1179

Lehrbuch

der

Gesetze des Gleichgewichts

und

der Bewegung

fester und flüssiger Körper

von

H. W. Brandes,

Professor an der Universität in Breslau.

Erster Theil.

Mit 5 Kupferplatten.

Leipzig,
bey Paul Gotthelf Kummer
1817.

Vorrede.

Obgleich wir schon eine ziemlich große Anzahl von Lehrbüchern der Mathematik besitzen, so glaube ich doch, daß man nicht behaupten kann, allen Bedürfnissen sei durch diese so Genüge geleistet, daß keine Wünsche mehr übrig blieben, und ich hoffe deshalb, man werde ein neues Lehrbuch nicht geradezu als überflüssig ansehen, wenn es auch nur als ein Versuch sich ankündigt, um nach einem bestimmt aufgefaßten Plane etwas zu leisten, was unter seinen Vorgängern keiner ganz leistet. Wir besitzen einige vortreffliche Bücher über die mechanischen Wissenschaften, unter denen Eytelweins Handbuch der Statik fester Körper einen der ersten Plätze verdient; aber so klar und untadelhaft sie geschrieben sein mögen, so haben sie dennoch das Vorurtheil derer gegen sich, welche die höhere Analysis als etwas unerlernbar Schweres betrachten, und jedes Buch von sich weisen, welches ohne Kenntniß derselben nicht kann gelesen werden. Ueberdas ist es unstreitig ein Bedürfniß der meisten Lernenden, zuerst eine kurze Uebersicht der Hauptsätze einer Wissenschaft in systematischer und gründlicher Entwickelung vor Augen zu haben, ehe sie es wagen können, sich mit einem ausführlichen, ganz ins Einzelne gehenden Buche bekannt zu machen. Zu einer solchen Vorbereitung besitzen wir freilich Bücher genug; aber ich müßte mich sehr irren, wenn man nicht ihnen fast ohne Ausnahme den Vorwurf machen müßte, daß sie zu sehr bloß die leichtesten Sätze erklären, und den Leser kaum einen Blick in diejenigen Lehren thun lassen, die ihm doch erst die Wissenschaft lieb machen, und ihm ihren wahren Werth zeigen können. Hier also einen Schritt weiter zu gehen, — ein Buch zu liefern, das dem Anfänger durchaus verständlich, gründlich und dennoch kurz, ihn auch in die schwierigern

Lehren einführe, — das ist mein Zweck bei Ausarbeitung des vorliegenden Werkes gewesen.

Ich setze Leser voraus, welche außer den Lehren der gewöhnlichen Arithmetik, der Elementar-Geometrie, der ebenen und sphärischen Trigonometrie, von der Algebra nur so viel wissen, als zur Auflösung quadratischer Gleichungen nöthig ist (*); Leser freilich, die an strenges Denken gewöhnt sind, und mit gereiftem Verstande einen kurzen und gründlichen Vortrag mit Ernst zu durchdenken vermögen. Diese Leser, so weit es irgend möglich ist, alles das, was die Statik und Mechanik lehren soll, übersehen zu lassen; sie, selbst bei schwierigern Lehren, auf den Standpunct zu stellen, wo sie mit gründlicher

(*) Bei den vorkommenden arithmetischen, geometrischen und trigonometrischen Sätzen, habe ich, wo es nöthig schien, mich auf das von mir herausgegebene Lehrbuch der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie (Oldenburg, bei Schulze 1809.) bezogen, so daß kein Satz (die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades ausgenommen) als bekannt vorausgesetzt wird, der nicht dort erwiesen ist. Die Citata (Arithm.) oder (Geom.) oder (Trigon.) beziehen sich auf die §. §. jenes Lehrbuches.

Ueberzeugung die Hauptsätze dieser Lehren erkennen: und den Weg ahnden können, den man bei einer weiteren Untersuchung verfolgen müßte, scheint mir das beste Mittel, um dem Studium der Mathematik immer mehr Freunde zu gewinnen, und ich habe daher dieses zum Ziel meines Bestrebens gemacht. An den wenigen Stellen, wo ich Hülfssätze nöthig hatte, welche ich nicht als bekannt voraussetzen durfte, habe ich vollständige Beweise derselben eingeschaltet. Auf die analytische Geometrie wird sich der Leser zwar in dem Buche hingeleitet finden; aber sie wird nirgends vorausgesetzt, sondern es findet sich (wie ich wenigstens hoffe) gleichsam von selbst, daß Zeichnung und Formel hier einander unterstützen und beide zum Ziele führen.

Welche Gegenstände ich hier, gestützt auf jene sehr mäßigen Vorkenntnisse, erklärt habe, zeigt das Inhalts-Verzeichniß, und ich hoffe in der Mechanik in demselben Verhältnisse tief einzudringen. Eine völlige, von allen Seiten erschöpfende Darstellung dieser Lehren, konnte nicht mein Zweck sein, da ich nur eine Einleitung, als Vorbereitung zu einem ins Einzelne gehenden Studium geben wollte; ich habe daher die Hauptschriften erwähnt, die bei einem solchen Studium benutzt werden können. Daß ich dieses nur sparsam gethan habe, wird man mir hoffentlich nicht zum Vorwurf machen; denn eine vollständige Literatur jeder Lehre gehört nicht in ein für den Anfänger bestimmtes Lehrbuch, und die (von manchen Schriftstellern eingemischten) Nachrichten von den Erfindern jedes Satzes gehören unstreitig noch weniger hinein. Aus ähnlichen Gründen, wie die sind, die mich hier bestimmten, habe ich Sätze, welche ganz der Physik angehören, umständliche Nachrichten von Versuchen, Tabellen irgend einer Art und dergleichen nicht aufnehmen wollen, indem diese Gegenstände entweder gar nicht in die mathematische Darstellung gehören (z. B. die in der Aërostatik bei vielen Schriftstellern vorkommenden Nachrichten von Thermometern, Hygrometern u. s. w.), oder ausführlichen Werken mußten vorbehalten werden, (z. B. Tabellen über die Reibung verschiedener

Körper, über die specifischen Schweren verschiedener Körper u. s. w.).

Diese Bemerkungen werden wohl hinreichen, um die Ideen darzulegen, die mich bei Ausarbeitung dieses Buches leiteten; ich hoffe, daß man sie nicht unrichtig, und daß man die Arbeit ihnen gemäß ausgeführt finden wird.

Breslau, am 12. April 1817.

H. W. Brandes.

Uebersicht des Inhalts.

Die Einleitung erklärt im Allgemeinen die Begriffe von Ruhe, Bewegung, Kräften, Gleichgewicht u. s. w.

Die Gesetze des Gleichgewichts fester Körper.

1. Abschnitt.

§. 3. Eine Uebersicht aller Untersuchungen, die in der Statik vorkommen können.

Der Hauptgegenstand dieses Abschnittes ist, zu zeigen, wie etwa der Druck, welchen im Gleichgewicht erhaltene Kräfte ausüben, gegen Gewichte könne abgemessen werden.

2. Abschnitt.

Wenn zwei Kräfte auf denselben Punct nach verschiedenen Richtungen wirken, so ist die entstehende Mittelkraft, nach

12. Abschnitt.

13. Abschnitt.

14. Abschnitt.

Die Gesetze des Gleichgewichts flüssiger Körper.

1. Abschnitt.

2. Abschnitt.

3. Abschnitt.

Einleitung.

§. 1. Erklärung. Ruhe ist das Verharren in derselben Lage; Bewegung ist Aenderung der Lage.

§. 2. Um zu bestimmen, ob ein Punct sich beweget oder ruhet, müßte man seine geometrische Lage gegen sicher ruhende Puncte oder gleichsam unveränderlich feste Grenzen im Raume bestimmen. Ein ganzer Körper ruhet, wenn jeder Punct in ihm ruhet. Wir richten aber zuerst unsere Aufmerksamkeit nur auf die Ruhe oder Bewegung einzelner Puncte.

§. 3. Erklärung. Die Ruhe ist absolut, wenn die Lage des Punctes gegen alle Puncte des Raumes unveränderlich bleibt; sie ist nur relativ, wenn die Lage in Beziehung auf gewisse Puncte dieselbe bleibt, aber diese selbst sich bewegen. So läßt sich auch von der Bewegung nur behaupten, daß sie relativ sei, wenn die Vergleichung der Lage in Beziehung auf Puncte angestellt wird, die selbst nicht sicher ruhen. Es ist daher schwer zu bestimmen, ob die Ruhe und Bewegung eine absolute sei, oder nur eine relative.

§. 4. Erklärung. Indem ein Punct seine Lage ändert, rückt er auf irgend einer Linie fort oder beschreibt eine Linie; diese heißt der durchlaufene Weg des Punctes.

§. 5. Bemerkung. Jede Bewegung geschieht in der Zeit; die richtige Beurtheilung der Bewegung erfordert also, sowohl auf den durchlaufenen Weg als auf die verwandte Zeit Rücksicht zu nehmen.

§. 6. Erklärung. Die Bewegung ist gleichförmig, wenn der bewegte Punct in jedem Zeittheilchen gleiche Wege durchläuft; ungleichförmig im entgegengesetzten Falle.

§. 7. Erklärung. Die Bewegung ist beschleuniget, oder accelerirt, wenn in jedem folgenden gleichen Zeittheilchen ein größerer Weg durchlaufen wird, als in jedem vorhergehenden. Sie ist verzögert oder retardirt, wenn in jedem folgenden gleichen Zeittheilchen ein kürzerer Weg zurück gelegt wird, als in jedem vorhergehenden.

§. 8. Erklärung. Die Bewegung heißt stetig beschleuniget, oder stetig verzögert, wenn für alle, noch so kleine, gleiche Zeittheilchen diese Zunahme des durchlaufenen Weges im einen und seine Abnahme im andern Falle statt findet. Die Beschleunigung oder Verzögerung würde dagegen nicht nach dem Gesetze der Stetigkeit erfolgen, wenn die Bewegung eine bestimmte, wenn gleich kleine, Zeit durch gleichförmig bliebe, und dann plötzlich die Aenderung erfolgte, vermöge welcher im folgenden Zeittheilchen der durchlaufene Weg größer oder kleiner würde. Denn das Gesetz der Stetigkeit erfordert, daß alle Aenderungen durch unmerkliche Uebergänge geschehen.

§. 9. Erklärung. Die Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Punctes wird bestimmt durch die Vergleichung des durchlaufenen Raumes mit der dazu verwandten Zeit.

§. 10. Um die Zeit richtig zu bestimmen, bedarf es einer Zeit-Eintheilung, oder des Abzählens gleicher Zeittheilchen, deren eines als Einheit angenommen wird. Die Geschwindigkeit ist also dem in einem solchen Zeittheile durchlaufenen Raume proportional. Wir pflegen deshalb den Raum, welchen der Punct in einem Zeittheilchen durchläuft, als Maaß der Geschwindigkeit anzusehen.

Anmerkung. Unsre Zeit-Eintheilungen beruhen selbst auf Beobachtung gleichförmiger Bewegungen; dennoch ist es wohl erlaubt, die Zeit-Eintheilung als vorausgegeben anzusehen.

§. 11. Diese Bestimmung der Geschwindigkeit läßt sich nur bei gleichförmiger Bewegung mit Leichtigkeit ausführen. Bei ungleichförmiger Bewegung, wo die Geschwindigkeit sich nach dem Gesetze der Stetigkeit ändert, darf man, selbst während des kürzesten Zeittheilchens die Bewegung nicht als gleichförmig ansehen, und die Geschwindigkeit nicht aus unmittelbarer Vergleichung des durchlaufenen Weges mit der verflossenen Zeit beurtheilen.

Dennoch können wir uns in der Vorstellung die in irgend einem Momente statt findende Geschwindigkeit denken, als bestimmt durch den Raum, welchen der bewegte Punct während der Zeit-Einheit durchlaufen würde, wenn von diesem Momente an die Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung völlig aufhörte.

§. 12. Grundsatz. Jeder körperliche Punct beharret in dem Zustande von Bewegung oder Ruhe, in welchem er sich befindet, so lange, als nicht irgend eine Ursache eine Aenderung hierin hervorbringt.

§. 13. Ein ruhender Punct wird also nicht anfangen, sich zu bewegen, wenn nicht eine, dieses bewirkende Ursache vorhanden ist. Eben so wird ein mit bestimmter Geschwindigkeit nach bestimmter Richtung fortgehender Punct mit unveränderter Geschwindigkeit und nach derselben Richtung fortgehen, wenn nicht eine neue Einwirkung die Geschwindigkeit ändert, oder auch ihn von jener geraden Linie abzuweichen nöthiget.

§. 14. Erklärung. Wir nennen Kraft jede Einwirkung, welche in dem Zustande der Ruhe oder Bewegung eines Körpers oder Punctes Aenderungen hervorzubringen vermag.

§. 15. Erklärung. Die Richtung einer auf einen Punct wirkenden Kraft ist diejenige grade Linie, nach welcher dieser Punct anfangen würde, sich fort zu bewegen, wenn diese Kraft allein seine Bewegung bestimmte.

Wie diese Richtung erkannt wird, ergiebt sich nachher.

§. 16. Bemerkung. Es können zu gleicher Zeit auf denselben Punct verschiedene Kräfte nach verschiedenen Richtungen wirken, und diese können sich dann gegenseitig unterstützen oder auch einander hindern und zerstören.

§. 17. Erklärung. Wenn auf denselben Punct oder auch auf verschiedene Puncte eines Körpers Kräfte nach verschiedenen Richtungen wirken: so kann es sich ereignen, daß die eine genau die Wirkung der übrigen aufhebt, so daß nun kein Antrieb zur Bewegung entsteht. In diesem Falle halten die Kräfte einander im Gleichgewichte.

§. 18. Erklärung. Die Statik untersucht die Fälle, wo das Gleichgewicht besteht. Die Mechanik handelt von den Fällen, wo wirklich Bewegung erfolgt.

Die Gesetze des Gleichgewichts fester Körper.

Erster Abschnitt.
Von der Abmessung der im Gleichgewichte erhaltenen Kräfte.

§. 1. Erklärung. Feste Körper heißen hier die, deren Gestalt, ungeachtet der auf sie wirkenden Kräfte, keine Aenderung leidet.

Anmerkung. Sobald wir uns den Körper nur als einen Punct denken, wie hier zuerst geschieht, so kann von Veränderung der Gestalt nicht die Rede sein.

§. 2. Erklärung. Die Statik fester Körper untersucht alle Fälle, wo Kräfte, welche auf feste Körper wirken, einander im Gleichgewichte erhalten.

§. 3. Bemerkung. Wenn auf einen festen Körper mehrere Kräfte wirken, so können sie entweder alle unmittelbar auf denselben Punct wirken, oder sie sind an verschiedenen Puncten angebracht. Ferner kann entweder der feste Körper ganz frei der Einwirkung der Kräfte folgen, oder er stützt sich gegen einen unverrückbaren Widerstand, oder endlich es wird ein einziger Punct oder eine einzige grade Linie des Körpers unverrückbar, so daß er sich um diese drehen kann, fest gehalten. Im ersten Falle streben die Kräfte eine fortschiebende Bewegung des ganzen Körpers hervor zu bringen; diese wird im zweiten Falle durch den festen Widerstand gehindert, und im dritten Falle kann nur eine Drehung um den festgehaltenen Punct oder die festgehaltene Linie erfolgen.

§. 4. Grundsatz. Wenn auf einen Punct zwei gleiche Kräfte nach Richtungen wirken, welche einander grade entgegengesetzt sind: so bleibt dieser Punct in Ruhe; die Kräfte erhalten einander im Gleichgewichte.

§. 5. Zwei ungleiche Kräfte nach grade entgegen gesetzten Richtungen auf denselben Punct wirkend, erhalten einander nicht im Gleichgewichte; sondern der Punct wird nach der Richtung der stärkeren Kraft so zur Bewegung angetrieben, als ob eine Kraft, gleich dem Unterschiede jener Kräfte nach der Richtung der stärkeren angebracht wäre.

Wirken dagegen zwei oder mehrere Kräfte auf denselben Punct nach einerlei Richtung, so ist es so gut, als ob statt jener Kräfte nur eine, der Summe jener gleich, vorhanden wäre.

§. 6. Obgleich in diesen letzteren Fällen das Gleichgewicht durch die Kräfte selbst nicht erhalten wird, so würde doch der Punkt A, auf welchen die Kräfte wirken, in Ruhe bleiben, wenn er sich gegen einen unverrückbaren Körper CD stützte (Fig. 1.), der ihn hindert, nach der Richtung AB der Kräfte fortzugehen; eben so wird seine Bewegung gehindert, wenn er fest an einem unverrückbaren Körper EF befestiget ist, welcher (Fig. 2.) an der der Richtung AG der Kräfte entgegen gesetzten Seite sich befindet.

§. 7. Erklärung. Wenn ein unverrückbarer Körper sich an derjenigen Seite eines zur Bewegung angetriebenen Punctes befindet, wohin die Kräfte den Punct zu treiben streben; so leidet jener Körper einen Druck. Hingegen nennen wir es einen Zug, eine ziehende Kraft, wenn die Kräfte den Punct von einem unverrückbaren Widerstande weg zu reißen oder zu entfernen streben, der sich an der andern Seite, der Richtung der Kräfte gegenüber, befindet.

§. 8. Im letztern Falle könnte der Punct oder Körper A auch vermittelst eines Fadens HA (Fig. 3.) an dem festen Widerstande befestiget sein. Alsdann muß der

Faden stark genug sein, um nicht gedehnt zu werden oder zu reißen, und jeder Punct des Fadens leidet nun den Zug der Kräfte.

§. 9. Lehrsatz. Der Druck, welchen der Widerstand in A (Fig. 1.) leidet, oder der Zug, welchen der Punct H, so wie jeder Punct des Fadens HA leidet (Fig. 3.), ist der Summe der nach der Richtung AB (Fig. 1.) oder AG (Fig. 3.) wirkenden Kräfte gleich.

Da alles im Gleichgewichte bleibt, so erhellt dies aus §. 4.

§. 10. Grundsatz. Wenn mehrere Kräfte auf einen Körper wirken, und es sind zum Beispiel zwei derselben für sich im Gleichgewichte: so ist die gesammte Wirkung aller Kräfte gleich groß, jene zwei, sich im Gleichgewicht haltenden Kräfte, mögen wirksam bleiben oder ganz fehlen.

§. 11. Wenn also Kräfte irgendwo wirken, so ist es allemal erlaubt, außer diesen Kräften sich noch andre, die unter sich im Gleichgewichte sind, hinzu zu denken, oder in der That solche anzubringen. Die vereinigte Wirkung der Kräfte bleibt dennoch ungeändert.

§. 12. Erfahrung. Alle Körper auf der Erde zeigen ein Bestreben, gegen die Erde herab zu fallen, und fallen wirklich, wenn nicht ein fester Körper als Hinderniß im Wege steht, oder andre Kräfte jenem Bestreben entgegen wirken. Wo diese Hinderung statt findet, da bemerken wir einen Druck oder Zug, den der Körper gegen die Erde zu ausübt.

§. 13. Erklärung. Wir betrachten dieses Bestreben zu fallen, und den Druck, welchen die Körper auf einen dieses Bestreben hindernden Widerstand ausüben, als Wirkung einer Kraft, welcher alle Körper auf der Erde unterworfen sind. Diese Kraft heißt die Schwerkraft.

Anmerk. Was diese Kraft ihrem Wesen nach oder ihrem Ursprunge nach sei, untersuchen wir nicht, sondern betrachten hier bloß, wie bei allen Kräften, die Wirkungen der Schwere.

§. 14. Erklärung. Der Druck, welchen ein Körper vermöge seiner Schwere auf eine, sein Fallen gänzlich hindernde Ebne ausübt, heißt des Körpers Gewicht.

§. 15. Erfahrung. Völlig gleiche Körper üben jeder einen gleichen Druck oder Zug (§. 7.) auf die sie unterstützende Unterlage, oder auf den Faden, der sie trägt, aus.

§. 16. Zwei solche gleiche Körper vereinigt geben folglich den doppelten Druck, und hieraus erhellt, wie eine Abmessung des Druckes oder Zuges, welchen verschiedene Körper ausüben, wohl denkbar sei.

§. 17. Erfahrung. Die Richtungen der Schwere sind an Orten, die einander nahe liegen, parallel. Diese Richtungen sind allemal senkrecht auf die ebne Oberfläche stillstehender Gewässer, und wir müssen sie daher betrachten, als überall senkrecht auf die eigentliche Oberfläche der Erde. Da diese Oberfläche sehr nahe kugelförmig ist, so sind die Richtungen der Schwere eigentlich nicht parallel, sondern schneiden sich im Mittelpuncte der Erde; diese Neigung gegen einander ist aber wegen der beträchtlichen Größe der Erde in nahe liegenden Puncten nicht bemerkbar.

§. 18. Frei fallende Körper folgen dieser Richtung der Schwere. Körper, welche an Fäden frei herab hängen, ziehen die Fäden nach eben dieser Richtung herab.

§. 19. Erklärung. Diese Richtung heißt die verticale oder lothrechte; sie steht senkrecht auf der Horizontal-Ebne jedes Ortes, welche folglich parallel ist mit der die Kugelfläche an dem Puncte, wo die Verticallinie ihre Oberfläche trifft, berührenden Ebne (Geom. §. 563.)

§. 20. Lehrsatz. Wenn ein schwerer Körper durch eine der Richtung der Schwere grade entgegen wirkende Kraft im Gleichgewichte erhalten wird: so ist diese Kraft dem Gewichte des Körpers gleich. Beweis. §. 4.

Diese Kraft wird also eben den Druck oder Zug auszuüben im Stande sein, wie das Gewicht des Körpers.

§. 21. Bemerkung. Da es also möglich scheint, andre Kräfte mit Gewichten ins Gleichgewicht zu bringen und es ferner möglich ist, diese Gewichte selbst gegen einander abzumessen: so werden wir uns der Gewichte mit Vortheil bedienen können, um den Druck abzumessen, welchen Kräfte ausüben, die im Gleichgewichte erhalten werden.

§. 22. Wir betrachten daher die Gewichte, deren Einheit ein Pfund, Loth u. s. w. von gewissen bestimmten Massen hergenommen ist, als Maaß der im Gleichgewicht erhaltenen Kräfte selbst. Denn diese dürfen wir als ihren Wirkungen, das ist, als dem ausgeübten Drucke proportional ansehen.

§. 23. Erfahrung. Der Druck oder Zug, den eine im Gleichgewicht erhaltene Kraft ausübt, ist einerlei, sie mag, in welchem Puncte ihrer Richtungslinie man will, an einem festen Körper angebracht sein.

Wenn das Gewicht A (Fig. 1.) unmittelbar bei A auf der horizontalen Ebne ruhet: so leidet diese einen gewissen Druck. Ruhete eben das Gewicht A (Fig. 4.) auf einem vertical stehenden Stabe: so litte der Punct C (wenn wir auf das Gewicht des Stabes nicht sehen) eben den Druck, wofern, wie vorausgesetzt worden, die Richtung des Stabes mit der Richtungslinie der Schwere übereinstimmt.

Eben so wenn (Fig. 5.) AB ein fester Körper ist, auf welchen nach entgegen gesetzten Richtungen CD, EG, die in grader Linie liegen, gleiche Kräfte wirken: so halten diese Kräfte einander im Gleichgewichte, sie mögen an der Oberfläche in C und E, oder irgendwo in der Mitte in dem gemeinschaftlichen Angriffspuncte F angebracht sein.

§. 24. Erfahrung. Nicht alle Körper haben bei gleicher körperlicher Größe oder Volumen ein gleiches

Gewicht, sondern einige sind an sich schwerer, oder specifisch schwerer, als andre.

§. 25. Erklärung. Unter der Masse eines Körpers denken wir uns die Summe der körperlichen Theilchen, aus welchen er besteht. Wir pflegen diese Masse nach dem Gewichte zu schätzen, und nennen daher diejenigen Körper vorzüglich dicht, welche bei geringer Größe viel Gewicht haben, oder eine große specifische oder eigenthümliche Schwere besitzen.

§. 26. Ein Körper würde doppelt so dicht heißen, als ein anderer, wenn jener bei derselben Größe doppelt so viel körperliche Theilchen enthielte, als dieser; wir sagen daher, die Dichtigkeit zweier Körper sei in gradem Verhältnisse ihrer Gewichte, und im umgekehrten Verhältnisse ihrer geometrischen Größe.

