Curve ghk wäre völlig bestimmt, wenn man die Absciſſen ac = Bogen AC, die Ordinaten aber als der Geschwindigkeit umgekehrt proportional auftrüge. Aber hier entstände eine große Schwierigkeit, wenn die anfängliche Geschwindigkeit = o ist; denn dann müßte $ag = \frac{a^2}{o}$ = unendlich sein (vergl. Trig. §. 43.) und es würde nun nicht mehr möglich sein, den Flächenraum (Fig. 37.) mit einiger Leichtigkeit auszurechnen. Es ist zwar einleuchtend, daß dieser Flächenraum, obgleich er sich unendlich in die Höhe ausdehnt, doch nicht grade ungeheuer groß zu sein braucht. Denn befolgte zum Beispiel die Curve das Gesetz, daß für ap = ai = ki = kl = der Linie a, der Flächenraum iknm $= \frac{2}{3} a^2$; klon $= \frac{4}{9} a^2$ u. s. w. jeder (n + 1)te folgende $= (\frac{2}{3})^n a^2$ wäre: so ist einleuchtend, daß der ins Unendliche sich ausdehnende Flächenraum doch nur $= a^2 (1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + +) = 3a^2$ wird. (Arithm. §. 211.) Es ist also nicht ungereimt, nach dem Inhalte dieser Fläche zu fragen, aber sehr oft mögte es uns zu schwierig werden, diesen Inhalt wirklich zu bestimmen. Wir werden daher für die Bewegung des Pendels eine andre Darstellung der Zeit wählen müssen.

§. 113. Bemerkung. Wenn (Fig. 38.) CA das um den festen Mittelpunct C bewegliche Pendel ist, dessen einziger Punct A der Schwere unterworfen, den Kreis ABD durchläuft: so ist nun, wenn in A die Bewegung ohne anfängliche Geschwindigkeit begann, die Geschwindigkeit in F, $= 2\sqrt{g.EG}$, wenn AE, FG Horizontallinien sind. Im niedrigsten Puncte B ist die Geschwindigkeit $= 2\sqrt{g.EB}$ und mit dieser fängt das Pendel an, gegen D zu steigen; da es aber hier offenbar seine Geschwindigkeit ganz nach eben den Gesetzen verliert, nach welchen es sie beim Herabgehen auf AB gewonnen hätte: so ist in H die Geschwindigkeit eben so groß, als sie in dem eben so hoch liegenden Puncte F war; und wenn D in der Horizontallinie liegt, in welcher bei A die Bewegung anfing, so ist in D die Geschwindigkeit $= 0$ geworden, und das Pendel fängt hier wieder an zu fallen. Wären keine Hindernisse der Bewegung, keine Reibung u. s. w. vorhanden, so würde dieses Hin- und Herschwingen des Pendels unaufhörlich fortdauern, da das Pende immer wieder eben so hoch steigt, als es gefallen ist.

§. 114. Aufgabe. Ein schwerer Körper durchläuft den Weg ABC, der aus zwei graden unter einem Winkel zusammengesetzten Linien AB, BC besteht (Fig. 39.); man verlangt für den Fall, da BC horizontal ist, zu bestimmen, ob und in welchen Fällen die dazu verwandte Zeit kleiner sein könne, als die Zeit, welche der Körper auf dem graden Wege AC zubringen würde.

Auflösung. Es sei der ersten Linie AB $= u$ Neigung gegen den Horizont $= \varphi$, die zweite Linie BC sei $= w$. Da die letztere horizontal ist, so hat man ABC $= 180° - \varphi$ und AC $= \sqrt{(u^2 + w^2 + 2uw\,\mathrm{Cos}\,\varphi)}$. Der auf AB durch die Schwere herabgetriebene Körper gebraucht, um von A nach B zu gelangen (§. 47.), die Zeit $= \sqrt{\frac{u}{g\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi}}$, und hat, indem er in B ankömmt, die Geschwindigkeit (§. 49.) $= 2\sqrt{gu\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi}$. Aber indem er auf BC hinübertritt, verliert er einen Theil seiner Geschwindigkeit und diese bleibt nur noch (§. 92.)

$= 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi \,.\, \sqrt{(g \,.\, u \,.\, \mathrm{Sin}\,\varphi)}$; mit dieser durchläuft er den Weg $= w$ in der Zeit $= \frac{w}{2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\sqrt{g\,u\,\mathrm{Sin}\,\varphi}}$. Folglich ist die ganze Zeit, in welcher er auf dem Wege ABC von A nach C gelangt,

$t' = \sqrt{\frac{u}{g\,\mathrm{Sin}\,\varphi}} + \frac{w}{2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\sqrt{g\,.\,u\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi}}$. Wäre er dagegen auf der graden Linie AC nach C gekommen, so wäre die verwandte Zeit

$$t'' = \sqrt{\frac{AC}{g\,.\,\mathrm{Sin}\,ACD}} = \frac{AC}{\sqrt{g\,.\,AC\,.\,\mathrm{Sin}\,ACD}} = \frac{AC}{\sqrt{g\,.\,AD}}$$

$$\text{oder } = \frac{AC}{\sqrt{g\,.\,u\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi}}.$$

Man hat also $t' < t''$,

$$\text{wenn } \sqrt{u} + \frac{w}{2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\,\sqrt{u}} < \frac{AC}{\sqrt{u}},$$

$$\text{oder } u + \frac{w}{2\,\mathrm{Cos}\,\varphi} < AC \text{ ist.}$$

Dieses ist die Bedingung, welche Statt finden muß, wenn der Körper schneller auf dem längern Wege ABC als auf dem kürzern AC von A nach C gelangen soll.

§. 115. Daß $u + \frac{w}{2\,\mathrm{Cos}\,\varphi} < AC$, oder

$$u + \frac{w}{2\,\mathrm{Cos}\,\varphi} < \sqrt{(u^2 + 2uw\,\mathrm{Cos}\,\varphi + w^2)}$$

werden könne, ergiebt sich leicht; es muß nämlich, wenn man quadrirt

$$\frac{uw}{\mathrm{Cos}\,\varphi} + \frac{w^2}{4\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi} < 2uw\,\mathrm{Cos}\,\varphi + w^2,$$

$$\text{oder } \frac{u}{\mathrm{Cos}\,\varphi} + \frac{w}{4\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi} < 2u\,\mathrm{Cos}\,\varphi + w \text{ sein,}$$

$$\text{oder } u\,(1 - 2\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi) < w\left(\mathrm{Cos}\,\varphi - \frac{1}{4\,\mathrm{Cos}\,\varphi}\right)$$

$$\text{oder } u < \frac{w\,.\,(4\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi - 1)}{4\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,(1 - 2\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi)}.$$

Dieser Formel kann, da sie nicht negativ werden darf, Genüge geschehen, wenn zugleich $\mathrm{Cos}^2\varphi > \frac{1}{4}$
und $\mathrm{Cos}^2\varphi < \frac{1}{2}$ ist, oder φ zwischen 45 Graden und 60 Graden liegt.

Wäre z. B. $\mathrm{Cos}^2\varphi = \frac{1}{3}$, so würde der Körper auf ABC schneller als auf AC nach C gelangen, wenn $u < \frac{w.\sqrt{3}}{4}$ ist.

§. 116. Hieraus erhellt die Möglichkeit, daß vielleicht der auf dem Kreisbogen AB herabgehende Körper schneller nach B gelangen könne, als der auf der Sehne AB herabfallende Körper.

§. 117. Lehnsatz. Wenn ein Körper (Fig. 40.) gegen den Mittelpunct C mit einer Kraft angezogen wird, die der Entfernung vom Mittelpuncte direct proportional, und $= p$ ist in der Entfernung $CA = a$, so bewegt er sich, wenn die Bewegung gegen den Mittelpunct, in A ohne anfängliche Geschwindigkeit begann, auf dem Durchmesser AB so fort, daß ein den Kreis ADB durchlaufender Körper ihn immer begleiten, oder sich mit ihm in einerlei Ordinate PM befinden würde, wenn des letztern Geschwindigkeit immer gleich und so groß wäre, als diejenige, welche der andre Körper im Centro erlangt hat.

Beweis. Wenn der von A gegen C angezogene Körper in der Zeit $= t$ von A nach M gelangt ist: so behauptet der Lehrsatz, daß der im Kreise gleichförmig bewegte Körper allemal von A nach P, als dem in der senkrechten Ordinate durch M liegenden Puncte gekommen sei, und so den auf AB fortgehenden Körper während seiner ganzen Bewegung begleite.

Ist der angezogene Körper nach M gekommen, und nenne ich den durchlaufenen Weg $AM = s$, AC aber $= a$: so ist $CM = a - s$, und die in M auf ihn wirkende Kraft verhält sich zu p, wie die Entfernung $= (a - s)$ zu a, weil die Kräfte den Entfernungen direct proportional sind, und in der Entfernung $= a$ die Kraft $= p$ ist.

In M also ist die beschleunigende Kraft $= \frac{p \cdot (a-s)}{a}$, und hiernach könnte die Scale der wirkenden Kräfte amC gezeichnet werden. Man zeichnet diese am besten so (§. 61.), daß man die Ordinaten Aa, Mm doppelt so groß als die Geschwindigkeiten nimmt, welche von den darzustellenden Kräften in einer Secunde hervorgebracht würden. Diese Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde würde $= 2gp$ sein, für die Kraft $= p$, sie würde $= 2g \cdot \frac{p \cdot (a-s)}{a}$ sein für die Kraft $= \frac{p \cdot (a-s)}{a}$ u. s. w. Nimmt man also die Abscissen $AM = s$, und zeichnet die Ordinaten $Aa = 4gp$; $Mm = \frac{4gp(a-s)}{a}$, so erhält man die Scale amC der beschleunigenden Kräfte, die hier eine grade Linie wird, und der trapezische Raum AamM ist (§. 61.) $AamM = v^2$, wenn v die in M erlangte Geschwindigkeit bedeutet. Es ist also

$$v^2 = 4gp\left(\frac{1+\frac{a-s}{a}}{2}\right)s = \frac{2gp}{a}(2a-s)\,s.$$

Zeichnet man mit dem Halbmesser CA um C einen Kreis APDB, so ist bekanntlich

$$AM : MP = MP : MB,$$
oder $$S : MP = MP : 2a - s,$$

also $v^2 = \frac{2gp}{a} \cdot MP^2$, oder $v = MP \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot p}{a}}$, welche im Mittelpuncte $= a\sqrt{\frac{2gp}{a}}$ wird, und hier ihren größten Werth erreicht, weil, wenn der Körper über C hinausgeht, die nach C ziehende Kraft seine Geschwindigkeit vermindert.

Denken wir uns nun einen mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $= a\sqrt{\frac{2gp}{a}} = \sqrt{2gap}$ auf dem Kreise ADB fortgehenden Körper, so werden wir, wenn er in P angelangt ist, leicht bestimmen können, um wieviel er vermöge jener Geschwindigkeit in einer Secunde nach einer dem Halbmesser AC parallelen Richtung fortrücken würde. Da der Körper in P die Geschwindigkeit $= \sqrt{2g.a.p}$ hat, so würde er, wenn er nicht genöthigt wäre, der Kreisbahn zu folgen, auf der Tangente PQ den Raum $PQ = \sqrt{2g.a.p}$ in 1 Secunde zurücklegen, und folglich nach einer mit AC parallelen Richtung um PR fortgerückt sein. Es ist aber

$$PQ : PR = PC : PM,$$

$$\text{oder } \sqrt{2g.a.p} : PR = a : PM,$$

$$\text{folglich } PR = PM . \sqrt{\frac{2gp}{a}},$$

also die mit AC parallele Geschwindigkeit des im Kreise bewegten Körpers allemal $= v$, derjenigen Geschwindigkeit gleich, die der auf AC fortgehende angezogene Körper hat. Wenn also beide Körper zugleich von A ausgehen, so werden sie, weil ihr mit AC paralleles Fortrücken immer gleich viel beträgt, so mit einander fortgehen, daß sie sich immer beide in derselben gegen AC senkrechten Linie PM, QS u. s. w. befinden.

§. 118. Lehnsatz. Wenn ein Körper durch eine, den Abständen von C proportionale Kraft gegen C hin angezogen wird, und von A an, ohne anfängliche Geschwindigkeit, seine Bewegung anfängt: so ist, wenn alle Bezeichnungen so bleiben, wie im vorigen §., die Zeit, in welcher der Körper von A nach C gelangt,

$$= \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{2gp}}, \text{ wenn } \pi \text{ die bekannte Zahl} = 3{,}14159\ldots$$

bedeutet.

Beweis. Wir haben eben gesehen, daß der Körper, welcher von A nach C angezogen wird, den Weg AC in eben der Zeit durchläuft, in welcher ein mit der Geschwindigkeit $= \sqrt{2g.a.p}$ auf dem Kreise fortgehender Körper den Quadranten APD durchläuft. Der letztere macht den Weg $= APD = \tfrac{1}{2} a \pi$ in der Zeit

$t = \frac{\frac{1}{2} a \pi}{\sqrt{2g \cdot ap}} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{2g \cdot p}}$; in eben der Zeit gelangt also der angezogne Körper von A nach C.

§. 119. Jener angezogene Körper geht mit beschleunigter Bewegung bis in C fort; bei seinem Fortgange über C hinaus, nimmt seine Geschwindigkeit ab, und verschwindet in B, wo CB = AC ist. Die gegen C anziehende Kraft treibt dann den Körper wieder gegen C zu, und er wird unaufhörlich zwischen A und B hin und hergehen. Stellen wir uns zugleich den im Kreise mit der vorhin erwähnten Geschwindigkeit gehenden Körper vor, so gehen beide zugleich von A aus, gelangen am Ende der Zeit $= \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{2gp}}$ nach C und nach D, und kommen am Ende der Zeit $= \pi \sqrt{\frac{a}{2gp}}$ wieder in B zusammen. Dann geht der im Kreise laufende auf dem andern Halbkreise BEA und der angezogne Körper auf dem Durchmesser BA in gleicher Zeit nach A zurück, und dieser Kreislauf des einen könnte, so wie das Hin- und Hergehen des andern unaufhörlich fortdauern.

§. 120. Diese Sätze zeigen, woher es kömmt, daß die zu bestimmten Wegen verwandte Zeit bei einer Kraft, die immer dem bis an C noch übrigen Wege proportional ist, mit der Zeit, die ein im Kreise laufender Körper gebraucht, kann verglichen werden. Es kömmt nämlich daher, weil die Geschwindigkeit der Ordinate dieses Kreises proportional ist.

§. 121. Lehrsatz. Die Zeit einer halben Pendel-Schwingung, oder die Zeit, in welcher das Pendel den Weg AB durchläuft, wenn in A die Geschwindigkeit = o war, ist sehr nahe $= \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$, wenn der Bogen AB sehr klein und die Länge des Pendels = a ist. (Fig. 38.)

Beweis. Indem der Körper sich in c befindet, übt die Schwere, deren Kraft ich = 1 setze, eine nach der

Tangente cf wirkende beschleunigende Kraft = Sin BCo aus, die also $= \frac{cd}{Cc}$ und bei sehr kleinen Bogen beinahe $= \frac{\text{Bogen } Bc}{Cc}$ ist. Wäre der letztere Ausdruck genau, so verhielte sich hier wirklich die beschleunigende Kraft, wie der bis an B noch übrige Weg, und die Gesetze der Bewegung würden die in §. 117 bis 120. gefundenen sein.

Fing also die Bewegung in c an, und war dort die Geschwindigkeit = 0, BBc aber $= \alpha$, und der Bogen $Bc = a.\alpha$, wenn die Länge des Pendels = a: so ist die Zeit, in welcher der Körper von c nach B gelangt, so groß als diejenige, welche er gebrauchen würde, um mit der in B erlangten Geschwindigkeit den Quadranten eines Kreises vom Halbmesser $= a.\alpha$ zu durchlaufen. Dieser Quadrant ist $= \frac{1}{2}\pi.a.\alpha$, die Geschwindigkeit in B $= 2\sqrt{g.dB} = 2\,(\text{Sehne } Bc)\sqrt{\frac{g}{2a}}$, weil $dB = \frac{(\text{Sehne } cB)^2}{a}$. Darf ich also, wie es bei kleinen Bogen beinahe erlaubt ist, die Sehne mit dem Bogen vertauschen und Sehne $Bc = \alpha.a$ schreiben, so ist die Geschwindigkeit in B, $= 2\alpha.a\sqrt{\frac{g}{2a}} = \alpha\sqrt{2ag}$ und die Zeit, in welcher der Quadrant $= \frac{1}{2}\pi a\alpha$ gleichförmig durchlaufen würde $= \frac{\frac{1}{2}\pi a\alpha}{\alpha\sqrt{2ag}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$.

§. 122. In dieser Ableitung ist nun wohl alles verständlich. Man denkt sich den kleinen Bogen, welchen der Pendel bei seinem halben Schwunge durchläuft, als gradlinigt ausgedehnt, und diese grade Linie $= a.\alpha$ ist in Fig. 40. der Halbmesser des dortigen Kreises CA. Der schwere Punct des Pendels wird auf jenem Bogen von einer Kraft fortgetrieben, die wir als dem noch zu durchlaufenden Bogen proportional angesehen haben, und die dem Körper, da wo die Kraft $= 0$ wird, die Geschwindigkeit $= 2 . \sqrt{g . dB}$ (Fig. 38. wo dB die Tiefe des Falles ist) ertheilt. Die Zeit des Falles durch AC Fig. 40. ist nun so groß als die Zeit des Laufes durch den Quadranten mit der Geschwindigkeit, die in C erlangt war u. s. w.

§. 123. Die Zeit, in welcher das Pendel sich an der andern Seite wieder erhebt, ist eben so groß, als die Zeit seines Fallens, und folglich die ganze Zeit eines Pendelschwunges $= \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$,
wenn der Bogen, um welchen das Pendel aus der verticalen Lage gerückt war, so klein ist, daß man Sehne, Sinus und Bogen mit einander vertauschen darf.

§. 124. Eigentlich ist dieses nur die Grenze, welcher die Schwingungszeit des Pendels desto näher kömmt, je kleiner die Schwingung ist. Größere Schwingungen erfordern etwas längere Zeiten. Wir wollen jene Zeit, die **Zeit einer Oscillation** nennen.

Zusätze für geübtere Leser.

Wenn das Pendel CA (Fig. 38.) in A ohne anfängliche Geschwindigkeit seine Bewegung angefangen hatte, und nun in F angekommen ist: so ist, wenn ich ACB $= \alpha$, ACF $= \varphi$ AC $=$ a nenne, die Kraft, welche in F den Körper forttreibt $= \mathrm{Sin}(\alpha - \varphi)$. Die in F schon erlangte Geschwindigkeit $=$ v nimmt also in der kleinen Zeit dt, in welcher die wirkende Kraft als unveränderlich angesehen wird, um

$$dv = 2g . \mathrm{Sin}(\alpha - \varphi) . dt$$

zu. Multiplicire ich hier an beiden Seiten mit 2v und überlege, daß vdt der kleine, mit der Geschwindigkeit $=$ v in der Zeit $=$ dt zurückgelegte Weg ist, dieser aber offenbar dem Bogen $a d\varphi$ gleich ist, weil das Fortrücken des Pendels eine Aenderung $= d\varphi$ des Winkels φ oder $= a d\varphi$ des Bogens AF $= a\varphi$ hervorbringt: so erhalte ich $2vdv = 4gad\varphi . \mathrm{Sin}(\alpha - \varphi)$

oder $2vdv = - 4ga . d(\alpha - \varphi) . \mathrm{Sin}(\alpha - \varphi)$.

Hieraus folgt $v^2 = \mathrm{Const} + 4ga \, \mathrm{Cos}(\alpha - \varphi)$,
oder da für $\varphi = 0$, $v = 0$ war, welches

$$0 = \mathrm{Const} + 4ga \, \mathrm{Cos}\,\alpha,$$ giebt,

$$v^2 = 4ga\,(\mathrm{Cos}\,(\alpha - \varphi) - \mathrm{Cos}\,\alpha),$$

das ist $\frac{v^2}{4g} = a\,(\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \mathrm{Cos}\,\alpha) = CG - CE = EG$ als die Höhe, welche der in F erlangten Geschwindigkeit zugehört. (wie in §. 110. 111.)

Auch für dt können wir jetzt einen Ausdruck finden; denn da

$$vdv = 2ga\,d\varphi\,.\,\mathrm{Sin}\,(\alpha - \varphi),$$

v aber $= 2\,.\sqrt{(ga\,(\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \mathrm{Cos}\,\alpha))}$

also $dv = \frac{2ga\,d\varphi\,.\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi)}{v} = \frac{d\varphi\,.\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi)\,\sqrt{ag}}{\sqrt{(\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \mathrm{Cos}\,\alpha)}}$

ist, so wird aus $dv = 2g\,.\,\mathrm{Sin}\,(\alpha - \varphi)\,.\,dt$, nun

$$dt = \frac{\frac{1}{2}\,d\varphi\,\sqrt{\frac{a}{g}}}{\sqrt{(\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \mathrm{Cos}\,\alpha)}}.$$

Diese Formel ist allgemein; wollte man sie in völliger Allgemeinheit integriren, so müßte man $(\mathrm{Cos}\,(\varphi - \alpha) - \mathrm{Cos}\,\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ in eine Reihe verwandeln, was mit Hülfe der bekannten Reihen für die Kreisfunctionen und mit Hülfe des Polynomischen Lehrsatzes eben nicht schwer ist.

Hier will ich mich begnügen, das Integral für sehr kleine Werthe von α und φ zu suchen.

Für sehr kleine Winkel ist nahe genug (Pasquich Anal. 1. Theil. §. 158.)

$$\mathrm{Cos}\,(\alpha - \varphi) = 1 - \tfrac{1}{2}\,(\alpha - \varphi)^2$$

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = 1 - \tfrac{1}{2}\,\alpha^2,$$

also $\mathrm{Cos}\,(\alpha - \varphi) - \mathrm{Cos}\,\alpha = \alpha\varphi - \frac{1}{2}\,\varphi^2.$

In diesem Falle also ist

$$dt = \frac{\frac{1}{2}\,d\varphi\,.\sqrt{\frac{a}{g}}}{\sqrt{(\alpha\varphi - \frac{1}{2}\,\varphi^2)}};$$

oder $dt = \frac{d\varphi\,.\sqrt{\frac{a}{2g}}}{\sqrt{(2\alpha\varphi - \varphi^2)}} = \frac{d\varphi\,.\sqrt{\frac{a}{2g}}}{\sqrt{(\alpha^2 - (\alpha-\varphi)^2)}}$

$$= \frac{\frac{d\varphi}{\alpha}\,.\sqrt{\frac{a}{2g}}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\alpha-\varphi}{\alpha}\right)^2\right)}} = \frac{-\frac{d\,.\,(\alpha-\varphi)}{\alpha}\,.\sqrt{\frac{a}{2g}}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\alpha-\varphi}{\alpha}\right)^2\right)}},$$

woraus $t = \mathrm{Const} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}\,.\,\mathrm{Arc.Sin}\left(\frac{\alpha-\varphi}{\alpha}\right)$, (Pasquich Analys. 2. Theil. §. 22.) folgt. Wir wissen, daß $t = 0$ für $\varphi = 0$, also $\mathrm{Const} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}\,.\,\mathrm{Arc}\,.\,\mathrm{Sin}\,1 = 0$, oder die zum

$\text{Sin} = 1$. Der Bogen $= \frac{1}{2}\pi$ gehört, $\text{Const} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$

und $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}\left\{\frac{1}{2}\pi - \text{Arc.Sin}\left(\frac{\alpha-\varphi}{\alpha}\right)\right\}$.

Wenn $\varphi = \alpha$ wird, oder das Pendel die verticale Lage erreicht hat, ist $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$, wie wir es vorhin fanden. Die allgemeine Integration erfordert eine weitläuftige Rechnung, zu der hier nicht der Ort ist.

§. 125. **Bemerkung.** Kennte man eine Curve, deren Krümmung so wäre, daß genau (Fig. 41.) für jeden vom niedrigsten Puncte B an gerechneten Bogen BA, die Neigung der am Endpuncte A des Bogens gezognen Berührungslinie durch $\text{Sin AFG} = \frac{\text{BA}}{b}$ gegeben würde, so fände hier für Bogen von jeder Größe die vorige Betrachtung ihre genaue Anwendung. Eine solche Linie ist die Cycloide, die wir schon in der Statik §. 220. 221. kennen gelernt haben. Wird die dortige 81te Figur so gezeichnet, daß das Oberste zu unterst gekehrt ist, so würde sie so wie Fig. 42. aussehen, und es läßt sich ziemlich leicht zeigen, daß jeder Bogen BK

$\text{BK} = 2\sqrt{2r.\text{BL}}$ ist, wenn r der Halbmesser des wälzenden Kreises ist (Statik §. 221.), die Lage der Berührungslinie in K ist aber dadurch bestimmt, daß

$$\text{Sin KMN} = \sqrt{\frac{\text{BL}}{2r}},$$

oder da $\sqrt{\text{BL}} = \frac{\frac{1}{2}\text{BK}}{\sqrt{2r}}$; $\text{Sin KMN} = \frac{\frac{1}{2}\text{Bogen BK}}{2r}$

$$= \frac{\text{Bogen BK}}{4r}.$$

Bewegt sich ein schwerer Körper auf der Cycloide AKB herab, so ist in jedem Puncte K die beschleunigende Kraft, welche ihn hier nach der Richtung der Tangente oder des Bogens forttreibt, dem noch zu durchlaufenden Bogen BK proportional. War also in K der Anfang der Bewegung, und folglich in B, im tiefsten Puncte die Geschwindigkeit $= 2\sqrt{g \, . \, LB}$, so ist die auf den Bogen KB ver-wandte Zeit $= \frac{\frac{1}{2}\pi \text{ Bogen KB}}{2\sqrt{g \, . \, LB}}$, oder da Bogen KB $= 2\sqrt{2r \, . \, LB}$ ist, die Zeit $= \frac{\pi\sqrt{2r \, . \, LB}}{2\sqrt{g \, . \, LB}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$. Diese Zeit ist also immer gleich, man mag den Körper von A an, von K an oder von P an auf der Cycloide herablaufen lassen, denn die Formel für die Zeit hängt gar nicht von der Länge des Bogens ab.

Die Cycloide heißt um dieser Eigenschaft willen eine tautochronische Curve, das ist eine Curve von immer gleicher Fallzeit, der Bogen sei welcher er wolle.

Diese Gleichheit der Zeiten hängt davon ab, daß, wenn der Körper von A an zu fallen anfängt, er wegen der starken Neigung der Curve sogleich eine erhebliche Geschwindigkeit erlangt, also den folgenden Bogen z. B. KB mit weit größerer Schnelligkeit durchläuft, als er ihn durchlaufen würde, wenn er erst in K seine Bewegung anfinge. Diese größere Schnelligkeit ersetzt grade die Zeit, welche zum ersten Theile des Bogens verwandt ist.

§. 126. Die eben angeführten Eigenschaften der Cycloide ließen sich auch hier wohl strenge beweisen, wenn ich nicht fürchtete, zu ausführlich zu werden. Schwerer mögte es sein, hier die Gründe anzugeben, warum die Cycloide auch die Linie des schnellsten Falles oder die Brachystochrone ist. Verlangt man nämlich für zwei in derselben Vertical-Ebne liegende Puncte, die weder vertical über, noch horizontal neben einander liegen, die Linie zu bestimmen, auf welcher der fallende Körper am schnellsten vom einen zum andern gelangt: so ist auch diese Linie die Cycloide.

Zusätze für geübtere Leser.

Die Gleichung für die Cycloide war (Statik. §. 220.)

$$y = r \, . \, \text{Arc}, \text{Sin}\left(\frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}\right) - \sqrt{(2rx - x^2)} \text{ und}$$

hier bedeutet (Fig. 42.), $x = PL$, $y = LK$, $r = \frac{1}{2} BP$ den Halbmesser des wälzenden Kreises. Die Neigung der Tangente MK gegen LK wird gefunden durch $\frac{dx}{dy} = \text{tang } KMN$,

oder $\text{Cotang } KMN = \frac{(r-x)}{\sqrt{(2rx - x^2)}\,\frac{(r-x)}{r}} - \frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$,

denn wenn ich $\text{Sin}\,\varphi = \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}$ setze,

also $y = r\varphi - r \text{ Sin}\,\varphi$,

so ist $dy = r\,d\varphi - r\,d\varphi \text{ Cos}\,\varphi$

aber $d\varphi = \frac{d.\text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi} = \frac{d.\text{Sin}\,\varphi}{\frac{r-x}{r}} = \frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} \cdot \frac{1}{r-x}$;

also $\frac{dy}{dx} = \text{Cotang } KMN = \frac{r}{\sqrt{(2rx - x^2)}} - \frac{r-x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$

$= \frac{x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$,

und $\text{Sin } KMN = \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{\sqrt{2rx}} = \sqrt{\frac{2r - x}{2r}}$.

Das Differential des Bogens AK wird

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx.\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)};$$

$$ds = dx \frac{\sqrt{2rx}}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = dx \sqrt{\frac{2r}{2r - x}} \text{ gefunden,}$$

oder $ds = \frac{-d.(2r-x)}{\sqrt{(2r-x)}} \sqrt{2r}$;

woraus $s = \text{Const} - 2\sqrt{2r}.\sqrt{(2r-x)}$ folgt.

Soll der Bogen nicht von A an gerechnet werden, sondern von B an, wo $x = 2r$ ist, so kömmt keine beständige Größe hinzu, und es ist $s = 2\sqrt{(4r^2 - 2rx)} = 4.r \text{ Sin } KMN$,

oder $\text{Sin } KMN = \frac{s}{4r}$.

Die Gleichung $dv = 2g . \text{Sin } KMN . dt$ giebt also nun

$$2vdv = 4g . \text{Sin } KMN . dS,$$

wenn ich unter S den in der Zeit $= t$ durchlaufenen Weg verstehe. Nenne ich a den ganzen Bogen BO, um welchen für $t = 0$ der Körper von B entfernt war, so ist $s = a - S$, also

$$dS = -ds \text{ und } 2vdv = -\frac{4gs\,ds}{4r},$$

$$v^2 = \text{Const} - \frac{gs^2}{2r} = \frac{g}{2r}(a^2 - s^2),$$ weil $v = o$ für $s = a$. Wir erhalten also $dt = \frac{dS}{v} = \frac{-ds}{\sqrt{(a^2 - s^2)}}\sqrt{\frac{2r}{g}}$,

$$t = \text{Const} - \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{g}} \,.\, \text{Arc} \,.\, \text{Sin} \,\frac{s}{a},$$

$$t = \left(\tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc Sin}\,\frac{s}{a}\right)\sqrt{\frac{2r}{g}},$$ weil t verschwinden soll für $s = a$ oder $S = o$. Die ganze Fallzeit bis an B ist also $= \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$, unabhängig von der Größe des durchlaufenen Bogens a.

§. 127. Lehrsatz. Die Oscillationszeiten zweier Pendel verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen, wenn beide derselben beschleunigende Kraft der Schwere unterworfen sind.

Der Beweis liegt in der Formel §. 123., wo die ganze Oscillationszeit $= T = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$ und a die Länge des Pendels war.

Das Pendel, welches Secunden schlägt, ist also 4mal so lang, als das, welches halbe Secunden schlägt.

§. 128. Lehrsatz. Wenn auf zwei Pendel ungleiche beschleunigende Kräfte wirken, so läßt sich das Verhältniß dieser Kräfte aus den Längen der Pendel und ihren Oscillationszeiten bestimmen; die Kräfte verhalten sich nämlich direct wie die Längen der Pendel, und umgekehrt wie die Quadrate ihrer Oscillationszeiten.

Beweis. Wenn auf zwei Pendel von den Längen $= a$ und $= a'$ verschiedene beschleunigende Kräfte wirken, nämlich auf das erste eine Kraft, die den fallenden Körper in der ersten Secunde durch den Raum $= g$ treibt, auf das zweite eine beschleunigende Kraft, für welche dieser Raum $= g'$ ist: so verhalten sich diese Kräfte wie $g : g'$ (§. 35.), und die Oscillationszeiten T und T' der beiden Pendel würden sein

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}} \text{ und } T' = \pi \sqrt{\frac{a'}{2g'}};$$

$$\text{also } g = \frac{\pi^2 a}{2 T^2} \text{ und } g' = \frac{\pi^2 a'}{2 T'^2}.$$

§. 129. Hieraus erhellt, wie die Pendellänge dazu dienen konnte, zu entdecken, daß die Schwere am Aequator schwächer wirke, als in größern Breiten. Die Oscillationszeit eines Pendels wird nämlich durch die, vermittelst der Uhr abgezählten Oscillationen während eines ganzen Sterntages, der auf der ganzen Erde gleich ist, sehr genau angegeben; mißt man die Länge des Pendels gleichfalls mit großer Genauigkeit, so findet man, ob der Quotient $\frac{a}{T^2}$ unter allen Breiten gleich, oder wie er verschieden ist.

§. 130. Anmerkung. Da sich für größere Schwingungen des Pendels die Schwingungszeiten nicht ohne Integralrechnung bestimmen lassen, so will ich hier nur die Formel dafür hersetzen, damit man allenfalls darnach rechnen könne. Behalten a, g, π ihre vorigen Bedeutungen und ist $= b$ die verticale Tiefe, um welche der schwere Punct vom Anfange der Bewegung bis zu seiner größten Tiefe sinkt, oder $b = a - a \operatorname{Cos} \varphi$, wenn φ der Bogen ist, um welchen das Pendel beim Anfange der Bewegung gehoben war: so ist die Zeit eines ganzen Schwunges oder die Zeit der ganzen Schwingung durch AD (Fig. 38.)

$$= \pi . \sqrt{\frac{a}{2g}} . \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 . \frac{b}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \left(\frac{b}{2a}\right)^3 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 . \left(\frac{b}{2a}\right)^4 + + \ldots \right\}$$

Eine Reihe, deren folgende Glieder bald ziemlich klein werden, zumal wenn b nur klein ist.

Neunter Abschnitt.

Von den Centralkräften und der Bewegung der Körper um anziehende Mittelpuncte.

§. 131. **Erklärung.** Centralkräfte sind alle die, deren Richtungen gegen einen bestimmten, unveränderlichen Mittelpunct gehen, welche also die ihrer Wirkung unterworfenen Körper entweder gegen diesen Mittelpunct anziehen, oder davon zu entfernen streben.

In der Natur kommen uns meistens nur anziehende Kräfte vor.

§. 132. **Bemerkung.** Wenn ein ruhender Körper durch eine Centralkraft in Bewegung gesetzt wird: so erhält er eine gradlinigte, gegen den Mittelpunct der Anziehung (wenn es eine anziehende Kraft ist,) gerichtete Bewegung, deren Untersuchung (wie die Beispiele §. 64. 117. zeigen,) nicht so sehr schwierig ist. Wird aber der Körper durch einen seitwärts gerichteten Stoß in Bewegung gesetzt, so daß die anfängliche Richtung seiner Bewegung nicht mit der Richtung gegen den anziehenden Punct hin, oder mit der grade entgegengesetzten Richtung übereinstimmt: so muß er eine krummlinigte Bewegung anfangen, und die Betrachtung wird nun deswegen schwieriger, weil die Richtungen, nach welchen die anziehende Kraft in verschiedenen Zeitpuncten auf den Körper wirkt, nicht unter sich parallel sind.

§. 133. **Bemerkung.** Die in der Natur vorkommenden anziehenden Kräfte hängen immer auf gewisse Weise von der Entfernung vom anziehenden Mittelpuncte ab, so daß der bewegte Körper gleich stark angezogen wird, wenn er in verschiedenen Puncten seiner Bahn gleiche Entfernungen von demselben erreicht. Geht er daher im Kreise um den anziehenden Mittelpunct herum, so ist für ihn die anziehende Kraft eine unveränderliche, in jedem Puncte der Bahn senkrecht gegen die Richtung der Bewegung wirkende Kraft.

§. 134. Aufgabe. Ein Körper (Fig. 43.) der sich in A befindet und mit der beschleunigenden Kraft $= p$ gegen den Mittelpunct C angezogen wird, hat in A eine auf AC senkrechte Bewegung; wie groß muß die Geschwindigkeit $= v$ sein, damit der Körper auf einem Kreise fortgehe.

Auflösung. Da die Richtung der Bewegung in A senkrecht gegen AC ist: so hat der Körper ein Bestreben, sich nach der Richtung AB von C zu entfernen. Soll also die Bahn des Körpers ein Kreis sein, so muß seine, vermöge der Geschwindigkeit entstehende Schwungkraft, gleich der anziehenden Kraft sein, also $= p$. Wenn der Abstand AC des Körpers vom anziehenden Mittelpuncte $= a$ heißt, so ist die Schwungkraft $= \frac{v^2}{2ga}$ (§. 99.) und diese muß $= p$ sein, also $v^2 = 2gap$. Es bedeutet nämlich hier p eine beschleunigende auf jedes Theilchen des Körpers wirkende Kraft, die hierin mit der Schwerkraft übereinstimmt.

§. 135. Wenn die Kraft p von der Entfernung nach einem bestimmten Gesetze abhängt, so lassen sich also die Geschwindigkeiten bestimmen, mit welchen Körper in verschiedenen Entfernungen vom anziehenden Mittelpuncte ihre Umläufe vollenden müssen, und es lassen sich folglich auch ihre Umlaufszeiten bestimmen. Bei der Kreisbewegung nämlich wird die Geschwindigkeit weder vermehrt noch vermindert, sondern bleibt, weil die anziehende Kraft immer senkrecht gegen die Richtung der Bewegung ist, unverändert. Die Umlaufszeit $= T$ durch einen Kreis vom Halbmesser $= a$ ist also für die Geschwindigkeit $= v$, durch $T = \frac{2a\pi}{v}$ ausgedrückt, weil in der Zeit $= T$ der Weg $= 2a\pi$ mit der Geschwindigkeit $= v$ zurückgelegt wird. Unsre vorige Gleichung giebt also $T^2 = \frac{2\pi^2 a}{gp}$ als Werth des Quadrates der Umlaufszeit.

§. 136. Lehrsatz. Wenn um einen anziehenden Mittelpunct, dessen anziehende Kraft dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, sich mehrere Körper auf kreisförmigen Bahnen in ungleichen Entfernungen bewegen: so verhalten sich die Quadrate ihrer Umlaufszeiten, wie die Cubi ihrer Abstände vom anziehenden Mittelpuncte.

Beweis. Wenn sich die anziehende Kraft $= p$ umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung vom anziehenden Mittelpuncte verhält: so ist sie in der Entfernung $= a$, $= \frac{b^2}{a^2}$, wenn sie in der Entfernung $= b$, $= 1$ ist, oder derjenigen beschleunigenden Kraft gleich ist, die wir als Einheit der Kräfte ansehen, und welche den ihr frei folgenden Körper durch den Raum $= g$ in der ersten Secunde treibt. Befinden sich also Körper in den Entfernungen $= a$, $= a'$, $= a''$ vom Mittelpuncte der Anziehung, so ist die anziehende Kraft für den ersten $= p = \frac{b^2}{a^2}$, für den zweiten $= \frac{b^2}{a'^2}$, für den dritten $= \frac{b^2}{a''^2}$, und folglich sind die Umlaufszeiten durch folgende Gleichungen bestimmt.

Für den ersten $T^2 = \frac{2\pi^2 a^3}{g b^2}$;

für den zweiten $T'^2 = \frac{2\pi^2 a'^3}{g b^2}$;

für den dritten $T''^2 = \frac{2\pi^2 a''^3}{g b^2}$.

Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich also wie die Cubi der Abstände.

§. 137. Kepler hatte in den Bewegungen der Planeten, deren Bahnen man beinahe als Kreise ansehen kann, das Gesetz entdeckt, daß die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Cubi der Entfernungen von der Sonne verhalten. Aus diesem, durch Beobachtung gefundenen Gesetze ergab sich also $T^2 = \frac{a^3}{f^3}$, wo f eine beständige Linie bedeutet, indem die Gleichung $T^2 = \frac{a^3}{f^3}$ nur das Verhältniß andeuten soll, in welchem die Zeiten mit den Entfernungen zunehmen. Da nun auch $T^2 = \frac{2\pi^2 a}{g p}$ sein muß (§. 135.), also $\frac{2\pi^2 a}{g p} = \frac{a^3}{f^3}$, so ist $2\pi^2 f^3 = g p a^2$,

oder $p = \frac{2\pi^2 f^3}{g \cdot a^2}$, die Kraft p dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional, indem f und g gegebne unveränderliche Linien bedeuten.

So ließ sich also aus jenem Keplerschen Gesetze finden, nach welchem Gesetze die anziehende Kraft der Sonne in größeren Entfernungen abnehme.

§. 138. Dieses Gesetz ist nun richtig für die anziehende Kraft der Sonne, indem die Umlaufszeiten aller Planeten sich demselben gemäß finden; es ist richtig für die Planeten Jupiter, Saturn und Uranus, deren Monde, wenn man die Umlaufszeiten der verschiedenen Monde desselben Planeten vergleicht, eben das ergeben; es ist auch richtig für die Erde; denn die Schwungkraft des Mondes in seiner Bahn ist genau so groß, als erfordert wird, um einer anziehenden Kraft das Gleichgewicht zu halten, die sich zur Schwere auf der Erde verhält, wie das Quadrat des Erdhalbmessers zum Quadrate des Halbmessers der Mondbahn.

§. 139. Aufgabe. Wenn um zwei anziehende

Mittelpuncte A und B sich Körper, C und D in Kreisbahnen bewegen, C nämlich um den ersten, D um den zweiten; aus den Entfernungen dieser Körper von ihrem anziehenden Mittelpuncte und aus den Umlaufszeiten beider zu bestimmen, wie sich die anziehenden Kräfte der Puncte A und B in bestimmter gleicher Entfernung verhalten werden, wenn die Kräfte dem Quadrate der Abstände umgekehrt proportional sind.

Auflösung. Es sei a die Entfernung des Körpers C von A, a′ die Entfernung des Körpers D von B; T sei des ersten, T′ sei des zweiten Umlaufszeit; man verlangt zu bestimmen, wie sich die anziehende Kraft von A in der Entfernung = a, zu der anziehenden Kraft von B in der Entfernung = a verhalte.

Da $T^2 = \frac{2\pi^2 a}{g p}$ sein muß (§. 135.),

so ist $p = \frac{2\pi^2 a}{g T^2}$ die anziehende Kraft des ersten Körpers in der Entfernung = a. Eben so ist $p' = \frac{2\pi^2 a'}{g T'^2}$ des zweiten Körpers anziehende Kraft in der Entfernung = a′, und seine anziehende Kraft = q in der Entfernung = a, wird $q = \frac{p' . a'^2}{a^2}$, das ist

$$= \frac{2\pi^2 a'^3}{g a^2 T'^2} \text{ sein.}$$

Die anziehenden Kräfte beider Körper in gleichen Entfernungen = a verhalten sich also wie

$$\frac{2\pi^2 a}{g T^2} \text{ zu } \frac{2\pi^2 a'^3}{g a^2 T'^2},$$

oder wie $\frac{a^3}{T^2}$ zu $\frac{a'^3}{T'^2}$, das ist, direct wie die Cubi der Entfernungen und umgekehrt, wie die Quadrate der Umlaufszeiten.

§. 140. Hieraus wird klar, wie man die anziehende Kraft der Sonne mit der der Erde, des Jupiters

u. s. w. vergleichen kann, da diese Planeten Monde um sich haben, deren Entfernungen und Umlaufszeiten sich mit den Entfernungen und Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne vergleichen lassen.

§. 141. Bemerkung. Nicht bloß bei der Bewegung im Kreise findet eine Schwungkraft Statt, sondern bei jeder Bewegung in einer gekrümmten Bahn, denn die Schwungkraft entstand ja nur aus dem Bestreben des Körpers, nach der Tangente der Bahn fortzugehen, und dieses Bestreben ist bei jeder krummlinigten Bewegung da. Je kleiner der Halbmesser des Kreises war, auf welchem der Körper sich mit bestimmter Geschwindigkeit bewegt, desto größer war die Schwungkraft, und eben so wird sie für andre Curven desto größer sein, je stärker diese gekrümmt sind. Um aber die Krümmung einer Curve an jeder gegebenen Stelle bestimmt auszudrücken, können wir uns einen Kreis denken, der eben so stark gekrümmt wäre. Wir könnten dann die Bewegung in jener Curve für einen kurzen Zeitraum so betrachten, als ob es eine Bewegung auf dem eben so gekrümmten Kreise wäre, und darnach die Schwungkraft bestimmen.

Bewegt sich ein Körper frei auf einer Curve, das heißt, wird er nicht durch einen festen Widerstand oder einen Faden und dergleichen fest gehalten: so muß die aus den wirkenden Kräften entstehende senkrecht gegen eine bestimmte Stelle der Bahn gerichtete Kraft, genau der Schwungkraft das Gleichgewicht halten, und hierin liegt eine der Bestimmungen, deren wir bedürfen, um entweder bei gegebener Kraft zu bestimmen, in welcher Bahn der Körper sich bewegen wird, oder bei gegebner Bahn des Körpers eine Vergleichung zwischen der Geschwindigkeit des Körpers und der Größe der wirkenden Kraft anzustellen.

§. 142. Bemerkung. Wenn die Richtung BC der Centralkraft (Fig. 44.) nicht senkrecht auf die Bahn in demjenigen Puncte B ist, wo sich der Körper befindet: so wird offenbar, wenn der Körper sich gegen D zu bewegt, oder seine Richtung mit der Richtung der Kraft einen spitzen Winkel macht, die Geschwindigkeit des Körpers durch die Centralkraft vermehrt, wenn diese anziehend gegen C zu wirkt. Wir müßten uns hier die Kraft nach Richtungen BE, BF, mit der Tangente übereinstimmend, und auf sie senkrecht zerlegt denken; die nach der Richtung der Tangente würde die Geschwindigkeit des Körpers vermehren oder vermindern; die auf die Tangente senkrechte Kraft würde den Körper in seiner Bahn erhalten, oder hindern, daß er nicht dem Antriebe der Schwungkraft Folge leistend sich von ihr entferne.

§. 143. Erklärung. Die vom Mittelpuncte der anziehenden Kräfte nach irgend einem Puncte der Bahn gezogne grade Linie heißt ein Radius Vector der Bahn. Stellt man sich den Radius Vector gegen den Punct hin, wo der bewegte Körper ist, gezogen, und mit diesem fortrückend vor: so beschreibt er eine gewisse Fläche, z. B. den Sector BCD (Fig. 44.), während der Körper von B nach D fortgeht. Die Größe dieses Flächenraumes hängt von der Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung des Körpers, aber auch von der anziehenden Kraft ab.

§. 144. Lehrsatz. Wenn auf den bewegten Körper A keine andre als die gegen den Mittelpunct C (Fig. 45.) gerichtete Kraft wirkt: so sind die in gleichen Zeiten vom Radius Vector beschriebenen Flächenräume gleich.

Beweis. Obgleich die anziehenden Kräfte als stetig wirkende zu betrachten sind, so können wir sie uns hier doch wohl so vorstellen, als ob ihre Wirkung in einzelnen Stößen im Anfange jedes Zeittheilchens geschehe. Diese Vorstellung nähert sich desto mehr der Wahrheit, je kleiner wir die Zeittheilchen ansetzen.

Der Körper komme also in B mit einer Geschwindigkeit an, die ihn in einem Zeittheilchen nach der Richtung BD bis D fortführen würde, wenn keine fremde Kraft auf ihn wirkte. Aber im Anfange dieses Zeittheilchens ertheilt ihm die nach C hin anziehende Kraft einen Stoß, der ihn bis nach F in einem Zeittheilchen treiben würde, wenn nicht seine schon erlangte Geschwindigkeit ihn fortrisse. Vermöge der gleichzeitigen Einwirkung der schon erlangten Geschwindigkeit und der anziehenden Kraft durchläuft also der Körper die Diagonale BE eines Parallelogramms, dessen Seiten BD, BF sind. Der Raum BCE, welchen hier der Radius Vector beschreibt, ist eben so groß als der BCD, welchen er beschrieben hätte, wenn keine anziehende Kraft den Körper von seiner Richtung abgelenkt hätte; denn die Dreiecke BCD, BCE haben einerlei Grundlinie BC und ihre Spitzen liegen in einerlei zu BC parallel gezognen Linie DE.

Im zweiten Zeittheilchen würde der Körper auf der Verlängerung von BE nach G fortgehen, und einen Weg EG = BE durchlaufen, wenn nicht die anziehende Kraft abermals auf den Körper wirkte. Ertheilt sie ihm also hier einen Stoß, der ihn durch EI in einem Zeittheilchen triebe, wenn er keine Geschwindigkeit gehabt hätte: so durchläuft er die Diagonale EH des Parallelogramms EGHI, und es ist wieder der vom Radius Vector beschriebene Flächenraum ECH = ECG, aber zugleich ECG = BCE, weil diese Dreiecke gleiche Grundlinien EG = BE und in C zusammenfallende Spitzen haben. Der im zweiten Zeittheilchen vom Radius Vector beschriebene Raum ist also eben so groß als der im ersten Zeittheilchen. Und so läßt sich ferner zeigen, daß im dritten Zeittheilchen der Körper auf der verlängerten EH nach K, wo HK = EH, gelangen würde, wenn nicht die anziehende Kraft ihn in eben der Zeit durch HL führte, daß er also die Diagonale HM durchlaufen wird, und daß dann der vom Radius Vector beschriebene Flächenraum HCM = HCK = ECH = BCE auch in diesem Zeittheilchen eben so groß ist, als in jedem der vorigen.

Da diese Betrachtungen ganz dieselben bleiben, wenn man die Zeittheilchen auch noch so sehr verkleinert: so gilt offenbar auch bei der stetigen Einwirkung der Centralkraft das Gesetz, daß diese Flächenräume in gleichen Zeittheilchen gleich, oder daß sie der Zeit proportional sind.

§. 145. Da die Größe dieser Sectoren BEC, HCM u. s. w., ausgedrückt wird durch ein Product aus dem in einem Zeittheilchen durchlaufenen Wege BE oder HM in die von C auf diesen Weg gezogne Senkrechte CP, CQ: so verhält sich BE : HM = CQ : CP, oder die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die von C auf die Richtuugslinien gezogenen Senkrechten.

§. 146. Ist die nach dem Mittelpuncte C ziehende Kraft eine stetig wirkende, so beschreibt der Körper statt des bisher betrachteten Polygons eine Curve BEMN (Fig. 46.). Die Richtung der Bewegung in B oder in M wird hier durch die Tangenten BP, MH bestimmt. Durchläuft also der Körper in gleichen Zeiten die Wege BE, MN, so müssen die Sectoren BCE und MCN gleich sein; also, wenn CP, CQ die Senkrechten auf die Tangenten sind,

$$MN \,.\, CQ = BE \,.\, CP,$$

$$\text{oder } MN : BE = CP : CQ,$$

und auch hier stellen die Bogen BE, MN die Geschwindigkeiten oder die in einem als Einheit betrachteten Zeitraume durchlaufenen Räume dar.

§. 147. Auch der umgekehrte Schluß würde nun gelten, nämlich daß C der Mittelpunct der Kräfte sein müsse, wenn sich aus der Betrachtung der Bahn zeigte, daß die Flächenräume, die ein von C ausgehender Radius Vector beschreibt, der Zeit proportional sind.

Diese Betrachtung war es grade, die in Beziehung auf die anziehende Kraft der Sonne Statt fand. Kepler hatte aus den beobachteten Bewegungen der Planeten die Gleichheit der Sectoren oder derjenigen Flächenräume gefunden, die ein von der Sonne nach dem Planeten gezogener und mit dem Planeten fortrückender Radius Vector in gleichen Zeiten durchläuft; hier also mußte nun die Sonne der Mittelpunct der anziehenden Kräfte sein, durch welche die Planeten in ihren Bahnen erhalten werden.

§. 148. Bemerkung. Schon diese Betrachtungen geben einige Bestimmungen für die Geschwindigkeit des um einen anziehenden Mittelpunct sich bewegenden Körpers; wir können indeß diese Bestimmung auf einem andern Wege vollständiger erhalten, wenn wir uns zugleich einen Körper denken, der auf der gekrümmten Bahn fortgeht, und einen zweiten, der von eben der Kraft angezogen, in grader Richtung gegen den Mittelpunct der Kräfte zu fällt. Hat nämlich (Fig. 47.) ein auf der Bahn AK bewegter, gegen C angezogener Körper in K eine gewisse Geschwindigkeit erreicht: so können wir uns einen eben so weit von C entfernten Körper P denken, der durch gradlinigtes Fallen gegen C zu in P eben die Geschwindigkeit erlangt hätte, und es wird eine bestimmte Höhe BP geben, von welcher der in B ruhende Körper müßte gegen C herabgefallen sein, um in P jene Geschwindigkeit zu erreichen. Wir werden sehn, welche Bestimmungen in Beziehung auf die Bewegung beider Körper Statt finden.

§. 149. Lehrsatz. Wenn zwei Körper K und P von derselben anziehenden Kraft gegen C getrieben werden, so daß in gleichen Entfernungen von C die Kraft auf beide gleich wirkt: so erhält K, indem er sich frei auf seiner Bahn nach L fortbewegt, eben die Vermehrung seiner Geschwindigkeit, welche ein von P nach Q frei gegen C fallender Körper erhält, wenn dieser in P eben die Geschwindigkeit hatte, wie jener in K, und die Puncte K, P, so wie L, Q gleich entfernt vom Centro C sind.

Beweis. In K wirkt die beschleunigende Kraft eben so stark als in dem eben so entfernten Puncte P; aber da die Richtung der Bewegung des Körpers in K von der Richtung gegen den Mittelpunct hin abweicht: so muß man diese nach KN wirkende Kraft gehörig zerlegen. Es stelle KN = PR den Raum vor, welchen die Körper K und P in einem Zeittheilchen durchlaufen würden, wenn sie bloß der anziehenden Kraft folgten: so wird, wenn KM die Tangente der Bahn in K ist, durch die auf KM senkrechte Linie NO eine Linie KO abgeschnitten, welche angiebt, wie weit jene Kraft den Körper nach der Richtung der Tangente forttreiben würde. Die zur Beschleunigung von K wirkende Kraft verhält sich also zu der zur Beschleunigung von P wirkenden Kraft, wie KO zu KN, oder wie KN . Cos NKO zu KN.

Diese Kraft, die wir für den ganzen Raum PR oder KN oder KM als unveränderlich annehmen können, ertheilt dem Körper eine Vermehrung der Geschwindigkeit, die der Kraft und zugleich der Zeit, während welcher sie wirkt, proportional ist. War nun die Geschwindigkeit beider Körper $= v$, so gebraucht der Körper P, um von P nach R zu gelangen, eine Zeit $= \frac{PR}{v} = \frac{KN}{v}$ u. folglich ist die Zunahme der Geschwindigkeit, indem der frei fallende Körper bis R gelangt, $= 2g . \frac{KN}{v} . P$, wenn g den Weg bedeutet, welchen ein Körper, vermöge der Kraft $= 1$, in der Zeit-Einheit durchläuft, und wenn P die beschleunigende Kraft bedeutet. Der Körper k, welcher in K die Geschwindigkeit $= v$ hatte, gebraucht, um nach M zu gelangen, die Zeit

$$\frac{KM}{v} = \frac{KN}{v . Cos\, MKN},$$ und die Zunahme seiner Geschwindigkeit ist dem Producte aus der ihn beschleunigenden Kraft $= P . Cos\, MKN$ in diese Zeit proportional, oder $= 2g . \frac{KN}{v} . P$.

Beide Körper also erhalten, während sie sich dem Mittelpuncte um gleich viel nähern, einen gleichen Zuwachs der Geschwindigkeit, weil die Geschwindigkeit des in der gekrümmten Bahn fortgehenden Körpers zwar durch eine schwächere beschleunigende Kraft, die aber längere Zeit durch wirkt, vermehrt wird.

Es ist klar, daß sich dies von einem Puncte der Bahn zum andern so fort beweisen läßt; daß also die Geschwindigkeit des in der Bahn KL laufenden Körpers immerfort derjenigen gleich sein wird, die ein von dem Puncte B gegen C herabfallender Körper in eben den Entfernungen von C erlangt hätte, wenn man nämlich B so angenommen hat, daß für CP = CK die in P erlangte Geschwindigkeit so groß sei, als die gegebene Geschwindigkeit in K.

Zusatz für geübtere Leser.

Wenn in P sowohl als in K die erlangte Geschwindigkeit $= v$ ist, und $PR = ds$ in der Zeit $= dt$,

$KM = dS$ in der Zeit $= dT$ durchlaufen wird: so ist, vermöge der beschleunigenden Kraft $= P$, die auf P wirkt,

$$dv = 2g\,P\,dt = 2g\,P\,.\frac{ds}{v}.$$

Da nun in K die Kraft $= P\,.\,\mathrm{Cos}\,NKO$ zur Beschleunigung der Bewegung wirkt, so ist für K die Zunahme der Geschwindigkeit während der Zeit dT, $= 2g\,.\,P\,.\,\mathrm{Cos}\,NKO\,.\,dT$

$$= 2g\,.\,P\,.\,\mathrm{Cos}\,NKO\,.\,\frac{dS}{v}$$

$$= 2g\,.\,P\,.\,\mathrm{Cos}\,NKO\,.\,\frac{ds}{v\,.\,\mathrm{Cos}\,NKO}$$

$$= \frac{2g\,ds}{v}\,.\,P,$$

weil $dS = \frac{ds}{\mathrm{Cos}\,NKO}$ ist.

Die Geschwindigkeit beider Körper, die mit gleicher Schnelligkeit in K und P ankamen, nimmt also um gleich viel zu, während sie sich dem Mittelpuncte um gleich viel nähern; diese Zunahme geht folglich nach eben dem Gesetze immer fort, und es wird also der krummlinigt bewegte Körper in L eben die Geschwindigkeit erlangt haben, welche der grade gegen C herabfallende Körper in Q erlangt hatte, wofern CL = CQ ist.

Daß hiebei vorausgesetzt wird, daß irgend einmal für gleiche Entfernungen CK = CP die Geschwindigkeit gleich gewesen sei, versteht sich von selbst; denn sonst wäre die Zunahme der Geschwindigkeit des einen, anders als die Zunahme der Geschwindigkeit des andern ausgefallen.

Zehnter Abschnitt.

Von der elliptischen Bewegung der Planeten.

Hülfssätze von der Ellipse.

§. 150. **Erklärung.** Wenn man in der Ebne, in welcher sich die beiden Puncte A, B befinden (Fig. 48.), eine Curve so zeichnet, daß für jeden Punct D ihres Umfanges, die Summe der Entfernungen von jeden beiden Puncten immer gleich groß sei, also DA + DB = EA + EB und so in allen Puncten der Curve: so ist diese Curve eine Ellipse, und A, B heißen ihre Brennpuncte.

§. 151. **Aufgabe.** Wenn man die eben erwähnte Eigenschaft der Ellipse zum Grunde legt, durch eine allgemeine Gleichung zu bestimmen, wie groß für irgend einen Punct im Umfange der Ellipse der senkrechte Abstand von der durch beide Brennpuncte gehenden Axe FG ist.

Auflösung. Nenne ich die Entfernung beider Brennpuncte von einander = 2f, und die immer gleiche Summe der Abstände irgend eines Punctes der Ellipse von beiden Brennpuncten = 2a, so ist für jeden Punct D im Umfange der Ellipse die Senkrechte HD = y, durch $y^2 = \frac{a^2 - f^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ bestimmt, wenn CA = CB = f und CH = x ist.

Beweis. Theile ich AB in C in zwei gleiche Hälften = f, und nenne CH = x: so ist AH = f — x und HB = f + x. Die in dem willkürlichen Puncte H errichtete Senkrechte HD trifft die Ellipse irgendwo in D, und da dieser Punct im Umfange der Ellipse liegt, so müssen seine Entfernungen von den beiden Brennpuncten A und B addirt, 2a geben, das ist $DA + DB = 2a$. Es ist aber, da ich $HD = y$ nenne,

$$AD^2 = y^2 + (f - x)^2; \text{ und } BD^2 = y^2 + (f + x)^2,$$

$$\text{also } \sqrt{(y^2 + (f - x)^2)} + \sqrt{(y^2 + (f + x)^2)} = 2a,$$

$$\text{oder } \sqrt{(y^2 + (f - x)^2)} = 2a - \sqrt{(y^2 + (f + x)^2)},$$

oder wenn ich quadrire

$$y^2 + f^2 - 2fx + x^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(y^2 + (f + x)^2)} + y^2 + f^2 + 2fx + x^2;$$

$$\text{oder } -fx = a^2 - a\sqrt{(y^2 + (f + x)^2)}.$$

Dieses giebt $(a^2 + fx)^2 = a^2 y^2 + a^2 f^2 + 2a^2 fx + a^2 x^2$,

$$\text{oder } a^4 + f^2 x^2 = a^2 y^2 + a^2 f^2 + a^2 x^2,$$

$$\text{oder } y^2 = \frac{a^4 - a^2 f^2 - a^2 x^2 + f^2 x^2}{a^2},$$

$$y^2 = \frac{(a^2 - f^2)(a^2 - x^2)}{a^2}.$$

§. 152. Durch diese Gleichung ist für jeden Werth, den man x geben mag, oder für jeden Punct H der Axe, bestimmt, in welcher senkrechten Entfernung von der Axe man die Ellipse antrifft. Offenbar wird $y = 0$, wenn $x = \pm a$ ist, und in G und F, wo $CG = CF = a$, schneidet die Ellipse die Axe. Für Werthe von x, die größer als a wären, ist y unmöglich, das heißt über G und F hinaus giebt es keine Puncte der Ellipse mehr, oder die Frage, wo die Senkrechte IK die Ellipse treffe, ist eine ungereimte.

Setzt man in unserer Gleichung $x = 0$, so bestimmt man, in welcher Entfernung senkrecht von der Axe man die Ellipse antrifft, wenn man vom Mittelpuncte C aus, sich senkrecht von der Axe entfernt. Hier hat y seinen größten Werth und ist $y = \pm\sqrt{(a^2 - f^2)} = CL = CM$.

§. 153. Erklärung. Die durch beide Brennpuncte gezogne und bis zu den Durchschnittspuncten mit der Ellipse verlängerte Linie FG heißt die große Axe der Ellipse; die durch den Mittelpunct C auf sie senkrecht gezogne und bis an die Ellipse verlängerte Linie LM heißt die kleine Axe der Ellipse. Die durch einen der Brennpuncte gezogne auf die große Axe senkrechte Sehne NO heißt der Parameter der Ellipse.

§. 154. Die halbe große Axe ist also $= a$, die halbe kleine Axe $= \sqrt{(a^2 - f^2)}$, wofür ich $= b$ setze.

Der halbe Parameter BN ist der Werth, den y erhält für $x = + f$ oder $x = - f$, aber für $x = f$ ist $y^2 = \frac{(a^2 - f^2)^2}{a^2}$, also der Parameter

$$= 2\left(\frac{a^2 - f^2}{a}\right) \text{ oder } = \frac{2\,b^2}{a}.$$

§. 155. Die Gleichung für die Ellipse (§. 149.) ist also $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ oder $= b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$.

§. 156. Lehrsatz. Wenn man um den Mittelpunct C der Ellipse mit dem Halbmesser $= a$ einen Kreis beschreibt, und in irgend einem Puncte der großen Axe der Ellipse eine senkrechte Ordinate errichtet: so verhält sich die Ordinate HP des Kreises (Fig. 48.) zur Ordinate HD der Ellipse wie a : b.

Beweis. Bekanntlich ist im Kreise $PH^2 = PC^2 - CH^2 = a^2 - x^2$;

$$\text{also } HP^2 : HD^2 = 1 : \frac{b^2}{a^2},$$

$$\text{oder } HP : HD = a : b.$$

§. 157. Diese Vergleichung giebt uns ein leichtes Mittel, um so viele Puncte der Ellipse, als man will, zu zeichnen, indem man nur den Kreis über der großen Axe zu ziehen, und alle seine Ordinaten in bestimmtem gleichem Verhältnisse $DH : PH = SR : SQ = b : a$ zu theilen braucht, um Puncte D, R im Umfange der Ellipse zu haben.

§. 158. Aufgabe. Eine Tangente an einen bestimmten Punct M der Ellipse zu ziehn (Fig. 49.)

Auflösung. In der verlängerten großen Axe nimmt man einen Punct T so an, daß

CP : CA = CA : CT, und zieht MT, welches die verlangte Tangente ist, wenn nämlich CP = x die Abscisse des Punctes M oder der Abstand der Senkrechten PM vom Mittelpuncte, und CA die halbe Axe ist.

Beweis. Wenn man nach dieser Regel

$CT = \frac{CA^2}{CP} = \frac{a^2}{x}$, also $PT = CT - x$, oder

$PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$ nimmt: so erhält der Winkel PTM grade den Werth, den er für den Punct M haben muß, damit MT eine Tangente werde.

Zieht man nämlich von M aus nach einem willkürlichen Puncte Q der großen Axe oder ihrer Verlängerung die grade Linie MQ, die mit CQ den Winkel $= PQM = \mu$ macht, so ist, wenn ich $CQ = u$ setze und $MQ = v$, $x = u - v \operatorname{Cos}\mu$ und $y = v . \operatorname{Sin}\mu$, also, wenn ich in §. 153. diese Werthe substituire,

$$v^2 \operatorname{Sin}^2\mu = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - (u - v \operatorname{Cos}\mu)^2);$$

$$a^2 v^2 \operatorname{Sin}^2\mu = a^2 b^2 - b^2 u^2 + 2 b^2 u v \operatorname{Cos}\mu - b^2 v^2 \operatorname{Cos}^2\mu,$$

oder

$$v^2 (a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu) - 2 b^2 u v \operatorname{Cos}\mu = b^2 (a^2 - u^2),$$

$$v^2 - \frac{2 b^2 u v \operatorname{Cos}\mu}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu} = \frac{b^2 (a^2 - u^2)}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu},$$

endlich

$$v = \frac{b^2 u \operatorname{Cos}\mu}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 (a^2 - u^2)}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu} + \frac{b^4 u^2 \operatorname{Cos}^2\mu}{(a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu)}\right)},$$

oder $v =$

$$\frac{b^2 u \operatorname{Cos}\mu \pm \sqrt{(a^2 b^2 (a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu) - b^2 a^2 u^2 \operatorname{Sin}^2\mu)}}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu.}$$

Hier erhält offenbar v zwei ungleiche Werthe, die durch das doppelte Zeichen der Wurzel angedeutet werden.

Trägt man nämlich den rationalen Theil des Werthes von v auf, der $= \frac{b^2 u \operatorname{Cos}\mu}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu}$ ist, so reicht dieser $= QR$ bis in die Mitte der Sehne MS und man bestimmt die Endpuncte M, S der Sehne, indem man den irrationalen Theil des Werthes von v, nämlich

$$\frac{ab \cdot \sqrt{(a^2 \operatorname{Sin}^2\alpha + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu - u^2 \operatorname{Sin}^2\mu)}}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu}$$

einmal von R vorwärts nach RM, das andre Mal von R rückwärts nach RS aufträgt. Die beiden Puncte M, S in der Ellipse liegen also desto näher zusammen, je kleiner jener irrationale Theil wird, und fallen ganz zusammen, wenn der irrationale Theil verschwindet. Da wo das letztere der Fall ist, hat die Linie QM oder TM nicht mehr zwei verschiedene Durchschnittspuncte mit der Ellipse gemein, sondern nur einen Berührungspunct M, oder die Linie wird eine Tangente. Aber der irrationale Theil des Werthes von v verschwindet, wenn

$$a^2 \operatorname{Sin}^2\mu - u^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu = 0$$

oder $\operatorname{tang}^2\mu = \frac{b^2}{u^2 - a^2}$ ist.

Für diesen Werth von μ ist $v = \frac{b^2 u \operatorname{Cos}\mu}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu}$, weil der irrationale Theil des Werthes von v verschwindet; also da $a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu = u^2 \operatorname{Sin}^2\mu$ war,

$$v = \frac{b^2 \operatorname{Cos}\mu}{u \operatorname{Sin}^2\mu} = QM \text{ oder vielmehr } = TM,$$

das ist $v = \frac{b^2}{u \operatorname{tang}\mu \cdot \operatorname{Sin}\mu} = \frac{b^2}{u \operatorname{Sin}\mu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{u^2 - a^2}}}$,

$$= \frac{b\sqrt{(u^2 - a^2)}}{u \operatorname{Sin}\mu}.$$

Da nun $y = v \operatorname{Sin}\mu$ und zugleich $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$ ist, so ergiebt sich für den Werth von MT, wo diese zur

Tangente wird, $v \,\mathrm{Sin}\, \mu$ oder $\frac{b}{u} \sqrt{(u^2 - a^2)} =$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{b}{u} \sqrt{(u^2 - a^2)},$$

das ist $u^2 (a^2 - x^2) = a^2 (u^2 - a^2)$,

oder $u^2 = \frac{a^4}{x^2}$;

$$u = \frac{a^2}{x},$$

so groß ist also u oder CT, wenn für den bestimmten Punct M der Winkel μ den Werth haben soll, der der Berührung entspricht.

§. 159. Liegt der Brennpunct in B, so daß $CB = f = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ ist: so findet man die Entfernung vom einen Brennpuncte B bis zum Einschnitte T der Berührungslinie MT in die große Axe,

$BT = u - \sqrt{(a^2 - b^2)} = \frac{a^2}{x} - \sqrt{(a^2 - b^2)}$; und die Entfernung desselben Punctes T vom andern Brennpuncte D ist $DT = \frac{a^2}{x} + \sqrt{(a^2 - b^2)}$ (Fig. 49.).

§. 160. Lehrsatz. Wenn man von beiden Brennpuncten D, B grade Linien DM, BM nach irgend einem Puncte M im Umfange der Ellipse zieht, an welchen die Berührungslinie MT gezogen worden ist: so machen DM, BM mit dieser die gleichen Winkel $DMU = BMT$ (Fig. 49.).

Beweis. Ist $MP = y$ die von M auf die große Axe gezogne Senkrechte, also, wenn $CP = x$,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2),$$

so ist $BP = f - x = \sqrt{(a^2 - b^2)} - x$,

$DP = \sqrt{(a^2 - b^2)} + x$,

$BM^2 = y^2 + BP^2$; $DM^2 = y^2 + DP^2$,

oder $BM = \sqrt{(y^2 + a^2 - b^2 + x^2 - 2x \sqrt{(a^2 - b^2)})}$;

oder, wenn ich für y^2 seinen Werth setze,

$$BM = \sqrt{\left(b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + a^2 - b^2 + x^2 - 2x\sqrt{(a^2 - b^2)}\right)},$$

$$= \sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2x\sqrt{(a^2 - b^2)}\right)},$$

oder da sich hieraus die Wurzel wirklich ziehen läßt,

$$BM = a - \frac{x . \sqrt{(a^2 - b^2)}}{a},$$

Und eben so ergiebt sich

$$DM = \sqrt{(y^2 + a^2 - b^2 + x^2 + 2x \sqrt{(a^2 - b^2)})},$$

$$= \sqrt{\left(a^2 + \frac{(a^2 - b^2) x^2}{a} + 2x . \sqrt{(a^2 - b^2)}\right)},$$

$$= a + \frac{x \sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}.$$

Da nun $BT = \frac{a^2}{x} - \sqrt{(a^2 - b^2)}$,

$$DT = \frac{a^2}{x} + \sqrt{(a^2 - b^2)},$$

so ist allemal $BM : BT = DM : DT$,

indem $BT = \frac{a}{x} . BM$ und $DT = \frac{a}{x} . DT$ ist.

Aber in den Dreiecken BMT, DMT ist

$$\text{Sin } BMT = \frac{\text{Sin } BTM . BT}{BM} = \frac{a}{x} . \text{Sin } BTM,$$

$$\text{Sin } DMT = \frac{\text{Sin } BTM . DT}{DM} = \frac{a}{x} . \text{Sin } BTM,$$

also Sin BMT = Sin DMT, und

$$BMT = 180^\circ - DMT = DMU.$$

Anmerkung. Dieses ist der Satz, auf den in der Statik §. 232. hingedeutet wurde.

§. 161. Lehrsatz. Wenn man an irgend einen Punct M der Ellipse eine Berührungslinie MT zieht, und auf diese aus dem einen Brennpuncte B eine Senkrechte BV: so ist $BV = b\sqrt{\frac{BT}{DT}}$ oder $= b\sqrt{\frac{BM}{DM}}$.

Beweis. Offenbar ist $BV = BT . \text{Sin } BTM$. Aber BTM ist der Winkel, der in §. 156. μ hieß, und für den dort

$$\text{tang } \mu = \text{tang } BTM = \frac{b}{\sqrt{(u^2 - a^2)}},$$

also $\text{Sin } BTM = \frac{b}{\sqrt{(u^2 - (a^2 - b^2))}}$.

Da nun $BT = u - \sqrt{(a^2 - b^2)}$,

$DT = u + \sqrt{(a^2 - b^2)}$,

$BT . DT = u^2 - \sqrt{(a^2 - b^2)}$,

so ist auch $\text{Sin } BTM = \frac{b}{\sqrt{(BT . DT)}}$,

also die Senkrechte $BV = \frac{b . BT}{\sqrt{(BT . DT)}} = b \sqrt{\frac{BT}{DT}}$,

welches nach §. 158. mit $b \sqrt{\frac{BM}{DM}}$ einerlei ist.

§. 162. Lehrsatz. Wenn man an irgend einen Punct M der Ellipse die Tangente MT zieht, und auf diese von einem der Brennpuncte B aus die Senkrechte BV, welche die Tangente in V trifft: so ist allemal dieser Punct V um $CV = a = CA$ vom Mittelpuncte C entfernt (Fig. 49.).

Beweis. Im Dreiecke CBV ist $CB = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, als Abstand des Brennpunctes vom Mittelpuncte, ferner

$$BV = b \sqrt{\frac{BT}{DT}} \text{ (§. 159.), und}$$

$$CBV = 180^\circ - TBV = 90^\circ + MTB,$$

also $\text{Cos } CBV = - \text{Sin } BTM = - \frac{b}{\sqrt{(BT . DT)}}$.