§. 27. Anmerk. Diese Begriffe sind etwas dunkel, da wir uns nicht ganz über das verständigen können, was wir körperliche Theilchen (Atome gleichsam, die selbst keine leere Zwischenräume enthalten,) nennen sollen. Indeß machen wir von diesen Begriffen keinen Gebrauch, der der Gründlichkeit der Wissenschaft im Wege stünde.

Zweiter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte der Kräfte, die nach verschiedenen Richtungen auf einen bestimmten Punct wirken.

§. 28. Bemerkung. Wenn auf einen Punct A (Fig. 6.) zwei Kräfte wirken, deren Richtungen AB, AC einen Winkel mit einander machen: so kann das Gleichgewicht nicht bestehen, wofern nicht noch andere Kräfte auf diesen Punct wirken. Der bewegliche Punct A nämlich wird zwar weder der einen noch der andern Kraft ganz folgen können; aber indem die eine ihn von der genauen Richtung abzieht, nach welcher die andre ihn hintreibt, so wird er eine gewisse mittlere Richtung, die durch AD nur angedeutet werden mag, befolgen, und es verhält sich alles ganz so, als ob statt jener zwei, nach AB und AC wirkenden Kräfte, nur eine einzige nach AD wirkte. Die Richtung und Größe dieser Kraft müssen wir zu bestimmen suchen.

Das Gleichgewicht könnte also bei fortdauernder Wirksamkeit der Kraft P nach AB und der Kraft Q nach AC nur dann statt finden, wenn noch eine dritte Kraft R nach derjenigen Richtung AE angebracht wäre, welche der AD grade entgegen gesetzt ist, und R so groß wäre, als es die nach AD gerichtete gesammte Wirkung der Kräfte, P, Q fordert. Statt dieser Kraft R würde auch ein widerstehender fester Körper hinreichen, der, den Punct A stützend, die Bewegung nach AD hinderte. Dieser würde einen Druck = R leiden (§. 9.).

§. 29. Erklärung. Diese Richtung AD (Fig. 6.) heißt die mittlere Richtung der nach AB, AC wirkenden Kräfte P, Q; und die Kraft oder der Druck, welchen sie nach dieser Richtung AD bewirken, heißt die aus ihnen entstehende Mittelkraft, die nämlich aus den Seitenkräften P nach AB, Q nach AC entspringt.

Die mittlere Kraft heißt auch die aus den Seitenkräften zusammengesetzte; und dagegen betrachtet man die mittlere Kraft, wenn sie als die ursprüngliche angesehen wird, als nach bestimmten Richtungen zerlegt in die Seitenkräfte.

§. 30. Erklärung. Kräfte, welche eben das bewirken, was eine oder mehrere andre ausrichten, heißen dieser gleichgeltend, gleichwirkend, äquivalent, äquipollent.

§. 31. Grundsatz. Wenn zwei gleiche Kräfte nach Richtungen wirken, die einen Winkel mit einander machen: so trifft die Richtung der Mittelkraft mit der Linie zusammen, welche diesen Winkel halbirt.

§. 32. Bemerkung. Obgleich wir noch nicht im

Stande sind, die Größe und Richtung der Mittelkraft aus der Richtung und Stärke der Seitenkräfte zu finden: so erhellt doch, daß hier sechs verschiedene Stücke, drei Kräfte nämlich und drei Winkel vorkommen, die gegenseitig von einander abhängen. Wir werden daher zuerst untersuchen, welche dieser Stücke gegeben sein müssen, um die übrigen dadurch als sicher bestimmbar ansehen zu dürfen.

Jene sechs Stücke sind: die beiden Seitenkräfte P, Q, die Mittelkraft R, der Winkel, den die Richtung der letztern mit der Richtung der erstern einschließt = a, der Winkel, den R mit Q macht = b; der Winkel zwischen P und Q, = a + b.

§. 33. Lehrsatz. Wenn die Seitenkräfte P nach AB, Q nach AC wirkend, gegeben sind, nebst dem Winkel, den ihre Richtungslinien einschließen BAC = a + b: so ist hiedurch Richtung und Größe der Mittelkraft völlig bestimmt (Fig. 6.).

Beweis. Wenn BA nach F, CA nach G verlängert wird, und es wirken Kräfte, = P nach AB, = Q nach AC, = P nach AF, = Q nach AG: so ließe sich vielleicht denken, AD sei die Richtung der aus den beiden ersten entspringenden Mittelkraft, AH aber die Richtung der Mittelkraft, welche die Wirkung der beiden letzteren darstellt. Wäre hier nicht die Richtung der Mittelkraft aus den gegebenen, für die beiden ersten Kräfte und für die beiden letzten Kräfte ganz gleichen Umständen fest bestimmt: so könnte der Winkel FAH ungleich BAD sein. Nun aber erhalten P nach AB und P nach AF, und eben so Q nach AC und Q nach AG einander im Gleichgewichte, und diese vier Kräfte bringen, vereint wirkend, gar keine Wirkung hervor; die Mittelkraft nach AD soll aber eben das bewirken, wie die nach AB, AC gerichteten Kräfte, die Mittelkraft nach AH soll eben das bewirken, wie die nach AF, AG gerichteten Kräfte; beide Mittelkräfte zugleich wirkend müssen sich also eben so wie jene vier Kräfte einander ganz aufheben. Aber dieses ist (§. 20.) nur möglich, wenn AD, AH einander grade entgegen gesetzt sind, und die Mittelkräfte einander gleich.

§. 34. Lehrsatz. Wenn die Mittelkraft = R, nebst der einen Seitenkraft = P und dem Winkel = a bestimmt ist, unter welchem sie gegen einander geneigt wirken sollen: so ist auch die Größe = Q und Richtung der andern Seitenkraft bestimmt, welche mit P vereint die Mittelkraft = R nach der bestimmten Richtung hervorbringt.

Beweis. Wäre die Seitenkraft = Q ihrer Größe oder Richtung nach unbestimmt: so könnte (Fig. 7.) R, nach AD wirkend, die Mittelkraft sein aus den Kräften P nach AB und Q nach AC; und zugleich könnte, wenn man DA nach AE, BA nach AF verlängert, GAE aber ungleich DAC nimmt, R nach AE die Mittelkraft sein aus P nach AF und Q + x nach AG.

Hier heben R nach AD und R nach AE einander auf; die ihnen äquipollenten Kräfte P nach AB, Q nach AC, P nach AF, Q + x nach AG müssen sich also gleichfalls einander aufheben; und da P nach AB die P nach AF völlig im Gleichgewichte erhält, so muß auch Q nach AC der Q + x nach AG gleich und entgegen gesetzt sein. Es ist also AC der AG grade entgegen gesetzt, DAC = EAG und Q + x = Q.

§. 35. Lehrsatz. Wenn eine Kraft = R, nach AD wirkend, nach bestimmten Richtungen AB, AC, welche mit der Richtung jener gegebene Winkel BAD = a und CAD = b machen, in Seitenkräfte zerlegt werden soll: so ist die Größe beider Seitenkräfte völlig bestimmt (Fig. 8.).

Beweis. Man verlängere AD nach E, AB nach F, AC nach G, und nehme an, es wirke nach AE eben die Kraft = R, welche nach AD wirkt. Ließe sich diese Kraft = R bei gleichbleibenden Richtungswinkeln der Seitenkräfte, das eine Mal in Kräfte, P nach AB, Q nach AC, und das andere Mal in die Kräfte P + x nach AF, Q $\pm$ y nach AG zerlegen: so müßten, da die Kräfte R nach AD und R nach AE einander aufheben, auch die vier Kräfte P nach AB, Q nach AC, P + x nach AF, Q $\pm$ y nach AG sich gegenseitig zerstören. Aber P und P + x wirken einander grade entgegen, und gelten daher einer Kraft = x nach AF gleich; Q und Q $\pm$ y wirken eben so einander grade entgegen und gelten einer Kraft = $\pm$ y nach AG, das ist, entweder einer Kraft = + y nach AG oder einer Kraft = + y nach AC gleich. Diese beiden Kräfte x und y sind unter einem Winkel gegen einander geneigt, und können einander nicht aufheben (§. 28.), sie müssen daher selbst = 0 sein, oder die Zerlegung ist nur auf eine einzige bestimmte Weise möglich.

§. 36. Lehrsatz. Es ist die Größe der einen Seitenkraft = P bestimmt, nebst dem Winkel BAD = a, unter welchem die Mittelkraft (Fig. 8.) und dem Winkel BAC = a + b, unter welchem die andre Seitenkraft wirken soll; dann ist die Größe der Mittelkraft = R und der andern Seitenkraft = Q völlig bestimmt.

Beweis. Nach AB wirke die Kraft = P und man bringe eine ihr gleiche nach entgegesetzter Richtung AF an. Zugleich nehme man an, daß bei gleich bleibenden Richtungswinkeln BAD = FAE und BAC = FAG, das eine Mal aus P nach AB und Q nach AC die Mittelkraft = R nach AD entstehen könne, das andre Mal aus P nach AF und Q + x nach AG die Mittelkraft = R + y nach AE hervorgehen. Hier sollen die Mittelkräfte R und R + y jede für sich dasselbe, was die zugehörigen Seitenkräfte, bewirken; die Mittelkräfte vereinigt geben eine Kraft = y nach AE, und eben diese müßte aus den vier Seitenkräften entspringen. Aber da P nach AB und P nach AF einander aufheben, und Q nach AC der Q + x nach AG grade entgegen wirkt, so ist eine Kraft = x nach AG der gesammte Erfolg dieser vier Kräfte; diese müßte mit y nach AE ganz einerlei sein, welches, da beide in verschiedenen Richtungen wirken, ganz unmöglich ist, wofern nicht $x = z = o$ ist.

§. 37. Lehrsatz. Wenn die unter gegebnen Neigungswinkel $BAC = c$ wirkenden Seitenkräfte P und Q die Mittelkraft $= R$ hervorbringen (Fig. 9.): so ist es nicht möglich, daß aus eben den Seitenkräften P und Q dieselbe Mittelkraft $= R$ entspringe, wenn die Richtungen jener unter einem andern Winkel gegen einander geneigt sind.

Beweis. Es sei (Fig. 9.) die Kraft $= P$ nach AB, die Kraft $= Q$ nach AC an dem Puncte A angebracht und aus ihnen entspringe die Mittelkraft $= R$ nach AD. Verlängere ich AB nach F, und lasse eine Kraft $= P$ nach AF wirken, eine Kraft $= Q$ aber unter dem Winkel $FAG \gtrless BAC$ gegen sie geneigt, so kann nicht die Mittelkraft aus diesen $= R$ sein.

Erster Fall (Fig. 9.). Es sei $FAG < BAC$. Da die Kräfte P nach AB und P nach AF sich zerstören, so ist es so gut, als ob nur Q nach AC und Q nach AG wirkten. Diese bringen (§. 31.) eine mittlere Kraft hervor, deren Richtung den Winkel CAG halbirt, und folglich würde die Wirkung aller vier Kräfte, P nach AB, Q nach AC, P nach AF, Q nach AG durch eine nach AI wirkende Kraft dargestellt, wenn $IAG = IAC$. Aber eben jener vier Kräfte Wirkung soll durch R nach AD und R nach AE dargestellt werden, und diese geben eine Mittelkraft nach AK, wenn $KAE = KAD$. Sollte nun in beiden angenommenen Fällen die Mittelkraft $= R$ sein: so müßten AK und AI zusammenfallen. Aber das ist unmöglich; denn schon AL, welche EAC halbirt, wird um $\frac{1}{2}$ GAE gegen AK geneigt sein, AI wird also um $\frac{1}{2}\,CAD + \frac{1}{2}\,EAG$ von ihr abweichen.

Zweiter Fall. Wäre $FAG > BAC$, so würde (Fig. 10.) der ganze vorige Beweis gelten, nur hätten jetzt die Richtungen der Mittelkräfte eine andre Lage, aber immer würde $IAK = \frac{1}{2}\,EAG + \frac{1}{2}\,CAD$ sein.

§. 38. Lehrsatz. Wenn die Größe der Seitenkräfte P und Q bestimmt ist, und zugleich die Größe der Mittelkraft R, welche ihnen gleichgeltend sein soll: so sind auch die Winkel nothwendig bestimmt, unter welchen sie gegen einander geneigt wirken müssen.

Beweis. Wofern in einem Falle die Seitenkräfte P, Q wirklich eine Mittelkraft = R hervorbringen, wenn sie unter dem Winkel BAC (Fig. 9.) gegen einander geneigt wirken: so ist es nicht möglich, daß eben jene Wirkung bei einem andern Neigungswinkel statt finde, (§. 37.); also sind auch die Winkel, unter welchen die Richtung der R gegen P und Q geneigt sein muß, fest bestimmt (§. 33.).

§. 39. Bemerkung. In den betrachteten fünf Fällen reichen drei gegebne Stücke hin, um die übrigen drei, als nothwendig daran geknüpft, zu bestimmen. Um zu sehen, ob in allen Fällen drei gegebene Stücke hinreichen, wollen wir alle Fälle, wo drei jener Stücke gegeben sind, hier zusammen stellen und die noch nicht betrachteten einer Prüfung unterwerfen.

Unter den drei Kräften P, Q, R und Winkeln a, b, a + b, können sein:

	gegeben		gesucht
1.	P, Q, R	. . .	a, b, a + b;
2.	P, a, R	. . .	Q, b, a + b;
3.	P, b, R	. . .	Q, a, a + b;
4.	P, a + b, R	. .	Q, a, b;
5.	a, b, R	. . .	P, Q, a + b;
6.	P, Q, a	. . .	R, b, a + b;
7.	P, Q, (a + b)	. .	R, b, a;
8.	P, a, b	. . .	R, Q, a + b.

Von diesen Fällen ist der 1ste in §. 38;
der 2te in §. 34; der 5te in §. 35;
der 7te in §. 33; der 8te in §. 36, betrachtet;
der 3te, 4te, 6te Fall müssen noch näher untersucht werden.

§. 40. Lehrsatz. Wenn die Größe der Mittelkraft $= R$, und der einen Seitenkraft $= P$ bestimmt ist, und es ist zugleich der Winkel $= b$ bekannt, unter welchem die andre Seitenkraft gegen die Mittelkraft geneigt wirken soll: so ist diese zweite Seitenkraft Q und die Richtung der ersteren dadurch noch nicht ganz fest bestimmt. (Fig. 11.)

Beweis. Man lasse zwei gleiche Kräfte $= R$ nach entgegen gesetzten Richtungen AD, AE wirken, und nehme die Winkel $EAG = DAC$, um die Richtung der unbestimmten Seitenkraft anzugeben. Ist es nun möglich, R einmal in die Seitenkräfte P unter dem Winkel $= a$, $= BAD$ wirkend, und Q unter dem Winkel $CAD = b$ wirkend, zu zerlegen, das andre Mal in Seitenkräfte P unter dem Winkel $FAE = a \pm x$, und $Q + z$ unter dem Winkel $GAE = b$: so müssen die so angebrachten vier Kräfte, P, P, Q $+ z$ einander im Gleichgewichte erhalten, weil dies bei den ihnen gleichgeltenden Mittelkräften der Fall ist. Die Kräfte Q und $Q + z$ wirken einander grade entgegen, und gelten einer Kraft $= z$ nach AG gleich; die Kräfte P nach AB und P nach AF geben eine nach AI wirkende Mittelkraft, wenn $IAB = IAF$ ist, und diese kann mit der nach AG wirkenden z im Gleichgewichte sein, wenn AI auf AC fällt.

Damit dies geschehe, muß $BAC = CAF$ sein, also $a + b = 180° - (a \pm x) - b$; oder $a + b \pm x = 180° - a - b$. Es ist also möglich, daß P und Q unter den Neigungswinkeln a, b wirkend die Mittelkraft $= R$ hervorbringen, und daß auch eben die Mittelkraft aus den Seitenkräften P und Q $+ z$ entspringe, wenn die letztere unter dem Winkel $= b$, die erstere aber unter dem Winkel $= 180° - a - 2b$ gegen die Mittelkraft geneigt wirkt. Aber nur diese zwei Fälle sind für die Richtung der Kraft P möglich.

§. 41. Dieser doppelte Fall kann nur vorkommen, wenn $a + 2b < 180°$.

§. 42. Lehrsatz. Wenn die Mittelkraft = R nebst einer Seitenkraft = P bestimmt ist, und es ist der Winkel = a + b gegeben, unter welchem die andre Seitenkraft gegen P geneigt wirken soll: so ist die letztere Seitenkraft = Q, und die Winkel a und b, unter welchen die Richtung der Mittelkraft gegen jede Seitenkraft geneigt ist, nicht völlig bestimmt.

Beweis. Man lasse (Fig. 12.) zwei gleiche Kräfte = P nach Richtungen, einander grade entgegen gesetzt AB, AF wirken. Wenn nun nach den, gleichfalls einander grade entgegen gesetzten Richtungen AC, AG, Kräfte = Q nach AC, = Q + x nach AG angebracht sind: so nehmen wir an, aus P und Q entspringe nach AD die Mittelkraft = R, und es sei BAD = a; aus P und Q + x aber entspringe eine gleiche Mittelkraft = R nach einer Richtung, die nicht der AD grade entgegengesetzt, sondern wo FAE = a + z ist.

Die vier Kräfte P, P, Q, Q + x sind einer Kraft = x nach AG gleichwirkend; sollen also die Kräfte R, R eben die Wirkung hervorbringen: so muß DAE < 2 rechte Winkel und EAG = DAG sein, damit die Richtung der aus R, R entspringenden Mittelkraft auf AG falle. Folglich wird GAE = b — z = GAD = 180° — b.

Auch hier sind also zwei Fälle möglich, indem dieselbe Mittelkraft = R hervorgebracht werden kann, sowohl aus den Seitenkräften P unter dem Winkel a, Q unter dem Winkel b, als aus den Seitenkräften P unter dem Winkel a + 2 b — 180° und Q unter dem Winkel 180° — b wirkend, deren Richtungslinien in beiden Fällen den Winkel = a + b einschließen.

§. 43. Die Möglichkeit eines doppelten Falles tritt nur ein, wenn a + 2 b > 180°.

§. 44. Lehrsatz. Wenn die Seitenkräfte P und Q bestimmt sind, nebst dem Winkel = a, welchen die erstere mit der Mittelkraft einschließen soll: so sind für die Größe der Mittelkraft und für ihren Neigungswinkel gegen die Richtung der zweiten Seitenkraft Q höchstens zwei Werthe möglich (Fig. 13.).

Beweis. Ist es möglich, aus den Seitenkräften P, Q, das eine Mal die Mittelkraft $= R$, das andre Mal die Mittelkraft $= R + z$ hervorzubringen, indem man zuerst P unter den Winkel $= a$, Q unter dem Winkel $= b$ gegen die Mittelkraft geneigt wirken läßt, im zweiten Falle aber, jenen Winkel $= a$, diesen $= b \pm x$ nimmt: so bringe man die Kräfte P, P nach entgegen gesetzten Richtungen AB, AF an, nehme $BAD = FAE = a$, $DAC = b$, $EAG = b \pm x$, und stelle sich vor, daß nach AC, AG gleiche Kräfte Q wirken, und daß R nach AD die Mittelkraft aus P nach AB und Q nach AC, dagegen $R + z$ nach AE wirkend die Mittelkraft aus P nach AF und Q nach AG sei. Dann sollen die vier Kräfte P, P, Q, Q eben das wie R und $R + z$ ausrichten. Die letztern, einander grade entgegen wirkend, bringen die Wirkung $= z$ nach AE hervor, und da P, P sich aufheben, Q, Q aber eine Mittelkraft hervorbringen, deren Richtung den Winkel GAC halbirt: so muß diese Richtung mit AE zusammen fallen, wenn jene vier Kräfte den beiden Mittelkräften gleichwirkend sein sollen.

Soll also Q nicht unter dem Winkel $= b$ gegen die Mittelkraft geneigt sein, so muß ihr Richtungswinkel $GAE = EAC = 180° - b$, das ist $b \pm x = 180 - b$ werden, und ein dritter Werth ist unter den vorausgesetzten Bestimmungen nicht möglich.

§. 45. Dieser doppelte Fall findet nur statt, wenn $a < b$; denn wenn $GAE = 180 - b$ ist: so wird $GAF = 180° - b + a$, welches größer als $180°$ wäre, wenn $a > b$.

§. 46. Bemerkung. Alle hier untersuchten Fälle, wo drei Größen gegeben sind, lassen sich unter folgende Regel zusammen fassen. Alle sechs vorkommenden Stücke sind völlig bestimmt, wenn entweder alle drei Kräfte gegeben sind, oder zwei Kräfte mit dem eingeschlossenen

Winkel, oder eine Kraft mit beiden Richtungswinkeln; dagegen ist eine doppelte Bestimmung der übrigen Stücke möglich, wenn zwei Kräfte nebst einem, nicht von ihnen eingeschlossenen Richtungswinkel gegeben sind.

§. 47. Diese Bestimmungen treffen ganz mit denen überein, die in der Geometrie für das Dreieck vorkommen, wo auch 1. zwei gegebene Winkel den dritten bestimmen; 2. alle drei Seiten (so wie hier alle drei Kräfte) die Winkel strenge bestimmen; 3. zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel (so wie hier zwei Kräfte mit dem eingeschlossenen Winkel) alles übrige angeben; 4. eine Seite mit zwei Winkeln (hier eine Kraft mit zwei Richtungswinkeln der übrigen Kräfte) die übrigen Stücke bestimmen; 5. zwei Seiten mit einem nicht eingeschlossenen Winkel (so wie hier zwei Kräfte mit dem einen, nicht eingeschlossenen Winkel) eine doppelte Bestimmung der übrigen Stücke zulassen. Diese Vergleichung wird sich auch in der Folge als wichtig zeigen.

§. 48. Lehrsatz. Wenn das Verhältniß der beiden Seitenkräfte zu einander bestimmt ist, und der Winkel, welchen ihre Richtungen einschließen: so ist die Richtung der Mittelkraft, und das Verhältniß derselben zu jeder der Seitenkräfte völlig bestimmt (Fig. 6.).

Beweis. Den Seitenkräften, P und Q, deren Richtungen AB, AC einen bestimmten Winkel einschließen, entspricht (§. 33.) eine, nach bestimmter Richtung AD wirkende Mittelkraft R. Denken wir uns also eine zweite Kraft $= P$ gleichfalls nach AB, und eine zweite Kraft $= Q$, gleichfalls nach AC wirkend: so bringen auch sie eine nach AD wirkende Mittelkraft $= R$ hervor, und so entspringt aus der Kraft $= 2\,P$ nach AB, und der Kraft $= 2\,Q$ nach AC die Mittelkraft $= 2\,R$ nach AD, und Kräfte $= n.P$ und $= n.Q$ nach jenen Richtungen wirkend, bringen die Mittelkraft $= n.R$ nach AD hervor. Dieses ist richtig für jeden Werth von n.

§. 49. Lehrsatz. Aus den gegebenen Richtungswinkeln zweier Seitenkräfte gegen die aus ihnen entstehende Mittelkraft ist das Verhältniß der drei Kräfte zu einander völlig bestimmt.

Beweis. Geben bei jenen bestimmten Richtungswinkeln einmal die Seitenkräfte P, Q die Mittelkraft R: so geben auch die Seitenkräfte n P, n Q, die Mittelkraft n . R; und wenn umgekehrt die Mittelkraft = n R sein soll, so können die Seitenkräfte keine andern Werthe als n P, n Q haben (§. 35.).

§. 50. Bemerkung. Es kömmt also hier zunächst nur auf das Verhältniß der Kräfte zu einander an, und es ist daher erlaubt, sie als Zahlen zu betrachten, oder durch Linien darzustellen, welche das gehörige Verhältniß zu einander haben.

§. 51. Wenn wir in der Folge Kräfte in einander zu multipliciren verlangen, so heißt dieses nur, die Zahlen in einander multipliciren, durch welche diese Kräfte in Vergleichung gegen eine bestimmte Einheit ausgedrückt sind (vergl. Geom. §. 199.).

§. 52. Lehrsatz. Wenn der Winkel, welchen die Richtungslinien zweier Seitenkräfte einschließen, ein rechter ist: so findet man das Quadrat der Mittelkraft gleich der Summe der Quadrate der beiden Seitenkräfte (Fig. 14.).

Beweis. Es wirke die Kraft = P nach AB, und die Kraft = Q nach einer auf AB senkrechten Richtung AC; die noch unbekannte Richtung der Mittelkraft R werde durch AD vorgestellt.

Man kann Q betrachten, als entstehend aus zwei Seitenkräften, deren eine = T nach AD, die andre = S senkrecht auf AD nach AF wirkt. Da die Richtungswinkel dieser Seitenkräfte gegen die Mittelkraft Q eben so sind, wie die Richtungswinkel der P und Q gegen R: so ist (§. 49.) $P : R = S : Q$;

und $Q : R = T : Q$;

also $S = \frac{PQ}{R}$ und $T = \frac{Q^2}{R}$.

Eben so läßt sich P betrachten, als entstehend aus zwei Seitenkräften V nach AD und U nach AE, senkrecht auf AD; und auch hier ist wegen der Gleichheit der Richtungswinkel BAE = CAD,

$$P : R = V : P \text{ und } Q : R = U : P,$$

$$\text{also } U = \frac{PQ}{R} \text{ und } V = \frac{P^2}{R}.$$

Die Kräfte P und Q sollen eben das bewirken, wie die Mittelkraft R; die Kräfte P und Q sollen aber auch den vier Kräften S, T, U, V, gleichgeltend sein. Da nun U = S und ihr grade entgegen gesetzt ist, so zerstören diese einander, und es muß R = V + T sein, weil sie nach einerlei Richtung wirken. Es ist also

$$R = \frac{P^2 + Q^2}{R} \text{ oder } R^2 = P^2 + Q^2.$$

§. 53. Für Seitenkräfte, die unter einem rechten Winkel gegen einander geneigt sind, verhält sich also die Mittelkraft zu jeder der Seitenkräfte, wie die Hypotenuse zu den Catheten desjenigen rechtwinklichten Dreieckes, dessen Catheten den Seitenkräften proportionel sind.

§. 54. Bemerkung. Auch in andern Fällen läßt sich das Verhältniß der drei Kräfte durch die drei Seiten eines Dreieckes ausdrücken, dessen einer Winkel den von beiden Seitenkräften eingeschlossenen Richtungswinkel zu zwei rechten ergänzt. Folgende Beispiele zeigen dies.

Erstes Beispiel. Wenn die Richtung der Seitenkräfte P, Q unter einem halbrechten Winkel gegen einander geneigt ist: so wird die Mittelkraft dargestellt durch die dritte Seite eines Dreieckes, in welchem die beiden übrigen Seiten die Kräfte P, Q darstellen und einen Winkel von $135° = 2R - \frac{1}{2}R$ einschließen.

Es sei (Fig. 15.) BAC = 45°, und es wirkt nach AB die Kraft = P, nach AC die Kraft = Q; AD deute die Richtung der Mittelkraft an. Man nehme CAF = BAD, BAG = DAC, welches FAG = 90° giebt.

Satt Q könnten die Kräfte S nach AF, T nach AD wirken; statt P könnten die Kräfte U nach AG, V nach AD wirken: so wird (§. 49.)

$$S = U = \frac{PQ}{R};\ T = \frac{Q^2}{R};\ V = \frac{P^2}{R}.$$

Die Mittelkraft R soll eben das bewirken, wie P und Q, oder wie S, T, U, V. Da nun T und V nach der Richtung AD selbst wirken, die gleichen Kräfte S und U aber eine Mittelkraft $= W$ nach der ihren Richtungswinkel halbirenden Richtung AD hervorbringen: so ist $R = T + V + W$, und $W^2 = S^2 + U^2$, weil S und U unter einem rechten Winkel gegen einander geneigt sind (§. 52.),

$$\text{also } W = \frac{PQ}{R}\sqrt{2} \text{ und } R = \frac{P^2 + Q^2 + PQ.\sqrt{2}}{R},$$

oder $R^2 = P^2 + Q^2 + PQ.\sqrt{2}$.

Eben dieses ist der Ausdruck für die dritte Seite R eines Dreiecks, in welchem die Seiten P, Q den Winkel $= 135°$ einschließen; denn da ist (Trigon. §. 65.) $R^2 = P^2 + Q^2 - 2.PQ.\mathrm{Cos}.135° = P^2 + Q^2 + 2.PQ\ \mathrm{Cos}\ 45°$
$= P^2 + Q^2 + P.Q.\sqrt{2}$.

Zweites Beispiel. Die Richtungen der Kräfte P, Q sind unter einem Winkel von $22\frac{1}{2}$ Gr. gegen einander geneigt; dann wird die Mittelkraft R durch die dritte Seite eines Dreieckes dargestellt, dessen beide Seiten P, Q den Winkel $= 180° - 22\frac{1}{2}° = 157\frac{1}{2}°$ einschließen (Fig. 16.).

BAC sei $= \frac{1}{4}$ des rechten Winkels, P wirke nach AB, Q nach AC, AD stelle die Richtung der Mittelkraft R vor. Nimmt man BAG = DAC und CAF = DAB: so ist GAF $= 45°$. Die Kraft P kann zerlegt werden in Kräfte S nach AG, T nach AD, und eben so kann Q zerlegt werden in Kräfte U nach AF, V nach AD. Dann ist $S = U = \frac{P.Q}{R};\ T = \frac{P^2}{R};\ V = \frac{Q^2}{R}$. Die gleichen, unter 45° gegen einander geneigten Kräfte

U geben eine Mittelkraft $= W$ nach der Richtung S, AD, die ihren Richtungswinkel halbirt, und W ist, wie eben gezeigt, $W = \sqrt{(S^2 + U^2 + SU.\sqrt{2})}$ das ist $W^2 = \frac{P^2 . Q^2}{R^2}(2 + \sqrt{2})$.

Es wird also $R = T + V + W$
$$= \frac{P^2 + Q^2 + PQ.\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{R},$$
oder $R^2 = P^2 + Q^2 + PQ.\sqrt{(2+\sqrt{2})}$.

Im Dreiecke aber, dessen Seiten P, Q den Winkel $= 157\frac{1}{2}$ Grad einschließen, ist die dritte Seite $= R$
$$= \sqrt{(P^2 + Q^2 - 2\,PQ.\,\mathrm{Cos}.\,157\tfrac{1}{2}^\circ)};$$
$$= \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2\,PQ\,\mathrm{Cos}.\,22\tfrac{1}{2}^\circ)};$$
oder da (Trig. §. 51.) . $\mathrm{Cos}.\,\frac{1}{2}.\,45^\circ = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$,
$$\mathrm{Cos}.\,22\tfrac{1}{2}^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})},$$
$$R^2 = P^2 + Q^2 + PQ.\sqrt{(2+\sqrt{2})}.$$
Etwas ähnliches ließe sich in mehrern Fällen beweisen.

§. 55. Bemerkung. In den hier betrachteten Fällen läßt sich die Größe der Mittelkraft nach folgender Anleitung finden: Man nehme (Fig. 17.) auf den Richtungen AB, AC der Kräfte P, Q, die Stücke AB : AC $= P : Q$; vollende das Parallelogramm ABDC, und ziehe von A aus die Diagonale AD: so ist AD : AB $= R : P$. Hier bilden AB, AC mit einander den Winkel, welchen die Richtungen der Seitenkräfte einschließen, und es ist wohl einiger Grund zu der Vermuthung, daß auch AD die richtige Richtung der Mittelkraft sein werde. Diese Vermuthung erhält wenigstens dadurch einige Bestätigung, daß für $P = Q$, die Diagonale die wahre Richtung der Mittelkraft ist.

§. 56. Gäbe diese Zeichnung wirklich die wahre Richtung: so wäre bei senkrecht auf einander wirkenden Seitenkräften (Fig. 14.) $P = R.\,\mathrm{Cos}\,BAD$, und $Q = R$

Cos. CAD = R. Sin BAD, das würde heißen, in diesem Falle fände man jede Seitenkraft, wenn man die Mittelkraft mit dem Cosinus des Winkels multiplicirte, welchen sie mit der Mittelkraft einschließt. Wir wollen sehen, ob diese Zerlegung der Mittelkraft sich als die richtige zeigen wird.

§. 57. Lehrsatz. Wenn es möglich ist, die Kraft R in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte so zu zerlegen, daß die eine $= P = R \operatorname{Cos} \varphi$ unter dem Winkel $= \varphi$, die andre $= Q = R . \operatorname{Sin} \varphi$, unter dem Winkel $= 90^\circ - \varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt ist: so ist es auch möglich, R in Seitenkräfte $S = R . \operatorname{Cos} . 2 \varphi$, unter dem Winkel $= 2 \varphi$, und $T = R . \operatorname{Sin} . 2 \varphi$. unter dem Winkel $= 90^\circ - 2 \varphi$ gegen R geneigt, zu zerlegen.

Beweis. In Fig. 18. sei R, nach AD wirkend, in Seitenkräfte P, Q zerlegt, deren Richtungen mit AD die Winkel $BAD = \varphi$, $CAD = 90^\circ - \varphi$ bilden. Es sei $P = R \operatorname{Cos}. \varphi$ nach AB, und $Q = R . \operatorname{Sin} \varphi$ nach AC angebracht.

Ist nun $BAE = CAF = \varphi$: so kann man P betrachten, als aus Kräften S nach AF und T nach AE zusammen gesetzt, und es ist (§. 49.)

$$S : P = Q : R \text{ und}$$

$$T : P = P : R; \text{ oder}$$

$$S = \frac{P . Q}{R} = R . \operatorname{Sin} \varphi . \operatorname{Cos} \varphi, \text{ nach AF,}$$

$$T = \frac{P^2}{R} = R . \operatorname{Cos}^2 \varphi, \text{ nach AE.}$$

Eben so kann man Q als eine aus den Kräften U nach AG und V nach AF entstandene Mittelkraft ansehen, wo nämlich $CAF = \varphi$, $CAG = 90^\circ - \varphi$ ist, und es wird $U = \frac{Q^2}{R} = R \operatorname{Sin}^2 \varphi$, nach AG,

$$\text{und } V = \frac{PQ}{R} = R \operatorname{Sin} . \varphi . \operatorname{Cos} . \varphi, \text{ nach AF.}$$

Da die vier Kräfte S, T, U, V eben das bewirken, wie P und Q: so ist ihre gesammte Wirkung der Mittelkraft R äquivalent, und man kann R in die Kräfte T—U nach AE und S+V nach AF zerlegen. Das ergiebt die eine Seitenkraft $= T - U = R (\mathrm{Cos}^2 \varphi - \mathrm{Sin}.^2 \varphi)$ $= R . \mathrm{Cos}\, 2\varphi$, nach AE unter dem Winkel $= 2\varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt, und die andre Seitenkraft $= S + V = 2 . R . \mathrm{Sin}\, \varphi . \mathrm{Cos}\, \varphi = R . \mathrm{Sin} . 2\varphi$, nach AF unter dem Winkel $= 90° - 2\varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt. Diese Zerlegung ist allemal richtig, wenn die im Lehrsatze vorausgesetzte es ist.

§. 58. Es ist nicht ganz überflüssig, zu bemerken, daß sich auf eben dem Wege beweisen ließe, die Voraussetzung $P = R . \mathrm{Cos}\, (\varphi - x)$ als eine unter dem Winkel $= \varphi$ und die (§. 52.) nothwendig daran geknüpfte $Q = R . \mathrm{Sin}\, (\varphi - x)$ als eine unter dem Winkel $= 90° - \varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt wirkende Seitenkraft, führe zu Seitenkräften $= R . \mathrm{Cos}\, (2\varphi - 2x)$ unter dem Winkel $= 2\varphi$, und $= R . \mathrm{Sin}\, (2\varphi - 2x)$ unter dem Winkel $= 90° - 2\varphi$.

Es ergiebt sich aus den folgenden Betrachtungen, daß nicht diese Formeln richtig sind, sondern die des vorigen §.

§. 59. Lehrsatz. Wenn es möglich ist (Fig. 19.), die Mittelkraft $= R$ in Seitenkräfte $= P = R\, \mathrm{Cos}\, \varphi$ nach AB, und $Q = R . \mathrm{Sin}\, \varphi$ nach AC zu zerlegen, so daß AB mit der Richtung der Mittelkraft den Winkel $BAD = \varphi$, AC mit derselben den Winkel $CAD = 90° - \varphi$ einschließe: so ist es auch möglich, eben die Mittelkraft $= R$ in zwei Seitenkräfte $X = R . \mathrm{Cos} . n\varphi$ unter dem Winkel $= n . \varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt, und $Z = R . \mathrm{Sin}\, n\varphi$ unter dem Winkel $= 90° - n\varphi$ gegen sie geneigt zu zerlegen, wofern n eine ganze Zahl bedeutet.

Beweis. Wir wollen annehmen, aus jener Voraussetzung sei schon bewiesen, daß die Zerlegung der R in Seitenkräfte $S = R . \mathrm{Cos}\, (n - 1)\varphi$, unter dem Rich=

tungswinkel HAD $= (n-1)\,\varphi$, und $T = R\,.\,\mathrm{Sin}\,(n-1)\,\varphi$ unter dem Richtungswinkel GAD $= 90^\circ - (n-1)\,\varphi$ möglich sei, wenn die Voraussetzung des Lehrsatzes zugestanden wird; dann läßt sich zeigen, daß die ähnlichen Bestimmungen für die Richtungswinkel $= n\varphi$, und $= 90^\circ - n\varphi$ gelten.

Es ist nämlich, wenn HAE $= \varphi$, $=$ FAG, und EAK $=$ FAH $= 90^\circ - \varphi$; vermöge der Voraussetzung die Kraft $= X$ nach AE, äquipollent den Kräften

$V = X\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi$ nach AK

und $U = X\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi$ nach AH;

und Z nach AF wirkend äquipollent den Kräften

$Y = Z\,\mathrm{Cos}\,\varphi$ nach AG

und $W = Z\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi$ nach AH.

Nun sollen diese Kräfte den F und S gleichgelten, welche angenommen sind, $T = R\,.\,\mathrm{Sin}\,(n-1)\,\varphi$, nach AG und $S = R\,\mathrm{Cos}\,(n-1)\,\varphi$, nach AH; das heißt, es soll sein:

$$R\,.\,\mathrm{Sin}\,(n-1)\,\varphi = Z\,\mathrm{Cos}\,\varphi - X\,\mathrm{Sin}\,\varphi;$$
$$R\,\mathrm{Cos}\,(n-1)\,\varphi = Z\,\mathrm{Sin}\,\varphi + X\,\mathrm{Cos}\,\varphi.$$

oder

$$R\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\,\mathrm{Sin}\,(n-1)\,\varphi = Z\,\mathrm{Cos}^2\varphi - X\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi;$$
$$R\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,(n-1)\,\varphi = Z\,\mathrm{Sin}^2\varphi + X\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi.$$

Die Summe beider Gleichungen giebt (Trigon. §. 44.),

$$R\,.\,\mathrm{Sin}\,.\,n\varphi = Z.$$

Man erhält eben so aus den vorigen Gleichungen

$$R\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,\mathrm{Sin}\,(n-1)\,\varphi\,. = Z\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi - X\,\mathrm{Sin}^2\varphi;$$
$$R\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}\,(n-1)\,\varphi = Z\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi + X\,\mathrm{Cos}^2\varphi;$$

der Unterschied beider giebt

$$R\,.\,\mathrm{Cos}\,.\,n\varphi = X.$$

Diese Werthe gelten also für die Richtungswinkel $= n\varphi$ und $= 90^\circ - n\varphi$, wenn ähnliche für $(n-1)\,\varphi$ und $90^\circ - (n-1)\,\varphi$ gelten; wofern sie also für φ gelten, so sind sie richtig für 2φ, und $90^\circ - 2\varphi$, für 3φ und $90^\circ - 3\varphi$ und folglich für jedes $n\varphi$ und $90^\circ - n\varphi$, wenn n eine ganze Zahl ist.

§. 60. Lehrsatz. Wenn sich die Mittelkraft $= R$

in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte $P = R \operatorname{Cos} \varphi$ und $Q = R \operatorname{Sin} \varphi$ zerlegen läßt, deren eine P unter dem Winkel φ, die andre Q unter dem Winkel $90° - \varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt ist: so läßt sich eben die Mittelkraft R auch in Seitenkräfte $S = R \,.\, \operatorname{Cos} \frac{1}{n} \varphi$ und $T = R \,.\, \operatorname{Sin} \frac{1}{n} \varphi$, deren Richtungswinkel $\frac{1}{n} \varphi$ und $90° - \frac{1}{n} \varphi$ sind, zerlegen.

Beweis. Erhielte man für die aus R unter den Richtungswinkeln $\frac{1}{n} \varphi$ und $90° - \frac{1}{n} \varphi$ entstehenden Seitenkräfte Werthe $= R \operatorname{Cos} (\frac{1}{n} \varphi - x)$ und $= R \,.\, \operatorname{Sin} (\frac{1}{n} \varphi - x)$, (§. 52.): so würden auch Kräfte $= R \operatorname{Cos} (\frac{2}{n} \varphi - 2x)$ und $= R \,.\, \operatorname{Sin} (\frac{2}{n} \varphi - 2x)$ unter den Richtungswinkeln $\frac{2}{n} \varphi$ und $90° - \frac{2}{n} \varphi$ der Kraft R äquipollent sein. Daraus aber würde (§. 59.) folgen, daß auch Seitenkräfte $= R \,.\, \operatorname{Cos} (\varphi - nx)$ und $= R \operatorname{Sin} (\varphi - nx)$ unter den Winkeln $= \varphi$ und $= 90° - \varphi$ gegen die Richtung der R geneigt ihr gleichwirkend sein müßten. Da wir nun für die letztern Richtungswinkel die Seitenkräfte $= R \,.\, \operatorname{Cos} \varphi$ und $= R \,.\, \operatorname{Sin} \varphi$ vorausgesetzt haben: so muß, da kein mehrfacher Werth der Seitenkräfte möglich ist (§. 35.), nothwendig $x = 0$ sein, wenn die angenommene Voraussetzung richtig ist.

§. 61. Lehrsatz. Wenn man die Mittelkraft $= R$ in zwei gegen einander senkrecht wirkende Kräfte zerlegt, deren eine $= P$ unter dem Winkel $= \varphi$, die andre $= Q$ unter dem Winkel $= 90° - \varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt ist, so muß nothwendig $P = R \operatorname{Cos} \varphi$ und $Q = R \,.\, \operatorname{Sin} \varphi$ sein.

Beweis. Für $\varphi = 45°$ ist $P = Q$ (§. 31.), also (§. 52.), $2P^2 = R^2$; $P = Q = R \,.\, \operatorname{Sin} 45°$. In jedem andern Falle also, wenn $\varphi = \frac{1}{n} \,.\, 45°$ ist, muß (§. 60.) $P = R \operatorname{Cos} \varphi$; $Q = R \,.\, \operatorname{Sin} \varphi$ sein, und folglich auch für $\varphi = \frac{m}{n}.45°$, $P = R \operatorname{Cos}\varphi$, $Q = R.\operatorname{Sin}\varphi$. (§. 59.) es mögen m und n welche ganze Zahlen man will bedeuten.

§. 62. Der Beweis läßt sich nun leicht auch auf irrationale Zahlen m.n anwenden, weil er gilt für jede rationale Grenzen, zwischen welchen die irrationalen Zahlen eingeschlossen sind (vergl. Geom. §. 193.).

§. 63. Lehrsatz. Wenn man (Fig. 20.) auf den Richtungslinien AB, AC der auf den Punct A wirkenden Kräfte P, Q, Stücke, diesen Kräften proportionel nimmt, so daß AB : AC = P : Q ist: so giebt die Diagonale AD des aus den Seiten AB, AC und dem durch die Richtungen der Kräfte gegebenen Winkel BAC gebildeten Parallelogramms die Größe und Richtung der aus P, Q entspringenden Mittelkraft an.

Beweis. Zieht man GF durch A auf AD senkrecht, BG, CF mit AD, dagegen CH, BI mit GF parallel; dann läßt sich P = AB, in die Seitenkräfte

$AG = P.\operatorname{Sin}.BAD$, nach AG

und $AI = P.\operatorname{Cos} BAD$, nach AD zerlegen. Eben so ist Q = AC den Seitenkräften

$AF = Q.\operatorname{Sin} CAD$, nach AF

und $AH = Q.\operatorname{Cos} CAD$, nach AD, äquipollent.

Die Kräfte $= P.\operatorname{Sin} BAD$ und $= Q.\operatorname{Sin} CAD$ sind einander gleich; denn sie werden durch die gleichen Linien CH = BI dargestellt; sie heben also einander auf. Es ist daher die gesammte Wirkung der Kräfte P, Q nach AD gerichtet, und die entstehende Mittelkraft ist

$= R = P.\operatorname{Cos} BAD + Q.\operatorname{Cos} CAD$,

das ist $= AI + ID$, indem $ID = AH$.

Die Diagonale giebt also die wahre Richtung der Mittelkraft an, und stellt ihre Größe in eben den Einheiten dar, in welchen AB die Kraft P, AC die Kraft Q angiebt.

§. 64. Erklärung. Dieses Parallelogramm aus Linien gebildet, die den Seitenkräften proportionel sind und unter eben dem Winkel gegen einander geneigt, welchen die Richtungen der Seitenkräfte einschließen, heißt das Parallelogramm der Kräfte.

§. 65. Lehrsatz. Wenn die Kräfte (Fig. 20.) P nach AB, Q nach AC, R nach AK (der AD grade entgegen gesetzt), sich einander im Gleichgewichte erhalten; so ist P : Q = Sin KAC : Sin KAB,
und P : R = Sin KAC : Sin BAC.

Beweis. Denn die nach AK wirkende Kraft muß eben so groß als die ihr grade entgegen wirkende durch AD dargestellte Mittelkraft sein; es ist also (nach der Construct. §. 63.)

P : Q = AB : AC = Sin DAC : Sin DAB
oder P : Q = Sin KAC : Sin KAB
und P : R = AB : AD = Sin DAC : Sin DBA
oder P : R = Sin KAC : Sin BAC.

§. 66. Bemerkung. Aus den Sätzen §. 32 bis 46. erhellt, daß das Parallelogramm der Kräfte zu Beantwortung aller hier vorkommender Fragen dienen könne, daß nämlich aus drei gegebenen von einander unabhängigen Stücken, die übrigen durch die Zeichnung des Parallelogramms bestimmt werden. Und hier erhellet nun auch die Richtigkeit der in §. 47. nur hingeworfenen Bemerkung, welche §. 54. einige Bestätigung erhielt.

§. 66. Gehen wir die sämmtlichen Fälle in §. 39. durch: so läßt sich nun auch übersehen, warum fünf Fälle eine strenge bestimmte Auflösung ergaben, drei Fälle aber eine doppelte Auflösung zuließen.

Das Parallelogramm ist nämlich völlig bestimmt:

1. wenn beide Seiten nebst der Diagonale gegeben sind;
2. wenn eine Seite, die Diagonale und der eingeschlossene Winkel bestimmt sind;
3. wenn die Diagonale bestimmt ist, nebst den Winkeln, unter welchen die Seiten gegen sie geneigt sein sollen;

4. wenn man die Seiten nebst dem Winkel des Parallelogramms kennt;
5. Wenn eine Seite gegeben ist und die Winkel, welche sie mit der Diagonale und mit der andern Seite macht.

Hingegen sind in folgenden Fällen zwei verschiedene Parallelogramme aus einerlei gegebenen Stücken möglich:

1) Wenn eine Seite $= P$, nebst der Diagonale $= R$ gegeben ist, und es ist der Winkel zwischen der Diagonale und der andern Seite bestimmt. Denn man ziehe (Fig. 21.) $AD = R$, nehme DAF gleich dem gegebenen Winkel zwischen R und der zweiten Seite, ziehe um D mit dem Halbmesser $= DC = P$ einen Kreis, so kann dieser die AF in zwei Puncten C und E schneiden, und das Parallelogramm GAED enthält eben so gut die gegebenen Stücke, als das Parallelogramm ACDB.

Diese doppelte Auflösung ist aber (übereinstimmend mit §. 41.) nur möglich, wenn $a + 2b < 180°$, das ist

$$ADC + 2 \cdot DAC < 180°$$

und auch $ADE + 2 \cdot DAC < 160°$.

Der Grund erhellet, wenn man dies gleichschenklichte Dreieck ADH zeichnet, worin $DA = DH$ und $A + H + ADH = 180°$ ist. Die doppelte Bestimmung kann nur eintreten, wenn DC, DE, zwischen DA, DH fallen.