Die dritte Seite CV ist

$$= \sqrt{(CB^2 + BV^2 - 2CB . BV . \text{Cos } CBV)},$$

$$= \sqrt{\left(a^2 - b^2 + \frac{b^2 . BT}{DT} + 2 . \sqrt{(a^2 - b^2)} . b \frac{\sqrt{BT}}{\sqrt{DT}} . \frac{b}{\sqrt{(BT . DT)}}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(a^2 - b^2 + \frac{b^2 . BT}{DT} + \frac{2 b^2 . \sqrt{(a^2 - b^2)}}{DT}\right)},$$

oder da $BT = DT - 2\sqrt{(a^2 - b^2)}$,

$$CV = \sqrt{\left(a^2 - b^2 + \frac{b^2}{DT}(DT - 2\sqrt{(a^2-b^2)} + 2\sqrt{(a^2-b^2)}\right)}$$
$$= \sqrt{(a^2 - b^2 + b^2)}$$
$$= a.$$

Da nun dieses von jedem ganz unbestimmt angenommenen Puncte M gilt: so gilt es für alle Puncte im Umfange der Ellipse und für alle an die Ellipse gezogne Berührungslinien.

§. 163. Wenn DU die aus dem andern Brennpuncte auf die Tangente gezogne Senkrechte ist: so findet man $DU = b\sqrt{\frac{DT}{BT}}$,

und $CU = \sqrt{(DB^2 + DU^2 - 2\,DC \,.\, DU \,.\, \mathrm{Sin}\, T)}$,

$$= \sqrt{\left(a^2 - b^2 + \frac{b^2 \,.\, DT}{BT} - \frac{2\sqrt{(a^2-b^2)} \,.\, b^2}{BT}\right)}$$
$$= \sqrt{\left(a^2 - b^2 + \frac{b^2}{BT}(BT + 2\sqrt{(a^2-b^2)} - 2\sqrt{(a^2-b^2)}\right)}$$
$$= a.$$

Der Satz gilt also für beide aus den Brennpuncten auf irgend eine Tangente gesetzten Senkrechten.

§. 164. Erklärung. Zieht man (Fig. 49.) im Berührungspuncte M eine Linie MN auf die an M gezogne Berührungslinie senkrecht: so heißt diese die Normallinie für den Punct M. Wenn von der Länge der Normallinie die Rede ist, so versteht man darunter das zwischen dem Puncte M und der großen Axe abgeschnittene Stück derselben.

§. 165. Aufgabe. Die Normallinie MN der Ellipse ihrer Lage und Länge nach zu bestimmen (Fig. 49.).

Auflösung. 1. Es ist $\mathrm{Cotang}\, MNB = \frac{b^2 x}{a^2 y}$.

2. ist $NP = \frac{b^2 x}{a^2}$ oder $CN = \frac{x\,(a^2 - b^2)}{a^2}$; endlich

3. die Länge der Normallinie

$$MN = \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{b^2x^2}{a^2}+a^2-x^2\right)} = \frac{b}{a}\sqrt{\left(a^2-\frac{(a^2-b^2)}{a^2}x^2\right)}$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{(BM.DM)},$$

wenn alle Buchstaben ihre vorige Bedeutung behalten.

Beweis. Da der Punct M, für welchen die Normallinie gesucht wird, durch die Coordinaten $CP = x$, $PM = y$ bestimmt ist; so wird (§. 156.) die Lage der Tangente durch $CT = \frac{a^2}{x}$ angegeben.

1. Da das Dreieck NMT bei M rechtwinklicht ist, also Cotang MNP = tang MTP,

so ist $\text{Cotang } MNP = \frac{y}{PT} = \frac{y}{\frac{a^2}{x}-x} = \frac{xy}{a^2-x^2}$,

oder weil $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, das ist $(a^2-x^2) = \frac{a^2y^2}{b^2}$

$\text{Cotang } MNP = \frac{b^2x}{a^2y}$.

2. Die Dreiecke NMP, MTP sind ähnlich, also $NP : y = y : PT$, das ist, da $PT = \frac{a^2-x^2}{x}$,

$NP = \frac{y^2x}{a^2-x^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2}x(a^2-x^2)}{a^2-x^2} = \frac{b^2x}{a^2}$, woraus

$CN = x - \frac{b^2x}{a^2} = \frac{x(a^2-b^2)}{a^2}$ folgt.

3. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt auch $MN : MP = TM : PT$,

$$MN : y = \sqrt{\left(y^2+\frac{(a^2-x^2)^2}{x^2}\right)} : \frac{a^2-x^2}{x},$$

oder da $y^2 + \frac{(a^2-x^2)^2}{x^2} = (a^2-x^2).\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)$,

$$MN : \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)} : \frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{x},$$

folglich $MN = \frac{bx}{a}\sqrt{\left\{\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2 - x^2}{x^2}\right\}}$,

oder $MN = \frac{b}{a}\sqrt{\left\{\frac{b^2 x^2}{a^2} + a^2 - x^2\right\}}$

$= \frac{b}{a}\sqrt{\left\{a^2 - \frac{(a^2 - b^2)\,x^2}{a^2}\right\}}$

$= \frac{b}{a}\sqrt{(BM \,.\, DM)}$ nach §. 160.

§. 166. Bemerkung. Wenn man eines Kreises Mittelpunct irgendwo auf der Normallinie MN annimmt, und seinen Halbmesser so groß nimmt, daß er durch M geht; so hat er offenbar in M mit der Ellipse eine gemeinschaftliche Tangente. Unter den Kreisen, die so eine gemeinschaftliche Tangente mit der Ellipse in demselben Puncte M haben, schließt der eine sich mehr, der andre minder genau an die Ellipse an; wir wollen jetzt den Kreis suchen, der sich genauer als irgend ein andrer an sie anschließt, oder der mit ihr in M gleiche Krümmung hat.

§. 167. Erklärung. Dieser Kreis heißt der Krümmungskreis für den gegebnen Punct, sein Halbmesser heißt der Krümmungshalbmesser der Ellipse in M.

§. 168. Lehrsatz. Der Krümmungshalbmesser für beide Endpuncte der großen Axe der Ellipse ist $= \frac{b^2}{a}$.

Beweis. Am Endpuncte D (Fig. 50.) der großen Axe der Ellipse steht die Berührungslinie senkrecht auf diese Axe. Die Mittelpuncte aller Kreise also, welche die Ellipse in D berühren sollen, liegen auf der großen Axe. Soll einer jener Kreise, welche in D mit der Ellipse einerlei Tangente haben, zugleich durch den Punct E gehn, dessen Abscisse $= CM = x$ und Ordinate $= ME = y$ ist: so muß für diesen Kreis LED, dessen Halbmesser ich $= R$ setze, $LD = 2R$ und $EM^2 = LM \,.\, MD$ sein. Es ist aber $MD = a - x$, $LM = 2R - (a - x)$ und

$$EM^2 = v^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

also $$\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = (a - x)(2R - (a - x)),$$

oder $$\frac{b^2}{a^2}(a + x) = 2R - a + x,$$

oder $$2R = \frac{b^2}{a} + a - \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}x.$$

Dieser Ausdruck gilt für alle Kreise, die in D die Ellipse berühren, und außerdem noch in einem andern Puncte die Ellipse schneiden. Je näher dieser Durchschnittspunct E nach D zu rückt, desto weniger ist x von a verschieden; es sei also $x = a - \frac{1}{u}a$, also

$$2R = \frac{b^2}{a} + a - \frac{(a^2 - b^2)}{a} + \frac{1}{u}\frac{(a^2 - b^2)}{a}$$

oder $$2R = \frac{2b^2}{a} + \frac{1}{u}\left\{\frac{a^2 - b^2}{a}\right\}.$$

Da hier $\frac{1}{u}$ so klein werden kann, als man will, oder über jede bestimmte Grenze hinaus abnehmen kann, so nähert R sich der Grenze

$R = \frac{b^2}{a}$, und dieses ist der Halbmesser des Krümmungskreises. Der Kreis von diesem Halbmesser nämlich entfernt sich nicht mehr außerhalb bei D von der Ellipse, um sie in einem andern Puncte E zu schneiden; er entfernt sich aber auch innerhalb weniger als jeder andre Kreis von der Ellipse; denn es ist leicht zu übersehn, daß es Kreise von kleinerm Halbmesser giebt, die sich mehr von der Ellipse entfernten, und daß dieser den Uebergang zu den größern Kreisen macht, die noch einen andern, von D entfernten, Durchschnittspunct mit der Ellipse haben.

§. 169. Bemerkung. Um für einen andern Punct der Ellipse den Krümmungshalbmesser zu finden, müßte man offenbar den Mittelpunct auf der Normallinie MN (Fig. 51.) suchen, und könnte auf ähnliche Weise, wie im vorigen §. bestimmen, welcher Grenze der Halbmesser des in M berührenden und durch U gehenden Kreises sich nähert, wenn man U immer näher an M rücken läßt.

Die hiebei vorkommenden Rechnungen werden etwas verwickelter, obgleich sie zu einem sehr einfachen Resultate führen; ich will daher, um nachher die Formeln bequemer zu machen, hier einige vereinfachte Formeln hersetzen, deren wir bedürfen werden.

Nenne ich die Normallinie MN = N, so war in §. 163. Nr. 3,

$$N = \frac{b}{a} \sqrt{\left\{a^2 - \frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2}\right\}},$$

also $\dfrac{(a^2-b^2)x^2}{a^2} = a^2 - \dfrac{a^2 N^2}{b^2} = \dfrac{a^2}{b^2}(b^2 - N^2)$,

und CN, welches ich = k setze, war (§. 163. Nr. 2.),

$$CN = k = \frac{(a^2-b^2)\,x}{a^2} = \frac{a^2}{b^2}\left\{\frac{b^2 - N^2}{x}\right\}.$$

Eben dort fanden wir

$$\text{Cotang MNB} = \frac{b^2 x}{a^2 y};\ \text{also tang MNB} = \frac{a^2 y}{b^2 x}$$

und daher (Trigon. §. 42.);

$$\text{Sin MNB} = \frac{a^2 y}{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)}} = \frac{a^2 y}{b\,.\sqrt{(a^4 - (a^2-b^2)x^2)}}$$

das ist Sin MNB $= \dfrac{y}{N}$; und auf ähnliche Weise

$$\text{Cos MNB} = \frac{b\,x}{\sqrt{(a^4 - (a^2-b^2)x^2)}} = \frac{b^2 x}{a^2 N}.$$

Nenne ich MNB = λ, so ergeben diese Formeln

$$a^2 \text{Cos}^2\lambda + b^2 \text{Sin}^2\lambda = \frac{b^2}{N^2}\left\{\frac{b^2 x^2}{a^2} + y^2\right\} = \frac{b^4}{N^2};$$

$$\text{und } a^2 \text{Sin}^2\lambda + b^2 \text{Cos}^2\lambda = \frac{b^2}{N^2}\left\{a^2 - x^2\left(\frac{a^4 - b^4}{a^4}\right)\right\}.$$

$$\text{Ferner ist } k \,.\, \mathrm{Cos}\lambda = \left\{\frac{b^2 - N^2}{N}\right\},$$

$$\text{und } k \,.\, \mathrm{Sin}\lambda = \frac{a^2 y}{b^2 x}\left\{\frac{b^2 - N^2}{N}\right\}.$$

§. 170. Aufgabe. Für irgend einen durch Abscissen $CP = x$ und Ordinaten $PM = y$ bestimmten Punct M der Ellipse ist die Normallinie NM bestimmt: man sucht eine Gleichung, welche eines andern Punctes U der Ellipse senkrechten Abstand UX von der Normallinie durch MX oder NX ausdrückt.

Auflösung. Es sei des Punctes U Lage zuerst durch Abscissen auf der Hauptaxe $CW = u$, und darauf senkrechte Ordinaten $WU = w$ gegeben; auch sei Lage und Größe der Normallinie durch die gegebnen Größen $CN = k$, $NNP = \lambda$, $MN = N$ bestimmt.

Da U in der Ellipse Umfange liegt, so ist

$w^2 = b^2 - \frac{b^2 u^2}{a^2}$, und man kann nun eine Gleichung zwischen $NX = U$ und der Senkrechten $UX = W$ finden. Es ist nämlich

$u = CW = CN + NY - XZ = k + U\,\mathrm{Cos}\lambda - W\,\mathrm{Sin}\,\lambda;$

und $w = WU = WZ + ZU = U\,\mathrm{Sin}\lambda + W\,\mathrm{Cos}\lambda,$

folglich, wenn man diese Werthe in die Gleichung

$w^2 = b^2 - \frac{b^2 u^2}{a^2}$ setzt,

$$U^2\,\mathrm{Sin}^2\lambda + 2WU\,\mathrm{Sin}\,\lambda\,.\,\mathrm{Cos}\lambda + W^2\,\mathrm{Cos}^2\lambda =$$

$$b^2 - \frac{b^2}{a^2}(k + U\,.\,\mathrm{Cos}\lambda)^2 + \frac{2b^2}{a^2}W\,\mathrm{Sin}\lambda\,(k + U\,\mathrm{Cos}\,\lambda)$$

$$- \frac{b^2}{a^2}W^2\,\mathrm{Sin}^2\lambda;$$

oder besser geordnet

$$W^2(a^2\mathrm{Cos}^2\lambda + b^2\mathrm{Sin}^2\lambda) + 2W\,\mathrm{Sin}\,\lambda\,(U\,\mathrm{Cos}\lambda\,(a^2 - b^2) - b^2 k)$$

$$= b^2(a^2 - k^2) - 2b^2 k\,U\,\mathrm{Cos}\lambda - U^2(b^2\mathrm{Cos}^2\lambda + a^2\mathrm{Sin}^2\lambda).$$

Die im vorigen §. gefundenen Werthe für die einzelnen Coefficienten geben nun:

$$W^2 \cdot \frac{b^4}{N^2} + \frac{2Wy}{N} \left\{ \frac{Ub^2x}{a^2N}(a^2 - b^2) - \frac{a^2}{x}(b^2 - N^2) \right\}$$
$$= b^2(a^2 - k^2) - 2b^2U\frac{(b^2 - N^2)}{N} - \frac{b^2U^2}{N^2}\left\{ a^2 - x^2\left(\frac{a^4 - b^4}{a^4}\right) \right\}$$
oder
$$W^2 + 2Wy \left\{ \frac{Ux}{a^2b^2}(a^2 - b^2) - \frac{a^2N}{b^4x}(b^2 - N^2) \right\}$$
$$= \frac{N^2}{b^2}(a^2 - k^2) - \frac{2N.U}{b^2}(b^2 - N^2) - \frac{U^2}{b^2}\left\{ a^2 - x^2\left(\frac{a^4 - b^4}{a^4}\right) \right\}.$$

Um hieraus W zu entwickeln muß bekanntlich an beiden Seiten des Gleichheitszeichens

$$y^2 \left\{ \frac{Ux(a^2 - b^2)}{a^2b^2} - \frac{a^2N(b^2 - N^2)}{b^4x} \right\}^2$$

addirt werden, wodurch man hinter dem Gleichheitszeichen folgendes erhält:

$$\frac{(a^2 - k^2)N^2}{b^2} + \frac{y^2a^4N^2(b^2 - N^2)^2}{b^8x^2} - 2U\left\{ \frac{N(b^2 - N^2)}{b^2} + \frac{y^2(a^2 - b^2)N(b^2 - N^2)}{b^6} \right\}$$
$$- \frac{U^2}{b^2}\left\{ a^2 - x^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2 - \frac{x^2y^2(a^2 - b^2)^2}{a^4b^2} \right\}.$$

Hier läßt sich jedes einzelne Glied noch bequemer ausdrücken; denn es ist

$$\frac{(a^2 - k^2)N^2}{b^2} + \frac{y^2a^4N^2(b^2 - N^2)^2}{b^8x^2} =$$
$$= \frac{N^2}{b^2}\left\{ a^2 - \frac{a^4}{b^4x^2}(b^2 - N^2)^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^4(a^2 - x^2)(b^2 - N^2)^2}{b^6x^2} \right\}$$
$$= \frac{N^2}{b^2}\left\{ a^2 - (b^2 - N^2)^2\left(\frac{a^4}{b^4x^2} - \frac{a^2}{b^4x^2}(a^2 - x^2) \right) \right\}$$
$$= \frac{N^2}{b^2}\left\{ a^2 - \frac{a^2(b^2 - N^2)^2}{b^4} \right\};$$

ferner
$$\frac{N}{b^2}(b^2 - N^2) + \frac{y^2(a^2 - b^2)N(b^2 - N^2)}{b^6}$$
$$= \frac{N(b^2 - N^2)}{b^2}\left\{ 1 + \frac{(a^2 - x^2)(a^2 - b^2)}{a^2b^2} \right\}$$

$$= \frac{N(b^2 - N^2)}{b^4} \left\{ \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2} \right\};$$

oder weil $N^2 = \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2} \right\}$ ist,

der letzte Ausdruck $= \frac{a^2 N^3 (b^2 - N^2)}{b^6}$;

endlich ist $a^2 - \frac{(a^4 - b^4)}{a^4} x^2 - \frac{x^2 y^2 (a^2 - b^2)^2}{a^4 b^2} =$

$$= a^2 - \frac{(a^2 - b^2)}{a^4} x^2 \left\{ a^2 + b^2 + \frac{y^2}{b^2}(a^2 - b^2) \right\}$$

$$= a^2 - \frac{(a^2 - b^2)x^2}{a^4} \left\{ a^2 + b^2 + a^2 - b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) x^2 \right\}$$

$$= a^2 - \frac{(a^2 - b^2)x^2}{a^4} \left\{ 2a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) x^2 \right\}$$

$$= \left\{ a - \frac{(a^2 - b^2)x^2}{a^3} \right\}^2.$$

Der hinter dem Gleichheitszeichen stehende Theil wird also

$$= \frac{a^2 N^2}{b^2} \left\{ 1 - \frac{(b^2 - N^2)^2}{b^4} \right\} - \frac{2 U a^2 N^3}{b^6} (b^2 - N^2)$$
$$- \frac{U^2}{b^2} \left\{ a - \frac{(a^2 - b^2)x^2}{a^3} \right\}^2;$$

oder weil im letzten Gliede

$$\frac{1}{a} \left\{ a^2 - \frac{(a^2 - b^2)x^2}{a^2} = \frac{N^2 a}{b^2} \right. \text{ ist,}$$

jener ganze nach dem Gleichheitszeichen folgende Theil

$$= \frac{a^2 N^2}{b^2} \left\{ \frac{2b^2 N^2 - N^4}{b^4} \right\} - \frac{2a^2 N^3 . U}{b^6} (b^2 - N^2)$$
$$- \frac{U^2 N^4 a^2}{b^6}, = \frac{N^4 a^2}{b^6} \left\{ 2b^2 \left(1 - \frac{U}{N}\right) - (N - U)^2 \right\}.$$

Also endlich

$$W = - y \left\{ U x \frac{(a^2 - b^2)}{a^2 b^2} - \frac{a^2 N}{b^4 x} (b^2 - N^2) \right\}$$
$$\pm \frac{N^2 a}{b^3} \sqrt{\left\{ 2b^2 \frac{(N - U)}{N} - (N - U)^2 \right\}}.$$

Setze ich hier $MX = z$, also

$$U = N - z,$$

so wird der rationale Theil

$$= -y\left\{\frac{Nx(a^2-b^2)}{a^2 b^2} - \frac{a^2 b^2 N}{b^4 x} + \frac{N^3}{b^4}\frac{a^2}{x} - \frac{xz(a^2-b^2)}{a^2 b^2}\right\}$$

$$= -y\left\{\frac{N}{b^2 x}\left(\frac{(a^2-b^2)}{a^2}x^2 - a^2\right) + \frac{N^3 a^2}{b^4 x} - xz\frac{(a^2-b^2)}{a^2 b^2}\right\}$$

$$= -y\left\{\frac{-N}{b^2 x}\cdot\frac{N^2 a^2}{b^2} + \frac{N^3 a^2}{b^4 x} - xz\frac{(a^2-b^2)}{a^2 b^2}\right\};$$

$$\text{also} = + x.y.z\left\{\frac{a^2-b^2}{a^2 b^2}\right\}.$$

Folglich ist

$$W = x.y.z\frac{(a^2-b^2)}{a^2 b^2} \pm \frac{N^2 a}{b^3}\sqrt{\left\{\frac{2b^2 z}{N} - z^2\right\}};$$

ein höchst bequemer Ausdruck für W.

§. 171. $\frac{W^2}{z}$ wird also $= \left\{x.y.\frac{a^2-b^2}{a^2 b^2}\sqrt{z} \pm \frac{N^2 a}{b^3}\sqrt{\left(\frac{2b^2}{N} - z\right)}\right\}$.

§. 172. Lehrsatz. In jedem Puncte der Ellipse ist der Krümmungshalbmesser $= \frac{N^3 a^2}{b^4}$.

Beweis. Verlangt man (Fig. 51.) einen Kreis, der in M die Ellipse berühren und in U sie schneiden soll: so ist der Halbmesser derselben durch

$$(2R - z)z = W^2, \text{ oder}$$

$$2R = z + \frac{W^2}{z} \text{ bestimmt.}$$

Dieser Halbmesser würde mit Hülfe der Gleichung §. 169. ganz allgemein gefunden; aber wenn man z immer kleiner und kleiner nimmt, so nähert sich 2R derjenigen Grenze, die durch das von z unabhängige Glied dargestellt wird, das ist durch $= \left\{\frac{N^2 a}{b^3}\sqrt{\frac{2b^2}{N}}\right\}^2 = \frac{2a^2 N^3}{b^4}$, und folglich ist der doppelte Krümmungshalbmesser

$$2R = \frac{2a^2 N^3}{b^4},$$

oder $R = \dfrac{a^2 N^3}{b^4}$,

oder auch nach §. 165. Fig. 49. $R = \dfrac{BM^{\frac{3}{2}} . DM^{\frac{3}{2}}}{a . b}$.

Zusätze für geübtere Leser.

Mit welcher Leichtigkeit die Differentialrechnung alle hier gefundenen Ausdrücke ergiebt, ist bekannt genug.

Wenn die Gleichung $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$ für die Ellipse gegeben und (Fig. 52.) $CP = x$, $PM = y$ ist: so ist für die Lage der Berührungslinie MT,

$$\text{tang } MTP = \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}, \text{ daraus folgt}$$

$$PT = \frac{a^2 y^2}{b^2 x} = \frac{a^2}{x} - x, \text{ also } CT = \frac{a^2}{x}, \text{ wie in}$$

§. 158.

Hieraus folgt auch

$$PN = \frac{y^2}{PT} = \frac{b^2 x}{a^2};$$

$$CN = x - PN = \frac{x(a^2 - b^2)}{a^2}, \text{ wie §. 165.}$$

$$\text{und } MN = \sqrt{(y^2 + PN^2)} = \sqrt{\left\{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{b^4}{a^4} x^2\right\}}$$

$$= \frac{b}{a} \sqrt{\left\{a^2 - \frac{x^2(a^2 - b^2)}{a^2}\right\}} = N, \text{ wie §. 165.}$$

Um den Krümmungshalbmesser zu finden, denkt man sich den kleinen Bogen $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ der Ellipse, als einen Kreisbogen, der dem Centriwinkel $= d\varphi$ zugehört, wenn $MTP = \varphi$ ist.

Heißt also der Krümmungshalbmesser $= R$, so ist

$$R . d\varphi = ds, \text{ oder } R = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Es ist aber φ durch seine Tangente gegeben, und bekanntlich

$$d\varphi = \frac{d . \text{tang } \varphi}{1 + \text{tang}^2 \varphi},$$

also, da $\text{tang}\,\varphi = \frac{b^2 x}{a^2 y}$

$$d.\,\text{tang}\,\varphi = \frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{ydx - xdy}{y^2}\right\} = \frac{\frac{b^2}{a^2}\,dx\left(y + \frac{b^2 x^2}{a^2 y}\right)}{y^2},$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\,dx\,\frac{\left(y^2 + \frac{b^2}{a^2}\,x^2\right)}{y^3} = \frac{b^2\,dx}{y\,.\,(a^2 - x^2)}$$

also $$d\varphi = \frac{d\,\text{tang}\,\varphi}{1 + \text{tang}^2\varphi} = \frac{b^2\,dx\,.\,a^4\,y^2}{y\,(a^2 - x^2)\,(a^4 y^2 + b^4 x^2)},$$

$$= \frac{b^2\,dx\,.\,a^4\,y}{(a^2 - x^2)\,(a^4\,y^2 + b^4\,x^2)}.$$

Wir finden $$ds = dx\,\sqrt{\left\{1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right\}} = dx\,\sqrt{\left\{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right\}}$$

$$= dx\,.\,\frac{\sqrt{(a^4\,y^2 + b^4\,x^2)}}{a^2\,y},$$

und daher $$\frac{ds}{d\varphi} = R = \frac{(a^2 - x^2)\,(a^4\,y^2 + b^4\,x^2)^{\frac{3}{2}}}{b^2\,a^6\,y^2}$$

$$= \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{b^4\,a^4} = \frac{b^3\,(a^4 - x^2\,(a^2 - b^2))^{\frac{3}{2}}}{b^4\,a^4}$$

also $R = \frac{a^2\,N^3}{b^4}$, wie in §. 172.

Betrachtung der Bewegung in der Ellipse.

§. 173. **Bemerkung.** Da aus **Keplers** Vergleichung der vorhandenen Beobachtungen schon bekannt war, daß die Planeten in Ellipsen, in deren einem Brennpuncte die Sonne steht, um die Sonne laufen, und daß der von der Sonne aus zu einem Planeten hingezogne Radius Vector Flächenräume beschreibt, welche den Zeiten proportional sind: so konnte man zuerst (§. 147.) mit Sicherheit schließen, daß die Sonne der Mittelpunct der Kräfte sei, und es ließ sich dann das Gesetz bestimmen, nach welchem in verschiedenen Entfernungen von der Sonne diese Kräfte wirken.

Die Planeten bewegen sich frei in ihren Bahnen, also muß die aus der anziehenden Kraft der Sonne entspringende, gegen die Richtung der Bewegung oder auf die Tangente der Bahn senkrechte Kraft, der Schwungkraft an dieser Stelle gleich sein, indem sonst die Krümmung der Bahn, die sich allein durch die erlangte Geschwindigkeit und die anziehende Kraft bestimmt, eine andre sein würde. Außerdem muß auch die Geschwindigkeit in der Bahn, deren Beschleunigung oder Verzögerung bloß eine Wirkung der anziehenden Kraft ist, in jedem Puncte der Bahn dieser Kraft gemäß gefunden werden. Hierin liegen Bestimmungsgründe genug, um das Gesetz, wie die anziehende Kraft von der Entfernung abhängt, anzugeben.

§. 174. Lehrsatz. Die Bewegung der Planeten in der Ellipse ist wenigstens an beiden Endpuncten der großen Axe so beschaffen, daß eine dem Quadrate der Entfernungen umgekehrt proportionale anziehende Kraft der Schwungkraft das Gleichgewicht hält (Fig. 53.).

Beweis. Es sei die halbe große Axe der Ellipse $= a$, die halbe kleine Axe $= b$, also der Abstand des Brennpunctes (§. 154.) vom Mittelpuncte $= f = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, der Abstand des Brennpunctes, in welchem die Sonne steht, vom einen Ende der Axe $= a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$, $= AS$ vom andern Ende der Axe $= a + \sqrt{(a^2 - b^2)} = BS$. Da die in gleichen Zeiten beschriebenen Sectoren ASC und BSD gleich sind und diese für sehr kleine Zeiten als Dreiecke, welche bei A und B rechtwinklicht sind, können angesehen werden, indem SA, SB senkrecht auf die Tangenten in A und B sind: so ergiebt sich aus der Geschwindigkeit $= c$ in A die Geschwindigkeit in B $= c' = \frac{c \,.\, SA}{SB} = \frac{c\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})}{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}}$.

An beiden Enden der Axe ist der Krümmungshalbmesser gleich, $= \frac{b^2}{a}$ (§. 168.), und folglich in A die Schwungkraft $= \frac{c^2}{2g \,.\, \frac{b^2}{a}} = \frac{c^2\, a}{2gb^2}$;

in B die Schwungkraft $= \frac{c^2 (a - \surd(a^2 - b^2))^2 \cdot a}{2g (a + \surd(a^2 - b^2))^2 \cdot b^2}$.

Es muß folglich, wenn die anziehende Kraft in A, $= p$ ist, die anziehende Kraft in B,

$= \frac{p (a - \surd(a^2 - b^2))^2}{(a + \surd(a^2 - b^2))^2}$ sein, das ist

Kraft in A : Kraft in B $= SB^2 : SA^2$.

§. 175. Lehrsatz. In allen Puncten der Ellipse ist die Schwungkraft so groß, daß sie genau durch den auf die Richtung der Bahn senkrechten Theil der anziehenden Kraft, wenn diese gegen den Brennpunct gerichtet ist, und sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernungen von demselben verhält, im Gleichgewichte gehalten wird (Fig. 53.).

Beweis. Die Geschwindigkeit des Planeten ist in jedem Puncte M so groß, daß der in der Zeit-Einheit beschriebene Sector $MSO = \frac{1}{2} c \cdot AS$ ist, wenn c die Geschwindigkeit in A bedeutet, also, wenn SN vom Brennpuncte S senkrecht auf die Tangente gezogen ist,

$MO \cdot SN = c \cdot AS$;

Geschwindigkeit in M,

$$= MO = v = \frac{c \cdot (a - \surd(a^2 - b^2))}{SN},$$

oder nach §. 161. $= v = \frac{c (a - \surd(a^2 - b^2))}{b \surd\frac{SM}{VM}}$,

wenn V der andre Brennpunct ist.

Der Krümmungshalbmesser ist in M

$$= \frac{SM \cdot VM}{a\, b} \surd SM \cdot VM = R,$$

also die Schwungkraft $= \frac{v^2}{2gR} = \frac{c^2 (a - \surd(a^2 - b^2))^2}{2g \frac{b}{a} \cdot SM^2 \cdot \surd SM \cdot VM}$.

Nenne ich nun die in M gegen S zu wirkende beschleunigende Kraft $= q$, so ist die nach der Normallinie MQ wirkende Kraft $= q \cdot \mathrm{Cos}\, SMQ = q \cdot \mathrm{Sin}\, SMN$

$= q \cdot \frac{SN}{SM} = \frac{qb}{\sqrt{SM \cdot VM}}$. Diese soll der Schwungkraft gleich sein, also $qb = \frac{c^2 (a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2}{2g \frac{b}{a} \cdot SM^2}$,

$$\text{oder } q = \frac{c^2 \cdot a}{2gb^2} \cdot \frac{(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2}{SM^2},$$

und folglich, wenn wieder die in A wirkende Kraft $= p = \frac{c^2 \cdot a}{2gb^2}$ ist, $p : q = SM^2 : SA^2$.

Damit überall die Schwungkraft gleich sei der nach der Normallinie wirkenden anziehenden Kraft, muß also die anziehende Kraft der Sonne sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen verhalten.

§. 176. Bemerkung. Auch die Geschwindigkeiten sind in der Ellipse dem Gesetze der Kräfte, daß diese sich umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen verhalten, angemessen.

Um dieses zu übersehen, haben wir nur nöthig, uns an den Satz (§. 149.) zu erinnern, daß die Geschwindigkeit eines in der gekrümmten Bahn fortgehenden Körpers bei seiner Annäherung zum anziehenden Mittelpuncte eben so viel zunimmt, als es bei einem gradlinigt gegen den Mittelpunct zu fallenden Körper bei gleicher Annäherung der Fall sein würde, wenn eben die Kraft auf beide wirkte, und beide anfangs in gleicher Entfernung vom Mittelpuncte waren und gleiche Geschwindigkeiten hatten. Daß eben das für die Verminderung der Geschwindigkeit bei zunehmender Entfernung vom anziehenden Mittelpuncte gilt, erhellt aus den dortigen Beweisen von selbst.

Die schon früher (§. 63. 64.) gefundenen Bestimmungen für die Geschwindigkeit eines Körpers, der gradlinigt gegen einen Mittelpunct zugeht, welcher ihn mit einer Kraft, dem Quadrate der Entfernungen umgekehrt proportional, anzieht, kann uns hier dienen, um die in der Ellipse erlangten Geschwindigkeiten mit denjenigen zu vergleichen, welche jener gradlinigt fortgehende Körper erlangt hätte. Wir fanden nämlich, daß dieser in der Entfernung $= h - s$ die Geschwindigkeit $= v$ $= \sqrt{\frac{4g\,R^2 \cdot s}{h\,(h-s)}}$ erlangte, wenn er von der Entfernung $= h$ her gegen den Mittelpunct zu gefallen war, und die anziehende Kraft in der Entfernung $= R$ die Stärke hatte, welche erfordert wird, um in der ersten Secunde den ohne anfängliche Geschwindigkeit fallenden Körper durch den Raum $= g$ zu treiben.

§. 177. Lehrsatz. Wenn der die Ellipse durchlaufende Körper sich so bewegt, daß die vom Radius Vector um den Brennpunct S beschriebenen Flächenräume der Zeit proportional sind und die anziehende Kraft im einen Endpuncte A der großen Axe so wirkt, wie es die Schwungkraft dort erfordert: so ist in jedem Puncte M der Ellipse die Geschwindigkeit so groß, als diejenige, welche ein von der Höhe $= 2a$ gegen den anziehenden Brennpunct fallender Körper in der Entfernung $= SM$, vermöge einer den Quadraten der Abstände umgekehrt proportional-anziehenden Kraft, erlangen würde.

Beweis. Wenn die Geschwindigkeit des in der Ellipse um S laufenden Körpers $= c$ ist in dem Puncte A, wo er dem anziehenden Mittelpuncte am nächsten ist: so mußte (§. 174.) die in A wirkende anziehende Kraft $= \frac{c^2\,a}{2g\,b^2}$ sein, in der Entfernung $= a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$ vom anziehenden Mittelpuncte.

Soll also diese anziehende Kraft umgekehrt den Quadraten der Entfernung proportional sein, so ist sie $= 1$, in der Entfernung $= \frac{c}{b}\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})\,\sqrt{\frac{a}{2g}}$. Diese Entfernung ist also das, was in der Formel des 64. §. die Größe R war.

Heißt hier wieder $= h$ die Entfernung von S, von welcher an der Körper fallen müßte, um eine bestimmte

Geschwindigkeit erlangt zu haben, indem er in der Entfernung $= h - s$ vom anziehenden Mittelpuncte ankömmt: so muß hier, wo die Geschwindigkeit $= c$ in der Entfernung $= a - \sqrt{(a^2 - b^2)} = h - s$ ist,

$c = \sqrt{\frac{4g\,R^2 .\, s}{h\,(h - s)}}$ sein. Da nun $h - s = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$

und $s = h - a + \sqrt{(a^2 - b^2)}$

R aber $= \frac{c}{b}\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})\,\sqrt{\frac{a}{2g}}$,

so ist

$$c^2 = \frac{4g \cdot \frac{c^2}{b^2}\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2 \cdot \frac{a}{2g}\,(h - a + \sqrt{(a^2 - b^2)})}{h\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})},$$

oder $h = 2\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)}) \cdot \frac{a}{b^2}\,(h - a + \sqrt{(a^2 - b^2)})$,

woraus $h =$

$$\frac{2a\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2}{2a^2 - b^2 - 2a\sqrt{(a^2 - b^2)}} = \frac{2a\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2}{a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - b^2)} + (a^2 - b^2)},$$

$$h = \frac{2a\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2}{(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2} = 2a$$

folgt. Der in der Ellipse laufende Körper müßte also aus der Entfernung $= 2a$ herabgefallen sein, um in der Entfernung $= a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$ die Geschwindigkeit erlangt zu haben, die er hier wirklich hat, und die ihm grade die hier nöthige Schwungkraft ertheilt.

Stellen wir eben diese Betrachtung für einen andern Punct M der Ellipse an, so ist dort (§. 175.) die Geschwindigkeit $= \frac{c\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})}{b\sqrt{\frac{SM}{VM}}}$.

Ein Körper aber, der von der eben vorhin gefundenen Entfernung $= 2a = h$ gegen S herabfiele, hätte in der Entfernung $= SM = h - s = 2a - s$, die Geschwindigkeit $= \sqrt{\frac{4g\,R^2\,(2a - SM)}{2a\,.\,SM}}$ erlangt, oder, wenn ich für R^2 den gehörigen Werth setze, die Geschwindigkeit

$$= \sqrt{\frac{\frac{4g\,c^2}{b^2}\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2 \cdot \frac{a}{2g}\,(2a - SM)}{2a\,.\,SM}}$$

$$= \frac{c}{b}\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})\,\sqrt{\frac{2a - SM}{SM}}$$

$$= \frac{c\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})}{b\,\sqrt{\frac{SM}{VM}}},$$

weil $2a - SM = VM$, wenn V der andre Brennpunct ist. Dieser Körper erlangt also in jeder Entfernung $= SM$ vom anziehenden Mittelpuncte eben die Geschwindigkeit, welche der in der Ellipse laufende Körper wirklich hat (§. 175.), und es erhellt folglich, daß der Körper, indem er die Ellipse so durchläuft, daß die Flächenräume den Zeiten proportional sind, grade die Geschwindigkeiten erlangt, welche er nach §. 149. vermöge jener anziehenden Kraft erlangen würde.

§. 178. Aufgabe. Es ist (Fig. 54.) der Mittelpunct S der Kräfte gegeben, gegen welchen ein Körper angezogen wird; dieser Körper bewegt sich in M mit der Geschwindigkeit $= C$ nach der Richtung MP, die mit MS den gegebnen Winkel $SMP = \lambda$ macht: man verlangt die Ellipse zu bestimmen, in welcher der Körper M um S, als Brennpunct der Ellipse laufen wird, wenn die anziehende Kraft den Quadraten der Entfernungen umgekehrt proportional ist.

Auflösung. Wir haben eben gesehen (§. 177.), daß der Körper, um die Geschwindigkeit zu erlangen, welche er in der Ellipse hat, immer aus der Entfernung $= h = 2a$ gleich der großen Axe der Ellipse herabgefallen sein müßte, wenn er nämlich in der bestimmten Entfernung $= SM$ die bestimmte Geschwindigkeit sollte erlangt haben. Nenne ich also $SM = l$, so muß hier

$$C^2 = \frac{4g\,R^2\,(h - l)}{h\,.\,l} = \frac{4g\,R^2\,(2a - l)}{2a\,l} \text{ sein},$$

also $2a = \frac{4g\,R^2\,l}{4g\,R^2 - l\,C^2}$ sein, und dieses ist die große Axe der Ellipse, in welcher der Körper laufen muß. Hier ist R bekannt; denn die anziehende Kraft muß für irgend eine Entfernung gegeben sein.

Hiemit ist also die Länge der großen Axe = 2a und die Lage ihres einen Brennpunctes bekannt. Um auch die Lage der Axe zu bestimmen, dient die Auffindung des andern Brennpunctes. Die Richtungslinie MP ist offenbar eine Tangente der Ellipse; nimmt man also QMV = PMS, so liegt der andre Brennpunct auf MV (§. 160.), und zugleich muß seine Entfernung VM von M, = 2a − SM sein, da allemal VM + SM = 2a, wenn V und S die beiden Brennpuncte sind.

Hiemit ist also die Lage VS der großen Axe bestimmt; man braucht nur noch VS in O zu halbiren, OA = a aufzutragen, und dann die Ellipse um die Brennpuncte V, S zu zeichnen.

§. 179. Bemerkung. Bei dieser Bestimmung zeigt sich, daß $C^2 < \frac{4g\,R^2}{1}$ sein muß, wenn die Bahn eine Ellipse werden soll; denn im entgegengesetzten Falle würde die Formel für 2a etwas Negatives geben, oder auch $2a = \infty$, wenn $C^2 = \frac{4g\,R^2}{1}$ wäre.

Diese Bestimmungen der Formel sind ganz richtig, denn eine nähere Untersuchung zeigt, daß der Körper eine Parabel durchliefe, wenn $C^2 = \frac{4g\,R^2}{1}$, und eine Hyperbel, wenn $C^2 > \frac{4g\,R^2}{1}$ wäre.

Ich muß hier diese nähere Untersuchung übergehen, da ich zu lange bei Erklärung der Eigenschaften jener beiden Curven verweilen müßte.

Aus der Bestimmung, daß $R^2 > \frac{C^2\,1}{4g}$ sein muß, wenn der Körper eine Ellipse durchlaufen soll, erhellt zugleich, wenn ich die in M, in der Entfernung $= l$ wirkende Kraft $= p$ nenne, daß p, welches $= \frac{R^2}{l^2}$ ist, wenn in der Entfernung $= R$, die Kraft $= 1$ war, daß $p > \frac{C^2}{4gl}$ sein muß, wenn die Bahn eine Ellipse werden soll.

Zusätze für geübtere Leser.

I. Um die Gesetze der Bewegung eines Körpers, der durch anziehende Kräfte gegen einem bestimmten Mittelpunct getrieben wird, mit Hülfe der Differential-Rechnung zu entwickeln, wollen wir uns zuerst an die bisher entwickelten Lehren möglichst anschließen. Es ist klar, daß (Fig. 55.) die nach MB auf M wirkende anziehende Kraft, die $= p$ heißen mag, die in M nach der Richtung MV gehende Bewegung beschleuniget, mit einer Kraft $= p . \mathrm{Cos}\, BMT$; und daß dagegen die auf die Tangente senkrechte Kraft, $= p . \mathrm{Sin}\, BMT$, die aus der Zerlegung der Kraft p entsteht, genau der Schwungkraft gleich sein muß, also $= \frac{v^2}{2gr}$, wenn v die Geschwindigkeit in M, r der Werth des Krümmungshalbmessers an dieser Stelle ist.

Aus diesen beiden Bestimmungen ergeben sich theils die Gesetze der Bewegung auf der Curve, theils die Gleichung für die Curve selbst.

II. Es sei die veränderliche Entfernung des bewegten Punctes vom anziehenden Mittelpuncte $BM = z$; die von B auf die Richtungslinie der Bewegung oder auf die Tangente MT der Bahn gesetzte Senkrechte $= w$: so ist

$$\mathrm{Sin}\, BMT = \frac{w}{z}; \quad \mathrm{Cos}\, BMT = \frac{\sqrt{(z^2 - w^2)}}{z},$$

woraus die nach der Tangente wirkende Kraft

$$= \frac{p . \sqrt{(z^2 - w^2)}}{z}$$ gefunden wird. Da diese als beschleunigende Kraft die Geschwindigkeit $= v$ vermehrt, so ist (nach Zusatz zu §. 62.), $dv = \frac{2gpdt . \sqrt{(z^2 - w^2)}}{z}$.

Aus der Bestimmung der Schwungkraft hingegen, welche der gegen die Richtung der Bahn senkrechten Kraft gleich sein muß, wird $\frac{p \cdot w}{z} = \frac{v^2}{2gr}$ gefunden.

In diesen Gleichungen ist allemal der Krümmungshalbmesser eine bekannte Function von z und w; auch ist, wenn wir $\frac{ds}{v} = dt$ setzen, und unter ds den in der Zeit $= dt$ durchlaufenen Weg verstehen, ds leicht durch z und w auszudrücken, wodurch dann, wenn p eine gegebne Function von z ist, alle vorkommenden Größen auf die drei Größen v, z, w zurückgeführt werden, zu deren gegenseitigen Bestimmung zwei Gleichungen gegeben werden.

III. Es ist, wenn man das kleine Stück Mm der Bahn $= ds$ nimmt, und mn senkrecht auf BM zieht (Fig. 55.), das Dreieck Mnm $\backsim$ MVB, und folglich, da $Mn = dz$
$ds : dz = z : \sqrt{(z^2 - w^2)}$. Hieraus folgt für

$$dv = \frac{2g \cdot pdt}{z} \sqrt{(z^2 - w^2)},$$

$$\text{oder } vdv = 2gp \cdot vdt \cdot \frac{\sqrt{(z^2 - w^2)}}{z},$$

$$vdv = -2gp \cdot ds \cdot \frac{dz}{ds} = -2gp\,dz;$$ weil z abnimmt, wenn BMT spitz oder dv positiv ist,

also $p = \frac{-vdv}{2g\,dz}$. Aber die zweite obige Gleichung $\frac{p \cdot w}{z} = \frac{v^2}{2gr}$, giebt auch $p = \frac{z\,v^2}{w \cdot 2gr}$, und aus der Vergleichung beider Werthe von p folgt $\frac{vdv}{v^2} = \frac{-z\,dz}{w \cdot r}$.

IV. Um den Krümmungshalbmesser $= r$ durch z und w auszudrücken, dient folgende Ueberlegung. Zieht man an M und m die Tangenten MT, mt: so schließen diese den Krümmungswinkel $= d\varphi = tMT$ ein, und bekanntlich ist $ds = r \cdot d\varphi$. Aber wenn mt auf BV das Stück $Vv = gw$ abschneidet, so ist auch $dw = mV \cdot d\varphi = MV \cdot d\varphi = d\varphi \cdot \sqrt{(z^2 - w^2)}$,

folglich $r = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{dw} \cdot \sqrt{(z^2 - w^2)} = \frac{z\,dz}{dw}$,

weil $ds : dz = z : \sqrt{(z^2 - w^2)}$,

Die Gleichung $\frac{vdv}{v^2} = \frac{-z\,dz}{w \cdot r}$ giebt also

$$\frac{vdv}{v^2} = \frac{-dw}{w}, \text{ oder } \tfrac{1}{2} \log . v^2$$
$$= - \log w + \log \text{Const};$$

oder $v = \frac{C}{w}$.

Um hier die Constans $= C$ zu bestimmen, muß in irgend einem Puncte A der Bahn die Geschwindigkeit bekannt sein. Sie sei $= c$ in demjenigen Puncte A der Bahn, wo die Senkrechte auf die Tangente, nämlich $w = h$ wird, so ist $c = \frac{C}{h}$,

also allgemein $v = \frac{h . c}{w}$.

V. Diese Gleichung gilt allgemein für jede nach dem Mittelpuncte B zu wirkenden Kraft, und sie drückt offenbar ganz eben das aus, was wir in §. 145. fanden.

Gebrauchen wir nun diesen Werth für v in der Gleichung

$$p = \frac{z . v^2}{2g\,wr}, \text{ so ist}$$
$$2pgr = \frac{c^2 z h^2}{w^3},$$
$$\text{oder } 2gp . dz = \frac{c^2 h^2 dw}{w^3}.$$

Diese Gleichung kann immer aufgelöset werden, wenn p eine Function der Entfernung ist.

VI. Wir können nun hier zwei Aufgaben aufzulösen uns vorsetzen. Erstlich, die Function p zu bestimmen, wenn die Bahn gegeben ist; zweitens, die Bahn zu bestimmen, wenn p gegeben ist, oder wenn man weiß, nach welchem Gesetze die Kraft von der Entfernung abhängt.

VII. Die erste Aufgabe wollen wir sogleich auf die Ellipse anwenden.

Die bekannte Gleichung für die Ellipse $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$, wo x, y Coordinaten, den beiden Hauptaxen a, b parallel vom Mittelpuncte an, a und b aber die Hälfte dieser Hauptaxen bedeuten, läßt sich leicht so umändern, daß darin z durch w gegeben werde. Zuerst ist $z = \sqrt{(y^2 + (f - x)^2)}$, wenn ich den Abstand des Brennpunctes vom Mittelpuncte $= \sqrt{(a^2 - b^2)} = f$

nenne, also $z = \sqrt{\left\{a^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + x^2 - 2x\sqrt{(a^2-b^2)}\right\}}$

$$= a - \frac{x\sqrt{(a^2-b^2)}}{a} = \frac{a^2 - fx}{a}.$$

Für w aber findet man leicht auch einen durch x ausgedrückten Werth. Stellt nämlich BT die verlängerte große Axe der Ellipse vor und MT ihre Tangente; so ist tang BTM $= \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$

und PT $= \frac{y^2 a^2}{b^2 x} = \frac{a^2 - x^2}{x}$;

$$BT = PT - (f - x) = \frac{a^2}{x} - f = \frac{a^2}{x} - \sqrt{(a^2 - b^2)},$$

also $BV = w = BT \,.\, \sin BTM$

$$= \left\{\frac{a^2}{x} - \sqrt{(a^2-b^2)}\right\} \frac{b^2 x}{\sqrt{(b^4 x^2 + a^4 y^2)}}$$

$$w = \frac{(a^2 - x\sqrt{(a^2-b^2)})\,.\,b}{\sqrt{(b^2x^2 + a^2(a^2-x^2))}} = b\,\frac{(a^2 - x\sqrt{(a^2-b^2)})}{\sqrt{(a^4 - (a^2-b^2)x^2)}}$$

$$= b\sqrt{\frac{a^2 - x\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2 + x\sqrt{(a^2-b^2)}}},$$

oder $w^2 = b^2 \left\{\frac{a^2 - fx}{a^2 + fx}\right\} = \frac{b^2 z}{2a - z}$

$$\frac{1}{w^2} = \frac{2a}{b^2 z} - \frac{1}{b^2};$$

woraus durch Differentiirung folgt

$$-\frac{dw}{w^3} = -\frac{a\,dz}{b^2 z^2}.$$

Nun sollte, vermöge der oben gefundenen Gleichung

$$2gp\,dz = \frac{c^2 h^2 dw}{w^3}, \text{ sein,}$$

also $2gp\,dz = \frac{c^2 h^2 a\,dz}{b^2 z^2}$;

$$p = \frac{c^2 h^2 a}{2g b^2 z^2}.$$

Die anziehende Kraft muß also dem Quadrate des Abstandes z umgekehrt proportional sein, wenn die Bahn elliptisch sein soll.

VIII. Ist die umgekehrte Aufgabe vorgelegt, nämlich die Bahn zu bestimmen, wenn die anziehende Kraft eine gegebne Function von z ist, so wird aus der Gleichung

$$2gp\,dz = c^2 h^2 \frac{dw}{w^3},$$

sogleich $2g\int p dz = C - \frac{c^2 h^2}{2w^2}$ gefunden.

Es sei $p = \frac{R^2}{z^2}$ also die Kraft umgekehrt den Quadraten der Entfernung proportional, und R die Entfernung, wo $p = 1$ der Schwerkraft gleich wird: so ist

$$2g\int p dz = -\frac{2g R^2}{z} = C - \frac{c^2 h^2}{2w^2}.$$

Wir wollen hier, um die Constans zu bestimmen, annehmen, die Geschwindigkeit $= c$ finde an derjenigen Stelle der Bahn statt, wo das Perpendikel auf die Tangente $= h$, die Entfernung z aber $= k$ ist; dann wird $\frac{2g R^2}{k} = \frac{c^2}{2} - \text{Const}$,

$$\text{also } \frac{2g R^2}{z} - \frac{2g R^2}{k} = \tfrac{1}{2} c^2 \left\{ \frac{h^2}{w^2} - 1 \right\}.$$

Durch diese Gleichung zwischen z und w ist die Bahn schon bestimmt.

IX. Um hier eine bequemere Gleichung zu finden, sei PBA eine durch den anziehenden Punct B gezogne, willkürliche grade Linie, und für den unbestimmten Punct M sei $BM = z$, $BMP = \psi$; also $Mn = dz$, $mn = dz\psi$, und

$$w = \frac{z^2 d\psi}{\sqrt{(dz^2 + z^2 d\psi^2)}}, \text{ weil } z : w = ds : z d\psi \text{ war;}$$

$$\text{also } 2g R^2 \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{k} \right\} + \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{\tfrac{1}{2} c^2 h^2 (dz^2 + z^2 d\psi^2)}{z^4 d\psi^2}$$

$$\text{oder } d\psi \sqrt{\left\{ \left(\tfrac{1}{2} c^2 - \frac{2g R^2}{k} \right) z^2 + 2g R^2 . z - \tfrac{1}{2} c^2 h^2 \right\}} = \frac{c h dz}{z \sqrt{2}}.$$

Ich will hier nur kurz $\tfrac{1}{2} c^2 h^2 = A$; $2g R^2 = B$; $\tfrac{1}{2} c^2 - \frac{2g R^2}{k} = C$ setzen; dann ist

$$d\psi = \frac{c h}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dz}{z \sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}},$$

$$\text{und } \psi = \frac{c h}{\sqrt{2A}} \text{ Arc . tang } \frac{-2A + Bz}{2\sqrt{A} . \sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}},$$

oder da $\sqrt{2A} = c h$ ist;

$$\psi = \text{Const} + \text{Arc . tang } \frac{Bz - c^2 h^2}{h c \sqrt{2} . \sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}}.$$

Soll hier $\psi = 0$ sein, an der Stelle, wo $z = k$, $w = h$

ist: so wird $\text{Const} = \text{Arc. tang} \frac{2A - Bk}{2\sqrt{A}.\sqrt{(Ck + Bk - A)}}$, woraus sich der allgemeine Werth von φ leicht darstellen ließe. (*)

Um hier nicht allzu weitläuftig zu rechnen, wollen wir annehmen, daß an der Stelle, wo die Geschwindigkeit $= c$ ist, der Radius Vector selbst senkrecht auf die Tangente, also an dieser Stelle $z = w = h = k$ sei. Dann ist

$$2A - Bh = c^2 h^2 - 2ghR^2, \text{ und}$$
$$ch^2 + Bh - A = o, \text{ also}$$
$$\text{Const} = \text{Arc. tang } \infty = \tfrac{1}{2}\pi; \text{ und allgemein}$$
$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc. tang} \frac{c^2 h^2 - 2gzR^2}{ch.\sqrt{(c^2 z^2 - \frac{4gR^2 z^2}{h} + 4gzR^2 - c^2 h^2)}}$$
$$\text{also Cotang } \psi = \frac{c^2 h^2 - 2gzR^2}{ch.\sqrt{\left(c^2(z^2 - h^2) + \frac{4gzR^2}{h}(h - z)\right)}}$$

(*) Das Integral $\int \frac{dz}{z\sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}}$ wird so gefunden. Da $\frac{dz}{z\sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}} = \frac{\frac{dz}{z^2}}{\sqrt{\left(C + \frac{B}{z} - \frac{A}{z^2}\right)}}$

ist: so wird, wenn ich $\frac{1}{z} = \xi$ setze

$$\frac{-d\xi}{\sqrt{(C + B\xi - A\xi^2)}} = \frac{-d\xi : \sqrt{A}}{\sqrt{\left\{\frac{C}{A} + \frac{1}{4}\frac{B^2}{A^2} - \left(\xi - \frac{1}{2}\frac{B}{A}\right)^2\right\}}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{\left(\frac{C}{A} + \frac{1}{4}\frac{B^2}{A^2}\right)}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\left(\xi - \frac{B}{2A}\right)^2}{\frac{C}{A} + \frac{1}{4}\frac{B^2}{A^2}}\right)}.$$

Hievon ist das Integral

$$= \text{Const} - \frac{1}{\sqrt{A}} \text{Arc. Sin} \frac{2A\xi - B}{\sqrt{(4AC + B^2)}}$$
$$= \text{Const} - \frac{1}{\sqrt{A}} \text{Arc. tang} \frac{2A\xi - B}{2\sqrt{A}.\sqrt{(C + B\xi - A\xi^2)}}$$
$$= \text{Const} - \frac{1}{\sqrt{A}} \text{Arc. tang} \frac{2A - Bz}{2\sqrt{A}.\sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}}.$$

$$\text{Cosin}\,\psi = \frac{c^2 h^2 - 2gzR^2}{z\,(c^2 h - 2g R^2)},$$

oder $$z = \frac{c^2 h^2}{2g R^2 + (c^2 h - 2g R^2) \operatorname{Cos}\psi}.$$

X. Dieses ist eine Gleichung für einen Kegelschnitt, denn wenn wir in der bekannten Gleichung für die Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

$y = z \,.\, \operatorname{Sin}\psi$ und $x - f = z \,.\, \operatorname{Cos}\psi$ setzen, wo nämlich $f = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, der Abstand des Brennpunctes vom Mittelpuncte ist: so haben wir

$$z^2 \operatorname{Sin}^2\psi = \frac{b^2}{a^2}(b^2 - 2fz \operatorname{Cos}\psi - z^2 \operatorname{Cos}^2\psi).$$

Setze ich hier $f = e \,.\, a$, so daß e die Excentricität oder das Verhältniß der Entfernung des Brennpunctes vom Mittelpuncte zur halben großen Axe angiebt, so ist

$$z^2(a^2 \operatorname{Sin}^2\psi + b^2 \operatorname{Cos}^2\psi) = b^4 - 2b^2 fz \operatorname{Cos}\psi,$$

oder weil $b^2 = a^2 - f^2 = a^2(1 - e^2)$ ist,

$$z^2(a^2 - a^2 e^2 \operatorname{Cos}^2\psi) = a^2(1 - e^2)\,(a^2(1 - e^2) - 2eaz \operatorname{Cos}\psi)$$

oder $z^2(1 - e^2 \operatorname{Cos}^2\psi) = a^2(1 - e^2)^2 - 2eaz(1 - e^2)\operatorname{Cos}\psi$,

oder $z^2 = a^2(1 - e^2)^2 - 2a(1 - e^2)\, e z \operatorname{Cos}\psi + e^2 z^2 \operatorname{Cos}^2\psi$,

das ist $z = a\,(1 - e^2) - e z \operatorname{Cos}\psi$,

oder $$z = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \operatorname{Cos}\psi}.$$

Eben diese Gleichung würde man für die Hyperbel finden, nur daß man dort a als negativ ansehen muß, also

$$z = \frac{a\,(e^2 - 1)}{1 + e \operatorname{Cos}\psi}$$ setzen muß. Für die Parabel ist sie in dieser Form nicht gut anwendbar, da $a = \infty$ und $e = 1$ ist; aber $a\,(1 - e^2) = a \left\{1 - \frac{f^2}{a^2}\right\} = \frac{a^2 - f^2}{a} = \frac{b^2}{a}$ ist in der Ellipse und Hyperbel dem halben Parameter gleich $= \frac{1}{2} P$, und

$$z = \frac{\frac{1}{2} P}{1 + e \operatorname{Cos}\psi}$$ ist eine für alle Kegelschnitte geltende Gleichung, da sich leicht nachweisen läßt, daß auch bei der Parabel $z = \frac{\frac{1}{2} P}{1 + \operatorname{Cos}\psi}$ ist.

XI. Unsre Gleichung $z = \frac{c^2 h^2}{2g R^2 + (c^2 h - 2g R^2) \operatorname{Cos}\psi}$ giebt also die Bahn als einen Kegelschnitt an, dessen halber Parameter $= \frac{1}{2} P = \frac{c^2 h^2}{2g R^2}$, dessen Excentricität

$= e = \frac{c^2 h - 2g R^2}{2g R^2}$, und dessen halbe große Axe

$= a = \frac{\frac{1}{2} P}{1 - e^2} = \frac{2g h R^2}{4g R^2 - c^2 h}$ ist.

Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn $4g R^2 > c^2 h$, also die Axe positiv, die Excentricität < 1 ist; er wird eine Parabel für $4g R^2 = c^2 h$, welches $a = \infty$; $e = 1$ giebt; er wird endlich eine Hyperbel, wenn $4g R^2 < c^2 h$, a negativ und $e > 1$ ist. Für $c^2 h = 2g R^2$ wird die Bahn ein Kreis, indem $e = 0$, und $\frac{1}{2} P = a = h$ wird.

* * *

XII. Die hier zu findenden Bestimmungen lassen sich noch auf einem andern Wege erhalten. Bewegt der Körper sich auf der Linie AM (Fig. 55.) von M nach m in der Zeit $= dt$, so ist die Geschwindigkeit $v = \frac{Mm}{dt} = \frac{ds}{dt}$. Setze ich hier dt unveränderlich, oder nehme immer gleiche Zeitmomente $= dt$, so ist $dv = \frac{d^2s}{dt}$, die Aenderung der Geschwindigkeit in der Zeit $= dt$.

Ist die Curve, in welcher sich der Körper bewegt (Fig. 56.), auf senkrechte Coordinaten $AP = x$, $PM = y$ bezogen: so ist es bequem, die Geschwindigkeit nach Richtungen, diesen Coordinaten parallel, zu zerlegen. Offenbar ist die mit x parallele Geschwindigkeit $= \frac{v \cdot dx}{ds} = \frac{dx}{dt}$, die mit y parallele Geschwindigkeit $= \frac{v \cdot dy}{ds} = \frac{dy}{dt}$, also die Aenderung der mit x parallelen Geschwindigkeit $= \frac{d^2x}{dt}$, die Aenderung der mit y parallelen Geschwindigkeit $= \frac{d^2y}{dt}$.

XIII. Diese Aenderungen müssen den nach eben den Richtungen wirkenden Kräften angemessen sein. Ist also eine nach BM wirkende Kraft $= p$ die einzige hier thätige Kraft, so entspringt aus ihr eine gegen AB zu mit MP parallele Kraft $= \frac{p \cdot y}{z}$, wenn

$BM = z$ und eine mit BP parallele Kraft $= \frac{p \cdot PB}{z}$, oder $= \frac{p \cdot x}{z}$, wenn ich B selbst als Anfangspunct der x annehme. Ist die Kraft eine anziehende, so wirken diese zerlegten Kräfte dahin, um die Coordinaten x, y zu vermindern, und da allemal die Aenderung der Geschwindigkeit gleich der Kraft multiplicirt mit $2g\,dt$ ist, so haben wir hier in Beziehung auf die beiden, den Coordinaten parallelen Kräfte

$$\frac{d^2x}{dt} = -\frac{2g \cdot px}{z}dt; \text{ und } \frac{d^2y}{dt} = -\frac{2gpy \cdot dt}{z}$$

oder, wenn man jene Gleichung mit $\frac{2dx}{dt}$,

diese mit $\frac{2dy}{dt}$ multiplicirt,

$$\frac{2dx \cdot d^2x}{dt^2} = -4g \cdot \frac{p \cdot xdx}{z}; \text{ und}$$

$$\frac{2dy \cdot d^2y}{dt^2} = -4g \cdot \frac{p \cdot ydy}{z};$$

also auch $\frac{2dx \cdot d^2x + 2dy\, d^2y}{dt^2} = -4gp \cdot \frac{(xdx + ydy)}{z}$,

woraus, weil $xdx + ydy = zdz$ ist,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \text{Const} - 4g\int pdz,$$

oder $\frac{ds^2}{dt^2} = \text{Const} - 4g\int pdz$ folgt.

XIV. Die vorigen Gleichungen geben aber auch

$$\frac{yd^2x}{dt} = -\frac{2gpx \cdot ydt}{z}, \text{ und}$$

$$\frac{xd^2y}{dt} = -\frac{2gpx \cdot ydt}{z}, \text{ also}$$

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt} = 0,$$

oder integrirt $\int(xd^2y - yd^2x) = xdy - ydx = C \cdot dt.$

Diese letztere Gleichung zeigt, daß für jede anziehende, gegen den unveränderlichen Punct B gerichtete, Kraft, die vom Radius Vector beschriebenen Sectoren den Zeiten proportional sind.

Es ist nämlich der in der Zeit $= dt$ beschriebene Sector $MBm = \frac{z^2 d\varphi}{2}$, wenn ich $BM = z$, $PBM = \varphi$ nenne. Da nun hier zugleich $\frac{y}{x} = \text{tang}\,\varphi$, und bekanntl. $d\varphi = \frac{d\,.\,\text{tang}\,\varphi}{1 + \text{tang}^2\varphi}$ ist, so wird $d\varphi = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, also

$$z^2 \,.\, d\varphi = xdy - ydx, \text{ da } z^2 = x^2 + y^2.$$

Das eben vorhin gefundene Integral ist also nichts anders, als der in der Zeit $= dt$ beschriebene Sector, und da dieses allemal $= C\,.\,dt$, der Zeit proportional sein muß, so ist dies das eine, für alle Centralkräfte geltende Gesetz der Bewegung.

XV. Um die erste Hauptgleichung (in XIII.) $\frac{ds^2}{dt^2} = (-4g\int pdz$, aufzulösen, muß p als Function von z gegeben sein.

Sie sei wieder $p = \frac{R^2}{z^2}$, so ist

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = \text{Const} + \frac{4gR^2}{z}.$$

Wofern also für irgend einen Punct der Bahn, dessen Entfernung $= z = k$ ist, die Geschwindigkeit $= c$ sein soll, so ist

$$\text{Const} = c^2 - \frac{4gR^2}{k},$$

und allgemein $v^2 = c^2 - 4gR^2 \left\{\frac{1}{k} - \frac{1}{z}\right\}$,

oder $ds^2 = dt^2 \left\{c^2 - \frac{4gR^2}{k} + \frac{4gR^2}{z}\right\}$.

Da wir nun schon wissen, daß $xdy - ydx = C\,.\,dt$ ist: so können wir hiedurch t eliminiren. Um C zu bestimmen, wollen wir annehmen, daß in der Entfernung $= k$, wo die Geschwindigkeit bekannt, $= c$ ist, die Tangente mit dem Radius Vector den Winkel $= \lambda$ einschließe; dann ist dort der in der Zeit $= dt$ beschriebene Sector $= c\,.\,k\,.\,dt\,.\,\text{Sin}\,\lambda$, also

$$C = c\,.\,k\,.\,\text{Sin}\,\lambda, \text{ und allgemein}$$

$$ds = \frac{xdy - ydx}{c\,k\,.\,\text{Sin}\,\lambda} \,.\, \sqrt{\left\{\frac{c^2k - 4gR^2}{k} + \frac{4gR^2}{z}\right\}},$$

XVI. Diese Gleichung würde sich weniger leicht auflösen lassen, wenn wir z und s durch x und y ausdrückten. Da wir aber wissen, daß $z^2\,d\varphi = xdy - ydx$, so haben wir:

$$ds^2 = dz^2 + z^2\,d\varphi^2 = \frac{z^4\,d\varphi^2\left(c^2 - \frac{4gR^2}{k} + \frac{4gR^2}{z}\right)}{c^2\,k^2\,\text{Sin}^2\lambda}$$

also $d\varphi = \dfrac{dz \, . \, ck \, . \, \mathrm{Sin}\,\lambda}{z\sqrt{\left\{\left(c^2 - \frac{4gR^2}{k}\right)z^2 + 4gR^2z - c^2k^2\mathrm{Sin}^2\lambda\right\}}}$,
welches eben die Gleichung ist, worauf wir in IX. geleitet wurden, wo ψ mit unserm φ und h mit unserm k Sin λ übereinstimmt.

Elfter Abschnitt.

Von der gradlinigten Bewegung eines Körpers, welcher einen von der erlangten Geschwindigkeit abhängigen Widerstand leidet.

§. 179. Erfahrung. Wenn ein fester Körper sich in einem flüssigen fortbewegt, so daß er die Theilchen des Flüssigen aus der Stelle treibt: so wird hiedurch die Geschwindigkeit jenes Körpers um etwas vermindert. Die Erfahrung zeigt, und auch theoretische Betrachtungen lassen es vermuthen, daß dieser Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Uebrigens hängt die Größe dieses Widerstandes von der Gestalt des Körpers und von der Dichtigkeit des Widerstand leistenden Flüssigen ab, worüber die näheren Bestimmungen in der Hydraulik vorkommen.

§. 180. Bemerkung. Dieser Widerstand ist anzusehen, als eine, der Richtung grade entgegenwirkende bewegende Kraft, die aber, da sie von der jedesmaligen Geschwindigkeit abhängt, fast immer eine veränderliche ist. Die Größe dieser bewegenden Kraft ist völlig bestimmt durch die Gestalt und Größe des bewegten festen Körpers, durch die Beschaffenheit des Flüssigen, und durch die Geschwindigkeit der Bewegung. Diese gesammte bewegende Kraft wird darauf verwendet, die Geschwindigkeit aller Theile des bewegten Körpers zu vermindern, und diese Vermiderung beträgt daher für jedes Theilchen desto mehr, und folglich für den ganzen Körper desto mehr, je kleiner seine Masse oder die Anzahl seiner körperlichen Theile ist.

Hier ist also ein Fall, wo wir aus gegebnen Umständen die bewegende Kraft $= P$ kennen, und nun durch die Rücksicht auf die bewegte Masse $= M$, die beschleunigende, oder hier negativ beschleunigende, das ist verzögernde, Kraft $= \frac{P}{M}$ finden.

Anmerkung. Es ist bekannt, daß eine Bleikugel viel schneller durch die Luft herabfällt, als eine eben so große hohle Glaskugel unter ganz gleichen Umständen. Beide leiden einen gleich großen Widerstand der Luft; aber dieser gleiche Widerstand hemmt viel auffallender die Geschwindigkeit der hohlen Glaskugel, wo eine geringere Anzahl von Theilchen zurückzuhalten ist, als die viel dichtere oder mit viel mehr Masse anrückende Bleikugel.

§. 181. Bemerkung. Um die Untersuchung zu erleichtern, wollen wir hier zuerst diejenigen Fälle betrachten, wo gar keine andre beschleunigende Kräfte wirken, wo der bloß träge Körper mit unveränderlicher Geschwindigkeit fortgehen würde, wenn nicht dieser Widerstand seine Geschwindigkeit unaufhörlich verminderte. Wir werden dann zur Betrachtung der Bewegung fallender Körper in einem widerstehenden Mittel übergehen.

§ 182. Bemerkung. Da die verzögernde Kraft $= p$, welche der Widerstand ausübt, hier bloß von der Geschwindigkeit $= v$ abhängt, und, wie wir annehmen, dem Quadrate derselben proportional ist: so läßt sie sich immer durch $p = \frac{v^2}{k^2}$ ausdrücken, wenn k diejenige Geschwindigkeit bedeutet, bei welcher jene Kraft $= 1$ ist. Wir können auch hier als Einheit der Kräfte die beschleunigende Kraft der Schwere, so wie wir sie an der Ober=

fläche der Erde kennen, annehmen, und die verzöger Kraft des Widerstandes = 1 setzen, wenn sie des Kö pers Bewegung grade eben so sehr verzögert, als es die Schwere bei einem vertical aufwärts geworfenen Körper thut. Obgleich nun wegen der sich unaufhörlich ändernden Geschwindigkeit die verzögernde Kraft des Widerstandes sich ebenfalls ändert, und folglich die Verzögerung der Bewegung nie eine geraume Zeit durch so erfolgen kann, wie es durch die Schwere bei aufwärts geworfenen Körpern geschieht: so können wir doch in der Vorstellung die Geschwindigkeit = k, wobei die Verzögerung grade jene Größe hat, festhalten, und sagen, wenn diese Geschwindigkeit, des Widerstandes ungeachtet, durch eine fremde Kraft immer erhalten würde, so wäre die Einwirkung des Widerstandes, der hier als eine negative beschleunigende Kraft angesehen wird, der Kraft der Schwere gleich.

§. 183. Erklärung. Diese Geschwindigkeit = k, bei welcher die Kraft des Widerstandes = 1 ist, heißt: der Exponent des Widerstandes.

§. 184. Wenn ein sehr dichter Körper sich in einem sehr dünnen Fluido fortbewegt: so muß die Geschwindigkeit sehr groß sein, um den Widerstand so erheblich zu machen, daß er = 1 sei; dagegen reicht bei einem stärker widerstehenden Flüssigen schon eine geringere Geschwindigkeit hin, um eine eben so stark verzögernde Kraft hervorzubringen. Je größer also k ist, desto geringer ist, unter sonst gleichen Umständen, der Widerstand. Z. B. für eine im Wasser fortbewegte Bleikugel von 3 Zoll Durchmesser ist k nur ohngefehr = 16 Fuß, aber wenn eben diese Bleikugel sich in der Luft fortbewegt, so ist k = 420 Fuß; das heißt, der Widerstand ist im Wasser schon bei 16 Fuß Geschwindigkeit in 1 Secunde, in der Luft erst bei 420 Fuß Geschwindigkeit, der Schwerkraft gleich.

§. 185. Aufgabe. Ein Körper, auf den sonst keine beschleunigenden Kräfte wirken, bewegt sich in einem widerstehenden Flüssigen fort, dessen Widerstand dem

Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist; man sucht die am Ende der Zeit $= t$ noch übrige Geschwindigkeit aus der gegebnen anfänglichen Geschwindigkeit zu bestimmen.

Auflösung. War die anfängliche Geschwindigkeit $= c$, der Exponent des Widerstandes $= k$, und g der Raum, durch welchen die beschleunigende Kraft $= 1$ den Korper in der ersten Secunde treibt: so ist am Ende der Zeit $= t$, die noch übrige Geschwindigkeit

$$v = \frac{c\,k^2}{k^2 + 2gct}.$$

Beweis. Da in unserer Betrachtung die beschleunigende Kraft $= - \frac{v^2}{k^2}$ für jeden Augenblick der Bewegung ist: so müßte billig in §. 58. die Scale der beschleunigenden Kräfte so gezeichnet werden (Fig. 21.), daß $Ag = 2g\,\frac{c^2}{k^2}$ und für jede verflossene Zeit $= t = AT$, die Kraft durch $TG = 2g \cdot \frac{v^2}{k^2}$ dargestellt würde. Nehmen wir hier den in der Auflösung angegebenen Werth für v, und bedenken zugleich, daß die Fläche $AgGT$ sich zu $Ag \cdot AT$ eben so verhält, wie die in der Zeit $= t$ verlohrene Geschwindigkeit zu $2g \cdot \frac{c^2}{k^2}\,t$, oder daß $c - v = \frac{AgGT \cdot t}{AT}$, weil $Ag = 2g \cdot \frac{c^2}{k^2}$, so erhalten wir, wenn wir die Zeit t in n gleiche Theile zerlegt und dann der schon angegebnen Bestimmung gemäß, die Scale gezeichnet annehmen, so daß $\frac{v^2}{k^2}$

am Ende der Zeit $\frac{1}{n}t = \frac{c^2\,k^2}{(k^2 + \frac{1}{n} \cdot 2gct)^2}$ wird;

am Ende der Zeit $\frac{2}{n}t = \frac{c^2\,k^2}{(k^2 + \frac{2}{n} \cdot 2gct)^2}$ und so ferner

$$c - v < \frac{2gc^2t}{k^2 n}\left\{1 + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{1}{n}.2gct)^2} + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{2}{n}.2gct)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{3}{n}.2gct)^2} + \ldots\ldots + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{n-1}{n}.2gct)^2}\right\}$$
und
$$> \frac{2gc^2t}{k^2 n}\left\{\frac{k^4}{(k^2 + \frac{1}{n}.2gct)^2} + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{2}{n}.2gct)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{3}{n}.2gct)^2} + \ldots\ldots + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{n}{n}.2gct)^2}\right\}.$$

Es ergiebt sich aber aus §. 65. leicht, daß die Summe jener Reihen durch $\frac{2gc^2t}{k^2 + 2gct}$ dargestellt wird, oder daß $c - v = \frac{2gc^2t}{k^2 + 2gct}$, das ist $v = \frac{k^2 c}{k^2 + 2gct}$ ist. Der in der Auflösung angegebene Werth für v macht also die obige Gleichung identisch und ist folglich richtig; oder wenn man jenem Werthe gemäß die verzögernde Kraft des Widerstandes annimmt: so ergiebt sich die noch übrige Geschwindigkeit grade so, wie sie sich nach der angenommenen Formel ergeben sollte.