2) Ist die Seite P, die Diagonale R und der von P und der andern Seite eingeschlossene Winkel $= a + b$, gegeben: so sind gleichfalls in gewissen Fällen zwei Auflösungen möglich. Man zeichne (Fig. 22.) $AB = P$, $ABE = 180° - a - b$; dann ist es möglich, daß ein Kreis mit dem Halbmesser $AD = R$ um den Mittelpunct A gezeichnet, BE zweimal an derselben Seite von AB in D und in F schneidet, und so zwei Parallelogramme bestimmt, ACDB, AGFB, welche die gegebenen Stücke enthalten.

Nach §. 43. tritt dieser Fall nur ein, wenn

$a + 2b > 180°$ oder $b > 180° - a - b$ ist. ABD ist $= 180° - a - b$, sollte dieser größer als $ADB = b$, sein, so wäre $AD > AB$ und keine doppelte Bestimmung des Dreiecks möglich (Geom. §. 107.).

3) Wenn beide Seiten des Parallelogramms $= P$ und $= Q$ gegeben sind, nebst dem Winkel $= a$, welche die erstere mit der Diagonale einschließen soll: so nehme man (Fig. 23.) $AB = P$, $BAG = a$, und ziehe um B als Mittelpunct, mit dem Halbmesser $Q = BD = BE$ einen Kreis, welcher AG in D und E schneidet; dann sind AD, AE die Diagonalen der beiden Parallelogrammen ABDC und ABEF, welche sich aus den gegebenen Stücken zeichnen lassen.

Daß diese doppelte Bestimmung nur eintreten kann, wenn $a < b$ ist, erhellt aus Geom. §. 107.

§. 67. In den zuletzt betrachteten Fällen können also verschiedene Seitenkräfte eben die Mittelkraft, oder gleich bleibende Seitenkräfte eine verschiedene Mittelkraft hervorbringen. In Fig. 21. wird dieselbe Mittelkraft hervorgebracht aus Kräften $AB = P$ und $AC = Q$ und aus Kräften $AG = P$ und $AE = q$. In Fig. 22. ist etwas Aehnliches. In Fig. 23. dagegen bewirken die Seitenkräfte $AB = P$ und $AC = AF = Q$ das eine Mal eine Mittelkraft $AD = R$, das andre Mal eine davon ganz verschiedene $AE = r$.

§. 68. Aufgabe. Auf einen Punct wirken mehr als zwei Kräfte nach verschiedenen Richtungen, die Kräfte sind nebst ihren Richtungen gegeben; man sucht die Größe und Richtung der Kraft, welche angebracht werden müßte, um jenen das Gleichgewicht zu halten.

Erste Auflösung. Man zeichnet die Richtungslinien aller gegebnen Kräfte, und nimmt auf ihnen Stücke, den Kräften proportionel, so daß AB die nach AB wirkende Kraft, AC die nach AC wirkende Kraft vorstellt, und eben so AD, AE, AF die nach diesen Richtungen wirkenden Kräfte. Aus zweien derselben, zum Beispiel AB, AC construirt man das Parallelogramm

ABGC, und nun stellt AG, als Diagonale, die Richtung und Größe der Mittelkraft vor, die eben die Wirkung, wie AB, AC hat.

Wir stellen uns daher nun vor, statt der Kräfte AB, AC wirke die Kraft AG und aus ihr und der dritten Kraft AD werde durch Hülfe des Parallelogramms AGHD die Mittelkraft AH bestimmt, die also gleichwirkend mit AB, AC, AD ist. Statt dieser drei könnte also AH wirken, und das aus dieser und der vierten Kraft AE gebildete Parallelogramm AHIE giebt die den vier Kräften äquipollente Kraft AI, welche mit der fünften AF zu einem Parallelogramm verbunden die Kraft AK darstellt, als eben so viel leistend, wie jene fünf. Eine Kraft AL also nach der Richtung AL, der AK grade entgegengesetzt wirkend, deren Größe durch AL = AK dargestellt würde, wäre die zu Erhaltung des Gleichgewichts erforderliche Kraft.

Diese Auflösung ist auch da anwendbar, wo die Richtungen der Kräfte nicht alle in einerlei Ebne liegen. In diesem Falle muß man die Parallelogramme in verschiedenen Ebnen zeichnen, nämlich ABGC in der durch AB, AC; AGHD in der durch GAD bestimmten Ebne u. s. w.

Zweite Auflösung. Erster Fall. Wenn alle Richtungslinien der Kräfte (Fig. 25.) AF, AG, AH, AI in einer Ebne liegen.

Man ziehe in dieser Ebne durch den Punct A, auf welchen alle Kräfte wirken, zwei gegen einander senkrechte Linien BC, DE, und bestimme aus den gegebnen Richtungen der Kräfte die Winkel FAB, GAB u. s. w. Jede der Kräfte zerlege man in zwei Seitenkräfte, deren eine mit BC, die andre mit DE parallel wirket; nenne diejenigen positiv, welche nach AC und AD zu wirken, die entgegengesetzten negativ. Dann ergiebt sich die Summe aller nach AD und aller nach AC wirkenden Kräfte, und die aus ihnen entspringende Mittelkraft ist diejenige, welche allen gegebnen Kräften äquipollent ist. In uns=

rer Figur (Fig. 25.) mögen die Kräfte P nach AF, Q nach AG, R nach AH, S nach AI wirken, und jede durch die Länge ihrer Richtungslinie vorgestellt werden; dann ist die Summe der nach AD wirkenden Kräfte $=$ P . Sin CAF $+$ Q . Sin CAG $+$ S . Sin BAI $-$ R Sin BAH; die Summe der nach AC wirkenden Kräfte $=$ P . Cos CAF $+$ Q . Cos CAG $-$ R . Cos BAH $-$ S . Cos BAI. Stellt man jene Summe durch AK in der Richtung AD, diese Summe durch AR in der Richtung AC dar: so ergiebt das rechtwinklichte Parallelogramm AKRP die Richtung und Größe der Mittelkraft AP, welcher gleich und entgegengesetzt diejenige Kraft wirken müßte, die zu Herstellung des Gleichgewichts erfordert wird.

Durch Rechnung würde man die Größe derselben finden, wenn man die Quadrate der nach AD und nach AC wirkenden Kräfte suchte, und aus ihrer Summe die Quadratwurzel zöge, indem $AP = \sqrt{(AK^2 + AR^2)}$; ihre Richtung aber wird dadurch bestimmt, daß

$$\text{tang PAC} = \frac{AK}{AR},$$

$$\text{tang PAC} = \frac{P . \text{Sin CAF} + Q . \text{Sin CAG} + S . \text{Sin CAI} - R . \text{Sin CAH}}{P . \text{Cos. CAF} + Q . \text{Cos CAG} + S . \text{Cos CAI} + R . \text{Cos CAH}}$$

sein muß (Trig. §. 20.).

Zweiter Fall. Wenn die Richtungslinien der Kräfte nicht alle in derselben Ebne liegen. Man ziehe (Fig. 26.) durch den Punct A, auf welchen die Kräfte wirken, zwei in der Ebne BCG auf einander senkrechte Linien BC, FG, und dann eine auf diese Ebne senkrechte Linie DE, die folglich gegen BC und FG senkrecht ist. Durch je zwei dieser Linien lege man die Ebnen BFCG, BECD, DFEG. Stellt nun AI die Richtung und Größe einer auf A wirkenden Kraft $=$ P vor, die nicht in einer jener Ebnen liegt, so zerlege man sie in drei Seitenkräfte, nach der Richtung der Linien AB, AD, AF. Dieses geschieht, indem man von I, nachdem AI der

Größe der Kraft P gemäß genommen ist, IK senkrecht auf die Ebne BFGC zieht, und zwischen dem Puncte K, wo dieser Perpendikel die Ebne trifft und A die Linie AK zeichnet, dann ist P äquipollent zweier Kräften, $P . \mathrm{Cos}\, IAK$ nach der Richtung AK und $P . \mathrm{Sin}\, IAK$ nach der Richtung AD. Die Richtung der ersteren Kraft liegt in der Ebne BFGC und kann in zwei Kräfte mit AB und AG parallel zerlegt werden; sie ist nämlich gleichwirkend den Kräften

$P . \mathrm{Cos}.IAK . \mathrm{Cos}. KAB$ nach AB; und
$P . \mathrm{Cos}\, IAK . \mathrm{Sin}\, KAB$ nach AG.

So ist also die Kraft P in die ihr äquipollenten nach den drei Richtungen AD, AB, AG wirkenden Kräfte zerlegt. Auf eben die Weise zerlegt man alle vorkommenden Kräfte, vereinigt, mit gehöriger Rücksicht auf das Negative, alle nach AB wirkende Kräfte, und eben so alle nach AD, und alle nach AG wirkende Kräfte jede für sich in eine Summe. Nenne ich die Summe der nach AB wirkenden Kräfte $= p$, der nach AG $= q$, der nach AD $= r$: so ergeben die beiden ersteren vereinigt eine Mittelkraft $= \surd(p^2 + q^2)$, deren Richtung in der Ebne BFCG liegt und mit AB einen Winkel macht, dessen Tangente $= \frac{q}{p}$ ist. Diese Kraft läßt sich mit der nach AD wirkenden $= r$ vereinigen; denn ihre Richtungen sind auf einander senkrecht, und sie geben eine Mittelkraft $= \surd(p^2 + q^2 + r^2)$, deren Richtungslinie gegen die Ebne BFCG unter einem Winkel geneigt ist, dessen Tangente $= \frac{r}{\surd(p^2 + q^2)}$.

§. 69. Im letzten Falle hätte man auch die Richtung und Größe der Mittelkraft dadurch finden können, daß man aus Seitenlinien, den Kräften p, q, r, proportional ein rechtwinklichtes Parallelepipedum construirte; die Diagonale würde die wahre Richtung und die verhältnißmäßige Größe der Mittelkraft angeben.

§. 70. Sind die Kräfte, deren Mittelkraft gesucht wird, schon für sich im Gleichgewichte: so ist die ihnen gleichgeltende Mittelkraft = 0, und es müssen folglich die Kräfte nach AD und AC (Fig. 25.) oder nach den drei auf einander senkrechten Richtungen in Fig. 26. jede für sich = 0 werden, indem sie sich einander nicht aufheben können. Hierin also liegt die Bedingung des Gleichgewichtes.

§. 71. Bemerkung. Wenn an einen Punct A (Fig. 27.) Linien, alle in derselben Ebne liegend, gezogen sind, wie AB, AC, AD; und es wird dieses System von Linien so nach ab, ac, ad fortgerückt, daß ab mit AB, ac mit AC, ad mit AD parallel bleibt: so wird man mit Recht sagen, die Verrückung des Punctes A betrage nach einer mit AD parallelen Richtung so viel als AE, wenn nämlich aE aus a auf AD senkrecht gesetzt ist; die Verrückung nach der Richtung AB betrage AG, wenn aG auf AB senkrecht ist, u. s. w.

§. 72. Lehrsatz. Wenn (Fig. 27.) auf den Punct A Kräfte nach den Richtungen AB, AC, AD wirken: so werden diese einander im Gleichgewichte halten, wenn bei einer nach willkührlicher Richtung gehenden Fortrückung des ganzen Systems, wobei die Richtungslinien ihren vorigen Lagen parallel bleiben, die Summe der Producte aus jeder Kraft in die ihrer Richtung parallele Fortrückung verschwindet.

Erläuterung. Wenn nach AB die Kraft = P, nach AC die Kraft = Q, nach AD die Kraft = R wirkt, und es stellen aG, aF, aE die aus dem fortgerückten Puncte a auf jene Richtungen gefälleten Senkrechte vor, so ist AG die Fortrückung nach AB, es ist AF die negative Fortrückung nach AC, und AE die Fortrückung nach AD. Unser Satz behauptet also, daß für das Gleichgewicht $P . AG - Q . AF + R . AE = 0$ sei.

Beweis. Es sei $BAD = \alpha$, $BAC = \beta$; die Richtung der willkürlichen Fortrückung des Punctes A nach a sei durch $BAa = \omega$ bestimmt; Aa sei $= s$. da hier $AG = s \operatorname{Cos} \omega$, $AE = s \operatorname{Cos} (\alpha - \omega)$; $AF = s . \operatorname{Cos} (\omega + \beta)$, und es sich durch die Größe der Winkel von selbst ergiebt, ob diese Größen positiv oder negativ werden: so sollte

$$P . s \operatorname{Cos} \omega + Q . s . \operatorname{Cos} (\omega + \beta) + R . s . \operatorname{Cos} (\alpha - \omega) = o$$

sein.

Wenn die Kräfte einander im Gleichgewichte erhalten: so hat man (§. 65.)

$$P : Q : R = \operatorname{Sin} CAD : \operatorname{Sin} BAD : \operatorname{Sin} BAC; \text{ oder}$$

$$P : Q : R = - \operatorname{Sin} (\alpha + \beta) : \operatorname{Sin} \alpha : \operatorname{Sin} \beta$$

(Trig. §. 29.), also

$$Q = - \frac{P . \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)}; \quad R = - \frac{P . \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)};$$

es soll also

$$P . s . \left(\operatorname{Cos} \omega - \frac{\operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Cos} (\omega + \beta)}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)} - \frac{\operatorname{Sin} \beta . \operatorname{Cos} (\alpha - \omega)}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)} \right)$$

$$= o, \text{ sein, oder}$$

$$o = \frac{P . s .}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Cos} \omega . \operatorname{Sin} (\alpha + \beta) - \operatorname{Cos} \omega . \operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Cos} \beta \\ - \operatorname{Cos} \omega . \operatorname{Sin} \beta . \operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \omega . \operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Sin} \beta \\ - \operatorname{Sin} \omega . \operatorname{Sin} \beta . \operatorname{Sin} \alpha \end{array} \right\}$$

wo der in der Parenthese stehende Factor offenbar $= o$ ist.

Die Summe dieser Producte verschwindet also für den Fall des Gleichgewichtes, und eben das ließe sich für mehrere Kräfte beweisen, auch dann, wenn ihre Richtungen nicht alle in derselben Ebne lägen.

§. 73. Da die Richtung, nach welcher wir die Fortrückung des ganzen Systems annehmen, völlig willkürlich ist: so können wir dazu die Richtung der einen Kraft, etwa AD wählen. Dann könnten wir uns diese Verrückung als die Wirkung vorstellen, welche die Kraft R hervorbringen würde, wenn keine andre Kraft den Punct A zur Bewegung antriebe. Durch diese Bewegung würde, wenn sie geschähe, der Punct A bestimmte Wege = s nach der Richtung AD, = ſ nach der Richtung AB, = σ nach der Richtung AC durchlaufen. Aber die nach AB und AC wirkenden Kräfte P und Q hindern, daß R nicht jene Wirkung, die eine bloß gedachte ist, in der That hervorbringe, und unsre Untersuchung zeigt, daß die Bewegung völlig gehindert wird, wenn $R.s + P.ſ + Q.\sigma = 0$ ist.

§. 74. Das hier erwiesene Gesetz heißt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, das ist, des Bestrebens nach Geschwindigkeit, oder der von jeder Kraft zwar angeregten (gleichsam beabsichtigten), aber wegen der entgegengesetzten Thätigkeit der übrigen Kräfte nicht zur Wirklichkeit kommenden Wirkungen oder Bewegungen.

§. 75. Eben diese Betrachtungen zeigen auch, warum man R.s die Wirkung der Kraft R genannt hat, indem, wenn man sich eine Verrückung des ganzen Systems, etwa als der einen Kraft Folge leistend, denkt, das Geschäft der andern Kräfte ist, die Fortrückung, so viel davon auf die ihnen parallele Richtung fällt, zu hindern, und die Wirkung der Kraft also desto größer ist, je stärker diese von ihr gehinderte Fortrückung ist.

§. 76. Dieses Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, ehmals bekannt unter dem Namen des Cartesischen Grundsatzes, kann dienen, um alle Lehren der Statik daraus herzuleiten, sobald es selbst einmal gründlich bewiesen ist.

§. 77. Bemerkung. Wenn ein beweglicher Punct A (Fig. 28.) sich an der Oberfläche eines unverrückbaren Widerstandes befindet: so kann dieser Widerstand nur diejenigen Kräfte aufheben, welche an der Stelle, wo sie wirken, senkrecht auf seine Oberfläche sind. Schief gegen die Oberfläche wirkende Kräfte werden zwar einen Druck auf dieselbe hervorbringen; aber doch zugleich ein

Fortschieben mit der Richtung der Oberfläche parallel bewirken.

§. 78. Aufgabe. Der bewegliche Punct A (Fig. 28.) befindet sich an der Oberfläche FG eines festen Widerstandes, und es wirken auf A Kräfte, wie P nach AB, Q nach AC und mehrere. Man sucht die Bedingungen, unter welchen der Punct A in Ruhe bleiben kann, und den Druck, welchen die Oberfläche in A leidet.

Auflösung. Es sei AD die Richtung der Oberfläche in dem Puncte, wo A an ihr anliegt, so daß AD, wenn des Körpers Oberfläche krumm ist, eine ihn berührende Ebne vorstellt. Man zerlege nun jede der wirkenden Kräfte in zwei Seitenkräfte, deren eine mit AD parallel, die andre auf sie senkrecht ist; man vereinige die sämmtlichen in der Ebne AD liegenden Seitenkräfte in eine einzige, allen äquipollente Kraft, und sehe, ob diese verschwindet; ist das der Fall, so kann A vermöge des Widerstandes, welchen FG ihm in den Weg stellt, in Ruhe bleiben, oder das Gleichgewicht kann bestehen, wofern die Summe des auf AD senkrechten Drucks gegen den Körper zu gerichtet ist. Um dies zu entscheiden, bringt man die sämmtlichen auf AD in A senkrechten Kräfte in eine Summe und betrachtet dabei die gegen FG zu wirkenden als positiv, die entgegengesetzt wirkenden als negativ, so ist diese Summe der Druck, welchen die feste Oberfläche in A leidet, und es ist offenbar, daß das Gleichgewicht nur besteht, wenn diese Summe positiv oder gegen den festen Körper FG zu gerichtet ist.

§. 79. Wäre dieser Druck = 0, so wären die Kräfte schon für sich im Gleichgewichte, ohne daß es der Unterstützung des Punctes A bedurft hätte.

Dritter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte der Kräfte am Hebel und an der um einen unterstützten Punct beweglichen Ebne.

§. 80. Erklärung. Eine grade, unbiegsame Linie, welche in einem Puncte so unterstützt ist, daß sie sich um diesen frei drehen, der Punct aber nicht verrückt werden kann, heißt ein gradlinigter Hebel, und zwar ein zweiarmiger Hebel, wenn an beiden Seiten, ein einarmiger Hebel, wenn nur an einer Seite des unterstützten Punctes Kräfte auf ihn wirken.

§. 81. Erklärung. Ueberhaupt heißt jede grade, krumme oder aus graden Theilen zusammengesetzte Linie ein Hebel, wenn sie unbiegsam ist, und sich um einen fest unterstützten Punct frei drehen kann. Nach Verschiedenheit der Gestalt heißt der Hebel dann ein Winkelhebel u. s. w.

§. 82. Wir betrachten hier den Hebel, als ob er selbst ohne Schwere wäre.

§. 83. Erklärung. Der festgehaltene Punct des Hebels heißt der Ruhepunct oder Drehungspunct; er ruhet auf der festen Unterlage, die man als unverrückbar annimmt.

§. 84. Lehrsatz. Am graden zweiarmigen Hebel sind zwei senkrecht auf ihn und nach parallelen Richtungen wirkende Kräfte im Gleichgewichte, wenn sie sich umgekehrt verhalten, wie die Entfernungen der Puncte, auf welche sie wirken, vom Ruhepuncte.

Beweis. Es sei (Fig. 29.) BC der in A unterstützte Hebel. Die in B und C parallel unter sich und senkrecht auf AC wirkenden Kräfte stelle man durch die ihnen proportionalen Linien CD, BE dar, und setze das Verhältniß der Kräfte CD : BE = AB : AC voraus.

Die Kraft CD kann angesehen werden, als eine aus Seitenkräften CF, CG entspringende Mittelkraft. Man nehme die Richtung von CF in der verlängerten Richtung des Hebels selbst, und die Kraft = CF von willkürlicher Größe: so ist zugleich die Richtung und Größe der andern Seitenkraft CG bestimmt (§. 34. 66.). Eben so kann BE angesehen werden als Mittelkraft aus den Seitenkräften BH = CF, nach der verlängerten Richtung des Hebels der CF grade entgegen wirkend, und aus BI, deren Richtung und Größe nun auch bestimmt ist.

Die Kräfte CF, BH heben einander auf und könnten folglich (§. 10.) ganz fehlen. Die Wirkung der Kräfte CG, BI wird eben dieselbe sein, als ob sie in ihrem Durchschnittspuncte K wirkten (§. 23.) und die ganze Ebne BACK um die Unterlage A zu drehen strebten. Dieser Durchschnittspunct K liegt in der durch A auf BC gezogenen Senkrechten; denn wenn man von K eine Senkrechte auf BC zieht, und nähme an, daß diese die BC nicht in A, sondern in A″ schnitte: so ist doch das Dreieck CA″K ∽ FCD, und BA″K ∽ HBE, also

$$HB : BE = BA'' : A''K,$$
$$CD : CF = A''K : A''C,$$

das ist, da BH = CF,

$$CD : BE = BA'' . A''C,$$

und auch, zu Folge der Voraussetzung

$CD : BC = BA : AC$; es fällt also A″ mit A zusammen.

Wirkten in K die Kräfte KL = CG, KM = BI, so wäre offenbar die Mittelkraft = KO + NO = CD + BE, nach der verlängerten Richtung AK. Denn, wenn man KO parallel mit CD und LO parallel mit GD nimmt: so ist das Dreieck LKO $\overline{\overline{\sim}}$ GCD, also bei O rechtwinklicht; zieht man nun LN parallel mit KM und nimmt

LN = KM, so ist OLN $\cong$ BHE, weil LO = CF = HB, LN = HE, L = H, also O ein rechter Winkel, also KN = CD + BE, eine mit CD parallele grade Linie.

Die gesammte Wirkung der Kräfte CD, BE oder der ihnen gleich geltenden CF, KL und BH, KM ist also die, den Punct A nach der Richtung AK zu drücken, mit einer Kraft = BE + CD; da nun dieser Punct A unterstützt ist: so besteht das Gleichgewicht.

Anmerkung. Kästners Beweis der Lehre vom Hebel hat zwar eine etwas mehr elementarische Form; aber man nimmt bei ihr gleichsam als von selbst erhellend an, daß A den ganzen Druck = CD + BE leide. Auch wird die Herleitung des Parallelogramms der Kräfte nicht ohne Schwierigkeit zu Stande gebracht. Aus diesem Grunde habe ich eine andre Darstellung, die im Wesentlichen mit Eytelwein übereinstimmt, gewählt. Doch verdient Kästners Beweisart, so wie Karsten sie in seines Lehrbegriffes 3ten Bande mittheilt, nachgelesen zu werden.

§. 86. Man kann hieraus leicht herleiten, daß das Gleichgewicht nicht besteht, wenn die Kräfte sich nicht umgekehrt wie die Entfernungen vom Ruhepuncte verhalten. Wendet man genau dieselben Schlüsse an: so sieht man, daß das Perpendikel aus K nicht mehr in A, sondern zwischen A und C trifft, wenn $AC > \frac{AB \cdot BE}{CD}$ ist. Es ist also dann grade so, als ob eine einzige Kraft = CD + BE in einem nicht unterstützten Puncte A″ senkrecht auf den Hebel wirkte, und in diesem Falle muß nothwendig ein Drehen des Hebels um A erfolgen.

§. 87. Wenn CD : BE = AB : AC ist: so könnte statt der Unterlage eine in A senkrecht auf BC, nach AR wirkende Kraft = BE + CD angebracht sein, und diese würde hinreichen, um das Gleichgewicht zu erhalten. Wäre alsdann in C eine Unterstützung, welche den Punct C fest hielte, ohne die freie Drehung um C zu hindern: so wäre am einarmigen Hebel die Kraft = BE in der Entfernung = CB vom Ruhepuncte, und die Kraft

$= CD + BE = \frac{AB \cdot BE}{AC} + BE = \frac{BC \cdot BE}{AC}$ in der Entfernung $= AC$ vom Ruhepuncte im Gleichgewichte, wenn sie senkrecht auf den Hebel, parallel unter sich und nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Es gilt also auch hier folgender

Lehrsatz. Das Gleichgewicht findet auch beim einarmigen Hebel statt, wenn die Kräfte sich umgekehrt, wie die Entfernungen vom Ruhepuncte verhalten, und kann im entgegengesetzten Falle nicht statt finden.

§. 88. Die Proportion, daß die Kräfte sich umgekehrt wie die Entfernungen vom Ruhepuncte verhalten müssen; also, wenn ich (Fig. 29.) die an B wirkende Kraft $= P$, die an C wirkende $= Q$ nenne, $P : Q = AC : AB$ sein muß, führt zu der Gleichheit der Producte

$$P \cdot AB = Q \cdot AC,$$

wo wir uns statt der Linien und Kräfte unbenannte Zahlen denken müssen.

§. 89. Erklärung. Man nennt dieses richtig verstandene Product einer jeden senkrecht auf den Hebel wirkenden Kraft in ihre Entfernung vom Ruhepuncte das Moment der Kraft.

§. 90. Nach dem strengen analytischen Begriffe von positiven und negativen Größen sollten wir hier diejenigen Kräfte positiv nennen, welche nach der einen Richtung, und die negativ, welche nach der entgegengesetzten Richtung wirken. Und eben so sollten die von A an gerechneten Entfernungen nach der einen Seite positiv, nach der andern negativ genannt werden.

Am zweiarmigen Hebel (Fig. 30.) sind also beide Kräfte positiv, aber die eine Entfernung ist hier als negativ zu betrachten; bei dem einarmigen Hebel hingegen (Fig. 31.) ist die an B wirkende Kraft P negativ, wenn die an C angebrachte Kraft Q positiv ist, die Entfernungen aber liegen beide nach einerley Richtung und sind also als positiv anzusehen.

§. 91. Diesem zu Folge ist am zweiarmigen Hebel (Fig. 30.) das Moment der Kraft $P = P \cdot AB$; das Moment der Kraft Q, $= - Q \cdot AC$. also die Summe der Momente $= P \cdot AB - Q \cdot AC = 0$.

Am einarmigen Hebel ist (Fig. 31.)
das Moment der Kraft P, $= - AB \cdot P$.
das Moment der Kraft Q, $= Q \cdot AC$,
also wieder die Summe der Momente $= Q \cdot AC - P \cdot AB = 0$. Beim Gleichgewichte der Kräfte am Hebel ist also die Summe ihrer Momente $= 0$.

Wir werden diese Rücksicht auf das Positive und Negative strenge im Auge behalten.

§. 92. Aufgabe. An der graden unbiegsamen Linie, welche in zwei Puncten B, C, unterstützt ist (Fig. 32.), wirkt senkrecht auf sie in A eine Kraft $= R$; man sucht den Druck, welchen die Puncte B und C leiden.

Auflösung. Der Druck in B heiße $= P$, der Druck in C, $= Q$, und man betrachte diesen Druck als positiv, wenn seine Richtung mit der Richtung der Kraft R übereinstimmt: so ist allgemein

$$P = \frac{R \cdot AC}{BC} \text{ und } Q = \frac{R \cdot AB}{BC}.$$

Beweis. Erster Fall. Es sei die grade Linie oder der Hebel in zwei Puncten unterstützt, die an verschiedenen Seiten von A liegen (Fig. 32.), dann würde offenbar das Gleichgewicht bestehen, wenn an B eine Kraft $= P$, und an C eine Kraft $= Q$ nach einer Richtung der Richtung der R parallel und entgegengesetzt wirkte, und zugleich $P + Q = R$ und $P \cdot AB = Q \cdot AC$ wäre (§. 84.). Aus diesen beiden Gleichungen aber folgt $(R - Q) \cdot AB = Q \cdot AC$; also

$$Q = \frac{R \cdot AB}{AB + BC} = \frac{R \cdot AB}{AC}, \text{ und folglich}$$

$$P = \frac{R \cdot AC}{BC}.$$

Zweiter Fall. Wenn die unterstützten Puncte beide an derselben Seite von A liegen, dann müßte in B (Fig. 33.) eine Kraft P nach einer Richtung der Richtung der R parallel und entgegengesetzt, in C eine Kraft $= Q$ nach übereinstimmender Richtung mit R wirken, und es müßte $P = Q + R$,

$$Q . BC = R . AB$$ sein (§. 87.),

also $Q = \frac{R . AB}{BC}$; $P = \frac{R . AC}{BC}$.

§. 93. Um sogleich das richtige Zeichen für den Druck zu erhalten, wollen wir (Fig. 33.) A als Drehepunct betrachten, also $P . AB$ und $Q . AC$ als Momente der Kräfte P und Q in Beziehung auf A. Diese Momente sind beide positiv, wenn die Kräfte nach einerley Richtung wirken. Es ist aber zum Gleichgewichte erforderlich, daß die Summe aller Kräfte am Hebel $= 0$, und die Summe aller Momente $= 0$ sei (§. 91.), also hier

$$P + Q + R = 0,$$ und

$$P . AB + Q . AC = 0,$$ weil R in der Entfernung $= 0$ das Moment $= 0$ hat.

Daraus ergiebt sich, da $Q = - P - R$ ist,

$$P . AB = + P . AC + R . AC = - Q . AC,$$

oder $P . (AB - AC) = R . AC$;

$$P = \frac{R . AC}{AB - AC};$$

und $Q = \frac{R . AB}{AC - AB}$.

Hier wird nun erstlich P positiv, wenn $AB > AC$ und zugleich AC positiv ist, und es wird dann Q negativ, wofern auch AB positiv ist, das heißt: liegen beide Unterlagen an derselben Seite von A, so übt die entferntere einen Druck aus nach der mit der Richtung der R übereinstimmenden Richtung, die nähere aber einen Druck nach entgegengesetzter Richtung, und der Druck, den jede leidet, ist entgegengesetzt dem Drucke, welchen sie ausübt.

Zweitens. Es wird P und auch Q negativ, wenn

AB, AC an entgegengesetzten Seiten von A liegen; denn wenn ich AC = — a nenne, und AB = + b, so ist $P = \frac{-Ra}{a+b}$ und $Q = \frac{R \cdot b}{-a-b}$. Das heißt: Liegt A zwischen den Unterstützungspuncten, so üben diese beide einen Druck aus nach der Richtung, welche dem Drucke der R entgegengesetzt ist, und beide Puncte leiden folglich einen Druck nach der mit der Richtung der R übereinstimmenden Richtung.

§. 94. Lehrsatz. Wenn auf einen gradlinigten Hebel mehrere Kräfte nach parallelen, entweder übereinstimmenden oder entgegengesetzten auf den Hebel senkrechten Richtungen wirken; und es ist A der Punct (Fig. 34.) in Beziehung auf welchen die Summe der Momente aller Kräfte = o ist: so leistet eine in A angebrachte, der Summe aller Kräfte gleiche, nach paralleler Richtung mit ihnen wirkende Kraft, genau eben das, was alle jene einzelnen Kräfte insgesammt bewirkten.

Beweis. Wenn (Fig. 34.) G derjenige Punct ist, wo der Hebel unterstützt werden müßte, damit die Kräfte P in B, Q in C einander im Gleichgewichte erhielten: so ist $CG \cdot Q = GB \cdot P$, oder $CG = \frac{P \cdot GB}{Q}$. Wofern nun ein willkürlicher Punct A des Hebels unterstützt wird: so ist in Beziehung auf ihn die Summe der Momente der einzeln wirkenden Kräfte P in B, Q in C,

$$= P \cdot AB + Q \cdot AC,$$

$$= P \cdot AG + P \cdot GB + Q \cdot AG - Q \cdot CG,$$

$$= (P+Q) \cdot AG + P \cdot GB - \frac{Q \cdot P \cdot GB}{Q},$$

$= (P+Q)\, AG$. Die Summe jener Momente ist also gleich dem Momente der in G wirkenden Summe der Kräfte P, Q.

Wäre außer diesen in F eine Kraft = U angebracht: so ist die Summe der Momente der drei Kräfte P, Q, U,

in Beziehung auf A $= AB \,.\, P + AC \,.\, Q - AF \,.\, U$
$= AG \,.\, (P+Q) - AF \,.\, U$.
Soll dieses Moment $= 0$ sein; wie der Lehrsatz verlangt, so ist $AF = \frac{AG \,.\, (P+Q)}{U}$, und wenn man irgend einen andern Punct E des Hebels unterstützt: so ist die Summe der Momente $= P \,.\, EB + Q \,.\, EC - U \,.\, EF$, eben so groß als das Moment einer in A angebrachten Kraft $= P+Q+U$, in Beziehung auf E. Für $P \,.\, EB + Q \,.\, EC$ ist schon erwiesen, daß es $= EG \,.\, (P+Q)$ sei; das ist $= (P+Q)\,(EA+AG)$ und $U \,.\, EF$ ist $= U \,.\, (FA - EA)$, also $P \,.\, EB + Q \,.\, EC - U \,.\, EF = (P+Q+U)\,EA + (P+Q) \,.\, AG - U \,.\, FA$, also da $U \,.\, FA = (P+Q)\,AG$; diese Summe $= (P+Q+U) \,.\, EA$.

Diese Gleichheit der Momente der in B, C, F einzeln wirkenden Kräfte mit der in A angebrachten Summe, zeigt eine völlig gleiche Wirkung an, da eine Kraft $= x$, in der Entfernung $= y$ wirkend, sowohl den einzelnen als den so in eine Summe verbundenen und in A angebrachten Kräften das Gleichgewicht hält, wenn ihr Moment $x \,.\, y$ dem Momente jener gleich ist.

Aber auch für eine Kraft $= P+Q$ in G und eine Kraft $= S$ nach entgegengesetzter Richtung in D wirkend, gilt unser Satz. Dann, soll in A eine Kraft $= S - P - Q$ jenen das Gleichgewicht halten, so muß $(S - P - Q) \,.\, AD = (P+Q) \,.\, GD$ sein, oder $S \,.\, AD = AG\,(P+Q)$. Aber in Beziehung auf irgend einen andern Punct E, wenn dieser der Drehungspunct wäre, ist der in A wirkenden Kraft $= S - P - Q$, Moment $= EA \,.\, (S - P - Q)$, die Summe der einzelnen Momente $+ S$ in D und $- (P+Q)$ in G, ist $= ED \,.\, S - EG \,.\, (P+Q)$.
$= \div EA \,.\, (P+Q) \div AG(P+Q) + EA \,.\, S + AD \,.\, S$,
$= EA\,(S - P - Q)$.

Es ist leicht zu übersehen, daß diese Gleichheit der Momente für jeden Unterstützungspunct, und für jede

Anzahl parallel wirkender, gegen den Hebel senkrechter Kräfte statt findet.

§. 95. Erklärung. Dieser Punct, in welchem die Summe der parallel wirkenden Kräfte angebracht werden muß, um eben das zu bewirken, was alle zugleich, jede an ihrem bestimmten Angriffspuncte ausrichten, heißt der Mittelpunct der Kräfte.

§. 96. Bemerkung. Wenn eine Ebne in einem Puncte so festgehalten wird, daß sie sich um diesen frei drehen kann: so wird, wenn die Richtungen der wirkenden Kräfte in die Ebne selbst fallen, die Ebne sich nur so bewegen können, daß jeder ihrer Puncte immerfort in derselben geometrischen Ebne bleibt. Dieser Fall ist es, zu dessen Betrachtung wir jetzt übergehen.

§. 97. Lehrsatz. Wenn die Ebne BAC sich um den festgehaltenen Punct A frei drehen kann, und durch zwei Kräfte P in B nach der Richtung BD, und Q in C nach der Richtung CE, zur Bewegung angetrieben wird: so besteht das Gleichgewicht, wofern die Richtungen der Kräfte in der Ebne selbst liegen, wenn die Kräfte die Ebne nach entgegengesetzten Seiten zu drehen streben, und zugleich sich umgekehrt verhalten, wie die von A aus gegen ihre Richtungslinien gezogenen Senkrechten AH, AI (Fig. 35.).

Beweis. Man ziehe durch den Punct A in willkürlicher Richtung eine, die Richtungslinien BD, CE schneidende grade Linie FG. Schneidet sie die Richtungslinien der Kräfte in F und in G: so darf man (§. 23.) diese Kräfte als in den Puncten F und G nach ihren Richtungen FD, GE wirkend betrachten. Zerlegt man nun die nach FD wirkende Kraft = P in eine Seitenkraft nach der Richtung von FG, und in eine auf diese senkrechte Richtung: so kann nur die letztere die Drehung um A bestimmen, indem die erstere bloß einen Druck auf A ausübt. Dasselbe gilt für die Zerlegung der Kraft Q, welche nach GE wirkt. Die auf FG senkrechten Kräfte sind, $= P . \text{Sin } AFD$, in F, und $= Q . \text{Sin } AGE$, in G; ihre Momente sind = P . AF . Sin AFD, und = Q . AG . Sin AGE.

Diese Momente müssen gleich sein, wofern keine Drehung erfolgen soll, indem hier alles wie am Hebel ist, und die übrigen Theile der Ebne, welche wir noch immer als nicht schwer betrachten, die Bewegung weder hindern noch befördern.

Zieht man nun von A aus die Linien AH, AI senkrecht auf die Richtungslinien der Kräfte: so ist AH = AF . Sin AFB = AF . Sin AFD; und

AI = AG . Sin AGC = AG . Sin AGE.

Die Gleichheit der Momente fordert also, daß P . AH = Q . AI, oder P : Q = AI : AH sei, und das Gleichgewicht besteht, wenn dieses Verhältniß statt findet, und zugleich die Drehungen, welche die Kräfte zu bewirken streben, nach entgegengesetzten Richtungen gehen.

§. 98. Nennt man hier das Product aus der Kraft in den senkrechten Abstand des Drehungspunctes von der Richtung der Kraft, ihr Moment, und betrachtet man die Momente derjenigen Kräfte, welche eine entgegengesetzte Drehung zu bewirken streben, als entgegengesetzt, so gilt es auch hier, daß das Gleichgewicht besteht, wenn die Summe der Momente = 0 ist.

§. 99. Es erhellt, daß eben dieses Gesetz für die Summe der Momente noch gilt, wenn auch mehrere Kräfte nach Richtungen wirken, welche in der Ebne selbst liegen.

§. 100. Lehrsatz. Wenn die Kräfte P, Q, nach Richtungen BD, CE (Fig. 35.), die in der Ebne BAC selbst liegen, wirken: so ist, bei bestehendem Gleichgewichte, der Druck, welchen der unterstützte Punct A leidet, eben so groß, als er sein würde, wenn die Kräfte P nach AK, Q nach AL, nach Richtungen ihren wahren Richtungen parallel an A selbst angebracht wären.

Beweis. Wir finden Größe und Richtung des Druckes auf A ganz gleich, wir mögen ihn nach den Gesetzen der am Hebel wirkenden Kräfte unmittelbar aus den an B und C nach den Richtungen BD und CE angebrachten Kräften herleiten, oder uns die nach AK, AL, parallel mit jenen Richtungen wirkenden Kräfte denken.

Die erstere Betrachtung giebt folgendes: die Kraft $= P$ ward zerlegt in eine nach der Richtung FA wirkende $= P \,.\, \text{Cos}\, AFD$ und in eine auf AF senkrechte $= P \,.\, \text{Sin}\, AFD$; eben so Q in eine Kraft $= Q \,.\, \text{Cos}\, AGE$ mit AG parallel und eine Kraft $= Q \,.\, \text{Sin}\, AGE$, auf AG senkrecht.

Der Druck, welchen A leidet, besteht also, erstlich aus der richtig genommenen Summe der mit FG parallelen Kräfte $= P \,.\, \text{Cos}\,.\, AFD - Q \,.\, \text{Cos}\,.\, AGE$, und zweitens aus der Summe der auf FG senkrechten Kräfte $= P \,.\, \text{Sin}\, AFD + Q \,.\, \text{Sin}\, AGE$. Da diese Kräfte senkrecht auf einander wirken, so bringen sie (§. 52.) eine Mittelkraft hervor, die aus der Summe ihrer Quadrate bestimmt wird, und

$$= \sqrt{(P^2 + Q^2 - 2P \,.\, Q \,.\, (\text{Cos}\, AFD \,.\, \text{Cos}\, AGE - \text{Sin}\, AFD \,.\, \text{Sin}\, AGE))}$$

oder $= \sqrt{(P^2 + Q^2 - 2P \,.\, Q \,.\, \text{Cos}\,(AFD + AGE))}$ ist; die Richtung der Mittelkraft ist durch den Winkel FAM bestimmt, dessen Tangente (§. 68.),

$$\text{tang}\, FAM = \frac{P \,.\, \text{Sin}\, AFD + Q \,.\, \text{Sin}\, AGE}{Q \,.\, \text{Cos}\, AGE - P \,.\, \text{Cos}\,.\, AFD}.$$

Geht man hingegen von der Voraussetzung aus, daß P nach AK, Q nach AL unmittelbar auf A selbst wirken, und $GAK = AFD$, $FAL = AGE$ sei: so erhielte man durch ihre Zerlegung eben das wie vorhin. Aber auch, wenn man aus ihnen das Parallelogramm AKML bestimmt, dessen Seiten $= P$ und $= Q$ sind, so ergiebt sich (Trigon. §. 65.)

$$AM = \sqrt{(P^2 + Q^2 - 2P \,.\, Q \,.\, \text{Cos}\, AKM)}$$

und es ist $AKM = 180° - KAL = 360° - (FAL + GAK)$; also $\text{Cos}\, AKM = \text{Cos}\,(FAL + GAK)$

$$= \text{Cos}\,(AFD + AGE).$$

Um den Winkel FAM zu bestimmen, haben wir Folgendes: Im Parallelogramm der Kräfte ist $P \cdot \text{Sin}\, KAM = Q \cdot \text{Sin}\, LAM$. (§. 65.), und $MAF = AGE - LAM = 180° - AFD + KAM$, also (Trig. §. 48.)

$$\text{tang}\, MAF = \frac{\text{tang}\, AGE - \text{tang}\, LAM}{1 + \text{tang}\, AGE \cdot \text{tang}\, LAM},$$

oder da $KAM = AGE + AFD - LAM - 180°$,

$$- \text{Sin}\, KAM = \text{Sin}\,(AGE + AFD - LAM) = \text{Sin}\,(AGE + AFD) \cdot \text{Cos}\, LAM - \text{Sin}\, LAM \cdot \text{Cos}\,(AGE + AFD),$$

das ist, weil $- \text{Sin}\, KAM = - \frac{Q}{P} \cdot \text{Sin}\, LAM$,

$$- \frac{Q \cdot \text{Sin}\, LAM}{P} = \text{Sin}\,(AGE + AFD)\, \text{Cos}\, LAM - \text{Sin}\, LAM \cdot \text{Cos}\,(AGE + AFD),$$

und $- \text{tang}\, LAM = \frac{P \cdot \text{Sin}\,(AGE + AFD)}{Q - P \cdot \text{Cos}\,(AGE + AFD)}$,

woraus endlich folgt

$$\text{tang}\, FAM = \frac{Q \cdot \text{tang}\, AGE - P \cdot \text{tang}\, AGE \cdot \text{Cos}(AGE + AFD) + P \cdot \text{Sin}(AGE + AFD)}{Q - P \cdot \text{Cos}\,(AGE + AFD) - P \cdot \text{tang}\, AGE \cdot \text{Sin}\,(AGE + AFD)};$$

oder gehörig reducirt (Trig. 40. 44.),

$$\text{tang}\, FAM = \frac{Q \cdot \text{Sin}\, AGE + P \cdot \text{Sin}\, AFD}{Q \cdot \text{Cos}\, AGE - P \cdot \text{Cos}\, AFD},$$

wie oben.

Anmerkung. Vielleicht ist diese umständliche Herleitung unnöthig; aber sie zeigt zugleich das in ähnlichen Fällen nöthige Verfahren.

§. 101. Wenn man die nach diesen Regeln gefundene Richtung des gesammten Druckes, welchen A leidet, verlängert: so geht sie durch den Durchschnittspunct der Richtungslinien BD und CE. Denn, nennt man die Entfernung AN, wo die verlängerte MA in DF einschneidet $= x$, so ist $AH = x \cdot \text{Sin}\, FNA$; nennt man die Entfernung AN bis zu dem Puncte, wo MA die EC schneidet $= y$, so ist $AI = y \cdot \text{Sin}\, ANG$, also

$$x = \frac{AH}{\text{Sin FNA}} \text{ und } y = \frac{AI}{\text{Sin ANG}}.$$

Da nun ANG = MAL und ANF = MAK und im Parallelogramm der Kräfte nothwendig P . Sin KAM = Q . Sin MAL, und zugleich wegen Voraussetzung des Gleichgewichtes (§. 97.) $AH = \frac{Q \,.\, AI}{P}$, so wird

$$x = \frac{Q \,.\, AI}{P \,.\, \text{Sin KAM}} = y = \frac{AI}{\text{Sin MAL}}.$$

Die Kräfte wirken also völlig so, als ob sie in dem Durchschnittspuncte N ihrer Richtungen angebracht wären, und es ist einleuchtend, daß keine Drehung um A erfolgen kann, wenn die Richtung NA des mittleren oder gesammten Druckes der Kräfte grade auf den unterstützten Punct A zu geht.

§. 102. Wäre nicht die ganze Ebne AFGN eine feste Ebne, sondern die Kräfte wirkten an den als feste Stäbe verbundenen Linien AB, AC oder am Winkelhebel BAC, in Richtungen, welche selbst in die Ebne BAC fallen: so gelten offenbar ganz dieselben Schlüsse. Der Winkelhebel brauchte auch nicht aus graden Stäben AB, AC zusammengesetzt zu sein, sondern jeder krumme Hebel, sofern wir seine eigne Schwere bei Seite setzen, gehört ganz hieher. Jedoch wird bei unsrer jetzigen Untersuchung immer vorausgesetzt, daß die Richtungslinien der Kräfte alle in eben der Ebne liegen, in welcher sich zugleich der unterstützte Punct mit befindet.

Eine der leichtesten Anwendungen dieser Sätze geben die Kräfte, welche an der Rolle, einer kreisförmigen um den Mittelpunct beweglichen Ebne, im Gleichgewicht sind, wie Fig. 62. Wirken hier die Kräfte nach den Tangenten der Rolle, so müssen sie offenbar gleich sein, wenn das Gleichgewicht bestehen soll.

§. 103. Aufgabe. Es wirken am graden Hebel, der in einem Puncte A (Fig. 36.) unterstützt ist, Kräfte nach verschiedenen Richtungen, die jedoch alle in einerlei

Ebne liegen; man sucht zu bestimmen, unter welchem Winkel eine in M anzubringende gegebne Kraft = U wirken muß, um das Gleichgewicht zu erhalten, und es soll bestimmt werden, welchen Druck, bei bestehendem Gleichgewichte, die Unterlage A leidet.

Auflösung. Man multiplicire jede Kraft in den senkrechten Abstand des Punctes A von ihrer Richtungslinie: so muß die richtig genommene Summe dieser Momente = o sein, wenn sich alle Kräfte, die U mit dazu gerechnet, das Gleichgewicht halten sollen. Es wird daher die erforderliche Richtung der Kraft U durch eine leicht zu lösende Gleichung bestimmt, indem der senkrechte Abstand des Punctes A von ihrer Richtungslinie MS, = AM . Sin NMS ist, wenn NMS den richtigen Winkel andeutet.

Beispiel. (Fig. 36.) Es sei in B die Kraft = P unter dem Winkel ABD = α; in C die Kraft = Q unter dem Winkel MCE = $-\beta$, in F die Kraft = R unter dem Winkel MFG = γ angebracht; in M soll eine gegebne Kraft = U unter dem zu bestimmenden Winkel NMS = φ wirken; dann ist die Summe der Momente aller Kräfte $= P . AB . \sin\alpha + Q . AC . \sin\beta - R . AF . \sin\gamma - U . AM . \sin\varphi$, welche = o gesetzt,

$$\sin\varphi = \frac{P . AB . \sin\alpha + Q . AC . \sin\beta - R . AF . \sin\gamma}{U . AM},$$

giebt.

Die Momente sind hier so genommen, daß die nach oben gerichteten Kräfte, als unter negativen Winkeln geneigt, und die rechts von A liegenden Entfernungen als negativ angesehen sind.

Der Druck, welchen A leidet, wird leicht gefunden, denn er ist aus der auf den Hebel senkrechten Kraft, $= P . \sin\alpha - Q . \sin\beta + R . \sin\gamma + U . \sin\varphi$, und aus der mit ihm parallelen gegen N zu wirkenden Kraft $= P . \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma + U \cos\varphi$ zusammengesetzt.