§. 186. Der Beweis, daß $\frac{2gc^2t}{k^2 + 2gct}$ immer zwischen die Grenzen fällt, die durch die Reihen im vorigen §. gegeben wurden, läßt sich nach §. 65. leicht führen, wenn ich hier $\frac{1}{n}t = u$ setze. Es ist nämlich die allgemein zu beweisende Vergleichung

$$\frac{2gc^2nu}{k^2 + 2gcnu} < \frac{2gc^2u}{k^2}\left\{1 + \frac{k^4}{(k^2 + 2gcu)^2} + \frac{k^4}{(k^2 + 4gcu)^2}\right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + \frac{k^4}{(k^2 + 2(n-1)gcu)^2}\right\}$$
$$> \frac{2gc^2u}{k^2}\left\{\frac{k^4}{(k^2 + 2gcu)^2} + \frac{k^4}{(k^2 + 4gcu)^2}\right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + \frac{k^4}{(k^2 + 2ngcu)^2}\right\}$$

und hier ergiebt sich für n — 1 sogleich

$$\frac{1}{k^2 + 2gcu} < \frac{1}{k^2} \text{ und } > \frac{k^2}{(k^2 + 2gcu)^2};$$

und ferner n = 2,

$$\frac{2}{(k^2 + 4gcu)} < \frac{1}{k^2} + \frac{k^2}{(k^2 + 2gcu)^2};$$

$$> \frac{k^2}{(k^2 + 2gcu)^2} + \frac{k^2}{(k^2 + 4gcu)^2};$$

denn hier ist bei dem Uebergange von n = 1 zu n = 2 der vor dem Ungleichheitszeichen stehende Theil um

$$\frac{2}{k^2 + 4gcu} - \frac{1}{k^2 + 2gcu} = \frac{k^2}{(k^2 + 4gcu)(k^2 + 2gcu)}$$

gewachsen, der nach dem Ungleichheitszeichen stehende erste Theil ist um $\frac{k^2}{(k^2 + 2gcu)^2}$, also mehr als jener gewachsen, der nach dem Ungleichheitszeichen stehende zweite Theil um $\frac{k^2}{(k^2 + 4gcu)^2}$ also weniger als jener gewachsen. So läßt sich, ganz so wie in §. 65., beweisen, daß der Ausdruck $\frac{2g\,c^2 nu}{k^2 + 2gcnu}$ immer zwischen den angegebnen Grenzen liegt, und daß diese Grenzen durch Vergrößerung des n oder durch Zerlegung der Zeit t in immer mehrere Theilchen so nahe man will an einander können gerückt werden.

§. 187. Die Formel $v = \frac{k^2 . c}{k^2 + 2gct}$, zeigt daß die am Ende der Zeit = t noch übrige Geschwindigkeit nie = 0 wird, selbst wenn t sehr groß ist, daß also die Bewegung nach diesem Gesetze des Widerstandes zwar immer verzögert wird, doch aber nie ganz aufhört.

Man kann hieraus schließen, daß die Reibung, die auch als eine verzögernde Kraft wirkt, nicht dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sein kann, denn sonst würde die fortgerollte Kugel ihre Bewegung nie ganz verlieren.

§. 188. Aufgabe. Wenn ein Körper, der mit der Geschwindigkeit = c sich zu bewegen anfängt, durch keine andre Kraft als durch einen, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand, eine Aenderung seiner Bewegung erleidet; den Weg zu bestimmen, der nach Verlauf einer bestimmten Zeit = t durchlaufen ist.

Auflösung. Da am Ende jeder Zeit = t, die Geschwindigkeit $= \frac{k^2 . c}{k^2 + 2gct}$ ist: so kann man die Scale der Geschwindigkeiten in Beziehung auf die Zeit zeichnen, und der Flächenraum derselben giebt den Ausdruck für den durchlaufenen Weg (§. 56.).

§. 189. Anmerkung. Die höhere Analysis zeigt, daß dieser Flächenraum dem Logarithmen von $\frac{k^2 + 2gct}{k^2}$ proportional ist.

§. 190. Beispiel. Wird eine Kugel mit der Geschwindigkeit = c = 2000 Fuß in 1 Secunde horizontal abgeschossen: so kann man für einen großen Theil ihres Weges die Einwirkung der Schwere als unbedeutend bei Seite setzen, und nach den eben gefundenen Regeln die Bewegung bestimmen. Diese Kugel hat also, wenn ich k = 400 Fuß setze, was für eine mäßig große Bleikugel bei der Bewegung in der Luft Statt findet,

nach 1 Sec. = t, noch die Geschw. v = 1455 Fuß,
nach 2 Sec. noch v = 1143 Fuß,
nach 3 Sec. noch v = 941 Fuß,
nach 4 Sec. noch v = 800 Fuß.

Der Weg aber, den sie zurückgelegt hat, ist, wenn man mit Hülfe der Logarithmen rechnet,

nach 1 Sec. . . . der Weg s = 1698 Fuß,
nach 2 Sec. s = 2985 Fuß,
nach 3 Sec. s = 4020 Fuß,
nach 4 Sec. s = 4886 Fuß,

wenn man die durch die Schwere hervorgebrachte Ablenkung bei Seite setzt.

§. 191. Bemerkung. Wenn auf der Erde ein Körper vertical herunter fällt, und im Fallen durch ein Widerstand leistendes Fluidum dringen muß: so fallen die Richtungen der Schwere und des Widerstandes mit der Richtung der Bewegung selbst zusammen, jene nämlich treibt den Körper als beschleunigende Kraft fort, diese hingegen wirkt als verzögernde Kraft seiner Bewegung grade entgegen. Ist also die beschleunigende Kraft der Schwere $= 1$, die Kraft des Widerstandes $= \frac{v^2}{k^2}$ bei der Geschwindigkeit $= v$: so ist die gesammte beschleunigende Kraft, welche den Körper niederwärts treibt,

$$= 1 - \frac{v^2}{k^2}.$$

§. 192. Aufgabe. Ein der Schwere unterworfener, sich vertical niederwärts bewegender Körper leidet einen dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand; zu bestimmen, wie groß, nach einer bestimmten Zeit $= t$, die Geschwindigkeit $= v$ sein wird, wenn die anfängliche Geschwindigkeit $= c$ gegeben ist.

Auflösung. Wenn man keine höhern Rechnungen zu brauchen gelernt hat, so mögte es hiezu kaum ein anderes Mittel geben, als daß man die Zeit $= t$ in kleine Zeittheile $= \frac{1}{n} t$, z. B. halbe oder Viertheil Secunden zerlegt, und nun bedenkt, daß die Aenderung der Geschwindigkeit beinahe durch $2g \,.\, G \,.\, \frac{1}{n} t$ ausgedrückt wird, wenn G die am Anfange der Zeit $= \frac{1}{n} t$ wirkende beschleunigende Kraft ist.

Da im ersten Anfange der Bewegung die Geschwindigkeit $= c$ war, so ist die damit zusammen gehörige beschleunigende Kraft $G = 1 - \frac{c^2}{k^2}$, also die Aenderung der Geschwindigkeit $= 2g \cdot \frac{1}{n} t \left(1 - \frac{c^2}{k^2}\right)$ für das erste Zeittheilchen. Im Anfange des zweiten Zeittheilchens ist also die Geschwindigkeit nahe genug $= c + 2g \cdot \frac{1}{n} t \left(1 - \frac{c^2}{k^2}\right) = v'$, und die Aenderung der Geschwindigkeit in diesem Zeittheilchen $= 2g \cdot \frac{1}{n} t \left(1 - \frac{v'^2}{k^2}\right)$; und so kann man, wiewohl mühsam, die erlangte Geschwindigkeit allerdings berechnen.

§. 193. Aufgabe. Den Weg zu bestimmen, den der in der vorigen Aufgabe betrachtete Körper in der Zeit $= t$ durchläuft.

Auflösung. Heißt die anfängliche Geschwindigkeit $= c$, die am Ende der kleinen Zeit $= \frac{1}{n} t$ erlangte gesammte Geschwindigkeit $= v'$; die am Ende der Zeit $= \frac{2}{n} t$ erlangte gesammte Geschwindigkeit $= v''$ u. s. w.: so ist der durchlaufene Weg $= s$ beinahe $= \frac{1}{n} \cdot ct + \frac{1}{n} v't + \frac{1}{n} v''t + + \text{etc.}$ Man kann also auf diese Weise durch Summirung der in den Zeiträumen $= \frac{1}{n} t$ durchlaufenen Wege den ganzen Weg $= s$ ziemlich genau finden.

§. 194. Bemerkung. Wenn ein schwerer Körper vertical aufwärts geworfen wird: so ist sowohl die Kraft der Schwere als die Kraft des Widerstandes, der Richtung der Bewegung grade entgegen gesetzt, und beide vereinigt verzögern also die Bewegung. Wir haben also hier die Summe beider Kräfte $= 1 + \frac{v^2}{k^2}$, für den Augenblick, da die Geschwindigkeit $= v$ ist, als diejenige Kraft anzusehen, welche die Bewegung vermindert.

§. 195. Aufgabe. Für einen vertical aufwärts mit gegebner Geschwindigkeit geworfenen Körper zu bestimmen, wie groß noch seine Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit $= t$ ist, und welchen Weg er dann zurückgelegt hat.

Auflösung. Wenn der Körper mit der Geschwindigkeit $= c$ aufwärts geworfen wird: so ist die seine Bewegung verzögernde Kraft im ersten Augenblicke $= 1 + \frac{c^2}{k^2}$, wenn k immer die Bedeutung wie §. 183. 184. behält. Nimmt man diese Kraft als während der Zeit $= \frac{1}{n} t$ unveränderlich bleibend an: so ist nach Verlauf der Zeit $= \frac{1}{n} t$, die Geschwindigkeit $= c - 2g \cdot \frac{1}{n} t \left(1 - \frac{c^2}{k^2}\right)$, die ich $= v'$ setze. Im zweiten Zeittheilchen ist also die verzögernde Kraft sehr nahe $= 1 + \frac{v'^2}{k^2}$, und die Geschwindigkeit am Ende des zweiten Zeittheilchens $= v' - 2g \cdot \frac{1}{n} t \left(1 - \frac{v'^2}{k^2}\right) = v''$, und so könnte man weiter rechnen.

Den Weg, den der Körper in den zwei ersten Zeittheilchen durchläuft, erhielte man

kleiner als $c \cdot \frac{1}{n} t + v' \cdot \frac{1}{n} t$;

und größer als $v' \cdot \frac{1}{n} t + v'' \cdot \frac{1}{n} t$.

Nach der hiedurch angedeuteten Regel könnte man auch für die folgenden Zeitheile rechnen.

§. 196. Anmerkung. Die drei Aufgaben §. 192. 193. 195. zeigen, wie man allenfalls mit den geringen, hier vorausgesetzten Kenntnissen die hier vorkommenden Fragen beantworten kann. Aber eine kleine Ueberlegung wird wohl jedem verrathen, erstlich daß man nur mit einem überaus großen Aufwande von Arbeit endlich zum Zwecke gelangt, und zweitens, daß diese Methode uns nicht das eigentliche, allgemeine Gesetz zeigt, wie die erlangte Geschwindigkeit und der durchlaufene Weg von der Zeit abhängen. Es wäre zwar nicht grade unmöglich, die allgemeinen Ausdrücke auch ohne höhere Analysis zu finden, zu welchen die Summen jener, in den Auflösungen angedeuteten Reihen, leiten; aber ich müßte mich zu tief in Vorbereitungen einlassen, die Lehre von Logarithmen und Exponentialgrößen erst abhandeln und dergleichen, um die Ausdrücke zu begründen, auf welche wir dann würden geleitet werden. Was ich hier mitgetheilt habe, zeigt dem, der den bessern Weg verschmähet, wie er ohngefehr zum Ziele gelangen kann; es stellt zugleich genau den Gang dar, den man bei der Untersuchung, wenn man sie Schritt für Schritt führt, befolgen muß; aber die Differential- und Integral-Rechnung führt uns mit einem Schritte zur vollständigen Kenntniß des in unsern Reihen sehr dunkel ausgedrückten Gesetzes, und jeder Verständige wird sich daher gern entschließen, diesen bessern Weg zu betreten, der ihn auf einen Standpunct führt, wo er auf einmal die Regeln, nach welchen die gesuchten Größen von einander abhängen, ganz übersieht.

Zusätze für geübtere Leser.

I. Bewegt sich der Körper ohne Einwirkung einer andern Kraft in dem widerstehenden Medio: so wirkt bloß der Widerstand, welchen wir dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional gesetzt haben, als verzögernde Kraft. Wenn also diese $= \frac{v^2}{k^2}$ ist, indem k den Exponenten des Widerstandes bedeutet, und v die am Ende der Zeit $= t$ erlangte Geschwindigkeit, so haben wir $dv = - 2g \frac{v^2}{k^2} dt$; oder $- \frac{dv}{v^2} = \frac{2gdt}{k^2}$, also $\frac{1}{v} = \text{Const} + \frac{2gt}{k^2}$. Die beständige Größe wird hier bestimmt, wenn die Geschwindigkeit bekannt ist, mit welcher die Bewegung anfing. Sie sei $= c$ für $t = 0$, so ist

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c} + \frac{2gt}{k^2}, \text{ oder}$$

$$v = \frac{c\,k^2}{k^2 + 2gct},$$ als Werth der Geschwindigkeit, nachdem die Bewegung eine Zeit $= t$ gedauert hat.

II. Mit Hülfe dieser Gleichung wird leicht eine allgemeine Formel für den in der Zeit $= t$ durchlaufenen Weg gefunden. Es ist nämlich $ds = vdt$, also

$$ds = c\,k^2 \,.\, \frac{dt}{k^2 + 2gct}, \text{ oder da}$$

$$d\,.\,(k^2 + 2gct) = 2gcdt \text{ ist,}$$

$$s = \text{Const} + \frac{k^2}{2g} \log . \text{nat} . (k^2 + 2gct).$$

Soll $s = 0$ sein für $t = 0$, so wird

$$\text{Const} = -\frac{k^2}{2g} . \log . \text{nat} . k^2 \text{ und}$$

$$s = \frac{k^2}{2g} . \log . \text{nat} \left\{ 1 + \frac{2gct}{k^2} \right\}.$$

Nach dieser Formel ist in §. 190. s ausgerechnet.

III. Wirket auf den bewegten Körper zugleich die anziehende Kraft der Schwere: so kann nur bei verticaler Bewegung aufwärts oder niederwärts die Bewegung gradlinigt bleiben. Hier, wo wir die Kraft der Schwere als unveränderlich $= 1$ und die Kraft des Widerstandes als einzig vom Quadrate der Geschwindigkeit abhängig, den Exponenten des Widerstandes aber als unveränderlich ansehen, ist für vertical aufwärts geworfene Körper, die ihre Bewegung verzögernde Kraft $= 1 + \frac{v^2}{k^2}$, also, wenn v, g, t die bekannten Bedeutungen haben

$$dv = -2gdt . \left\{ 1 + \frac{v^2}{k^2} \right\},$$

$$\int \frac{dv}{1 + \frac{v^2}{k^2}} = \text{Const} - 2gt; \text{ also}$$

$$\text{Const} - 2gt = k . \text{Arc} . \text{tang} \frac{v}{k},$$ oder, wenn die anfängliche Geschwindigkeit $= c$ war,

$$2gt = k \left\{ \text{Arc.tang} \frac{c}{k} - \text{Arc.tang} \frac{v}{k} \right\},$$

das ist $\frac{2gt}{k} = \text{Arc.tang} \frac{k\,(c - v)}{k^2 + c\,v}$ (nach Trigon. §. 48.).

Der Körper hat also seine ganze Geschwindigkeit verlohren, oder hört auf zu steigen, wenn $v = 0$, das ist, wenn

$$t = \frac{k}{2g} \text{Arc} . \text{tang} \frac{c}{k} \text{ ist.}$$

Wollte man aus der Formel $\frac{2gt}{k} = \text{Arc.tang} \frac{k\,(c - v)}{k^2 + c\,v}$ den Werth von v finden, so ist auch

$$\frac{k\,(c - v)}{k^2 + c\,v} = \text{tang} \frac{2gt}{k},$$

und $v = \dfrac{kc - k^2 . \tang \frac{2gt}{k}}{k + c . \tang \frac{2gt}{k}}$.

IV. Um in dem eben betrachteten Falle den durchlaufenen Weg $= s$ zu finden, dient am besten die aus

$dv = - 2g \left\{ 1 + \frac{v^2}{k^2} \right\} dt$ hervorgehende Differentialgleichung

$$vdv = - 2g \left\{ 1 + \frac{v^2}{k^2} \right\} ds,$$

oder $\dfrac{2vdv}{k^2 + v^2} = - \dfrac{4g\,ds}{k^2}$,

welche $\log \text{nat} (k^2 + v^2) = \text{Const} - \dfrac{4gs}{k^2}$,

oder $\log \text{nat} \left\{ \dfrac{k^2 + c^2}{k^2 + v^2} \right\} = \dfrac{4gs}{k^2}$, giebt, wenn die anfängliche Geschwindigkeit $= c$ war. Die größte Höhe, welche der geworfene Körper erreicht, wird hier gefunden, wenn man $v = 0$ setzt, sie ist also $s = \dfrac{k^2}{4g} \log \left\{ 1 + \dfrac{c^2}{k^2} \right\}$.

Diese Formeln können nun auch dienen, um t durch s oder umgekehrt s durch t auszudrücken, wenn man für v seinen Werth in die zwischen t und v gefundene Gleichung setzt.

V. Wäre der Körper nach einer vertical niederwärts gehenden Richtung mit der anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ geworfen: so leidet seine, am Ende der Zeit $= t$ erlangte Geschwindigkeit $= v$, eine Aenderung, die $= dv = 2g \left\{ 1 + \frac{v^2}{k^2} \right\} dt$ ist, weil die Schwerkraft $= 1$ ihn beschleunigt, während der Widerstand $= \frac{v^2}{k^2}$ ihn verzögert.

Hier ist also $\dfrac{2gdt}{k} = \dfrac{k\,dv}{k^2 - v^2} = \left\{ \dfrac{\frac{1}{2}\,dv}{k - v} + \dfrac{\frac{1}{2}\,dv}{k + v} \right\}$

$$\text{und } \frac{2gt}{k} = \text{Const} + \log \text{nat} \left\{ \frac{k + v}{k - v} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Soll hier $t = 0$ sein, für $v = c$, so ist

$$\frac{2gt}{k} = \tfrac{1}{2} \log . \text{nat} . \left\{ \frac{(k + v)(k - c)}{(k - v)(k + c)} \right\},$$

oder wenn der Körper frei fallend, ohne anfängliche Geschwindigkeit seine Bewegung begann, $\frac{4gt}{k} = \log.\text{nat}.\left\{\frac{k+v}{k-v}\right\}$,

das ist $e^{\frac{4gt}{k}} = \frac{k+v}{k-v}$, wenn e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems ist,

also $v = \frac{k.\left(e^{\frac{4gt}{k}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{4gt}{k}} + 1\right)}$. Es kann also v nie größer als k werden, indem die Formeln selbst für die größesten Werthe von t noch einen Werth für v geben, der nicht ganz $= k$ ist. Der Grund hievon ist leicht zu übersehen, da für $v = k$ die Verzögerung durch den Widerstand ganz genau die Beschleunigung durch die Schwere aufhöbe.

Um s zu bestimmen, haben wir

$$vdv = 2g\,ds\left\{1 - \frac{v^2}{k^2}\right\};$$

oder $\frac{2vdv}{k^2 - v^2} = \frac{4g\,ds}{k^2}$;

$$\frac{4gs}{k^2} = \log\text{nat}\frac{k^2 - c^2}{k^2 - v^2},$$

wenn sogleich die beständige Größe so beigefügt wird, wie sie sein muß, wenn $v = c$ mit $s = 0$ zusammen hängt.

§. 197. Um doch wenigstens auch für die, welche höhere analytische Untersuchungen nicht durchführen können, die Resultate mitzutheilen, setze ich die Formeln, welche zur Rechnung die bequemsten sind, hieher.

Es ist nämlich für einen im widerstehenden Mittel frei fallenden Körper, dessen anfängliche Geschwindigkeit $= c$ war, $t = \frac{k}{4g}.\log.\text{nat}\left\{\frac{(k+v)(k-c)}{(k-v)(k+c)}\right\}$, wenn t die nach dem Anfange der Bewegung verflossene Zeit, v die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit ist. Der durchlaufene Weg aber wird durch

$s = \frac{k^2}{4g}.\log.\text{nat}\left\{\frac{k^2 - c^2}{k^2 - v^2}\right\}$ ausgedrückt.

Für den vertical aufwärts geworfenen Körper ist dagegen $v = \dfrac{ck - k^2 . \operatorname{tang} \frac{2gt}{k}}{k + c . \operatorname{tang} \frac{2gt}{k}}$,

wo $\frac{2gt}{k}$ einen Bogen ausdrückt, der in Theilen des Halbmessers gegeben ist. Zugleich ist

$$s = \frac{k^2}{4g} . \log . \operatorname{nat} \left\{ \frac{k^2 + c^2}{k^2 + v^2} \right\},$$

und $t = \dfrac{k}{2g} . \operatorname{Arc.tang} \dfrac{k(c - v)}{k^2 + cv}$.

§. 198. Beispiel. Setze ich $k = 400$ Fuß, wie es für eine ziemlich große Bleikugel in der Luft Statt findet: so ergiebt sich für eine mit der Geschwindigkeit $c = 2000$ Fuß abgeschossene Kugel, daß sie nur bis zu einer Höhe $s = \dfrac{160000}{60} \log . \operatorname{nat} \left(\dfrac{400^2 + 2000^2}{400^2} \right)$ $= 8688$ Fuß steigen wird, statt daß sie im leeren Raume eine Höhe von 66000 Fuß erreichen würde. Sie gebraucht zu diesem Steigen eine Zeit $= t$ $= \dfrac{400}{30} \operatorname{Arc.tang} \dfrac{2000}{400} = \dfrac{40}{3} \operatorname{Arc.tang} 5$. Da nun tang $= 5$ zu dem Bogen $= 78° 42'$ gehört, welcher $= 1{,}3735$ des Halbmessers ist, so wird $t = \dfrac{40}{3} . 1{,}3735$ $= 18{,}3$ Secunden. So lange also steigt sie nur, statt daß sie im leeren Raume 66 Secunden steigen würde.

Selbst bei 3000 Fuß anfänglicher Geschwindigkeit würde die ganze erreichte Höhe nur $= 10793$ Fuß, die verwandte Zeit $= 19{,}2$ Secunden sein, statt daß man im leeren Raume die erreichte Höhe $= 150000$ Fuß, die Zeit des Steigens $= 100$ Sec. fände.

Die von der Höhe $= 8688$ Fuß frei herabfallende Kugel kömmt mit einer Geschwindigkeit $= v = 392$ Fuß auf der Erde an, und hat zum Falle eine Zeit $= 30{,}6$ Secunden verwandt. Die von der Höhe $= 10793$ Fuß wieder herabfallende Kugel hat nach Vollendung ihres Laufes eine Geschwindigkeit von $v = 396,5$ Fuß erlangt, und 36 Sec. gebraucht, um die Erde zu erreichen. Die Geschwindigkeit könnte nie mehr als $= 400$ Fuß werden; denn bei dieser Geschwindigkeit wäre die Verzögerung wegen des Widerstandes der Luft genau der Beschleunigung durch die Schwere gleich und die Kugel würde nun mit unveränderlicher Geschwindigkeit fallen. Aber sie kann diese Geschwindigkeit nie ganz erreichen, weil die Beschleunigung je mehr und mehr abnimmt, je größer die Geschwindigkeit schon ist, oder je mehr sie sich schon dieser Grenze nähert.

Zwölfter Abschnitt.

Von der Bewegung geworfener schwerer Körper in der Luft.

§. 199. **Bemerkung.** Bei der Untersuchung über die Bewegung geworfener Körper in einem widerstehenden Medio muß man auf zwei Kräfte Rücksicht nehmen, die die Bewegung ändern. Ist nämlich der Körper nach M (Fig. 57.) gelangt, und würde er, vermöge der Geschwindigkeit, die er in M hat, in einer Secunde nach N kommen: so hält erstlich der Widerstand ihn auf, und indem er einen Theil seiner Geschwindigkeit verliert, erreicht er nur den Punct P in einer Secunde, zugleich aber zieht ihn zweitens die Schwere in einer Secunde durch den Raum PQ herab; und so bestimmt sich der Weg MQ, den er wirklich durchläuft.

Die allgemeine Untersuchung über diese Bahn, welche der geworfene Körper durchläuft, wird dadurch erschwert, daß die Richtung und Größe der Kraft des Widerstandes sich unaufhörlich ändert, daß man ihre Richtung in jedem

Augenblicke erst kennen lernt, indem man die Bahn selbst bestimmt, und daß man dennoch den Widerstand schon vorher in Rechnung bringen sollte, weil von ihm offenbar die Bestimmung des Weges, den der Körper durchlaufen wird, wesentlich abhängt. Diese Schwierigkeit läßt sich ohne Hülfe der höheren Analysis gar nicht so besiegen, daß man das Gesetz allgemein übersehen könnte, nach welchem die Bahn des geworfenen Körpers könnte gezeichnet werden. Ich muß mich daher hier begnügen, nur einige Regeln zu geben, wie man diese Bahn, indem man sie als aus graden Stücken zusammen gesetzt ansieht, ohngefehr zeichnen kann.

§. 200. Aufgabe. Den Weg, welchen der geworfene Körper durchläuft, wenigstens beinahe genau zu bestimmen.

Auflösung. Ist (Fig. 58.) AB die Richtung, nach welcher von A aus der Körper mit bekannter Geschwindigkeit geworfen wird: so läßt sich nach §. 185. die Geschwindigkeit bestimmen, welche der Körper am Ende einer gewissen Zeit, z. B. von einer Secunde noch übrig haben würde, wenn er sich ohne Einwirkung der Schwere gradlinigt bewegte, und daraus läßt sich (§. 188. 189.) der in 1 Sec. unter eben der Voraussetzung zurückgelegte Weg bestimmen. Trägt man diesen = AC auf der Richtungslinie AB auf, zieht CD vertical und gleich dem Fallraume in 1 Secunde: so ist AD ziemlich nahe der wahre Weg des Körpers in der ersten Secunde.

Jetzt muß man aus der Geschwindigkeit, welche der gradlinigt bewegte Körper in C noch haben würde, und aus der vermöge der Schwere beim Falle in der ersten Secunde erlangten Geschwindigkeit die Richtung und anfängliche Geschwindigkeit für die nächste Secunde suchen. Dies geschieht, indem man das Parallelogramm zeichnet, in welchem CF die am Ende der ersten Secunde noch übrige Geschwindigkeit, CG = 2CD die durch den Fall am Ende der ersten Secunde erlangte Geschwindigkeit darstellt, und nun CH als wahre anfängliche Geschwindigkeit für die zweite Secunde berechnet. Mit der Richtung CH parallel zieht man DI, berechnet aber nun, wie weit der durch den Widerstand verzögerte Körper auf DI in 1 Sec. gelangen würde, wenn die Schwere nicht wirkte; stellt DK diesen Weg vor: so fügt man an K die Verticale KL = CD gleich dem Fallraume in 1 Secunde und findet so den Punct L, den der Körper in der zweiten Secunde erreicht.

So fährt man fort für die folgenden Secunden, indem man zuerst die Geschwindigkeit berechnet, die dem Körper bei gradlinigter Bewegung am Ende der vorigen Secunde noch übrig wäre; diese unter dem Winkel, den die vorige Richtungslinie mit der Verticale macht, mit der in 1 Sec. durch die Schwerkraft erlangten Geschwindigkeit zu einem Parallelogramm verbindet und so die wahre Geschwindigkeit sucht, die als Anfangsgeschwindigkeit für diese Secunde gilt. Mit der Richtung dieser Anfangsgeschwindigkeit parallel zieht man eine durch den in der vorigen Secunde erreichten Endpunct gehende Linie, und trägt auf ihr den Weg auf, den der Körper wirklich durchlaufen würde, wenn die Schwere nicht auf ihn wirkte; dann aber zieht man durch den so bestimmten Endpunct eine Verticallinie, und, indem man auf ihr den Fallraum in 1 Sec. herabwärts aufträgt, erhält man den Punct, welchen der Körper am Ende dieser Secunde wirklich erreicht.

§. 201. Beispiel. Die Anfangsgeschwindigkeit sei = 3000 Fuß, der Neigungswinkel der anfänglichen Richtung gegen den Horizont = 20 Grade, der Exponent des Widerstandes = 400 Fuß; dann ergiebt sich folgendes, wenn c allemal die Geschwindigkeit im Anfange jeder Secunde bedeutet, v die Geschwindigkeit, die bei gradlinigter Bewegung ohne Einwirkung der Schwere am Ende derselben Secunde noch übrig bliebe, s der in dieser Secunde ohne Einwirkung der Schwere durchlaufene Weg, φ der Neigungswinkel der Bahn gegen den Horizont, so wie er durch die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit bestimmt wird, x die am Ende der Secunde erlangte gesammte horizontale Entfernung vom Anfangspuncte, y die gesammte erreichte Höhe am Ende der bestimmten Secunde. g ist hier = 15 Fuß angenommen.

	c	v	s	φ	x	y
1. Sec.	3000	192,0	2380,2	20°. 0′. 0″	2236,5	799,0.
2. —	1910	1406,3	1632,6	19. 9. 15	3778,8	1319,7.
3. —	1396,7	1104,3	1240,5	17. 59. 29	4958,6	1687,9.
4. —	1095,2	908,6	996,1	16. 29. 55	5913,7	1955,8.
5. —	900,5	770,4	832,1	14. 40. 5	6718,7	2151,5.
6. —	763,4	667,8	713,5	12. 29. 22	7415,3	2290,8.
7. —	661,9	588,8	623,9	9. 57. 11	8029,8	2383,6.
8. —	584,4	526,7	554,6	7. 3. 17	8580,2	2436,7.
9. —	523,8	477,0	499,7	3. 47. 49	9078,8	2454,8.
10. —	476,0	437,0	456,0	0. 11. 29	9534,8	2441,3.
11. —	437,9	404,7	420,8	÷ 3. 44. 10	9954,7	2398,9.
12. —	407,7	378,7	392,9	÷ 7. 56. 49	10343,8	2329,6.
13. —	384,0	358,2	370,8	÷ 12. 23. 5	10706,0	2235,1.
14. —	365,8	342,3	353,8	÷ 16. 58. 45	11044,4	2116,8.
15. —	352,2	330,4	341,0	21. 39. 6	11361,3	1976,0.
16. —	342,6	321,9	332,0	26. 19. 12	1165[illegible],9	1813,8.
17. —	336,3	316,3	326,3	30. 54. 22	11938,9	1631,2.
18. —	332,6	313,1	322,6	35. 20. 42	12202,0	1429,6.
19. —	331,3	311,9	321,4	39. 35. 26	12449,7	1209,8.
20. —	331,8	312,4	321,9	43. 35. 10	12682,9	972,9.
21. —	332,3	312,8	322,4	47. 20. 10	12901,4	720,8.
22. —	335,5	315,6	325,3	50. 48. 37	13107,0	453,7.
23. —	339,4	319,3	329,0	54. 0. 49	13300,3	172,5.
24. —	343,7	322,9	333,0	56. 57. 12	13481,9	÷ 106,6.

§. 202. **Beispiel.** Die Anfangsgeschwindigkeit sei = 3000 Fuß, der Neigungswinkel = 20°, der Exponent des Widerstandes = 250 Fuß. Rechne ich hier auf halbe Secunden, so kann ich nahe genug den Fallraum in der ersten halben Secunde = 3,75 und die erlangte Geschwindigkeit = 15 behalten.

	c	v	s	φ	x	y
$\frac{1}{2}$ Sec.	3000	1744 2	1129.8	20°.0′.0″	1061,7	382,7.
1 Sec.	1739,2	1227 0	726 7	19.32.8	1746,5	622,0.
$\frac{3}{2}$ —	1222,1	945 0	536,0	18.52.11	2253,7	791,7.
2 —	940,3	766,9	423,9	18.0.17	2656,9	919,0.
$\frac{5}{2}$ —	762,5	644.6	350,1	16,55.58	2991,8	1017,2.
3 —	640,4	555,1	297,9	15.38.56	3278,7	1093,8.
$\frac{7}{2}$ —	551,2	486,8	258,8	14.8.42	3529,7	1153,3.
4 —	481,3	431,5	227 7	13.24.48	3751,2	1202,4.
$\frac{9}{2}$ —	428,0	388,1	203,7	11.27.35	3950,8	1239,1.
5 —	385,4	352,8	184.3	9.16.26	4132,7	1265,1.
$\frac{11}{2}$ —	350,7	323,5	168,4	6.51.19	4300,0	1281,4.
6 —	322,1	299.0	155.2	4.12.19	4454,8	1289,0.
$\frac{13}{2}$ —	298,3	278,4	144 0	1.19.52	4598,8	1288,6.
7 —	278,4	261,0	134,6	÷ 1.45.20	4733,4	1280,7.
$\frac{15}{2}$ —	261.9	246,4	127 [illegible]	÷ 5.2.15	4860,0	1265,8.
8 —	248,2	234,2	120,6	÷ 8.29.18	4979,3	1244,3.
$\frac{17}{2}$ —	236,8	224,1	115,2	12.4.49	5091,9	1216,4.
9 —	227,7	215,9	110,9	15.46.25	5198,6	1182,5.
$\frac{19}{2}$ —	220,5	209,4	107,4	19.31.38	5299,8	1142,9.
10 —	215,0	204 5	105,0	23.17.51	5396,2	1097,6.
$\frac{21}{2}$ —	210.9	200,7	102,8	27.2.35	5487,8	1047,1.
11 —	207,9	198,5	101,6	30.43.39	5575,1	991,4.
$\frac{23}{2}$ —	206,6	196,8	100,9	34.18.21	5658,5	930,8.
12 —	205,6	195,9	100,3	37.45.39	5737,8	865,6.
$\frac{25}{2}$ —	205,4	195 7	100,1	41.4.17	5813,3	796,1.
13 —	205,9	196 2	100,5	44.13.9	5885,3	722,3.
$\frac{27}{2}$ —	207,0	197,2	101,1	47.11.46	5954,0	644,4.
14 —	208,4	198.6	101,8	50.0.0	6019,6	562,5.
$\frac{29}{2}$ —	210,3	200,1	102,6	52.37.41	6081,9	477,2.
15 —	212,2	202 0	103,6	55.13.56	6141,0	388,4.
$\frac{31}{2}$ —	214,5	204,0	104,6	57.31.3	6197,2	296,4.
16 —	216 8	206,2	105,7	59.38.49	6250,6	201,4.
$\frac{33}{2}$ —	219,4	208,5	106,9	61.37.50	6301,4	103 6.
17 —	221,9	211,0	108,2	63.28.43	6349,7	6,8.

§. 203. Bemerkung. Die Betrachtungen, welche wir in der Hydraulik über den Widerstand flüssiger Körper anstellen werden, zeigen, daß k ohngefehr = 250 Fuß ist für eine eiserne Kugel von 1,6 paris. Zoll Durchmesser und für eine bleierne Kugel von 1,1 par. Zoll Durchmesser; daß hingegen k = 400 paris. Fuß wird, ohngefehr für eine eiserne Kugel von 4,3 par. Zoll Durchmesser, eine bleierne Kugel von 2,8 Zoll, eine Platinakugel von 1,6 paris. Zoll, wenn man die Platina 20 mal so schwer als Wasser annehmen darf. Eine Platinakugel von 1,6 Zoll Durchmesser erreicht also unter 20 Grad Neigung mit 3000 Fuß Geschwindigkeit abgeschossen, eine mehr als doppelt so große Entfernung als die eben so große eiserne.

§. 204. Bemerkung. Die in Fig. 58. b. dargestellte Curve zeigt nach den eben vorhin ausgerechneten Tabellen die ganze Wurflinie für den dort angenommenen Exponenten des Widerstandes. Diese Curven dienen zugleich, um in der ersten Weite und Höhe des Wurfes für 1920 Fuß anfängliche Geschwindigkeit zu finden, wenn man in der Höhe, wo die Kugel am Ende der ersten Secunde diese Geschwindigkeit erlangt hat, die Horizontallinie CD zieht, und ähnliche Bestimmungen ergeben sich für andre kleinere Geschwindigkeiten. Da die Neigung hier noch nicht erheblich von 20 Grad verschieden ist: so ergiebt sich für diese Neigung, wenn k = 400 Fuß ist

bei 3000 F. anfängl. Geschw. Wurfweite = 13400 Fuß,
größte Höhe = 2455 Fuß;

bei 1920 F. anfängl. Geschw. Wurfweite = 10560 Fuß,
größte Höhe = 1650 Fuß;

bei 900 Fuß anfängl. Geschw. und 16 Gr. Neigung des oberhalb EF liegenden Theiles der Curve
Wurfweite = 5490 Fuß,
größte Höhe = 500 Fuß.

Dagegen für k = 250 Fuß
bei 3000 Fuß anfängl. Geschw. und 20 Gr. Neigung
Wurfweite = 6350 Fuß, größte Höhe = 1290 Fuß;

bei 1230 Fuß anfängl. Geschw. und 19 Grad Neigung, wie der oberhalb GH liegende Theil angiebt

Wurfweite = 4220 F., größte Höhe = 670 Fuß;

bei 940 Fuß Geschw. und 18 Grad Neigung

Wurfweite = 3560 F., größte Höhe = 500 Fuß.

§. 205. Bemerkung. Diese Rechnungen zeigen nun wohl, daß man auf eine auch dem Anfänger verständliche Art und ohne höhere Rechnungen die Wurflinie bestimmen kann; aber alle Rechnungen, welche auf diese Art geführt werden, sind doch darin überaus mangelhaft, daß sie nie zur Kenntniß allgemeiner Eigenschaften der gesuchten Linie führen. Hätte man die Wurflinie im luftleeren Raume auf diese Weise bestimmt, so würde man kaum errathen haben, daß sie eine Parabel sei. Ueberdas ist man genöthigt, in unsrer eben gelehrten Art die Rechnung zu führen, durchaus die ganze Curve Punct für Punct durchzugehen, statt daß man durch eine ganz durchgeführte und völlig befriedigende analytische Auflösung in Stand gesetzt wird, sogleich den höchsten Punct, die ganze Wurfweite, den Winkel, unter welchem die Kugel wieder zur Erde gelangt u. s. w. zu bestimmen, ohne daß man die Rechnung für alle einzeln zwischen liegende Puncte zu machen braucht. Wie groß dieser Vorzug sei, den die Analysis gewährt, muß selbst dem einleuchten, der sie nicht versteht, und ihm hoffentlich zur Ermunterung dienen, um sich die großen Erleichterungsmittel der Rechnung, welche sie darbietet, eigen zu machen.

Zusätze für geübtere Leser.

I. Wenn (Fig. 57.) AM die Wurflinie vorstellt, und für einen Punct M, welchen der Körper am Ende der Zeit = t erreicht hat, AL = x. LM = y, der Bogen AM = s ist: so wird Mm = ds der in der Zeit = dt durchlaufene Weg sein, und des Körpers Geschwindigkeit in diesem Augenblicke ist $= \frac{ds}{dt}$, seine horizontale Geschwindigkeit $= \frac{dx}{dt}$, verticale Geschwindigkeit $= \frac{dy}{dt}$. Nach dem, was in den Zusätzen zum zehnten Abschnitt (Nr. XIII.) gelehrt worden, muß hier, wenn in M die horizontal wirkende beschleunigende Kraft $=$ W, die vertical wirkende $=$ w ist, $\frac{d^2x}{dt} = 2g \cdot W \cdot dt$, und $\frac{d^2y}{dt} = 2g\,w\,dt$ sein. Da nun die Kraft des Widerstandes $= \frac{\frac{ds^2}{dt^2}}{k^2}$ ist, nach der Richtung mM, so ist die nach der Richtnng der Abscissen wirkende beschleunigende Kraft $= - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds^2}{k^2\, dt^2}$, die nach verticaler Richtung beschleunigende Kraft ist $= - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds^2}{k^2\, dt^2} - 1$, weil außer der aus dem Widerstande entspringenden Verticalkraft auch noch die Schwere $= 1$ der Richtung der wachsenden y entgegen wirkt. Nenne ich also die Geschwindigkeit $= v = \frac{ds}{dt}$, so ist

$$d.\frac{dx}{dt} = - 2g\,dt.\frac{dx}{ds} \cdot \frac{v^2}{k^2};$$

$$d.\frac{dy}{dt} = - 2g\,dt.\frac{dy}{ds} \cdot \frac{v^2}{k^2} - 2g\,dt.$$

II. Es ist bekannt, daß $\frac{dx}{dt}$ die horizontale Geschwindigkeit in M bedeutet, also $d.\frac{dx}{dt}$ die Aenderung dieser Geschwindigkeit darstellt. Am gewöhnlichsten pflegt man diese Aenderung auf immer gleiche Zeitmomente zu beziehen, oder zu fragen, um wie viel der durchlaufene Weg im zweiten Zeittheilchen zunimmt. Wenn man dieses thut, so setzt man dt als beständig voraus und findet (wie in XIII. der Zusätze zum 10. Abschn.) $d.\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x^1}{dt}$. Aber man kann auch dx als beständig annehmen, das ist, fragen, wie wächst die Geschwindigkeit, wenn man in immer gleichen Schritten auf der Abscissenlinie fortgeht und darnach die Puncte der Curve, auf welche die Betrachtungen sich beziehen sollen, bestimmt. In diesem Falle ist $d.\frac{dx}{dt} = - \frac{dx \,.\, d^2t}{dt^2}$ und wenn ich $dy = p \cdot dx$ setze,

$$d.\frac{dy}{dt} = \frac{dp\,.\,dx}{dt} - \frac{p\,dx\,d^2t}{dt^2}.$$

Unsre Gleichungen (I) geben also

$$-\frac{dx\,.\,d^2t}{dt^2} = -2g\,dt\,.\frac{v^2\,.\,dx}{k^2\,.\,ds};$$

$$\text{und}\quad \frac{dp\,dx}{dt} - \frac{p\,dx\,.\,d^2t}{dt^2} = -2g\,dt\,.\frac{v^2\,p\,dx}{k^2\,ds} - 2g\,dt.$$

III. Aus der ersten folgt $d^2t = \frac{2g\,dt^3\,.\,v^2}{k^2\,ds}$; und die zweite $dp\,.dt\,.dx - p\,.\,dx\,d^2t = -2g\,.dt^3\,.\frac{v^2\,p\,dx}{k^2\,.ds} - 2g\,dt^3$ giebt, wenn ich für d^2t seinen Werth setze,

$$dx\,.\,dp\,.\,dt - \frac{2g\,.p\,.dt^3\,.v^2\,.dx}{k^2\,ds} = -\frac{2g\,p\,dt^3\,.\,v^2\,dx}{k^2\,ds} - 2g\,dt^3,$$

oder $dp\,.\,dx = -2g\,.\,dt^2$;

$$dt^2 = -\frac{dp\,.\,dx}{2g};$$

$$2dt\,.\,d^2t = -\frac{d^2p\,.\,dx}{2g};$$ also wenn man den hier gefundenen Werth von d^2t dem vorigen gleich setzt,

$$d^2t = -\frac{d^2p\,.\,dx}{4g\,.\,dt} = \frac{2g\,dt^3\,.\,v^2}{k^2\,ds}.$$

Dieser doppelte Werth von d^2t giebt, wenn ich statt $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$ schreibe, $d^2p\,.\,dx = -\frac{8g^2\,.\,dt^2}{k^2}\,.\,ds$,

oder $d^2p\,.\,dx = +\frac{4g\,.\,dp\,.\,dx\,.\,ds}{k^2}$,

weil $dp\,.\,dx = -2g\,dt^2$ ist,

also $d^2p = \frac{4g\,.\,dp\,.\,ds}{k^2}$.

IV. Die beiden Gleichungen $dp\,.\,dx = -2g\,dt^2$;

und $d^2p = \frac{4g\,.\,dp\,.\,ds}{k^2}$, bestimmen die ganze Bewegung des geworfenen Körpers. Die letztere giebt $\frac{d^2p}{dp} = \frac{4g\,.\,ds}{k^2}$, oder $\log\,.\frac{dp}{\text{Const}} = \frac{4g\,s}{k^2}$, wo noch die beständige Größe bestimmt werden muß.

Die erste Gleichung $dp \,.\, dx = -2g \,.\, dt^2$ giebt

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2g\, dt^2}{dx^2} = -\frac{2g}{u^2},$$

wenn $u = \frac{dx}{dt}$ die horizontale Geschwindigkeit bedeutet. Diese horizontale Geschwindigkeit ist für den Anfangspunct der Bahn gegeben, wenn die anfängliche Geschwindigkeit $= c$ und der Neigungswinkel $BAL = \alpha$ gegeben ist; sie ist dann $= c \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha$, und folglich im Anfangspuncte A ist, $dp = -\frac{2g \,.\, dx}{c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha}$. Soll nun in unserer zweiten Gleichung die Constans so genommen werden, daß s von A an gerechnet wird, so muß für $s = 0$ auch $\log \frac{dp}{\mathrm{Const}} = 0$ sein, also $\mathrm{Const} = -\frac{2g \,.\, dx}{c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha} =$ dem Werthe, welchen dp an der Stelle hat, wo $s = 0$ ist,

also $\log . \frac{-dp \,.\, c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha}{2g\, dx} = \frac{4g\, s}{k^2}$,

oder $\frac{dp}{dx} = -\frac{2g}{c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha} \,.\, e^{\frac{4gs}{k^2}}$.

Dieses ist eine Gleichung für die gesuchte Curve, die aber freilich noch in sehr unbequemen Ausdrücken gegeben ist. Hier ist nämlich $p = \frac{dy}{dx} = \tang \varphi$, wenn φ den Neigungswinkel der Curve gegen den Horizont in irgend einem Puncte M bedeutet; also $\frac{d \,.\, \tang \varphi}{dx}$ ist durch s ausgedrückt. Uebrigens läßt sich, da die horizontale Geschwindigkeit $= u$ durch $u^2 = -2g \,.\, \frac{dx}{dp}$ ausgedrückt war, $u^2 = c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha \,.\, e^{\frac{-4gs}{k^2}}$, durch s bestimmen.

V. Wir können aus der Gleichung

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2g}{c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha} \,.\, e^{\frac{4gs}{k^2}},$$

s durch p bestimmen; denn wenn sie mit

$$ds = dx \sqrt{(1 + p^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

multiplicirt wird, so ist

$dp \,.\, \sqrt{(1 + p^2)} = -\frac{2g\, ds}{c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha} \,.\, e^{\frac{4gs}{k^2}}$; also (Pasquich. §. 38.)

$$\frac{-k^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha} \cdot e^{\frac{4gs}{k^2}} = \text{Const} + p\sqrt{(1+p^2)} + \log\left(p+\sqrt{(1+p^2)}\right);$$

oder da $s = 0$ sein soll für $p = \tang \alpha$,

$$e^{\frac{4gs}{k^2}} = 1 + \frac{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}{k^2} \left\{ -p\sqrt{(1+p^2)} + \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha} + \log.\frac{\tang\alpha + \operatorname{Sec}\alpha}{p+\sqrt{(1+p^2)}} \right\},$$

oder da $\tang\alpha + \operatorname{Sec}\alpha = \frac{1+\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha} = \tang(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)$ ist, wie aus Pasquich. 1. Band §. 156. 4. Zus. XX. erhellt,

$$e^{\frac{4gs}{k^2}} = 1 + \frac{c^2}{k^2} \operatorname{Cos}^2\alpha \left\{ \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha} - p\sqrt{(1+p^2)} + \log\left(\frac{\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)}{p+\sqrt{(1+p^2)}}\right) \right\}.$$

VI. Hier läßt sich also bestimmen, welchen Bogen die Kugel durchlaufen hat, wenn p einen bestimmten Werth erreicht oder der Neigungswinkel $= \varphi$ eine bestimmte Größe erlangt hat.

Es sei $\varphi = 0$, also auch $\tang\varphi = p = 0$, so ist

$$e^{\frac{4gs}{k^2}} = 1 + \frac{c^2}{k^2} \operatorname{Cos}^2\alpha \left\{ \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha} + \log.\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) \right\}.$$

Diese Formel würde uns in dem in §. 201. berechneten Falle den bis an $p = 0$ reichenden Bogen $= 9494$ geben, statt daß die Summirung der dortigen s bis zur 9. Secunde 9473 giebt. Im zweiten Beispiele §. 202. würde die Länge des Bogens bis zu der Stelle, wo die Curve horizontal wird $= 4750$ sein, statt daß sie dort $= 4734$ ist. Auf ähnliche Weise ließe sich die Länge der Bogen bis zu irgend einem von p erreichten Werthe finden.

VII. Wir haben früher gesehen (82. 83. 84.), daß ein mit der Geschwindigkeit $= c$ unter dem Winkel $= \alpha$ geworfener Körper im leeren Raume eine Parabel durchläuft, deren Parameter $= \frac{c^2 \operatorname{Cos}^2\alpha}{g}$ ist. Rechnet man Abscissen $= x'$ und Ordinaten $= y'$ von dem Puncte an, wo die Bewegung anfing, so war

(§. 72.) $y' = x'.\tang\alpha - \frac{g.x^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2\alpha}$,

also $\frac{dy'}{dx'} = \tang\alpha - \frac{2g.x'}{c^2 \operatorname{Cos}^2\alpha}$, welches ich $= p'$ setze, und das Differential des Bogens $= ds' = dx' \sqrt{(1+p'^2)}$,

oder da $dp' = -\frac{2g\,dx'}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}$ ist

$$ds' = -\frac{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}{2g} dp' . \sqrt{(1+p'^2)},$$

das ist $s' = \frac{-c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}{4g} \left\{ p' \sqrt{(1+p'^2)} + \log . (p' + \sqrt{(1+p'^2)}) \right\} + \text{Const},$

oder $s' = \frac{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}{4g} \left\{ \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} - p' \sqrt{(1+p'^2)} + \log \frac{\operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\alpha)}{p' + \sqrt{(1+p'^2)}} \right\},$

wenn s' von da an gerechnet wird, wo $p' = \operatorname{tang} \alpha$ ist.

Bringen wir diesen parabolischen Bogen in die Gleichung (in V), so ist

$$e^{\frac{4gs}{k^2}} = 1 + \frac{s' . 4g}{k^2},$$

oder $\frac{4s . g}{k^2} = \log . \text{nat} \left(1 + \frac{4g . s'}{k^2}\right)$.

Das heißt, wenn man für dieselbe Richtung und Geschwindigkeit des anfänglichen Wurfes (Fig. 59.) die Wurflinie AMO für den leeren Raum und die Wurflinie ANP für das widerstehende Medium zeichnet: so ist allemal für Bogen $= s$ und $= s'$, die von A an bis zu parallelen Tangenten MQ, NR, oder OS, PT gerechnet werden, $AN = \frac{k^2}{4g} \log . \text{nat} \left(1 + AM . \frac{4g}{k^2}\right)$

$$AP = \frac{k^2}{4g} \log . \text{nat} \left(1 + AO . \frac{4g}{k^2}\right)$$

und so für alle Puncte, in welchen die Tangenten beider Curven parallel werden.

VIII. Außer dieser merkwürdigen, allen ballistischen Curven gemeinen Eigenschaft, läßt sich auch die noch bestimmen, daß sie mit ihren beiden Aesten sich an gradlinigte Asymptoten anschließen.

Nimmt man nämlich auf beiden Curven (Fig. 59.) Bogen $= -s$ und $= -s'$ von A an rückwärts: so muß auch hier für Puncte, wo die Tangenten von U und V parallel werden,

$$AV = \frac{k^2}{4g} \log . \text{nat} \left(1 + AU . \frac{4g}{k^2}\right),$$

also AV = — ∞, wenn AU = — $\frac{k^2}{4g}$ ist. Nimmt man also den auf der Parabel von A an rückwärts gemessenen Bogen AU gleich der Fallhöhe, die dem Exponenten des Widerstandes zugehört, $= \frac{k^2}{4g}$, so ist die dortige Tangente WX der Parabel, parallel mit der einen Asymptote YZ unserer Curve. Die andre Asymptote wird ohne Zweifel vertical; denn bei immer weiterem Fallen wird die Richtung des Körpers, der sich in dem herabgehenden Aste der Curve fortbewegt, sich immer mehr der verticalen Richtung nähern, ohne sie doch je zu erreichen. Die Formel für $e^{\frac{4gs}{k^2}}$ giebt auch dann erst S = ∞, wenn p unendlich, also die Neigung = 90° wird.

In Hinsicht auf diese beiden Asymptoten hat unsre Curve einige Uebereinstimmung mit einer Hyperbel, deren eine Asymptote vertical, die andre unter einem Winkel, der größer als α, gegen den Horizont geneigt ist.

IX. Unsre Betrachtung der Wurflinie in einem widerstehenden Medio hat uns also zur Kenntniß mehrerer Eigenschaften dieser Linie geführt; zu einer bequemen Zeichnungsmethode hat sie uns freilich noch nicht geführt; aber wir würden doch schon mit mehr Leichtigkeit als in §. 200. die einzelnen Stücke der Curve berechnen können. Methoden, um die zu einander gehörigen Coordinaten zu bestimmen, lassen sich, wenn man keine vollkommene Schärfe verlangt, auch angeben. Heißt nämlich die Neigung der Curve in irgend einem Puncte = φ und in einem andern Puncte, der um den Bogen = Δs davon entfernt liegt, = φ', so ist ja beinahe, die Aenderung der Absciße $= \Delta x = \Delta s \,.\, \mathrm{Cos}\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right)$ die Aenderung der Ordinate $= \Delta y = \Delta s \,.\, \mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right)$.

Diese Bestimmung, die man leicht für Werthe von φ, die allemal um 5 Grade verschieden sind, erhalten kann, giebt genau genug die ganze Curve.

X. Wollte man die Wurflinie im widerstehenden Medio ganz so bestimmen, wie sie in der widerstehenden Luft wirklich ist, so hätte man noch auf zwei wesentliche Umstände Rücksicht zu nehmen, erstlich auf die in der Höhe so merklich abnehmende Dichtigkeit der Luft, zweitens auf die starke Vergrößerung des Widerstandes, welche bei sehr schnellen Bewegungen Statt zu finden scheint. Der letztere Umstand ist durch die bisher bekannten Versuche noch nicht so ins Licht gesetzt, daß man eine auf Beobachtungen gestützte, in allen Fällen geltende Regel für den Widerstand angeben könnte; der erstere ließe sich berücksichtigen und es wäre sogar nicht unmöglich, die in der Höhe abnehmende Dichtigkeit so in Rechnung zu bringen, daß dadurch die Auflösung der Formeln erleichtert würde. Hier scheint mir indeß nicht der Ort, um länger hiebei zu verweilen.

Brauchbare Betrachtungen über diesen Gegenstand enthält Legendre's Abhandlung Dissertation sur la question de Balistique, Memoire, qui a remporté le prix de 1782.

Dreizehnter Abschnitt.

Vom centralen Stoße der Körper an einander.

§. 206. Erklärung. Wenn zwei Körper sich so bewegen, daß der eine seine Bewegung nicht fortsetzen kann, ohne den andern aus seiner Stelle zu verdrängen, so stoßen sie an einander. Bewegen sich die Körper ohne Umdrehung so fort, daß alle ihre Puncte parallel fortgehn: so entsteht ein centraler Stoß dann, wenn eine grade Linie, durch den gemeinschaftlichen Berührungspunct beim Anstoßen, senkrecht auf die gemeinschaftliche Berührungs-Ebne gezogen, durch beider Körper Schwerpunct geht. Der Stoß ist überdas ein grader Stoß, wenn die Richtung der Bewegung beider Schwerpuncte mit jener auf die Berührungs-Ebne senkrecht gezogenen Linie zusammen fällt.

§. 207. Wenn die Körper bei ihrem Anstoßen an einander sich in einer ebenen Fläche berühren: so ist der Stoß central, wenn die Linie durch beide Schwerpuncte auf dieser Ebne senkrecht steht, und grade, wenn die

Richtung, in welcher beide Schwerpuncte sich bewegen, mit ihr zusammen fällt.

§. 208. Bemerkung. Wenn zwei Körper sich nach derselben Richtung fortbewegen, und der nachfolgende ereilt den vorangehenden: so sucht jener mit seiner schnellern Bewegung diesen fortzutreiben, und folglich verliert jener einen Theil seiner Geschwindigkeit, indem er diesem eine vermehrte Geschwindigkeit ertheilt.

Wir wollen uns zwei Kugeln denken, deren Schwerpuncte in ihren Mittelpuncten liegen, und die sich in der durch ihre Mittelpuncte gehenden Richtungslinie nach einerlei Richtung fortbewegen. Wenn die nachfolgende hier die vorangehende ereilt, so fängt die gegenseitige Einwirkung des Stoßes an, sobald sie sich berühren, und dauert so lange fort, bis beide Körper mit gleicher Geschwindigkeit fortgehen.

Da es in der Natur keine vollkommen harte Körper giebt: so macht gewiß die nachfolgende Kugel, indem sie sich gegen die vorangehende drängt, in diese einen Eindruck, und es verfließt daher einige Zeit, so kurz sie auch sein mag, während der ganzen Einwirkung des Stoßes. In jedem Augenblicke, während dieser kurzen Zeit, übt die nachfolgende Kugel auf die vorangehende einen eben so großen Druck aus, als sie von dieser leidet, und dieser Druck ist die bewegende Kraft, welche die Bewegung der nachfolgenden Kugel hemmt, und die Bewegung der vorangehenden befördert. Wären nun die Massen beider Kugeln gleich, so würde in jedem Zeittheilchen die eine so viel an Geschwindigkeit verlieren, als die andre gewinnt. Wäre die nachfolgende halb so groß als die vorangehende, so würde jene in jedem Zeittheilchen doppelt so viel an Geschwindigkeit verlieren, als die andre an Geschwindigkeit gewinnt; denn die Aenderungen der Geschwindigkeiten, welche durch gleiche bewegende Kräfte hervorgebracht werden, sind den Massen umgekehrt proportional (§. 27.). Es erhellt also, daß während der ganzen Einwirkung der Verlust an Geschwindigkeit in diesem Falle für die eine Kugel doppelt so groß, als der Gewinn für die andre Kugel sein wird, da in jedem einzelnen Zeitmomente eine doppelt so große Aenderung der Geschwindigkeit bei der einen als bei der andern vorgeht.

Auf ähnliche Weise läßt sich bei jeder Verschiedenheit der Massen bestimmen, wie sich die Verminderung der Geschwindigkeit des einen Körpers zur Vermehrung der Geschwindigkeit des andern während jedes Zeittheilchens und folglich während der ganzen Zeit des Stoßes verhält.

§. 209. Erklärung. Körper heißen unelastisch, wenn sie so, wie wir es eben gesehen haben, eine kleine Zusammendrückung zulassen, ohne ein Bestreben, ihre vorige Gestalt wieder anzunehmen, zu zeigen. Elastische Körper dagegen erlauben zwar auch eine Zusammendrückung, streben aber, ihre vorige Gestalt wieder anzunehmen, und dieses, wofern sie vollkommen elastisch sind, mit eben der Gewalt, mit welcher sie zusammengepreßt wurden.

§. 210. Bemerkung. Wenn die beiden Kugeln, welche nach derselben Richtung mit ungleicher Geschwindigkeit fortgehen, unelastisch sind: so ist die Wirkung des Stoßes vorbei, wenn die nachfolgende sich mit eben der Geschwindigkeit, wie die vorangehende, fortbewegt; und der Eindruck, den beide Kugeln dann in einander gemacht, die Aenderung der Form, welche die eine in der andern bewirkt hat, bleibt in der Folge genau so, wie sie in dem Augenblicke war. So ist es nicht bei elastischen Kugeln, die wir hier als vollkommen elastisch ansehen wollen. Auch diese drücken auf einander und der Eindruck, den sie in einander machen, nimmt auch bei ihnen so lange zu, bis sie gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben; aber sie gehen dann nicht mit dieser Geschwindigkeit ohne weitere Aenderung derselben fort, sondern, indem beide ihre vorige Gestalt wieder anzunehmen streben, und zwar mit eben der Kraft, die zu ihrer Zusammendrückung verwandt wurde, so verliert die nachfolgende noch wieder eben so viel an Geschwindigkeit als sie schon verlohren hatte, und die vorangehende gewinnt eben so viel an Geschwindigkeit, als sie schon gewonnen hatte.

§. 211. Aufgabe. Zwei unelastische Körper gehen nach gleichen Richtungen so fort, daß der vorangehende, dessen Masse $= M$ ist, die Geschwindigkeit $= u$, der nachfolgende, dessen Masse $= N$ ist, die Geschwindigkeit $= v$ hat: man sucht die Geschwindigkeit, mit welcher beide nach dem Stoße, der ein centraler und grader Stoß war, fortgehen werden.

Auflösung. Diese Geschwindigkeit ist

$$= \frac{Mu + Nv}{M + N}.$$

Beweis. Obgleich der Druck, den die Kugeln während des Stoßes auf einander ausüben, in den verschiedenen Augenblicken, die während des Stoßes verfließen, verschieden sein mag: so ist doch in irgend einem bestimmten Zeitmomente der Druck, den die nachfolgende auf die vorangehende ausübt, gewiß genau dem Gegendrucke gleich, den jene von dieser leidet. Der Verlust an Geschwindigkeit ist also für die nachfolgende, zu dem Gewinn an Geschwindigkeit für die vorangehende in jedem Zeitmomente, wie $M : N$, und folglich während der ganzen Einwirkung des Stoßes, wie M zu N; denn in jedem Zeitmomente ist der Masse N Geschwindigkeits-Aenderung der Größe $\frac{P}{N}$, und der Masse M Geschwindigkeits-Aenderung der Größe $\frac{P}{M}$ proportional, wenn P den gegenseitigen Druck oder die bewegende Kraft darstellt.

Ist nun x die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beider Kugeln nach dem Stoße, so hat die nachfolgende eine Aenderung $= v - x$, ihrer Geschwindigkeit erlitten, statt daß für die vorangehende die Aenderung der Geschwindigkeit $= x - u$ ist.

Es ist also $v - x : x - u = M : N$,

oder $Nv - Nx = Mx - Mu$,

woraus $x = \frac{Nv + Mu}{N + M}$ folgt.

§. 212. Gehen die Kugeln einander entgegen, so ist die Geschwindigkeit u der einen Kugel eine negative Geschwindigkeit, die ich $= - u = w$ setze, also nach dem Stoße $x = \frac{Nv - Mw}{N + M}$; und hier ist x positiv, das heißt, beide Kugeln gehen nach dem Stoße nach der der Masse N eigenthümlichen Richtung fort, wenn $Nv > Mw$; dagegen ist x negativ, oder die Masse N geht nach vollendetem Stoße zurück, wenn $Nv < Mw$. Für $Nv = Mw$ würde nach dem Stoße alle Bewegung aufhören.

§. 213. Aufgabe. Zwei elastische Körper bewegen sich nach gleichen Richtungen fort und stoßen an einander, man sucht die Geschwindigkeit beider nach dem Stoße, wenn des vorangehenden Masse $= M$, des nachfolgenden Masse $= N$ war, und jener sich vor dem Stoße mit der Geschwindigkeit $= u$, dieser sich vor dem Stoße mit der Geschwindigkeit $= v$ bewegte.

Auflösung. Der vorangehende hat nach dem Stoße die Geschwindigkeit $y = u + \frac{2N(v - u)}{M + N}$; der nachfolgende die Geschwindigkeit $z = v - \frac{2M(v - u)}{M + N}$.

Beweis. Im Anfange des Stoßes verhält sich alles wie bei unelastischen Körpern, indem der nachfolgende Körper so lange gegen den vorangehenden drängt, bis die Geschwindigkeit beider gleich groß ist. In diesem Augenblicke ist die Geschw. wie vorhin $= \frac{Nv + Mu}{M + N}$, und der vorangehende hat an Geschwindigkeit gewonnen,

$$= x - u = \frac{Nv + Mu}{M + N} - u = \frac{N(v - u)}{M + N},$$

der nachfolgende hat an Geschwindigkeit verlohren

$$v - x = v - \frac{Nv + Mu}{M + N} = \frac{M(v - u)}{M + N}.$$

Da aber nun die Körper wegen ihrer Elasticität gegen einander zu drücken fortfahren, und, als vollkommen elastisch, mit eben der Gewalt ihre Gestalt wieder anzunehmen streben, welche nöthig war, diese Gestalt zu ändern: so findet der Kraft-Aufwand, welcher dem nachfolgenden die Geschwindigkeit $= v - x$ raubte, und welcher dem vorangehenden die Geschwindigkeit $x - u$ ertheilte, zum zweiten Male Statt; und der vorangehende erhält also die doppelte Vermehrung seiner Geschwindigkeit, und diese wird

$$= y = u + \frac{2N(v - u)}{M + N} = \frac{u(M - N) + 2Nv}{M + N},$$

statt daß der nachfolgende die doppelte Verminderung seiner Geschwindigkeit leidet, und daher nur die Geschw.

$$= z = v - \frac{2M(v - u)}{M + N} = \frac{v(N - M) + 2Mu}{M + N}$$

behält.

Anmerkung. Da es wohl keine vollkommen elastische Körper giebt, so müßte man bei Versuchen $y = u + \frac{\lambda N(v - u)}{M + N}$ setzen und für λ eine zwischen 1 und 2 fallende Zahl nehmen, die nach Verschiedenheit der angewandten Körper verschieden ausfallen würde, desto weniger von 1 verschieden, je geringer die Elasticität ist.

§. 214. Begegnen die Körper einander, so ist u negativ, und dann ist also des Körpers M Geschwindigkeit nach dem Stoße $= y = \frac{-u(M - N) + 2Nv}{M + N}$, des Körpers N Geschwindigkeit nach dem Stoße

$$= z = \frac{v(N - M) - 2Mu}{M + N}.$$

§. 215. Wenn die Körper vor dem Stoße einander folgten, so kann nach dem Stoße der vorhin nachfolgende, N, eine Bewegung nach entgegengesetzter Richtung erhalten haben. Dieses ist der Fall, wenn z negativ oder $v < \frac{2M(v-u)}{M+N}$ ist; es kann sich also, da allemal $v > u$, nur ereignen, wenn $M > N$ ist, oder die nachfolgende Masse die kleinere ist.

Vor dem Stoße war die relative Geschwindigkeit der einander folgenden Körper $= v - u$, oder mit dieser Geschwindigkeit näherte sich der nachfolgende dem vorhergehenden; nach dem Stoße ist ihre relative Geschwindigkeit

$$= z - y = v - u - \frac{2(M+N)(v-u)}{M+N}$$
$$= -(v-u);$$

sie entfernen sich also mit eben der Geschwindigkeit von einander, mit welcher sie vorhin sich einander näherten. Eben das gilt, wenn u negativ ist oder beide Körper einander begegnen.

Ist $u = 0$, oder ruhte der eine Körper vor dem Stoße: so erlangt er die Geschwindigkeit $y = \frac{2Nv}{M+N}$ nach dem Stoße, und diese wird $= v$, wenn beide Massen gleich sind, $M = N$; der andre Körper hat nach dem Stoße die Geschwindigkeit $z = \frac{v.(N-M)}{M+N}$ und diese ist $= 0$, wenn beide Massen gleich sind. Auch bei andern Werthen von u vertauschen die Körper ihre Geschwindigkeiten, wenn ihre Massen gleich sind; denn für $M = N$ wird $y = v$ und $z = u$.

§. 216. Unter Quantität der Bewegung versteht man das Product aus der Masse in die Geschwindigkeit; oder eigentlich, indem man der Masse $= 1$, die sich mit der Geschwindigkeit $= 1$ fortbewegt, die gesammte Bewegung $= 1$ zuschreibt, betrachtet man die Bewegung der m mal so großen Massen bei der Geschwindigkeit = 1, als durch m ausgedrückt, bei der Geschwindigkeit = c, als durch mc ausgedrückt; das heißt, die Quantität der Bewegung ist im zusammengesetzten Verhältnisse der Massen und der Geschwindigkeiten. Dieser Begriff von Quantität der Bewegung beruht vorzüglich auf der Wirkung, die wir die Körper beim Stoße ausüben sehen. Ein Körper, dessen Masse $= n . M$, und Geschwindigkeit $= c$ ist, ertheilt einem ruhenden Körper, an den er anstößt, eben die Bewegung, welche ein Körper, dessen Masse $= M$ und Geschwindigkeit $= m . c$ ist, eben dem ruhenden Körper ertheilt. So verhält es sich, wenn wir die Massen als durch die Gewichte gegeben ansehen.

§. 217. Für unelastische Körper ist also (§. 211.) die Quantität der Bewegung des einen vor dem Stoße $= Mu$, des andern $= Nv$, folglich die Summe $= Mu + Nv$; nach dem Stoße ist die Quantität der Bewegung der vereinigten Masse $M + N$,

$$= x (M + N) = Mu + Nv,$$ also die Quantität der Bewegung vor und nach dem Stoße gleich.

Für elastische Körper war vor dem Stoße (§. 213.) die Quantität der Bewegung beider $= Mu + Nv$; nach dem Stoße $= My + Nz$

$$= \frac{Mu (M - N) + 2MNv}{M + N} + \frac{Nv (N - M) + 2MNu}{M + N}$$

$= Mu + Nv$, der vorigen gleich.

§. 218. Aufgabe. Auf der graden Linie AB (Fig. 60.) befinden sich die Schwerpuncte zweier elastischer ruhender Körper M, P, die sich so berühren, daß ihre Berührungs-Ebne auf AB senkrecht ist; eines dritten elastischen Körpers N Schwerpunct bewegt sich auf der Linie AB fort, und dieser stößt grade und central nach der Richtung AM an den Körper M mit der Geschwindigkeit $= v$; man sucht die Geschwindigkeit, mit welcher P fortgehen wird.

Auflösung. Wäre der Körper P nicht da, so würde M nach dem Stoße die Geschwindigkeit (§. 215.) $y = \frac{2Nv}{M+N}$ annehmen; und wenn M mit dieser an P stieße, so würde P die Geschwindigkeit $w = \frac{2My}{M+P}$ $= \frac{4MNv}{(M+N)(M+P)}$ erlangen. Mit dieser Geschwindigkeit wird P in der That fortgetrieben.

§. 219. Hätte P auf eben die Art eine dritte Masse $= Q$ und diese eine vierte $= R$ ruhend berührt und durch den Stoß in Bewegung gesetzt: so wäre der Q die Geschwindigkeit $w' = \frac{2Pw}{P+Q}$; der R die Geschwindigkeit $w'' = \frac{2Qw'}{Q+R} = \frac{16 . M . N . P . Q . v}{(M+N)(M+P)(P+Q)(Q+R)}$ mitgetheilt, wenn alle Körper vollkommen elastisch wären.

Diese Formel zeigt ein vorzüglich merkwürdiges Resultat, wenn $N : M = M : P = P : Q = Q : R$ ist. In diesem Falle nämlich würde

$$\frac{N+M}{N} = \frac{M+P}{M} = \frac{P+Q}{P} = \frac{Q+R}{Q},$$

also $y = v . \frac{2N}{M+N}$; $w = v\left(\frac{2N}{M+N}\right)^2$;

$$w' = v\left(\frac{2N}{M+N}\right)^3; \quad w'' = v\left(\frac{2N}{M+N}\right)^4 \text{ u. s. w.}$$

Wäre also z. B.
$M = \frac{1}{2} N$; $P = \frac{1}{2} M$, $Q = \frac{1}{2} P$, $R = \frac{1}{2} Q = \frac{1}{16} N$,
so wäre des R Geschwindigkeit $= v\,(\frac{4}{3})^4$.

Wenn hingegen die Massen alle gleich sind, so nimmt nur die letzte die Geschwindigkeit $= v$ an, und die übrigen bleiben ruhig liegen; denn obgleich M die Geschwindigkeit $y = \frac{2Nv}{M+N}$ erlangen sollte, so behält sie, nachdem P in Bewegung gesetzt worden, doch nur die Geschwindigkeit $= \frac{y(P-M)}{M+P}$ und diese ist $= 0$ für $M = P$. Für ungleiche Massen ließen sich die Geschwindigkeiten, mit welcher jede fortgeht, nachdem sie den folgenden Körper in Bewegung gesetzt hat, ebenfalls leicht bestimmen.

§. 220. Wenn ein bewegter Körper N an eine sehr große ruhende Masse M anstößt, so wird (§. 211.) für unelastische Körper die Geschwindigkeit beider nach dem Stoße $= \frac{Nv}{M+N}$ überaus klein, wenn M sehr groß ist, oder kann als $\frac{Nv}{\infty} = 0$ angesehen werden, wenn M gleichsam unendlich groß in Vergleichung gegen N ist. Für elastische Körper (§. 215.) wird des sehr großen Körpers M Geschwindigkeit überaus klein oder fast $= 0$, des Körpers N Geschwindigkeit aber $z = \frac{v(N-M)}{M+N}$, wofür man beinahe, da N so klein ist, $z = -\frac{Mv}{M} = -v$ setzen darf. Der an die große Masse anstoßende Körper N kömmt also zur Ruhe, wenn er unelastisch ist, und springt mit eben der Geschwindigkeit, die er besaß, zurück, wenn er elastisch ist.