§. 104. Wenn die Richtung der Kraft U gesucht wird, welche zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderlich ist: so könnte es sich treffen, daß man Sin $\varphi > 1$ fände. Ist dieses der Fall, so kann die Kraft Q in der bestimmten Entfernung = AM gar nicht das Gleichgewicht erhalten; sondern man müßte entweder U oder AM vergrößern, um die Wirkung der übrigen Kräfte aufzuheben.

§. 105. Wäre in der vorigen Aufgabe der Winkel = φ gegeben, so könnte man entweder U oder AM zu suchen verlangen, und jedes dieser beiden fände man ohne alle Schwierigkeit.

§. 106. Aufgabe. Am graden Hebel wirken bekannte Kräfte an gegebenen Puncten, und in gegebenen Richtungen, die alle in derselben Ebne liegen; man verlangt den Punct A zu bestimmen, welcher unterstützt werden muß, damit das Gleichgewicht bestehe (Fig. 37.).

Auflösung. Man rechne die Entfernungen der Puncte, auf welche die einzelnen Kräfte wirken, von einem gegebenen Puncte O an; multiplicire jede Kraft in den Sinus des Neigungswinkels, den ihre Richtung mit dem Hebel macht, und in ihre Entfernung von O; nehme die richtige Summe dieser Producte, und dividire sie mit der Summe der Producte aus jeder Kraft in den Sinus ihres Neigungswinkels: so giebt der Quotient die Entfernung des zu unterstützenden Punctes von O an.

Beweis. Wirket in B die Kraft = P unter dem Winkel OBG = $+\alpha$; in C die Kraft = Q unter dem Winkel OCH = $-\beta$; in D die Kraft = R unter dem Winkel ODI = γ: so ist die Summe der aus ihnen entspringenden, auf OA senkrechten Kräfte = $P \cdot \text{Sin}\,\alpha - Q \cdot \text{Sin}\,\beta + R \cdot \text{Sin}\,\gamma$.

Stellt nun A den Mittelpunct der senkrecht auf den Hebel wirkenden Kräfte vor, und es ist OA = x; so muß $x \cdot (P \cdot \text{Sin}\,\alpha - Q \cdot \text{Sin}\,\beta + R \cdot \text{Sin}\,\gamma)$ gleich sein, der Summe der Momente der einzelnen in B, C, D, auf

OA senkrechten Kräfte, wenn man diese Momente in Beziehung auf den Punct O rechnet (§. 94.). Es ist daher

$$x\,(P\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha - Q\,.\,\mathrm{Sin}\,\beta + R\,.\,\mathrm{Sin}\,\gamma) =$$
$$P\,.\,OB\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha - Q\,.\,OC\,.\,\mathrm{Sin}\,\beta + R\,.\,OD\,.\,\mathrm{Sin}\,\gamma.$$

§. 107. Aufgabe. Es sind die Richtungen der gegebenen Kräfte P, Q, R bestimmt, welche (Fig. 38.) die Ebne BAC um den festgehaltenen Punct A zu drehen streben; wie groß muß eine in U angebrachte, nach der Richtung UV wirkende Kraft = x sein, um jenen Kräften das Gleichgewicht zu halten, wenn die Richtungen aller in der Ebne BAC liegen.

Auflösung. Man multiplicire jede Kraft in den senkrechten Abstand ihrer Richtungslinie von dem Drehungspuncte A: so muß die gehörig genommene Summe dieser Momente = x . AV sein, wenn AV die von A auf die Richtung der Kraft gezogene Senkrechte ist. Der Beweis erhellt aus §. 97.

§. 108. Aufgabe. Es sind die Richtungen (Fig. 39.) der gegebenen Kräfte P, Q, R bekannt, welche in B, C, D angebracht, nach Richtungen, die in der Ebne BCD liegen, diese zu verrücken streben: man soll bestimmen, ob es irgend einen Punct A gebe, welcher allein unterstützt zu werden braucht, um jede Bewegung der Ebne zu hindern, oder um die Kräfte zum Gleichgewichte unter sich zu bringen, und, wenn es einen solchen giebt, seine Lage finden.

Auflösung. Man ziehe in der Ebne zwei auf einander senkrechte, übrigens willkürliche Linien OE, OF, und verlängere die Richtungslinien BG, CH, DI der wirkenden Kräfte, bis sie eine dieser Linien OE treffen. Betrachtet man nun die Kräfte, als da angebracht, wo ihre Richtungen die Linie OE schneiden, nämlich P in L unter dem Winkel OLG, Q in K unter dem Winkel OKH, R in E unter dem Winkel OEI: so lassen sich alle Kräfte zerlegen, in Seitenkräfte mit OE parallel, und in Seitenkräfte auf OE senkrecht, oder mit OF parallel.

Man suche (nach §. 106.) den Punct M, welcher unterstützt werden müßte, damit alle auf OE senkrechten Kräfte sich im Gleichgewichte erhielten. Dieser Punct ist einer von denen, welche man unterstützen kann, um das Gleichgewicht zu erhalten.

Beweis und Erläuterung. Die Richtigkeit der Auflösung erhellt, wofern alle Richtungslinien die Linie OE schneiden (aus §. 97.). Würde OE nicht von allen Richtungslinien geschnitten, so wählte man statt dieser, an sich willkürlichen Linie, besser eine andre, die von allen geschnitten würde.

Auffallend kann es vielleicht scheinen, daß wir den verlangten Ruhepunct in jeder dieser Linien OE finden können; aber es läßt sich wohl übersehen, daß es eine ganze Reihe von Puncten giebt, die jeder allein unterstützt das Gleichgewicht erhalten. Wir haben gesehen (§. 100.) daß die Wirkung zweier Kräfte Q nach CH und R nach DI, völlig aufgehoben wird, wenn ein Punct der Ebne unterstützt wird, der in der mittleren Richtung NR der Kräfte, wenn man sich diese als im Durchschnittspuncte N ihrer Richtungen angebracht vorstellt, liegt; und daß ein solcher Punct R eben den Druck leidet, als ob Q in N nach der Richtung NH, R in N nach der Richtung NI wirkte, oder eben den Druck, als ob die aus ihnen entstehende Mittelkraft = S, noch NS an dem Puncte N selbst angebracht wäre. Trifft nun die verlängerte Richtung NS, RS dieser Mittelkraft die Richtung BG der dritten Kraft P in einem Puncte Q: so ist es eben so gut, als ob jene Mittelkraft = S nach der Richtung QS in Q, und die Kraft P nach QG in Q angebracht wäre. Die aus ihnen entstehende Mittelkraft, welche nach der Richtung QM wirkt, kann daher als die angesehen werden, welche eben das, wie jene Kräfte bewirkt, und jeder Punct, welcher in der Richtungslinie QM liegt, ist geschickt, um festgehalten die Drehung der ganzen Ebne zu hindern, sowohl wenn bloß diese Mittelkraft vorhanden ist, als wenn die Kräfte P, Q, R nach ihren ursprünglichen Richtungen wirken.

§. 109. Man hätte auch jede Kraft in dem Puncte selbst, wo sie angreift, als in Seitenkräfte gegen OE und OF senkrecht zerlegt, sich denken können. Die auf OE senkrechten Kräfte könnte man sich als in den Puncten zum Beispiel T, wo ihre Richtungen die OE treffen, angebracht vorstellen, und den in OE liegenden Mittelpunct dieser Kräfte, welchen ich mit V bezeichne, suchen. Eben so wären die auf OF senkrechten Kräfte so zu betrachten, als ob sie in U und den übrigen Puncten, wo ihre Richtungen die OF treffen, angebracht wären; und man müßte den Mittelpunct W dieser Kräfte suchen. Zieht man dann VX mit OF, WX mit OE parallel: so ist X einer der Puncte, die man unterstützen darf, und auch hier könnte man aus der Richtung des auf X ausgeübten Druckes die Richtungslinie finden, in der alle Puncte liegen, welche sich hier zu Ruhepuncten eignen.

§. 110. Lehrsatz. Wenn in einer um A beweglichen Ebne die Kräfte P, p, π nach Richtungen BD, bd, $\beta\delta$ wirken, die in der Ebne selbst liegen (Fig. 40.), und es wird die ganze Ebne um einen sehr geringen Winkel um A gedreht: so ist die Summe der Producte aus jeder Kraft, in den ihrer Richtung parallelen Weg, welchen der Punct, auf den sie wirkt, durchläuft, gleich Null, wenn die Kräfte sich in Beziehung auf die Drehung um den unterstützten Punct A im Gleichgewichte erhalten.

Beweis. Es sei der Drehungswinkel, den wir als sehr klein voraussetzen, $BAC = bAc = \beta A\gamma = \alpha$; so ist der von dem Puncte B durchlaufene Weg $= \alpha . AB$, und der von B nach der Richtung BD durchlaufene Weg $= BE = -\alpha . AB . \text{Cos}\, CBE$, oder weil bei kleinen Winkeln beinahe Sehne und Bogen gleich, das ist $\alpha = 2 . \text{Sin}\, \frac{1}{2}\alpha$ ist,

$$BE = -2 . AB . \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}\alpha . \text{Cos}\, CBE.$$

$$= -2 . AB . \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}\alpha\, \text{Cos}(ABE - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha))$$

weil $ABC = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$,

oder $BE = -2\, AB . \text{Sin}\, \frac{1}{2}\alpha . \text{Sin}\,(ABE + \frac{1}{2}\alpha)$.

Eben so ist $be = 2 \,.\, Ab \,.\, \text{Sin}\, \frac{1}{2}\alpha \,.\, \text{Sin}\,(Abe + \frac{1}{2}\alpha)$,
$\beta\varepsilon = -2 \,.\, A\beta \,.\, \text{Sin}\, \frac{1}{2}\alpha \,.\, \text{Sin}\,(A\beta\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha)$,
also die Summe der Producte aus jeder Kraft in den ihrer Richtung parallelen Weg

$$= 2 \,.\, \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \begin{pmatrix} -P \,.\, AB \,.\, \text{Sin}\,(ABE + \frac{1}{2}\alpha) \\ +p \,.\, Ab \,.\, \text{Sin}\,(Abe + \frac{1}{2}\alpha) \\ -\pi \,.\, A\beta \,.\, \text{Sin}\,(A\beta\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha) \end{pmatrix}$$

Nimmt man hier α so klein an, daß man $\text{Sin}\,(ABE + \frac{1}{2}\alpha)$ mit Sin ABE verwechseln und bei den übrigen Winkeln eben so verfahren darf: so ist der eingeschlossene Factor $= -P \,.\, AB \,.\, \text{Sin}\, ABE + p \,.\, Ab \,.\, \text{Sin}\, Abe + \pi \,.\, A\beta \,.\, \text{Sin}\, A\beta\varepsilon$, und dieses ist die Summe der Momente aller Kräfte, welche beim Gleichgewichte $= 0$ ist.

§. 111. Das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten findet also auch hier statt, wenn man eine so sehr kleine Drehung, oder α überaus klein, annimmt. Und diese Voraussetzung ist hier erlaubt, da beim Gleichgewichte gar keine Drehung erfolgt, sondern die Wirkung, welche die eine Kraft hervorzubringen strebt, von der übrigen schon, ehe sie erfolgt, aufgehoben wird.

Man kann beim Hebel, wenn zwei parallel wirkende Kräfte einander im Gleichgewichte erhalten, dieses Gesetz so ausdrücken, daß die Kräfte sich umgekehrt verhalten, wie die Wege, welche die Puncte, auf den sie wirken, bei einer kleinen Drehung des Hebels durchlaufen würden. Hieraus erklärt es sich, wie eine kleine Kraft einer großen das Gleichgewicht halten kann; denn die geringste, durch jene bewirkte Verrückung würde den von der kleinen Kraft festgehaltenen Punct durch einen sehr erheblichen Weg fortbewegen, und es ist offenbar, daß eine so starke Fortrückung nicht mit der Intensität der Kraft bewirkt wird, als jene von derselben Kraft hervorgebrachte geringere Verrückung; ihr wird also hier durch eine Kraft von geringerer Intensität hinreichend widerstanden.

Durch ähnliche Ueberlegungen ließe sich auch in andern Fällen das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten begreiflicher machen.

Vierter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte der Kräfte, welche auf verschiedene Puncte eines Körpers nach Richtungen wirken, die nicht in einer Ebne liegen.

§. 112. Erklärung. Wenn zwei Puncte eines festen Körpers unverrückt festgehalten werden, so daß der Körper sich um die zwischen ihnen gezogene grade Linie frei drehen kann: so heißt diese grade Linie seine Axe oder Umdrehungsaxe.

§. 113. Lehrsatz. Wenn eine feste Ebne (Fig. 41.) sich um die Axe EF, die hinreichend unterstützt ist, frei drehen kann: so besteht das Gleichgewicht, wenn für alle auf die Ebne wirkenden Kräfte die Summe der Producte einer jeden Kraft in die senkrechte Entfernung des Punctes, wo sie wirkt, von der Axe, und in den Sinus des Neigungswinkels ihrer Richtungslinie gegen die Ebne verschwindet.

Beweis. Es sei (Fig. 41.) ABCD die um die Axe EF bewegliche Ebne. Wirken nun in G und H Kräfte nach den Richtungen GI, HK: so ziehe man in der Ebne selbst GL, HM auf EF senkrecht. Legt man nun durch die Richtungen GI, HK der Kräfte Ebnen auf die bewegliche Ebne ABCD senkrecht: so werden sie diese irgendwo in GN, HO schneiden, und IGN, KHO sind die Neigungswinkel der Richtungslinien gegen die bewegliche Ebne.

Hier läßt sich nun offenbar die nach GI wirkende

Kraft = P in zwei Seitenkräfte eine mit GN parallel, eine auf GN und die Ebne ABCD senkrecht, zerlegen. Die erstere übt bloß einen Druck gegen die Axe EF aus, und wirkt nicht auf die Umdrehung; die zweite = P . Sin IGN ist, als in G senkrecht auf die Ebne ABCD wirkend anzusehen. Eben so kömmt von der in H wirkenden Kraft = Q nur derjenige Theil für die Umdrehung in Betrachtung, welcher = Q . Sin KHO, und in H auf die Ebne senkrecht ist, indem die nach HO gerichtete Seitenkraft bloß auf die Axe drückt.

Diese Kräfte = P . Sin IGN und = Q . Sin KHO, wirken parallel, und ihre gesammte Wirkung ist (§. 92. 94.) einer ihnen parallelen Kraft = P . Sin IGN + Q . Sin KHO gleich, welche in dem Puncte R der graden Linie HG angebracht wäre, für den HR : GR = P. Sin IGN : Q. Sin KHO ist. Dieser Punct liegt in der Umdrehungsaxe, wenn GL : HM = GR : HR folglich wenn Q . HM . Sin KHO = P . GL . Sin IGN ist, und alsdann besteht das Gleichgewicht. Dieser Ausdruck giebt die im Lehrsatz erwähnte richtig genommene Summe = o.

Es ist leicht zu übersehen, daß eben diese Schlüsse sich auf mehrere wirkende Kräfte anwenden lassen.

Läge nämlich der Mittelpunct der in G und H auf die Ebne senkrecht wirkenden Kräfte nicht in R, in der Axe, sondern etwa in S: so wäre (§. 92.)

$$GS = \frac{Q . HG . \text{Sin } KHO}{P . \text{Sin } IGN + Q . \text{Sin } KHO},$$

und, wenn SU senkrecht auf EF ist,

$$GH : GL + HM = GS : GL - SU,$$

$$\text{oder } SU = GL - \frac{GS . (GL + HM)}{GH},$$

$$\text{oder } SU = GL - \frac{Q . \text{Sin } KHO . (GL + HM)}{P . \text{Sin } IGN + Q . \text{Sin } KHO};$$

$$= \frac{P . GL . \text{Sin } IGN - Q . HM . \text{Sin } KHO}{P . \text{Sin } IGN + Q . \text{Sin } KHO}.$$

Das Product aus der vereinigten, in S senkrecht auf die Ebne wirkenden Kraft = P . Sin IGN + Q . Sin KHO, in ihre Entfernung von der Axe SU ist also eben so groß als die Summe der einzeln wirkenden senkrechten Kräfte in ihre zugehörige Entfernung von der Axe, und folglich ist es nun klar, daß in X eine auf die Ebne senkrechte Kraft = R das Gleichgewicht herstellt, wenn R . XZ = SU . (P . Sin IGN + Q . Sin KHO) ist, wo XZ die senkrechte Entfernung des Punctes X von der Axe bedeutet.

§. 114. Die Kräfte erhalten also einander im Gleichgewichte, wenn die Summe aller Producte aus den gegen die Ebne senkrechten Kräften in ihre senkrechten Abstände von der Axe = 0 wird. Diese Producte könnten hier die Momente der einzelnen Kräfte heißen, deren Summe folglich auch hier verschwinden muß, wenn das Gleichgewicht bestehen soll.

Der Ausdruck für diese Momente läßt sich noch unter eine andre Form fassen.

§. 115. Lehrsatz. Aufgabe. In der Ebne ABCD (Fig. 42.) ist die Linie EF gezogen, und eine andre Linie IG schneidet jene Ebne in G unter dem Neigungswinkel = IGN; man sucht den kleinsten Abstand der IG von FE.

Auflösung. Man ziehe durch G eine Linie KL mit EF parallel, lege durch IGL eine Ebne, und setze auf sie von irgend einem Puncte der EF eine Senkrechte: diese Senkrechte ist der kleinste Abstand, welchen es zwischen EF und IG giebt.

Beweis. Da IG ganz in der mit EF parallelen Ebne IGL (Geom. §. 393.) liegt, und dieser Ebne Entfernung von EF durch die von EF auf sie gezogene Senkrechte abgemessen wird: so kann IG der EF nirgends näher kommen. Sie kömmt ihr aber auch so nahe; denn die sammtlichen von Puncten der EF auf die Ebne IGL gesetzten Senkrechten treffen diese (*) in Puncten, welche in einer zu KL parallelen Linie liegen; und da diese Parallele gewiß die GI schneidet, so ist auch unter jenen Senkrechten eine die GI schneidende.

§. 116. Dieser kürzeste Abstand läßt sich berechnen. Es sei IGN die auf ABCD senkrechte durch IG gelegte Ebne, IGN $= \nu$ der Neigungswinkel, der IG gegen ABCD, und NGL $= \mu$ der Winkel, welchen die Durchschnittslinien GN der senkrechten und GL der zu EF parallelen Ebne mit ABCD gegen einander bilden. Ist nun T der Punct, wo das Perpendikel die mit EF parallelen Ebne trifft, und SR der senkrechte Abstand der Parallellinien EF, KL von einander: so ist $ST = SR \cdot \text{Sin}\, SRT$; SRT aber ist der Ebne IGL Neigungswinkel und (Sphär. Trigon. §. 81.) durch $\text{tang}\, SRT = \frac{\text{tang}\, \nu}{\text{Sin}\, \mu}$ bestimmt.

§. 117. Lehrsatz. Wenn die Ebne ABCD sich um EF frei drehen kann (Fig. 42.), so ist das Moment (§. 114.) einer jeden Kraft in Beziehung auf diese Axe, gleich dieser Kraft multiplicirt in den kleinsten Abstand ihrer Richtungslinie von der Axe, und multiplicirt in den Sinus des Winkels, welchen die Richtungslinie mit der der Axe parallel gezogenen Linie KL macht.

Beweis. Ich nehme die Figur so wie §. 115, und GI ist die Richtung der Kraft $= P$. Das Moment der Kraft war nach den vorigen Bestimmungen $= P \cdot \text{Sin}\,.\, IGN \,.\, GM = P \,.\, SR \,.\, \text{Sin}\, \nu$. In dem körperlichen Dreiecke an G ist der Winkel IGN $= \nu$ die eine Cathete und TGR die Hypotenuse, TRS ist der Neigungswinkel, welcher jener Cathete gegenübersteht. Daher (Sphär.

(*) Dieses läßt sich aus Geom. §. 384. ableiten. Es erhellt aber auch daraus, weil die Senkrechten gleich und parallel sind, also die Verbindungslinien ihrer Endpuncte parallel zu EF, parallel zu KL werden.

Trig. §. 77.) $\text{Sin TGR} = \frac{\text{Sin } \nu}{\text{Sin TRS}} = \text{Cos GTR}$.

Denkt man sich die Kraft P nach Richtungen mit KL parallel und auf KL senkrecht zerlegt, so wirkt die letztere Kraft mit TR parallel und ist $= \text{P . Cos GTR}$ $= \frac{\text{P . Sin } \nu}{\text{Sin SRT}}$. Diese in den senkrechten Abstand ST $= \text{SR . Sin SRT}$ von der Axe, multiplicirt, ist offenbar das zur Drehung wirkende Moment $= \text{P . SR . Sin } \nu$; oder in Fig. 41. $= \text{P . GL . Sin } \nu$, wie §. 113.

§. 118. Man findet also das Moment der Kraft P, wenn man sie zerlegt nach einer mit EF parallelen Richtung, und nach einer in der Ebne KGI liegenden, auf KL senkrechten Richtung, und wenn man die letztere mit dem kleinsten Abstande der Richtungslinie von der Axe multiplicirt.

§. 119. Aufgabe. Wenn die Ebne ABCD bloß in den Puncten E und F (Fig. 43.) festgehalten wird, den Druck zu finden, welchen diese Puncte leiden, wenn eine Kraft = P, deren Richtung in der Ebne selbst liegt, die Ebne zu verrücken strebt.

Auflösung. Die festgehaltenen Puncte EF leiden eben den Druck, welchen sie leiden würden, wenn die Kraft P unmittelbar an L, wo die Richtungslinie HG die festgehaltene Axe EF schneidet, angebracht wäre. Daher ist der Druck, welchen E und F parallel mit EF leiden, $= \text{P . Cos HLE}$, und der Druck senkrecht auf EF ist in F, $= \frac{\text{P . EL . Sin HLE}}{\text{EF}}$;

in E, $= \frac{\text{P . FL . Sin HLE}}{\text{EF}}$.

Der Beweis erhellt aus §. 23. 63. 92.

§. 120. Man hätte die in G wirkende Kraft = P auch im Puncte G selbst als in zwei Seitenkräfte zerlegt ansehen können, eine $= \text{P . Sin GLE}$ senkrecht auf die Axe, eine $= \text{P . Cos GLE}$ mit ihr parallel. Hier bringt offenbar die erstere bei M einen ihr gleichen, auf die Axe senkrechten Druck hervor, der in E den Druck $= \frac{FM . P . Sin\ GLE}{EF}$ bewirkt (§. 92.).

Die andre würde, wenn F allein festgehalten wird, die Ebne um F zu drehen streben und eine Kraft in E senkrecht auf EF müßte (§. 97.) $= P . Cos\ GLE . \frac{GM}{EF}$ sein, um ihr das Gleichgewicht zu halten. Der Punct E leidet also auf EF senkrecht den Druck

$$= \frac{P}{EF} . (GM . Cos\ GLE - FM . Sin\ GLE)$$

oder, da $GM = GL . Sin\ GLE$, und

$$FM = FL + GL . Cos\ GLE,$$

den Druck $= \frac{P . FL . Sin\ GLE}{EF}$, wie oben.

Auf ähnliche Weise würde man für F rechnen, wenn man E als allein unterstützt ansähe.

§. 121. Aufgabe. Die in den Puncten E, F festgehaltene und um EF frei bewegliche Ebne ABCD, wird von Kräften = P in G, und Q in H, deren Richtungen GI, HK nicht in der Ebne selbst liegen, gedrückt; man sucht den Druck, welchen die unterstützten Puncte E und F leiden, wenn jene Kräfte sich im Gleichgewichte erhalten (Fig. 41.).

Auflösung. Man zerlege beide Kräfte in die auf die Ebne senkrechten Seitenkräfte $= P . Sin\ IGN$ und $= Q . Sin\ KHO$, und die der Ebne parallelen Seitenkräfte nach den Richtungen GN und HO, in welchen die durch IG, HK gelegten auf ABCD senkrechten Ebnen diese schneiden.

Da das Gleichgewicht bestehen soll, so liegt (§. 113.) der Mittelpunct der auf ABCD senkrechten Kräfte in der Axe in R, und es ist so gut, als ob ihre Summe dort die Axe nach einer auf die Ebne senkrechten Richtung drückte. Die nach GN wirkende Kraft $= P . Cos\ IGN$

drückt die Axe so, als ob sie da, wo die verlängerte GN die Axe schneidet, nach derselben Richtung an ihr angebracht wäre, und da eben das mit der nach HO wirkenden Kraft = Q . Cos KHO der Fall ist, so ergeben §. 92. 119. die fernere Auflösung.