§. 221. Bemerkung. Auch der schiefe Stoß kann central sein. Bewegen sich der beiden Kugeln M, N Schwerpuncte (Fig. 61.) auf den Linien AM, BN fort, so wird ein schiefer Stoß erfolgen, indem ihre Oberflächen sich in a berühren. Die Berührungsfläche bc steht auf den nach dem Berührungspuncte a gezognen Radien aM, aN senkrecht und der Stoß ist also central, wenn die Schwerpuncte mit den Mittelpuncten zusammenfallen. Machen hier die Richtungslinien AM, BN mit der Berührungs-Ebne die Winkel $= \alpha$ und $= \beta$, und sind die Geschwindigkeiten $= u$ für M, $= v$ für N, so ist die auf bc senkrechte Geschwindigkeit $= u \operatorname{Sin} \alpha$ für M;

$= v \,\mathrm{Sin}\,\beta$ für N. Nur diese Geschwindigkeiten kommen bei diesem Stoße in Betrachtung, und wenn die Körper unelastisch sind: so ist nach dem Stoße die auf ac senkrechte Geschwindigkeit beider

$$= \frac{Mu \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha + Nv \,.\, \mathrm{Sin}\,\beta}{M + N}.$$

Die mit ac parallele Geschwindigkeit bleibt $= u \,\mathrm{Cos}\,\alpha$ für M, und $= v \,\mathrm{Cos}\,\beta$ für N, und man kann daher leicht die wahre Geschwindigkeit und Richtung beider Körper nach dem Stoße finden.

Wäre hier $v = 0$, oder hätte M an die ruhende Kugel N so angestoßen, daß $AMa = 90° + \alpha$ war: so hätte man für $M = N$, nach dem Stoße die auf ac senkrechte Geschwindigkeit beider $= \frac{1}{2} u \,\mathrm{Sin}\,\alpha$, und mit dieser Geschwindigkeit würde N nach einer auf ac senkrechten Richtung fortgehen, weil dieser Körper keine mit ac parallele Geschwindigkeit hatte. M dagegen hat nach dem Stoße die Geschwindigkeit $= \sqrt{(u^2 \,\mathrm{Cos}^2\,\alpha + \frac{1}{4} u^2 \,\mathrm{Sin}^2\,\alpha)}$ und die Richtung der Bewegung des M ist gegen ac unter einem Winkel $= \zeta$ geneigt, dessen Tangente

$$= \frac{\frac{1}{2} u \,\mathrm{Sin}\,\alpha}{u \,\mathrm{Cos}\,\alpha} = \frac{1}{2} \,\mathrm{tang}\,\alpha.$$

§. 222. Bemerkung. Wenn ein Körper gegen einen sehr großen ruhenden stößt, und dieser ist zugleich so weich, daß jener erheblich in ihn eindringt oder eine Höhlung in ihm macht: so läßt sich bestimmen, wie tief die Höhlung bei verschiedenen Geschwindigkeiten des anstoßenden Körpers, den ich kugelförmig annehmen will, werden wird. Wir können nämlich hier den Widerstand, welchen die weiche Masse dem Eindringen der Kugel entgegen setzt, als eine beständige Kraft $= R$ ansehen, die während des ganzen Eindringens mit gleicher Gewalt die Geschwindigkeit der Kugel zu ändern strebt. Diese bewegende Kraft $= R$ (oder eigentlich zurückhaltende Kraft) vermindert die Bewegung der Kugel, deren Masse $= M$ ist, so wie eine beschleunigende Kraft $= \frac{R}{M}$, das ist, wie eine der Schwere ähnliche Kraft, die sich zur Schwere verhält wie $\frac{R}{M}$ zu 1. Offenbar also finden alle Betrachtungen des dritten Abschnitts hier ihre Anwendung, und wenn der Kugel anfängliche Geschwindigkeit $= c$ war, so ist diese Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit $= t$, nur noch $= c - 2g \cdot \frac{R}{M} t$, wenn man die Zeit $= t$ von dem Momente an rechnet, da das Eindringen in die weiche Masse anfängt. Der in dieser Zeit durchlaufene Weg, oder die unterdeß eingedrückte Tiefe der Höhlung ist $= g \cdot \frac{R}{M} t^2$. Hieraus läßt sich die Größe des Widerstandes und die ganze Tiefe des Eindringens bestimmen.

§. 223. Aufgabe. Wenn der Körper, dessen Masse $= M$ ist, mit der Geschwindigkeit $= c$ auf den weichen Körper trifft, eine Gleichung zwischen dem Widerstande $= R$, der Tiefe des Eindringens $= s$ und der anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ zu finden.

Auflösung. Der Körper dringt so lange immer tiefer ein, bis seine Geschwindigkeit $= 0$ ist, also bis zu Ende derjenigen Zeit, die $c - 2g \frac{R}{M} t = 0$ giebt, das ist der Zeit $= \frac{cM}{2gR}$. Nach Verlauf dieser Zeit ist die Tiefe der Höhlung $= s = g \frac{R}{M} t^2 = \frac{c^2 M}{4gR}$. Die Tiefe der Höhlung ist also dem Quadrate der Geschwindigkeit c proportional, wenn R und M gleich bleiben; die Tiefe der Höhlung ist dem gesammten Widerstande, der zugleich von der Gestalt und Größe des eindringenden Körpers abhängt, umgekehrt proportional; und der Masse des eindringenden Körpers direct proportional.

§. 224. Wäre M ein frei fallender Körper und h seine Fallhöhe, also $c^2 = 4gh$, bei einem Falle im leeren Raume, so wäre $s = \frac{hM}{R}$, also die Tiefe der Höhlung den Fallhöhen proportional. Hier könnte man, wenn s und h bekannt wäre, $\frac{M}{R}$ finden, das ist den Widerstand, den die weiche Masse dem Körper entgegen setzt, in Pfunden ausdrücken, wenn das Gewicht des Körpers M in Pfunden gegeben ist.

§. 225. Bemerkung. Eine Anwendung finden diese Untersuchungen bei dem Einrammen von Pfählen. Hier wird durch den Stoß des Rammklotzes, dessen Masse $= M$, Geschwindigkeit $= u$ sein mag, der Pfahl, dessen Masse $= N$ ist, die Geschwindigkeit $= \frac{Mu}{M + N}$ erhalten. Mit dieser Geschwindigkeit $= c$ fängt also die ganze Masse $M + N$ an, sich in die Erde hineinzudrängen, und erreicht folglich bei einem Schlage die Tiefe $s = \frac{M^2 u^2}{(M + N)^2} \cdot \frac{(M + N)}{4gR}$, wenn ich in der Formel §. 223. $c = \frac{Mu}{M + N}$ und statt M hier $M + N$ setze.

Also $s = \frac{M^2 u^2}{4g \cdot R (M + N)}$.

Da man beim Einrammen eines Pfahles leicht bemerken kann, wie tief er z. B. bei 25 Schlägen eingedrungen ist: so kann man die Gewalt des Widerstandes berechnen, und folglich, wenn diese 25 Schläge die letzten waren, die er beim Rammen erhält, bestimmen, welche Last er tragen kann.

War z. B. ein Pfahl von 1040 Pfund schwer, mit einem Rammklotz von 1200 Pfund, der 4 Fuß tief fiel, so fest gerammt, daß er bei den letzten 25 Schlägen nur $\frac{1}{4}$ Zoll mehr eindrang: so war, weil $\frac{u^2}{4g} = 4$ Fuß,

$M = 1200$, $M + N = 2240$, $s = \frac{1}{100}$ Zoll bei jedem Schlage, also $= 0{,}000833$ Fuß ist,

$R = \frac{1200^2 \cdot 4}{2240 \cdot 0{,}000833}$, der Widerstand beträgt also 3085700 Pfund, oder eine so schwere Last könnte unter den angenommenen Umständen ein einziger so fest eingerammter Pfahl tragen. Hiebei ist vorausgesetzt, daß der fallende Kloß die ganze Geschwindigkeit annehme, welche einer Fallhöhe von 4 Fuß entspricht; da wegen der Reibung und andrer Widerstände das nicht der Fall ist, so muß man den Widerstand etwas geringer ansetzen.

§. 226. Hieraus läßt sich nun auch die Frage beantworten, wie eine auf den Pfahl ruhend aufgelegte Masse ihn eintreiben, und wie sich die Wirkung der ruhenden Masse zu der Wirkung der stoßenden verhalten werde. Soll P eine auf den Pfahl gelegte ruhende Masse sein: so wäre hier die bewegende Kraft $= P + N - R$ gleich dem Gewichte jener Masse und dem Gewichte des Pfahles vermindert um die Kraft, mit welcher der Boden dem Eindringen widersteht, die zu bewegende Masse $= P + N$. Nach den im 3. Abschnitte erläuterten Gesetzen würde also die Tiefe des Einsinkens $= s = g\left(\frac{P + N - R}{P + N}\right) t^2$ in der Zeit $= t$. Legte man demnach in dem eben angeführten Beispiele auf den Pfahl eine Last von 4 Millionen Pfunden, so wäre $s = gt^2 \cdot \frac{915340}{4001040} = 0{,}23 \cdot g \cdot t^2$, also $= 3$ Fuß in 1 Sec. Aber eine Last, kleiner als 3085000 Pfund würde ihn nicht im mindesten verrücken.

Um einen andern, eher durch Erfahrung zu prüfenden Fall zu betrachten, wollen wir setzen, auf jenem 1040 Pfunde schweren Pfahle ruhe der 1200 Pfund schwere Kloß und man bemerke, daß der Pfahl in einem sehr weichen Grunde sich in 1 Min. 2 Fuß tief einsenke. Dann wäre in der letzten Formel

$$s = 2,\ t = 60,\ P = 1200,\ N = 1040,$$

also $2 = 15 . 60^2 . \frac{2240 - R}{2240}$, das ist $R = 2239,91.$

Fiele nun eben der Kloß aus einer Höhe von 4 Fuß auf den Pfahl, so würde die Tiefe des Eindringens bei einem Schlage $= s = \frac{1200^2 . 4}{2239,9 . 2240} = 1,15$ Fuß; wenn man auch den Kloß fast unmittelbar nach dem Stoße wieder abhöbe, so daß seine Wirkung, während er ruhend auf dem Pfahl liegt, nicht in Betrachtung käme.

Daß wir hiebei den Widerstand des Bodens als eine unveränderliche Kraft angesehen haben, ist offenbar nicht strenge richtig; denn bei tieferm Eindringen nimmt dieser Widerstand zu; aber diese Verschiedenheit ist während weniger Schläge sehr unbedeutend und kann daher bei Seite gesetzt werden. Eben so haben wir auch darauf, daß der Masse der zu verdrängenden Erde eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt wird, nicht gesehen, indem auch das unbedeutend ist.

Anmerkung. Sehr schätzbare Bemerkungen über diese Gegenstände enthält Woltmanns Abhandlung über den Effect des Ramms. Göttingen, 1804.

§. 226. b. Da man so oft über die Vergleichung der Wirkung von Stoß und Druck nähere Belehrung fordert, so mag hier noch ein Beispiel Platz finden, welches sich auf Fragen der Art bezieht.

In der einen Schaale einer gleicharmigen Waage liege ein Gewicht von 1000 Pfunden, wie groß muß das Gewicht eines Körpers sein, der aus einer Höhe von 240 Fuß auf die andre Schaale fallend, der Waageschaale eine Geschwindigkeit von 1 Fuß in einer Secunde ertheilen kann?

Wir müssen uns hier die belastete Schaale als unterstützt, die andre Schaale als frei schwebend denken, und annehmen, der fallende Körper treffe sie genau in eben so großer Entfernung vom Ruhepuncte, als die ist, in welcher die andre Schaale aufgehängt ist. Beim Aufschlagen des fallenden Körpers hebt sich also die belastete Schaale eben so schnell, als die leere Schaale sinkt, und obgleich hier eigentlich auf die Drehung Rücksicht zu nehmen wäre: so ist es uns doch wohl erlaubt, so zu rechnen, als wenn die fallende Masse = P der andern Masse = 1000 Pfund unmittelbar die erlangte Geschwindigkeit = 1 Fuß ertheilen sollte. Ist also die fallende Masse unelastisch, ihre Geschwindigkeit = c, die ruhende Masse = M, so erhalten nach dem Stoße beide die Geschwindigkeit $= \frac{P \,.\, c}{M+P}$. In unserm Beispiele gebraucht, wenn ich den Widerstand der Luft bei Seite setze, der fallende Körper 4 Secunden, um 240 Fuß tief zu fallen, (wenn ich g = 15 Fuß annehme,) und hat am Ende des Falles die Geschwindigkeit = c = 120 erlangt. Die Geschwindigkeit nach dem Stoße soll $\frac{P \,.\, c}{M+P} = 1$ Fuß,

also $120 \,.\, P = 1000 + P$,

oder $P = \frac{1000}{119} = 8{,}3$ Pfund sein. Dieses geringe Gewicht von $8\frac{1}{3}$ Pfunden würde also jener Last von 1000 Pfunden die Geschwindigkeit = 1 Fuß in 1 Sec. ertheilen. Um aber den ganzen Erfolg zu übersehen, müssen wir überlegen, was jetzt nach vollendetem Stoße erfolgen wird. Die anfängliche Geschwindigkeit = 1, mit welcher die Masse von 1000 Pfunden aufzusteigen anfängt, wird durch die entgegenwirkende Schwere sehr schnell zerstört, und nach §. 37. wird das Steigen nur $\frac{1}{30}$ Sec., oder genauer nach §. 45. $\frac{1}{30} \,.\, \frac{1008}{992}$ Sec. dauern.

Soll die Bewegung merklicher werden, so müssen wir die der Last von 1000 Pfunden zu ertheilende Geschwindigkeit größer annehmen, z. B. = $7\frac{1}{2}$ Fuß in 1 Secunde;

dann ist $120 \cdot P = (1000 + P)\ 7{,}5$,
$7500 = 112{,}5 \cdot P$,
$P = 66$ Pfund.

Mit dieser Geschwindigkeit $= 7{,}5$ steigt nun die Masse $= 1000$ und sinkt die Masse $= 66$, während das Uebergewicht der entgegen wirkenden Kraft nur $= 934$ ist, also nach einer Zeit $= t = \frac{7{,}5 \cdot 1066}{2 \cdot g \cdot 934} = 0{,}29$ Sec. hört das Steigen auf, nachdem die 1000 Pfund schwere Last sich etwa um 1,3 Fuß hoch gehoben hat.

Wäre ein Gewicht $= P$ gegen die Waageschaale mit der Geschwindigkeit einer Flintenkugel, etwa $c = 800$ abgeschossen, so brauchte P nur $= 9\frac{1}{4}$ Pfund zu sein, um der großen Masse eine Geschwindigkeit von $7\frac{1}{2}$ Fuß zu ertheilen und sie etwa $1\frac{1}{4}$ Fuß hoch zu heben.

§. 226. c. Durch den Stoß bestimmte auch Robins die Geschwindigkeit der Flintenkugeln. Er hatte nämlich ein sehr schweres Pendel so aufgehängt, daß die abgeschossene Kugel an dieses antraf und es in Bewegung setzte. Durch eine besondre Einrichtung konnte man die ganze Ausweichung des Pendels abmessen und folglich die Schnelligkeit, mit welcher es anfing sich zu bewegen, genau bestimmen (Robins Artillerie übers. von Euler.). Aehnliche Versuche, bei denen das Pendel 7400 Pfund schwer war, hat neuerlich Millar angestellt. Soll dieses Pendel auch nur die Geschwindigkeit $= 1$ Fuß in 1 Sec. erhalten, wenn die Masse M mit der Geschwindigkeit $= c$ anschlägt, so ist, wenn diese Körper als unelastisch angesehen werden, $\frac{Mc}{M + 7400} = 1$, also wenn M 4 Pfund beträgt, oder die Versuche mit 4pfündigen Canonenkugeln angestellt werden, dieses Pendel noch brauchbar bei einer Geschwindigkeit $c = \frac{7404}{4} = 1851$ Fuß. Man kann die Einrichtung aber leicht so machen, daß auch größere Geschwindigkeiten des Pendels noch bequem beobachtet werden können, und man folglich auch noch schwerere oder noch schneller bewegte Kugeln anwenden kann.

§. 227. Bemerkung. Von dem eccentrischen Stoße der Körper, wo die Richtung des Stoßes nicht durch den Schwerpunct geht, und wo daher Drehungen um diesen entstehen, kann hier nicht wohl gehandelt werden.

Vierzehnter Abschnitt.

Von der gleichförmigen Umdrehung fester Körper um unbewegliche Axen.

§. 228. Bemerkung. Wenn feste Körper von erheblicher Größe sich bewegen: so kann diese Bewegung entweder in einem parallelen Fortrücken aller einzelnen Puncte bestehen, oder es findet zugleich eine Umdrehung Statt. Ist das erstere, so lassen sich alle die Betrachtungen auch hier anwenden, die wir über die Bewegung eines Punctes angestellt haben, und die Bewegung heißt dann eine bloß fortrückende oder parallele Bewegung. Wenn dagegen nicht alle Puncte mit paralleler Bewegung fortrücken, so kann die Drehung des Körpers sehr verschiedenartig sein, indem er entweder sich um eine immer gleichbleibende Axe, die allenfalls selbst, in immer paralleler Lage fortrücken mag, dreht, oder nach und nach Drehungen um verschiedene Axen annimmt. Wir wollen hier zuerst nur Drehungen um festgehaltene Axen betrachten.

§. 229. Bemerkung. Wir haben im siebenten Abschnitte gesehen, daß jede im Kreise bewegte Masse ein Bestreben, sich vom Centro zu entfernen, zeigen muß.

Dieses Bestreben, oder die gesammte bewegende Kraft, mit welcher diese Masse sich loszureißen strebt, wurde (§. 100.) durch $\frac{c^2 . M}{2gr}$ ausgedrückt, wenn c die Geschwindigkeit des bewegten Körpers, M seine Masse, r den Abstand vom Centro, g den Fallraum schwerer Körper in der ersten Secunde bedeutet. Nach diesem Gesetze würde man leicht, wenn (Fig. 62.) an der graden unbiegsamen Linie CD, die sich um den festgehaltenen Punct C drehen kann, in A, B, D, Massen $= M; = M'; = M''$ angebracht sind, die gesammte Kraft finden, welche CA zu zerreißen strebt, oder welche auf C drückt. Heißen nämlich der Massen M, M', M'' Abstände von Centro $= r; = r'; = r''$; ihre Geschwindigkeiten $= c; = c'; = c''$: so wäre die auf C drückende Kraft $= \frac{1}{2g}\left(\frac{c^2 M}{r} + \frac{c'^2 M'}{r'} + \frac{c''^2 . M''}{r''}\right)$, oder da nothwendig $c' = \frac{c . r'}{r}$; $c'' = \frac{c . r''}{r}$, weil die Massen immer in einer und derselben graden Linie bleiben sollen,

$$\text{jene Kraft} = \frac{c^2}{2g . r^2}(rM + r'M' + r''M'').$$

§. 230. Erklärung. Wenn mehrere Körper oder Massen, so wie wir es eben betrachtet haben, fest mit einander verbunden sind: so legen die von jedem einzelnen Puncte senkrecht auf die Umdrehungs-Axe gezognen Linien bei der Umdrehung in einerlei Zeit sämmtlich gleiche Winkel zurück, weil die Stellungen der einzelnen Puncte gegen einander unveränderlich bleiben. Man nennt daher Winkelgeschwindigkeit des ganzen Körpers die Größe des Winkels, um welchen er sich in der Zeit-Einheit gedreht hat, oder die Größe des Bogens, den ein in der Entfernung = 1 von der Axe sich befindender Punct in der Zeit-Einheit durchläuft.

§. 231. Befindet sich also eine bewegte Masse in der Entfernung = r von der Axe und hat diese die Geschwindigkeit = c, oder durchläuft einen Bogen = c in 1 Sec., so ist $\frac{c}{r}$ die Winkelgeschwindigkeit, und wenn diese = γ heißt, so ist jeder andern Masse, wofern sie mit der vorigen fest verbunden ist, wahre Geschwindigkeit = $\gamma' r$, wenn sie sich in der Entfernung = r' von der Axe befindet, da sie um einen Winkel fortrückt, dem für den Halbmesser = 1, der Bogen = γ zugehört. Dieser Bogen γ ist hier in Theilen des Halbmessers ausgedrückt. Ist die Umdrehung gleichförmig, so bleibt γ für alle Theile des sich drehenden Körpers eine immer gleiche Größe. Bei ungleichförmiger Drehung muß man unter γ den Winkel oder Bogen verstehen, um welchen der Körper mit der eben erlangten Geschwindigkeit sich in der nächsten Secunde drehen würde, wenn die Bewegung unterdeß gleichförmig bliebe.

§. 232. Lehrsatz. Wenn eine feste, grade Linie, deren einzelne Theile mit Massen M, M′, M″, M‴ in den Entfernungen = r, r′, r″, r‴ vom festgehaltenen Puncte C beschwert sind, sich um diesen Mittelpunct C drehet: so ist der Druck, welchen der unterstützte Punct C wegen der Schwungkraft leidet, eben so groß, als ob sich, bei gleich schneller Drehung der graden Linie um den Punct C, die Summe der Massen in ihrem Schwerpuncte vereinigt befände (Fig. 62.).

Beweis. Wir haben eben gesehen, daß die Schwungkraft = $\frac{c^2}{2g\,r^2}(rM + r'M' + r''M'' + r'''M''')$ ist. Aber (Statik 94. 106.) der Mittelpunct der Kräfte, also hier der Schwerpunct G der sämmtlichen Massen wird so bestimmt, daß $R.(M + M' + M'' + M''') = r.M + r'M' + r''M'' + r'''M'''$ ist, wenn seine Entfernung von dem bestimmten Puncte C an, CG = R ist. Die Schwungkraft aller Massen läßt sich also durch $\frac{c^2}{2gr^2}.R(M + M' + M'' + M''')$ ausdrücken, oder weil die Geschwindigkeit dieses Schwerpunctes $= C = \frac{c \, . \, R}{r}$ ist, die Schwungkraft $= \frac{C^2}{2g\,R}(M + M' + M'' + M''')$ eben so groß, als wenn die Summe der Massen im Schwerpuncte vereinigt wäre, und sich mit der Geschwindigkeit $= C$ um eben den Mittelpunct bewegte, das ist, mit derjenigen Geschwindigkeit, welche der angenommenen Winkelgeschwindigkeit des Körpers entspricht.

§. 233. Da dieser Satz gilt, es mag die Anzahl der mit Massen belasteten Puncte der graden Linie so groß man will sein: so gilt er auch für eine in allen Puncten schwere Linie oder für eine aus lauter materiellen Theilen bestehende Linie und auch ihre Schwungkraft ist eben so groß, als ob ihre ganze Masse im Schwerpuncte vereinigt wäre.

Dieses gilt noch, wenn die schwere Linie AB (Fig. 63.) sich nach beiden Seiten über den festgehaltenen Punct C hinaus erstreckt. Ist nämlich hier des Theiles AC Schwerpunct in D, seine Masse $= m$, Geschwindigkeit des Schwerpunctes $= c$; und des Theiles CB Schwerpunct in E, Masse $= m'$, Geschwindigkeit des Schwerpunctes $= c'$: so leidet der Punct C den Druck $= \frac{c^2 \, . \, m}{2g \, . \, r} - \frac{c'^2 \, . \, m'}{2g \, . \, r'}$, wenn $CD = r$, $CE = r'$ ist. Dieser Druck ist, da $c' = \frac{c \, . \, r'}{r}$ auch $= \frac{c^2}{2g}\left(\frac{r \, . \, m - r'm'}{r^2}\right)$ und wenn G der ganzen Linie Schwerpunct bedeutet, also $CG = \frac{r \, . \, m - r'm'}{m + m'}$, der Druck $= \frac{c^2}{2g\,r^2} . CG(m + m')$ oder $= \frac{C^2}{2g \, . \, CG}(m + m')$, wenn C die Geschwindigkeit des Schwerpunctes G ist.

Anmerkung. Ich habe hier das Wort: schwer — gebraucht oder die Linie eine schwere Linie genennt; eigentlich aber kömmt es hier auf die Einwirkung der Schwere, die man sich stärker oder schwächer denken könnte, nicht an, sondern nur auf die Massen, oder die Quantität der Materie, die wir uns als dasjenige denken, worauf die Schwerkraft wirkt, und uns so das Gewicht des Körpers als seiner Masse proportional empfinden läßt.

§. 234. Lehrsatz. Wenn eine Ebne ABDE, deren Masse in allen ihren einzelnen Puncten vertheilt ist (Fig. 64.), sich um eine, in C auf sie senkrechte Axe, die durch andre Kräfte festgehalten wird, frei und gleichförmig dreht: so ist die Schwungkraft, oder der vermöge derselben auf C ausgeübte Druck, eben so groß, als er sein würde, wenn die ganze Masse der Ebne in ihrem Schwerpuncte vereinigt wäre, die übrige Ebne aber bloß als fest und ohne Masse angesehen würde.

Beweis. Wir wollen zuerst die Ebne gar nicht als materiell ansehen, sondern bloß die Puncte M, N als mit Massen $= M$ und $= N$ belastet uns denken. Ist nun $CM = r$, $CN = r'$; der Masse M Geschwindigkeit, mit welcher sie ihren Kreis durchläuft $= c$, und folglich der Masse N Geschwindigkeit $= c' = \frac{c\,r'}{r}$, weil beide ihre relative Lage in der festen Ebne unverändert behalten: so wird der Punct C durch eine Schwungkraft $= P = \frac{c^2 M}{2g\,r}$ nach CM, und durch eine Kraft $= Q = \frac{c^2 r' N}{2g\,r^2}$ nach CN gedrückt.

Diese beiden auf C wirkenden Kräfte bringen, wenn man im Parallelogramm der Kräfte $CU = P$, $CV = Q$ und $UCV = \alpha$ nimmt, eine Mittelkraft nach einer Richtung CW hervor, deren Neigung $= UCW = \varphi$ gegen CM durch $\tang \varphi = \frac{Q \operatorname{Sin} \alpha}{P + Q \operatorname{Cos} \alpha}$ bestimmt wird, und die Größe dieser Mittelkraft ist $= P \operatorname{Cos} \varphi + Q \operatorname{Cos}(\alpha - \varphi)$ oder $= \frac{c^2}{2g\,r^2}(M \,.\, r \,.\, \operatorname{Cos} \varphi + N \,.\, r' \,.\, \operatorname{Cos}(\alpha - \varphi))$.

Eben diese Bestimmungen findet man für die Schwungkraft dann, wenn die Summe der Massen $= M + N$

in ihrem Schwerpuncte G vereinigt wäre. Für den Schwerpunct G beider Massen ist (Statik §. 94. 106.),

$$MG = \frac{N \cdot MN}{M + N}, \quad NG = \frac{M \cdot MN}{M + N};$$

ferner $CM \cdot \text{Sin}\, MCG = MG \cdot \text{Sin}\, MGF$,

$$CN \cdot \text{Sin}\, NCG = NG \cdot \text{Sin}\, MGF,$$

also $\frac{CM \cdot \text{Sin}\, MCG}{MG} = \frac{CN \cdot \text{Sin}\, NCG}{NG}$, und wenn ich $MCG = \psi$ setze, und für CM, CN, MG, NG ihre Werthe, wird $\frac{r \cdot \text{Sin}\,\psi}{N} = \frac{r' \cdot \text{Sin}\,(\alpha - \psi)}{M}$,

das ist $r \cdot M\, \text{Sin}\,\psi = r' \cdot N\, (\text{Sin}\,\alpha\; \text{Cos}\,\psi - \text{Cos}\,\alpha\; \text{Sin}\,\psi)$,

oder $\text{tang}\,\psi = \frac{r' \cdot N \cdot \text{Sin}\,\alpha}{r \cdot M + r' \cdot N \cdot \text{Cos}\,\alpha}$, welches $= \text{tang}\,\phi$ ist,

da auch $\frac{Q \cdot \text{Sin}\,\alpha}{P + Q \cdot \text{Cos}\,\alpha} = \frac{r' \cdot N \cdot \text{Sin}\,\alpha}{r \cdot M + r' \cdot N \cdot \text{Cos}\,\alpha}$.

Die Richtung der gesammten Schwungkraft, welche aus der Bewegung beider Massen M und N entsteht, ist also unter eben dem Winkel $= \phi$ gegen CM geneigt, nach welcher eine im Schwerpuncte G angebrachte Masse bei der Drehung um den Punct C diesen drücken würde.

Wäre aber in G die Masse $= M + N$ angebracht, so wäre der Druck, welchen die aus ihrer Bewegung entstehende Schwungkraft auf C ausüben würde

$= \frac{c^2 \cdot CG \cdot (M + N)}{2g \cdot r^2}$, weil die Geschwindigkeit des Punctes G bei der Umdrehung $= \frac{c \cdot CG}{r}$ ist, indem M mit der Geschwindigkeit $= c$ fortrückt, und alle diese Puncte fest verbunden bleiben.

Es läßt sich aber leicht übersehen, daß $\text{Cos}\, MGC$

$$= \frac{CG - CM\, \text{Cos}\,\phi}{MG} = \text{Cos}\, HGN = \frac{CN \cdot \text{Cos}\,(\alpha - \phi) - CG}{NG}$$

ist, also $\frac{CG - r\, \text{Cos}\,\phi}{N} = \frac{r'\, \text{Cos}\,(\alpha - \phi) - CG}{M}$, oder $CG.(M+N) = Mr \operatorname{Cos}\varphi + Nr' \operatorname{Cos}(\alpha-\varphi)$; daher wird der von $M+N$, wenn beide Massen in G vereinigt sind, auf C ausgeübte Druck

$$= \frac{c^2}{2g\, r^2} (Mr . \operatorname{Cos}\varphi + Nr' \operatorname{Cos}(\alpha-\varphi),$$

völlig eben so dargestellt, wie wir den aus den Schwungkräften beider einzelnen Massen entstehenden Druck auf C ausgedrückt fanden.

Hieraus erhellt, daß der Lehrsatz gilt für zwei Massen M, N, daß er sich also leicht für drei und mehr einzelne, in der Ebne ABDE liegende Massen beweisen ließe, und folglich auch gilt, wenn man sich jeden einzelnen Punct der Ebne als schwer oder als mit einer, seiner Größe proportionalen Masse belastet, vorstellt.

§. 235. Wenn also G den Schwerpunct der ganzen Ebne vorstellt, so ist CG allemal die Richtung des Druckes, den der unterstützte Punct C, wegen der aus der Umdrehung entstehenden Schwungkraft, leidet; und so wie G bei der Drehung um C in andre Richtungen kömmt, so ändert sich auch die Richtung des Druckes, den C leidet.

Fiele der Schwerpunct in C selbst, oder ginge die auf die Ebne senkrechte Axe durch den Schwerpunct derselben: so hätte die Axe gar keine Gewalt auszuhalten, oder die Ebne könnte sich um eine solche Axe ganz frei drehen, ohne daß es eine Kraft bedürfte, um die Axe zu halten.

§. 236. Lehrsatz. Wenn (Fig. 65.) eine Ebne ABCD sich um eine in der Ebne selbst liegende Axe EF dreht: so ist die Schwungkraft, welche auf die Axe drückt, zwar eben so groß, als wenn die ganze Masse der Ebne im Schwerpuncte vereinigt wäre; aber die mittlere Richtung der Schwungkraft geht nicht nothwendig durch den Schwerpunct.

Beweis. Wir haben nur nöthig, den Beweis so zu führen, wie er für eine nicht schwere, bloß in M, N mit zwei Massen belastete Ebne gelten würde, indem er sich denn leicht allgemeiner machen läßt. Es sei also in M die Masse = M in der gegen die Axe senkrechten Entfernung LM = r, und in N die Masse = N in der Entfernung = r′ angebracht. Da die feste Ebne sich um die Axe EF gleichförmig dreht: so ist die Geschwindigkeit = c′ der Masse N durch $c' = \frac{c\,r'}{r}$ bestimmt, wenn M die Geschwindigkeit = c hat. Die Masse M übt nun wegen ihrer Schwungkraft auf den Punct L der Axe einen Druck $= \frac{c^2 M}{2g\,r}$; die Masse N auf den Punct O den Druck $= \frac{c^2 r' N}{2g\,r^2}$ aus; und da beider Kräfte Richtungen parallel sind, so würde eine Kraft der Summe beider gleich $= \frac{c^2}{2g\,r^2}(r M + r' N)$ in P mit LM parallel wirkend, völlig eben so, wie jene beiden zusammen, auf die Axe drücken, wenn $LP = \frac{LO \,.\, r' N}{r M + r' N}$ wäre (Statik. §. 94.). Die festgehaltenen Puncte der Axe nämlich würden von jenen beiden Kräften genau eben so, wie von dieser einen in P angebrachten gedrückt werden.

Sucht man die Lage des gemeinschaftlichen Schwerpunctes Q der Massen M, N, so ist des Punctes Q Entfernung von der Axe $QR = \frac{r M + r' N}{M + N}$ und sein Abstand von LM ist $LR = \frac{LO \,.\, N}{M + N}$.

Wären nun bei der Drehung um die Axe EF die Massen M + N in Q vereinigt, so wäre des Punctes Q Geschwindigkeit $= \frac{c \,.\, RQ}{r}$, wenn M sich mit der Geschwindigkeit = c bewegt, und die Masse = M + N würde wegen der Schwungkraft in dem Puncte R einen

Druck $= \frac{c^2 . RQ . (M + N)}{2g . r^2}$ auf die Axe ausüben,

oder $= \frac{c^2 . (r M + r' N)}{2g r^2}$.

Diese Schwungkraft der vereinigten Massen ist eben so groß, als die Summe der einzelnen Schwungkräfte, die wir vorhin fanden. Aber die Puncte P und R fallen nicht nothwendig zusammen, oder die mittlere Richtung der durch die Bewegung der einzelnen Massen hervorgebrachten Schwungkräfte geht nicht allemal durch den Schwerpunct, sondern dies geschieht nur dann, wenn $LR = LP$ ist.

§. 237. Die mittlere Richtung der Schwungkraft beider Massen geht nur dann durch den Schwerpunct, wenn R mit P zusammen fällt oder $LR = LP$, das ist $\frac{LO . N}{M + N} = \frac{LO . r' N}{r M + r' N}$ oder $r' (M + N) = r M + r' N$ oder $r' M = r M$ ist.

Sind mehrere Massen da, so ist zwar noch die gesammte Schwungkraft aller einzelnen Massen eben so groß, als wenn sie alle in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpuncte vereinigt wären; aber die mittlere Richtung aller Schwungkräfte geht auch da nicht nothwendig durch den Schwerpunct. Daher ruhet auch hier nicht immer die Axe von selbst, wenn sie gleich durch den Schwerpunct geht, sondern es ist in den meisten Fällen nothwendig, daß die Axe in zwei Puncten fest gehalten werde.

Wenn (so, wie in Fig. 64.) die Drehungs-Axe senkrecht gegen die Ebne ist, und sie geht zugleich durch den Schwerpunct der Ebne: so bedurfte es gar keiner Kraft, um die Axe zu halten, oder diese blieb bei der Drehung des Körpers von selbst in Ruhe. Hier hingegen, wo die Umdrehung um eine in der Ebne selbst liegende Axe geschieht, ist es sehr oft der Fall, daß die durch den

Schwerpunct gehende Axe nicht ruhen kann, selbst wenn sie in irgend einem einzelnen Puncte unterstützt würde.

Wären z. B. (Fig. 66.) in N, N gleiche Massen in gleichen Abständen von der Axe LN = MN angebracht, so ginge gewiß die Axe durch beider Massen Schwerpunct G; aber wenn man diesen Punct G der Axe allein unterstützt, so zieht in L die Schwungkraft nach LN, und in M die eben so große Schwungkraft nach MN und beide bringen vereint eine Drehung um G hervor, da sie nach einerlei Richtung zu drehen streben. In dem eben betrachteten Falle giebt es keinen Punct der Axe EF der allein unterstützt die Axe ruhend erhielte. Dagegen könnte eine ganz freie Axendrehung Statt finden, (das ist eine Drehung, bei welcher die Axe von selbst ruhte,) sowohl um die durch NN selbst gehende Axe, weil dann die während der Drehung in der Axe selbst ruhenden Massen keine Schwungkraft erhalten, als um die auf NN senkrechte durch den Schwerpunct G gehende Axe, weil hier die Schwungkräfte sich völlig aufheben.

Aus diesen Betrachtungen erhellet, daß die in G auf einem verticalen Zapfen ruhende horizontale Axe EF von selbst eine Drehungsbewegung um G annehmen wird, wenn die Massen N, N in eine Rotationsbewegung um die Axe EF versetzt worden sind. Diese Drehungsbewegung der Axe wäre indeß nicht so leicht genau zu bestimmen, weil die Richtung der Schwungkräfte, durch welche sie bewirkt wird, in jedem Augenblicke eine andre ist.

§. 238. Bemerkung. Es erhellet hieraus wol, wie man die Schwungkraft für einen sich drehenden Körper bestimmen müßte. Man könnte sich ihn als in dünne, auf die Axe senkrechte Scheiben zerlegt denken, und jede Scheibe würde in dem Puncte, wo sie die Axe scheidet, mit eben der Gewalt auf die Axe wirken, als wenn ihre ganze Masse, im Schwerpuncte vereint, mit der diesem Puncte zugehörigen Geschwindigkeit herumgeführt würde; die übrigen Theile der Ebne aber bloß fest und ohne Masse wären. Da alle diese einzelnen Scheibchen zu einem

Körper fest vereinigt sind, so ist die Geschwindigkeit aller durch die Geschwindigkeit irgend eines Punctes bestimmt, und die ganze Betrachtung läßt sich nun auf die Art, wie in §. 233. 234. weiter fortführen. Die gesammte Schwungkraft des Körpers läßt sich auch hier nicht mit der verwechseln, die der im Schwerpuncte vereinigten Masse zukommen würde, da die mittlere Richtung der Schwungkraft nicht nothwendig durch den Schwerpunct geht.

§. 239. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß der Körper, wenn die Axe völlig fest gehalten wird, seine Drehung um die Axe gleichförmig fortsetzen wird, so lange nicht andre Kräfte auf ihn einwirken. Denn, so gut wie jedes Theilchen der Masse, wofern es nur durch einen Faden an dem Mittelpuncte festgehalten würde, seine Umläufe gleichförmig fortsetzen müßte, wenn es allein da wäre, eben so werden auch a l l e zu einem Körper vereinigten Massen ihre Umläufe unaufhörlich gleichförmig fortsetzen.

§. 240. Welchen Druck die Axe leidet, würde man bestimmen, wenn man sich den Körper in Scheiben zerlegt, und jeder Scheibe Masse in ihrem Schwerpuncte vereinigt dächte. Die alsdann gefundene Schwungkraft einer solchen Masse zerlegt man am besten nach zwei auf einander selbst und zugleich auf die Axe senkrechten Richtungen; und indem man so für alle einzelnen Theile des Körpers verfährt und die nach der einen Richtung wirkenden Kräfte in eine einzige Kraft, die nach der anderen Richtung wirkenden Kräfte auch in eine einzige Kraft vereinigt, erhält man statt aller jener Kräfte zwei auf einander senkrechte Kräfte, durch welche die Axe gedrückt wird. Die Richtungen dieser beiden Kräfte gehen aber nicht nothwendig durch denselben Punct der Axe und auch nicht nothwendig durch den Schwerpunct, wie aus den Betrachtungen in §. 234. hinreichend erhellt.

Zusätze für geübtere Leser.

I. Den Schwerpunct einer graden Linie AB (Fig. 67.) zu finden, wenn die einzelnen Puncte mit Gewichten beschwert sind, welche als Functionen der Abstände von A, gegeben sind.

Man nenne irgend eines Punctes M Abstand von A, $= x$, und die Masse, mit welcher das Theilchen dx beschwert ist $= Xdx$, so ist dieser Masse Moment in Beziehung auf den willkürlichen Punct A durch $= Xxdx$ ausgedrückt; die Summe aller dieser Momente für alle Theilchen der Linie also durch $= \int Xxdx$. Ist nun G der Schwerpunct und der ganzen Linie Masse $= M$, so soll $M \cdot AG = \int Xxdx$ sein, also da offenbar der ganzen Linie

$$\text{Masse} = M = \int Xdx \text{ ist, } AG = \frac{\int Xxdx}{\int Xdx}.$$

II. Beispiel. In jedem Puncte M, dessen Entfernung von $A = x$ ist, sei die Masse $dM = Xdx = \pi b^2 x^2 dx$ vereinigt, so ist $\int Xdx = \frac{1}{3} \pi b^2 x^3$, wo keine beständige Größe beizufügen ist, wenn die Masse von A anfangend gerechnet wird, und die ganze Masse ist $= \frac{1}{3} \pi b^2 a^3$, wenn die ganze Länge des linearischen Körpers $= AB = a$ ist. Wir finden ferner $\int Xxdx = \int \pi b^2 x^3 dx = \frac{1}{4} \pi b^2 x^4$, oder für die ganze AB, $= \frac{1}{4} \pi b^2 a^4$,

$$\text{also } AG = \frac{\int Xxdx}{\int Xdx} = \frac{3}{4} a.$$

Die Masse, die wir hier betrachtet haben, ist eigentlich die Masse eines Kegels, dessen Halbmesser $= bx$ ist in der Entfernung $= x$ von der Spitze. Wir haben uns die Masse jedes auf die Axe senkrechten Querschnitts als im Centro desselben vereinigt gedacht und die Lage des Schwerpuncts um $\frac{3}{4}$ der Höhe von der Spitze entfernt gefunden, wie in der Statik §. 144.

III. Den Schwerpunct der ebnen Figur ABCD (Fig. 68.) zu bestimmen. Wir denken uns durch den Anfangspunct E der Abscissen zwei auf einander senkrechte Linien und suchen den Abstand des Schwerpuncts von jeder derselben. Stellen wir uns nämlich AC als eine festgehaltene Axe vor und nennen, um die Lage irgend eines Theilchens zu bestimmen, $EF = x$, $FM = y$, die Masse des Theilchens $= dM = dx \cdot dy$, indem wir den Inhalt des kleinen Recht-Eckes als seine Masse darstellend ansehen: so ist dieser Masse dM Moment in Beziehung auf die Axe AC $= y \cdot dx \cdot dy$ und $dx \int y dy$ ist die Summe der Momente aller in FG vereinigten Theile, wenn man nämlich das Integral von $y = 0$ annimmt, und für $y = FG$ seinen vollständigen Werth erreichen läßt. Hier ist x als unveränderlich angesehen, und bloß das Moment des schmalen Parallelogramms FGgf gefunden; man findet die Summe der Momente aller dieser Parallelogramme, wenn man das Integral $\int dx \int y dy = \int \frac{1}{2} y^2 dx$ für die ganze Fläche nimmt. Bedeutet nun N der ganzen Figur Schwerpunct, und NL seinen Abstand von der Axe AC, M aber die Masse der ganzen Fläche, so soll $M . NL = \int dx \int y dy$ sein. Aber dM ist $= dx . dy$, des kleinen Parallelogramms FG, Masse $= y dx$, und $M = \int y dx$, die Masse der ganzen Ebne,

$$\text{also } NL = \frac{\int dx \int y dy}{\int y dx}.$$

Eben die Betrachtungen zeigen, daß des Schwerpunctes Abstand von der andern durch den Anfangspunct der Coordinaten gezognen Axe $= NO = \frac{\int dy \int x dx}{\int y dx}$ ist.

IV. Beispiel. Den Schwerpunct der halben Parabel AMNP zu finden (Fig. 69.). Rechnet man die Abscissen vom Scheitel an, so ist $AI = x$, $IM = y$ und $y^2 = px$ für jeden Punct im Umfange der Parabel. AP sei $= a$, als die ganze Länge desjenigen Parabelstückes, dessen Schwerpunct man finden soll. Dann ist $\int y dx = p^{\frac{1}{2}} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} . p^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{3}{2}}$ der Inhalt irgend eines durch eine Ordinate IM begrenzten Theiles, und $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} = M$ die Masse der ganzen Fläche AMNP. Ferner ist $\int dx \int y dy = \int \frac{1}{2} y^2 dx = \frac{1}{2} p \int x dx = \frac{1}{4} p x^2$, also der Abstand des Schwerpunctes von der Axe AP ist $= \frac{\frac{1}{4} p x^2}{\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{8} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, oder für $x = a$, dieser Abstand $= \frac{3}{8} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} = LN = \frac{3}{8} PN$, weil $PN^2 = p . a$. Der Abstand des Schwerpunctes von der Axe AB oder der Abstand vom Scheitel wird durch folgende Betrachtung gefunden. MmoO sei ein schmales Stück der Parabel und MO mit der Axe der x parallel: so ist ohne Zweifel eines Stückchens Q Inhalt $= dx . dy$ und sein Moment in Beziehung auf die Axe AB ist $= x . dx . dy$, also die Summe aller Momente der Theilchen, welche MmoO ausfüllen, $= dy \int x dx$ und die Summe aller Momente des ganzen Parabelstücks $= \int dy \int x dx$, aber hier verschwindet dieses Integral $\int x dx$ nicht mit $x = o$, sondern es muß $= o$ sein, wenn $x = BM = \frac{y^2}{p}$ ist, oder in $\int dy \int x dx = \int dy \, (\text{Const} + \frac{1}{2} x^2)$ muß $\text{Const} + \frac{1}{2} x^2 = o$ sein, wenn $x = \frac{y^2}{p}$ ist, also $\text{Const} = - \frac{1}{2} \frac{y^4}{p^2}$; der bis an

$x = a$ reichende Werth von $\int x dx$ ist also $= \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} \frac{y^4}{p^2}$,

folglich $\int dy \int x dx = \int \frac{1}{2} a^2 dy - \int \frac{1}{2} \frac{y^4 dy}{p^2} = \frac{1}{2} a^2 y - \frac{1}{10} \frac{y^5}{p^2}$, welches mit $y = 0$ verschwinden muß und folglich keiner beigefügten Constans bedarf, aber für $y = PN = p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$ seinen vollen Werth erhält, der also $= \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{10} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}}$

$= \frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}}$ wird.

Der Abstand des Schwerpunctes von der Axe AB ist also

$$= \frac{\int dy \int x dx}{\int y dx} = \frac{\frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5} a = AL.$$

Ich habe hier nicht den leichtesten Weg befolgt, um die Entfernung des Schwerpunctes von AB zu finden, weil ich zeigen wollte, wie man auf die Bestimmung der beständigen Größe Rücksicht zu nehmen hat. Man fände sonst auch, indem man zuerst in Beziehung auf y integrirt, $\int dy \int x dx = \int x dx \int dy = \int xy\, dx$, wo keine Constans hinzukömmt, weil nun $y dx$ den Inhalt von KQ bedeutet, der $= 0$ ist für $y = 0$. Setze ich hier $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, so ist für den ganzen Streifen KR, $\int xy dx = \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$ $= \frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}$, und dieses Integral muß mit $x = 0$ verschwinden, weil eines Parallelogramms KR Moment $= 0$ wäre, wenn seine Entfernung von der Axe AB an $= 0$ ist. Es ist also $\frac{2}{5} \sqrt{px^5}$ die Summe aller Momente in Beziehung auf AB, und $\frac{\frac{2}{5}\sqrt{px^5}}{\frac{2}{3}\sqrt{px^3}}$ $= \frac{3}{5} x$ der Abstand des Schwerpunctes von AB für jeden durch eine mit MI parallele Ordinate begrenzten Theil der Parabel, oder $= \frac{3}{5} a$, wenn der bestimmte Werth von $x = AP = a$ ist.

V. Den Schwerpunct eines Körpers zu bestimmen. Wenn wir uns irgend einen Punct (Fig. 70.) M des Körpers durch drei auf einander senkrechte Coordinaten $EH = x$, $HI = y$, $IM = z$ bestimmt denken: so können wir die Masse des Theilchens M durch $= dx\, dy\, dz$ ausdrücken. Dieses Theilchens Moment in Beziehung auf die Axe AC ist (Statik §. 117.), wenn ich MI als vertical ansehe $= y . dx . dy . dz$, also wenn ich bloß y als veränderlich ansehe, das Moment des ganzen Parallelepipedi, das in der bestimmten Höhe $= z$, und in der Entfernung $= x$ von der Axe EF liegt, und sich durch den ganzen Körper erstreckt, wie TS, ist $= \frac{1}{2} y^2 dx\, dz$, wo man dann, um das vollständige Integral zu finden, diejenigen durch x und z ausgedrückten Werthe von y setzen muß, die den Grenzen des Körpers entsprechen. Um nun das Moment der ganzen Scheibe PR, die auf z senkrecht ist, und die Dicke dz hat, zu finden, muß man in Beziehung auf x integriren und das Moment dieser ganzen Scheibe in Beziehung auf die Axe der x ist $dz \, . \int \frac{dx \, . \, y^2}{2}$; also endlich die Summe der Momente aller solcher Scheiben in Beziehung auf die Axe der x ist $= \int dz \int \frac{y^2 \, dx}{2}$.

Liegt der Schwerpunct in N und ist des ganzen Körpers Masse $= M$: so ist M multiplicirt in den Abstand des Schwerpunctes von der durch x und z gelegten Ebne, gleich dem eben gefundenen Momente; indem, für ein in N angebrachtes Gewicht $= M$, das Moment in Beziehung auf die Axe EC, $= M \, . \, UV$ ist, wenn NU die Verticallinie vorstellt, also UV den kleinsten Abstand der Richtung der Kraft von der Axe EC; also ist der Abstand des Schwerpunctes von der Axe der $x = \frac{\frac{1}{2} \int dz \int y^2 \, dx}{M}$ und $M = \int dz \int dx \int dy = \int (dz \int y \, dx)$.

VI. Beispiel. Es sei (Fig. 70.) APRC ein durch die Umdrehung einer Parabel um ihre Hauptaxe FE entstandener Körper: so ist, wenn ich $LF = u$ nenne, der Halbmesser des Querschnitts PR, $= x = \sqrt{pu}$, oder wenn $FE = a$, $EL = z$ heißt, $x = \sqrt{(pa - pz)}$, für die Parabel, durch deren Umdrehung der runde Körper entstanden ist.

Da hier alle auf LE senkrechten Querschnitte Kreise sind, deren Halbmesser $= \sqrt{(pa - pz)}$ ist, und deren Inhalt daher durch $= \pi \, (pa - pz)$ ausgedrückt wird, so ist des ganzen Körpers Masse $= \int \pi \, dz \, (pa - pz) = \pi \, (paz - \frac{1}{2} pz^2 + Const)$. Diese Masse ist $= 0$ für $z = 0$, also $Const = 0$, und das Integral erhält seinen ganzen Werth $= \frac{1}{2} \pi p a^2$, wenn $z = a$ ist.

Der Scheibe PR Inhalt ist hier $= \pi \, dz \, . (pa - pz)$, wenn wir ihr die Dicke $= dz$ beilegen und ihr Moment in Beziehung auf die Ebne AC, ist $= \pi \, zdz \, (pa - pz)$; das heißt, wenn man sich die Ebne AC als vertical und in ihr eine horizontale Axe denkt, so ist $\pi zdz \, (pa - pz)$ das Moment der Scheibe PR in Beziehung auf diese Axe. Folglich des ganzen Körpers Moment $= \pi p \, (\frac{1}{2} a z^2 - \frac{1}{3} z^3)$, welches für $z = a$ seinen vollständigen Werth $= \frac{1}{6} \pi p \, . \, a^3$ erhält.

Die ganze Masse in der Entfernung $= w$ von der Ebne AC hätte das Moment $= w \cdot \frac{\pi}{2} p a^2$, und dieses soll $= \frac{1}{6} \pi p a^3$ sein, also $w = \frac{1}{3} a$, als Abstand des Schwerpunctes von AC.

VII. Um nicht bloß ein allzu leichtes Beispiel zu betrachten, sei LEC ein Körper (Fig. 71.), dessen auf LE senkrechte Querschnitte halbe Ellipsen sind, deren halbe Axen FR zu FG und EC zu EB sich wie $c : b$ verhalten; der durch die Axe LE und große Axe CE der Ellipsen gehende Schnitt LEC sei eine Parabel. LE sei $= a$, In dieser Parabel ist $c^2 = pa$, also ihr Parameter $= \frac{c^2}{a}$, und für $EF = z$ ist $FR^2 = p(a - z)$

$$= c^2 - \frac{c^2 z}{a} = \frac{c^2}{a}(a - z),$$

und $FG : FR = b : c$,

also $FG^2 = \frac{b^2}{a}(a - z)$,

und der Schnitt BLD ist folglich auch eine Parabel.

Nenne ich jetzt für irgend ein Theilchen M die Coordinaten $EH = x$, $HI = y$. $IM = z$, so ist dieses Theilchens Masse $= dx \cdot dy \cdot dz$, Moment in Beziehung auf die Axe FG die mit BD parallel ist $= dy x dx \cdot dz$, und folglich des ganzen Parallelepipedi KM, dessen Länge $= x$, Breite $= dy$, Höhe $= dz$, Moment $\frac{1}{2} x^2 dy dz$, und da in dieser Ellipse x sich bis an die Grenze des Körpers erstreckt, wenn

$$x^2 = FR^2 - \frac{FR^2}{FG^2} y^2 = \frac{c^2}{b^2}\left(b^2 - \frac{z b^2}{a} - y^2\right) \text{ ist,}$$

so wird das vollständige Moment

$$= \frac{1}{2} \frac{c^2}{b^2} dz \left\{\left(b^2 - \frac{b^2 z}{a}\right) dy - y^2 \cdot dy\right\}.$$

Aus diesem Momente des kleinen Parallelepipedi KS, wird das Moment der ganzen Scheibe KRG gefunden, indem man so integrirt, daß bloß y als veränderlich angesehen wird. Das Moment der ganzen, in der bestimmten Höhe $= z$ liegenden Scheibe ist also $= \text{Const} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{b^2} dz \left\{\left(b^2 - \frac{b^2 z}{a}\right) y - \frac{1}{3} y^3\right\}$, wenn hier das Integral so genommen wird, daß es für den kleinsten Werth von y, der $= FG = - b \sqrt{\left(1 - \frac{z}{a}\right)}$ ist, verschwindet, und für den größten Werth von $y = FP = b \sqrt{\frac{a - z}{a}}$, seinen vollständigen Werth erhält. Es ist also

$$\text{Const} = + \tfrac{1}{2} \frac{c^2}{b^2} dz \left\{ \tfrac{2}{3} \left(b^2 - \frac{b^2}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right\},$$ und das vollständige Integral $= \frac{2}{3} \frac{c^2}{b^2} dz \left(b^2 - \frac{b^2 z}{a} \right)^{\frac{3}{2}}$, oder das Moment der Scheibe $= \frac{2}{3} \frac{c^2}{b^2} dz \left(b^2 - \frac{b^2 z}{a} \right)^{\frac{3}{2}}$

$$= \tfrac{2}{3} b\, dz \,.\, c^2 \left(1 - \frac{z}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Endlich das Moment des ganzen Körpers in Beziehung auf die Axe BD, $=$ Const $- \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot b \cdot c^2 \cdot a \left(1 - \frac{z}{a} \right)^{\frac{5}{2}}$, und dieses Integral muß zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = a$ genommen werden, giebt also das Moment $= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}\, b\, a\, c^2$ für den ganzen Körper.

Des Körpers ganzer Inhalt wird auf ähnliche Weise gefunden. Des kleinen Parallelepipedi M Inhalt ist $= dx\, dy\, dz$, des Parallelepipedi KM Inhalt $= x\, dy\, dz$. Um dieses Integral vollständig zu erhalten, muß es zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \frac{c}{b} \sqrt{\left\{ b^2 - \frac{b^2 z}{a} - y^2 \right\}}$ genommen werden. Das Parallelepipedum, dessen Breite $= dy$ und Höhe $= dz$, und welches durch den ganzen Körper geht, ist $= \frac{c}{b} dy\, dz \sqrt{\left\{ b^2 - \frac{b^2 z}{a} - y^2 \right\}}$. Hieraus findet sich, wenn man z als unveränderlich ansieht, der Inhalt, der in der bestimmten Höhe $= z$ liegenden Scheibe

$$= \frac{c\, dz}{b} \int dy \sqrt{\left\{ b^2 - \frac{b^2 z}{a} - y^2 \right\}}$$

$$= \frac{c\, dz}{b} \cdot b \sqrt{\frac{(a - z)}{a}} \int dy \sqrt{\left\{ 1 - \frac{a\, y^2}{b^2 (a - z)} \right\}}$$

$$= \frac{c\, b\, dz}{a} (a - z)\, \tfrac{1}{2}\, \text{Arc Sin} \left\{ \frac{y}{b} \sqrt{\frac{a}{a - z}} \right\}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} c\, y\, dz}{b} \sqrt{\left\{ b^2 - \frac{b^2 z}{a} - y^2 \right\}}$$

(nach Pasquich. §. 38. 7. Zus. III.), wenn dieses Integral zwischen den Grenzen genommen wird, welche y bei gleich bleibendem z erlangen kann, das ist zwischen $y = - b \sqrt{\frac{(a - z)}{a}}$ und $= + b \sqrt{\frac{a - z}{a}}$, und dieses giebt für jenes Integral

$= b\,c\,dz\,\frac{(a-z)}{a}\,.\,\frac{1}{2}\,\pi$, weil Arc Sin $\div 1 = -\frac{1}{2}\pi$ und Arc. Sin $1 = \frac{1}{2}\pi$ ist. Endlich erhält man des ganzen Körpers Inhalt $= \frac{\frac{1}{2}\,b\,c\,\pi}{a} \int dz\,(a-z)$, wenn man dieses Integral zwischen den Grenzen $z = o$ und $z = a$ nimmt, und zwischen diesen Grenzen ist es $= \frac{1}{4}\,b\,c\,a\,\pi$.

Denkt man sich diese Masse im Schwerpuncte vereinigt, dessen Abstand von der Ebne BLD $= r$ heißen mag, so soll $\frac{4}{15}\,b\,a\,c^2 = \frac{1}{4}\,b\,c.\,a\,\pi.\,r$ sein, also $r = \frac{16}{15}\,\frac{c}{\pi}$, der Abstand des Schwerpunctes von der Ebne LBD.

Der Abstand des Schwerpuncts von der Ebne BCD wird nun auf ähnliche Art gefunden. Des Theilchens M Moment in Beziehung auf die Ebne BCD ist $= z\,dz.\,dy.\,dx$, also das Moment des ganzen Parallelepipedi, dessen Grundfläche $= dx.\,dy$ ist und das sich senkrecht auf BCD durch den ganzen Körper erstreckt

$$= dy.\,dx.\int z\,dz = dy.\,dx.\,\frac{z^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,dx.\,dy.\,\frac{a^2}{b^4\,c^4}\,(b^2\,c^2 - b^2\,x^2 - c^2\,y^2)^2.$$

Der letztere Ausdruck ist das zwischen den gehörigen Grenzen genommene Integral; denn da der in der Höhe $= z$ liegende Querschnitt des Körpers eine Ellipse ist, deren Axen

$= \sqrt{\frac{b^2\,(a-z)}{a}}$ mit y parallel, und

$= \sqrt{\frac{c^2\,(a-z)}{a}}$ mit x parallel: so liegt in der Höhe $= z$ die Oberfläche des Körpers in den durch

$y^2 = \frac{b^2\,(a-z)}{a} - \frac{b^2}{c^2}\,x^2$ bestimmten Puncten,

oder $z = a - a\,\frac{(c^2\,y^2 + b^2\,x^2)}{b^2\,c^2}$ ist die Gleichung für die Oberfläche des Körpers, also zugleich der größte Werth, den z für ein bestimmtes x und y innerhalb des Körpers erreichen kann.

Der ganzen, durch IHM gelegten Scheibe Moment ist also, weil x unveränderlich bleibt

$$= \frac{1}{2}\,\frac{a^2\,dx}{b^4\,c^4}\left\{ b^4\,(c^2 - x^2)^2\,y - \frac{2b^2\,c^2}{3}\,(c^2 - x^2)\,y^3 + \frac{1}{5}\,c^4\,y^5 \right\},$$

wenn dieses zwischen den Grenzen genommen wird, die y bei einem bestimmten Werthe von x nie übertreffen kann, so lange wir in den bestimmten Grenzen des Körpers bleiben. Diese Grenzwerthe für y sind $= \pm b \sqrt{\frac{c^2 - x^2}{c^2}}$, weil der Ellipse BCD halbe Axen $= b$ und $= c$ sind. Jenes Integral muß also verschwinden für $y = - b \sqrt{\left(\frac{c^2 - x^2}{c^2}\right)}$ und seinen ganzen Werth erhalten für $y = + b \sqrt{\left(\frac{c^2 - x^2}{c^2}\right)}$; und das vollständige Integral wird $= \frac{8}{15} \frac{a^2\, dx}{c^5}\, b\, (c^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}$, und hieraus endlich durch Integration in Beziehung auf x das Moment aller auf x senkrechten Scheiben

$$= \frac{8}{15} \cdot \frac{a^2 b}{c^5} \left\{ \frac{1}{6} x (c^2 - x^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{24} c^2 x (c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{16} c^4 x (c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{16} c^6 \text{Arc Sin}\left(\frac{x}{c}\right) \right\}$$

(nach Pasquich. §. 38. 6. Zusatz III.). Dieses Integral muß zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = c$ genommen werden und sein vollständiger Werth ist also $= \frac{8}{15} \frac{a^2 b}{c^5} \cdot \frac{5}{16} c^6 \cdot \frac{1}{2} \pi$, weil für $x = 0$ alle Glieder verschwinden, und für $x = c$, alle übrigen Glieder abermals verschwinden und bloß das letzte den eben angegebnen Werth $= \frac{a^2 b c \pi}{12}$ erhält.

Eben dieses Moment soll $= \frac{1}{4} b c a \pi . R$ sein, wenn des Schwerpuncts Höhe über der Ebne BCD, $= R$ ist, also $R = \frac{1}{3} a$.

Anmerkung. Die letztere Rechnung wäre etwas bequemer ausgefallen, wenn ich zuerst $dx . dy . zdz$ in Beziehung auf x genommen hätte, dann wäre $z\, dy\, dz \int dx$, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \frac{c}{b} \sqrt{\left(b^2 \frac{(a-z)}{a} - y^2\right)}$ geworden $= \frac{c}{b} zdz\, dy \sqrt{\left(b^2 \frac{(a-z)}{a} - y^2\right)}$. Das Integral hievon, in Beziehung auf y genommen, ist (Pasquich. §. 38. 6. Zus. III.)

$$= \frac{cz\, dz}{b} \left\{ \frac{y}{2} \sqrt{\left(b^2 \frac{(a-z)}{a} - y^2\right)} + \frac{1}{2} \frac{b^2 (a-z)}{a} \text{Arc Sin} \frac{y}{b} \sqrt{\frac{a}{a-z}} \right\}$$

und da dies zwischen den Grenzen $y = -b\sqrt{\frac{a-z}{a}}$

und $y = +b\sqrt{\frac{a-z}{a}}$ genommen wird

$= \frac{1}{2}\pi b c \frac{(a-z)\,z\,dz}{a}$; welches endlich in Beziehung

auf z integrirt giebt $\frac{1}{2}\pi\frac{bc}{a}(\frac{1}{2}az^2 - \frac{1}{3}z^3)$,

oder zwischen den Grenzen $z = o$ und $z = a$,

$\frac{1}{12}\pi b c a^2$, wie vorhin.

VIII. Wir wollen jetzt zur Betrachtung der Drehung um feste Axen übergehn.

Da bei Ebnen, wenn die Drehungsaxe auf sie senkrecht ist, schon in §. 231. die Betrachtung genügend durchgeführt ist, so will ich hier nur diejenigen Ebnen betrachten, die sich um Axen in der Ebne selbst drehen, und dann Körper, die sich um feste Axen drehen.

Es sei (Fig. 65.) ABCD eine Ebne von bekannter Figur und EF die ihrer Lage nach gegebne Umdrehungsaxe: es soll die ganze Gewalt bestimmt werden, welche die Axe wegen der Schwungkraft aller Theile der Ebne auszuhalten hat. Jedes Theilchens M Lage wollen wir durch Abscissen $EL = x$ auf der Axe selbst und Coordinaten $LM = y$ senkrecht gegen die Axe bestimmen. Dann ist des Theilchens M Masse $= dx\,.\,dy$, seine Schwungkraft $= \frac{c'^2\,.\,dx\,dy}{2g\,.\,y}$, wenn c' die Geschwindigkeit bedeutet. Dreht sich nun die Ebne so, daß eines in der Entfernung $= a$ von der Axe liegenden Theilchens Geschwindigkeit $= c$ ist, so ist des in der Entfernung $= y$ liegenden Theilchens Geschwindigkeit $= \frac{c\,.\,y}{a}$, und Schwungkraft $= \frac{c^2\,y\,dx\,dy}{2g\,.\,a^2}$. Man findet also die Summe aller Schwungkräfte für die ganze Ebne, wenn man diese Formel gehörig integrirt. Da nun der ganzen Fläche Inhalt oder Masse $= \int y\,dx$, und der Abstand des Schwerpuncts von der Axe der x, durch $\frac{\int dx \int y dy}{\int y dx}$ ausgedrückt wird, so erhellt, daß der ganzen Masse $= \int ydx$ Schwungkraft, wenn die Masse im Schwerpuncte angebracht wäre, $= \frac{c^2}{2g\,a^2}(\int ydx)\left\{\frac{\int dx \int ydy}{\int ydx}\right\}$ eben so groß ist, als bei der Vertheilung der Masse auf alle Puncte der Ebne.

Um aber die mittlere Richtung des durch die Schwungkraft hervorgebrachten Druckes auf die Axe zu bestimmen, müssen wir überlegen, daß der kleinen in M befindlichen Masse Schwungkraft einen in L auf die Axen senkrechten Druck $= \frac{c^2 y\, dx\, dy}{2g\, a^2}$ hervorbringt, dessen Moment in Beziehung auf den Anfangspunct E, also $= \frac{c^2}{2g\, a^2}\, xy\, dx\, dy$ ist. Man findet die Summe der Momente der Schwungkräfte aller in derselben Senkrechten LM liegenden Theilchen, wenn man $\frac{c^2}{2g\, a^2}\, xy\, dx\, dy$ in Beziehung auf y integrirt und x als beständig ansieht; und die Summe aller Momente wird bei einer zweiten in Beziehung auf x angestellten Integration gefunden, wenn man nach Vollendung der ersten Integration diesem Integrale seinen vollständigen Werth gegeben hat. Diese Summe der Momente aller Schwungkräfte in Beziehung auf E ist also $= \frac{c^2}{2g\, a^2}\iint x\, y\, dx\, dy$, und die gesammte Schwungkraft $= \frac{c^2}{2g\, a^2}\iint y\, dx\, dy$ müßte auf einen Punct P wirken, für den $EP = \frac{\iint x\, y\, dx\, dy}{\iint y\, dx\, dy}$ ist, um eben das Moment zu heben. Der so bestimmte Punct P ist folglich derjenige, durch welchen die mittlere Richtung aller Schwungkräfte geht.

IX. Beispiel. Es drehe sich der Kreis-Quadrant ABC (Fig. 72.) um die Axe AB; man sucht, mit welcher Kraft die Puncte A und B der Axe müssen gehalten werden, um gegen die Schwungkräfte Widerstand genug zu leisten.

Wenn BL = x, LM = y, und der in der Entfernung = BC = a von der Axe liegende Punct die Geschwindigkeit = c hat, so ist des Theilchens M Schwungkraft $= \frac{c^2 y\, .\, dx\, dy}{2g\, a^2}$ und das Moment derselben in Beziehung auf B ist

$$= \frac{c^2\, x\, y\, dx\, dy}{2g\, a^2}.$$

Die Summe der Schwungkräfte aller in KL liegenden Theilchen ist also $= \frac{c^2}{2g\, a^2}\int y\, dx\, dy = \frac{c^2\, x\, .\, ydy}{2g\, a^2}$, oder von x = o bis $x = \sqrt{(a^2 - y^2)}$ genommen, wenn a des Kreises Halbmesser ist $= \frac{c^2 y dy \sqrt{(a^2 - y^2)}}{2g a^2}$; die Summe der Schwungkräfte für alle Theilchen des ganzen Quadranten

$$= \frac{c^2}{2g a^2} \int y dy \sqrt{(a^2 - y^2)} = \text{Const} - \frac{c^2}{6g a^2} (a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}},$$

oder von $y = 0$ bis $y = a$ genommen $= \frac{1}{6} \frac{c^2 a}{g}$.
Die Summe der Momente für aller in LM liegenden Theilchen Schwungkräfte $= \frac{\frac{1}{2} c^2 x dx . y^2}{2g \ ^2}$, oder das Integral vollständig genommen, $= \frac{1}{4} \frac{c^2 xdx}{g} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, und das Moment für alle Theilchen des Quadranten $= \frac{1}{4} \frac{c^2}{g} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} \frac{x^4}{a^2}\right)$, welches vollständig genommen $= \frac{1}{16} \frac{a^2 c^2}{g}$ ist.

Der Punct P der Axe, durch welchen der Mittelpunct der Kräfte geht, liegt folglich so, daß

$$BP = \frac{\frac{1}{16} \frac{a^2 c^2}{g}}{\frac{1}{6} \frac{a c^2}{g}} = \frac{3}{8} a \text{ ist.}$$

Diese Richtung geht nicht durch den Schwerpunct des Quadranten, denn dieser ist um $\frac{4}{3} . \frac{r}{\pi}$ von dem Halbmesser BC entfernt.

Da auf diese Weise die gesammte Schwungkraft und der Punct P, in welchem sie als vereinigt gedacht werden kann, gegeben ist, so läßt sich leicht finden, mit welcher Kraft die Puncte A, B der Axe müßten fest gehalten werden.

X. Wenn ein Körper sich um eine feste Axe dreht, die Summe aller Schwungkräfte und die mittleren Richtungen derselben zu finden.

Es sei AB (Fig. 73) die Umdrehungsaxe und jedes Theilchen M werde durch Abscissen auf dieser Axe BQ $= x$, durch Ordinaten QP $= y$ in einer durch die Axe gelegten Ebne, und durch Ordinaten PM $= z$ auf diese Ebne senkrecht bestimmt. Eines in der Entfernung $= a$ liegenden Theilchens Geschwindigkeit bei der Umdrehung sei $= v$, also des Theilchens M, welches in der Entfernung $= \sqrt{(y^2 + z^2)}$ von der Axe liegt, Geschwindigkeit

$= v \frac{\sqrt{(y^2 + z^2)}}{a}$; dieses Theilchens Masse $= dx \,.\, dy \,.\, dz$ und

Schwungkraft $= \frac{v^2}{2g\, a^2} \sqrt{(y^2 + z^2)} \,.\, dx\, dy\, dz$.

Da diese Schwungkräfte zwar alle senkrecht gegen die Axe, aber nicht alle parallel wirkend sind, so ist es besser, sie nach Richtungen mit y und mit z parallel zu zerlegen. So erhält man für das Theilchen M den mit QP parallelen Theil der Schwungkraft $= \frac{v^2\, y}{2g\, a^2}\, dx\, dy\, dz$, den mit PM parallelen Theil der Schwungkraft $= \frac{v^2\, z}{2g\, a^2}\, dx\, dy\, dz$, das Moment der erstern in Beziehung auf den Punct B $= \frac{v^2}{2g\, a^2}\, x \,.\, y \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz$; das Moment der letztern in Beziehung auf denselben Punct B,

$$= \frac{v^2}{2g\, a^2}\, x \,.\, z \,.\, dx\, dy\, dz.$$

Stellt also R den Mittelpunct der mit sämmtlichen QP parallelen Schwungkräfte vor, so muß $BR = \frac{\iiint x\, y\, dx\, dy\, dz}{\iiint y\, dx\, dy\, dz}$ sein; und wenn S der Mittelpunct aller mit BC oder PM parallelen Kräfte ist, $BS = \frac{\iiint x\, z\, dx\, dy\, dz}{\iiint z\, dx\, dy\, dz}$.

XI. Beispiel. Es drehe sich der Quadrant BECL (Fig. 71.) des elliptisch-parabolischen Körpers (in VII.) um die Axe EL, und es sei für irgend ein Theilchen M, $EF = x$, $FK = y$, $KM = z$, so werden die dreifachen Integrale auf folgende Art bestimmt.

Wenn alles wie in VII. ist, so haben wir wie dort die Gleichung für die Oberfläche des Körpers

$x = a - \frac{a}{b^2\, c^2}(c^2\, y^2 + b^2\, z^2)$, indem die dort mit z bezeichnete Abscisse hier x, die dort mit x bezeichnete hier z heißt; da aber nur ein Quadrant der elliptischen Durchschnitte soll betrachtet werden, so ist darauf bei den Integrationen Rücksicht zu nehmen.

Das Integral $\iiint x\, y\, dx \,.\, dy \,.\, dz$ giebt, in Beziehung auf y integrirt, $= \frac{1}{2} \iint y^2\, x\, dx \,.\, dz$, oder zwischen den Grenzen

$y = o$ und $y = \sqrt{\left(\frac{(a-x)}{a} b^2 - \frac{b^2 z^2}{c^2}\right)}$

$$= \frac{b^2}{2} \iint \left\{ x\, dx \,.\, dz \left(\frac{a-x}{a} - \frac{z^2}{c^2} \right) \right\},$$

als Werth des Momentes für das ganze parallel mit FK liegende Parallelepipedum, dessen Lage durch x und z bestimmt ist und das sich durch den ganzen Körper erstreckt. Ferner $\frac{b^2}{2} \iint \left\{ x\, dx \,.\, dz \left(\frac{a-x}{a} - \frac{z^2}{c^2} \right) \right\}$ in Beziehung auf z integrirt $= \frac{b^2}{2} \int \left\{ x dx \left(\frac{(a-x)\, z}{a} - \frac{z^3}{3c^2} \right) \right\}$, von $z = o$ bis $z = c \sqrt{\left(\frac{a-x}{a}\right)}$ genommen, giebt

$= \frac{b^2}{2} \int \left\{ x dx \,.\, \frac{2}{3} c \,.\, \left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$. Bei dieser Integration ist das Moment der ganzen Scheibe KSRF gefunden, und wenn man aufs neue integrirt, so ist $= \frac{1}{3} b^2 c \int \left\{ x dx \left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$

$= -\frac{1}{3} b^2 c \left\{ \frac{2}{5} \sqrt{\frac{(a-x)^5}{a}} - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{(a-x)^7}{a^3}} \right\}$ (Pasquich. §. 33. 1. Zusatz), das ist, zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = a$, $= \frac{4}{3.5.7} b^2 a^2 c$.