§. 122. Die auf die Ebne senkrechten Kräfte üben auf die Axe eben den Druck aus, als ob sie da, wo die von ihren Angriffspuncten gegen die Axe gezognen Senkrechten GL, HM diese treffen, in M und L ihren wahren Richtungen parallel wirkten. Denn es ist GR : HR = LR : MR, und R leidet folglich den Druck = S + T, es mag die Kraft = S in G und T in H, oder die Kraft = S in L und T in M wirken, wofern sie nur im Gleichgewichte erhalten werden.

§. 123. Lehrsatz. Wenn die Ebnen ABCD, ADEF (Fig. 44.) in AD so gegen einander befestigt sind, daß sie ihre gegenseitige Lage nicht verändern, sich aber vereinigt um AD frei drehen können: so halten Kräfte, welche auf eine oder die andre dieser Ebnen wirken, einander im Gleichgewichte, wenn die Summe der Drehungsmomente = o ist, das heißt, wenn die Summe der Producte aus jeder Kraft in den Sinus ihres Neigungswinkels gegen die Ebne auf welche sie wirkt, und in die senkrechte Entfernung ihres Angriffspunctes von der Axe, verschwindet.

Beweis. Es wirke die Kraft = P in H nach der Richtung HN auf die eine Ebne unter dem Neigungswinkel NHI = ν. Man lege durch ihre Richtung die Ebne NHI senkrecht auf jene, und bezeichne mit HIA = μ den Winkel, welchen ihre Durchschnittslinie mit der Axe macht.

Dann kann man P in zwei Seitenkräfte zerlegen, eine = P . Sin ν auf die Ebne ABCD senkrecht, eine = P . Cos ν nach der Richtung HI. Die letztere trägt gar nicht zu Erhaltung des Gleichgewichts bei.

Wenn eben so eine Kraft = Q in G nach der Richtung GO unter dem Winkel = n = OGK gegen die Ebne ADEF geneigt wirkt, und es ist OGK die auf ADEF senkrechte Ebne und GKA = m, so ist die auf ADEF senkrechte Kraft = Q . Sin n, die einzige für das Gleichgewicht in Betracht kommende, indem die nach GK wirkende Kraft bloß einen Druck auf die Axe ausübt.

Dieser auf ADEF in G senkrecht wirkenden Kraft = Q . Sin n in der senkrechten Entfernung = GK . Sin m von der Axe, würde eine senkrecht auf die andre Ebne in U wirkende eben so große Kraft = Q . Sin n das Gleichgewicht halten, wenn die von G und von U senkrecht gegen die Axe gezogenen Linien GT = TU wären, und beide die Axe in demselben Puncte T träfen (§. 97.). Eine solche in U angebrachte Kraft = Q . Sin n, welche nach eben der Richtung wie Q die Drehung der Ebne zu bewirken strebte, würde also in Beziehung auf die Drehung ihr gleichgeltend sein. Diese Kraft aber würde von P im Gleichgewichte erhalten, §. 113., wenn Q . Sin n . UF = P . Sin ν . HV und HV auf die Axe senkrecht ist, woraus die Richtigkeit des Lehrsatzes erhellt, der leicht auf mehrere Kräfte angewandt werden könnte.

§. 124. Lehrsatz. Wenn eben die Verbindung der Ebnen, wie vorhin, statt findet, die Kräfte P in H und Q in G aber jede auf ihre Ebne senkrecht wirken: so leidet die Axe, wofern die Kräfte einander im Gleichgewichte erhalten, eben den Druck, welchen sie litte, wenn P in V und Q in T, jede nämlich in dem Puncte der Axe, wo diese von dem durch den Angriffspunct gezogenen Perpendikel getroffen wird, ihrer wahren Richtung parallel wirkte.

Beweis. Es sei in U die auf ABCD senkrechte Kraft = $\frac{Q \cdot GT}{UT}$, um der Q das Gleichgewicht zu halten, und nach der grade entgegengesetzten Richtung in U die Kraft $= \frac{P \cdot HV}{UT}$, um P das Gleichgewicht zu halten. Da wir angenommen haben, daß P und Q für sich im Gleichgewichte sind: so werden die in U angebrachten Kräfte einander ganz gleich sein, und sich aufheben. Aber die erstern der an U angebrachten Kräfte bringt, mit Q vereint wirkend, auf den Punct T der Axe, wo nämlich beide Senkrechten GT, UT die Axe treffen, eben den Druck hervor, den dieser Punct leiden würde, wenn dieselben Kräfte dort ihren wahren Richtungen parallel angebracht wären (§. 100.). Die zweite an U wirkende Kraft, zugleich wirkend mit P, welcher sie das Gleichgewicht hält, drückt die Axe eben so, als ob sie in T ihrer wahren Richtung parallel, und P in V ihrer wahren Richtung parallel angebracht wäre (§. 122.). Der Druck der vier Kräfte auf die Axe ist also ganz eben so, als ob Q in T und P in V auf die Axe selbst ihren wahren Richtungen parallel wirkten, indem die Wirkungen der beiden in U angenommenen Kräfte auch in Beziehung auf den Druck gegen die Axe einander ganz aufheben, da es für den Druck so ist, als ob die gleichen Kräfte in grade entgegengesetzten Richtungen auf denselben Punct der Axe drückten.

§. 125. Aufgabe. Wenn alles so ist wie §. 123. und die Kräfte einander im Gleichgewichte erhalten; den Druck zu bestimmen, welchen die beiden festgehaltenen Puncte der Axe, zum Beispiel A und D leiden.

Auflösung. Man zerlege P in die auf ABCD senkrechte Kraft $= P \cdot \text{Sin}\, \nu$, und die mit der Ebne parallele, nach HI gerichtete Kraft $= P \cdot \text{Cos}\, \nu$.

Eben so betrachte man Q als entstanden aus einer auf die Ebne ADEF senkrechten Kraft $= Q \cdot \text{Sin}\, n$ und einer ihr parallelen, nach GK gerichteten Kraft $= Q \cdot \text{Cos}\, n$. Man findet nun, da $P \cdot \text{Sin}\, \nu$ und $Q \cdot \text{Sin}\, n$ einander im Gleichgewichte erhalten, ihren Druck auf die Axe, wenn man von den Angriffspuncten H, G, Senkrechte HV, GT gegen die Axe AD zieht, und P . Sin ν als in V senkrecht auf ABCD, Q Sin n als in T senkrecht auf ADEF wirkend ansieht (§. 122.). Dann ergiebt sich aus der erstern auf A der Druck $= \frac{VD . P \text{ Sin } \nu}{AD}$ senkrecht auf ABCD; aus der zweiten auf A der Druck $= \frac{TD . Q . \text{Sin n}}{AD}$ senkrecht auf ADEF.

Die nach HI gerichtete Seitenkraft $= P . \text{Cos} \nu$ ist anzusehen, als ob sie in I selbst auf die Axe wirkte, und folglich dort einen Druck $= P . \text{Cos} \nu . \text{Cos} \mu$ mit der Axe parallel, und einen Druck $= P . \text{Cos} \nu . \text{Sin} \mu$ auf sie senkrecht in der Richtung der Ebne ABCD hervorbrächte. Vermöge der erstern leiden die Unterstützungspuncte einen Druck $= P . \text{Cos} \nu . \text{Cos} \mu$ nach der Richtung der Axe selbst; vermöge der letztern leidet A den Druck $= \frac{DI}{AD} . P . \text{Cos} \nu . \text{Sin} \mu$ mit HV parallel. Eben so findet man aus Q in G den der Axe parallelen Druck $= Q . \text{Cos n} . \text{Cos m}$ und den mit GT parallelen Druck auf den Punct A, $= \frac{DK}{AD} . Q . \text{Cos n} . \text{Sin m}$.

A leidet also außer dem der Axe parallelen Drucke $= Q . \text{Cos n Cos m} + P . \text{Cos} \nu \text{ Cos} \mu$ einen zusammengesetzten Druck, dessen gesammte Größe und Richtung aus

der Kraft $= \frac{P . VD . \text{Sin} \nu}{AD}$ senkrecht auf AD und AB,

d. Kraft $= \frac{Q . TD . \text{Sin n}}{AD}$, senkrecht auf AD und AE,

d. Kraft $= \frac{P . DI . \text{Cos} \nu . \text{Sin} \mu}{AD}$ parallel mit HV,

d. Kraft $= \frac{Q . DK . \text{Cos n} . \text{Sin m}}{AD}$ parallel mit GT hergeleitet werden müßte.

Der Druck auf D läßt sich nach denselben Regeln bestimmen.

§. 126. Aufgabe. Auf einen Körper, welcher sich um die in A und B festgehaltene Axe frei drehen kann (Fig. 45.), wirken in verschiedenen Puncten C, D, E gegebene Kräfte nach bekannten Richtungen; man soll bestimmen, ob das Gleichgewicht bestehen kann, und welchen Druck bei bestehendem Gleichgewichte die unterstützten Puncte leiden.

Erste Auflösung. Man denke sich durch die Axe AB und jeden der Puncte, auf welchen eine der Kräfte wirkt, Ebnen ABC, ABD, ABE gelegt. Dann kann man die in C wirkende Kraft in eine Seitenkraft senkrecht auf die Ebne ABC und in eine mit ihr parallele zerlegen; und eben so kann man mit allen einzelnen Kräften verfahren.

Sollen nun die Kräfte sich in Beziehung auf die Drehung um AB im Gleichgewichte halten: so muß die Summe der Momente der auf die einzelnen Ebnen senkrechten Kräfte $= 0$ sein (§. 123.).

Der Druck auf die Puncte A, B der Axe wird dann nach §. 125. gefunden.

Zweite Auflösung. Man denke sich eine auf die Axe AB senkrechte Ebne: so läßt jede der wirkenden Kräfte sich zerlegen in eine Seitenkraft dieser Ebne parallel, und in eine auf sie senkrecht, das ist mit der Axe parallel. Jene mit der Ebne parallele Kraft läßt sich wieder zerlegen in eine gegen die Axe gerichtete und in eine auf die gegen die Axe gezogene Linie senkrechte Kraft. So zerlegt man jede zum Beispiel auf C wirkende Kraft $= P$ in drei Kräfte,

eine $= Q$ der Axe parallel;

eine $= R$ auf die Axe senkrecht und grade gegen die Axe zu oder von ihr abwärts wirkend;

eine $= S$ in einer auf die Axe senkrechten Ebne senkrecht gegen die nach der Axe zu gezogene Linie.

Die beiden erstern wirken gar nicht auf die Drehung. Wenn also mehrere Kräfte $= P, P', P''$ in Puncten wirken, deren Entfernungen von der Axe = a, a', a'' sind, und es entspringen aus ihnen die Kräfte = Q, Q', Q'' nach der ersten; R, R', R'' nach der zweiten; S, S', S'' nach der dritten Richtung, so muß die gehörig genommene Summe der Producte $aS + a'S' + a''S'' = o$, sein, wenn das Gleichgewicht bestehen soll.

Der Druck auf die Axe müßte hier auf ähnliche Art, wie in der vorigen Auflösung bestimmt werden.

Dritte Auflösung. Man nehme wieder die in der vorigen Auflösung erwähnte, auf AB senkrechte Ebne an; ziehe nun aber in derselben zwei auf einander senkrechte Linien. Man zerlege nun (§. 68.) jede Kraft = P in drei, diesen drei Richtungen parallele Seitenkräfte. Die erste = Q wird so wie vorhin sich ergeben, die zweite mag = U, die dritte = V heißen, und Q', U', V'; Q'', U'', V'' bei den übrigen Kräften dasselbe bedeuten.

Man kann nun alle unter sich parallel wirkenden Kräfte Q, Q', Q'' sich als im Mittelpuncte dieser Kräfte vereinigt vorstellen. Eben so kann man die Summe der U, U', U'' als in dem Mittelpuncte dieser Kräfte vereinigt betrachten, und auch V, V', V'' sich auf ähnliche Weise vereinigt denken. Soll dann das Gleichgewicht bestehen: so muß die Summe der Momente der aus U, U', U'' und aus V, V', V'' entstehenden Kräfte verschwinden. Der gesammte Druck auf die Axe aber wird bestimmt, wenn man die Lage jener Mittelpuncte der Kräfte gefunden hat, und nach den vorigen Regeln verfährt.

§. 127. Aufgabe. Auf verschiedene Puncte eines ganz freien Körpers wirken Kräfte nach gegebenen Richtungen; zu bestimmen, ob dieser Körper in Ruhe bleibt, oder welcher Kräfte es noch bedarf, um ihn im Gleichgewichte zu erhalten.

Auflösung. Man zerlegt am besten, wie §. 126, dritte Aufl. die Kräfte in drei Seitenkräfte, dreien gegebenen auf einander senkrechten Linien parallel, und sucht für jede dieser Richtungen den Mittelpunct aller nach ihr wirkenden Kräfte. Hat man diesen und die Summe der nach der einen Richtung wirkenden Kräfte $= Q + Q' + Q''$ gefunden: so muß sie $= 0$ sein, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, denn die auf diese Richtung senkrecht wirkenden Kräfte können die nach jener Richtung wirkenden Kräfte nicht aufheben. Aus eben dem Grunde muß die Summe der nach der zweiten auf jene senkrechte Richtung wirkenden Kräfte $= R + R' + R''$, die wir uns im Mittelpuncte dieser Kräfte vereinigt denken, $= 0$ sein; und eben das gilt für die Summe der nach der dritten Richtung, senkrecht gegen jene beiden wirkenden Kräfte.

Wären einige dieser Summen oder alle nicht gleich Null: so ergiebt sich aus den Summen der nach jenen drei Richtungen wirkenden Kräfte und aus der Lage der Mittelpuncte der Kräfte, wie man den Körper unterstützen oder mit Hülfe neu angebrachter Kräfte im Gleichgewichte erhalten müßte.

§. 128. Im Allgemeinen kann der Mittelpunct der nach der ersteren Richtung wirkenden Kräfte verschieden sein von dem der Kräfte nach der zweiten Richtung, und dieser wieder verschieden von dem der Kräfte nach der dritten Richtung. Träfe es sich aber, daß sie alle zusammen fielen: so brauchte man nur diesen einen Punct des Körpers gehörig zu unterstützen, um den Körper ganz in Ruhe zu erhalten.

Da wo sich dieses Zusammenfallen der Mittelpuncte der Kräfte nicht ereignet, ist es nicht möglich, daß der Körper durch Unterstützung eines einzigen Punctes in Ruhe erhalten werde.

Lägen die drei Mittelpuncte der Kräfte in grader Linie: so brauchte man nur diese grade Linie in zwei Puncten zu unterstützen, um das Gleichgewicht zu erhalten.

§. 129. **Aufgabe.** Die Ebne ABC, auf welche in D eine Kraft $= P$ nach senkrechter Richtung drückt, ist in den drei Puncten A, B, C unterstützt; man sucht den Druck, welchen jeder dieser Puncte leidet.

Auflösung. Es sei des Punctes D senkrechter Abstand von AB, $= a$, des Punctes C senkrechter Abstand von AB, $= b$: so ist der Druck, welchen C leidet $= \frac{a \cdot P}{b}$.

Eben so wird der Druck für jeden der beiden übrigen Puncte bestimmt.

Beweis. Wird AB hinreichend unterstützt: so muß in C die Kraft $= \frac{a \cdot P.}{b}$ wirken, um das Gleichgewicht zu erhalten.

§. 130. Da sich der Inhalt des Dreieckes ADB zum Dreiecke ACB verhält, wie $a : b$: so ist auch der Druck, welchen C leidet, $= \frac{P \cdot ADB}{ACB}$,

der Druck in B $= \frac{P \cdot ADC}{ACB}$,

der Druck in A $= \frac{P \cdot BDC}{ABC}$.

Die Summe der drei Pressungen ist $= P$.

§. 131. Wenn eine grade Linie, auf welche Kräfte nach der Richtung der Linie selbst wirken, in einem Puncte hinreichend unterstützt ist: so kann eine Frage nach dem Drucke, welchen ein zweiter in ihr unterstützter Punct leidet, nicht statt finden. Wenn eine Ebne von Kräften, deren Richtungen in die Ebne selbst fallen, gedrückt wird: so braucht man nur zwei Puncte der Ebne unverrückt fest zu halten, und von dem Drucke, den ein dritter Punct leidet, kann keine Rede sein. Wirken Kräfte nach verschiedenen Richtungen auf einen Körper: so ist es genug, ihn in drei Puncten zu unterstützen, welche nicht in grader Linie liegen. Sind diese zureichend unterstützt, so kann ein Druck auf einen vierten Punct nicht vorkommen.

§. 132. Wenn man gleichwohl in manchen Fällen nach dem Drucke fragt, welchen die drei in grader Linie liegenden Puncte leiden, in welchen ein grader Balken unterstützt ist, oder nach dem Drucke, der auf jeden der vier oder mehrern Puncte kömmt, in welchen ein Körper unterstützt ist; so beruht diese Frage darauf, daß die Körper nicht vollkommen fest sind, sondern vermöge der auf sie wirkenden Kräfte nicht völlig ihre Gestalt unverändert behalten. Der Balken bleibt nicht mehr grade, sondern biegt sich u. s. w. Hier ist also eine Vertheilung des Druckes auf mehrere Puncte möglich; aber die Untersuchungen hierüber gehören nicht mehr ganz in die Statik fester, sondern in die Statik biegsamer und elastischer Körper.

Anmerkung. Eytelwein handelt hiervon umständlich im zweiten Bande seines Handbuchs der Statik fester Körper; neuerlich hat auch Araldi im 13ten Bande der Memorie della Societa Italiana hierüber geschrieben.

Fünfter Abschnitt.

Von der Bestimmung des Schwerpunctes der Körper.

§. 133. Erklärung. Da die Schwerkraft aller Theilchen der Körper nach parallelen Richtungen gegen die Erde treibt: so läßt sich (§. 94.) die Wirkung aller dieser auf verschiedene Puncte ausgeübten Kräfte als in einem Mittelpuncte der Kräfte vereinigt ansehen. Dieser heißt des Körpers Schwerpunct.

§. 134. Man kann von dem Schwerpuncte der Linien reden, wenn man sich auf jedes kleine Stückchen derselben Kräfte, unter einander parallel und der Länge der Stücke proportional vorstellt. Etwas Aehnliches gilt von den Ebnen.

Anmerkung. Obgleich geometrische Linien und Ebnen keine Dicke und folglich kein Gewicht haben: so kommen doch Fälle vor, wo man den Schwerpunct eines Systems von Linien verlangt. Man würde z. B. den Schwerpunct einer Verbindung gleich dicker Balken ganz so suchen, als ob sie grade schwere Linien wären.

§. 135. Lehrsatz. Der Schwerpunct einer graden Linie liegt in ihrer Mitte. Denn die nach beiden Seiten gleich entfernt liegenden Puncte haben gegen jenen gleiche Momente.

§. 136. Lehrsatz. Der Schwerpunct H einer Anzahl $= 2^n$ von Seiten eines regulären Polygons ABCDE wird gefunden, wenn man auf dem die Sehne AE halbirenden Halbmesser FC des um das Polygon gezeichneten Kreises, den Abstand vom Mittelpuncte,

$$FH = \frac{IF \cdot AE}{AB + BC + CD + DE}$$ nimmt, wo FI der Abstand der Polygonseite vom Mittelpuncte ist.

Beweis. Halbirt man die Seiten, so liegt jeder Polygonseite Schwerpunct in ihrer Mitte, wie in I, K. Wegen der Gleichheit der Seiten ist es anzusehen, als ob K, I mit gleichen Gewichten beschwert wären, und der gemeinschaftliche Schwerpunct beider Seiten CDE liegt in L, wenn KL = LI auf der graden Linie IK genommen ist. Eben so wird M als Schwerpunct der Seiten ABC gefunden, und da L, M von gleichen Gewichten beschwert sind, so liegt der gemeinschaftliche Schwerpunct aller vier Seiten auf ML in H, wenn HM = HL ist.

Da nun DNE $\backsim$ ILF und HLF $\backsim$ GCE: so ist

$$FH : FL = GE : CE;$$

und $FL : FI = CE : CD + DE$;

weil $CE = 2 \cdot NE$ und $CD + DE = 2 \cdot DE$ ist.

Hieraus folgt $FH : FI = GE : CD + DE$,

oder $FH : FI = AE : AB + BC + CD + DE$.

Dieser Beweis läßt sich leicht auf die doppelte Anzahl Seiten und so ferner erweitern.

§. 137. Da dieser Beweis sich für die immerfort verdoppelte Anzahl Seiten führen läßt: so ist vorauszusehen, daß auch des Kreisbogens ABCDE Schwerpunct O gefunden wird, wenn man auf dem seine Sehne halbirenden Halbmesser CF den Abstand FO vom Mittelpuncte $= \frac{FC \,.\, AE}{\text{Bogen } ABCDE}$ nimmt. Es verhält sich nämlich der Abstand des Schwerpunctes vom Centro zum Abstande der Polygonseite vom Centro, wie die Sehne des Polygonbogens zur Summe aller Polygonseiten; folglich beim Kreisbogen, der Abstand des Schwerpunctes vom Mittelpuncte zum Halbmesser, wie die Sehne des Bogens zur Länge des Bogens.

§. 138. Lehrsatz. Einer Dreiecksfläche ABC (Fig. 48.) Schwerpunct F liegt auf der von dem einen Winkel nach der Mitte der gegenüberstehenden Seite gezogenen Linie so, daß DF $= \frac{1}{3}$ AD ist.

Beweis. Die Linie AD, welche BC halbirt, halbirt alle mit BC im Dreiecke parallel gezogene Linien; der Schwerpunct liegt also in AD, indem, wenn AD unterstützt wird, beide Hälften des Dreiecks einander im Gleichgewichte halten. Aus eben dem Grunde liegt der Schwerpunct in BE, welche AC halbirt. Er liegt also in F in dem Durchschnittspuncte beider.

Verlängert man nun AB bis BH = AB, und zieht HC, so ist HC mit BE parallel (Geom. §. 275.) zieht man ferner GD parallel mit HC, so ist GB $= \frac{1}{2}$ BH $= \frac{1}{2}$ AB, und es ist, da auch BF mit GD parallel, FD : AD = BG : AG $= \frac{1}{3}$ AG : AG.

§. 139. Lehrsatz. Eines Kreisausschnittes ABCDEFA Schwerpunct wird gefunden, wenn man auf dem den Ausschnitt halbirenden Radius den Abstand vom Centro $= \frac{2}{3} \cdot \frac{AE \,.\, FC}{\text{Bogen } ABCDE}$ nimmt (Fig. 47.).

Beweis. Für den Ausschnitt eines Polygons würde sich des Dreieckes DFE Schwerpunct in FI und um $\frac{2}{3}$ FI vom Mittelpuncte entfernt finden. Eben das würde für alle übrigen durch Radien und eine Polygonseite gebildeten Dreiecke gelten, und die Betrachtungen des 136. §. würden dazu führen, aus den Schwerpuncten der einzelnen Dreiecke den gemeinschaftlichen Schwerpunct aller in der Entfernung $= \frac{2}{3}$ FH vom Mittelpuncte zu finden, wenn H des Polygonbogens Schwerpunct war.

Eben die Schlüsse gelten für eine auf das doppelte vermehrte Seitenzahl; sie gelten also auch für den Kreisausschnitt, dessen Schwerpunct um $\frac{2}{3}$ FO $= \frac{2}{3} \cdot \frac{AE \cdot FC}{\text{Bogen } ABCDE}$ vom Mittelpuncte absteht, wenn O des Bogens Schwerpunct ist.

§. 140. **Aufgabe.** Den Schwerpunct jeder gradlinigten Figur zu finden.

Auflösung. Man zerlegt sie in Dreiecke und sucht eines jeden Inhalt und Schwerpunct. Man betrachtet dann den Schwerpunct jedes einzelnen Dreieckes als mit einem Gewichte, dem Inhalte des Dreiecks proportional, belastet, und sucht den Schwerpunct aller dieser parallel wirkenden Gewichte oder Kräfte, indem man zuerst für zwei den Schwerpunct bestimmt (§. 92.), sich da die Summe der Gewichte beider vereinigt denkt, und nun den Schwerpunct dieser Summe und des dritten sucht u. s. w.