Dagegen ist $\iiint y\, dx\, dy\, dz$ in Beziehung auf eben die Grenzen $= \frac{1}{3} b^2 c \int dx \left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = (-\frac{1}{3} b^2 c \frac{\frac{2}{5} (a-x)^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$,

und zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = a$,

$$= \frac{2}{15} \,.\, b^2 c\, a,$$

also $\frac{\iiint x\, y\, dx\, dy\, dz}{\iiint y\, dx\, dy\, dz} = \frac{2}{7} a$. Der Mittelpunct aller mit EB parallelen Kräfte, die aus den Schwungkräften entstehen, liegt also in der Höhe $= \frac{2}{7} a$ oberhalb E; die Summe dieser Schwungkräfte selbst aber ist $= \frac{v^2}{2g\, a^2} \,.\, \frac{2}{15} b^2 c \,.\, a = \frac{1}{15} \,.\, \frac{v^2 b^2 c}{g\, a}$, wenn nämlich die Cubic-Einheit unsrer Körpermessung zugleich als Gewichts-Einheit oder als Maaß zur Abmessung des Druckes angenommen wird.

Um für die mit EC parallelen Kräfte eben so die Bestimmungen zu erhalten, findet man folgendes:

$$\iiint x\, z\, dx\, dy\, dz = \tfrac{1}{2} \iint x\, dx\, dy\, z^2,$$

$$= \tfrac{1}{2}\, c^2 \iint \left\{ x\, dx\, .\, dy\, .\left(\frac{(a-x)}{a} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right\};$$

$$= \tfrac{1}{2}\, c^2 \int \left\{ x dx\, .\left(y\, \frac{(a-x)}{a} - \tfrac{1}{3} \frac{y^3}{b^2} \right) \right\};$$

$$= \tfrac{1}{3}\, c^2\, b \int x dx \left(\frac{a-x}{a} \right)^{\frac{3}{2}};$$

$$= \text{Const} - \tfrac{1}{3}\, b\, c^2 \left\{ \tfrac{2}{5} \sqrt{\frac{(a-x)^5}{a}} - \tfrac{2}{7} \sqrt{\frac{(a-x)^7}{a^3}} \right\};$$

$$= \frac{4}{3\,.\,35}\, .\, b\, c^2\, a^2.$$

Und $\iiint z\, dx\, dy\, dz = \tfrac{2}{15}\, .\, b\, c^2\, a$, also

$$\frac{\iiint x\, z\, dx\, dy\, dz}{\iiint z\, dx\, dy\, dz} = \tfrac{2}{7}\, a.$$

XII. Hier liegen also die mittleren Richtungen der sämmtlichen Schwungkräfte in der Höhe $= \tfrac{2}{7}\, a$, und könnten alle in eine einzige Kraft vereinigt werden. Dieses ist nicht in allen Fällen möglich. Warum es grade hier eintritt, ist leicht zu übersehen. Denkt man sich die ganzen Körper in dünne Scheiben, senkrecht auf die Axe zerschnitten: so wirkt jede Scheibe so auf die Axe, als ob die ganze Masse der Scheibe im Schwerpuncte vereinigt wäre. Liegen nun aller einzelnen Scheiben Schwerpuncte in einer einzigen durch die Axe gehende Ebne, so wie es hier der Fall ist, so ist es immer möglich, die gesammten Schwungkräfte in eine einzige Mittelkraft zu vereinigen, deren Richtung in eben der Ebne senkrecht gegen die Axe ist. Dieses ist hingegen nicht möglich, wenn die Schwerpuncte der einzelnen Schichten nicht in einer und derselben durch die Axe gelegten Ebne liegen. Daß sie hier in einerlei Ebne liegen, kömmt daher, weil alle diese Scheiben ähnliche Ellipsen sind, deren übereinstimmende Hauptaxen parallel liegen.

Funfzehnter Abschnitt.

Von der durch beschleunigende Kräfte bewirkten Aenderung in der Drehung fester Körper um ihre Axen, und vom Momente der Trägheit.

§. 241. **Bemerkung.** Wenn auf die Masse M (Fig. 74.), die mit dem Puncte C fest verbunden und um ihn frei beweglich ist, eine bewegende Kraft unaufhörlich senkrecht auf CM wirkt: so wird die kreisförmige Bewegung der Masse M eben so beschleuniget werden, wie es bei gradlinigter Bewegung der Fall sein würde. Denn da der im Kreise bewegte Körper, schon ohne Einwirkung einer neuen Kraft, die erlangte Geschwindigkeit ungeändert behalten würde, so wird nun die beständig fortwirkende bewegende Kraft, der Masse M in jedem Zeittheilchen eine gleiche Vermehrung der Geschwindigkeit ertheilen; diese erlangte Geschwindigkeit wird folglich der Zeit proportional sein, und es läßt sich leicht aus den Schlüssen des 30. §. übersehen, daß der im Kreise durchlaufene Weg der Masse M auch hier dem Quadrate der Zeit proportional sein wird, wenn die Bewegung ohne anfängliche Geschwindigkeit begann.

Da hier also, wenn die anfängliche Geschwindigkeit $= 0$, die bewegende Kraft $= P$, also die beschleunigende Kraft $= \frac{P}{M}$ war, die Geschwindigkeit $= v$ durch $v = 2g \cdot \frac{P}{M} \cdot t$ ausgedrückt wird, wenn g der vermöge der beschleunigenden Kraft $= 1$ in der Zeit-Einheit durchlaufene Weg ist: so ist auch, wenn der Masse M

Abstand vom Centro $= r$ ist, die Winkelgeschwindigkeit §. 230. $= \frac{v}{r} = \frac{2g}{r} \cdot \frac{P}{M} \cdot t$ der Zeit proportional. Nennt man den ganzen Winkel, um welchen die Masse M in der Zeit $= t$ fortgerückt ist $= \sigma$, so ist $\sigma = \frac{g}{r} \cdot \frac{P}{M} \cdot t^2$, wenn der Körper die Entfernung $= r$ vom Mittelpuncte C hat; denn des Körpers ganzer Weg wäre $= g \cdot \frac{P}{M} \cdot t^2$, also der Winkel $= \sigma = \frac{g}{r} \cdot \frac{P}{M} \cdot t^2$.

§. 242. Bemerkung. Wenn die bewegende Kraft nicht auf die Masse M unmittelbar wirkt, sondern (Fig. 74.) in der Entfernung CN $= \varrho$ vom Mittelpuncte C senkrecht auf CN angebracht ist, statt daß die Masse M sich in der Entfernung CM $= \varrho$ vom Mittelpuncte befindet: so wird (Statik. §. 88.) eine solche in N angebrachte Kraft $= Q$ eben das bewirken, was eine Kraft $= \frac{Q \cdot \varrho}{r}$ in M angebracht bewirken würde, und folglich bringt jene Kraft Q, indem sie die Zeit $= t$ durch wirket, eine wahre Geschwindigkeit $= 2g \cdot \frac{Q \cdot \varrho \cdot t}{r \cdot M}$, oder eine Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2g \cdot \varrho \cdot Q \cdot t}{r^2 \cdot M}$ hervor.

Eben die Kraft hätte also einer Masse $= M'$ in der Entfernung $= r'$ vom Mittelpuncte, die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2g \cdot \varrho \cdot Q \cdot t}{r'^2 \cdot M'}$ ertheilt, wenn sie diese Masse allein in Bewegung setzen sollte.

§. 243. Es ist nun zwar einleuchtend, daß eine Kraft $= 2Q$ jene beiden Massen M, M′ zugleich in Bewegung setzen, und beiden die eben gefundenen Winkelgeschwindigkeiten ertheilen könnte; aber wenn M, M′ unter sich fest verbunden sind, so können sie diese Bewegungen nur dann zu gleicher Zeit annehmen, wenn die Winkelgeschwindigkeiten beider gleich sind, also wenn in unsern Formeln $r^2 . M = r'^2 . M'$ ist. In jedem andern Falle müßte die eine der Massen, um mit der andern in gleichem Maaße fortzugehen, eine größere oder kleinere Geschwindigkeit annehmen, als sie für sich allein erlangt hätte, und folglich würde nicht genau die Hälfte der Kraft $2Q$ zu Bewegung der einen und die Hälfte derselben Kraft zu Bewegung der andern Masse verwandt werden.

§. 244. Lehrsatz. Wenn eine bewegende Kraft $= Q$, die in N senkrecht auf den um C beweglichen Hebelarm CN wirkt, die an dem Hebelarm in den Entfernungen r, r' befestigten Massen M und M' mit dem ganzen Hebelarme (der hier als ohne Masse gedacht wird,) in Bewegung setzen soll: so wird die gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit beider Massen $= \frac{2g . \varrho . t . Q}{r^2 M + r'^2 M'}$, wenn die Kraft $= Q$ in der Entfernung $= \varrho$ vom Drehungspuncte angebracht ist.

Beweis. Wir wollen uns die Kraft $= Q$ in zwei Theile $= q$ und $= Q - q$ zerlegt denken, deren erster ganz verwandt wird, um die Masse $= M$, der zweite um die Masse $= M'$ in Bewegung zu setzen: so erhält (§. 242.) die erstere Masse die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2g . \varrho . q . t}{r^2 M}$, die zweite Masse die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2g . \varrho . (Q - q) . t}{r'^2 . M'}$.

Da beide Massen fest verbunden sind, so müssen ihre Winkelgeschwindigkeiten gleich, folglich

$$\frac{q}{r^2 M} = \frac{Q - q}{r'^2 M'} \text{ sein, oder}$$

$$\frac{q}{r^2 M} + \frac{q}{r'^2 M'} = \frac{Q}{r'^2 M'},$$

das ist $q = \frac{Q . r^2 M}{r^2 M + r'^2 M'}$, und die gleiche Geschwindigkeit beider Massen wird

$$= \frac{2g \cdot \varrho \cdot t \cdot Q}{r^2 M + r'^2 M'}.$$

§. 245. Die bewegende Kraft $= Q$ wird also unter die in Bewegung zu setzenden Massen nicht nach Verhältniß der Massen, sondern so ausgetheilt, daß $q : Q - q = r^2 M : r'^2 M'$ ist, also so, daß die Theile der Kraft sich wie die Producte aus den Massen in die Quadrate der Entfernungen derselben vom Drehungspuncte verhalten.

Hierin liegt eine merkwürdige Abweichung der Gesetze der Drehungsbewegung von dem, was wir bei der fortrückenden, gradlinigten Bewegung gesehen haben. Wirkt eine Kraft $= Q$, um eine Masse $= M$ in gradlinigte Bewegung zu setzen, und ertheilt sie dieser Masse in bestimmter Zeit t die Geschwindigkeit $= u$: so würde eben die Kraft, eben die Zeit durch, auf die Masse $M + N$ wirkend, dieser die Geschwindigkeit $v = \frac{u \cdot M}{M + N}$ ertheilen; oder die Kraft Q theilt sich auf die Massen M und N ihnen proportional so aus, daß der ersteren der Theil $= \frac{M \cdot Q}{M + N}$, der anderen der Theil $= \frac{N \cdot Q}{M + N}$ der Kraft zufällt. Wirkten nämlich diese Kräfte einzeln auf die Massen: so ertheilten sie ihnen in der Zeit $= t$ die Geschwindigkeiten $v = \frac{2gt \cdot \frac{M \cdot Q}{M+N}}{M} = \frac{2gt \cdot \frac{N \cdot Q}{M+N}}{N}$, statt daß die Kraft $= Q$ der einzigen Masse $= M$ die Geschwindigkeit $= u = 2gt \cdot \frac{Q}{M}$ ertheilen würde, und es ist $v = \frac{u \cdot M}{M + N}$. Soll dagegen die Kraft Q eine Drehung bewirken und dabei die in ungleichen Entfernungen r und r′ vom Mittelpuncte der Drehung liegenden Massen M und M in Bewegung setzen, so theilt sich Q nicht in

Theile den Massen proportional unter diese aus, sondern die Theile q und Q — q sind den Producten r^2 M und r'^2 M' proportional. Dieses rührt, wie aus §. 245. erhellt, daher, weil die in der Entfernung = ϱ angebrachte Kraft = Q, theils schon, vermöge der Gleichheit der statischen Momente, stärker wirkt auf die dem Centro nähere Masse und theils auch diese einer minderen wahren Geschwindigkeit bedarf, um eben die Winkelgeschwindigkeit zu erhalten, die der entferntern Masse ertheilt wird. Wegen dieser doppelten Einwirkung des größern oder kleinern Abstandes vom Centro theilt sich die Kraft so aus, wie es das Verhältniß des Productes aus M in r^2 zu dem Producte aus M' in r'^2 fordert.

§. 246. **Erklärung.** Unter dem **Momente der Trägheit einer Masse** versteht man dieses Product der Masse in das Quadrat ihres Abstandes vom Drehungspuncte.

§. 247. Es kann von einem Momente der Trägheit nur bei Drehungsbewegung um eine Axe die Rede sein, indem nur bei der Umdrehung, jede Masse nicht im Verhältnisse der Masse allein, der bewegenden Kraft widersteht, sondern im Verhältnisse ihres Momentes der Trägheit. Um ganz strenge zu reden (da ein Product aus der Masse in das Quadrat des Abstandes ein unpassender Ausdruck ist), verhält sich dieses Moment der Trägheit mehrerer in Drehungsbewegung zu setzender Massen direct wie die Massen und direct wie die Quadrate der Abstände von der Axe der Umdrehung.

§. 248. **Lehrsatz.** Ein fester Körper, den wir bloß in den Puncten M, M', M'' als mit Massen = M, = M', = M'' belastet ansehen, werde in einem Puncte Q von einer bewegenden Kraft = Q zur Bewegung um die festgehaltene Axe AB angetrieben (Fig. 75.). Die Richtung der Kraft sei senkrecht gegen das von Q auf die Axe AB gezogne Perpendikel PQ und in einer auf die Axe senkrechten Ebne; dann wird jede der fest verbundenen Massen M, M′, M″ durch eine bewegende Kraft, die ihrem Momente der Trägheit proportional ist, zur Bewegung angetrieben.

Beweis. Von den Puncten M, M′, M″, in welchen sich die Massen befinden, ziehe man Senkrechte MN, M′N′, M″N″ gegen die unbewegliche Axe, so ist, wenn MN = r, M′N′ = r′, M″N″ = r″, das Moment der Trägheit der drei Massen durch $r^2 M$, $r'^2 M'$, $r''^2 M''$ ausgedrückt. Nenne ich nun die aus der Austheilung der Kraft Q auf jede der Massen kommenden bewegenden Kräfte = q, = q′, = q″, wo offenbar die letztere = Q — q — q′ ist, so ist, wenn PQ = ϱ, die Winkelgeschwindigkeit (§. 242.) der drei Massen

$$= \frac{2g \cdot q \cdot \varrho \cdot t}{r^2 \cdot M};$$

$$= \frac{2g \cdot q' \cdot \varrho \cdot t}{r'^2 M'};$$

$$= \frac{2g\,(Q - q - q')\,\varrho \cdot t}{r''^2 M''}.$$

Diese müssen gleich sein, da der ganze Körper sich als feste Masse dreht, also

$$\frac{q}{r^2 M} = \frac{q'}{r'^2 M'} = \frac{Q - q - q'}{r''^2 M''},$$

das ist $\dfrac{q}{r^2 M} = \dfrac{Q - q - q \cdot \frac{r'^2 M'}{r^2 M}}{r''^2 M''}$,

also $q\,(r^2 M + r'^2 M' + r''^2 M'') = Q \cdot r^2 M$,

oder $q = \dfrac{Q \cdot r^2 M}{r^2 M + r'^2 M' + r''^2 M''}$,

und eben so $q' = \dfrac{Q \cdot r'^2 M'}{r^2 M + r'^2 M' + r''^2 M''}$,

$$q'' = \frac{Q \cdot r''^2 M''}{r^2 M + r'^2 M' + r''^2 M''},$$

also die bewegenden Kräfte, die zur Beschleunigung der einzelnen Massen verwandt werden, den Momenten der Trägheit dieser Massen proportional. Aus diesen Betrachtungen erhellt, daß die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit immer von dem Momente der Trägheit abhängt, auch wenn wir jedes Theilchen des Körpers als eine in Bewegung zu setzende Masse ansehn.

§. 249. Aufgabe. Wenn jedes Theilchen der graden, um den festen Punct G beweglichen Linie AB (Fig. 67.), mit einer, seiner Länge proportionalen Masse beschwert ist, das Moment der Trägheit der ganzen Linie in Beziehung auf eine gegen sie senkrechte Axe zu finden.

Auflösung. Es sei AG = a, GB = b, also a + b die Länge der ganzen Linie: so ist, wenn ich jedes Theilchens Masse durch seine Länge ausdrücke, der ganzen Linie Trägheitsmoment in Beziehung auf den Drehungspunct G

$$= \tfrac{1}{3}(a^3 + b^3).$$

Beweis. Es sei die ganze Länge = b in n gleiche Theile getheilt: so ist des zunächst an G liegenden ersten Theiles Masse $= \frac{1}{n}b$, und Trägheitsmoment größer als 0, aber als $\frac{1}{n}b \cdot (\frac{1}{n}b)^2$;
des zweiten Theilchen Trägheitsmoment

$$> \tfrac{1}{n}b \cdot (\tfrac{1}{n}b)^2 \text{ und } < \tfrac{1}{n}b \cdot \left(\tfrac{2}{n}b\right),$$

des dritten Theilchens Trägheitsmoment

$$> \tfrac{1}{n}b \cdot \left(\tfrac{2}{n}b\right)^2 \text{ und } < \tfrac{1}{n}b \cdot \left(\tfrac{3}{n}b\right)^2 \text{ u. s. w.};$$

nämlich allemal größer als das Product aus der Masse in das Quadrat der Entfernung des am nächsten gegen G zu liegenden Punctes derselben, und kleiner als das Product aus der Masse in das Quadrat der Entfernung des am weitesten von G entfernten Punctes derselben.

Offenbar ist also des ganzen Theiles GB = b Trägheitsmoment größer als

$$\frac{1}{n^3}b^3(1+4+9+16+++(n-1)^2)$$

und kleiner als $\frac{1}{n^3}b^3(1+4+9+16+\ldots\ldots+n^2)$.

Aber die Summe der Reihen ist, wie ich sogleich beweisen werde

$$1+2^2+3^2+++(n-1)^2 = \frac{(n-1)}{6}(2(n-1)^2+3(n-1)+1)$$

und $1+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2 = \frac{n}{6}(2n^2+3n+1)$;

also das Moment der Trägheit

$$> b^3\left\{\tfrac{1}{3}\,\frac{(n-1)^3}{n^3}+\tfrac{1}{2}\,\frac{(n-1)^2}{n^3}+\tfrac{1}{6}\,\frac{(n-1)}{n^3}\right\}$$

und $< b^3\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right\}$,

oder $> b^3\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right\}$,

$$< b^3\left\{\tfrac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right\}.$$

Diese Grenzen gelten immer, wie groß man auch n oder die Anzahl der Theile nehme, und da beide Grenzen sich dem Werthe $= \frac{1}{3}\, b^3$ immer mehr und so nahe man will nähern, so ist $\frac{1}{3}\, b^3$ der wahre Werth des Moments der Trägheit, weil man eigentlich die angenommenen Theilchen bis ins Unendliche verkleinern sollte.

Eben so findet man für den andern Theil $= a$ der Linie, das Moment der Trägheit $= \frac{1}{3}\, a^3$, und dieses kömmt zu jenem hinzu, weil die bewegende Kraft bei hervorzubringender Bewegung sowohl die eine als die andre Masse in Bewegung setzen muß.

§. 250. Daß aber allemal die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen bis zur Zahl n so ausgedrückt wird, daß

$$1+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots\ldots+n^2 = \tfrac{1}{3}\,n^3+\tfrac{1}{2}\,n^2+\tfrac{1}{6}\,n$$

läßt sich so beweisen:

Diese Regel gilt für $n = 1$, da dann

$$1 = \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6};$$

sie gilt für $n = 2$, da $1+4 = \frac{1}{3}\cdot 8+\frac{1}{2}\,4+\frac{2}{6}$ ist;

sie muß aber für $n = r + 1$ gelten, wenn sie für $n = r$ gilt, weil

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + r^2 + (r+1)^2$$
$$= \tfrac{1}{3}(r+1)^3 + \tfrac{1}{2}(r+1)^2 + \tfrac{1}{6}(r+1)$$

ist, wenn

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + r^2 = \tfrac{1}{3}r^3 + \tfrac{1}{2}r^2 + \tfrac{1}{6}r$$

war. Es ist nämlich, wenn man gehörig entwickelt,

$$\tfrac{1}{3}r^3 + \tfrac{1}{2}r^2 + \tfrac{1}{6}r + (r+1)^2 = \tfrac{1}{3}r^3 + \tfrac{3}{2}r^2 + \tfrac{13}{6}r + 1$$
$$= \tfrac{1}{3}(r+1)^3 + \tfrac{1}{2}(r+1)^2 + \tfrac{1}{6}(r+1),$$

und die Regel ist folglich für $n = 3$ richtig, wenn sie für $n = 2$ richtig war u. s. w. (*)

§. 251. Wäre die in §. 249. betrachtete Linie in ihrem Schwerpuncte unterstützt, so wäre das Moment der Trägheit $= \frac{2}{3}a^3$, oder weil ihre ganze Länge $= 2a$ wäre, $= \frac{1}{12}(2a)^3 = \frac{1}{6}M(2a)^2$; wenn ihre ganze Masse $= M = 2a$ ist.

§. 252. Alles dieses gilt in Beziehung auf eine Drehung um eine auf die Richtung der Linie selbst senkrechte Axe. Sollte die Linie AB (Fig. 67.) sich um eine durch G gehende, aber gegen diese Linie unter einem Winkel $= \eta$ geneigte Axe drehen: so hätte man jede kleine Masse $M = \frac{1}{n}b$ mit dem Quadrate des senkrechten Abstandes von der Axe $= \frac{r}{n}b . \sin\eta$ multipliciren müssen, wenn der Masse Abstand von G, $= GM = \frac{rb}{n}$ war. Hieraus erhellt schon, daß das Moment der Trägheit am größten wird, für die auf AB senkrechte Axe, offenbar deswegen, weil bei gleicher Winkelgeschwindigkeit die sämmtlichen Theile der Linie die größten Geschwindigkeiten erhalten, wenn sie möglichst weit von der Axe entfernt sind, oder wenn AB auf diese Axe senkrecht ist.

(*) Ein ähnlicher Beweis hätte sich auch in der Statik. §. 200. gebrauchen lassen.

§. 252*. Aufgabe. Ein Dreieck ABC (Fig. 76.) von gegebner Gestalt, dreht sich um eine, der Seite AC parallele Axe DE; man sucht das Moment der Trägheit in Beziehung auf diese Axe.

Auflösung. Es sei der Abstand der Axe DE von der Seite AC, $= f$; die ganze Höhe des Dreieckes $= BH = h$, die Grundlinie $AC = b$: so ist das Moment der Trägheit des ganzen Dreiecks

$$= \tfrac{1}{12}\,\frac{b}{h}\,((h-f)^4 + f^4) - \tfrac{1}{3}\,b\,f^3.$$

Beweis. Denkt man sich die senkrechte Entfernung BK der Spitze von der Axe in n gleiche Theile getheilt, die also jeder $= \frac{1}{n}(h-f)$ sind, und läßt IM einen derselben vorstellen, der der $(m+1)$te heißen mag: so ist $MK = \frac{m}{n}(h-f)$ und $IK = \frac{m+1}{n}(h-f)$. Die durch diese Theilungspuncte gezogenen, der Axe parallelen Linien sind also $LN = \frac{b\,.(h-f-\frac{m}{n}(h-f))}{h}$

$$= \frac{b}{h}(h-f)\left(\frac{n-m}{n}\right)$$

$$\text{und } FG = \frac{b}{h}(h-f)\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right).$$

Des Streifchens FGNL Inhalt ist also kleiner als

$\frac{1}{n}(h-f).\frac{b}{h}(h-f)\left(\frac{n-m}{n}\right)$ u. zugleich größer als $\frac{1}{n}(h-f).\frac{b}{h}(h-f)\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)$. Das Moment der Trägheit ist also, wenn man den Inhalt einmal in das Quadrat der zu großen Entfernung $= \frac{m+1}{n}(h-f)$, das andre Mal in das Quadrat der zu kleinen Entfernung $= \frac{m}{n}(h-f)$ multiplicirt, größer als $\frac{1}{n^4}(h-f)^4 \frac{b}{h} \cdot m^2 (n-m-1)$,

und kleiner als $\frac{1}{n^4}(h-f)^4 \frac{b}{h}(m+1)^2 (n-m)$.

Es erhellt nun wohl, daß das Moment der Trägheit des ganzen Dreiecks BDE gefunden wird, wenn man nach und nach für m alle Zahlen von o bis $n-1$ setzt, und daß also dieses Dreiecks Trägheitsmoment

$$> \frac{1}{n^4}(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ o \cdot (n-1) + 1^2 \cdot (n-2) + 2^2 \cdot (n-3) + \ldots\ldots + (n-2)^2 (n-(n-1)) + (n-1)^2 (n-n) \right\}$$

und $$< \frac{1}{n^4}(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ 1^2 \cdot n + 2^2 \cdot (n-1) + 3^2 \cdot (n-2) + \ldots\ldots + (n-1)^2 (n-(n-2)) + n^2 \cdot (n-(n-1)) \right\}.$$

Diese Grenzen lassen sich auch so ausdrücken

$$> \frac{1}{n^4}(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ \begin{array}{l} n(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n-1)^2) \\ -1^2 \cdot 2 - 2^2 \cdot 3 - 3^2 \cdot 4 - \ldots\ldots - (n-1)^2 \cdot n \end{array} \right\}$$

und

$$< \frac{1}{n^4}(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ \begin{array}{l} n(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+n^2) \\ -1 \cdot 2^2 - 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 4^2 - \ldots\ldots - (n-1) \cdot n^2 \end{array} \right\}$$

Da wir nun schon wissen, daß (§. 250.)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2 = \tfrac{1}{3}(n-1)^3 + \tfrac{1}{2}(n-1)^2 + \tfrac{1}{6}(n-1)$$

und sich leicht zeigen läßt, daß

$$1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \ldots\ldots + (n-1)^2 \cdot n = \tfrac{1}{4}n^4 - \tfrac{1}{6}n^3 - \tfrac{1}{4}n^2 + \tfrac{1}{6}n,$$

so ist die erste Grenze

$$\frac{1}{n^4}(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{3}n(n-1)^3 + \tfrac{1}{2}n(n-1)^2 + \tfrac{1}{6}n(n-1) \\ -(\tfrac{1}{4}n^4 - \tfrac{1}{6}n^3 - \tfrac{1}{4}n^2 + \tfrac{1}{6}n) \end{array} \right\}$$

oder

$$(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{n}(\tfrac{1}{6} - 1 + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{n^2}(\tfrac{1}{4} + 1 - 1 + \tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{n^3}(-\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}) \right\}.$$

Für die zweite Grenze haben wir, aus §. §. 250.
$$1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n,$$
und es ist ferner, wie wir sogleich sehen werden
$$1.2^2+2.3^2+3.4^2+\ldots+(n-1)n^2$$
$$=\tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{6}n^3-\tfrac{1}{4}n^2-\tfrac{1}{6}n,$$
also die zweite Grenze
$$(h-f)^4.\frac{b}{h}\left\{\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{n}+\tfrac{5}{12}.\frac{1}{n^2}+\tfrac{1}{6}.\frac{1}{n^3}\right\}.$$

Das Moment der Trägheit des Stückes BDE ist also $=\tfrac{1}{12}.\frac{b}{h}(h-f)^4$, weil es, wie groß man auch n nehme, zwischen den Grenzen
$$(h-f)^4.\frac{b}{h}\left\{\tfrac{1}{12}-\frac{1}{3n}+\frac{5}{12n^2}-\frac{1}{6n^3}\right\}$$
und $(h-f)^4.\frac{b}{h}\left\{\tfrac{1}{12}+\frac{1}{3n}+\frac{5}{12n^2}+\frac{1}{6n^3}\right\}$
liegt.

Zerlegt man auf eben die Art KH in n gleiche Theile, so ist, wenn $Km=\frac{m}{n}f$, $Ki=\frac{(m+1)}{n}f$ ist,
$$ln=\frac{b.(h-f+\frac{m}{n}f)}{h};$$
$$fg=\frac{b}{h}\left(h-f+\frac{m+1}{n}f\right),$$
also $lngf>\frac{b}{h}.\tfrac{1}{n}f.\left\{h-\left(\frac{n\quad m}{n}\right)f\right\};$
$$<\frac{b}{h}.\tfrac{1}{n}f\left(h-\frac{n-(m+1)}{n}f\right);$$ und das Moment der Trägheit dieses kleinen Trapezes
$$>\frac{m^2}{n^2}f^2.\frac{b}{h}.\tfrac{1}{n}f\left(h-\frac{n-m}{n}f\right),$$
und $<\frac{(m+1)^2}{n^2}f^2.\frac{b}{h}.\tfrac{1}{n}f\left(h-\frac{n-(m+1)}{n}f\right);$

das ist $> f^3 . b . \frac{m^2}{n^3} - \frac{b\,f^4}{h} . \frac{m^2(n-m)}{n^4}$;

und $< f^3 . b . \frac{(m+1)^2}{n^3} - \frac{b\,f^4}{h} . \frac{(m+1)^2(n-m-1)}{n^4}$.

Das Trägheitsmoment des ganzen diesseits der Axe liegenden Stückes ist also, da man nach und nach für m alle Werthe von o bis n — 1 setzen muß, größer als

$$\left\{\begin{array}{l} b\,f^3 . \frac{1}{n^3}(0+1^2+2^2+3^2+\ldots.+(n-1)^2) \\ -\frac{b\,f^4}{h}\ \frac{1}{n^3}(0+1^2+2^2+\ldots.+(n-1)^2) \\ +\frac{b\,f^4}{h}.\frac{1}{n^4}(0+1^3+2^3+3^3+\ldots.+(n-1)^3) \end{array}\right\};$$

und kleiner als

$$\left\{\begin{array}{l} b\,f^3 . \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2) \\ -\frac{b\,f^4}{h}.\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2) \\ +\frac{b\,f^4}{h}.\frac{1}{n^4}(1^3+2^3+3^3+\ldots.+n^3) \end{array}\right\}$$

das ist

$$> \left(\frac{f^3 b}{n^3} - \frac{f^4 b}{h.n^3}\right)\left(\tfrac{1}{3}(n-1)^3+\tfrac{1}{2}(n-1)^2+\tfrac{1}{6}(n-1)\right)$$
$$+\frac{f^4 b}{h.n^4}\left(\tfrac{1}{4}(n-1)^4+\tfrac{1}{2}(n-1)^3+\tfrac{1}{4}(n-1)^2\right);$$

$$\text{und} < \left(\frac{f^3 b}{n^3} - \frac{f^4 b}{h.n^3}\right)\left(\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n\right)$$
$$+\frac{f^4 b}{h.n^4}\left(\tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{1}{4}n^2\right).$$

Diese Grenzen nähern sich dem Werthe $= \frac{1}{3}\,b\,f^3 - \frac{1}{12}\frac{b}{h}f^4$, je mehr und mehr, je größer man n nimmt und folglich ist dieses der Ausdruck für das Moment der Trägheit des untern Trapezes. Daher ist das gesammte

Moment der Trägheit

$$= \frac{1}{12}\frac{b}{h}((h-f)^4 - f^4) + \frac{1}{3} b f^3.$$

§. 253. In diesem Beweise ist die Summe einiger Reihen als bekannt angenommen. Die Richtigkeit dieser Summen läßt sich leicht zeigen. Daß zuerst die Summe aller Cubiczahlen bis zum Cubus der Zahl n durch $= \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2$ ausgedrückt wird, ist offenbar richtig für $n = 1$, wo jener Werth $= 1$ wird, und für $n = 2$, wo er $= 8 + 1$ wird. Es läßt sich aber allgemein zeigen, daß er für $n = m + 1$ richtig bleibt, wenn er für $n = m$ richtig war, oder daß

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + (m+1)^3$$
$$= \frac{1}{4}(m+1)^4 + \frac{1}{2}(m+1)^3 + \frac{1}{4}(m+1)^2 \text{ ist,}$$

wenn $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + m^3$

$$= \frac{1}{4} m^4 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{1}{4} m^2 \text{ war;}$$

denn die Glieder

$\frac{1}{4} m^4 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{1}{4} m^2 + (m+1)^3$ lassen sich durch

$$= \frac{1}{4}(m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1)$$
$$+ \frac{1}{2}(m^3 + 3m^2 + 3m + 1) + \frac{1}{4}(m^2 + 2m + 1)$$

darstellen, welches $= \frac{1}{4}(m+1)^4 + \frac{1}{2}(m+1)^3 + \frac{1}{4}(m+1)^2$ ist.

Hieran schließt sich leicht der Beweis, daß

$$1^2 . 2 + 2^2 . 3 + 3^2 . 4 + \ldots + (n-1)^2 n$$
$$= \frac{1}{4} n^4 - \frac{1}{6} n^3 - \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{6} n \text{ ist;}$$

denn diese Reihe ist

$$= 1^2(1+1) + 2^2(2+1) + 3^2(3+1) + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)^2(n-1+1)$$
$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots (n-1)^3 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)^2,$$

also $= \frac{1}{4}(n-1)^4 + \frac{1}{2}(n-1)^3 + \frac{1}{4}(n-1)^2$

$$+ \frac{1}{3}(n-1)^3 + \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{6}(n-1)$$
$$= \frac{1}{4}(n-1)^4 + \frac{5}{6}(n-1)^3 + \frac{3}{4}(n-1)^2 + \frac{1}{6}(n-1)$$
$$= \frac{1}{4} n^4 - \frac{1}{6} n^3 - \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{6} n.$$

Und ganz eben so erhellt, daß

$$1 . 2^2 + 2 . 3^2 + 3 . 4^2 + 4 . 5^2 + \ldots\ldots + (n-1) n^2$$
$$= \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{6} n^3 - \frac{1}{4} n^2 - \frac{1}{6} n;$$

denn sie ist

$$= (2-1) \cdot 2^2 + (3-1) \cdot 3^2 + (4-1) \cdot 4^2 + \ldots$$
$$\ldots + (n-1) \cdot n^2$$
$$= 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots n^3 - (2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2)$$
$$= \tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{1}{2} n^3 + \tfrac{1}{4} n^2 - 1 - (\tfrac{1}{3} n^3 + \tfrac{1}{2} n^2 + \tfrac{1}{6} n - 1)$$
$$= \tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{1}{6} n^3 - \tfrac{1}{4} n^2 - \tfrac{1}{6} n.$$

§. 254. Nenne ich das gesammte §. 252. gefundene Moment der Trägheit $= I$, so ist

$$I = \tfrac{1}{12} ((h-f)^4 - f^4) \frac{b}{h} + \tfrac{1}{3} b f^3,$$
$$= \tfrac{1}{12} b h^3 - \tfrac{1}{3} b f h^2 + \tfrac{1}{2} h b f^2,$$
$$= \tfrac{1}{12} b h (h^2 - 4 h f + 6 f^2).$$

Wollte man f durch I ausdrücken, so wäre

$$f^2 - \tfrac{4}{6} h f + \frac{h^2}{6} = \frac{2I}{bh},$$

$$(f - \tfrac{1}{3} h)^2 = \frac{2I}{bh} - \tfrac{1}{18} h^2,$$

$$\text{oder } f = \tfrac{1}{3} h \pm \sqrt{\left\{\frac{2I}{bh} - \tfrac{1}{18} h^2\right\}}.$$

Dieser Werth wird unmöglich, wenn $I < \tfrac{1}{36} b h^3$ wird; also kann, wenn man die der Grundlinie parallele Axe in verschiedenen Entfernungen von der Grundlinie annimmt, das Moment der Trägheit nie kleiner sein, als $\tfrac{1}{36} b h^3$, und diesen Werth hat es dann, wenn $f = \tfrac{1}{3} h$ ist, oder die Axe, in Beziehung auf welche das Moment der Trägheit gesucht wird, durch den Schwerpunct geht, wo $f = \tfrac{1}{3} h$ ist.

§. 255. Dieses hier an einem einzelnen Beispiele nachgewiesene Resultat ist allgemein wahr; nämlich: denkt man sich in irgend einem Körper mehrere unter einander parallele Umdrehungsaxen, so ist das Moment der Trägheit am kleinsten in Beziehung auf diejenige dieser Axen, welche durch den Schwerpunct geht.

§. 256. Bemerkung. Obgleich aber das eben gefundene Moment der Trägheit für die durch den Schwerpunct gehende Axe kleiner als für jede mit dieser Axe parallele Axe ist: so ist es doch nicht das allerkleinste, das für irgend eine Axe Statt findet. Wie die Axe liegt, für welche das Moment der Trägheit am kleinsten wird, das wurden wir hier ohne höchst weitläuftige Rechnungen nicht finden können; ich will daher hier bloß bemerken, daß es für jede ebne Figur eine durch den Schwerpunct gehende in der Ebne der Figur liegende Axe giebt, in Beziehung auf welche das Moment der Trägheit am allerkleinsten ist, und eine auf jene senkrechte, gleichfalls in der Ebne der Figur liegende und durch den Schwerpunct gehende Axe, in Beziehung auf welche das Moment der Trägheit größer ist, als für jede andre durch den Schwerpunct gehende und in der Ebne der Figur liegende Axe.

§. 257. Erklärung. Diese beiden Axen, und die durch den Schwerpunct gehende auf die Ebne der Figur senkrechte Axe, heißen die drei Haupt-Axen, weil die Figur sich um jede derselben frei drehen kann, ohne daß die Axe durch eine fremde Kraft gehalten zu werden braucht.

§. 258. Die Schwungkräfte nämlich, die bei der Bewegung um diese Axen entstehen, heben sich so einander auf, daß die Axe nach keiner Seite hin einen Druck leidet und folglich ganz in Ruhe bleibt, wenn sonst keine Kräfte auf den Körper wirken. Eben so, wie ich es hier nur von ebnen Figuren erwähnt habe, hat jeder Körper drei durch seinen Schwerpunct gehende, auf einander senkrechte Hauptaxen, deren Bestimmung, wenn man die Bewegung eines Körpers untersuchen will, von der größten Wichtigkeit ist.

§. 259. Da diese Bestimmungen, wenn man sie ohne Differentialrechnung ausführen will, zu höchst verwickelten Rechnungen führen: so mögen hier nur einige von ebnen Figuren hergenommene Beispiele stehen.

Aus §. 252. erhellt, wenn man dort $f = 0$ setzt, daß eines Dreiecks, welches sich um seine Grundlinie als Axe dreht, Moment der Trägheit $= \frac{1}{12} b h^3$, $= \frac{1}{6} M h^2$

ist, wenn b die Grundlinie, h die Höhe, M den Inhalt bedeutet. Stellt also ABC (Fig. 77.) ein gleichschenklichtes Dreieck vor, wo $AD = DC = a$, $BD = n \cdot a$: so ist in Beziehung auf die Axe BD das Moment der Trägheit des Dreieckes $BDA = \frac{1}{12} \cdot n \cdot a^4$, also des ganzen Dreiecks $= \frac{1}{6}\, n\, a^4$. Das Moment der Trägheit in Beziehung auf die durch den Schwerpunct G, parallel mit AC gezogne Axe EF, ist nach §. 254 $= \frac{1}{36} \cdot 2 a^4 \cdot n^3 = \frac{1}{18} n^3 \cdot a^4$. Diese beiden Momente der Trägheit werden nur dann gleich, wenn $\frac{1}{18} n^3 = \frac{1}{6} n$, oder $n^2 = 3$, $n = \sqrt{3}$ ist. Dieser Fall tritt ein beim gleichseitigen Dreiecke, wo $AB = 2a$, $BD = a \cdot \sqrt{3}$; und hier sind nun die Momente der Trägheit gleich groß in Beziehung auf alle durch den Schwerpunct gehende und in der Ebne der Figur liegende Umdrehungsaxen. Hingegen, wenn das Dreieck eine größere Höhe als $= a\sqrt{3}$ hat, so ist für alle in der Ebne des Dreiecks liegende Axen das Moment der Trägheit am kleinsten für die BD, und es giebt zweitens keine durch den Schwerpunct gehende und in der Ebne der Figur liegende Axe, für welche es größer als für die EF wäre.

Für $n = 3$ zum Beispiel ist jenes kleinste Moment der Trägheit $= \frac{1}{2} a^4$, für die Axe BD, und das größte $= \frac{3}{2} a^4$ für die Axe EF. Für eine nicht durch den Schwerpunct gehende Axe, wie AC würde es freilich noch größer sein können, denn z. B. für die Axe AC ist es $= \frac{9}{2} a^4$.

Für die durch den Schwerpunct gehende, auf die Ebne senkrechte Axe ist das Moment der Trägheit $= 2 \cdot a^4$, gleich der Summe der beiden, welche sich auf die Axen BD und EF bezogen. Da dieses Dreiecks Inhalt oder Masse $M = 3 a^2$ ist, so ist das Moment der Trägheit in Beziehung auf die durch den Schwerpunct gehende, gegen die Ebne senkrechte Axe $= \frac{1}{36} M (AB^2 + BC^2 + AC^2)$, weil $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 24 a^2$ ist.

Diese Formel, die hier nur als zufällig erscheint, gilt für das Moment der Trägheit aller Dreiecke in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct senkrecht auf die Ebne gesetzte Axe.

§. 260. Bei diesem Beispiele läßt sich leicht übersehen, daß jene drei Axen freie Axen oder solche sind, um welche eine Drehung Statt findet, ohne daß die Axe braucht fest gehalten zu werden; aber wo das auch nicht so leicht erhellt, gilt es dennoch gleichfalls.

Wäre z. B. (Fig. 78.) AB = AD = DC und bei A ein rechter Winkel, so liegt bekanntlich der Schwerpunct des Dreiecks ABC in BD und zwar so, daß $DG = \frac{1}{3} BD$. Die Rechnung zeigt, daß hier die Lage der beiden in der Ebne des Dreiecks liegenden Hauptaxen gegen BD durch die Neigungswinkel $BGH = \eta$ und $BGF = 90° + \eta$ so bestimmt werden, daß $\tang 2\eta = \frac{3}{2} = 1{,}5$ ist. Zeichnet man also $BGH = 28°.9'.18''$ und $BGF = 118° 9' 18''$, so sind FE und HI die Axen, welche das größte und das kleinste Moment der Trägheit geben.

Für die eine nämlich ist es $= \frac{1}{36} AD^4.(5 - \sqrt{13})$,
für die andre $= \frac{1}{36} AD^4.(5 + \sqrt{13})$.

Das Moment der Trägheit in Beziehung auf eine gegen die Ebne senkrechte durch den Schwerpunct gehende Axe ist gleich der Summe jener $= \frac{5}{18} AD^4$ $= \frac{1}{36} M(AB^2 + AC^2 + BC^2) = \frac{1}{36} AB^2 . 10 . AB^2$.

§. 261. Aufgabe. Eine Kreisfläche (Fig. 79.) dreht sich um eine durch den Mittelpunct gehende und gegen die Ebne des Kreises senkrechte Axe; das Moment der Trägheit dieser Masse, die als homogen angesehen wird, zu bestimmen.

Auflösung. Das Moment der Trägheit ist $= \frac{1}{2} \pi . r^4$, wenn r der Halbmesser des Kreises ist. Es kann auch durch $= \frac{1}{2} M . r^2$ ausgedrückt werden, wenn M des ganzen Kreises Masse ist.

Beweis. Man denke sich den Halbmesser CF in n gleiche Theile getheilt: so ist des innersten Theiles Inhalt > 0 und $< \frac{1}{n} . r . 2\pi . \frac{1}{n} r$; sein Moment der Trägheit > 0 und $< \frac{1}{n^4} r^4 . 2\pi$; des nächsten Ringes Inhalt $> \frac{1}{n} r . 2\pi . \frac{1}{n} r$; $< \frac{1}{n} r . 2\pi . \frac{2}{n} r$, und sein Moment der Trägheit $> \frac{1}{n^4} r^4 . 2\pi$ und $< \frac{1}{n^4} r^4 . 2^3 . 2\pi$; des zweiten Ringes Inhalt $> \frac{1}{n} r . 2\pi . \frac{2}{n} r$ und $< \frac{1}{n} r . 2\pi . \frac{3}{n} r$; sein Moment der Trägheit $> \frac{1}{n^4} r^4 . 2^3 . 2\pi$ und $< \frac{1}{n^4} r^4 . 3^3 . 2\pi$. Es ist daher leicht zu übersehen, daß des ganzen Kreises Moment der Trägheit

$$> \frac{1}{n^4} r^4 . 2\pi (0 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + (n-1)^3)$$

$$\text{und} < \frac{1}{n^4} r^4 . 2\pi (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + n^3) \text{ ist.}$$

Aber wir haben §. 253. die Summen dieser Reihen kennen gelernt, und wissen daher, daß das Moment der

$$\text{Trägheit} > \frac{r^4}{n^4} 2\pi (\tfrac{1}{4}(n-1)^4 + \tfrac{1}{2}(n-1)^3 + \tfrac{1}{4}(n-1)^2)$$

$$\text{und} < \frac{r^4}{n^4} 2\pi (\tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{1}{2} n^3 + \tfrac{1}{4} n^2) \text{ ist, folglich,}$$

wenn man n sehr vergrößert, sich als $= \frac{1}{2} r^4 . \pi$ findet, oder $= \frac{1}{2} M . r^2$, da der Inhalt $= M = r^2 . \pi$ ist.

§. 262. Hieraus ergiebt sich auch leicht das Moment der Trägheit für einen Kreisring, dessen innerer Halbmesser $= \varrho$, der äußere Halbmesser $= r$ ist. Sein Moment der Trägheit ist $= \frac{1}{2} \pi (r^4 - \varrho^4)$, oder weil eine Fläche, die wir hier als die Masse ausdrückend ansehen, $= \pi (r^2 - \varrho^2) = M$ ist, das Moment der Trägheit $= \frac{1}{2} M (r^2 + \varrho^2)$.

§. 263. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines Cylinders in Beziehung auf seine geometrische Axe zu finden.

Auflösung. Wenn des Cylinders Länge $= a$ und Halbmesser $= r$ ist, so findet sich aus §. 261. leicht sein Moment der Trägheit $= \frac{1}{2} a \pi . r^4 = \frac{1}{2} r^2 M$, wenn des Cylinders Masse $= M$ heißt.

§. 264. Lehrsatz. Wenn das Moment der Trägheit irgend eines Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunct gehende Axe gegeben ist: so findet man das Moment der Trägheit in Beziehung auf jede Axe, die mit jener gegebenen parallel ist, wenn man zu jenem Momente der Trägheit noch das Product aus der Masse in das Quadrat des Abstandes beider Axen von einander addirt.

Beweis. Ich will den Beweis hier nur auf eine ebne Figur beschränken, obgleich er sich auch für Körper führen läßt. Es sei also AB (Fig. 80.) die Figur, deren Masse $= M$, deren Schwerpunct G ist; DE sei eine durch den Schwerpunct gehende Axe, in Beziehung auf welche das Moment der Trägheit gegeben $= M . K^2$ ist. Zieht man nun eine andre Axe FH in der Entfernung $= f$ mit jener parallel: so läßt sich leicht für jedes einzelne Theilchen die Aenderung des Moments der Trägheit finden. Ist nämlich IK ein durch Parallellinien zu den Axen begrenzter Streif, dessen Masse $= N$, Abstand von der Axe DE $= x$, also Abstand von der Axe FH, $= x + f$, so ist sein Moment der Trägheit in Beziehung auf DE, $= Nx^2$, in Beziehung auf FG, $= N (x + f)^2$. Aber jedem Streifchen IK an der einen Seite des Schwerpuncts entspricht ein Streifchen LM an der andern Seite, dessen statisches Moment dem statischen Momente des IK gleich ist. Hat also dieses andre Streifchen LM die Masse $= N'$ und den Abstand $= x'$ von der Axe DE, so ist $= N . x = N' . x'$, und des letzteren Moment der Trägheit, in Beziehung auf die Axe DE ist $= N . x'^2$, in Beziehung auf die Axe FG ist es $= N' (x' - f)^2$. Hieraus ergiebt sich die Summe der Momente der Trägheit beider Streifchen, die sich das Gleichgewicht in Beziehung auf die durch den Schwerpunct gehende Axe halten, wenn man nämlich jetzt das Moment der Trägheit in Beziehung auf die neue Axe FG sucht,

$= Nx^2 + 2N f.x + N f^2 + N'x'^2 - 2N' fx' + N'. f^2$,

$= Nx^2 + N'x'^2 + (N + N') f^2$, weil $Nf.x - N'f.x'$ sich aufheben. Da nun $Nx^2 + N'x'^2$ das Moment der Trägheit dieser beiden Streifchen war, in Beziehung auf die durch den Schwerpunct gehende Axe: so zeigt sich, daß ihr Moment der Trägheit in Beziehung auf die neue, jener parallele, Axe um das Product aus der ganzen Masse der Streifchen $= N + N'$ in f^2 größer als jenes ist.

Aber eben dieses läßt sich nun für alle einzelne Streifchen beweisen, da jedem ein an der andern Seite von DE liegendes Streifchen entspricht, dessen statisches Moment eben so groß ist; das Trägheitsmoment der ganzen Masse ist also in Beziehung auf die Axe FH um $M . f^2$ größer, als in Beziehung auf die mit ihr parallele durch den Schwerpunct gehende Axe DE.

§. 265. Hier erhellt also allgemein, was wir schon oben als aus einem Beyspiele gefolgert fanden, daß das Moment der Trägheit für eine durch den Schwerpunct gehende Axe immer kleiner ist als für irgend eine andre, mit dieser parallel gezogne Axe.

§. 266. Bemerkung. Der Nutzen, den diese Bestimmung des Moments der Trägheit hat, läßt sich nun wohl aus §. 248. ohne Schwierigkeit übersehen. Dort zeigte sich, daß die bewegende Kraft $= Q$, welche in der Entfernung $= \varrho$ vom Unterstützungpuncte senkrecht gegen die Abstandslinie wirkend, eine Umdrehungsbewegung hervorbringt, dem Körper eine Winkelgeschwindigkeit ertheilt, die $= \frac{2g . Q . \varrho . t}{I}$ ist, wenn I das gesammte Trägheitsmoment des ganzen Körpers oder der gesammten zu bewegenden Massen bedeutet, und so sind wir also im Stande, die Umdrehungsgeschwindigkeit zu bestimmen, wenn wir das Moment der Trägheit = I zu bestimmen wissen.

§. 267. Soll z. B. dieselbe Kraft = Q, in derselben Entfernung = ϱ wirkend, einmal eine kreisförmige Scheibe vom Halbmesser = r, das andre Mal die kreisförmige Scheibe vom Halbmesser = R = 2r, in Bewegung setzen: so nehmen beide Scheiben eine beschleunigte Umdrehungsbewegung an, wenn, wie hier angenommen wird, sich kein Hinderniß der Bewegung entgegensetzt; aber im ersten Falle ist am Ende der Zeit = t (nach §. 261.), die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2g \cdot Q \cdot \varrho \cdot t}{\frac{1}{2}\pi \cdot r^4}$, im zweiten Falle $= \frac{2g \cdot Q \cdot \varrho \cdot t}{\frac{1}{2}\pi \cdot R^4} = \frac{1}{16} \cdot \frac{2g \cdot Q \cdot \varrho \cdot t}{\frac{1}{2}\pi \cdot r^4}$, also die Drehung der Scheibe vom doppelten Halbmesser 16mal so langsam.

Zusätze für geübtere Leser.

I. Da im Vorigen hinreichend erklärt ist, wie wir dazu kommen, der Bestimmung des Moments der Trägheit eine so große Wichtigkeit zuzugestehen: so will ich hier nur noch bei allgemeinern Regeln, um das Moment der Trägheit zu bestimmen, stehen bleiben.

II. Das Moment der Trägheit einer graden Linie AB (Fig. 67.), die sich um eine, in G auf sie senkrechte Axe dreht, ist leicht zu finden. Nenne ich nämlich GM = x, so ist die Masse des kleinen Theilchens in M durch D . dx ausgedrückt, wenn D die Dichtigkeit ist, also dieses Theilchens Moment der Trägheit = $Dx^2\,dx$, und folglich $\frac{1}{3}Dx^3$ das Moment der Trägheit für GM und $\frac{1}{3}D(a^3 + b^3)$, für die ganze Linie, wenn GA = a, GB = b ist.

III. Eines jeden dünnen Körpers, den man fast als eine bloße ebne Figur ansehen kann, Moment der Trägheit in Beziehung auf eine gegen die Ebne dieser Figur senkrechte Axe zu finden (Fig. 81.).

C sei der Punct, wo die Axe die Ebne der Figur trifft. Man nimmt auf einer willkürlichen Axe CA, Abscissen CX = x, und unter einem bekannten Winkel AXY = α geneigt, Coordinaten $XY = y$, um irgend ein Theilchen der Ebne, seiner Lage nach zu bestimmen. Dann ist des Theilchens, dessen Seiten $= dx$ und $= dy$, Inhalt $= dx \,.\, dy \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha$, Abstand von der Axe $= \sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy\,\mathrm{Cos}\,\alpha)}$, also dieses Theilchens Moment der Trägheit $= x^2 \,.\, dx \,.\, dy \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha + y^2\, dx\, dy \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha + 2xy\, dx\, dy \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha$. Diese Formel zweimal nach einander integrirt, giebt das Moment der Trägheit der ganzen Figur.

Man hätte auch $CY = z$, $ACY = \varphi$ nennen, und des in y liegenden Theilchens Inhalt $= z\,d\varphi \,.\, dz$ setzen können; dann gäbe $\iint z^3\, d\varphi \,.\, dz$ gehörig genommen das gesammte Moment der Trägheit.

IV. Es sei eines Dreiecks ABC (Fig. 82.) Moment der Trägheit in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct E gehende, gegen die Ebne der Figur senkrechte Axe zu bestimmen. — Um den Schwerpunct zu finden, ist AD so gezogen, daß $BD = \frac{1}{2}\, BC = \frac{1}{2}\, a$, und nun $DE = \frac{1}{3}\, DA = \frac{1}{3}\, f$ genommen werden. Der Winkel ADB, welcher aus den gegebenen Bestimmungen für das Dreieck gleichfalls gegeben ist, sei $ADB = \zeta$; und um die Lage irgend eines Punctes Y anzugeben, sei auf DA, $EX = x$ und $XY = y$ mit BC parallel. Das Moment der Trägheit des kleinen Theilchens ist also $= (x^2 + y^2 - 2xy\,\mathrm{Cos}\,\zeta)\, dx \,.\, dy \,.\, \mathrm{Sin}\,\zeta$. Die erste Integration, wobei x unveränderlich bleibt, giebt $(x^2\, y\, dx + \frac{1}{3}\, y^3\, dx - y^2\, x\, dx\, \mathrm{Cos}\,\zeta)\, \mathrm{Sin}\,\zeta$. Wenn man das Moment der einen und der andern Hälfte jedes für sich sucht, so kömmt keine Constans hinzu; aber der vollständige Werth von y ist $FX = \frac{\frac{1}{2}\, a \,.\, (\frac{2}{3}\, f + x)}{f}$; also des ganzen Streifchens XxfF Moment der Trägheit

$$= x^2\, dx \,.\, \mathrm{Sin}\,\zeta \,.\, \frac{\frac{1}{2}\, a\, (\frac{2}{3}\, f + x)}{f} + \frac{1}{3}\, dx\, \mathrm{Sin}\,\zeta \,.\, \frac{\frac{1}{8}\, a^3\, (\frac{2}{3}\, f + x)^3}{f^3}$$
$$- x\,dx \,.\, \mathrm{Sin}\,\zeta\, \mathrm{Cos}\,\zeta \,.\, \frac{\frac{1}{4}\, a^2\, (\frac{2}{3}\, f + x)^2}{f^2};$$

und hievon ist das Integral

$$= \mathrm{Const} + \frac{1}{9}\, a x^3\, \mathrm{Sin}\,\zeta + \frac{1}{8}\, \frac{a x^4}{f}\, \mathrm{Sin}\,\zeta + \frac{1}{96}\, \frac{a^3\, \mathrm{Sin}\,\zeta\, (\frac{2}{3}\, f + x)^4}{f^3}$$
$$- \frac{1}{18}\, a^2 x^2\, \mathrm{Sin}\,\zeta\, \mathrm{Cos}\,\zeta - \frac{1}{9}\, \frac{a^2 x^3}{f}\, \mathrm{Sin}\,\zeta\, \mathrm{Cos}\,\zeta - \frac{1}{16}\, \frac{x^4 a^2\, \mathrm{Sin}\,\zeta\, \mathrm{Cos}\,\zeta}{f^2}.$$

Soll dieses Integral von A an oder von $x = -\frac{2}{3}\, f$ angenommen werden, so ist

$$\text{Const} = \text{Sin}\,\zeta\,\{+\tfrac{8}{243}\,a\,f^3 - \tfrac{2}{81}\,a\,f^3 + \tfrac{2}{81}\,a^2\,f^2\,\text{Cos}\,\zeta$$
$$- \tfrac{8}{243}\,a^2\,f^2\,\text{Cos}\,\zeta + \tfrac{1}{81}\,a^2\,f^2\,\text{Cos}\,\zeta)$$
$$= \text{Sin}\,\zeta\,(\tfrac{2}{243}\,a\,f^3 + \tfrac{1}{243}\,a^2\,f^2\,\text{Cos}\,\zeta\},$$

und das vollständige bis zu $x = \frac{1}{3}f$ genommene Integral giebt

$$= \text{Sin}\,\zeta\,\{\tfrac{2}{243}\,a\,f^3 + \tfrac{1}{243}\,a^2\,f^2\,\text{Cos}\,\zeta + \tfrac{1}{243}\,a\,f^3 + \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{81}\,a\,f^3$$
$$+ \tfrac{1}{96}\,a^3\,f + \text{Cos}\,\zeta\left[\frac{-1}{162}\,a^2\,f^2 - \tfrac{1}{243}\,a^2\,f^2 - \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{81}\,a^2\,f^2\right]\Big\}$$
$$= \tfrac{1}{72}\,a\,f^3\,\text{Sin}\,\zeta + \tfrac{1}{96}\,a^3\,f\,\text{Sin}\,\zeta - \tfrac{1}{144}\,a^2\,f^2\,\text{Sin}\,\zeta\,\text{Cos}\,\zeta.$$

Für die andre Hälfte des Dreiecks, nämlich ADF, wird der Ausdruck ganz eben so, ausgenommen, daß $\text{Cos}\,\zeta = \text{Cos}\,y''\,x\,D$ dort mit dem entgegengesetzten Zeichen vorkömmt. Des ganzen Dreiecks Moment der Trägheit ist also $= \text{Sin}\,\zeta\,(\frac{1}{36}\,a\,f^3 + \frac{1}{48}\,a^3\,f)$

$$= \tfrac{1}{12}\,a\,f.\,\text{Sin}\,\zeta\,(\tfrac{1}{3}\,f^2 + \tfrac{1}{4}\,a^2);$$
$$= \tfrac{1}{6}\,M\,(\tfrac{1}{3}\,f^2 + \tfrac{1}{4}\,a^2);$$

wenn M den ganzen Inhalt oder die Masse des Dreiecks bedeutet.

V. Für eine ebne Figur wird das Moment der Trägheit in Beziehung auf eine in dieser Ebne selbst liegende Axe leicht gefunden, wenn man die Lage des Theilchens durch Abscissen auf der Axe selbst und durch Ordinaten senkrecht auf die Axe bestimmt; dann ist nämlich, wenn $AX = x$, $XY = y$ (Fig. 83.) des Theilchens Y Moment der Trägheit $= y^2\,.\,dx\,.\,dy$, wo es bloß auf die richtige Integration ankömmt.

Ist hingegen die Lage des Theilchens durch Coordinaten bestimmt, die nicht mit der Axe und mit dem Perpendikel auf die Axe zusammenfallen: so wird die Rechnung etwas anders einzuleiten sein, und doch ist es oft für den weitern Fortgang der Rechnung bequemer, sie so einzuleiten.

Es sei AB die Abscissenlinie (Fig. 84.) und die Lage des Theilchens Y durch senkrechte Coordinaten $AX = x$, $XY = y$ bestimmt. Die Umdrehungsaxe AC sei unter dem Winkel $= \eta =$ CAB gegen jene Abscissenlinie geneigt, und durch eben jenes Theilchen Y die Linie YU senkrecht gegen die Umdrehungsaxe gezogen. Nenne ich nun $AU = u$, $UY = v$, so ist

$$u = x\,\text{Cos}\,\eta - y\,\text{Sin}\,\eta,$$
$$v = x\,\text{Sin}\,\eta + y\,\text{Cos}\,\eta,$$

und das Moment der Trägheit des Theilchens Y, dessen Inhalt oder Masse $= dx\,.\,dy$ war, ist

$$= v^2\,.\,dx\,.\,dy = (x\,\text{Sin}\,\eta + y\,\text{Cos}\,\eta)^2\,dx\,.\,dy.$$

Die Integration würde gehörig angestellt, hier das gesammte Moment der Trägheit für die ganze Fläche ergeben.

VI. Am gewöhnlichsten kömmt die Bestimmung des Momentes der Trägheit in Beziehung auf Axen vor, die durch den

Schwerpunct der ganzen Figur gehen, und nur darauf will ich hier die Untersuchung anwenden.

ABC (Fig. 85.) sei ein Dreieck, BC sei in D halbirt, AD gezogen und DE $= \frac{1}{3}$ AD; dann ist E des Dreiecks Schwerpunct. Ist nun die Lage eines Theilchens Y durch Coordinaten EX $= x$, XY $= y$ gegeben, so ist für eine Umdrehungsaxe FG, die durch den Schwerpunct geht und mit AD den Winkel AEF $= \eta$ macht, $yu = v = x \operatorname{Sin}\eta + y \operatorname{Cos}\eta$, und das Moment der Trägheit des ganzen Dreiecks ist gleich dem richtig genommenen Integrale der Formel

$$x^2\, dx\, dy . \operatorname{Sin}^2\eta + y^2 \operatorname{Cos}^2\eta . dx\, dy + 2xy\, dx . dy . \operatorname{Sin}\eta . \operatorname{Cos}\eta.$$

Diese Formel wird bequemer, wenn man yz mit der Grundlinie parallel zieht, und nun AZ $= w$, ZY $= z$ setzt. Da hier ADB $= \zeta =$ YZD bekannt ist: so wird, wenn ich AD $= f$, BC $= a$ nenne, $w = AZ = \frac{2}{3} f - x - z \operatorname{Cos}\zeta$, und $y = z . \operatorname{Sin}\zeta$, also $x = \frac{2}{3} f - w - z \operatorname{Cos}\zeta$, und der Abstand von der Axe, oder

$$x \operatorname{Sin}\eta + y \operatorname{Cos}\eta = (\tfrac{2}{3} f - w) \operatorname{Sin}\eta - z \operatorname{Sin}\eta . \operatorname{Cos}\zeta + z \operatorname{Cos}\eta \operatorname{Sin}\zeta.$$

Diese Aenderung des Ausdruckes giebt die Bequemlichkeit, daß wir jezt immer zwei einander gleiche, an den beiden verschiedenen Seiten von AD liegende Theilchen vereinigt betrachten können. Es erhellt nämlich leicht, daß ein Theilchen w, welches auf der verlängerten yz so liegt, daß zw $=$ zy ist, den Abstand $= (\frac{2}{3} f - w) \operatorname{Sin}\eta + z (\operatorname{Sin}\eta \operatorname{Cos}\zeta - \operatorname{Cos}\eta \operatorname{Sin}\zeta)$ von der Umdrehungsaxe haben wird, weil für dieses $y = - z \operatorname{Sin}\zeta$ und $x = \frac{2}{3} f - w + z \operatorname{Cos}\zeta$. So also wird das Moment der Trägheit der beiden Theilchen y und w vereinigt

$$= dx . dy \{[(\tfrac{2}{3} f - w) \operatorname{Sin}\eta + z \operatorname{Sin}(\zeta - \eta)]^2 + [(\tfrac{2}{3} f - w) \operatorname{Sin}\eta - z \operatorname{Sin}(\zeta - \eta)]^2\};$$
$$= dx . dy \{2 . \operatorname{Sin}^2\eta . (\tfrac{2}{3} f - w)^2 + 2 z^2 \operatorname{Sin}^2(\zeta - \eta)\}.$$

Wenn diese Formel, in welcher noch dx . dy durch z und w muß ausgedrückt werden, nur in Beziehung auf die eine Hälfte des Dreiecks integrirt wird, so ist das ganze Moment der Trägheit gefunden, weil wir zu jedem in der einen Hälfte liegenden Theilchen schon das in der andern Hälfte ihm entsprechende hinzugenommen haben. Das erste Integral muß nun so genommen werden, daß es mit $z = 0$ verschwinde, und seinen vollständigen Werth für $Z = ZU = \frac{\frac{1}{2} a . w}{f}$ erhalte; denn hat man bei der ersten Integration das gesammte Moment der Trägheit des Streifchens VU in Beziehung auf die Umdrehungsaxe FG.

Um dx . dy durch z und w auszudrücken, braucht man nur zu bedenken, daß $dx \,.\, dy$ das Element der Fläche ist, welches auch durch $dw \,.\, dz \,.\, \mathrm{Sin}\,\zeta$ ausgedrückt wird, also unsre zu integrirende Formel

$= 2dw \,.\, dz \,.\, \mathrm{Sin}\,\zeta \,\{\mathrm{Sin}^2\eta\,(\frac{2}{3}\,f - w)^2 + z^2\,\mathrm{Sin}^2\,(\zeta - \eta)\}$.

Diese in Beziehung auf z integrirt, giebt

$= 2z\,dw \,.\, \mathrm{Sin}\,\zeta \,.\, \mathrm{Sin}^2\eta\,(\frac{2}{3}\,f - w)^2 + \frac{2}{3}\,z^3\,dw \,.\, \mathrm{Sin}\,\zeta \,.\, \mathrm{Sin}^2\,(\zeta - \eta)$;

oder vollständig bis $z = \frac{a\,w}{2f}$ genommen,

$$= \frac{aw\,dw}{f} \,.\, \mathrm{Sin}\,\zeta \,.\, \mathrm{Sin}^2\,\eta\,(\tfrac{2}{3}\,f - w)^2$$

$$+ \tfrac{1}{12}\,\frac{a^3\,w^3}{f^3}\,dw\,\mathrm{Sin}\,\zeta\,\mathrm{Sin}^2\,(\zeta - \eta).$$

Wird dies zum zweiten Male integrirt, so ergiebt sich das Moment der Trägheit

$$= \tfrac{2}{9}\,a\,w^2\,f\,\mathrm{Sin}\,\zeta \,.\, \mathrm{Sin}^2\,\eta - \tfrac{4}{9}\,a\,w^3\,\mathrm{Sin}\,\zeta\,\mathrm{Sin}^2\,\eta$$

$$+ \tfrac{1}{4}\,\frac{a\,w^4}{f}\,\mathrm{Sin}\,\zeta\,\mathrm{Sin}^2\eta + \tfrac{1}{48}\,\frac{a^3\,w^4}{f^3}\,\mathrm{Sin}\,\zeta \,.\, \mathrm{Sin}^2\,(\zeta - \eta),$$

oder vollständig von $w = 0$ bis $w = f$, das Moment der Trägheit $= \mathrm{Sin}\,\zeta \,.\, \{\mathrm{Sin}^2\,\eta \,.\, \frac{1}{36}\,a\,f^3 + \frac{1}{48}\,a^3\,f \,.\, \mathrm{Sin}^2\,(\zeta - \eta)\}$,

oder $= I = \frac{1}{12}\,a\,f \,.\, \mathrm{Sin}\,\zeta\,\{\frac{1}{3}\,f^2\,\mathrm{Sin}^2\,\eta + \frac{1}{4}\,a^2\,\mathrm{Sin}^2\,(\zeta - \eta)\}$.

VII. Man kann hier fragen, unter welchem Winkel $= \eta$ man die Axe FG gegen AD geneigt nehmen müsse, damit das Moment der Trägheit ein Größtes oder Kleinstes werde. Bekanntlich muß dann $\frac{dI}{d\eta} = 0$ sein,

also $\frac{2}{3}\,f^2\,\mathrm{Sin}\,\eta\,\mathrm{Cos}\,\eta - \frac{1}{2}\,a^2\,\mathrm{Sin}\,(\zeta - \eta) \,.\, \mathrm{Cos}\,(\zeta - \eta) = 0$,

oder $0 = \frac{1}{3}\,f^2\,\mathrm{Sin} \,.\, 2\eta - \frac{1}{4}\,a^2\,(\mathrm{Sin}\,(2\zeta - 2\eta)$,

daher $\mathrm{tang}\,2\eta = \dfrac{\frac{1}{4}\,a^2\,\mathrm{Sin}\,2\zeta}{\frac{1}{3}\,f^2 + \frac{1}{4}\,a^2\,\mathrm{Cos}\,2\zeta}$.

Nimmt man $\eta = AEF$ so an, daß $\mathrm{tang}\,2\eta$ diesen Werth erhält, so hat das Moment der Trägheit den kleinsten oder größesten Werth, den es für eine in der Ebne der Figur liegende und durch den Schwerpunct gehende Axe erlangen kann. Jener Werth für $\mathrm{tang}\,2\eta$ bestimmt sogleich zwei auf einander senkrechte Axen, indem $\mathrm{tang}\,2\eta = \mathrm{tang}\,(180^\circ + 2\eta)$ ist; also wenn $AEF = \eta$ den einen Winkel bestimmt, der andre $= 90^\circ + AEF$ wird.

VIII. Im gleichschenklichten Dreieck, wo $AB = AC$, ist $\zeta = 90^\circ$, $\mathrm{Sin}\,2\zeta = 0$, $\mathrm{tang}\,2\eta = 0$, also η entweder $= 0$ oder $= 90^\circ$. Die beiden Hauptaxen sind also erstlich AD selbst und in Beziehung auf sie das Moment der Trägheit $= \frac{1}{48}\,a^3\,f$; zweitens auf AD senkrecht und in Beziehung auf diese das Moment der Trägheit $= \frac{1}{36} a f^3$. Dieses stimmt mit §. 259. überein, wo die Grundlinie $= 2a$, und $f = na$ war.

Das Beispiel in §. 260. (Fig. 78.), wo $A = 90^\circ$, $AB = AD = b$ war, giebt $\zeta = 45^\circ$, $f = b\sqrt{2}$, $\tan 2\eta = \frac{3}{2}$;

$$\mathrm{Sin}\, 2\eta = \frac{\pm 3}{\sqrt{13}};\ \mathrm{Cos}\, 2\eta = \frac{\pm 2}{\sqrt{13}};\ \mathrm{Sin}\,\eta = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{\sqrt{13}}}{2}};$$

$$\mathrm{Cos}\,\eta = \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{\sqrt{13}}}{2}};\ \mathrm{Sin}\,(45^\circ - \eta) = \frac{-\mathrm{Sin}\,\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{Cos}\,\eta}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)}}{2}.$$

Also das Moment der Trägheit für die Axe, für welche $\mathrm{Sin}\, 2\eta$ und $\mathrm{Cos}\, 2\eta$ positiv sind, oder $\eta < 90^\circ$,

$$\frac{b^2}{6}\left\{\frac{2}{3} b^2 \left(\frac{1 - \frac{2}{\sqrt{13}}}{2}\right) + \frac{b^2}{4}\left(2 - \frac{6}{\sqrt{13}}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{6} b^4 \left\{\frac{5}{6} - \frac{13}{6.\sqrt{13}}\right\} = \frac{1}{36} b^4 (5 - \sqrt{13});$$

für die zweite Axe hingegen das Moment der Trägheit

$$= \frac{1}{6} b^2 \left\{\frac{1}{3} b^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right) + \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right\};$$

$$= \frac{1}{36} b^4 (5 + \sqrt{13}).$$

Die beiden Werthe von η sind $= 28^\circ . 9' 18''$
und $= 118^\circ . 9' 18''$.

IX. Der allgemeine Ausdruck (in V.) für das Moment der Trägheit in Beziehung auf eine Umdrehungsaxe, welche gegen die Abscissenlinie unter dem Winkel $= \eta$ geneigt ist, läßt uns nun auch finden, wie ganz allgemein der Winkel η für diejenigen Axen bestimmt wird, die ein größtes oder kleinstes Moment der Trägheit geben. Wir fanden allgemein das Moment der Trägheit

$$I = \int x^2\, dx\, .\, dy\, .\, \mathrm{Sin}^2\eta + \int y^2\, dx\, dy\, .\, \mathrm{Cos}^2\eta + \int xy\, dx\, dy\, .\, \mathrm{Sin}\, 2\eta,$$

also wenn wir η als veränderlich ansehen, wobei die Integrale $\int x^2\, dx\, dy$; $\int y^2\, dx\, dy$; $\int xy\, dx\, dy$ ungeändert bleiben, indem diese schon in Beziehung auf die ganze Figur richtig genommen sein müssen, so ist

$$\frac{dI}{d\eta} = 2\, \mathrm{Sin}\,\eta\, \mathrm{Cos}\,\eta \left(\int x^2\, dx\, dy - \int y^2\, dx\, dy\right) + 2\, \mathrm{Cos}\, .\, 2\eta \int xy\, dx\, dy.$$

Dieses soll = o sein, damit I ein Größtes oder Kleinstes werde,
also $\mathrm{Sin}\, 2\eta\, (\int x^2\, dx\, dy - \int y^2\, dx\, dy)$
$= - 2\, \mathrm{Cos}\, 2\eta \int x\, y\, dx\, dy$

$$\text{oder } \mathrm{tang}\, 2\eta = \frac{2\int x\, y\, dx\, dy}{\int y^2\, dx\, dy - \int x^2\, dx\, dy}.$$

Dieses ist die allgemeine Bestimmung der Winkel η und $90^\circ + \eta$, für die beiden gesuchten Axen.

Wir hatten

$$o = \mathrm{Sin}\,\eta\, \mathrm{Cos}\,\eta \int x^2\, dx\, dy - \mathrm{Sin}\,\eta\, \mathrm{Cos}\,\eta \int y^2\, dx\, dy + (\mathrm{Cos}^2\eta - \mathrm{Sin}^2\eta) \int x\, y\, dx\, dy.$$

Da wir nun statt des Elements der Fläche = dx . dy hier auch = du . dv setzen dürfen, und aus dem in Nr. V. gesagten, das Product

$$u\,.\,v = x^2\, \mathrm{Sin}\,\eta\, \mathrm{Cos}\,\eta - y^2\, \mathrm{Sin}\,\eta\, \mathrm{Cos}\,\eta + (\mathrm{Cos}^2\eta - \mathrm{Sin}^2\eta)\, xy,$$

also
$$\iint u\, v\, du\, dv = \mathrm{Sin}\,\eta\, \mathrm{Cos}\,\eta \iint x^2\, dx\, dy - \mathrm{Sin}\,\eta\, \mathrm{Cos}\,\eta \iint y^2\, dx\, dy + (\mathrm{Cos}^2\eta - \mathrm{Sin}^2\eta) \iint x\, y\, dx\, dy$$

ist, so erhellt, daß diejenige in der Ebne selbst liegende Axe ein Größtes oder Kleinstes für das Moment der Trägheit giebt, für welche $\iint u\, v\, du\, dv = o$ ist, wenn u Abscissen auf der Axe selbst und v Ordinaten senkrecht gegen die Axe sind; dieses Integral aber für die ganze Ebne, welche sich um die Axe dreht, genommen ist.

X. Diese Bemerkung, daß diejenige durch den Schwerpunct gehende, in der Ebne der Figur liegende Axe, ein Maximum oder Minimum des Momentes der Trägheit giebt, für welche $\iint u\, v\, du\, dv = o$ ist, hat darum eine besondere Wichtigkeit, weil daraus erhellt, daß diese Axen zugleich freie Umdrehungsaxen, oder solche sind, welche bei der Drehung der Figur um sie, von selbst ruhend bleiben, oder gar keinen Druck aushalten.

Wir haben nämlich in den Zusätzen zum 14. Abschnitt in VIII. gesehen, daß das Moment der gesammten Schwungkraft in Beziehung auf irgend einen Punct der Axe $= \frac{c^2}{2g\, a^2} \iint u\, v\, du\, dv$ war (wenn ich hier u statt x, v statt y setze), also hier = o wird für jene Axen, die durch den Schwerpunct gehen und ein größtes oder kleinstes Moment der Trägheit geben. Für diese haben also die gesammten Schwungkräfte in Beziehung auf irgend einen festgehaltenen Punct der Axe gar kein Moment, das ist, die Axe hat gar kein Bestreben, ihre Lage zu ändern, sondern ruhet von selbst.

XI. Aus der für η gefundenen Formel ergiebt sich, wenn ich $\int xy\,dx\,dy = U$, $\int x^2\,dx\,dy = V$, $\int y^2\,dx\,dy = W$ setze,

$$\text{tang } 2\eta = \frac{2U}{W - V},$$

$$\text{also Sin } 2\eta = \frac{2U}{\sqrt{(4U^2 + (W-V)^2)}};$$

$$\text{Cos } 2\eta = \frac{W - V}{\sqrt{(4U^2 + (W-V)^2)}};$$

$$\text{Sin}^2\eta = \tfrac{1}{2} - \frac{W - V}{2\sqrt{(4U^2 + (W-V)^2)}};$$

$$\text{Cos}^2\eta = \tfrac{1}{2} + \frac{W - V}{2\sqrt{(4U^2 + (W-V)^2)}}.$$

Da nun (nach V.) das Moment der Trägheit des ganzen Dreiecks $= V.\text{Sin}^2\eta + W.\text{Cos}^2\eta + U.\text{Sin } 2\eta$, so findet sich dieses

$$= \tfrac{1}{2}(V + W) + \frac{V^2 - 2VW + W^2 + 4U^2}{2\sqrt{(4U^2 + (W-V)^2)}}$$

$= \frac{1}{2}(V + W) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4U^2 + (W-V)^2)}$ in dem Falle, da η den bestimmten Werth hat, oder in dem Falle, da das Moment der Trägheit entweder ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Diese Formel giebt zugleich das größte Moment der Trägheit, wenn man das irrationale Glied positiv, das kleinste, wenn man es negativ nimmt.

Hier läßt sich nun auch beweisen, was in §. 259. 260. schon gelegentlich bemerkt ist, daß das Moment der Trägheit in Beziehung auf eine gegen die Ebne senkrechte, durch den Schwerpunct gehende Axe gleich der Summe jener beiden, also $= V + W$ ist. Denn jedes durch die Coordinaten x, y bestimmten Theilchens $= dx\,.\,dy$ Abstand von dieser Axe ist $= \sqrt{(x^2 + y^2)}$, also sein Moment der Trägheit $= x^2\,dx\,dy + y^2\,dx\,dy$; und folglich der ganzen Figur Moment der Trägheit in Beziehung auf diese Axe $= \int x^2\,dx\,dy + \int y^2\,dx\,dy = V + W$.

XII. Aehnliche allgemeine Betrachtungen lassen sich nun über die Hauptaxen der Körper anstellen. In jedem Körper giebt es drei Hauptaxen, die durch den Schwerpunct gehn und auf einander senkrecht sind; in Beziehung auf welche das Moment der Trägheit ein Größtes oder Kleinstes ist. Diese Axen sind zugleich freie Drehungsaxen, und man findet ihre Lage durch ähnliche Ueberlegungen, wie in VIII, IX. Die dabei nöthigen Rechnungen werden etwas schwieriger, weil man die Lage der Ebne, in welcher zwei der Hauptaxen sich befinden, bestimmen, und dann die Lage der Axen in dieser Ebne suchen muß. Um lange Rechnungen zu vermeiden, stehe hier also nur noch ein Beispiel von Bestimmung des Trägheitsmoments eines Körpers.

XIII. Das Moment der Trägheit einer Kugel zu finden, für eine durch ihren Mittelpunct gehende Axe. Es sei (Fig. 86.) AB die Axe, C der Mittelpunct, der Halbmesser $= AC = r$. Wird nun in der Entfernung $= CD = x$ vom Mittelpuncte eine Ebne senkrecht auf die Axe gelegt, so giebt diese einen Schnitt vom Halbmesser $= \sqrt{(r^2 - x^2)}$, und wenn man dieser Kreisscheibe die Dicke $= dx$ beilegt, so ist des Ringes vom Halbmesser $= y$, Umfang $= 2\pi y \,.\, dx$, Inhalt $= 2\pi y \, dy \,.\, dx$, Moment der Trägheit $= 2\pi y^3 \, dx \,.\, dy$, das Moment der Trägheit der ganzen Kreisscheibe vom Halbmesser $= y$, ist $= \frac{1}{2} \pi y^4 dx$, und der ganzen Kreisscheibe EF $= \frac{1}{2} \pi (r^2 - x^2)^2 dx$; also der ganzen Kugel Moment der Trägheit $= \frac{1}{2} \pi \int dx \, (r^2 - x^2)^2$, $= \text{Const} + \frac{1}{2} \pi r^4 x - \frac{1}{3} \pi r^2 x^3 + \frac{1}{10} \pi x^5$. Da man dieses zwischen den Grenzen $x = + r$ und $x = - r$ nehmen muß, so ist Const $= \frac{4}{15} \pi \,.\, r^5$, und das ganze Moment der Trägheit $= \frac{8}{15} \pi \,.\, r^5 = \frac{2}{5} M r^2$, wenn ich die Masse der ganzen Kugel $= M = \frac{4}{3} \pi r^3$ setze.

Sechzehnter Abschnitt.

Von der Oscillationsbewegung schwerer Körper, oder von den Pendeln.

§. 268. **Bemerkung.** Wir haben zwar schon früher die Bewegung betrachtet, die ein Pendel um eine horizontale Axe annimmt; aber wir waren damals genöthiget, die Untersuchung so anzustellen, als ob die ganze Masse des Pendels in einem einzigen Puncte vereinigt wäre. Diese Voraussetzung ist aber hier um so weniger brauchbar, da bei der Drehung um die Axen die Bewegung nicht grade so geschieht, als ob die ganze Masse im Schwerpuncte vereiniget wäre.

Um also die pendelartigen Bewegungen eines schweren, von seiner natürlichen Lage entfernten Körpers vollständiger zu bestimmen, müssen wir die im vorigen Abschnitt angestellten Betrachtungen auf diesen Fall anwenden. Die hier wirkende bewegende Kraft ist das gesammte Gewicht des Pendels, und daß dieses so wirkt, als ob es im Schwerpuncte vereinigt wäre, ist bekannt, (Statik §. 106.); wir können also jetzt leicht hier das statische Moment der bewegenden Kraft bestimmen, und dann aus der Berechnung des Momentes der Trägheit herleiten, wie die Winkelgeschwindigkeit des Körpers sich ändert.

§. 269. Wenn (Fig. 87.) der schwere Körper AB, der sich um die horizontale, durch C gehende Axe drehen kann, in G seinen Schwerpunct hat, und der Winkel GCD, welchen die vom Schwerpunct nach der Axe gezogene Linie mit der Verticale CD macht, heißt $= \varphi$: so ist das Moment der bewegenden Kraft $= M . CG . \sin\varphi$, wenn M das Gewicht des ganzen Körpers bedeutet, weil wir annehmen, daß keine andre Kraft als die Schwere diesen Körper zu seiner natürlichen Lage, wo der Schwerpunct in CD fallen würde, zurück treibt. Drücke ich nun das Moment der Trägheit dieses Körpers, in Beziehung auf die durch C gehende horizontale Axe, welches sich bei bestimmter Figur des Körpers allemal berechnen ließe, durch $M . k^2$ aus: so würde die in der Zeit $= t$ erlangte Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2g . M . AG . \sin\varphi . t}{M . k^2}$ sein (§. 266.), wenn das Moment der bewegenden Kraft immerfort $= M . AG . \sin\varphi$ bliebe. Unveränderlich bleibt es nun zwar nicht, da φ sich immerfort verkleinert; aber dennoch dient uns diese Formel, um eine Vergleichung mit der Bewegung des einfachen Pendels anzustellen. Ist nämlich cH ein einfaches Pendel, welches sich um c bewegen kann, und um den Winkel $Hcd = \varphi$ von der Verticale entfernt ist: so wird der Punct H von der beschleunigenden Kraft $= \sin\varphi$ zur Bewegung angetrieben, und würde folglich (§. 35.) die Geschwindigkeit

$= 2g.\mathrm{Sin}\,\varphi.t$ nach Verlauf der Zeit $= t$ erlangt haben, wenn diese Kraft so lange unverändert wirkte; mit dieser Geschwindigkeit würde H auf einem Kreisbogen vom Halbmesser $cH = l$ fortgehen, und also eine Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2g.t.\mathrm{Sin}\,\varphi}{l}$ haben. Hier läßt sich nun l so bestimmen, daß die Winkelgeschwindigkeiten des einfachen Pendels und jenes oscillirenden schweren Körpers gleichzeitig werden.

§. 270. Lehrsatz. Wenn ein schwerer Körper, welcher um eine horizontale Axe beweglich ist, um einen eben so großen Winkel $= \varphi$ als ein einfaches Pendel, beim Anfange der Bewegung, von seiner natürlichen Lage entfernt war: so macht er seine pendelartigen Schwingungen gleichzeitig mit dem einfachen Pendel, wenn des letzteren Länge gleich ist dem Quotienten $\frac{M.k^2}{M.AG}$ (§. 269.), oder gleich dem in Beziehung auf die Axe genommenen Momente der Trägheit des Körpers, dividirt durch das Product aus dem Gewichte des Körpers in den Abstand des Schwerpunctes von der Axe.

Beweis. Wenn sowohl das einfache Pendel als jener schwere Körper, den wir ein zusammengesetztes Pendel nennen wollen, beim Anfange der Bewegung so aus der Lage, in welcher sie ruhen würden, gebracht sind, daß die von der Umdrehungsaxe nach den Schwerpuncten beider G, H gezogenen Linien CG, cH gleiche Winkel $= \varphi$ mit der Verticallinie machen: so ist, wenn wir unter t eine sehr kleine Zeit verstehen, die Winkelgeschwindigkeit des einfachen Pendels (§. 269.) $= \frac{2g.t.\mathrm{Sin}\,\varphi}{l}$, also $= \frac{2g.t.M.AG.\mathrm{Sin}\,\varphi}{M.k^2}$, wenn $l = \frac{M.k^2}{M.AG}$, und eben so groß ist die Winkelgeschwindigkeit des zusammengesetzten Pendels. In den ersten Augenblicken ändert sich also bei der angenommenen Länge des einfachen Pendels die Größe der Winkel GCD und Hcd gleich viel, so daß beide Winkel einander gleich bleiben. Sind sie nun nach einigen Augenblicken beide $= \psi$ geworden: so wird die schon erlangte Winkelgeschwindigkeit wieder bei beiden gleich stark beschleunigt, indem die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit bei dem einfachen Pendel durch $\frac{2g.t.\mathrm{Sin}\,\psi}{l}$ $= \frac{2g.t.M.AG.\mathrm{Sin}\,\psi}{M.k^2}$ für eine neue, kleine Zeit $= t$ ausgedrückt wird, und eben der Ausdruck auch für die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit des zusammengesetzten Pendels gilt. Da nun diese Aenderung der Winkelgeschwindigkeit und folglich die Aenderung der Lage beider Pendel ganz auf gleiche Weise erfolgt, so werden beide zu gleicher Zeit in der Verticallinie ankommen, und ihre ganzen Oscillationen in gleichen Zeiten vollenden.

§. 271. Wenn die Gestalt des oscillirenden schweren Körpers oder des zusammengesetzten Pendels gegeben ist: so läßt sich das Moment der Trägheit desselben in Beziehung auf die Axe C bestimmen, und auch die Lage des Schwerpuncts ist bekannt. Es läßt sich also dann die Länge des einfachen Pendels bestimmen, welches gleich große Schwingungen in eben der Zeit, wie jener Körper macht.

§. 272. Erklärung. Ein solches einfaches Pendel heißt ein dem zusammengesetzten Pendel isochronisches wegen dieser Gleichzeitigkeit der Schwingungen.

Bestimmt man in dem zusammengesetzten Pendel den Punct L, wo der schwere Punct des einfachen isochronischen Pendels sich befinden müßte, so heißt L der Mittelpunct des Schwunges des zusammengesetzten Pendels.

§. 273. Dieser Mittelpunct des Schwunges liegt allemal weiter, als der Schwerpunct G von der Axe entfernt; denn das Moment der Trägheit in Beziehung auf die durch C gehende Axe ist allemal gleich dem Momente der Trägheit in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct mit jener Axe parallel gehende Axe addirt zu $M \cdot AG^2$ (§. 264.); also wenn ich das Moment der Trägheit in Beziehung auf die durch den Schwerpunct gehende Axe $= M \cdot h^2$ setze, $M \cdot k^2 = M \cdot h^2 + M \cdot AG^2$, und daher des isochronischen einfachen Pendels Länge $= \frac{h^2}{AG} + AG$, allemal $> AG$.

§. 274. Aufgabe. Ein Pendel besteht aus einer sehr dünnen cylindrischen Stange AB (Fig. 88.), an deren Ende eine kreisförmige Scheibe BC oder ein Cylinder von sehr geringer Höhe befestigt ist; dieses Pendel kann sich um eine horizontale auf die Ebne BC senkrechte Axe, die durch A geht, frei drehen; man sucht die Länge des isochronischen einfachen Pendels.

Auflösung. Es sei die Länge der Stange $AB = a$, der Halbmesser der Kreisscheibe $= r$: so ist, wenn ich den Querschnitt der Stange $= b^2$ und ihre Dichtigkeit $= D$ setze, der ganzen Stange Moment der Trägheit in Beziehung auf die Umdrehungsaxe, die in A senkrecht gegen sie ist (§. 249.) $= \frac{1}{3} b^2 D \cdot a^3$.

Das Moment der Trägheit der Kreisscheibe, deren Dicke $= f$ sein mag, in Beziehung auf eine gegen die Ebne BC senkrechte, durch den Mittelpunct gehende Axe ist (§. 261.) $= \frac{1}{2} \pi f . D . r^4$, wenn sie mit der Stange gleiche Dichtigkeit hat. Dieses Moment der Trägheit bezieht sich auf eine Axe, die mit der Umdrehungsaxe durch A parallel und von ihr um $a + r$ entfernt ist; also findet man (§. 264.) das Moment der Trägheit der Kreisscheibe in Beziehung auf die Umdrehungsaxe

$$\frac{1}{2} \pi f . D . r^4 + \pi f . D . r^2 (a + r)^2$$
$$= \pi f . D . r^2 \{\tfrac{1}{2} r^2 + (a + r)^2\}.$$ Das gesammte Moment der Trägheit des ganzen Pendels ist also

$$= \frac{1}{3} b^2 D . a^3 + \pi f D . r^2 \{\tfrac{1}{2} r^2 + (a + r)^2\};$$

seine Masse $= a D b^2 + \pi f . D r^2$, die Entfernung des Schwerpuncts von A ist
$$= \frac{\frac{1}{2} a . a D b^2 + (a + r) \pi f D r^2}{a D b^2 + \pi f D r^2}$$ (Statik. §. 106. 140.), also das Product aus der Masse in diese Entfernung $= \frac{1}{2} a^2 D b^2 + (a + r) \pi f D r^2$, und die Länge des einfachen isochronischen Pendels
$$= l = \frac{\frac{1}{3} b^2 a^3 + \pi f r^2 (\frac{1}{2} r^2 + (a + r)^2)}{\frac{1}{2} a^2 b^2 + \pi f r^2 (a + r)}.$$

§. 275. Hätte man die Masse der Stange als ganz unbedeutend bei Seite gesetzt, so wäre
$$l = a + r + \frac{\frac{1}{2} r^2}{a + r}$$ geworden.

§. 276. Beispiel. Wäre der Stange Halbmesser = 1 Linie, Länge = a = 432‴ = 3 Fuß, Halbmesser der Kreisscheibe = 40‴ = r, Dicke der Scheibe = 2‴, so läge der Schwerpunct 442 Linien von der Axe, der Mittelpunct des Schwunges 463 Linien von derselben entfernt.

§. 277. Bemerkung. Wenn man einen Körper solche Oscillationen um eine horizontale Axe machen läßt, und die Zeit dieser Oscillationen genau beobachtet: so ergiebt sich aus dieser Zeitbestimmung die Länge = l des isochronischen einfachen Pendels, dem eine solche Schwingungszeit zukömmt (§. 121.). Ist also zugleich die Masse, das ist das Gewicht des Körpers = M und der Abstand seines Schwerpunctes von der Umdrehungsaxe = AG bekannt: so ergiebt sich sein Moment der Trägheit in Beziehung auf die Umdrehungsaxe = l . M . AG, weil ja auch (§. 270.) $l = \frac{\text{Mom. d. Trägh.}}{AG . M}$ ist. Auf diese Weise läßt sich auch unregelmäßiger Körper Moment der Trägheit durch Versuche finden, wenn nur die Lage des Schwerpuncts bekannt ist.

Siebzehnter Abschnitt.

Vom Stoße geschwungener Körper an ruhende und dem Mittelpuncte des Hiebes.

§. 278. Bemerkung. Wenn eine Kraft, indem sie eine bestimmte Zeit durch auf die Masse M wirkt, dieser die Geschwindigkeit $= c$ ertheilt: so würde sie bei ganz gleicher Einwirkung auf die Masse $M + M'$ dieser die Geschwindigkeit $= \frac{c \cdot M}{M + M'}$ ertheilen, wenn die hervorgebrachte Bewegung eine gradlinigte ist. Bei der Umdrehungsbewegung hingegen ertheilt die in der Entfernung $= \varrho$ von der Axe wirkende Kraft $= Q$ der Masse $= M$ in der Entfernung $= r$ von der Axe die Winkelgeschwindigkeit $= u = \frac{2g \cdot t \cdot \varrho \cdot Q}{r^2 M}$, aber den beiden Massen

$= M$ in der Entfernung $= r$
und $= M'$ in der Entfernung $= r'$,

die Winkelgeschwindigkeit $= u' = \frac{2g \cdot t \cdot \varrho \cdot Q}{r^2 M + r'^2 M'}$

$$= \frac{u \cdot r^2 M}{r^2 M + r'^2 M'} \text{ (§. 244.).}$$

Wenn also am Hebelarm CN (Fig. 74.), den wir selbst als ohne Masse betrachten, die Masse M in der Entfernung $= r$ befindlich, und so in Bewegung gesetzt ist, daß sie die Winkelgeschwindigkeit $= u$ hat: so wird, wenn der Hebelarm an die Masse $= M'$ anstößt und diese mit fortreißt, die Winkelgeschwindigkeit jetzt in

$\frac{u \cdot r^2 M}{r^2 M + r'^2 M'}$ übergehen, wenn M′ die Entfernung $= r'$ von der Axe hat.

Eben diese Betrachtungen ließen sich anwenden, wenn der ganze Hebelarm aus schweren Theilen bestände und sein Moment der Trägheit in Beziehung auf die Umdrehungsaxe $= M \cdot k^2$ wäre; sollte nämlich dann, indem er sich mit der Winkelgeschwindigkeit $= u$ bewegt, eine neue Masse $= M'$ in der Entfernung $= r'$ von der Axe plötzlich mit fortgerissen werden, so würde die Winkelgeschwindigkeit in $\frac{u \cdot M \cdot k^2}{M \cdot k^2 + M' \cdot r'^2}$ übergehen, weil eine bestimmte, in der Entfernung $= \varrho$ wirkende Kraft $= Q$ der Masse $= M$, deren Trägheitsmoment $= M \cdot k^2$ ist, die Winkelgeschwindigkeit $= u = \frac{2g \cdot t \cdot Q \cdot \varrho}{M \cdot k^2}$, und bei gleicher und gleich daurender Wirksamkeit den beiden verbundenen Massen M, M′, die Winkelgeschwindigkeit $u' = \frac{2g \cdot t \cdot Q \cdot \varrho}{M \cdot k^2 + M' \cdot r'^2} = \frac{u \cdot M \cdot k^2}{M \cdot k^2 + M' \cdot r'^2}$ ertheilt.

§. 279. Je entfernter von der Axe die mit fortzureißende Masse M′ ist, desto größer wird ihr Moment der Trägheit und desto kleiner folglich die ihr ertheilte Winkelgeschwindigkeit $= u'$; aber ihre wahre Geschwindigkeit nimmt bei größerm Abstande zu, wenn die Winkelgeschwindigkeit dieselbe bleibt. Man kann daher fragen, ob es nicht eine gewisse Entfernung giebt, wo die Masse M′ sich befinden muß, um die größte absolute Geschwindigkeit, welche $= u' \cdot r' = \frac{u \cdot M \cdot k^2 \cdot r'}{M \cdot k^2 + M' \cdot r'^2}$ ist, zu erlangen.

§. 280. Aufgabe. Eine Masse, deren Gestalt und Größe bekannt ist, schwingt sich um eine gegebne Axe, und man kennt ihr Moment der Trägheit $= M \cdot k^2$ in Beziehung auf diese Axe. Indem diese Masse sich mit der Winkelgeschwindigkeit $= u$ dreht, trifft sie eine

Masse $= M'$ in der Entfernung $= r'$ von der Axe, die sie mit fortreißen muß; man soll bestimmen, wie groß die Entfernung $= r'$ sein müsse, damit die absolute Geschwindigkeit der Masse M' am größten werde.

Auflösung. Es muß $r'^2 = \frac{M \cdot k^2}{M'}$, oder das Moment der Trägheit der in Bewegung zu setzenden Masse eben so groß, als das Moment der Trägheit der bewegten Masse sein.

Beweis. Nenne ich $= v$ die absolute Geschwindigkeit, welche die Masse M' erlangt, so ist

$$v = u' \cdot r' = \frac{u \cdot M \cdot k^2 \cdot r'}{M \cdot k^2 + M' \cdot r'^2}, \text{ also}$$

$$r'^2 \cdot M' \cdot v - u \cdot M \cdot k^2 \cdot r' = - v \cdot M \cdot k^2;$$

$$r'^2 - \frac{u}{v} \cdot \frac{M}{M'} k^2 \cdot r' = - \frac{M}{M'} k^2;$$

$$r' = \frac{u \cdot M \cdot k^2}{2 \cdot v \cdot M'} \pm \sqrt{\left\{\frac{u^2 \cdot M^2 \cdot k^4}{4 \cdot v^2 \cdot M'^2} - \frac{M}{M'} k^2\right\}}.$$

Dieser Werth von r' hört auf möglich zu sein, wenn $\frac{u^2 \cdot M \cdot k^2}{4 \cdot v^2 \cdot M'} < 1$, oder $u^2 \cdot M \cdot k^2 < 4 v^2 \cdot M'$, oder $2 v \sqrt{M'} > u \cdot k \sqrt{M}$ ist. Also ist $v = \frac{1}{2} u k \sqrt{\frac{M}{M'}}$ der größte Werth, den v erlangen kann. Wenn dieser erreicht ist, so verschwindet der irrationale Theil und es ist

$$r' = \frac{u \cdot M \cdot k^2}{2 \cdot v \cdot M'} = \frac{u \cdot M \cdot k^2}{u \cdot k \sqrt{M \cdot M'}} = k \sqrt{\frac{M}{M'}};$$

also $r'^2 = \frac{M \cdot k^2}{M'}$.

§. 289. Wäre die bewegte Masse M ein cylindrischer Körper, den man als eine bloße Linie von der Länge $= a$ betrachten könnte: so würde, wenn diese sich um eine durch ihren Endpunct gehende, auf sie senkrechte Axe dreht, ihr Moment der Trägheit $= \frac{1}{3} M a^2$ sein, wenn man unter M die Masse der ganzen Linie versteht. Soll also mit dieser eine Masse $M' = n . M$ mit fortgerissen werden, so muß, damit die absolute Geschwindigkeit am größten sei $r'^2 = \frac{\frac{1}{3} M a^2}{n M}$, $r' = a \sqrt{\frac{1}{3n}}$ sein, also zum Beispiel $r' = \frac{1}{3} a$, wenn eine dreifach so große Masse mit fortgerissen werden soll; dagegen $r' = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0{,}58.a$, wenn eine Masse $= M$ fortzubewegen ist.

§. 290. Bemerkung. Wenn der Masse $= M$ Moment der Trägheit $= M . k^2$ ist in Beziehung auf die Umdrehungsaxe: so ist die Gewalt, welche der gedrehte Körper in der Entfernung $= k$ von der Axe ausübt, genau so groß, als wenn seine ganze Masse in dieser Entfernung vereinigt wäre. Denn eine gleiche Kraft würde den Körper dessen Trägheitsmoment $= M k^2$ ist, und würde eine Masse $= M$ in der Entfernung $= k$ von der Axe, in völlig gleiche Bewegung setzen; oder eine Kraft $= Q$, in der Entfernung $= k$ von der Axe wirkend, würde in beiden Fällen gleichzeitig dieselbe Winkelgeschwindigkeit hervorbringen, oder eine schon erlangte Winkelgeschwindigkeit auf gleiche Weise hemmen, wenn sie der Bewegung entgegen wirkte. Diese sich drehende Masse übt, wie sich nun leicht übersehen läßt, auf einen in der Entfernung $= r$ liegenden Punct, eben den Druck aus, als ob dort eine Masse $= \frac{M . k^2}{r^2}$ vereinigt wäre; denn eine solche Masse $= \frac{M . k^2}{r^2} = N$ in der Entfernung $= r$ fordert, um irgend eine Winkelgeschwindigkeit $= u$ zu erlangen, die bewegende Kraft

$$= Q = \frac{u . r^2 N}{2g . t . \varrho} = \frac{u M k^2}{2g . t . \varrho},$$

wenn diese Kraft in der Entfernung $= \varrho$, die Zeit $= t$ durch wirket; und eben so groß müßte Q sein, um bei derselben Entfernung $= \varrho$ in derselben Zeit der Masse, deren Trägheitsmoment = $M k^2$ ist, eben die Winkelgeschwindigkeit zu ertheilen.

§. 291. Bewegt sich also der Körper AC (Fig. 89.), dessen Trägheitsmoment = $M k^2$, mit der bestimmten Winkelgeschwindigkeit = u um die Axe C, und trifft bei A einen unbeweglichen Widerstand, in welchen er eine Höhlung von der Tiefe = s eindrückt: so wird die Tiefe dieser Höhlung eben so groß sein, als ob in A die Masse $N = \frac{M k^2}{CA^2}$ mit der Geschwindigkeit = $u \cdot CA$ wirkte. Die Tiefe der Höhlung war aber dem Quadrate der Geschwindigkeit und zugleich der Masse proportional (§. 223.), also hier dem Producte $u^2 \cdot CA^2 \cdot \frac{M k^2}{CA^2}$ proportional; die Tiefe der in den festen Widerstand eingedrückten Höhlung bleibt also gleich groß, der Punct A mag der Axe näher oder entfernter von ihr liegen.

§. 292. Bemerkung. In dieser Hinsicht scheint es also gleichgültig zu sein, mit welchem Puncte A der feste Widerstand getroffen wird; man kann aber dennoch, in Rücksicht auf eine andre Bedingung einen Punct A angeben, wo der getroffene feste Widerstand die vortheilhafteste Lage hat. Ist dieser Widerstand so fest, daß kein erheblicher Eindruck darin gemacht wird: so muß bei der beinahe plötzlichen Hemmung der Bewegung ein Bestreben des geschwungenen Körpers entstehen, sich um A zu drehen. Würde nämlich in demselben Augenblick, da A getroffen wird, C losgelassen: so würden vermöge der Trägheit sowohl die zwischen A und C liegenden Theilchen als die jenseits A nach B zu liegenden Theilchen ihre Bewegung fortzusetzen streben. Das Bestreben der erstern würde, wenn C losgelassen wird, eine Drehung um A gegen D zu, das Bestreben der andern eine Drehung um A gegen E zu bewirken, und der Körper BC wird nur dann ganz zur Ruhe kommen, wenn beide Bestrebungen einander genau aufheben. Auch wenn C festgehalten wird, sind diese entgegengesetzten Bestrebungen nicht ganz ohne Wirkung; in diesem Falle nämlich entsteht ein Druck auf die Axe in C, und dieser Druck ist gegen D zu gerichtet, wenn die in AC liegenden Theilchen mehr vermögen, im entgegengesetzten Falle ist er von D abwärts gerichtet.

Es giebt also einen Punct A, für den jenes entgegengesetzte Bestreben sich ganz aufhebt, und folglich, auch wenn C frei würde, die Bewegung ganz aufhört, also auch auf die festgehaltene Axe C sich gar kein Druck äußert. Diesen Punct wollen wir zu bestimmen suchen.

§. 293. Aufgabe. Die feste grade Linie CN (Fig. 90.), die hier als ohne Masse betrachtet wird, ist in den Puncten M und N mit den Massen = M in M und = N in N belastet. Indem sie sich mit der Winkelgeschwindigkeit = u um eine auf CN senkrechte durch C gehende Axe dreht, trifft sie in A auf einen festen Widerstand; man sucht, wo dieser Punct A liegen muß, damit, beim Auftreffen, die Axe C keine Gewalt auszuhalten habe.

Auflösung. Es muß AC gleich sein dem Quotienten, der aus dem Momente der Trägheit der beiden Massen M, N in Beziehung auf C, dividirt mit dem statischen Momente beider Massen in Beziehung auf C gefunden wird.

Beweis. Da in dem Augenblicke des Stoßes die Winkelgeschwindigkeit beider Massen = u, also die wahre Geschwindigkeit = CM . u für die Masse M,
= CN . u für die Masse N ist: so haben wir für M die Quantität der Bewegung (§. 216.) = CM . M . u, und für N dieselbe = CN . N . u.

Nenne ich nun P die Kraft, welche in einer bestimmten Zeit der Masse N die absolute Geschwindigkeit = CN . u ertheilen könnte, so muß ich $Q = \frac{P . CM . M . u}{CN . N . u}$

diejenige Kraft nennen, welche der Masse M die Geschwindigkeit $= CM \,.\, u$ ertheilen könnte. Es ist daher hier so gut als ob in N die Kraft $= P$, in M die Kraft $= Q$ wirkte, und dieser Kräfte statische Momente in Beziehung auf den jetzt unterstützten Punct A, sind

$$P \,.\, AN \,;\quad Q \,.\, AM.$$

Sollen diese gleich sein, damit beider Kräfte Wirkungen sich aufheben, so muß Q, welches $= \frac{P \,.\, CM \,.\, M}{CN \,.\, N}$ war, zugleich auch $= \frac{P \,.\, AN}{AM}$ sein; oder

$$AM \,.\, CM \,.\, M = AN \,.\, CN \,.\, N, \text{ sein,}$$

das ist $(AC - CM)\, CM \,.\, M = (CN - AC)\, CN \,.\, N$, oder $AC \{CM \,.\, M + CN \,.\, N\} = CM^2 \,.\, M + CN^2 \,.\, N$, also $AC = \frac{M \,.\, CM^2 + N \,.\, CN^2}{M \,.\, CM + N \,.\, CN}$, wo der Zähler das gesammte Moment der Trägheit beider Massen, der Nenner das gesammte statische Moment beider Massen ist.

§. 294. Es läßt sich leicht übersehen, daß etwas ganz Aehnliches Statt finden wird, wenn mehrere Massen an jener graden Linie befestiget sind. Auch dann hat man nur nöthig, die Momente der Trägheit aller einzelnen Massen in Beziehung auf die Drehungsaxe C in eine Summe zu bringen, und sie mit dem statischen Momente aller Massen in Beziehung auf C zu dividiren; der Quotient giebt den Abstand CA desjenigen Punctes, wo die geschwungene Linie auftreffen muß, um ganz zur Ruhe zu kommen, und keinen Druck auf C auszuüben.

§. 295. Eben dieses gilt noch, wenn alle einzelne Theilchen des Körpers AC schwer sind oder Masse haben. Da aber dann statt des statischen Momentes aller einzelnen Theile in Beziehung auf die Axe besser die ganze Masse als in ihrem Schwerpuncte G vereinigt angesehen, und das statische Moment aller Theile durch ein Product aus der ganzen Masse in den Abstand des Schwerpuncts von der Axe ausgedrückt wird: so bestimmt man nun die

Lage des Punctes A, wo der Körper auftreffen muß, um keine Wirkung auf die Axe C zu äußern, durch das Moment der Trägheit des ganzen Körpers, dividirt durch das Product aus der ganzen Masse in den Abstand ihres Schwerpuncts von der Axe.

§. 296. Bemerkung. Der Punct A liegt also eben da, wo nach §. 270 bis 272. der Mittelpunct des Schwunges läge, wenn CN als schwerer Körper seine Oscillationen um die horizontale Axe C machte. Man könnte den eben bestimmten Punct A, wo der Hieb treffen muß, damit die Bewegung des geschwungenen Körpers ganz aufgehoben werde, ohne daß ein Bestreben, sich um den getroffenen Punct zu drehen, entsteht, den Mittelpunct des Hiebes geschwungener Körper nennen, und es erhellt, daß dieser auch bei horizontaler Drehung oder Schwingung, wo also die Schwere gar nicht auf die Bewegung des Körpers einwirkt, eben da liegt, wo wir bei schweren oscillirenden Körpern den Mittelpunct des Schwunges fanden.

§. 296. b. Diese Betrachtung erlaubt eine ernsthaftere Anwendung. Sie lehrt nämlich die Drehungsaxe finden, um welche ein Körper im ersten Augenblicke sich zu drehen anfängt, wenn irgend eine Kraft auf einen Punct desselben so wirkt, daß ihre Richtung nicht durch den Schwerpunct geht. Stößt z. B. ein andrer Körper an einen ruhenden und geht die Richtung des Stoßes nicht durch den Schwerpunct des ruhenden, so nimmt dieser zwar eine fortrückende Bewegung an, fängt aber zugleich an sich um diejenige Axe zu drehen, die durch ähnliche Betrachtungen, wie unsre vorigen, als diejenige bestimmt wird, welche im Anfange der Drehung gar keine Gewalt leidet. Aber da diese Drehungsaxe nicht wohl eine der Hauptaxen sein kann, so kann sie nicht fortdauernd die Axe der Drehung bleiben, und hierin liegt eine Hauptschwierigkeit bei der Bestimmung der freien Bewegung rotirender Körper, daß die Drehungsaxe, wenn sie nicht eine der Hauptaxen ist, sich, selbst ohne neue Einwirkung fremder Kräfte, unaufhörlich ändert, und man also nicht bloß die Drehungen um eine bestimmte Axe, sondern die jedesmalige Lage der Axe selbst, die Drehungsgeschwindigkeit um diese Axe und das Fortrücken des ganzen Körpers ausdrücken muß.

Diese schwierigen Untersuchungen lassen sich ohne sehr viel vollkommnere Vorkenntnisse nicht anstellen.

Zusatz für geübtere Leser.

Nimmt man an, jedes Theilchen N der Linie CN, dessen Länge $= dx$ ist, sei mit der Masse $= dM$ belastet, die durch eine Function von $CN = x$ gegeben ist, so hat bei der Drehung um C mit der Winkelgeschwindigkeit $= u$, die Masse dM die Geschwindigkeit $= u \,.\, x$, und um diese hervorzubringen oder zu hemmen muß die bewegende Kraft $dP = \frac{u \,.\, x \,.\, dM}{2g \,.\, t}$ die Zeit $= t$ durch wirken. Dieser Kraft Moment in Beziehung auf A ist $= dP \,.\, (x - r)$, wenn $AC = r$ ist. Da das Moment der Kraft auf diese Weise für jedes Theilchen ausgedrückt wird, dieses Theilchen mag diesseits oder jenseits A liegen: so ist
$\frac{u}{2gt} (\int x^2 \, dM - r \int x \, dM)$, der Ausdruck für die Summe aller Momente in Beziehung auf einen Punct A dessen Abstand von C, $= r$ ist. Dieser Ausdruck gilt für jeden Werth von r; soll aber die Summe aller Momente $= 0$ sein, oder sollen die Kräfte sich im Gleichgewichte erhalten, so muß $r = \frac{\int x^2 \, dM}{\int x \, dM}$ sein. Und hier ist $\int x^2 \, dM$ das Moment der Trägheit, $\int x \, dM$ das statische Moment für den ganzen Körper in Beziehung auf die Axe C.

Achtzehnter Abschnitt.

Anwendungen auf die Umdrehung von Rädern bei Maschinen.

§. 297. **Aufgabe.** Am Umfange des verticalen Rades GF (Fig. 91.) befindet sich eine Masse M, die durch ihr Gewicht das Rad zu drehen strebt; diese muß, indem sie die mit ihr verbundene Welle HI zugleich mit zu drehen genöthiget ist, die Masse N heben. Wie wird die Bewegung beschleuniget werden, wenn die Masse M das Uebergewicht hat, und die Welle HI in der Unterlage ab ruht, und dort eine, dem Drucke proportionale Reibung leidet.

Auflösung. Wenn der Halbmesser des Rades $= CG = R$, der Halbmesser $= CH$ der Welle $= r$ ist, und beide concentrisch sind, das Rad aber die Dicke $= A$, die Welle dagegen die Länge $= a$ hat: so ist das statische Moment des Gewichts M, $= M . R$, das statische Moment des Gewichts N, $= N . r$. Das Gewicht von Rad und Welle sei $= P$, so leidet die Unterlage der Welle den Druck $= M + N + P$, die Friction kann also $= f (M + N + P)$ und ihr Moment $= f . r (M + N + P)$ gesetzt werden. Hier sollen nun die Kräfte nicht im Gleichgewichte sein, sondern M eine wirkliche Bewegung hervorbringen. Denken wir uns statt der Kräfte, die am Umfange der Welle wirken, die ihnen gleich wirkenden am Umfange des Rades: so ist es hier so gut, als ob eine Kraft $= M - \frac{r}{R} (N + f (P + M + N))$ am Umfange des Rades wirkte. Suchen wir nun das Moment der Trägheit der verschiedenen Massen: so ist dieses

für das cylindrische Rad $= \frac{1}{2} A \pi R^4$ (nach §. 263.),
für die Welle $= \frac{1}{2} a \pi r^4$,
für die Masse M $= M . R^2$,
für die Masse N $= N . r^2$.
Die Summe dieser Momente der Trägheit mag $= I$ heißen: so ist nach Verlauf der Zeit $= t$ die erlangte Winkelgeschwindigkeit (§. 242.),

$$u = \frac{2g . t . \{RM - rN - rf(N + M + P)\}}{I}.$$

Die wahre Geschwindigkeit, mit welcher die Last N fortrückt ist also $= u . r$.

§. 298. Fände die Reibung nicht am Umfange der Welle selbst Statt, sondern am Umfange eines Zapfens von kleinerm Halbmesser $= \varrho$, so wäre die Geschwindigkeit der Last

$$= u . r = \frac{2g . r . t . \{RM - rN - \varrho(P + M + N)\}}{I}.$$

Diese Geschwindigkeit nimmt bei der Vergrößerung von r allerdings zu, wenn die Winkelgeschwindigkeit dieselbe bleibt; aber die Vergrößerung von r macht zugleich die Winkelgeschwindigkeit geringer. Es läßt sich daher fragen, ob nicht irgend ein Werth von r der vortheilhafteste sei, bei welchem nämlich das Fortrücken der Last am schnellsten geschehe.

§. 299. Aufgabe. Denjenigen Werth von r, bei übrigens gleichen Umständen zu finden, bei welchem nach Verlauf eben der Zeit die Geschwindigkeit der Last, welche $= u . r$ war, am größesten ist.

Auflösung. Setze ich $u . r = v$, so ist

$$v = \frac{2g . r . t \{RM - rN - \varrho f(P + M + N)\}}{\frac{1}{2} \pi AR^4 + \frac{1}{2} \pi a . r^4 + MR^2 + N . r^2}.$$

Wir wollen zur Erleichterung der Rechnung annehmen, daß bei verschiedenen Werthen von r zugleich a so abgeändert werde, daß $a . r^4$ einen gleichen Werth behalte, damit das Moment der Trägheit für die ganze Welle immer gleich sei. Dann wird es bequem sein, die von r unabhängigen Glieder so zusammen zu fassen, daß wir

$$RM - \varrho \,.\, f\,(P + M + N) = B$$

und $\frac{1}{2}\pi\,(AR^4 + ar^4) + M\,.\,R^2 = C$,

also $v = \frac{2g\,.\,r\,.\,t\,(B - rN)}{C + N\,.\,r^2}$, setzen.

Das giebt $Cv + N\,.\,r^2\,.\,v = 2g\,r\,t\,B - 2g\,r^2\,N\,.\,t$,

oder $r^2\,(N\,.\,v + 2Ng\,.\,t) - 2gt\,.\,r\,.\,B = -Cv$;

$$r^2 - \frac{2gt\,.\,r\,.\,B}{N\,(v + 2gt)} = \frac{-Cv}{N\,(v + 2gt)};$$

$$r = \frac{g\,.\,t\,.\,B}{N\,(v + 2gt)} \frac{\pm\sqrt{\{g^2 t^2 B^2 - CNv\,(v + 2gt)\}}}{N\,(v + 2gt)}.$$

Offenbar ergeben sich hier unmögliche Werthe, wenn $CN\,v^2 + 2g\,t\,v\,.\,CN > g^2\,t^2\,B^2$ ist; also giebt

$v^2 + 2g\,t\,v = \frac{g^2\,t^2\,B^2}{CN}$ den größten möglichen Werth

für v, oder $v = -gt + \sqrt{\left\{\frac{g^2\,t^2\,B^2}{CN} + g^2\,t^2\right\}}$, ist der äußerste Werth, den v erlangen kann, und mit diesem gehört $v + 2gt = gt + gt\,\sqrt{\left(\frac{B^2}{CN} + 1\right)}$,

also $r = \frac{g\,.\,t\,.\,B}{N\,(v + 2gt)} = \frac{B}{N\left(1 + \sqrt{\left(\frac{B^2}{CN} + 1\right)}\right)}$ zusammen.

Dieser Werth ist also der passendste, welchen r erlangen kann, und ihm gehört die Winkelgeschwindigkeit

$= \frac{v}{r} = \frac{N}{B}\left(1 + \sqrt{\left(\frac{B^2}{CN} + 1\right)}\right).\,g\,.\,t\left(-1 + \sqrt{\left(\frac{B^2}{CN} + 1\right)}\right)$,

das ist $\frac{v}{r} = \frac{N\,.\,g\,.\,t}{B}\,\frac{B^2}{CN} = \frac{B\,g\,t}{C}$ zu.

§. 300. Beispiel. Es sei $A = 1$; $R = 20$; und $a\,.\,r^4$ werde immer $= A\,.\,R^4 = 160000$, genommen; $P = 20$; $M = 100$; $N = 1000$, also, wenn $f = \frac{1}{5}$; $\varrho = 0{,}2$

$$B = RM - \varrho . f . (M + N + P) = 1955,2.$$
$$C = \tfrac{1}{2} \pi (2 . AR^4) + MR^2 = 542656.$$
$$\frac{B}{N} = 1,9552 ; \quad \frac{B^2}{CN} + 1 = 1,00705,$$

also $r = 0,98$.

Hier ist die Dicke des Rades = A als Längen-Einheit gebraucht, und die zugehörige Cubic-Einheit liegt bei den Gewichten als Einheit zum Grunde, indem der Inhalt von Rad und Welle mit ihrem Gewichte als gleich angesehen ist. Das Rad ist betrachtet als eine ganze, aus gleicher Materie wie die Welle, bestehende Scheibe. Wäre es nach Art der Räder nur aus einem massiven Ringe und graden Speichen zusammengefügt: so müßte man das Moment der Trägheit für die Speichen, die man als grade Linien ansehen könnte, besonders suchen, und auch für den massiven Ring besonders. Auch müßte man überlegen, ob man wirklich die Welle so überaus lang nehmen könnte oder zu nehmen angemessen fände, daß $a . r^4 = AR^4$ würde, sonst könnte man $a . r^4 = \frac{1}{n} AR^4$ setzen und n so annehmen, wie es ohngefehr die Umstände erlaubten. Im Wesentlichen bliebe die Rechnung indeß immer dieselbe.

§. 301. Bemerkung. Wir haben hier die Betrachtung so angestellt, als ob sowohl die Masse M, als die zu hebende Masse N am Rade und an der Welle selbst befestigt wären, und dennoch immer mit dem ganzen Momente $= r . M$ und $= r N$ wirkten. Die ganze Betrachtung bleibt aber dieselbe, wenn M und N Gewichte sind, die bei M und N an einem Seile herab hängen. Es scheint zwar dann, als ob für diese Massen, da sie nicht selbst mit in Umdrehungsbewegung gerathen, das Moment der Trägheit nicht so berechnet werden dürfe; aber eine leichte Ueberlegung zeiget, daß, wofern M, N wirklich in Bewegung gesetzte Massen sind, man ihr Moment der Trägheit eben so berechnen müsse, als ob sie am Umfange von Rad und Welle selbst befestiget wären. Das

Moment der Trägheit kam ja dadurch in die Rechnung, daß eine das Rad drehende Kraft sich unter die zu bewegenden Massen nicht im Verhältniß der Massen allein, sondern im Verhältniß der Producte aus den Massen in die Quadrate der Abstände vom Centro austheilte; aber dieses würde auch hier der Fall sein, wenn Massen n′, N′ in verschiedenen Entfernungen vom Centro an Seilen herabhängen, da erstlich ihr statisches Moment und zweitens ihre Geschwindigkeit dem Abstande vom Centro proportional ist; und folglich kömmt ihr Moment der Trägheit eben so in die Rechnung, als ob sie in n und N am Rade selbst befestigt wären.

§. 302. Bemerkung. Auch von einer andern Seite läßt sich unsre Betrachtung noch allgemeiner machen. In §. 297 bis 299. haben wir Masse und Gewicht als gleich betrachtet, so wie es geschehen muß, wenn beide Massen M, N mit ihrer ganzen Schwere niederwärts wirken; dagegen würde man das Gewicht der Masse N nur $= N \,.\, \mathrm{Sin}\,\varphi$ setzen dürfen, wenn diese Masse auf einer, unter dem Winkel $= \varphi$ gegen den Horizont geneigten Ebne sollte heraufgezogen werden. Etwas Aehnliches könnte von der Masse M gelten. Unsre Untersuchung wird daher allgemeiner, wenn wir die von der Masse M ausgeübte Kraft $= p$, die von der Masse N ausgeübte Kraft $= q$ setzen; und unsre im 297. §. geführte Rechnung sähe dann so aus:

Moment der Kraft $= R \,.\, p$; der Last $= r \,.\, q$;

Moment der Reibung $= \varrho \,.\, f \,.\, (p + q + P)$.

Das Moment der Trägheit bleibt dasselbe, da die Massen M, N allemal müssen in Bewegung gesetzt werden, selbst wenn sie bloß horizontal fortgezogen würden; also ist nun die Winkelgeschwindigkeit

$$= u = \frac{2gt \,.\, \{R \,.\, p - r \,.\, q - \varrho \,.\, f\,(P + p + q)\}}{\frac{1}{2}\pi\,(A R^4 + a r^4) + M \,.\, R^2 + N \,.\, r^2},$$

und die wahre Geschwindigkeit der zu hebenden Masse wird am größten, wenn

$$r = \frac{R \cdot p - \varrho \cdot f(p+q+P)}{N\left\{1 + \sqrt{\left[\frac{(R \cdot p - \varrho \cdot f \cdot (p+q+P))^2}{(\frac{1}{2}\pi(a \cdot r^4 + A \cdot R^4) + MR^2)N} + 1\right]}\right\}}$$

ist, und die am Ende der Zeit $= t$ erlangte Winkelgeschwindigkeit ist dann $= \frac{v}{r}$

$$= g\,t\left(\frac{R\,p - \varrho\,f(p+q+P)}{\{\frac{1}{2}\pi(ar^4 + AR^4) + MR^2\}}\right).$$

§. 303. Wäre also die Masse N auf einer horizontalen Ebne fortzuziehen, so wäre $q = f.N$, nämlich bloß der Reibung gleich, und darnach die Rechnung leicht zu führen. Bei der Reibung, welche der aufliegende Zapfen des Rades leidet, müßte man hier etwas anders rechnen, weil $f.(p+q+P)$ nur dann die Reibung darstellt, wenn der Zapfen von der ganzen Last $p+q+P$ gedrückt wird; wirkte die Last $= q$ nach horizontaler Richtung, so ist der gesammte Druck, den der Zapfen leidet $= \sqrt{(q^2 + (p+P)^2)}$.

§. 304. Die hier angestellten Untersuchungen finden in vielen Fällen Anwendung. Das oberschlächtige Wasserrad, wo das in den Kästen aufgefangene Wasser, durch sein Gewicht das Rad umtreibt, gehört hieher; denn da hier, mit geringem Unterschiede, immer derselbe Theil des Rades mit einer immer gleichen Wasserlast beschwert ist, so kann man diese Masse so in die Rechnung bringen, wie es hier mit der Masse M geschehen ist. Dabei finden zwar noch einige andre Ueberlegungen Statt, z. B. wiefern das einstürzende Wasser eine andre Bewegung hat, als der fortrückende Punct M des Rades; aber die wesentlichsten Umstände, worauf es ankömmt, lassen sich schon hier übersehen.

Eben so gehören hieher die Treträder, wo ein Mensch das Rad dadurch in Bewegung setzt, daß er sich immer in einer gewissen Entfernung TS von dem niedrigsten Puncte des Rades hinstellt, und durch sein Gewicht die Drehung des Rades bewirkt.

Da es nicht meine Absicht ist, in die eigentliche Maschinenlehre einzugehen: so kann ich über die sonst hiebei vorkommenden Betrachtungen nichts hinzufügen.

§. 305. Aufgabe. An dem Umfange des Rades ACK eines Räderwerkes (Fig. 92.) wirkt das Gewicht $= p$, um die Last $= q$ zu heben, die am Umfange der Welle GH des letzten Rades angebracht ist. Man sucht, mit welcher beschleunigten Bewegung die Last gehoben wird, wenn p die Ueberwucht hat.

Auflösung. Die Halbmesser der Räder $KA = a$, $BD = b$, $EG = c$ und der Wellen $AB = \alpha$, $DE = \beta$, $GH = \gamma$ sind gegeben; auch kennt man das Moment der Trägheit des ersten Rades mit seiner Welle $= K.k^2$; des zweiten mit seiner Welle $= M.m^2$, des dritten mit seiner Welle $= N.n^2$, wo K, M, N die Massen dieser einzelnen Theile bedeuten. Da nun das Moment der Trägheit der Last in Beziehung auf die dritte Umdrehungsaxe $= Q.\gamma^2$ ist (wenn die Masse $= Q$ heißt, deren Gewicht $= q$ ist,), so ist für die um G bewegten Massen die Summe der Momente der Trägheit $= Q.\gamma^2 + N.n^2$; und es ist folglich eben so gut, als ob in E, in der Entfernung $= c$ von der Axe eine Masse $= S = \frac{Q\gamma^2 + Nn^2}{c^2}$ angebracht wäre; denn diese würde eben das Moment der Trägheit haben.

Wäre wirklich diese Masse $= S$ in E angebracht, so hätte sie in Beziehung auf die zweite Axe ein Moment der Trägheit $= S.\beta^2$ und das gesammte Moment der Trägheit der um D bewegten Massen wäre

$$= S.\beta^2 + M.m^2 = \frac{Q.\gamma^2\beta^2}{c^2} + \frac{Nn^2.\beta^2}{c^2} + M.m^2,$$

also eben so groß als das Moment der Trägheit einer in B angebrachten Masse $= R$, wenn

$$R = \frac{Q\gamma^2\beta^2}{c^2 b^2} + \frac{Nn^2\beta^2}{c^2 b^2} + \frac{M.m^2}{b^2}, \text{ wäre.}$$

Wenn diese Masse in der That an B angebracht wäre, also so fortgeschoben würde, wie es die Drehung der Welle AB fordert, so wäre der sämmtlichen um A bewegten Massen Moment der Trägheit $= R.\alpha^2 + K.k^2 + P.a^2$, wenn des Gewichts $= p$, Masse $= P$ ist.

Da nun das statische Moment der Kraft $p = p.a$ ist, das statische Moment der Kraft q in Beziehung auf eben die Axe A dagegen $= \frac{q.\gamma.\beta.\alpha}{c.b}$: so ist, wenn man die Reibung nicht beachtet $pa - \frac{q\gamma\beta\alpha}{bc}$ die in K wirkende bewegende Kraft, also nach Verlauf der Zeit $= t$ die Winkelgeschwindigkeit $= u$ des Rades AKC,

$$u = \frac{2gt.\left(pa - \frac{q\gamma\beta\alpha}{bc}\right)}{\frac{Q\gamma^2\beta^2\alpha^2}{b^2c^2} + \frac{Nn^2\beta^2\alpha^2}{b^2c^2} + \frac{Mm^2\alpha^2}{b^2} + Kk^2 + P.a^2}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit des letzten Rades ist

$$= \frac{\alpha.\beta}{b.c}.u = \frac{2gt(pabc.\alpha.\beta - q\alpha^2\beta^2\gamma)}{Q.\gamma^2\beta^2\alpha^2 + M.m^2\alpha^2c^2 + N.n^2\beta^2\alpha^2 + Kk^2b^2c^2 + P.a^2b^2c^2}.$$

§. 306. Auch hier könnte man suchen, bei welchen Verhältnissen zwischen den Halbmessern der Räder und Wellen die Last am schnellsten gehoben wird; aber da Betrachtungen dieser Art, um anwendbar zu sein, mit genauerer Rücksicht auf alle Umstände, wie sie wirklich bei einer bestimmten Maschine vorkommen, angestellt werden müssen, so halte ich es für überflüssig, hier dabei zu verweilen.

Daß übrigens diese Lehren bei Beurtheilung der Bewegung einer Maschine unentbehrlich sind, erhellt wohl hinreichend; die bestimmtere Anwendung aber muß aus Büchern, die umständlich von der Maschinenlehre handeln, erlernt werden.

Die Gesetze der Bewegung flüssiger Körper.

Erster Abschnitt.

Vom Ausfließen flüssiger Körper aus Gefäßen durch sehr enge Oeffnungen.

§. 1. Erklärung. Die Hydraulik oder Hydrodynamik (denn beide Namen werden fast als gleichbedeutend gebraucht) umfaßt die Lehren von der Bewegung flüssiger Körper.

§. 2. Bemerkung. Die Bewegungen, welche ein flüssiger Körper annehmen kann, sind so mannigfaltig, daß eine allgemeine theoretische Betrachtung derselben großen Schwierigkeiten unterworfen ist. Es lassen sich zwar mit Hülfe der höhern Analysis Formeln angeben, denen jede Bewegung irgend eines flüssigen Körpers gemäß sein muß, indem auch hier die entstehende Bewegung den bewegenden Kräften eben so entsprechen muß, wie bei festen Körpern, und jedes, abgesondert gedachte Stückchen des Flüssigen zwar vielleicht beim Fortfließen seine Gestalt, aber gewiß nicht seine Masse ändern kann; aber diese Formeln sind noch so weit von einer allgemeinen Anwendbarkeit auf alle vorkommende Fälle entfernt, daß selbst die gediegensten theoretischen Schriften nur bei wenigen einfachern Arten der Bewegung in das Einzelne einzugehen, und diese Bewegungen vollständiger zu beleuchten im Stande sind.

§. 3. Bemerkung. Um die verschiedenen Bewegungen, die ein flüssiger Körper annehmen kann, besser zu übersehen, kann man die einfacheren Fälle der Linien-Bewegung und der Flächen-Bewegung von denjenigen trennen, wo die Bewegungen aller Theilchen nach allen Richtungen gehen können. Man versteht unter Linien-Bewegung den Fall, wo der flüssige Körper in eine enge Röhre eingeschlössen so fortfließt, daß alle Theilchen die in demselben Querschnitte der Röhre sich befinden, einerlei Geschwindigkeit haben, und genau oder doch beinahe sich nach parallelen Richtungen fortbewegen. Damit dies genau der Fall sei, müßte die Röhre überall gleich weit sein, mögte aber sonst, ihrer Längen-Richtung nach, jede willkürliche Gestalt haben. Die hieher gehörigen Betrachtungen lassen sich indeß noch anwenden, wenn auch nicht alle Querschnitte der Röhre genau gleich sind, wofern man nur annehmen kann, daß nahe genug alle Theilchen desselben Querschnitts auf gleiche Art fortrücken. Man rechnet hieher auch den Fall, wo Wasser aus einem überaus weiten Gefäße durch eine sehr enge Oeffnung ausfließt, weil hier wenigstens ein gleiches Sinken aller Wasserschichten in dem weiten Gefäße kann angenommen werden.

Von der Flächen-Bewegung giebt die Bewegung des Wassers in graden Canälen das passendste Beispiel. Sind die Wände dieses Canales parallel und vertical, und alle auf die Längen-Richtung des Canals senkrechte Querschnitte rechtwinklichte Parallelogramme: so kann freilich in den verschiedenen Puncten des Längenschnitts die Bewegung verschieden sein; aber gewiß bleibt jedes Theilchen beständig in derselben Vertical-Ebne, und alle Theilchen, die sich in einerlei auf den Längenschnitt senkrechten Horizontallinie befinden, haben ganz gleiche Bewegung, so daß man nur die Bewegungen in einem einzigen Längenschnitte zu untersuchen brauchte, um sie für alle Längenschnitte zu kennen. Eine solche Bewegung könnte eine ebene Bewegung heißen. Aber ähnliche

Betrachtungen würden auch für gekrümmte Canäle Statt finden, oder überhaupt da, wo die Bewegungen jedes Theilchens gewissen Flächen folgen.

Unter diesen einfacheren Fällen sind die Linien-Bewegungen die einzigen, deren Gesetze sich etwas genauer darstellen lassen, und bei diesen allein werden wir daher verweilen.

Anmerkung. Euler hat mit Recht die besondere Betrachtung der Linien-Bewegung und Flächen-Bewegung flüssiger Körper empfohlen; er selbst aber hat nur die Gesetze der erstern genauer entwickelt. Einige Versuche, die Formeln für die Flächen-Bewegung weiter aufzulösen, habe ich in den Zusätzen zu Eulers Gesetzen des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper (Leipzig, bei Crusius. 1806.) gemacht, und außer diesen Bemühungen wüßte ich kaum etwas anders als Gerstners Theorie der Wellen (die auch in jenen Zusätzen erläutert ist,) als hieher gehörig anzuführen.

§. 4. Bemerkung. Wenn (Fig. 93.) das mit Wasser gefüllte Gefäß ACDB bei CD eine kleine Oeffnung hat: so wird das Wasser, wenn die Schwere auf dasselbe wirkt, durch diese Oeffnung ausfließen. Ist das Gefäß sehr weit, so wird das Herabsinken der höhern Schichten sehr langsam sein, so daß man das in die Oeffnung eintretende Wasser als ohne Geschwindigkeit, oder als hier erst seine Geschwindigkeit erlangend, ansehen kann. Jedes in die Oeffnung eintretende Theilchen des Flüssigen wird nur eine kurze Zeit durch beschleuniget, weil der Druck des Wassers im Gefäße offenbar nicht mehr auf das Theilchen wirkt, sobald es durch die Oeffnung ins Freie gelangt ist. Auf diesen Betrachtungen beruht die Bestimmung der Schnelligkeit des ausfließenden Wassers.

§. 5. Eigentlich ist die Voraussetzung, daß alle in einerlei Horizontal-Schichten fg liegenden Wassertheilchen gleich schnell fortgehen, nur für die höheren Schichten richtig. In den untersten Schichten, wie etwa hi, bleibt das seitwärts stehende Wasser bei hkC und ilD ganz ruhig, und es bildet sich gleichsam ein Trichter, in welchem das Wasser gegen CD herabfließt. Hiedurch wird freilich veranlaßt, daß das Wasser nicht ohne alle Geschwindigkeit ist, indem es am Anfange der Oeffnung in diese eintritt; aber wir werden dennoch zuerst die Sache so betrachten, und nachher sehen, welche Aenderungen etwa wegen jenes Umstandes eintreten.

§. 6. Lehrsatz. Wenn in dem Gefäße ACDB (Fig. 93.) ein tropfbares und schweres Flüssiges enthalten ist, welches durch die, in Vergleichung gegen die horizontalen Querschnitte des Gefäßes, enge Oeffnung CD ausfließt: so ist die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers so groß, als die Geschwindigkeit, die ein die verticale Höhe HI frei durchfallender Körper in I erlangt hätte, wenn nämlich HI gleich der verticalen Tiefe der Oeffnung unter der Oberfläche des Wassers ist.

Beweis. Wenn wir uns das grade an der Oeffnung liegende Wassertheilchen denken, so wirkt auf dieses der ganze Druck der höhern Wasserschichten. Nenne ich also f^2 den Querschnitt der Oeffnung, $h = HI$ die Höhe der drückenden Wassersäule: so ist, wenn ich das Gewicht einer Wassersäule durch ihr Volumen darstelle, jener Druck auf die ganze Oeffnung $= ff \, . \, h$. Dieses ist die bewegende Kraft, welche das in der Oeffnung liegende Theilchen forttreibt. Denken wir uns nun diese Kraft eine kleine Zeit $= t$ durch wirkend, so ertheilt sie dem Wassertheilchen eine Geschwindigkeit $= c$. Hätte das Wassertheilchen, welches den Querschnitt der Röhre ausfüllt, sogleich diese ganze Geschwindigkeit gehabt: so wäre $c \, . \, t \, . \, ff$ die in der Zeit $= t$ ausfließende Wassermasse (weil c den in 1 Sec. durchlaufenen Raum anzeigen soll); aber nicht c ist die Geschwindigkeit während der ganzen Zeit $= t$, sondern die Geschwindigkeit nimmt von o bis c zu, oder die ersten Theilchen des kleinen Wasserkörpers haben zwar die Geschwindigkeit $= c$, die letzten unterdeß erst eintretenden die Geschwindigkeit $= o$ und die mittlere Geschwindigkeit ist folglich $= \frac{1}{2} c$, die ausfließende Masse = $\frac{1}{2}$ c . t . ff. Dieses ist die Masse, welche durch die bewegende Kraft = ff . h fortgedrängt, in der Zeit = t die Geschwindigkeit = c erlangt, und es ist folglich (Mechan. §. 35. 28.)

$c = 2g \cdot \frac{ff \cdot h}{\frac{1}{2} c \cdot t \cdot ff} \cdot t$, indem hier (Mechan. §. 28.)

$P = ff \cdot h$ und $M = \frac{1}{2} c \cdot t \cdot ff$ ist.

Hieraus folgt $c^2 = 4g\,h$ oder c gleich derjenigen Geschwindigkeit, die ein von der Höhe = h frei herabfallender Körper erlangt hätte.

Da jedes folgende Theilchen eben so beschleuniget wird, indem es durch die Oeffnung dringt, so bleibt diese Ausflußgeschwindigkeit immer dieselbe, so lange die Wasserhöhe HI = h dieselbe bleibt.

§. 7. Dieser Beweis ist nicht völlig strenge. Er ist es desto weniger je minder wahr es ist, daß das in die Oeffnung tretende Theilchen ohne alle Geschwindigkeit ist. Welche Aenderung es bewirkt, wenn das über der Oeffnung stehende Flüssige schon eine merkliche Geschwindigkeit hat, läßt sich aus unsern bisher erklärten Kenntnissen nicht ganz übersehen. Das Theilchen leidet nur dann den ganzen Druck = ff . h, wenn es schon selbst in Bewegung ist; dann also ist die Beschleunigung geringer; aber da das Theilchen schon einige Geschwindigkeit hat, so compensirt sich dies einigermaßen, und daher kömmt es, daß die Erfahrung die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers auch da jener Formel gemäß giebt, wo doch einige Bewegung der höhern Schichten nicht zu verkennen ist.

§. 8. Bei dieser Bestimmung ist vorausgesetzt, daß kein andrer Druck, als der des Wassers selbst das Ausfließen bewirkt, und daß das ausfließende Wasser auch keinen Widerstand findet. Da wo die Oberfläche AB des Wassers eben so gut als die Oeffnung CD den Druck der Atmosphäre leidet, darf man die Betrachtung so anstellen, indem dieser Druck sich gegenseitig aufhebt. Flösse dagegen das Wasser in einen luftleeren Raum, während die

Oberfläche AB von der Atmosphäre gedrückt wird: so müßte man diesen stärkern Druck berücksichtigen. Wird dieser Druck einer Wassersäule von der Höhe $= k$ gleich gesetzt, und ist die Wasserhöhe über der Oeffnung $= h$, so ist die Geschwindigkeit $c = 2\sqrt{(g(h+k))}$.

Auf eben die Art würde die Geschwindigkeit bestimmt, wenn ein anderer äußerer Druck auf die Oberfläche AB, etwa vermittelst eines Kolbens, wirkte; man müßte nämlich diesen Druck $= P$ durch die Höhe $= q$ einer eben so viel wiegenden, über der Oberfläche AB stehenden Wassersäule ausdrücken, und $c = 2\sqrt{(g(h+q))}$ als die Geschwindigkeit ansehen.

§. 9. Bemerkung. Eben die Geschwindigkeit findet man auch für Oeffnungen in der Seitenwand, wofern nur diese Oeffnungen sehr klein sind. Die Tiefe der Oeffnung unter der Oberfläche des Wassers wird dann so bestimmt, daß man die Tiefe ihres Schwerpuncts dafür ansetzt.

§. 10. Fließt das Wasser (Fig. 94.) durch die kleine Oeffnung CD nicht ins Freie, sondern in ein auch mit Wasser gefülltes Gefäß, und sind AB, EF die beiden Oberflächen: so wird der Druck, welcher in der Oeffnung den Ausfluß bewirkt, nur dem Unterschiede der Höhen BC — CE proportional sein.

Wenn das Wasser (Fig. 95.) aus einem sehr weiten Behälter ABH bei GH in ein Gefäß CK ausfließt, das selbst bei IK wieder eine Oeffnung hat: so wird zwar ein Theil des bei GH einströmenden Wassers durch die Oeffnung IK wieder ausströmen, aber da die Geschwindigkeit in GH wegen der größern Druckhöhe bedeutender ist, als in der Oeffnung IK, so wird, wenn die Oeffnungen nicht gar zu ungleich sind, das Wasser in dem Gefäße CK bis zu einer gewissen Höhe steigen. Führet die Oeffnung IK in ein zweites Gefäß EM, aus welchem erst bei LM der Ausfluß ins Freie Statt findet: so wiederholen sich hier dieselben Umstände. Wenn der Behälter AH so groß ist, daß, während der ganzen Beobachtung des

Ausflusses, das Wasser in AH nicht merklich sinkt: so kann man fragen, welche Höhe das Wasser in den Gefäßen CK, EM annehmen wird.

§. 11. Aufgabe. Wenn bei der eben betrachteten Verbindung von Gefäßen (Fig. 95.) die Größe der Oeffnungen $GH = a^2$; $IK = a'^2$; $LM = a''^2$ und die ganze Wasserhöhe $BG = h$ gegeben ist, alle Ausfluß-Oeffnungen aber in derselben Horizontallinie liegen, die Höhe $DI = x$ im ersten, $LF = y$ im zweiten Gefäße zu bestimmen, die das Wasser annimmt, ehe ein gleichförmiger Wasserstand eintritt.

Auflösung. Man findet

$$x = h . \left(\frac{a^4 . a'^4 + a^4 . a''^4}{a^4 . a'^4 + a^4 . a''^4 + a'^4 . a''^4} \right) \text{ und } y = \frac{x . a'^4}{a'^4 + a''^4},$$

und nachdem diese gleichbleibenden Höhen erreicht sind, ist die ausfließende Wassermenge $M = 2 a''^2 . \sqrt{g y}$

$$= 2 a'^2 . a''^2 \sqrt{\frac{g x}{(a'^4 + a''^4)}}$$

$$= 2 a^2 . a'^2 . a''^2 \sqrt{\frac{g . h}{(a^4 . a'^4 + a^4 . a''^4 + a'^4 . a''^4)}}.$$

Beweis. Da die Wasserfläche AB immer in gleicher Höhe bleibt: so werden die Wasserflächen CD, EF nicht eher einen festen Stand erreicht haben, bis der Ausfluß aus allen drei Oeffnungen eine gleiche Wassermasse giebt. Es ist aber die Druckhöhe auf die erste Oeffnung, die nämlich dort die Geschwindigkeit des Ausflusses bestimmt, $= h - x$, auf die zweite Oeffnung $= x \quad y$, auf die dritte $= y$. Daher die Geschwindigkeiten $= 2\sqrt{(g h - g x)}$; $= 2\sqrt{(g x - g y)}$; $= 2\sqrt{g . y}$; und die ausfließenden Wassermassen in 1 Secunde gleich einem Wassercylinder von der Länge, die der Geschwindigkeit gleich ist, und von einer Grundfläche gleich der Ausfluß-Oeffnung; also

$$= 2 a^2 \sqrt{(g h - g x)} = 2 a'^2 \sqrt{(g x - g y)} = 2 a''^2 \sqrt{g y}.$$

Hieraus folgt $a''^4 . y = a'^4 (x - y)$; also

$$y = \frac{a'^4 \,.\, x}{a'^4 + a''^4}; \text{ ferner } a^4 (h - x) = a'^4 (x - y)$$

$$= a'^4 \left(x - \frac{a'^4 \,.\, x}{a'^4 + a''^4} \right),$$

$$\text{also } x = h \left(\frac{a^4 \,.\, a'^4 + a^4 \,.\, a''^4}{a^4 \,.\, a'^4 + a^4 \,.\, a''^4 + a'^4 \,.\, a''^4} \right).$$

Und die ausfließende Wassermenge wird, M

$$= 2\, a''^2 \sqrt{g \,.\, y} = 2\, a'^2 \,.\, a''^2 \sqrt{\frac{g x}{a'^4 + a''^4}};$$

$$= 2 \sqrt{\frac{g x}{\frac{1}{a''^4} + \frac{1}{a'^4}}};$$

$$= 2\, a'^2 . a''^2 . a^2 \sqrt{\frac{g \,.\, h}{a^4 . a'^4 + a^4 . a''^4 + a'^4 . a''^4}};$$

$$= 2 \sqrt{\frac{g \,.\, h}{\frac{1}{a''^4} + \frac{1}{a'^4} + \frac{1}{a^4}}}.$$

§. 12. Wenn alle Oeffnungen gleich groß sind, so wird $x = \frac{2}{3} h$; $y = \frac{1}{3} h$.

§. 13. Bemerkung. Hier ist immer vorausgesetzt, daß die Oberfläche des Wassers in dem Behälter in unveränderlicher Höhe bleibt. Wenn aber die Weite des Behälters nicht so ungemein groß ist, oder die Bewegung längere Zeit dauert: so sinkt die Oberfläche des Wassers, und die Druckhöhe, durch welche die Geschwindigkeit des Ausflusses bestimmt wird, nimmt ab. Hier müßte man also nach und nach für h die verschiedenen Höhen setzen, welche am Ende verschiedener Zeiten noch übrig sind.

§. 14. Aufgabe. Die Ausflußmenge des Wassers aus einem Gefäße in der Zeit $= t$ zu finden, wenn die anfängliche Höhe des Wassers $= h$ war, das Gefäß cylindrisch und der Querschnitt desselben $= b^2$, der Querschnitt der Oeffnung $= a^2$ ist.

Auflösung. Wenn die Erniedrigung der Oberfläche nicht sehr schnell ist, oder wenn b^2 ziemlich groß gegen a^2 ist: so kann man so rechnen, als ob im ersten Zeittheilchen die Höhe $= h$ bliebe, also in der Zeit $t = 1$, die Wassermenge $= 2\, a^2 \sqrt{g\, h}$ wäre. Diese Masse füllte im Gefäße die Höhe $z = \frac{2\, a^2 \sqrt{g\, h}}{b^2}$, und am Ende dieses Zeittheilchens ist also die Druckhöhe nur noch $= h - z = h - \frac{2\, a^2}{b^2} \sqrt{g\, h}$, und die im nächsten Zeittheile Statt findende Geschwindigkeit $= 2 \sqrt{g} \,.\, \sqrt{(h - z)}$, die ausfließende Masse $= 2\, a^2 \sqrt{(g\, h - g\, z)}$.

Auf diese Art würde man fortrechnen können.

Zusatz für geübtere Leser.

Nimmt man an, daß nach Verlauf der Zeit $= t$ die Wasserhöhe über die Oeffnung noch $= x$ ist, so hat man in diesem Augenblicke die Geschwindigkeit $= 2 \sqrt{g\, x}$, die während der kleinen Zeit $= dt$ ausfließende Wassermasse $= 2\, a^2\, dt \,.\, \sqrt{g\, x}$. Diese Wassermasse nahm im Gefäße die Höhe $= \frac{2\, a^2}{b^2}\, dt \,.\, \sqrt{g\, x}$ ein, und um soviel ist folglich die Höhe x während der Zeit $= dt$ vermindert, das heißt, es ist $dx = - \frac{2\, a^2}{b^2}\, dt \,.\, \sqrt{g\, x}$,

also $\frac{dx}{2 \sqrt{x}} = - \frac{a^2\, dt}{b^2} \sqrt{g}$;

$$\sqrt{x} + \text{Const} = - \frac{a^2\, t \,.\, \sqrt{g}}{b^2};$$

also da $x = h$ war für $t = 0$,

$$\sqrt{h} - \sqrt{x} = \frac{a^2}{b^2}\, t \,.\, \sqrt{g}, \text{ oder}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{h} - \frac{a^2\, t}{b^2} \sqrt{g}.$$

Die in dem Zeittheilchen dt ausfließende Wassermasse ist also $dM = 2\, a^2\, dt \sqrt{g\, x} = 2\, a^2\, dt \sqrt{g\, h} - \frac{2\, a^4}{b^2}\, t\, dt \,.\, g$, und die in der ganzen Zeit $= t$ ausfließende Masse

$$M = 2\, a^2\, t \sqrt{g\, h} - \frac{a^4}{b^2}\, g \,.\, t^2 = b^2\, (h - x).$$

§. 15. Diese Bestimmungen können indeß nur als richtig gelten, so lange die Höhe x nicht gar zu klein wird; denn wenn die Druckhöhe sehr klein wird, so wird die Bewegung weniger regelmäßig, weil die Voraussetzung, daß die Bewegung bloß nach einer Richtung gehe, zu sehr von der Wahrheit abweicht.

§. 16. Die Frage, wie das Gefäß FD (Fig. 94.) sich füllt, indem AD sich ausleert, läßt sich ganz nach ähnlichen Regeln beantworten. Die Druckhöhe, welche die Geschwindigkeit hervorbringt, wird hier theils wegen des Sinkens in einem Gefäße, theils wegen des Steigens im andern Gefäße geringer, und man müßte den Unterschied der Höhen nach Verlauf einer gewissen Zeit fast eben so bestimmen, wie in §. 14.

§. 17. Bemerkung. Wollte man das Bisherige auch auf etwas größere Oeffnungen anwenden: so hätte das, bloß rechnend betrachtet, bei horizontalen Oeffnungen gar keine Schwierigkeit, da bei ihnen die Druckhöhe und die Geschwindigkeit in allen Theilen der Oeffnung gleich ist. Für Oeffnungen in Seitenwänden aber müßte man die in jedem schmalen, horizontalen Streifen Statt findende Geschwindigkeit berechnen, und darnach bestimmen, welche Wassermasse durch jeden horizontalen Streifen der Oeffnung und folglich durch die ganze Oeffnung ausfließt. Alle diese Berechnungen aber können bei größern Oeffnungen nicht für genau gelten, und, selbst wenn die Oeffnungen sehr klein gegen den Querschnitt des Gefäßes sind, erfordern sie eine Correction wegen der Zusammenziehung des Strahles.

§. 18. Bemerkung. Wenn man die aus einem Gefäße durch eine enge Oeffnung ausfließende Wassermenge so berechnet, wie es die bisherigen Formeln für die Geschwindigkeit fordern, indem man nämlich die in 1 Secunde ausgeflossene Wassermasse als einen Cylinder betrachtet, dessen Querschnitt die Oeffnung selbst ist, und dessen Höhe gleich dem für die Geschwindigkeit des Ausflusses gefundenem Werthe: so erhält man allemal durch die Rechnung eine größere Wassermasse, als die Erfahrung sie ergiebt. Dieses rührt nicht von einer unrichtig bestimmten Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers her; denn wenn man durch eine sehr kleine Oeffnung AB (Fig. 96.) in der verticalen Seitenwand das Wasser ausfließen läßt, so bildet der hervorspringende Wasserstrahl AC eine Parabel, die sehr genau mit derjenigen übereinstimmt, in welcher ein in A nach horizontaler Richtung mit einer der in §. 6. berechneten Ausflußgeschwindigkeit gleichen Geschwindigkeit geworfener Körper sich bewegen würde. Auch die Höhe, welche aufwärts springende Wasserstrahlen erreichen, wenn man dem Gefäße etwa die Figur giebt wie Fig. 97. und den Strahl aus der Oeffnung CD vertical aufwärts springen läßt, stimmt nahe genug mit der berechneten Geschwindigkeit überein, indem der verticale Strahl fast völlig die Höhe erreicht, welche die Oberfläche AE des Wassers hat.

Daß also die wirklich ausfließende Wassermenge geringer ist, als die berechnete, hat seinen Grund nicht in einer unrichtigen Bestimmung der Geschwindigkeit oder der Länge des in 1 Secunde ausfließenden Cylinders; der Grund muß folglich in einer unrichtigen Bestimmung der Grundfläche des Cylinders oder des Querschnittes des Strahles liegen. Wir haben bisher immer die Oeffnung im Gefäße als dem Querschnitte des Strahles gleich angesehen; aber eine genaue Beobachtung des aus engen Oeffnungen hervordringenden Strahles zeigt, zumal wenn die Wand, in welcher die Oeffnung sich befindet, sehr dünne ist, daß der Strahl in einiger Entfernung außerhalb der Oeffnung einen kleinern Querschnitt hat, als die Oeffnung. Diese Zusammenziehung des Wasserstrahles kömmt daher, weil die von der Seite her im Innern des Gefäßes zuströmenden Wassertheilchen (Fig. 93.) wie m und n ihre Richtung auch außerhalb der Oeffnung noch behalten und daher die Verengerung oder Zusammenziehung des Strahles bewirken. Diese Seitenbewegung hindert, daß nicht so viele Wassertheilchen in die Oeffnung eintreten, als bei ganz paralleler Bewegung eintreten würden.

Die vielen Versuche, die man über diesen Gegenstand angestellt hat, zeigen, daß bei kreisförmigen Oeffnungen in einer sehr dünnen Wand der Durchmesser des zusammengezogenen Strahles ohngefähr = $\frac{4}{5}$ vom Durchmesser der Oeffnung ist, und der kleinste Querschnitt des zusammengezogenen Strahles, der also etwa an Flächeninhalt = $\frac{16}{25}$ der Oeffnung ist, liegt in einer Entfernung von der Oeffnung, die etwas mehr als den Halbmesser der Oeffnung beträgt. Die ausfließende Wassermenge beträgt beinahe $\frac{5}{8}$ der Wassermenge, die nach §. 6. berechnet würde, und diese Verminderung findet bei allen Druckhöhen ziemlich eben so Statt, so daß die ausfließenden Wassermassen sehr nahe den Quadratwurzeln aus den Druckhöhen proportional bleiben. Die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit ist, wie sich aus der Schwungweite horizontal ausfließender Strahlen ergiebt, um nur wenig geringer, als die Formel angiebt, indem der größte Theil der Verminderung der Wassermenge von der Zusammenziehung des Strahles abhängt, dessen kleinsten Querschnitt man statt der Oeffnung setzen müßte.

§. 19. Die eben angeführten Bestimmungen gelten, wenn das Wasser durch eine Oeffnung ausfließt, die in einer dünnen Wand des Gefäßes ausgeschnitten ist. Wäre die Wand sehr dick, oder brächte man statt dessen eine kleine cylindrische Röhre an der Oeffnung an: so ändert sich die ausfließende Wassermenge. Diese Röhrchen, die indeß nicht zu lang sein müssen, vermehren die ausfließende Wassermenge, indem sie die Zusammenziehung des Strahles vermindern. Die Versuche zeigen, daß solche cylindrische Ansatzröhrchen ohngefähr $\frac{13}{16}$ der nach der Formel berechneten Wassermenge geben, also $\frac{3}{16}$ mehr als die Oeffnungen in dünnen Platten oder Wänden. Eine noch größere Wassermenge erhält man durch conische kurze Ansatzröhren, die sich nach außen verengern. Ist nämlich hier die äußere Mündung der Röhre, der Oeffnung in einer dünnen Wand gleich, so erhält man $\frac{9}{10}$ der berechneten Wassermenge, wenn man die conische Röhre, und nur $\frac{5}{8}$ der berechneten Wassermenge, wenn man die bloße Oeffnung in der dünnen Wand gebraucht.

Giebt man dieser kegelförmigen Ansatzröhre so nahe als möglich die Gestalt des zusammengezognen Strahles, so daß der Durchmesser der Ausflußmündung = $\frac{4}{5}$ des Durchmessers der Einflußmündung ist, und die Länge der Ansatzröhre etwas größer als der Halbmesser der Einflußmündung, so fließt, zumal bei etwas abgerundeten Ecken, fast völlig so viel Wasser aus, als die Formel (§. 6.) für eine Oeffnung, die der Ausflußmündung gleich ist, angiebt. Dieses ist auch sehr natürlich, denn da hier die in die Rechnung gebrachte Mündung eben derjenige Querschnitt ist, der vorhin der kleinste Querschnitt des zusammengezognen Strahles war, so kann nur deswegen die ausfließende Wassermenge nicht ganz der berechneten gleich sein, weil die Geschwindigkeit selbst in dem engsten Querschnitte des zusammengezogenen Strahles nicht vollkommen so groß ist, als die Formel annimmt. Die Versuche mit dieser, dem natürlichen Strahl nachgebildeten Röhre geben etwa nur $\frac{1}{50}$ weniger an Wasser, als nach der Formel aus der Mündung fließen sollte.

§. 20. Man kann bei derselben Ausflußmündung und unter sonst gleichen Umständen die ausfließende Wassermenge noch durch folgendes Hülfsmittel vergrößern. Behält man die bestimmte Oeffnung in der Wand des Gefäßes, bringt aber eine nach außen sich erweiternde conische Röhre an: so ist der Ausfluß bei gehörigen Abmessungen dieser Röhre sogar größer als die theoretisch berechnete Wassermenge. Verbindet man aber an der Einflußmündung die nach der Form des zusammengezognen Strahls gebildete, sich nach außen verengernde Röhre mit jener Röhre, die sich nach außen erweitert, so wird die Zunahme der ausfließenden Wassermenge noch erheblicher.

Ein merkwürdiges Beispiel hiezu will ich aus Eytelweins Versuchen mittheilen. Aus einem Gefäße, in welchem beim Anfange des Versuches jedesmal die Druckhöhe = 3 Fuß war, ließ man durch verschiedene Mündungen, deren kleinster Durchmesser allemal einen Zoll betrug, eine Wassermenge = 4150 Cubiczoll ausfließen; die dazu nöthige Zeit ward beobachtet und betrug:

erstlich, $59\frac{1}{2}$ Secunden bei einer einfachen Oeffnung von 1 Zoll Durchmesser in einer Wand von $\frac{1}{2}$ Linie dick (Fig. 98.);

zweitens, $37\frac{1}{2}$ Secunden bei einer nach der Form des zusammengezognen Strahles gebildeten Röhre, deren äußere Mündung 1 Zoll Durchmesser, die Einflußmündung 15 Linien Durchmesser hatte, die 8 Linien lang war, und abgerundete Ecken hatte (Fig. 99.);

drittens, $31\frac{1}{4}$ Secunden, wenn man an die Oeffnung in der dünnen Wand ein sich auswärts erweiterndes Rohr setzte, dessen Einflußmündung 1 Zoll Durchmesser, die Ausflußmündung $21\frac{1}{2}$ Linien Durchmesser hatte, und das $8\frac{13}{16}$ Zoll lang war (Fig. 100.);

viertens, $23\frac{2}{3}$ Secunden, wenn man innerhalb des Gefäßes die Einflußröhre wie im zweiten und außerhalb die Ausflußröhre wie im dritten Versuche anbrachte (Fig. 101.).

Diese Zeiten, in welchen gleiche Quantitäten ausflossen, geben das Verhältniß der mittlern Geschwindigkeiten in der Oeffnung in den verschiedenen Fällen. Bei der Verbindung beider Röhren floß 1,55 mal so viel Wasser aus, als die Berechnung nach §. 6. ergab.

Anmerkung. Mehrere Versuche, theils eigene, theils fremde zusammengestellt, theilt Eytelwein mit, in seinem: Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. Berlin, 1801. In diesem Buche findet man über alles bisher abgehandelte umständlichere Belehrung, auch werde ich auf dasselbe mehrmals verweisen müssen, da es hier nicht möglich ist, alles so umständlich abzuhandeln, als es dort, fast immer überaus zweckmäßig, geschehen ist. Merkwürdige hieher gehörige Versuche enthält auch noch: Michelotti hydraulische Versuche zur Begründung und Beförderung der Theorie und Praxis, übersetzt von Zimmermann. Berlin, 1808.

§. 21. Diese auffallende Erscheinung, daß die ausfließende Wassermenge dadurch vermehrt wird, daß man die äußeren Querschnitte der Röhre vergrößert, läßt sich auf folgende Weise, wie es mir scheint, erklären. Wenn man sich (Fig. 102.) die Röhre cdba, die sich nach außen erweitert, angesetzt, und noch alles geschlossen und in Ruhe denkt, so leidet der ganze Querschnitt ab einen Druck = ab.h, wenn h die Wasserhöhe ist. Dieselben Ueberlegungen, wie in §. 6., würden uns auch hier die Geschwindigkeit $= c = 2\sqrt{gh}$ geben, und im ersten Augenblicke der Bewegung ist kein Grund vorhanden, warum sie nicht ziemlich nahe diesen Werth erreichen sollte. Indem aber vermöge dieser Geschwindigkeit in einem kleinen Zeittheilchen = t, die Wassermasse $= ab.t.2\sqrt{gh}$ ausströmt, und offenbar in der Oeffnung cd der eben so große Druck auch nur eine eben so große Geschwindigkeit und folglich eine geringere Ausflußmenge bewirkt: so entsteht in der Röhre sogleich im ersten Augenblicke der Bewegung ein Mangel an Zufluß, also müßte ein luft- und wasserleerer Raum entstehn, wenn nicht in demselben Augenblicke, wo dieser entstehen will, der Druck der Atmosphäre auf die Wasserfläche fg wegen des jetzt mangelnden gleichen Gegendrucks bei cd wirksam würde und das Wasser mit mehrerer Schnelligkeit durch cd preßte. Diese Vermehrung der Wassermenge durch conische Röhren, die sich nach außen erweitern, würde also im luftleeren Raume ganz wegfallen. Dort könnte nur im ersten, kaum merklichen Augenblicke ein größerer Ausfluß Statt finden; aber der mangelnde Zufluß würde sogleich die Wassermenge auf diejenige zurück bringen, die der Oeffnung cd entspricht.

Daß diese eben gegebene Erklärung die richtige sei, hat Daniel Bernoulli durch merkwürdige Versuche ganz genügend gezeigt. Er brachte, wie Fig. 102. zeigt, an einem verticalen Cylinder AB ein, nach außen sich erweiterndes Rohr cdab an, in welches in der engeren Gegend bei g ein Röhrchen ghi eingesetzt war, dessen Mündung in einem Gefäße mit Wasser KL stand. Indem man die Oeffnung ab verschloß, füllte man das Gefäß MNAB und ließ nun das Wasser bei ab auslaufen; aber indem es dort auszufließen anfing, zog sich das Wasser aus dem Gefäße KL durch die Röhre ihg aufwärts und floß mit aus der Oeffnung ab aus, so daß das untere Gefäß KL ganz leer wurde. Es ist wohl einleuchtend, daß hier der Druck der Luft das Wasser durch das Röhrchen aufwärts trieb, um den bei g entstehenden luftleeren Raum zu füllen; und so ist folglich dieses wunderbar scheinende Phänomen, daß die Schnelligkeit der vorangehenden Schichten auch die nachfolgenden schneller zu sein zwingt, genügend erklärt.

§. 22. Bemerkung. Die in §. 6. gegebne Formel für die Geschwindigkeit eines aus Gefäßen ausströmenden Flüssigen, ist nicht bloß auf Wasser und tropfbare Fluida anwendbar, sondern auch auf die Luft. Denken wir uns eine enge Oeffnung, durch welche die Luft in einen luftleeren Raum einströmt, und nennen k die Höhe der Wassersäule, welche dem Drucke der Luft das Gleichgewicht hält: so ist für den ganzen Querschnitt der Oeffnung = ff die bewegende Kraft = ff . k. Dagegen ist, wenn die Dichtigkeit der Luft = q heißt, in Vergleichung gegen die als Einheit angesetzte Dichtigkeit des Wassers, die in der kleinen Zeit = t ausfließende Luftmasse = $\frac{1}{2}$ c . t . ff . q; also, wie in §. 6.

$$c = 2g \,.\, t \,.\, \frac{ff \,.\, k}{\frac{1}{2} c ff q t} = \frac{4g\, k}{cq},$$

oder $c^2 = \frac{4g \,.\, k}{q}$. Hätte ich den Druck, welchen die

Luft auf die Oeffnung ausübt, durch die Höhe einer Luftsäule ausgedrückt, die $= h$ wäre, so müßte bekanntlich $h.q = k$, also auch hier $c^2 = 4gh$ sein.

§. 22*. Da Versuche über ein solches Einströmen der Luft schwieriger sind: so fehlt es uns an Erfahrungen, ob auch hier eine ähnliche Verminderung der ausfließenden Luftmasse Statt finde. Die Frage, wie die Geschwindigkeit abnimmt, wenn ein gegebnes Gefäß sich nach und nach mit Luft füllt, ließe sich allenfalls beantworten und die Zeit bestimmen, da die Luft im Gefäße eine bestimmte Dichtigkeit erlangt hätte; aber Fragen der Art scheinen keinen erheblichen Nutzen zu haben.

Zweiter Abschnitt.

Vom Fortfließen des Wassers in Röhren.

§. 23. **Bemerkung.** Wenn Wasser sich in einer graden, überall gleich weiten Röhre ganz frei, ohne Hinderniß, fortbewegt; so muß es eben die Bewegung wie ein in der Röhre herabgleitender fester Körper annehmen. Steht also die Röhre senkrecht, wie Fig. 103., so sinkt die Wassermasse ABDC so wie ein frei fallender Körper in ihr herab, und jedes Wassertheilchen leidet gar keinen Druck, weil es dem folgenden ganz frei ausweicht.

Auch in einer engen, gegen den Horizont geneigten Röhre ließe sich, wenn wir die Bewegung als ganz frei ansehen, ganz nach den für feste Körper bekannten Gesetzen die Bewegung bestimmen, die eine darin fortruckende Wassermasse annehmen muß.

§. 24. Wenn die Röhre an einem sehr weiten Behälter (Fig. 104.) AB angebracht ist, so würden die Gesetze des Ausflusses fast ganz dieselben sein, wie im vorigen Abschnitte, wenn nicht der Widerstand in der Röhre hier Aenderungen hervorbrächte. Da der Widerstand hier sehr bedeutend einwirkt, so will ich bei dem, was ohne Widerstand Statt finden würde, nicht umständlicher verweilen, sondern nur noch eines besonders merkwürdigen Falles erwähnen.

§. 25. Wenn an einen weitern Behälter eine so wie ABC (Fig. 105.) gekrümmte Röhre angebracht ist, die in C niedriger herabreicht, als die Oberfläche DE des Wassers im Gefäße: so fließt, wofern nur einmal die ganze Röhre mit Wasser angefüllt war, alles Wasser aus dem Gefäße bis zu der Tiefe aus, in welcher sich die Oeffnung C befindet. Diese gekrümmte Röhre heißt ein **Heber**, und seine Wirkungsart ist leicht zu übersehen. Wenn man die Oeffnung bei C verschlossen hält, und die Röhre ist ganz mit Wasser gefüllt, so erhält der Druck der Luft, den sie nämlich auf die Oberfläche DE ausübt, das Wasser in der Röhre, so wie im Barometer. Die Oeffnung bei A leidet also jetzt von außen den Druck der Atmosphäre und den Druck der Wassersäule von der Höhe AF, von innen aber den Druck der Wassersäule von der Höhe AG. Wenn man jetzt die Mündung bei C öffnet, so leidet diese von außen gleichfalls den Druck der Atmosphäre, von innen aber den Druck einer Wassersäule von der Höhe CH. Der Druck, welcher bei A das Wasser in die Röhre drängt, übertrifft also den Gegendruck bei C um so viel als es die Höhe CI, um welche DE höher als C liegt, angiebt, und folglich fängt das Wasser bei C an auszufließen; dieses Ausfließen aber dauert nun auch ununterbrochen fort, weil der Druck der Luft nicht gestattet, daß sich oben bei B ein luftleerer Raum bilde. Die Geschwindigkeit des bei C ausströmenden Wassers wird durch die Tiefe CI bestimmt, um welche C niedriger als DE liegt; die Geschwindigkeit ist also $= 0$, oder das Ausströmen hört auf, wenn die Wasserfläche DE sich bis an die durch C gehende Horizontale herabgesenkt hat.

Wäre bei C ein völlig luftleerer oder allenfalls mit verdünnter Luft erfüllter Raum, so könnte der Heber selbst noch fortfließen, wenn C höher als die Oberfläche DE ist. Befände sich dagegen DE im luftleeren Raume, so würde offenbar die Wirkung des Hebers ganz aufhören; denn, selbst wenn auch bei C kein Druck der Luft Statt findet, so würde doch nur das Wasser aus BC auslaufen, und sich bei B ein leerer Raum bilden, welchen auszufüllen keine Kraft wirksam ist.

§. 26. Bemerkung. Um die Bewegung des Wassers in Röhren richtig zu beurtheilen, muß man nothwendig Rücksicht auf den Widerstand nehmen, welchen es bei dieser Bewegung leidet. Jede Wasserschichte in der Röhre (Fig. 103.) wird durch das Anhangen an der Wand der Röhre festgehalten, und diese Kraft ist folglich, wenn wir uns hier auf Röhren, deren Querschnitte Kreise sind, beschränken, dem Halbmesser der Röhre proportional. Aber, wenn alle Theilchen in einem bestimmten Querschnitte mit einerlei Geschwindigkeit fortrücken, so ist die Masse, welche durch jene verzögernde Kraft aufgehalten wird, dem Quadrate des Halbmessers proportional; und da die beschleunigende Kraft allemal der bewegenden Kraft direct und der bewegten Masse umgekehrt proportional ist, so läßt sich der Widerstand, den jeder Querschnitt leidet, ansehen, als eine dem Halbmesser umgekehrt proportionale, der Richtung der Bewegung entgegenwirkende, beschleunigende Kraft. Die Erfahrung lehrt zugleich, daß sie dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sei, und wir können nun die Wirkung dieses Widerstandes wenigstens in den wichtigsten Fällen bestimmen.

§. 27. Wenn die Röhre AD (Fig. 103.) vertical steht, so würde die Wassermasse AD in ihr mit immer beschleunigter Bewegung herabfallen, wenn dieser Widerstand nicht Statt fände; wegen dieses Widerstandes aber kann die Bewegung nicht in gleichem Grade beschleuniget werden. Da der Widerstand bei größeren Geschwindigkeiten immer stärker wird, so läßt sich auch hier (so wie im 11. Abschn. der Mechanik) eine Geschwindigkeit denken, bei welcher der Widerstand der Schwere gleich wird, oder bei welcher die Beschleunigung durch die Schwere die Geschwindigkeit des Wassers in der verticalen Röhre nicht mehr vermehren kann, weil der Widerstand genau eben so viel von der Geschwindigkeit aufhebt, als die Schwerkraft ihr beizufügen vermögte.

Nenne ich diese Geschwindigkeit $= c$, den Exponenten des Widerstandes, so ist für Röhren mit kreisförmigen Querschnitten dieses Exponenten Quadrat dem Halbmesser der Röhre proportional; denn nenne ich für den Halbmesser $= r$ den Widerstand, welcher der Geschwindigkeit $= c$ entspricht, $= 1$, und nenne ich für den Halbmesser $= R$ denjenigen Widerstand $= 1$, welcher der Geschwindigkeit $= C$ entspricht, so ist $\frac{C^2}{R} = \frac{c^2}{r}$, weil der Widerstand im ersten Falle sich zu dem im letzten Falle verhält, wie das Product $\frac{c^2 \cdot 2\pi r}{\pi r^2}$ zu dem Producte $\frac{C^2 \cdot 2\pi R}{\pi R^2}$.

Ist also für einen bestimmten Halbmesser $= r$ der Röhre der Exponent des Widerstandes bekannt, $= c$, so wird er für eine Röhre von anderm Halbmesser $= R$ $= C = c \cdot \sqrt{\frac{R}{r}}$ sein. Hieraus folgt, daß man den Exponenten des Widerstandes für jede Röhre mit kreisförmigen Querschnitten findet, wenn er für eine solche Röhre bekannt ist. Wäre zum Beispiel $c = 285$ Zoll für $r = 1$ Zoll, so müßte $C = 402$ Zoll sein für $R = 2$ Zoll.

§. 28. Da der Widerstand sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhält, so ist für jeden Querschnitt der Röhre der Widerstand $= \frac{v^2}{c^2}$, bei der Geschwindigkeit $= v$, wenn er $= 1$, der Schwerkraft gleich war, bei der Geschwindigkeit $= c$. Dieser Ausdruck gilt für eine überall gleich weite Röhre, und auf diese allein wollen wir hier die Anwendung machen. Da aber offenbar, indem dieser Widerstand in jedem Querschnitte Statt findet, der gesammte Widerstand der Länge der Röhre $= l$ proportional ist: so können wir den Widerstand für die ganze Röhre dem Producte $= l \cdot \frac{v^2}{c^2}$ proportional setzen.

Dieses Product ließe sich hier, wo wir die bewegenden Kräfte durch Druckhöhen abmessen, vergleichen mit dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe $= 1$, auf welche aber nicht die Schwere, sondern eine durch $= \frac{v^2}{c^2}$ ausgedrückte beschleunigende Kraft wirkte. Bei der Einwirkung einer solchen Kraft nämlich ist das Gewicht derselben Wassersäule, die, der Schwere unterworfen, das Gewicht $= 1$ heben würde, nur $= 1 \cdot \frac{v^2}{c^2}$.

§. 29. Aufgabe. Wenn an einem überaus weiten Gefäße eine cylindrische Ausflußröhre angebracht ist, die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher das Wasser am Ende derselben ausströmen wird.

Auflösung. Wenn h die Höhe des Wassers über der Oeffnung, l die Länge der Röhre, v die Ausflußgeschwindigkeit, c den Exponenten des Widerstandes bedeutet: so muß $\frac{v^2}{4g} = h - \frac{l \cdot v^2}{c^2}$, also

$$v^2 = \frac{4g\,h\,c^2}{c^2 + 4g\,l} \text{ sein.}$$

Beweis. Obgleich, so lange das Wasser ruht, der Druck, welchen das Wasser auf die Mundung der Röhre ausübt $= h \cdot ff$ ist, wenn die Höhe des drückenden Wassers $= h$, der Querschnitt der Röhre $= ff$ ist: so kann doch hier, wo wir die Ausflußröhre sehr lang annehmen, allenfalls nur im ersten Augenblicke die Geschwindigkeit des Ausflusses so sein, wie sie dieser Druck-

Höhe gemäß sein sollte, indem der Widerstand in der Röhre dem nachfolgenden Wasser den Zufluß erschwert, und als eine dem Wasserdrucke entgegenwirkende Kraft anzusehen ist. Dieser Widerstand vermindert den Druck um eben so viel als das Gewicht einer Wassersäule von der Höhe $= 1 . \frac{v^2}{c^2}$ es thun würde; denn da bei der Geschwindigkeit $= c$ die Wassermasse von der Länge l eben den Widerstand leiden würde, der ihrem Gewichte gleich oder $= l . ff$ ist, so leidet sie hier, weil der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, einen Widerstand gleich dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe $= \frac{l . v^2}{c^2}$, oder gleich dem Gewichte $= l . ff . \frac{v^2}{c^2}$. Die auf die Mündung der Röhre drückende Kraft, welche den Ausfluß des Wassers fortwährend unterhält, ist also nur $= \left(h - \frac{l . v^2}{c^2}\right) f^2$, und es läßt sich daher grade wie in §. 6. schließen, daß $v^2 = 4g\left(h - \frac{l . v^2}{c^2}\right)$, oder $v^2 (c^2 + 4g\, l) = 4gh . c^2$ sein müsse.

§. 30. Diese Formel stimmt nahe mit der Erfahrung überein. Um eine noch größere Uebereinstimmung zu erhalten, hat man einige Abänderungen der Formel vorgeschlagen, die freilich die Einfachheit der Formel vermindern. Woltmanns Beiträge zur hydraul. Archit. 1. Band und Eytelweins Hydraulik S. 220. geben solche Formeln. Eine mit den Erfahrungen sehr nahe harmonirende und zu weitern Rechnungen vorzüglich bequeme Formel habe ich im 5. Abschn. von Eulers Ges. d. Bew. flüss. Körper S. 401. angegeben.

§. 31. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, welchen das Wasser in irgend einem Querschnitte der Röhre ausübt, wenn die Umstände so wie in §. 29. sind.

Auflösung. Wenn man den Druck für den Querschnitt ef (Fig. 104.) sucht, dessen Höhe über der Ausfluß-Oeffnung $= z$ ist, und dessen Entfernung von der Mündung $= ce = s$ ist: so hat das in ef ankommende Wasser in dem noch übrigen Theile der Röhre den Widerstand $= s \cdot \frac{v^2}{c^2}$ zu überwinden. Diesem wird freilich zum Theil durch den Druck der Wassersäule ed, deren Höhe $= z$ ist entgegengewirkt, aber den Ueberrest muß nothwendig der in ef Statt findende Druck überwinden, indem sonst die Geschwindigkeit nicht gleichförmig bestehen könnte. Der Druck im Querschnitte ef ist also

$$= \frac{s \cdot v^2}{c^2} - z, \text{ oder da } \frac{v^2}{c^2} = \frac{h - \frac{v^2}{4g}}{l} \text{ war, jener}$$

$$\text{Druck} = \frac{s}{l}\left(h - \frac{v^2}{4g}\right) - z.$$

§. 32. Anmerkung. Langsdorf hat das Verdienst zuerst auf diese richtige Bestimmung des Druckes aufmerksam gemacht zu haben; daß aber auch eine rein-theoretische Ableitung eben dasselbe ergiebt, habe ich in den Zus. zu Eulers Gesetzen d. Bew. flüss. Körper S. 400. gezeigt.

§. 33. Bei diesen Betrachtungen ist vorausgesetzt, daß in dem weiten Gefäße gar kein Widerstand Statt finde, und daß die Wasserhöhe $= h$ sich während der Bewegung nicht erheblich ändre, auch daß die Querschnitte des Gefäßes groß genug sind, um die dortige Bewegung der einzelnen Schichten als ganz unbedeutend bei Seite zu setzen.

Bestände die Röhre aus Stücken von verschiedener Weite, oder wäre sie zum Beispiel conisch, so müßte man auf den verschiedenen Widerstand in verschiedenen Querschnitten Rücksicht nehmen, und den an jeder Stelle geltenden Exponenten des Widerstandes gehörig bestimmen. Die hiezu nöthigen Rechnungen lassen sich hier nicht ausführen.

§. 34. Bemerkung. Diese Untersuchungen enthalten die Grundlage nicht nur zu allen denjenigen Bestimmungen, die beim Fortfließen des Wassers in Röhrenleitungen vorkommen, sondern auch zu denen, welche die Bewegung des Wassers in Druckwerken, Feuerspritzen und dergleichen betreffen. Hier ist zwar nicht immer eine drückende Wassermasse die Ursache der Bewegung, sondern meistens ein fremder Druck, den man mit dem Gewichte einer Wassersäule vergleichen kann; aber die ganze Betrachtung läßt sich doch, dem Wesentlichen nach, eben so anstellen, wie hier.

Um nur ein Beispiel von dieser Berechnung zu geben, stelle (Fig. 106.) ABC ein Gefäß mit einer 40 Fuß langen Röhre von 2 Zoll Durchmesser vor; man soll die Höhe der Wassersäule bestimmen, welche auf das Wasser wirken muß, damit es mit einer Geschwindigkeit von 6 Fuß in 1 Sec. in der Röhre fortfließe.

Die Formel (§. 29.) giebt $h = \frac{v^2}{4g} + \frac{l.v^2}{c^2}$ als die erforderliche Druckhöhe. Ist also für 2 Zoll Durchmesser der Exponent des Widerstandes ohngefehr $= c = 24$ Fuß, so ist

$$\frac{v^2}{4g} = \frac{6^2}{60} = 0{,}6 \text{ Fuß},$$

$$\frac{l.v^2}{c^2} = 40 \cdot \frac{6^2}{24^2} = 2{,}5 \text{ Fuß},$$

also $h = 3{,}1$ Fuß. Wenn sich also zugleich die Mündung der Röhre D 20 Fuß hoch über dem Wasserspiegel EF befindet, so muß ein fremder Druck, gleich dem Gewichte einer Wassersäule von 23,1 Fuß auf EF wirken, um diese Geschwindigkeit hervorzubringen. Wäre diese Röhre zur Feuerspritze bestimmt, so würde man die 2 Zoll weite Röhre mit einem engern Ausflußröhre versehen, dessen Querschnitt etwa nur $\frac{1}{10}$ vom Querschnitte der Leitröhre wäre, damit die Ausflußgeschwindigkeit 60 Fuß betrüge, wenn sie in der Zuleitungsröhre 6 Fuß ist. In diesem Falle muß man in dem Gliede $\frac{v^2}{4g}$, $v = 60$ Fuß, der Ausflußgeschwindigkeit gleich setzen, indem schon ohne allen Widerstand eine Druckhöhe von 60 Fuß erfordert wird, um diese Ausflußgeschwindigkeit hervorzubringen; dagegen ist im zweiten Gliede v nur $= 6$ Fuß, also $\frac{l \cdot v^2}{c^2} = 2,5$ Fuß, und um so viel wird nur ohngefehr die erforderliche Druckhöhe wegen des Widerstandes vermehrt. Hätte man dagegen die ganze Leitröhre nur von 1 Zoll Durchmesser genommen, so müßte das Wasser, um durch eben das Ausflußrohr eben so schnell auszufließen, eine Geschwindigkeit $= 24$ Fuß in der Röhre haben, wodurch die für den Widerstand erforderliche Druckhöhe $= 40 \cdot \frac{24^2}{17^2} =$ beinahe 80 Fuß würde; denn hier wird der Widerstand nicht bloß stark vermehrt durch die nöthige viermal größere Geschwindigkeit, sondern auch durch den in der engern Röhre kleinern Exponenten des Widerstandes.

Diese Bestimmung müßte noch mit Rücksicht auf mehrere Nebenumstände corrigirt werden, die ich hier nicht in Betrachtung ziehen kann. Umständlicher und zugleich mit der für Anfänger nöthigen Beschränkung auf das Wesentlichste und Wichtigste hat Eytelwein diese und ähnliche Lehren abgehandelt in seinem Handbuch der Mechanik und Hydraulik. Langsdorfs Lehrbuch der Hydraulik behandelt alle diese Gegenstände sehr vollständig, aber auch oft in zu viele Formeln eingehüllt.

§. 35. Bemerkung. Ein von dem bisher betrachteten Widerstande noch verschiedenes Hinderniß der Bewegung geben die Krümmungen der Röhre. Bestehen die Röhren aus graden Stücken, die unter nicht allzuscharfen Winkeln an einander gefügt sind, so vermehrt sich, nach Büats Bestimmungen, die zu Ueberwindung des Widerstandes nöthige Druckhöhe um eine den

Quadraten der Sinus der Anprallwinkel proportionale Größe. Unter diesem Winkel versteht Büat (Fig. 107.) den halben Nebenwinkel des ABC, oder wenn man an die gekrümmte Röhre AEC die Tangente DF so zieht, daß AED = CEF, so ist dieses der Anprallungswinkel. Für die Fälle, da dieser Winkel nicht über 40 Grad, also ABC nicht unter 100 Grad ist, soll man nach Büats Regel das Quadrat vom Sinus AED mit dem Quadrate der Geschwindigkeit multipliciren, und dieses ohngefehr mit 0,004 multipliciren, um die nöthige Vermehrung der Druckhöhe in Fußen zu finden. Bei mäßigen Geschwindigkeiten ist diese Correction selten sehr erheblich.

§. 36. Bemerkung. Die Bewegung der Luft in Röhren, muß wegen ihrer allmähligen Ausdehnung etwas andre Gesetze befolgen. Da aber die Untersuchungen hierüber sich nicht mit vollendeter Genauigkeit ausführen lassen, und eben keine Anwendung finden, so wollen wir nur bei einem Falle verweilen.

Die Kraft, welche bei der Entzündung des Schießpulvers die Kugel in der Canone forttreibt, verhält sich im Wesentlichen so, als ob eine in hohem Grade verdichtete Luft sich ausdehnte und die Kugel vor sich her triebe. Je mehr diese verdichtete Luftmasse sich ausdehnt, desto geringer wird freilich ihr Druck, aber da er fortdauernd die Geschwindigkeit vermehrt, so wird diese desto größer, je länger die Canone ist.

§. 37. Aufgabe. In der überall gleich weiten Röhre AB ist der Raum AD (Fig. 108.) mit stark verdichteter Luft gefüllt; indem diese sich ausdehnt, muß sie einen, in der Röhre dicht schließenden Körper vor sich her treiben; man sucht die Geschwindigkeit, welche sie diesem ertheilt hat, indem er bei B die Röhre verläßt.

Auflösung. Es sei der Querschnitt der Röhre = ff, die Höhe der Wassersäule, welche dem Drucke der

Atmosphäre das Gleichgewicht hält, $= k$, die in AD eingeschlossene Luft m mal so dicht als die atmosphärische Luft, die Länge des mit dieser Luft angefüllten Raumes $= a = ED$, die in Bewegung zu setzende Masse $= M$: so ist im ersten Augenblicke die auf M wirkende bewegende Kraft gleich dem Gewichte einer Wassermasse von dem Volumen $= m \,.\, k \,.\, ff.$ Ist die Masse M bis nach L gelangt, so ist, wenn ich $EL = x$ setze, die noch wirkende forttreibende Kraft $= m \,.\, k\, ff \,.\, \frac{a}{x}$. Es ist also hier nicht schwer, nach Anleitung von §. 55. der Mechanik, die Scale der wirkenden Kräfte zu zeichnen.

Die beschleunigende Kraft nämlich, die in L auf die Masse M wirkt, ist $= \frac{m \,.\, k\, f^2 \,.\, a}{M \,.\, x}$ und die Geschwindigkeit, welche sie der Masse M in 1 Secunde ertheilen würde, $= 2g \,.\, \frac{m \,.\, k \,.\, f^2 \,.\, a}{M \,.\, x}$; zeichnet man also über CP diese Scale der Kräfte, so daß $CN = 2g \,.\, \frac{m\, k\, f^2}{M}$; $QT = \frac{2g\, m\, k\, f^2\, a}{M \,.\, x}$; $PO = \frac{2g \,.\, m \,.\, k \,.\, f^2 \,.\, a}{M \,.\, b}$ ist, wenn $AP = b$, so ergiebt die Ausrechnung des Flächenraumes CNOP das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel aus der Mündung heraus fährt (Mechan. §. 61.).

Zusatz für geübtere Leser.

Die beschleunigende Kraft $= \frac{m \,.\, k \,.\, f^2 \,.\, a}{M \,.\, x}$ treibt in der Zeit $= dt$ den Körper durch den Raum $= dx$ fort und ertheilt ihm die Zunahme der Geschwindigkeit $= dv = 2g\, dt \,.\, \frac{m \,.\, k \,.\, f^2 \,.\, a}{M \,.\, x}$.

Da nun auch $v = \frac{dx}{dt}$ ist, so wird

$$2vdv = 4g \cdot \frac{dx}{x} \cdot \frac{m\,k\,f^2\,a}{M}, \text{ also}$$

$$v^2 = \text{Const} + \frac{4g\,m\,k\,f^2\,a}{M} \log \text{nat } x;$$

oder da $v = o$ für $x = a$,

$$v^2 = \frac{4g\,m\,k\,f^2\,a}{M} \log \frac{x}{a},$$

und das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher der Körper aus der Röhre hervordringt,

$$= \frac{4g\,m\,k\,f^2\,a}{M} \log \frac{b}{a}.$$

§. 38. Die vollständige Auflösung zeigt, daß die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper die Röhre verläßt $= 2\sqrt{\frac{g.m.k.f^2.a.\log \text{nat} \frac{b}{a}}{M}}$ ist. Diese Formel könnte also dienen, um die Geschwindigkeit der aus einer Windbüchse abgeschossenen Kugel zu berechnen, wenn die Verdichtung der Luft und der Raum, den sie ausfüllt, genau bekannt ist. Sie könnte auch zu Bestimmung der Geschwindigkeit der Flinten- und Canonen-Kugeln dienen, wenn man die Elasticität der aus dem Pulver entwickelten Luft genau kennte.

§. 39. Es sei bei der Verdichtung der Luft in der Windbüchse der fortzutreibende Körper eine Kugel, deren größter Kreis $= ff$, so ist ihr Durchmesser $= D = \frac{2f}{\sqrt{\pi}}$, weil $\frac{1}{4} D^2 \pi = f^2$, ihr Inhalt $= \frac{2}{3} \cdot \frac{2f}{\sqrt{\pi}} \cdot f^2$ und $M = \frac{4}{3} \frac{f^3\,n}{\sqrt{\pi}}$, wenn die Kugel n mal so dicht als Wasser ist. Für eine Kugel ist also allgemein $\frac{f^2}{M} = \frac{3 \cdot \sqrt{\pi}}{4f \cdot n}$. Nehme ich also für die Verdichtung der Luft, $m = 100$, $k = 32$ Fuß, $D = \frac{1}{30}$ Fuß; setze ich ferner, die verdichtete Luft nehme den Raum $a = \frac{1}{24}$ $b = \frac{1}{6}$ Fuß ein: so ist, da $f = \frac{1}{60} \sqrt{\pi}$, also $\frac{f^2}{M} = \frac{45}{n}$ wird, $4g.m.k.a.\frac{f^2}{M}\log\text{nat}\frac{b}{a}$,

oder $v^2 = 60 . 100 . 32 . \frac{1}{6} . \frac{45}{n} \log . \text{nat } 24$

$$= \frac{32000 . 45}{n} \log . \text{nat } 24,$$

also für eine bleierne Kugel, wo $n = 11,3$,

$$v^2 = \frac{1440000}{11,3} \log.\text{nat } 24 = \frac{1440000 . 3,17805}{11,3},$$

also $v = 636$ Fuß.

Hier ist $g = 15$ Fuß angenommen.

So schnell würde also bei einer nur hundertmaligen Verdichtung die Kugel fortfliegen.

§. 40. Da wir beim Schießpulver die Elasticität der entwickelten Luft nicht kennen, so könnte man die Frage umkehren, und suchen, wie sehr die Luft verdichtet sein mußte, um eine Geschwindigkeit, z. B. von 2000 Fuß hervorzubringen. Nehme ich eine 3pfündige eiserne Kugel an, so ist, weil Eisen = 7,6 mal so schwer als Wasser ist, ihre Masse $= \frac{2}{3} D . 7,6 . f^2$, D aber ist für eine solche Kugel ohngefehr = 0,22 Fuß. Wir hätten also $\frac{f^2}{M} = \frac{1}{\frac{2}{3} . 0,22 . 7,6}$, und wenn ich wieder $a = \frac{1}{24} . b = \frac{1}{6}$ Fuß, $k = 32$ Fuß setze,

$$v^2 = \frac{60,4 . m . 32 . \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} . 0,22 . 7,6} \log . \text{nat } 24.$$

$$= m . 918.$$

oder $m = \frac{4000000}{918} = 4357.$

§. 41. Unsre Betrachtungen haben darauf, daß auch die verdichtete Luft selbst eine Bewegung annimmt, und darauf daß die äußere Luft einen Widerstand leistet, nicht Rucksicht genommen. Beide Umstände vermindern die Geschwindigkeit; aber es sind ohnehin so viele, nicht genau abzuschätzende Umstände hiebei zu berücksichtigen, die wir hier nicht in unsre Formeln aufnehmen können. Unsre Formeln zeigen doch wenigstens, daß die Geschwindigkeit, unter sonst gleichen Umständen, den Quadratwurzeln aus den anfänglichen Dichtigkeiten proportional ist, also, um eine 10mal so große Geschwindigkeit zu erhalten, die anfängliche Verdichtung 100 mal so groß sein müßte.

Wie viel die Länge des Rohres zu Vermehrung der Geschwindigkeit beiträgt, läßt sich am besten an dem Beispiele in §. 39. zeigen. Bliebe dort sonst alles eben so, aber b hätte nur die halbe Länge, so daß $\frac{b}{a} = 12$ wäre, so würde $v^2 = \frac{1440000 \,.\, \log \,.\, \mathrm{nat}\ 12}{11,3}$;

und $v = 564$ Fuß.

Dagegen für die Länge $b = 48 \,.\, a$,

wird $v = 698$ Fuß.

Dritter Abschnitt.

Von den Oscillationen des Wassers in gekrümmten Röhren.

§. 42. **Bemerkung.** Wenn in der Röhre ABC (Fig. 109.), deren Schenkel aufwärts gekrümmt sind, sich Wasser befindet: so kann dieses nicht im Gleichgewichte bleiben, wenn nicht die Oberflächen in beiden Schenkeln in derselben horizontalen Ebne liegen. Ist durch irgend eine Kraft die eine Oberfläche bis an DE gehoben, während die andre sich in FG befindet: so strebt ohne Zweifel die ganze Wassersäule, nach der Richtung gegen C hin fortzurücken, die Oberfläche DE sinkt also während FG steigt; und obgleich in dem Augenblicke, da beide gleich hoch stehen, keine neue Kraft diese Bewegung befördert, so fährt doch die ganze Wassermasse wegen der einmal erlangten Geschwindigkeit fort, sich nach C hin zu bewegen; die Oberfläche FG steigt also, vermöge dieser einmal erlangten Geschwindigkeit höher, als die gegen über liegende Oberfläche, und es läßt sich leicht übersehen, daß diese Oscillationen ein wechselndes, mehrmaliges Steigen und Sinken bewirken werden.

§. 43. Wenn die Röhre überall gleich weit ist und beide Schenkel vertical sind: so erhellt leicht, daß, wenn kein Hinderniß der Bewegung Statt findet, bei der ersten Oscillation die Oberfläche FG eben so hoch über den Zustand des Gleichgewichts steigen wird, als sich DE über dem Zustande des Gleichgewichts befand, indem sie zu sinken anfing; denn die Geschwindigkeit, welche so lange beschleunigt wurde, als DE noch oberhalb FG stand, nimmt eben so, wie sie zugenommen hatte, ab, indem FG sich oberhalb DE erhebt, und dieses Abnehmen geht, da in beiden Schenkeln alles gleich ist, grade nach eben dem Gesetze fort, nach welchem sich das Wachsen der Geschwindigkeit richtete. Da also nun FG nach eben den Gesetzen zu sinken anfängt, nach welchen vorhin DE herabsank, so erhellt, daß alle Oscillationen gleichzeitig und einander ganz gleich sein werden, auch unaufhörlich fortdauern müßten, wenn keine Hindernisse die Bewegung hemmten.

§. 44. Lehrsatz. Wenn die, in der gekrümmten überall gleich weiten Röhre ABC, deren Schenkel vertical sind, enthaltene Wassermasse so oscillirt, daß ihre beiden Oberflächen immer in den graden und verticalen Theilen AH, CK bleiben: so hängt die Zeit einer Oscillation bloß von der Länge DBG $= l$ der Wassermasse ab, und ist allemal gleich der Oscillationszeit eines einfachen Pendels von der Länge $= \frac{1}{2} l$, die anfängliche Erhebung der einen Oberfläche über die andre mag mehr oder minder erheblich sein.

Beweis. Es sei MN die Horizontallinie, in welcher beide Oberflächen zur Ruhe kommen würden, und die verticale Höhe, zu welcher die eine im Anfange der Bewegung über sie erhoben war, sei $= h$: so ist, weil die Tiefe der andern Oberfläche ebenfalls $= h$ war, das Gewicht der Wassersäule von der Höhe $= 2h$ die bewegende Kraft, welche die ganze Masse forttreibt. Die bewegte Masse ist die ganze Wassermasse von der Länge $= l$; und folglich die im Anfange der Bewegung wirkende beschleunigende Kraft $= \frac{2h}{l}$.

In jedem folgenden Augenblicke, wo die Höhe der einen Wasserfläche über MN noch $= x$, also die Tiefe der andern unter MN auch $= x$ ist, findet man aus eben den Ueberlegungen die beschleunigende Kraft $= \frac{2x}{l}$, und diese Kraft ist also immer dem bis an M noch zu durchlaufenden Wege proportional, und wir haben daher hier ganz den in §. 118. der Mechanik betrachteten Fall. Die beschleunigende Kraft, mit welcher DE gegen M zu getrieben wird, ist allemal $= \frac{2x}{l}$, und da sie $= \frac{2h}{l}$ war, dort, wo die Bewegung anfing oder die Geschwindigkeit $= o$ war: so ist das, was in Mechan. §. 118. p hieß, hier $= \frac{2h}{l}$, und das dortige a ist hier $= h$; die Kraft nämlich ist $= \frac{2h}{l}$ in der bestimmten Entfernung $= h$, wo die Geschwindigkeit $= o$ ist, und vermöge dieser, dem Abstande von M proportionalen Kraft erlangt die Oberfläche DE, indem sie in M ankömmt, die Geschwindigkeit $= h\sqrt{\frac{4g}{l}}$, und die Zeit, die sie gebraucht, um vom höchsten Stande bis in M herabzusinken, ist so groß als die Zeit, in welcher der Quadrant eines Kreises vom Halbmesser $= h$ mit dieser Geschwindigkeit $= h\sqrt{\frac{4g}{l}}$

durchlaufen würde, oder diese Zeit ist

$$= \frac{\frac{1}{2}\pi h}{h \cdot \sqrt{\frac{4g}{l}}} = \frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$ Die Zeit einer ganzen Oscillation oder die Zeit des ganzen Sinkens der Oberfläche DE ist doppelt so groß $= \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, also (nach Mechan. §. 123.) eben so groß als die Oscillationszeit eines einfachen Pendels von der Länge $= \frac{1}{2}$ l.

§. 45. Wären (Fig. 110.) die beiden graden Schenkel der Röhre unter den Winkel $= \alpha$ die eine, und $= \beta$ die andre gegen den Horizont geneigt, und es bedeutet MN die Horizontal-Ebne, in welcher beide Oberflächen ruhen werden: so würde, wenn MD $=$ Z ist für irgend einen Stand der Wasserflächen, die senkrechte Höhe von D über M, $= z \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha$, die senkrechte Tiefe von G unter N, $= z \cdot \mathrm{Sin}\,\beta$. Hier also ist die beschleunigende Kraft, welche in jedem Augenblicke die Geschwindigkeit vermehrt, $= \frac{z}{l}(\mathrm{Sin}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\beta)$, und da diese wieder dem Abstande von z proportional ist, die Geschwindigkeit beim Ankommen der Oberfläche in M,

$$= h\sqrt{\frac{2g}{l}(\mathrm{Sin}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\beta)},$$

also die Zeit des Sinkens bis an M

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{2g \cdot (\mathrm{Sin}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\beta)}},$$ die Zeit eines ganzen Niederganges der Oberfläche $= \pi\sqrt{\frac{l}{2g \cdot (\mathrm{Sin}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\beta)}}$ gleich der Oscillationszeit eines Pendels von der Länge

$$= \frac{l}{\mathrm{Sin}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\beta}.$$

§. 46. Mit diesen Oscillationen läßt sich ohngefehr die Wellenbewegung des bewegten Wassers vergleichen, und Newton hat hierauf die Bestimmung gegründet, wie das Steigen und Sinken der Wellen ohngefehr von ihrer Breite abhänge. Die letzte Betrachtung zeigt indeß, wie sehr diese Zeit von der Richtung der Bewegung oder von der Neigung der Schenkel gegen den Horizont abhängt. Um die wahre Bestimmung der Oscillationszeit der Wellen zu haben, müßte man wohl die Röhre als cycloidisch und als zur Hälfte mit Wasser gefüllt ansehen.

Vollständiger handelt von der Wellenbewegung, Gerstner in einer eignen Abhandlung; und Eulers Gesetze des Gleichgew. u. der Bewegung flüssiger Körper. §. 214 und 268. d.

§. 47. Bemerkung. Wenn (Fig. 111.) die gekrümmte Röhre ABCDE ungleiche Querschnitte hat: so lassen sich die Umstände bei den Oscillationen des Wassers wenigstens ohngefehr übersehen.

Ist hier MN die Horizontallinie, in welcher beide Oberflächen ruhen würden, so wird, wofern beide Schenkel cylindrisch und vertical sind, die Erhebung $= x$ der Oberfläche in der weitern Röhre mit einem, im umgekehrten Verhältnisse der Querschnitte stehenden, größeren Sinken in der engern Röhre verbunden sein. Es sei ff der Querschnitt der weiteren, kk der Querschnitt der engeren Röhre: so ist die Oberfläche in der engern Röhre um die Höhe $= \frac{x \,.\, ff}{kk}$ über MN, wenn die Tiefe der Oberfläche in der weitern Röhre $= x$ ist, unter MN. Die Schwankungen der Oberfläche in der engern Röhre sind also viel größer, als die in der weitern, und die Geschwindigkeit in jener ist viel größer als in dieser.

Da die Bestimmung der Bewegung in diesem Falle, wo in verschiedenen Querschnitten ungleiche Geschwindigkeiten Statt finden, sehr viele Schwierigkeit hat: so wollen wir nicht versuchen, die Zeit der Oscillationen und andre Umstände näher anzugeben, sondern bloß bei einer Betrachtung verweilen, die weiter fortgeführt, von practischem Nutzen ist.

§. 48. Bemerkung. Da das Wasser in der engen Röhre so sehr hoch steigt, wenn in der weiten Röhre auch nur eine mäßige Oscillation hervorgebracht wird: so könnte das als ein Mittel, um Wasser zu heben, gebraucht werden, wenn man nur die Oscillationen auf eine bequeme Weise unterhalten könnte. Wäre zum Beispiel die Röhre DE von einem 25 mal so engen Querschnitte als AB, und 20 Fuß hoch, so würde man die Oberfläche in AB nur um 1 Fuß zu heben brauchen, um aus der Röhre DE schon einen Ausguß in 20 Fuß Höhe zu bewirken. Aber dieses, an sich richtige Mittel zum Heben des Wassers würde eine immer neue Kraft fordern, um die Oberfläche in AB wieder zu heben; denn da die ausgeflossene Wassermasse nicht mehr drückt, so würde, selbst ohne allen Widerstand, bei der zweiten Oscillation kein Wasser mehr ausströmen.

Bei dem Montgolfiersschen Stoßheber ist daher eine andre Einrichtung angebracht, um das zu bewirken, was wir bisher als bewirkt durch Hebung und Senkung der Oberfläche in AB angesehen haben.

§. 49. Wenn in dem Stoßheber (Fig. 112.) das Wasser in dem sehr weiten Gefäße bis an AB und in der Steigeröhre bis an CD in einerlei Horizontallinie steht: so ist alles in Ruhe. Das Sperrventil E, welches sich nach unten öffnen kann, wird durch den Druck des Wassers gehalten, und versperrt die Oeffnung E; es muß zu diesem Zwecke weniger wiegen, als der Druck des Wassers beträgt, damit dieser das Herabsinken hindre. Das nach oben sich öffnende Steigeventil F ruhet gleichfalls. Jetzt drückt man das Sperrventil E nieder, damit das Wasser bei E auszulaufen anfange, und so die ganze zwischen E und G liegende Wassermasse die Geschwindigkeit annehme, welche der Druckhöhe gemäß ist; aber der Seitendruck des Wassers verschließt sogleich wieder das Ventil E, und nun sucht das mit großer Kraft andrängende Wasser sich einen neuen Ausweg, hebt das Steigeventil F und dringt in die Steigeröhre. Hat es hier die

Höhe erreicht, die es der erlangten Geschwindigkeit gemäß erreichen kann: so fängt eine rückgängige Bewegung an, die sich auch durch die Leitröhre FG fortpflanzt, und die das Ventil bei F schließt. Da aber diese einmal erlangte rückgängige Bewegung nicht sogleich aufhört, so fällt das Wasser unter F weg, es entsteht hier ein luftleerer Raum, und theils der äußere Luftdruck, theils das Gewicht des Sperrventils E drückt dieses herab, welches dann die Folge hat, daß das nun sehr bald von G her wieder zuströmende Wasser abermals bei E auszufließen anfangt, alsdann E schließet und F öffnet, und so das Wasser in der Steigröhre hinauf und aus der obern Oeffnung hinaus treibt. So dauert dieses abwechselnde Schließen und Oeffnen der Ventile und folglich das Ausfließen aus der Steigeröhre unaufhörlich fort, wenn man nur durch hinreichenden Zufluß des Wassers den Widerstand im weiten Gefäße unverändert erhält.

§. 50. Obgleich es hier unmöglich ist, weiter in theoretische Bestimmungen einzugehen, so erhellt doch aus dieser Darstellung wenigstens, welche Untersuchungen man ohngefehr zu diesem Zwecke anstellen müßte. Man müßte vorzüglich aus der Geschwindigkeit des Wassers, mit welcher es aus dem Sperrventile ausfließt, und derjenigen Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in der Röhre fortfließt, die Kraft berechnen, mit welcher es das Steigeventil öffnet, um in die Steigeröhre einzutreten. Diese plötzlich wirkende Kraft ist so heftig, daß sie sogar die Maschine zersprengen kann, und diese Gewalt läßt sich wohl begreiflich finden, wenn man bedenkt, daß die ganze andringende Wassermasse plötzlich ihre Bewegung verlieren müßte, wenn nicht das aufgestoßene Ventil ihr einen Ausweg gestattete. Schon wegen dieser Heftigkeit der Wirkung scheint es nöthig, die Steigeröhre mit einem Windkessel zu versehen, das ist, ein mit Luft gefülltes Gefäß anzubringen, durch welches die Steigeröhre geht. Indem nämlich das mit Heftigkeit andringende Wasser die Luft im Windkessel verdichtet, gewinnt es sogleich einen ansehnlichen Raum, den es ausfüllen kann; dagegen kann es diesen Windkessel zersprengen, wenn er und die ganze Steigeröhre mit Wasser gefüllt sind, also der ganze Stoß theils zum plötzlichen Heben der Wassersäule, theils zum Druck auf die Wände verwandt wird. Der Windkessel hat überdies noch den Nutzen, daß er das Ausströmen des Wassers aus der Steigeröhre gleichförmiger erhält, indem (Fig. 113.) beim Oeffnen des Steigeventils ein Theil des hinaufgedrängten Wassers in den mit Luft gefüllten Raum HI des Windkessels tritt und die Luft verdichtet, diese verdichtete Luft aber sich wieder ausdehnt und den Ausfluß des Wassers aus der obern Oeffnung der Steigeröhre unterhält, während der Andrang neues Wassers nicht mehr Statt findet.

§. 51. Eytelweins zahlreiche und höchst schätzbare Versuche (in seinen: Bemerkungen über die Wirkung und vortheilhafte Anwendung des Stoßhebers. Berlin, 1805.) zeigen, daß die gehobene Wassermasse sehr stark abnimmt, wenn man die Höhe der Steigeröhre vermehrt. Betrug die Höhe, zu welcher das Wasser gehoben ward, nur ohngefehr doppelt so viel als die Druckhöhe des Wassers AB über dem Sperrventil: so ward ohngefehr $\frac{2}{7}$ so viel Wasser gehoben, als durch das Sperrventil verlohren ging; betrug dagegen die Höhe, zu welcher man das Wasser hob, 20 mal so viel als die Druckhöhe, so erhielt man nur etwa $\frac{1}{100}$ so viel Wasser gefördert, als beim Sperrventil verlohren ging.

Vierter Abschnitt.

Von der Bewegung des Wassers in Strömen.

§. 52. Bemerkung. Wir haben bei der Bewegung des Wassers in Röhren immer vorausgesetzt, daß die in einerlei Querschnitte liegenden Theilchen alle gleiche Geschwindigkeit hätten, und konnten schon deshalb unsre Untersuchungen nicht auf Röhren von großem Durchmesser gut anwenden; es erhellt daher leicht, daß eine solche Anwendung auf die Bewegung des Wassers in Strömen noch weniger vergönnt ist. Wir sind daher für jetzt noch genöthiget, uns hier ganz an die Erfahrung zu halten.

Wäre die Oberfläche des Wassers horizontal, so bliebe das Wasser völlig im Gleichgewichte; der Abhang der Oberfläche ist also der Grund seines Fortströmens. Wenn man sich diesen Abhang als eine gleichförmig geneigte, also ebne, Fläche denkt: so scheint es, als müßte die Bewegung der auf dieser Ebne herablaufenden Wassertheilchen immer schneller werden; aber die Erfahrung zeigt, daß dieses nicht geschehe, sondern daß, bei gleichem Querschnitte der strömenden Wassermasse, die Geschwindigkeit in den später erreichten Querschnitten nicht größer als in den höher liegenden ist. Diese Gleichförmigkeit der Bewegung rührt daher, weil die zu überwindenden Widerstände die Beschleunigung hindern, welche durch die Schwere entstehen sollte; oder, der Strom nimmt denjenigen Abhang der Oberfläche und diejenige Geschwindigkeit an, wobei die Beschleunigungen und die Verzögerungen sich einander aufheben.

§. 53. Wenn man unter h die Tiefe versteht, um welche des Stromes Oberfläche in einer Entfernung $= 1$ von einem bestimmten Puncte Stromabwärts gerechnet, sich befindet: so kann man $\frac{h}{l}$, welches allemal ein kleiner Bruch ist, den Abhang des Stromes nennen, und ihm proportional können wir die beschleunigende Kraft setzen, welche das Wasser zur Bewegung antreibt. Der Widerstand dagegen muß ohngefehr dem Umfange der festen Wände, an und über welchen das Wasser fortströmt, proportional, und dem Inhalte des Querschnitts umgekehrt proportional sein (vergl. §. 26.); auch kann man, wie die Erfahrung zeigt, ihn dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional annehmen. Ist daher c die Geschwindigkeit, k der vom Wasser benetzte Umfang des Querschnitts, ff der Inhalt desselben; und bedeuten h′, l′, c′, k′, f′f′ eben das für einen andern Strom, so darf man

$$\frac{h}{l} : \frac{h'}{l'} = \frac{c^2 . k}{ff} : \frac{c'^2 . k'}{f'f'},$$

setzen. Wenn also für irgend einen Fall bekannt ist, wie groß c′ ausfällt, bei bestimmten Werthen von h′, l′, k′ und f′f′: so läßt sich c in jedem andern Falle finden, indem $c^2 = c'^2 . \frac{k'}{k} . \frac{ff}{f'f'} . \frac{h}{h'} . \frac{l'}{l}$.

§. 54. Nach Eytelwein (Hydraulik. §. 127.) ist $c'^2 . \frac{k' . l'}{f'f' . h} = 90{,}9$, wenn man nach rheinländischem Fuß-Maaße rechnet, also ist $c = 90{,}9 \sqrt{\frac{h . ff}{k\, l}}$.

§. 55. Wenn der Strom anschwellt, so nimmt die Geschwindigkeit zu, zugleich aber der Abhang, nebst dem Querschnitte und dem vom Wasser benetzten Umfange der festen Wände. Wäre allemal der Querschnitt ein Trapez, dessen mittlere Breite $= \alpha$, Höhe $= \gamma$, so hätte man $ff = \alpha . \gamma$ und k nicht viel von α verschieden, wenn der Strom sehr breit ist; also bei solchen Strömen, deren Breite überaus groß gegen ihre Tiefe ist, beinahe $\frac{ff}{k} = \gamma$. Hier könnte man also, wenn zu verschiedenen Zeiten h und H die Höhen des Abhanges auf gleichen Längen, γ und Γ die Wassertiefen bedeuten,

die Geschwindigkeiten $= 90,9 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot \gamma}{l}}$,

und $= 90,9 \cdot \sqrt{\frac{H \cdot \Gamma}{l}}$

annehmen, also den Quadratwurzeln aus den Tiefen und aus den Abhängen proportional.

§. 56. Bemerkung. Was ich hier Geschwindigkeit genannt habe, ist eigentlich die in einem Querschnitte Statt findende **mittlere Geschwindigkeit**; denn die einzelnen Wassertheilchen bewegen sich theils etwas schneller, theils etwas langsamer. Wenn man in derselben Verticallinie die Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen untersucht, so findet man sie von der Oberfläche gegen den Boden hin abnehmend, und zwar desto beträchtlicher abnehmend, je größer die Geschwindigkeit an der Oberfläche war. Die Abnahme der Geschwindigkeit ist beinahe der Tiefe unter der Oberfläche proportional, wenigstens kann man nicht wohl eine Regel angeben, die genauer wäre.

§. 57. Werkzeuge, deren man sich zur Bestimmung der Geschwindigkeit des strömenden Wassers bedient, giebt es mehrere. Fast alle beruhen auf der Lehre vom Stoße flüssiger Körper, und werden dort erwähnt werden; unter ihnen verdient **Woltmanns** Strommesser (vergl. §. 80.) gewiß vorzüglich empfohlen zu werden. Man kann sich zu Bestimmung der Geschwindigkeit allenfalls auch der schwimmenden Körper bedienen, und nahe an der Oberfläche würden diese hinreichende Genauigkeit geben; senkt man aber einen größeren Körper z. B. eine Kugel bis zu 10 Fuß Tiefe hinab und verbindet mit ihr einen verticalen Stab, um an der Oberfläche zu sehen, wie schnell sie fortschwimmt, so darf man nicht vergessen, daß der Strom freilich am meisten auf die Kugel, aber doch auch in einigem Maaße auf alle Puncte des Stabes einwirkt, weshalb man nicht ganz die gefundene Geschwindigkeit als diejenige ansehen kann, welche der Strom in 10 Fuß Tiefe hat.

§. 58. Bemerkung. Noch schwieriger, als die Bestimmungen der Bewegung im freien Laufe des Stromes ist es, anzugeben, wie bei Hindernissen, die dem Strome entgegen gesetzt sind, bei Einbauen und Wehren, die Geschwindigkeit sich ändert. Wenn wir an die Bestimmungen im ersten Abschnitte zurück denken, so scheint es (Fig. 114.), als ob das oberhalb des Wehres DC wegfließende Wasser in jedem Puncte eine Geschwindigkeit haben müsse, die der Quadratwurzel aus der Tiefe unter der Horizontalfläche des Wasserspiegels AB proportional ist; aber es erhellt auch sogleich, daß unsre dortige Voraussetzung die Oeffnung sei klein genug, um die Bewegung des Wassers im Gefäße als ganz unbedeutend bei Seite zu setzen, nicht Statt findet. Auf eine eigentlich theoretische Bestimmung müssen wir daher hier noch Verzicht leisten.

Allemal fällt die Oberfläche des Wassers schon vor dem Wehre bedeutend ab, so daß sie etwa die Form AE annimmt, und man müßte daher diese Verminderung des Querschnitts als eine Art von Zusammenziehung des Strahles mit in Rechnung bringen. Eytelwein zeigt aus Betrachtungen über die wirklich ausfließende Wassermenge, daß man wenigstens ohngefehr die richtige Wassermenge erhält, wenn man dieser Contraction des Strahles ein beständiges Verhältniß zur Oeffnung beilegt, wenn nämlich der Ueberfall ohne Flügelwände ist. So schätzbar aber die dort (3. und 8. Abschn.) gegebenen Untersuchungen sind (so wie ähnliche in Langsdorfs Lehrbuch der Hydraulik 13. Abschn.), so glaube ich doch hier, wo die empirischen Gründe, auf welche sie gebaut sind, nicht umständlich Platz finden können, einen Gegenstand übergehen zu müssen, über den sich nur, wenn man die Versuche näher betrachten kann, etwas Gründliches sagen läßt. Hier mag es genug sein, zu bemerken, daß man nach den Regeln des 6. §. für eine oben offene Ausflußmündung von der Breite $= b$, die ausfließende Wassermenge ohngefehr fände, wenn man die Höhe $BC = h$ der ganzen Ausfluß-Oeffnung in n Theile theilte und nun $b \cdot \frac{1}{n} h \cdot \sqrt{4g \cdot \frac{1}{n} h}$ als den Ausfluß aus dem obern; $b \cdot \frac{1}{n} h \cdot \sqrt{4g \cdot \frac{2}{n} h}$ als Ausfluß aus dem zweiten Streifchen und so weiter betrachtete, die so gefundene Wassermenge aber ohngefehr auf $\frac{5}{8}$ ihres Werthes reducirte, um die wahre Wassermenge zu finden.

Fünfter Abschnitt.

Vom senkrechten Stoße flüssiger Körper an feste Körper.

§. 59. **Bemerkung.** Wenn auf die ebne Seitenfläche eines ganz frei beweglichen Körpers M (Fig. 115.) der Wasserstrahl AB so geleitet wird, daß er die Oberfläche CD senkrecht trifft, so übt er ohne Zweifel einen Stoß auf diese Ebne aus, und zwar einen senkrechten Stoß. Die Gesetze dieses Stoßes müssen im Wesentlichen wohl mit denen, die für den Stoß fester Körper gelten, übereinstimmen, und folglich, wenn ich die Masse des festen Körpers $= M$ setze, die Geschwindigkeit, welche ihm in der sehr kleinen Zeit $= t$ ertheilt wird $= v$, hingegen die in eben der Zeit anstoßende Wassermasse $= N$ und ihre Geschwindigkeit $= c$, so müßte (nach Mechan. §. 211.)

$v = \frac{c \cdot N}{M + N}$, oder weil in einer überaus kleinen Zeit die anstoßende Wassermasse sehr unbedeutend gegen M ist, beinahe $v = \frac{c\,N}{M}$ sein.

§. 60. Lehrsatz. Wenn des senkrecht auf die Ebne CD treffenden Wasserstrahles Querschnitt = ff, seine Geschwindigkeit = c ist: so übt er auf jene Ebne, wenn sie fest gehalten wird, einen Druck aus, der $= \frac{c^2 \cdot ff}{2g}$ ist, oder gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Grundfläche = ff und Höhe $= \frac{c^2}{2g}$, = der doppelten Druckhöhe, welche nöthig ist, um dem Wasserstrahl die Geschwindigkeit = c zu ertheilen (§. 6.).

Beweis. Wenn wir die Masse M (Fig. 115.) als frei beweglich betrachteten, so wurde ihr in der Zeit = t die Geschwindigkeit $v = \frac{c \cdot N}{M}$ ertheilt, oder da $N = ff \cdot c \cdot t$ ist, indem so viel Wasser in der kleinen Zeit = t zufließt, die Geschwindigkeit $v = \frac{c^2 \cdot ff \cdot t}{M}$. Diese Geschwindigkeit ist (Mechan. §. 27. 35.) eben so groß, als sie sein würde, wenn eine beschleunigende Kraft $= \frac{c^2 \cdot ff}{2g \cdot M}$ auf den festen Körper wirkte, oder wenn eine bewegende Kraft $= \frac{c^2 \cdot ff}{2g}$ die Masse = M in Bewegung zu setzen strebte.

Diese bewegende Kraft läßt sich mit einem Gewichte vergleichen; denn (Mech. §. 45.) ein Gewicht $P = \frac{c^2\,ff}{2g}$, das durch seinen Druck die Masse = M in Bewegung setzt, ertheilt ihr in der Zeit = t die Geschwindigkeit

$= \frac{P \cdot 2g}{M} t = \frac{c^2 \cdot ff \cdot t}{M}$. Wir dürfen also mit Recht schließen, daß der Druck, welchen der anstoßende Wasserstrahl auf die Ebne CD ausübt, wenn diese in Ruhe erhalten wird, gleich einem Gewichte $P = \frac{c^2 \cdot ff}{2g}$ ist, oder, da wir hier das Volumen des Wassers als sein Gewicht ausdrückend angenommen haben, gleich dem Gewichte einer Wassersäule von der Grundfläche $= ff$ und Höhe $= \frac{c^2}{2g}$. Da aber beim Ausflusse des Wassers aus sehr kleinen Oeffnungen die Geschwindigkeit $= c$ der Druckhöhe $= h = \frac{c^2}{4g}$ zugehört, so ist jener Wassersäule Höhe auch $= 2h$.

§. 61. Wir waren in §. 59. genöthiget, die Zeit t als sehr klein anzunehmen, weil sonst, sobald die Fläche CD schon mit erheblicher Geschwindigkeit ausweicht, der Wasserstrahl sie nicht mehr mit der ganzen Geschwindigkeit $= c$ trifft, und es uns hier auch nur um die Bestimmung des Druckes zu thun war, den der anstoßende Wasserstrahl auf eine ruhend erhaltene Ebne ausübt.

§. 62. Bei diesen Bestimmungen ist vorausgesetzt, daß der auf die Ebne stoßende Strahl seine Kraft ganz ausübe, oder daß alle einzelne Theilchen wirklich zum Stoße gelangen. Damit dieses geschehe, muß die dem Stoße ausgesetzte Fläche beträchtlich größer sein, als der Querschnitt des Strahles; denn da die an die Ebne stoßenden und seitwärts abfließenden Wassertheilchen, die Richtung der nachfolgenden Wassertheilchen ablenken, so würden diese, ohne zum Stoße zu gelangen, bei der Ebne vorbeigehen, wenn die Ebne nur grade so groß wäre, als der Querschnitt des Strahles.

Langsdorf, der sehr schöne Versuche über den Stoß des isolirten Strahles angestellt hat, findet, daß der Halbmesser der gestoßenen Fläche über viermal so groß als der Halbmesser des Wasserstrahles sein muß, wenn dieser seine ganze Wirkung äußern soll; wenn sie so groß ist, so ist die Kraft des Stoßes gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Grundfläche dem Querschnitte des Strahles und deren Höhe der doppelten zur Geschwindigkeit gehörigen Höhe gleich ist. Dagegen kann man die Kraft des Stoßes nur etwa halb so groß annehmen, wenn die Fläche, welche den Stoß leidet, nur eben die Größe hat, wie der Querschnitt des Strahles.

Aus diesem Grunde kann man auch den Stoß, welchen eine ebne, in einen breiten Strom eingetauchte Fläche leidet, nicht viel größer rechnen, als der einfachen Wassersäule gleich, deren Grundfläche der gestoßenen Fläche und deren Höhe der zur Geschwindigkeit gehörigen Höhe gleich ist. Woltmanns Versuche zeigen indeß, daß der Stoß etwas stärker wirkt, doch aber bei großen Geschwindigkeiten des Stromes diese Angabe in geringerm Verhältnisse übertrifft, als bei geringern Geschwindigkeiten. Der Widerstand, den eine in ruhendem Wasser fortgeführte Ebne leidet, ist noch verschieden von diesem Stoße des fließenden Wassers auf die bewegte Fläche, weil, wie sich wohl übersehen läßt, die Seitenbewegungen, welche das vor der Ebne abfließende Wasser annimmt, verschieden sind.

§. 63. Hätten wir in den Betrachtungen §. 59. 60. nach den Gesetzen des Stoßes elastischer Körper gerechnet, so hätten wir die Wirkung des Stoßes doppelt so groß gefunden. Nach Brunacci's Behauptung (*) kann man diese Verdoppelung der Wirkung dadurch erhalten, daß man die dem freien Wasserstrahle (wie in §. 59. 60.) ausgesetzte Ebne mit einem gehörig geformten

(*) Ich kenne diese Abhandl. nur aus einer Inhaltsanzeige in Configliacchi's Giornale di Fisica 1817., wo nicht ausdrücklich gesagt ist, ob der Verfasser Versuche hierüber angestellt habe.

Rande umgiebt, welcher das abfließende, oder vielmehr durch die Gewalt des Wasserstrahls nach allen Seiten hin gedrängte Wasser nöthiget, eine Richtung anzunehmen, die der Richtung des anstoßenden Strahles grade entgegengesetzt ist. Ohne Versuche hierüber zu kennen, läßt sich nicht entscheiden, in welchem Grade die angegebene Verstärkung des Stoßes hier wirklich Statt finden werde; indeß erhellt, daß das Wasser, indem es sich hier gegen den Bogen ab, cb (Fig. 116.) drängt, um die Geschwindigkeit zu erlangen, mit welcher es bei a und c nach entgegengesetzter Richtung abfließt, die Wirkung des Stoßes mehr verstärken muß, als wenn die Fläche eben wäre. Diese Einwirkung des gekrümmten Randes ist einigermaßen mit der Wirkung der Elasticität beim Stoße zu vergleichen, indem die zurückgehende Bewegung in beiden Fällen nicht ohne einen Druck auf die Fläche entstehen kann.

§. 64. Bemerkung. Wenn die ebne Fläche, welche den senkrechten Stoß leidet, selbst in Bewegung ist, und mit der Geschwindigkeit = C nach eben der Richtung fortrückt, nach welcher das Wasser sich bewegt: so bleibt zwar, wofern die gesammte Wassermasse zum Stoße gelangt, die stoßende Masse dieselbe, sie trifft aber die Ebne nur mit der Geschwindigkeit $= C - c$. Die Kraft des Stoßes wird daher nur durch $\frac{c.(c-C)ff}{2g}$ ausgedrückt.

Auch diese Formel kann nur da gelten, wo der Wasserstrahl eine hinreichend große Fläche findet, um alle seine Bewegung zu verlieren; da hingegen, wo einige Theilchen des Wasserstrahls durch das sich vor der gestoßnen Fläche gleichsam anhäufende Wasser genöthigt werden, neben ihr vorbei seitwärts abzufließen, da findet eben die Verminderung der Wirkung Statt, wie bei einer ruhenden Fläche.

§. 65. Da wo die gestoßene Fläche in einem sehr ansehnlichen Wasserstrom ganz eingetaucht ist, da wird man ohngefehr die Kraft des Stoßes halb so groß als im vorigen §. annehmen können. Der Fall, wo das Wasser sich in einem engen Gerinne bewegt, ist hievon verschieden, weil hier nothwendig ein Aufstauen des Wassers vor der gestoßenen Fläche eintritt, und fast alles Wasser wirklich zum Stoße gelangt. Nach Eytelwein kann man in diesem Falle die bewegende Kraft des Stoßes $= \frac{c.(c-C).ff}{2g}$ beibehalten.

§. 66. Bekanntlich werden die unterschlächtigen Wasserräder durch den Stoß des Wassers so in Bewegung gesetzt, daß dieses die am Umfange angebrachten Schaufeln trifft, und sie forttreibt, wodurch dann eine Drehung des Rades um seine Axe entsteht. Nehmen wir an, der Stoß auf die Schaufel geschehe senkrecht: so haben wir hier die zur Drehung des Rades wirkende bewegende Kraft. Freilich wird, indem das Rad anfängt, sich zu drehen, die Schaufel unter einem andern Winkel gegen die Richtung des Stoßes geneigt, aber hier, wo wir nur die ersten Grundlagen einer Anwendung zeigen können, mag immer die Betrachtung so angestellt werden, als ob in jedem Augenblicke eine neue den Stoß senkrecht auffangende Schaufel da wäre. Bei eng stehenden Schaufeln weicht diese Voraussetzung eben nicht sehr von der Wahrheit ab.

Hier ist nun klar, daß für das stillstehende Rad die Stärke des Stoßes am größten ist, indem dann $C = 0$ wird; bei anfangender Drehung wird C zunehmen, aber nur bis auf einen gewissen Grad; denn offenbar kann C nie $= c$ werden, da sonst alle neue Einwirkung des Stoßes aufhören würde.

§. 67. Denken wir uns ein solches Wasserrad, an dessen Welle vom Halbmesser $= \varrho$ die Last $= Q$ hängt: so muß, wenn wir die Kraft des Stoßes als in der Entfernung $= r$ von der Axe wirkend ansehen, die ganze

Wirkung so sein, als ob in der Entfernung $= r$ von der Axe die Kraft $= \frac{c.(c-C) ff}{2g} - \frac{Q.\varrho}{r}$ angebracht wäre, wenn nämlich die Last mit ihrem ganzen Gewichte wirkt, und keine Reibung oder sonstiges Hinderniß der Bewegung da ist. Die im letzten Abschn. der Mechanik angestellten Untersuchungen würden uns hier leiten können, um die nach einer gewissen Zeit $= t$ eingetretene Geschwindigkeit der Schaufel zu finden; denn wenn das Moment der Trägheit des Rades und der Welle $= M.kk$ heißt, das Moment der Trägheit der heraufzuziehenden Last $= Q.\varrho^2$, so ließe sich, wenn die wirkende Kraft immer ungeändert bliebe, die erlangte Winkelgeschwindigkeit nach den dortigen Regeln bestimmen. Diese sind nun zwar hier, da mit wachsender Geschwindigkeit die Kraft abnimmt, nicht gradezu anwendbar; aber zerlegen wir die Zeit t in kleine, gleiche Theile, deren Zahl $= n$ sein mag, so können wir die während des ersten Zeittheilchens wirkende Kraft als wenig verschieden von $\frac{c^2.ff}{2g} - \frac{Q.\varrho}{r}$ ansehen; also die im ersten Zeittheilchen erlangte Geschwindigkeit der Schaufel

$$= C' = 2g\,r.\frac{t}{n}\left(\frac{\frac{c^2.ff}{2g} - \frac{Q.\varrho}{r}}{M.kk + Q.\varrho^2}\right)$$ setzen. Am Anfange des zweiten Zeittheilchens wirkt die Kraft

$$= \frac{c\,(c-C')\,ff}{2g} - \frac{Q.\varrho}{r},$$ und wenn man diese als während des ganzen zweiten Zeittheilchens als wirkend ansieht, so ist die am Ende dieses Zeittheilchens erlangte

Geschwindigkeit $= C' + 2g\,r.\frac{t}{n}\frac{\left(\frac{c.(c-C')\,ff}{2g} - \frac{Q.\varrho}{r}\right)}{M.kk + Q.\varrho^2}$.

So ließe sich nahe genug die Geschwindigkeit für jeden folgenden Zeitraum berechnen; man würde aber aus dieser Reihe nicht leicht übersehen, daß die Geschwindigkeit nie über den Werth $C = c - \frac{2g \, . \, Q \varrho}{r \, . \, c \, ff}$ zunehmen kann. Doch wenn man diesen Werth einmal kennt, so sieht man ein, daß er davon abhängt, daß die bewegende Kraft $= 0$ ist, für diesen Werth von C, und daß die Maschine, weil wir annehmen, es gebe gar keine andre Hindernisse der Bewegung, bloß vermöge der Trägheit fortgeht, wenn C so groß ist.

Zusatz für geübtere Leser.

Nimmt man an, am Ende der Zeit $= t$ sei die wahre Geschwindigkeit der Schaufel $= C$, und diese nehme um dC zu, indem die Zeit um dt wächst: so läßt sich aus dem letzten Abschn. der Mechan. leicht übersehen, daß

$$dC = 2g \, . \, r \, dt \, . \left(\frac{\frac{c(c - C) \, ff}{2g} - \frac{Q \, . \, \varrho}{r}}{M k^2 + Q \varrho^2} \right),$$

oder $\frac{dC}{c \, ff (c - C) - 2g \frac{Q \varrho}{r}} = \frac{r \, dt}{M k^2 + Q \varrho^2}$ ist;

folglich $\frac{r \, . \, t \, . \, c \, ff}{M k^2 + Q \varrho^2} = \log . \text{nat} \frac{c^2 ff - \frac{2g \, Q \varrho}{r}}{c \, ff (c - C) - \frac{2g \, Q \varrho}{r}}$,

wenn man sogleich die beständige Größe gehörig nimmt, die daraus bestimmt wird, daß für $t = 0$, auch $C = 0$ sein muß. Hieraus läßt sich die Grenze bestimmen, welcher C sich bald stark nähert, und die es selbst in unendlicher Zeit nicht übertrifft. Damit nämlich $t =$ unendlich werden könne, muß

$c \, ff (c - C) - \frac{2g \, Q \varrho}{r} = 0$, also

$C = c - \frac{2g \, Q \varrho}{r \, . \, c \, ff}$ sein.

§. 68. Da das Rad ziemlich bald eine gleichförmige Bewegung annimmt, so ist die Frage nach der beschleunigten Bewegung des Rades minder wichtig. Wichtiger wäre es zu fragen, wie schnell das Rad sich bewegen muß, um den größten Effect zu leisten. Der Effect einer Maschine ist der gehobnen Last und der Geschwindigkeit, mit welcher sie gehoben wird, proportional; er ist auch proportional dem Producte aus der auf die Schaufel wirkenden Kraft in die Geschwindigkeit der Schaufel, also durch das Product $= \frac{C \,.\, c\,(c - C)\, ff}{2g}$ ausgedrückt. Nenne ich dieses Product $= E$, so ist

$$2g\,E = c^2\,C\,ff - c\,ff \,.\, C^2,$$

oder $C^2 - c\,C = - \frac{2g \,.\, E}{c\,ff}$,

und $C = \frac{1}{2}\,c \pm \sqrt{\left\{\frac{1}{4}\,c^2 - \frac{2g \,.\, E}{c\,ff}\right\}}$ giebt den Werth an, den C erreichen muß, damit E einen bestimmten Werth habe. Es erhellt aber, daß E nie größer als $\frac{1}{4}\,\frac{c^3 \,.\, ff}{2g}$ werden kann, und daß dieser größte Effect erreicht wird, wenn $C = \frac{1}{2}\,c$ ist. Dieses würde die Bestimmung für den gesammten größten Effect geben; da aber diese Wirkung der Maschine theils in Ueberwindung von Reibung und andern Hindernissen besteht, und nur zum Theil eine nutzbare Wirkung ist, so muß man, wie Langsdorf richtig bemerkt, den größten nutzbaren Effect hievon unterscheiden, und nach andern Regeln mit Rücksicht auf die Hindernisse der Bewegung bestimmen.

Sechster Abschnitt.

Vom schiefen Stoße flüssiger Körper gegen feste Körper.

§. 69. **Aufgabe.** Wenn die ebne Fläche AB (Fig. 117.) dem Stoße eines unter dem Winkel ACD $= \alpha$ gegen sie geneigten Wasserstrahles ausgesetzt ist, die Kraft des Stoßes zu bestimmen.

Auflösung. Die ganze Kraft, welche der durch eine senkrechte Ebne aufgefangene Strahl ausübt, war $= \frac{c^2 \, ff}{2g}$, wenn ich unter ff den Querschnitt des Strahles, unter c die Geschwindigkeit verstehe. Zerlege ich diese Kraft nach einer auf AB senkrechten und nach einer mit ihr parallelen Richtung: so geht hier die mit AB parallele Kraft ohne alle Wirkung verlohren, die senkrechte aber ist $= \frac{c^2 . ff}{2g} . \mathrm{Sin}\, \alpha$, und diese bewegende Kraft strebt die Ebne nach einer auf ihr senkrechten Richtung fortzutreiben.

Wenn die Ebne sich nicht nach dieser Richtung, wohl aber nach einer der Richtung des Strahles parallelen Richtung fortbewegen kann, so muß man die eben gefundene Kraft, welche durch EF mag dargestellt werden, in eine Parallelkraft $= \frac{c^2 . ff}{2g} . \mathrm{Sin}^2\, \alpha$, und in eine Seitenkraft $= \frac{c^2 . ff}{2g} . \mathrm{Sin}\, \alpha . \mathrm{Cos}\, \alpha$ zerlegen. Die letztere giebt an, mit welcher Gewalt die Ebne nach CH hin gedrängt wird, wenn sie sonst nach keiner Richtung ausweichen kann.

§. 70. Die Erfahrung stimmt in Beziehung auf einzelne, isolirte Wasserstrahlen recht gut mit diesen Formeln überein; aber wenn man eine Ebne dem Stoße eines Stromes von größerem Querschnitte aussetzt, so geben die Versuche etwas ganz andres, und zeigen insbesondre, daß die aus dem Stoße parallel mit dem Strome entstehende Kraft nicht dem Quadrate von $\sin\alpha$ proportional ist. Diese Abweichung von der Theorie rührt unstreitig davon her, daß vor der Ebne das von A her abfließende oder sich aufstauende Wasser den unmittelbaren Stoß auf die Ebne hindert und die ganze Einwirkung viel weniger einfach macht als wir hier voraussetzen. Etwas besser als die Formel $\frac{c^2 \cdot ff}{4g} \cdot \sin^2\alpha$ (wo man nämlich so wie in §. 63. den Stoß im offenen Strome auf die Hälfte dessen herabsetzt, was ein isolirter Strahl von eben dem Querschnitt bewirken würde), stimmt die Formel $\frac{c^2\, ff}{4g} \cdot \sin\alpha$; aber auch diese bleibt noch von der Wahrheit entfernt.

§. 71. Diese Unsicherheit der theoretischen Bestimmung und die Schwierigkeit, auch nur aus den Versuchen eine der Erfahrung entsprechende bequeme Formel herzuleiten, ist um so mehr zu bedauern, da so viele Anwendungen uns das Bedürfniß, die Wirkung des schiefen Stoßes genau zu bestimmen, fühlen lassen. Ich will von diesen Anwendungen einige anführen, mehr um zu zeigen, was man hier leisten sollte, als um die Theorie, als ob sie dieses leiste, zu empfehlen.

§. 72. Aufgabe. Eine Kugel ist dem Stoße eines breiten Wasserstromes ausgesetzt, oder bewegt sich in einem stehenden Wasser gradlinigt fort; man sucht die Kraft, welche im ersten Falle als Stoß, im andern Falle als Widerstand wirksam ist.

Auflösung. Wir wollen hier die aus dem schiefen Stoße entstehende, der Richtung des Stromes parallele Kraft als der ersten Potenz vom Sinus des Winkels proportional ansehen. Stellt nun ACB (Fig. 118.) die Halbkugel vor, die dem Strome, welcher nach der Richtung ED sie trifft, ausgesetzt ist: so können wir uns am besten die ganze Halbkugelfläche in Zonen, deren Axe OC ist, zerlegt denken, um für jede die Wirkung des Stoßes mit CO parallel zu bestimmen. Diejenige Zone, welche durch Umdrehung des Bogens fg um die Axe entsteht, empfängt den Stoß derjenigen Wassermasse, deren Querschnitt der Ring ist, welcher aus der Umdrehung von hi um O entsteht. Dieses Ringes Inhalt ist, wenn ich $Oi + \frac{1}{2} hi = \varrho$ setze, $= 2\pi . \varrho\, hi$ (*); also die mit CO parallele Kraft des Stoßes $= \frac{c^2}{4g} . 2\pi . \varrho . hi . \text{Sin } EDK$, wenn DK die Tangente in D ist. Aber EDK ist $= 90^\circ - DOC = DOA$, also jene Kraft

$$= \frac{c^2}{4g} . 2\pi . \varrho . hi . \text{Sin } DOA = \frac{c^2}{4g} . 2\pi . \varrho . hi . \frac{Dl}{R},$$

wenn R der Halbmesser der Kugel ist, und Dl die von der Mitte des Bogens fg auf AB gezogene Senkrechte. Der mit CO parallele Druck, welchen die Zone fg leidet, wird also ausgedrückt durch ein Product aus $\frac{c^2}{4g\,R}$ in den Inhalt desjenigen Theiles der Kugel der zwischen den cylindrischen Flächen, welche von fh und gi beschrieben werden, liegt; denn dieser Theil der Kugel ist als einem Cylinder gleich anzusehen, dessen Grundfläche der durch hi beschriebene Ring und dessen Höhe Dl ist. Da nun dies für alle Zonen der Kugel gelten würde, daß der Stoß durch das Product aus $\frac{c^2}{4g\,R}$ in den Inhalt des

---

(*) Es ist nämlich der Ring $= \pi (Oh^2 - Oi^2)$
$$= 2\pi . \left(\frac{Oh + Oi}{2}\right) (Oh - Oi), = 2\pi . \varrho . hi.$$

unter dieser Zone liegenden, durch cylindrische Wände abgeschnittenen Theiles der Halbkugel ausgedrückt wird: so folgt, daß der Stoß, welchen die ganze Halbkugel leidet, durch ein Product aus $\frac{c^2}{4g\,R}$ in den Inhalt der ganzen Halbkugel ausgedrückt wird, oder $= \frac{c^2}{4g\,R} \cdot \frac{2}{3}\,\pi \,.\, R^3$

$$= \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{2}{3}\,\pi \,.\, R^2,$$

gleich zwei Dritteln derjenigen Kraft ist, welche der dem Strome senkrecht entgegen gestellte größte Kreis der Kugel leiden würde, oder gleich zwei Dritteln desjenigen Wassercylinders, der den größten Kreis der Kugel zur Grundfläche und $\frac{c^2}{4g}$ zur Höhe hat.

§. 73. Nach Eytelweins Versuchen ist die Kraft, mit welcher der Strom die ganze Kugel nach der Richtung des Stromes forttreibt, noch größer; vielleicht hat hieran aber auch die Adhäsion des Wassers einigen Antheil, indem der feste Körper, selbst ohne allen Stoß, vermöge des bloßen Anhängens der Flüssigkeit, einiges Bestreben, dem Strome zu folgen, zeigen muß. Hätte ich die Kraft dem Quadrate des Sinus proportional gesetzt, so wäre sie noch mehr hinter dem Werthe zurück geblieben, den die Erfahrung anzugeben scheint; sie wäre nämlich dann $= \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{1}{2}\,\pi\,R^2$ geworden.

§. 74. Nach diesen Formeln müßte der Widerstand, den eine Kugel in der Luft leidet, ebenfalls berechnet werden. Er wäre also nach unserer eben gefundenen Bestimmung gleich zwei Dritteln vom Gewichte derjenigen Luftsäule, deren Grundfläche der größte Kreis der Kugel und deren Höhe die der Geschwindigkeit des bewegten Körpers zugehörige Höhe ist. Dieser Widerstand ist der gesammte Druck, den der bewegte Körper zu überwinden hat; nenne ich ihn $= P$ und die Masse der Kugel $= M$, so ist $\frac{P}{M}$ diejenige Kraft, die wir im 11. und 12. Abschn. der Mechanik als die der Bewegung entgegen wirkende beschleunigende Kraft ansehen. Wenn die Kugel m mal so specifisch schwer, als die Luft ist: so beträgt ihre Masse $\frac{4}{3}\pi . m . R^3$, wenn man das Gewicht eines Cubicfußes Luft als Einheit der Gewichte annimmt. Da nun $P = \frac{2}{3} . \pi . R^2 . \frac{c^2}{4g}$ war, so ist $\frac{P}{M} = \frac{1}{2} . \frac{c^2}{4g . m . R}$, also dem Halbmesser umgekehrt proportional, und der Dichtigkeit des bewegten Körpers umgekehrt proportional.

Aehnliche Ausdrücke findet man, wenn man die Kraft des Stoßes dem Quadrate des Sinus proportional setzt; nur würde dann $P = \frac{1}{2}\pi . R^2 . \frac{c^2}{4g}$ werden.

§. 75. Bemerkung. Auf die richtige Berechnung des Stoßes, den eine Kugel leidet, wenn sie dem Strome ausgesetzt ist, gründet sich die Abmessung der Geschwindigkeit des Stromes vermittelst des Strom-Quadranten. Dieser besteht nämlich (Fig. 119.) aus einer Kugel A, die an einer dünnen Stange befestigt, dem Strome ausgesetzt wird; offenbar wird der Stoß des Stromes sie so lange von der verticalen Stellung entfernen, bis das dem Stoße entgegen wirkende Gewicht des Pendels BA jenem Stoße das Gleichgewicht hält. Der außerhalb des Wassers angebrachte Quadrant DBC, giebt auf dem Gradbogen CE an, um wie viele Grade das Pendel sich von der Verticallinie entfernt hat, und daraus läßt sich die Kraft des Stoßes und folglich die Geschwindigkeit des Stromes berechnen.

Dieses Instrument ist bei Messung der Geschwindigkeit in größeren Tiefen schon an sich unbequem, und wird es dadurch noch mehr, daß man wegen des Stoßes, den der eingetauchte Theil der Stange leidet, dem Einwirken aller oberhalb A liegenden Schichten nicht entgehen kann.

§. 76. Bemerkung. Alle Untersuchungen über diesen Gegenstand haben wir nur mit Rücksicht auf die Vorderfläche des Körpers angestellt, und in der That kann uns auch die Theorie kaum veranlassen, den hintern Theil des Körpers mit in Betrachtung ziehen zu wollen. Gleichwohl zeigen die Versuche, daß im freien Wasser, vorzüglich wenn der feste Körper fortgezogen wird, und also einen Widerstand leidet, auch der hintere Theil des Körpers einen entschiedenen Einfluß auf die Größe des Widerstandes hat. Die Versuche Chapmanns (die man aus Clemens Beschreibung von Chapmanns Versuchen zu Bestimmung des Widerstandes flüssiger Massen (Berlin, 1797.) kann kennen lernen,) waren vorzüglich mit auf diesen Gegenstand gerichtet. Aber der zahlreichen Versuche ungeachtet scheint diese Lehre noch immer durchaus nicht genügend aufgeklärt zu sein; vielleicht wäre es sogar vortheilhaft, alle Versuche mit möglichster Vereinfachung der Umstände noch einmal zu wiederholen, da hier so viele einzelne Umstände einwirken, die man nothwendig einzeln muß kennen lernen. Ehe diese Kenntniß nicht vollständig erlangt ist, können auch andre hieher gehörige Fragen, z. B. welche Figur ein Körper haben muß, um den kleinsten Widerstand zu leiden, nur ein theoretisches Interesse haben, da die Gesetze, die wir hiebei voraussetzen müssen, vielleicht sehr von den eigentlichen wahren Gesetzen abweichen mögen.

§. 77. Bemerkung. Wenn die vom Stoße des Wassers getroffene Ebne AB (Fig. 120.) selbst fortrückt: so muß man wieder die relative Geschwindigkeit der Wassertheilchen gegen die Ebne bei der Bestimmung des Stoßes in Rechnung bringen. Rückt die Ebne AB senkrecht auf die Richtung des Strahles EF mit der Geschwindigkeit $= C$ fort: so gelangt in der Zeit $= t$ der Punct F nach G und es ist $FG = C.t$; es wird aber jetzt ein andrer Punct H vom Wasserstrahle getroffen, dessen Entfernung von $F = FH = C.t.\mathrm{Cotang}\,\alpha$ ist, wenn ich $FHG = \alpha$ nenne. Die Geschwindigkeit also, mit welcher die Ebne dem Stoße des Strahles ausweicht, ist $= C . \text{Cotang}\, \alpha$, und also die relative Geschwindigkeit des Strahles $= c - C . \text{Cotang}\, \alpha$.

§. 78. Aufgabe. Die Kraft des schiefen Stoßes auf eine Ebne, die senkrecht gegen die Richtung des Stoßes ausweicht, zu bestimmen, die Kraft nämlich, mit welcher sie die Ebne nach der Richtung FG forttreibt.

Auflösung. Sie ist

$$= \frac{c . ff}{2g} (c - C . \text{Cotang}\, \alpha) \text{Sin}\, \alpha . \text{Cos}\, \alpha;$$

denn die anstoßende Wassermasse bleibt $= c . ff$, wenn ff der Querschnitt des Wasserstrahles ist, die (nach §. 60. berechnete) Kraft des Stoßes ist also

$$= \frac{c . ff}{2g} (c - C . \text{Cotang}\, \alpha),$$ nach der Richtung des Wasserstrahles. Von dieser Kraft ist aber nur der auf CD senkrechte Theil wirksam

$$= \frac{c . ff}{2g} (c - C . \text{Cotang}\, \alpha) . \text{Sin}\, \alpha,$$ und die auf CD senkrechte Kraft muß in eine mit FG parallele

$$= \frac{c . ff}{2g} (c - C . \text{Cotang}\, \alpha) . \text{Sin}\, \alpha . \text{Cos}\, \alpha$$ und eine auf sie senkrechte zerlegt werden. Nur die erstere trägt zum Forttreiben der bewegten Ebne bei.

§. 79. Auch die Wirkung des Stoßes läßt sich anwenden, um durch einen isolirten Strahl ein Rad zu treiben. Denkt man sich nämlich (Fig. 121.) eine gegen die Ebne der Zeichnung senkrechte Welle A, um welche das Rad, an dem die Stoßfläche BC angebracht ist, sich drehen kann: so wird, wenn die Stoßfläche unter einem Winkel $= 90° - \alpha$ gegen die Ebne des Papiers geneigt, der Wasserstrahl aber senkrecht auf eben diese Ebne ist, eine Drehung der Fläche BC um A erfolgen, die durch eine Kraft, der eben bestimmten gleich, bewirkt wird. Folgen sich also mehrere solche Flächen, wie BC, die nach und nach den Stoß empfangen: so kann die Bewegung des Rades fortdauernd unterhalten werden.

Bei diesen, durch einen isolirten Strahl umgetriebenen Rädern, hat der Wasserstrahl eine mit der Axe des Rades parallele Richtung und trifft die schief gestellten Schaufeln, indem er zwischen sie hinein geleitet wird, und sogleich eine zweite antrifft, indem die fortgedrehte erste sich seiner Wirkung entzieht.

§. 80. Bemerkung. Obgleich diese Theorie nur da völlig paßt, wo die ganze Bewegung des Wasserstrahles völlig zerstört wird: so dürfen wir doch wohl das Wesentlichste derselben auch da anwenden, wo ein unbegrenzter Strom auf die schief gestellten Flächen stößt. Man bedient sich bekanntlich solcher Flächen oder Flügel bei den Windmühlen, und bei der Einrichtung dieser muß ich noch einen Augenblick verweilen.

Um mit dem Einfacheren anzufangen, betrachte ich zuerst den Woltmannischen Windmesser (Anemometer) und Strommesser; — Instrumente, die ihren Zweck, die Geschwindigkeit des Windes und des Stromes anzugeben, sehr gut erfüllen. Dieser besteht aus vier gegen einander senkrechten, in einer Ebne liegenden Flügelruthen (Fig. 121.), an deren Enden kleine ebne Flächen gegen die Ebne ADEFG geneigt angebracht sind. Diese kleinen ebnen Flächen, wie BC, schneiden die Ebne DEFG in der verlängerten Richtung des Halbmessers, so daß DH die Durchschnittslinie ist; alle sind unter gleichen Winkeln gegen jene Ebne und so gestellt, daß der mit der Axe A parallele Strom des Windes oder Wassers alle nach derselben Richtung forttreibt. Die Kraft des Windes oder des Stromes treibt also die Flügel um, und treibt sie mit beschleunigter Bewegung fort, so lange die Geschwindigkeit noch nicht bis zu einem gewissen Grade zugenommen hat.

Nenne ich, wie in §. 67. die am Umfange der Welle vom Halbmesser $= \varrho$ entgegen wirkende Last, worin ich die Reibung mit begreife, $= Q$, so ist

$$= \frac{c \, . \, ff}{2g} (c - C \, \mathrm{Cotang} \, \alpha) \, \mathrm{Sin} \, \alpha \, \mathrm{Cos} \, \alpha - \frac{Q \, . \, \varrho}{r},$$

die gesammte bewegende Kraft, die auf BC, in der Entfernung $= r$ von der Umdrehungsaxe wirkt. Diese Kraft beschleunigt immerfort die Bewegung, und C, als die Geschwindigkeit des in der Entfernung $= r$ von der Axe liegenden Punctes, nimmt so lange zu, bis diese Kraft $= 0$, oder bis

$$C = c \, . \, \mathrm{tang} \, \alpha - \frac{Q \, . \, \varrho}{r} \, . \, \frac{2g}{c \, ff \, \mathrm{Cos}^2 \, \alpha} \text{ ist.}$$

Bei dem Windmesser und Strommesser richtet man es gern so ein, daß $C = c$ wird, oder die Mitte der Stoßfläche sich eben so schnell fortbewegt, als die Luft- oder Wassertheilchen fortströmen. Wäre also, was hier beinahe der Fall ist, $Q = 0$, so müßte man $\mathrm{tang} \, \alpha = 1$, $\alpha = 45^\circ$ nehmen; da indeß Q nicht ganz verschwindet, so wird α etwas größer, wenn $C = c$ werden soll. Das Instrument ist nun so eingerichtet, daß ein gezähntes Rad, das durch die Drehung der Axe A umgetrieben wird, die Umdrehungen der Axe zählt, folglich den ganzen von BC in einer gewissen Zeit durchlaufenen Weg angiebt. Dieser ist, weil $C = c$, eben so groß als der Weg, den in derselben Zeit die Luft- oder Wassertheilchen zurückgelegt haben, also wird die Geschwindigkeit des Windes oder Stromes hiedurch bestimmt.

§. 81. Bemerkung. Ich habe bisher die Fläche BC so betrachtet, als ob der ganzen Fläche Geschwindigkeit als gleich groß könne angesehen werden. Dieses ist nur dann möglich, wenn die Höhe DH der Stoßfläche sehr geringe ist, wie sie es bei den Wind- und Strommessern zu sein pflegt, wo keine große Kraft, um das Instrument in die gehörige Bewegung zu setzen, erforderlich ist. Soll aber eine so erhebliche Wirkung hervorgebracht werden, wie bei Windmühlen, so ist es nöthig, die Stoßflächen größer zu nehmen. Wollte man nun die ganze Stoßfläche als eine einzige Ebne annehmen, so ist einleuchtend, daß die der Axe nahe liegenden Theile derselben der anstoßenden Luft nicht so schnell ausweichen, als die entfernten, und daß die entferntern wohl allzuschnell ausweichen könnten. Denn wäre für die entfernteren Theile der Axe $C = c \cdot \tang \alpha$, so würde auf diese gar keine Kraft mehr wirken, und die größere Länge der Flügel gar nichts nützen; wäre vielleicht sogar für einige Theile des Flügels $C > c \cdot \tang \alpha$, so würden diese entferntesten Theile sogar einen Widerstand leiden, weil die Luft vermöge ihrer eignen Geschwindigkeit dem umlaufenden Flügel nicht schnell genug auswiche.

Da es nun offenbar zweckmäßig ist, den Windmühlenflügel so einzurichten, daß jeder Punct desselben mit gleicher Gewalt vom Winde fortgetrieben werde: so muß $c - C \cdot \tang \alpha$ überall gleichen Werth haben, oder C sich umgekehrt, wie $\tang \alpha$ verhalten. Da nun C in verschiedenen Puncten des Flügels sich verhält, wie der Abstand von der Axe oder die Geschwindigkeit $C = \frac{r \cdot \gamma}{a}$ ist, für die Entfernung $= r$ von der Axe, wenn sie $= \gamma$ war, in der Entfernung $= a$ von der Axe: so muß für den ganzen Flügel $r \cdot \tang \alpha$ unveränderlich sein; das heißt, man nimmt in verschiedenen Entfernungen von der Axe die Neigung der Flügelfläche so, daß die Tangente des Winkels, welchen sie mit der Richtung des Windes macht, dem Abstande von der Axe umgekehrt proportional ist. Die Flügel erhalten also eine gekrümmte Gestalt, die man ihre W i n d s c h i e f e nennt.

§. 82. A n m e r k u n g. Diese ersten Grundzüge einer Anwendung der Lehre vom Stoße flüssiger Körper bedürfen noch mannigfaltiger Verbesserung, die ich hier, wo ich bloß einen Begriff von dieser Anwendung geben wollte, nicht mittheilen kann. Manches Nützliche hierüber hat L a n g s d o r f im Lehrbuch der Hydraulik gesagt, indeß wären wohl sorgfältige und jeden einzelnen Umstand einzeln prüfende Versuche nöthig, um uns zu richtigen Regeln für die Anwendung zu leiten. Denn obgleich es an mannigfaltigen Versuchen über den Stoß und Widerstand flüssiger Körper und selbst auch über die Wirkung verschieden geformter Windflügel, nicht fehlt: so sind doch die meisten derselben nicht so vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortschreitend, daß man genau über den Einfluß jedes Umstandes belehrt würde.

Siebenter Abschnitt.

Von der Rückwirkung des Wassers.

§. 83. Bemerkung. Wenn ein mit Wasser gefülltes Gefäß (Fig. 122.) von allen Seiten geschlossen ist, so übt das Wasser auf alle Seitenwände einen, sich gegenseitig aufhebenden Horizontaldruck aus; wird aber nun die Oeffnung n gemacht, so daß hier das Wasser ausströmen kann: so leidet die gegen über liegende Stelle m einen Druck, der nicht mehr durch den gleichen Druck auf n zerstört wird. Hier also leidet das ganze Gefäß einen überwiegenden Druck nach der Seite hin, wo m liegt, und würde dahin ausweichen, wenn die Reibung auf dem Boden und ähnliche Hindernisse dieses erlaubten.

§. 84. Dieser Ueberschuß des Druckes, der daher entsteht, daß das ausfließende Wasser an der Stelle der Oeffnung nicht mehr den Druck auf das Gefäß ausübt, den es ausübte, ehe die Ausflußmündung geöffnet wurde, heißt die Rückwirkung des ausströmenden Wassers.

§. 85. Diese Rückwirkung läßt sich brauchen, um Maschinen zu treiben. Denkt man sich nämlich (Fig. 123.) ein um die verticale Axe AB bewegliches Gefäß CD, das mit einer horizontalen Röhre EF in Verbindung steht, die bei G eine horizontale Ausflußmündung hat: so wird, wenn Gefäß und Röhre beständig mit Wasser gefüllt erhalten werden, das bei G ausströmende Wasser eine Drehung der Röhre und folglich des ganzen Gefäßes um die Axe AB bewirken.

Diese Betrachtung zeigt hinreichend, daß die Rückwirkung des Wassers eine mit der gedrehten Axe AB in

Verbindung stehende Maschine in Bewegung setzen könnte, und läßt so die ersten Gründe übersehen, auf denen die Einrichtung des Segnerschen Wasserrades beruht. Bei der genauern Betrachtung der hier wirkenden Kräfte muß man darauf Rücksicht nehmen, daß bei schon entstandener Bewegung auch die Schwungkraft mit einwirkt. Da die nähern Untersuchungen hierüber zu verwickelt werden, so muß ich mich hier damit begnügen, nur einen Begriff von dieser Wirkung gegeben zu haben.

§. 86. Zu den Erfolgen dieser Rückwirkung gehört auch das Zurückprallen der Canonen beim Schusse. Bliebe die hier entwickelte sehr verdichtete Luft- oder Dampfmasse in einem überall verschlossenen Raume, so würde der Druck nach allen Seiten gleich sein, und kein Verschieben des Gefäßes oder der Canone Statt finden; aber indem die heftig drückende elastische Materie nach einer Richtung ausströmen kann, muß sie durch ihren fortdauernden Druck auf das Gefäß nach der entgegengesetzten Richtung dieses mit großer Gewalt forttreiben, so wie es bei der Canone der Fall ist.

Da die Meteore, Feuerkugeln nämlich und Sternschnuppen, aus einer von innen aufgeblähten Masse zu bestehen scheinen, — wofern man der Beobachtung, daß Feuerkugeln eine veränderliche Gestalt zeigen, trauen darf: so könnte es wohl sein, daß sie ihre überaus große Geschwindigkeit durch die Rückwirkung des an einer Seite mit großer Heftigkeit hervorbrechenden elastischen Fluidi erhielten. Denn da hier der Strom elastischer Flüssigkeit, der aus dem brennenden oder glühenden Körper hervorbricht, vielleicht immerfort unterhalten wird, so müßte er in einer Gegend, wo der Widerstand so unbedeutend ist, sehr große Geschwindigkeiten hervorbringen.

Druckfehler und Verbesserungen zum I. Theile.

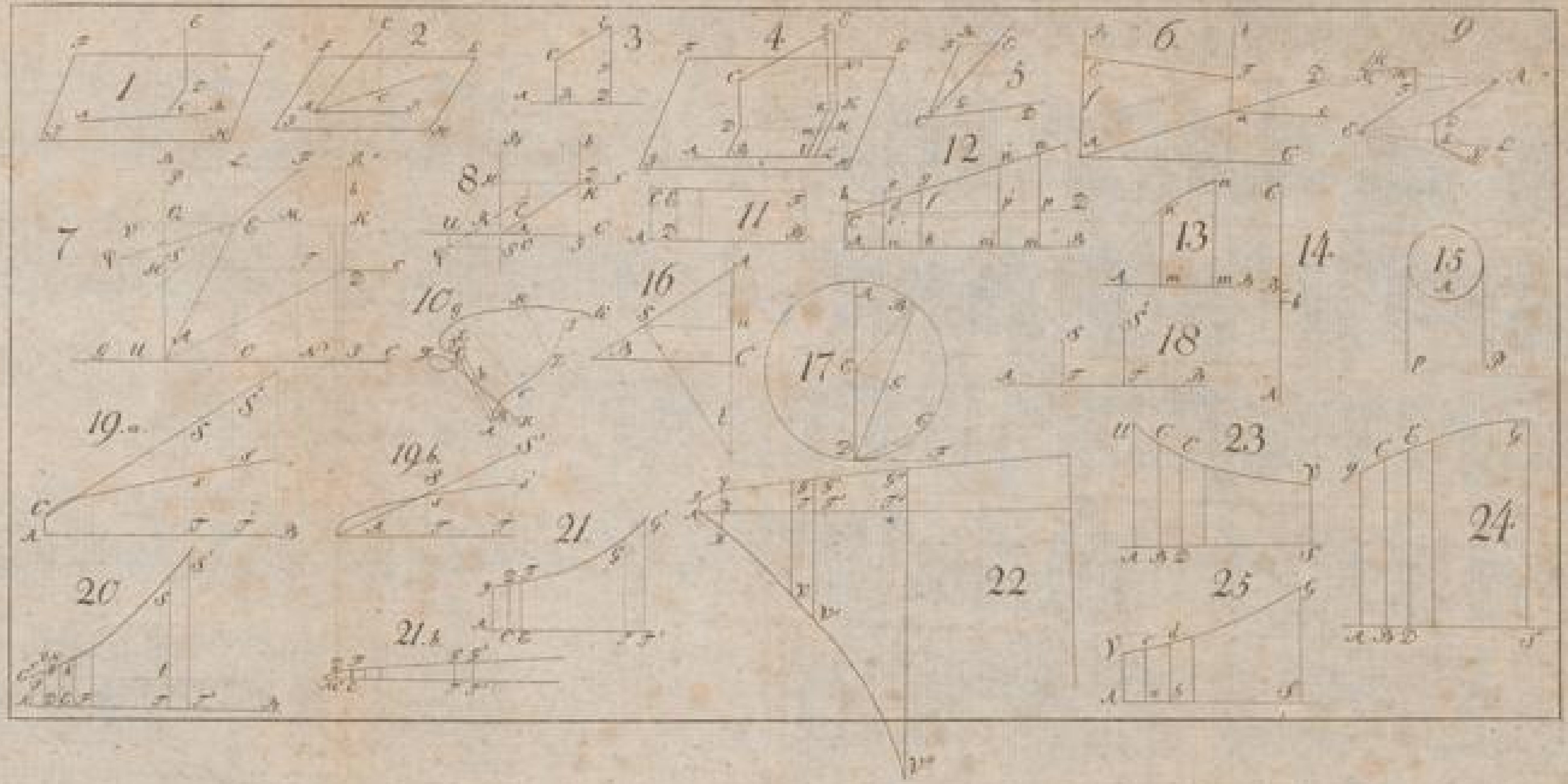
Seite 13. Zeile 1. lies: §. 28.
— 15. — 1. lies: y, statt z.
— 17. — 17. lies: P, P, Q, Q + z.
— 23. — 1. lies: Statt.
— 24. — 1. lies: S und U.
— — — 2. streiche das S weg.
— — — 12. lies: $\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$, statt $\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$.
— 27. — 15. lies: den T und S.
— 29. letzte Zeile und an einigen andern Stellen lies: proportional, statt proportionel.
— 31. Z. 21. lies: 180.
— 41. — 30. lies: CD : BE.
— 47. — 22. lies: denn, für dann.
— — — 6. von unten, lies: Momente für + S.
— 56. — 24. lies: nach NS.
— 58. — 24. lies: auf die sie.
— 61. — 20. lies: Lehnsatz, statt Lehrsatz.
— 66. — 20. lies: UT.
— 71. in den letzten Zeilen ist Fig. 46. anzuführen vergessen.
— 73. Z. 13. von unten, lies: alle.
— 98. — 27. lies: das Gewicht P.
— 102. — 2. von unten, und
— 103. — 1. lies: $\frac{a}{2r\pi}$, statt $\frac{a}{2rn}$.
— 104. — 8. von unten, lies: f . P Sin $(\alpha+\varphi)$.
— 105. — 6. lies: Cg, statt CG.
— 125. — 5. von unten, lies: IC'K.
— 129. — 7. von unten, lies: §. 229. Erklärung.
— 146. — 8. lies: P . DE, statt 2 P . DE.
— 148. — 14. von unten, lies: Ba, statt BC.
— 160. — 9. lies; oder, statt odder.
— 169. — 8. von unten, lies: Z.
— 185. — 20. lies: A und B.
— 198. — 9. lies: $\left(\frac{K-h.D}{K}\right)^n = \left(1-\frac{h:D}{K}\right)$:

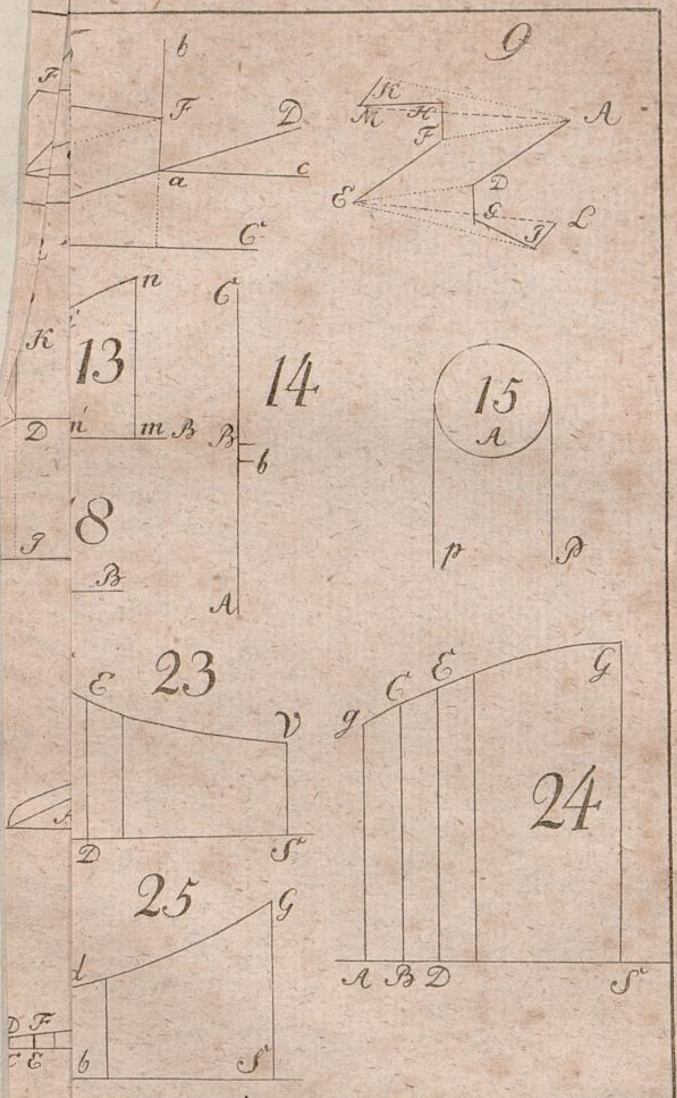
Druckfehler und Verbesserungen zum II. Theile.

Seite 5. Zeile 8. lies: des Körpers unter dem Winkel $= \alpha$.
— 9. — 19. lies: Bewegung in Beziehung auf einen
— 27. — 8. lies: $s = ct - gt^2$.
— 31. — 27. lies: $v = 2\sqrt{g . Au}$, statt $2\sqrt{g} . Au$.
— 40. — 6. lies: Fig. 20. und Fig. 21. b.
— 43. — 6. lies: oder $v^2 =$
— 46. — 4. lies: also $= o$ ist für $s = o$.
— 50. — 2. lies: $> \frac{1}{(h-u)(h-2u)}$.
— 54. — 3. von unten, lies: $ds = - \frac{h . 2w\, dw}{(1+w^2)^2}$.
— 55. — 9. lies: Arc . Cosin $\sqrt{\frac{h-s}{h}}$.
— 73. — 3. lies: $= \frac{ac . \frac{1}{n} \beta \pi}{180^0}$.
— — — 12. lies: $= \left(\mathrm{Cos}\ \frac{1}{n} \beta\right)^n$.
— — — 13. muß im Nenner 8, statt s stehen.
— 91. — 17. lies: $= \frac{(\text{Sehne } cB)^2}{2a}$.
— 93. letzte Zeile lies: oder da zum Sin $= 1$ der
— 111. Zeile 8. lies: Entfernungen von jenen.
— 114. — 5. von unten muß der Nenner zum Quadrate erhoben werden.
— 115. — 6. lies: $\mathrm{Sin}^2 \mu$, statt $\mathrm{Sin}^2 \alpha$.
— 119. — 12. lies: $DC^2 + DU^2 -$
— 122. — 2. lies: $= y^2$, statt $= v^2$.
— 124. — 13. lies: $MNP = \lambda$.
— 126. — 10. muß gleich zu Anfang $\frac{a^2 N^2}{b^2}$ stehen.
— — — 13. ist die Parenthese nicht geschlossen.
— 127. — 12. fehlt hinter der Parenthese { } das Zeichen der Quadrat-Erhebung.
— — — 17. lies: desselben.
— 138. — 5. von unten, lies: dw, statt gw.
— 141. — 16. lies: $mn = z\, d\psi$.
— 142. — 5. von unten, fehlt ein Wurzelzeichen.

S. 146. Zeile 5. lies: als der doppelte in der Zeit
— 147. — 7. von unten, lies: der Richtung der Bewegung grade
— 152. — 1. lies: $n = 1$.
— 156. — 9. muß $1 + \frac{c^2}{k^2}$,
— — — 13. muß $1 + \frac{v'^2}{k^2}$ stehen.
— 159. — 18. lies: $2g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$
— 182. — 11. lies: $= n \cdot c$.
— 194. — 5. lies: $\gamma \cdot r'$, statt $\gamma' \cdot r$.
— 206. — 11. lies: von der durch die Axe der x und z.
— 208. — 1. muß der Exponent der Potenz nicht $\frac{2}{3}$, sondern $\frac{3}{2}$ sein.
— 212. — 17. lies: haben.
— 213. — 6. fehlt im Nenner a^2.
— 218. — 12. lies: $CM' = r$.
— 219. letzte Zeile, lies: gleiche Winkelgeschwindigkeit.
— 223. Z. 19. lies: aber kleiner als
— — — 21. lies: $< \frac{1}{n} b \left(\frac{2}{n} b\right)^2$.
— 226. — 9. lies: $\frac{1}{12} \frac{b}{h} ((h - f)^4 - f^4) + \frac{1}{3} b f^3$.
— 256. — 3. lies: BC.
— 262. — 15. lies: $- \varrho \cdot f (P + M + N)$.

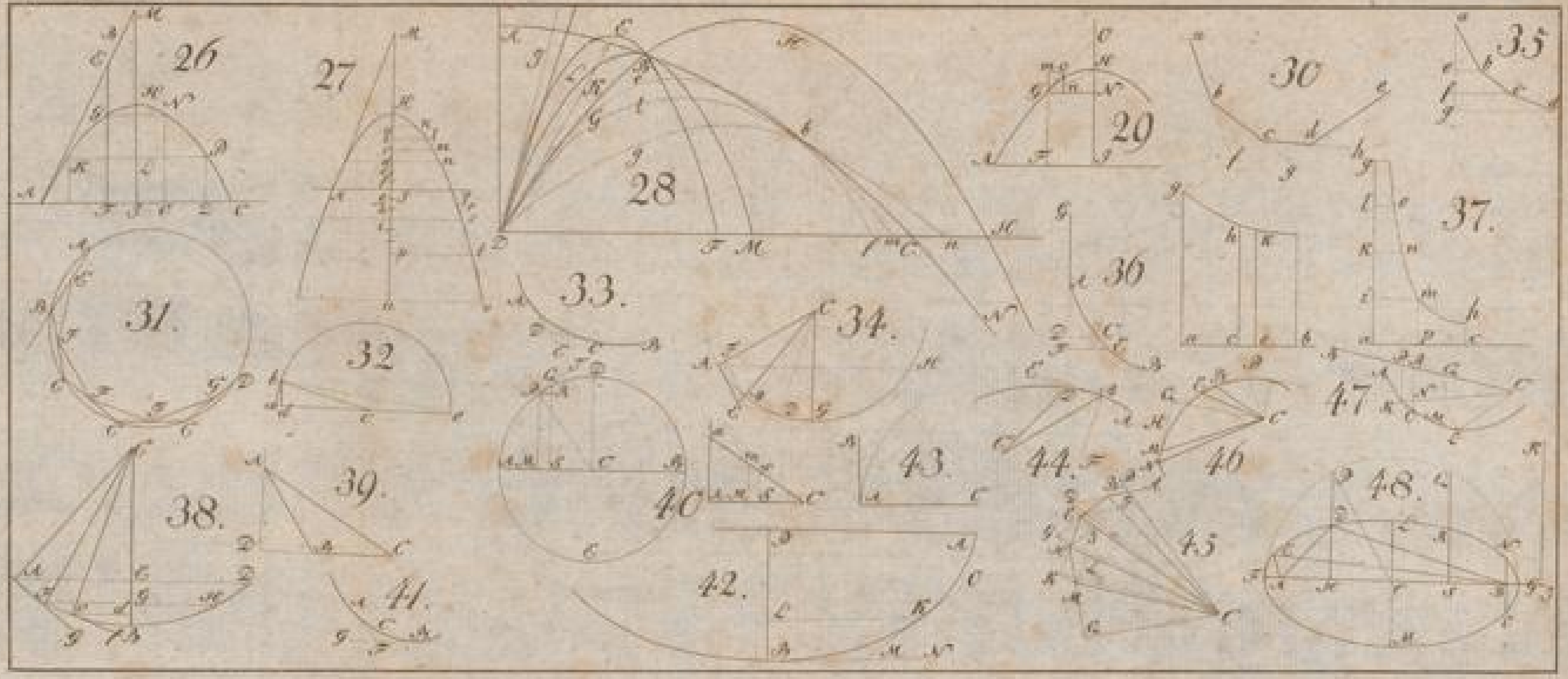
Tab. I.

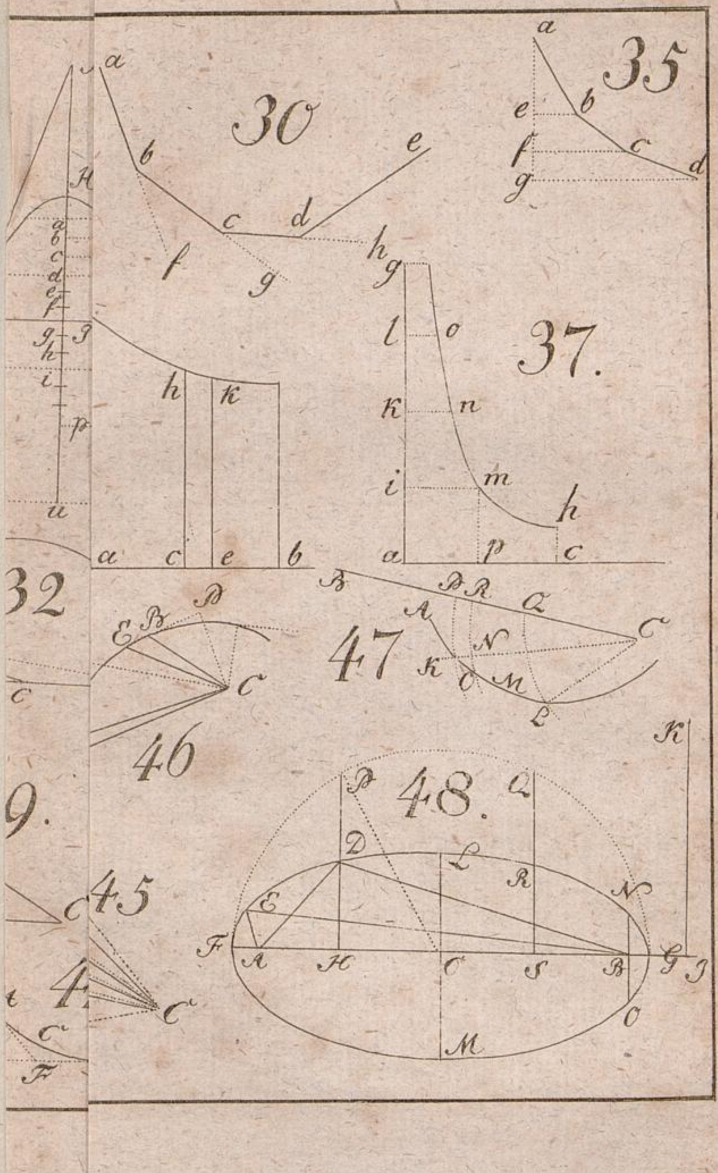




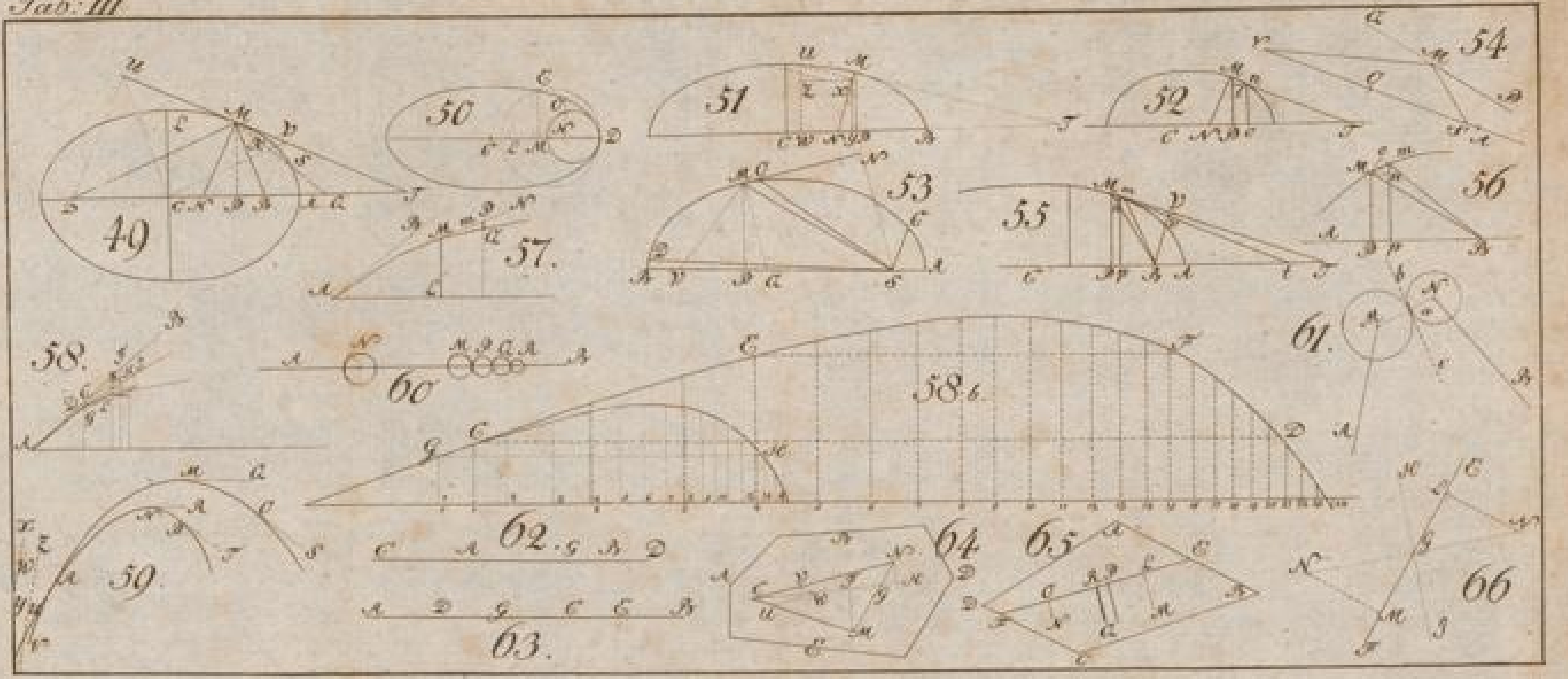
9
K M H F A E D G L I
b F D a c C
13
n K D m B
14
C B b A
15
A p P
8
B
23
E V D S
24
g C E G A B D S
25
G d b S
D F C E

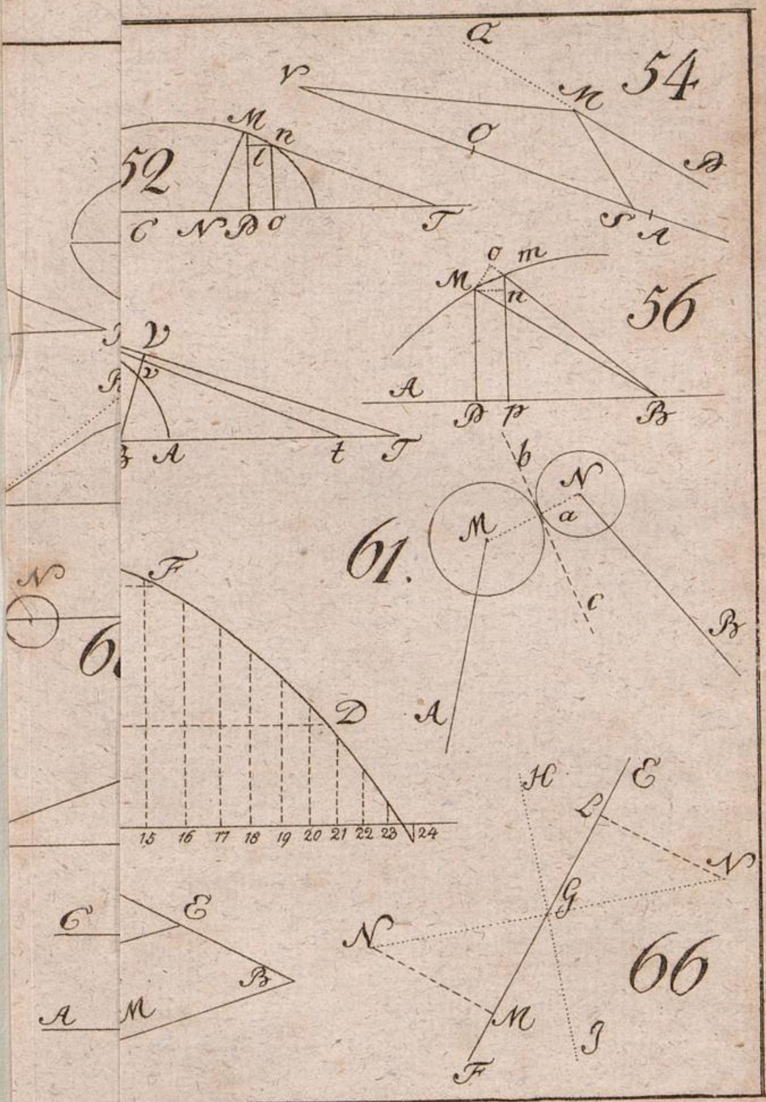
Tab. II




30
35
37.
32
47
46
9.
48.
45

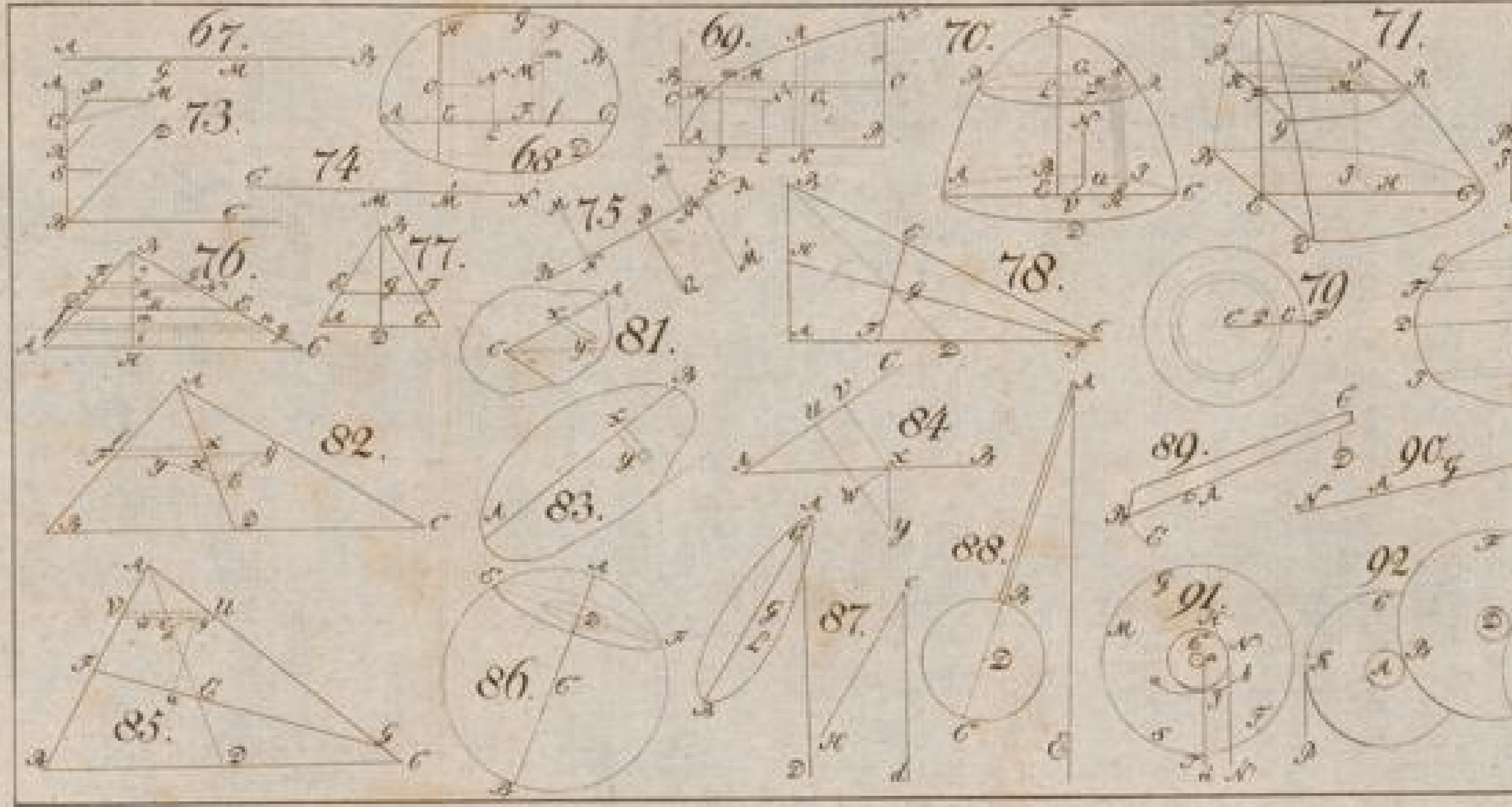
Tab: III

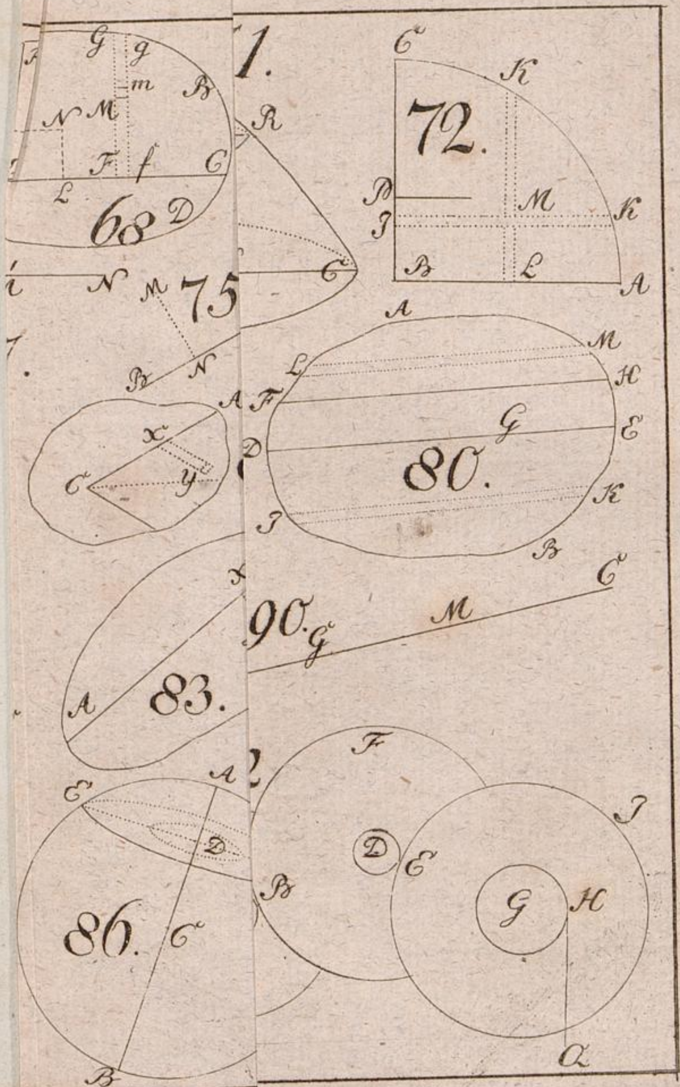




54
52
56
61.
66
15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

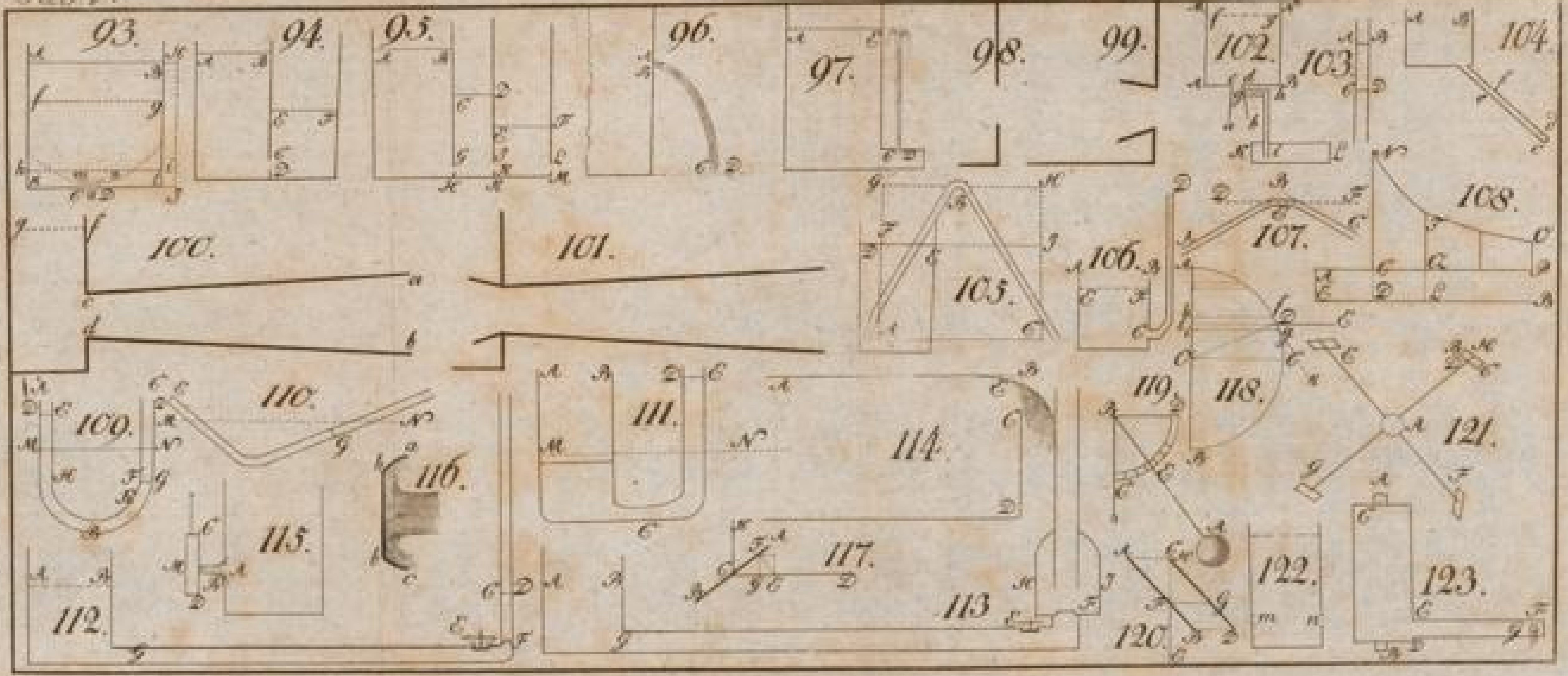
Tab. IV.

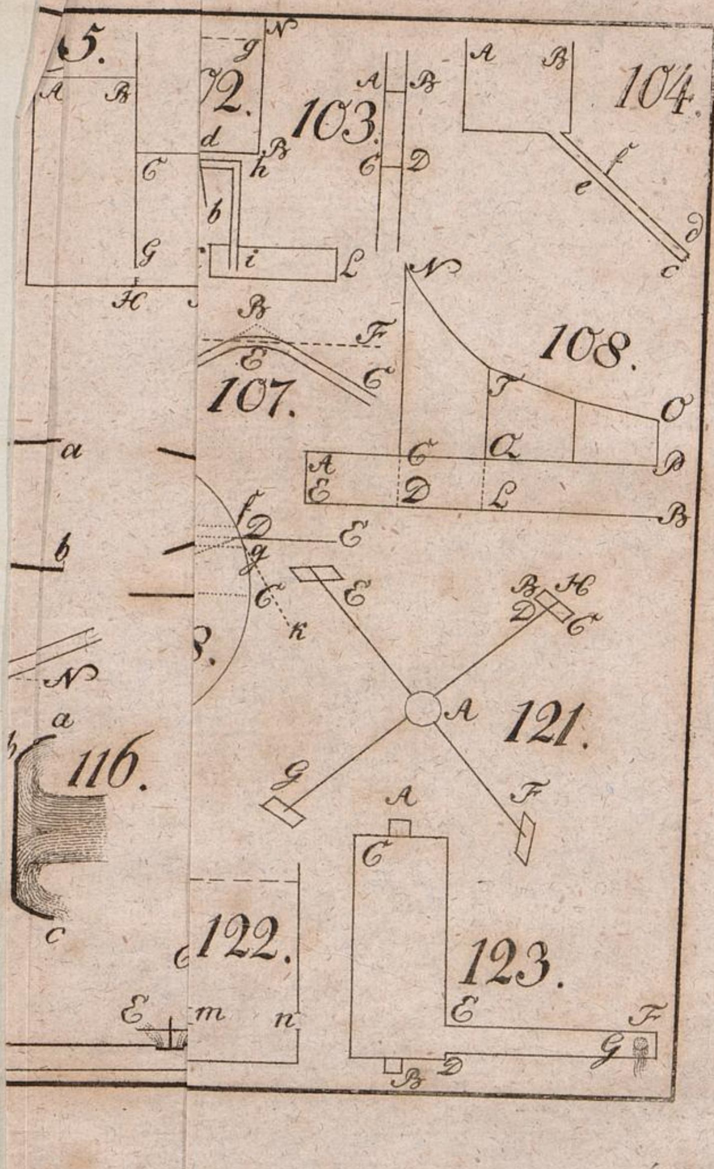

67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.



68
1.
72.
75
80.
90.
83.
86.
2

Tab. V.


93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.
102.
103.
104.
100.
101.
105.
106.
107.
108.
109.
110.
116.
111.
114.
119.
118.
121.
115.
117.
112.
113.
120.
122.
123.



103.
104.
107.
108.
116.
121.
122.
123.

The work itself and the containing map(s) were digitized with different types of scanners. The Colorchecker shown here refers to the map(s) only.

Das Werk selbst und die enthaltene(n) Karte(n) wurden mit unterschiedlichen Scannern digitalisiert. Dieser Colorchecker gilt nur für diese Karte(n).