§. 141. **Aufgabe.** Den Schwerpunct einer krummlinigt begrenzten Figur wenigstens nahe richtig zu finden.

Auflösung. Man theilt die krummlinigte Begrenzung, wie Fig. 49. in so kleine Stücke, daß diese fast als gradlinigt können angesehn werden, und verfährt nun mit den einzelnen Dreiecken oder Trapezen wie in der vorigen Aufgabe.

§. 142. Der Schwerpunct eines cylindrischen oder prismatischen Körpers wird leicht gefunden; denn da die Schwerpuncte aller, den Grundflächen parallelen Schnitte in der graden Linie liegen, welche die Schwerpuncte der Grundflächen verbindet: so liegt in ihr und zwar in ihrer Mitte des ganzen Körpers Schwerpunct.

§. 143. Lehrsatz. Wenn man in einer dreiseitigen Pyramide (Fig. 50.) eine grade Linie von der Spitze A nach dem Schwerpuncte G der gegenüberstehenden Seitenfläche zieht: so liegt der Schwerpunct C der ganzen Pyramide in AG, und sein Abstand von der Spitze ist $AC = \frac{3}{4} AG$.

Beweis. Da alle mit BDE parallelen Schnitte der Pyramide ähnliche Dreiecke sind, so läßt sich leicht zeigen, daß die Schwerpuncte aller dieser Schnitte in AG liegen. Aus eben dem Grunde liegen die Schwerpuncte aller mit AED parallelen Schnitte in BH, wenn H der Seitenfläche AED Schwerpunct ist. BH und AG liegen in einer Ebne, weil H sich in der einen, G sich in der andern Seite des Dreiecks ABF befindet, wo zugleich $HF = \frac{1}{3} AF$ und $GF = \frac{1}{3} BF$ ist. Stellt (Fig. 51.) das Dreieck ABF das eben so bezeichnete der 50ten Figur dar, und man verlängert AB nach K, wo die mit BH parallel gezogne Linie FK sie trifft: so ist $BK = \frac{1}{2} AB$, und wenn man GI parallel zu BH zieht, $BI = \frac{2}{3} BK = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{4} AI$, folglich $CG = \frac{1}{4} AG$.

§. 144. Hieran läßt sich leicht der Beweis knüpfen, daß auch bei vielseitigen Pyramiden und eben so beim Kegel der Schwerpunct auf $\frac{1}{4}$ der Höhe in derjenigen Linie liegt, die vom Schwerpuncte der Grundfläche gegen die Spitze gezogen ist.

§. 145. Lehrsatz. Der Schwerpunct einer Halbkugel liegt auf dem gegen ihre Grundfläche senkrechten Radius in einer Entfernung vom Mittelpuncte, die $= \frac{3}{8}$ des Halbmessers ist.

Beweis. Es sei ADBC (Fig. 52.) die Halbkugel. Ueber dem größten Kreise AB, der ihr zur Grundfläche dient, denke man sich einen Cylinder ABFE, dessen Höhe dem Halbmesser der Halbkugel gleich, aus diesem aber einen Kegel ausgeschnitten, dessen Durchschnitt durch ECF vorgestellt wird.

In dem alsdann übrig bleibenden hohlen Theile des Cylinders haben alle mit AB parallelen Schnitte gleichen Flächen-Inhalt mit den in gleichen Entfernungen von AB liegenden Schnitten der Halbkugel. NO, MK zum Beispiel stellen den Durchschnitt des ausgehöhlten Körpers dar, und dieses Kreisringes Inhalt ist $= \pi \,.\, (BC^2 - PN^2)$, der eben so hoch liegende Querschnitt der Halbkugel $= Q$ ist $= \pi \,.\, PL^2 = \pi\,(BC^2 - PN^2)$, da $PN = CP$.

Jeder Querschnitt dieses Körpers hat also nicht bloß eben den Inhalt, sondern zugleich eben das Moment gegen die Axe AB, wie der zugehörige Schnitt der Halbkugel; des ganzen ausgehöhlten Körpers Schwerpunct fällt folglich mit der Halbkugel Schwerpuncte zusammen. Da wir nun wissen, daß des ganzen Cylinders Schwerpunct in G liegt, wo $CG = \frac{1}{2}\,r =$ dem halben Halbmesser, und daß des Kegels ECF Schwerpunct in H liegt, so daß $CH = \frac{3}{4}\,r$: so muß, weil der Inhalt der Körper sich wie $1 : \frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ verhält, des ausgehöhlten Körpers Schwerpunct in I so liegen, daß $IG = \frac{1}{2}\,HG$ sei, weil in I die Masse des ausgehöhlten Körpers $= \frac{2}{3}\,\pi \,.\, r^3$, in H des Kegels Masse $= \frac{1}{3}\,\pi\, r^3$, als vereinigt angesehn wird, und G des ganzen Cylinders oder jener beiden verbundenen Körper Schwerpunct ist. Es ist also $IG = \frac{1}{8}\,r$, $CI = \frac{3}{8}\,r$.

§. 146. **Aufgabe.** Den Schwerpunct eines jeden Körpers zu finden.

Auflösung. Man suche zuerst seinen Abstand von irgend einer willkürlich angenommenen Ebne. Dies geschieht, wenn der Körper unregelmäßig ist, allenfalls dadurch, daß man sich den Körper in Scheiben, jener Ebne parallel, zerlegt denkt, ohngefehr so wie §. 141. Heißt dann irgend einer Scheibe Gewicht $= P$, der senkrechte Abstand ihres Schwerpunctes von jener Ebne $= a$, und bedeuten P', P'', a', a'' eben das für andre Scheiben, so muß der Abstand des Schwerpunctes des ganzen Körpers von jener Ebne $= x$

$$= \frac{P \,.\, a + P' \,.\, a' + P'' \,.\, a'' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + \text{etc.}} \text{ sein.}$$

Eben so sucht man den Abstand des Schwerpunctes von einer zweiten, auf jene senkrechten Ebne, und von einer dritten, auf beide senkrechten Ebne. Auf diese Weise wird des Schwerpunctes Lage völlig bestimmt.

Beweis. Denkt man sich die erste Ebne als der Richtung der Schwere parallel: so wird, wenn sich der Körper um eine in ihr liegende horizontale Axe drehen kann, $P \cdot a + P' \cdot a' + P'' \cdot a'' +$ etc. die Summe der Momente aller Theile des Körpers in Beziehung auf diese Axe ausdrücken. Eine Kraft $= P + P' + P'' +$ etc. in der Entfernung $= x$ von dieser Axe, jener Ebne parallel wirkend, hat eben das Drehungsmoment, und folglich liegt in dieser Entfernung $= x$ der Schwerpunct. Eben das gilt in Beziehung auf die übrigen Ebnen.

Anmerkung. Vollständige Anleitung zur Bestimmung der Schwerpuncte giebt Eytelwein Handb. d. Statik f. K. 1ster Theil.

Sechster Abschnitt.

Von der Stabilität der Körper.

§. 147. Erklärung. Ein Körper, bloß der Wirkung der Schwere unterworfen, kann nicht umfallen, wenn sein Schwerpunct unterstützt ist; aber eine horizontal wirkende Kraft kann ihn, wenn er sich nicht fortschieben läßt, umreißen. Das Gleichgewicht oder das Feststehen des Körpers ist desto sicherer, je größer die hiezu erforderliche Kraft ist. Die Sicherheit dieses Feststehens nennen wir des Körpers mehrere oder mindere Stabilität.

§. 148. Erklärung. Wenn man sich eine im Schwerpuncte des Körpers angebrachte horizontal wirkende Kraft denkt, welche grade hinreicht, um den Körper bis ans Umstürzen zu bringen, so daß jede Vermehrung derselben ihn wirklich umstürzen würde, so dient die Größe dieser Kraft als Maaß seiner Stabilität.

§. 149. Aufgabe. Für ein aus gleichartiger Materie bestehendes Parallelepipedum ABCD (Fig. 53.) die Stabilität zu bestimmen.

Auflösung. Des Körpers Länge sei = l, Breite CD = b, Höhe DB = h, so ist l . b h . g sein Gewicht, wenn g das Gewicht des als Einheit angenommenen Körpermaaßes bezeichnet.

Die Höhe des Schwerpuncts ist EF = $\frac{1}{2}$ h. Steht dieser Körper frei auf dem horizontalen Boden CD, so hat eine nach EG horizontal wirkende Kraft = Q das Bestreben den Körper um D zu drehen. Das Gewicht des Körpers, welches als in E vereinigt kann angesehn werden, hat in Beziehung auf diese Drehungsaxe das Moment = l . b . h . g $\frac{1}{2}$ b, die Kraft Q hat das Moment = Q . $\frac{1}{2}$h, also ist Q = l . b². g . des Körpers Stabilität.

§. 150. Wir nehmen hier die Kraft Q als nur in einem Puncte wirkend an, und da verhält sich offenbar die Stabilität wie die Länge des Körpers. Wirkte, etwa so wie beim Drucke der Erde gegen eine Mauer, wenn diese an einer Seite frei, an der andern mit einer Erdmasse belastet ist, auf jeden Punct der Länge eine Kraft, so würde diese Kraft nur dem Quadrate der Breite proportional sein dürfen.

§. 151. Aufgabe. Des Körpers (Fig. 54.) ABCD Querschnitt ist ein Trapez mit zwei horizontalen und zwei gleich gegen den Horizont geneigten Seiten; man sucht seine Stabilität.

Auflösung. Des Körpers Länge sei = l, obere Breite AB = b, untere Breite CD = B, Höhe = h, Gewicht = h . l . g . $\frac{1}{2}$ (B + b).

Um die Lage des Schwerpunctes zu finden, müssen wir den Körper ECD betrachten, dessen Inhalt = $\frac{1}{2}$ B . l . $\frac{Bh}{B-b}$; Entfernung des Schwerpunctes

$= \frac{1}{3} \frac{Bh}{B-b}$ von CD; des Körper EAB Inhalt

$= \frac{1}{2} b.l. \frac{bh}{B-b}$; Entfernung seines Schwerpuncts

$= h + \frac{1}{3} \frac{bh}{B-b}$ von CD. Daher die Entfernung $= x$ von CD, in welcher sich des Trapezes Schwerpunct befindet

$$= \frac{\frac{\frac{1}{6} B^3 \, l \, h^2}{(B-b)^2} - \frac{\frac{1}{6} b^3 . l . h^2}{(B-b)^2} - \frac{\frac{1}{2} b^2 h^2 l}{B-b}}{\frac{1}{2} h \, l \, (B+b)},$$

wenn ich $g = 1$ setze, also

$$x = \frac{\frac{1}{3} h (B^2 + Bb + b^2) - b^2 h}{(B+b)\,(B-b)} = \frac{\frac{1}{3} h (B^2 + Bb - 2b^2)}{(B+b)(B-b)};$$

die Kraft, welche im Schwerpuncte E angebracht das Gleichgewicht in Beziehung auf den Drehungspunct C erhalten könnte, ist also durch $Q . x = \frac{1}{2} h . l . (B+b) . \frac{1}{2} B$ gegeben, und $Q = \frac{3}{4} \frac{B l . (B+b)^2}{B+2b}$, als die Stabilität des trapezischen Körpers.

§. 152. Wollte man Mauern von gleicher Stabilität gleich hoch, die eine trapezisch, die andre rechteckig bauen, so müßte, wenn nun der rechteckigen Mauer Breite $= z$ heißt, $z^2 = \frac{3}{4} B \frac{(B+b)^2}{B+2b}$ oder

$Z = \frac{1}{2} (B+b) \sqrt{\frac{3B}{B+2b}}$ sein, wie die Vergleichung der Formeln §. 149. 151. ergiebt. Der Inhalt der trapezischen Mauer verhielte sich also zu dem Inhalte der eben so starken und eben so hohen rechtwinklichten Mauer, wie z zu $\frac{1}{2} (B+b)$, das ist $= 1 : \sqrt{\frac{3B}{B+2b}}$, also wenn man die trapezische Mauer oben halb so dick als unten annimmt $= 1 : \sqrt{\frac{3}{2}}$.

§. 153. Aufgabe. Die Stabilität der mit Pfeilern unterstützten Mauer AE zu finden (Fig. 55.).

Auflösung. Es sei der Mauer Höhe $= h$, Dicke $= b$, Dicke der Pfeiler $= B$, Länge der Mauerstücke zwischen den Pfeilern $= l$, Länge des Raums, den die Pfeiler nach der Richtung der Länge der Wand einnehmen $= L$: so ist eines Pfeilers und des Wandstücks bis zum nächsten Pfeiler Gewicht $= g \,.\, (BL + b \,.\, l) \,.\, h$, und der Schwerpunct liegt in der Höhe $= \frac{1}{2} h$, wenn die verticalen Querschnitte der Mauer rechtwinklichte Parallelogramme sind.

Wenn nun die Pfeiler so angelegt werden, daß sie an beiden Seiten der Wand gleich viel vorstehen, und man nimmt an, Mauer und Pfeiler sind fest verbunden, so ist die Stabilität $Q = \frac{g \,.\, h \,.\, (B \,.\, L + b \,.\, l) \,.\, \frac{1}{2} B}{\frac{1}{2} h}$ $= B \,.\, g\,(B \,.\, L + b \,.\, l)$.

§. 154. Eine nicht durch Pfeiler befestigte Mauer müßte, um eben die Stabilität bei gleicher Höhe zu erhalten, die Dicke $z = \sqrt[2]{\left(\frac{B \,.\, (B \,.\, L + b \,.\, l)}{L + l}\right)}$ haben, wenn ihre Länge $= L + l$, gleich der Länge jener sein soll.

Der Inhalt der Mauer ohne Pfeiler wäre folglich $= h \,.\, \sqrt[2]{(B \,.\, (B \,.\, L + b \,.\, l)\,(L + l))}$, statt daß der Inhalt der mit Pfeilern unterstützten nur $= h \,.\, (B \,.\, L + b \,.\, l)$ ist, wenn sie gleiche Stabilität haben, das Verhältniß der Masse ist also $= \sqrt[2]{(B \,.\, L + B \,.\, l)} : \sqrt[2]{(B \,.\, L + b \,.\, l)}$, also zum Beispiel für $L = 3\,b$, $B = 3\,b$, $l = 18 \,.\, b$, das Verh. des verbrauchten Materials, wie $\sqrt{63} : \sqrt{27}$ $= \sqrt{7} : \sqrt{3} = 4,58 : 3$.

Siebenter Abschnitt.

Vom schweren Hebel und der Wage.

§. 155. **Aufgabe.** Das Gewicht eines Hebels ist gegeben, nebst den Kräften, welche in A und B senkrecht auf ihn wirken; man sucht die Stelle, wo er unterstützt werden muß, damit das Gleichgewicht bestehe (Fig. 56.).

Auflösung. Ist der Hebel eine überall gleich dicke Stange, so kann man sein Gewicht $= P$ als in seiner Mitte, in A vereinigt sich vorstellen. Wirket nun in B die Kraft $= Q$, in C die Kraft $= R$, parallel mit der Richtung der Schwere: so muß, wenn D den Unterstützungspunct vorstellt

$R \,.\, CD = P \,.\, AD + Q \,.\, BD$, oder

$R \,.\, CD = P \,.\, AC - P \,.\, CD + Q \,.\, BC - Q \,.\, CD$,

oder $CD = \dfrac{P \,.\, AC + Q \,.\, BC}{P + Q + R}$ sein.

§. 156. Alle ähnlichen Fragen lassen sich aus den Lehren des 2ten, 3ten und 4ten Abschnittes mit gleicher Leichtigkeit beantworten, da man nur nöthig hat, am schweren Hebel oder an der schweren Ebne, auf welche Kräfte wirken, außer den übrigen Kräften noch das nach verticaler Richtung wirkende Gewicht des Hebels oder der Ebne, am Schwerpuncte angebracht, als eine neue Kraft neben den übrigen in Betrachtung zu ziehen.

§. 157. Erklärung. Die gleicharmige Wage ist ein Hebel, in welchem an gleichen Entfernungen vom Ruhepuncte Gewichte mit Hülfe der Wagschalen angebracht werden. Da sie zwar dazu dienen soll, gleiche Gewichte abzuwiegen, aber man doch vermittelst des

Ausschlages oder der Abweichung vom horizontalen Stande des Wagebalkens, bei welchem das Gleichgewicht eintritt, das etwa an einem oder dem andern Arme vorhandene Uebergewicht abzuschätzen wünscht: so ist (Fig. 57.) der Unterstützungspunct A ein wenig vom Schwerpuncte D des Wagebalkens BC entfernt, so daß A vertical über D steht bei horizontaler Stellung des Wagebalkens.

§. 158. Aufgabe. Wenn (Fig. 58.) das Gewicht des Wagebalkens $= P$ bekannt ist, sein Schwerpunct in seiner Mitte E liegt, der Drehungspunct in D; und es wird an A das Gewicht $= Q + q$, an B das Gewicht $= Q$ aufgehängt; den Winkel KDL $= \varphi$ zu bestimmen, um welchen die Lage der Wage gegen den Horizont sich verrücken wird.

Auflösung. Es sei $DE = De = a$ senkrecht auf AB: so wird, wenn DeFG die Lage des Instruments beim Gleichgewichte bedeutet $P \,.\, ef + Q \,.\, GH = (Q+q) \,.\, FI$ sein. Da nun $ef = a \,.\, \operatorname{Sin}\varphi$; $GH = b \operatorname{Cos}\varphi + a \operatorname{Sin}\varphi$, $FI = b \,.\, \operatorname{Cos}\varphi - a \operatorname{Sin}\varphi$, wenn GH, FI auf DE senkrecht sind, und $eG = eF = EB = b$ ist: so wird

$$P \,.\, a \operatorname{Sin}\varphi + Q\, b \operatorname{Cos}\varphi + Q \,.\, a \operatorname{Sin}\varphi$$
$$= Q\, b \operatorname{Cos}\varphi + q\, b \operatorname{Cos}\varphi - Q \,.\, a \operatorname{Sin}\varphi - q\, a \operatorname{Sin}\varphi,$$

das ist $(P + 2Q + q) \,.\, a \operatorname{Sin}\varphi = q \,.\, b \operatorname{Cos}\varphi$, oder

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{q\, b}{a\,(P + 2Q + q)}.$$

§. 159. Die Tangente des Ausschlagswinkels wird also nicht ganz der Größe des Uebergewichtes proportional; aber da q gewöhnlich gegen $P + 2Q$ ziemlich geringe ist, so kann man sie als beinahe dem Uebergewichte proportional ansehen. Diese Tangente wird genau proportional der Länge des Wagebalkens umgekehrt proportional dem Abstande a des Drehungspunctes vom Schwerpuncte.

Man sagt daher, die Wage sei desto schneller oder gebe einen desto größern Ausschlag je kleiner a ist.

Anmerkung. Von der Einrichtung sehr genauer Wagen findet man Einiges in Gilberts Annalen Jahrg. 1808.

B. 29. S. 153. und Gothaisches Magazin f. d. Neueste aus d. Phys. 6. Bd. S. 100.

§. 160. Aufgabe. Wenn die beiden Arme der Wage ungleich sind, eine unbekannte Last abzuwiegen.

Auflösung. Man lege das unbekannte Gewicht $= Q$ zuerst in die eine Wageschale, deren Entfernung vom Ruhepuncte $= x$, und nenne das in der andern Schale erforderliche Gegengewicht $= P$, in der Entfernung $= y$. Dann lege man Q in die zweite Schale, und nenne das in der ersten Schale zum Gleichgewicht erforderliche Gegengewicht $= P'$. Da nun $Q \cdot x = P \cdot y$, und $Q \cdot y = P' \cdot x$: so ist $\frac{x}{y} = \frac{P}{Q} = \frac{Q}{P'}$; und $Q^2 = P \cdot P'$.

Hiebei ist vorausgesetzt, daß die Wage entweder in ihrem Schwerpuncte unterstützt sei, oder daß dieser wenigstens bei horizontaler Stellung des Wagebalkens grade unter dem Drehepuncte liege.

§. 161. Erklärung. Eine Schnellwage ist so eingerichtet, daß mit einem gleichbleibenden Gegengewichte ungleiche Lasten abgewogen werden, indem man entweder die Stelle des Drehepuncts ändert, oder das Gegengewicht in andern Puncten aufhängt.

§. 162. Aufgabe. Wenn man das Gewicht und den Schwerpunct der Schnellwage selbst kennt, zu finden, wo bei unverrücktem Drehungspuncte und Aufhängepuncte der Last das unveränderliche Gegengewicht muß angebracht werden.

Auflösung. (Fig. 59.) B sei des Hebels Schwerpunct, R sein Gewicht; in A hänge die abzuwiegende Last $= Q$, in X das beständige aber verschiebbare Gegengewicht $= P$; C sei der Unterstützungspunct; dann ist $CX = \frac{AC \cdot Q + BC \cdot R}{P}$.

Trägt man also von C nach D eine Entfernung $= \frac{BC \cdot R}{P}$ auf, wo nämlich P hängen müßte, um den in A gar nicht beschwerten Hebel in Ruhe zu erhalten, so werden die Entfernungen DX der Last Q proportional.

Anmerkung. Von vortheilhaft eingerichteten Schnellwagen giebt Arzberger Nachricht in Gilberts Annalen d. Physik. Jahrg. 1814. 46. Bd. S. 294.

Achter Abschnitt.

Von der Reibung und dem Widerstande durch die Steifheit der Seile.

§. 163. Erfahrung. Alle Körper leiden, wenn sie an der Oberfläche eines festen Körpers fortgezogen werden, einen Widerstand, welcher in der Rauhheit der Oberfläche seinen Grund hat. Dieser Widerstand heißt die Reibung, Friction.

§. 164. Aufgabe. Durch Versuche die Größe des Widerstandes zu bestimmen, welchen die Reibung der Bewegung entgegensetzt.

Auflösung. Man legt den Körper (Fig. 60.) auf eine horizontale Ebne, und sucht die mit der Ebne parallele Kraft, welche nur kaum hinreicht, um ihn in Bewegung zu setzen. Da die Schwere des Körpers von der horizontalen Ebne ganz getragen wird, so hat die nach horizontaler Richtung wirkende Kraft nichts als die Reibung zu überwinden, und dient daher zu Abmessung derselben.

Man bedient sich, um diese horizontale Kraft genau zu bestimmen, am bequemsten eines im Schwerpuncte C des Körpers befestigten Fadens, der über eine um den Mittelpunct bewegliche Rolle E geht, und bei P das erforderliche Gewicht trägt.

§. 165. Erfahrung. Die Reibung beim Fortgleiten eines Körpers über den andern ist bei verschiedenen Körpern sehr ungleich. Unter übrigens gleichen Umständen ist sie dem Drucke proportional, aber fast ganz unabhängig von der Größe der reibenden Fläche.

Nach Coulombs Versuchen beträgt sie bei Eichenholz auf Eichenholz reichlich $\frac{2}{5}$ der drückenden Last, bei Eisen auf Eisen beinahe $\frac{3}{10}$, bei Kupfer auf Eisen $\frac{1}{6}$ der Last, wenn die Körper trocken, ohne zwischen gestrichene fette Materien auf einander fortgleiten.

§. 166. Ist der Körper einmal in Bewegung, so widersteht die Reibung weniger, als wenn er erst aus der Ruhe soll gebracht werden.

§. 167. Bedeutend geringer als beim Fortschieben ist die Reibung beim Wälzen des Cylinders auf einer Ebne, wo sie sich jedoch auch wie die Belastung, aber zugleich, unter sonst gleichen Umständen umgekehrt wie die Halbmesser der Cylinder verhält.

§. 168. Aufgabe. Die Reibung zu berechnen, welche ein mit gegebner Kraft gespanntes Seil leidet, wenn es um einen Cylinder gewunden ist; — vorausgesetzt, daß man das Verhältniß der Reibung zum Drucke in Beziehung auf das am Cylinder fortgleitende Seil kenne.

Auflösung. Statt eines Cylinders wollen wir uns ein regelmäßig polygonisches Prisma denken, dessen Querschnitt ABCDEF ist (Fig. 61.). Wird um die zwei Seiten ABC desselben ein Seil gespannt: so würden, wenn keine Reibung da wäre, gleiche Kräfte $P = Q$ einander im Gleichgewichte halten, weil die Richtung ihres mittlern Druckes grade gegen den Mittelpunct K des widerstehenden Körpers geht und sie würden nach BK einen mittlern Druck $= 2 \cdot P \cdot \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha$ ausüben, wenn $ABC = \alpha$ ist. Denn wenn Bi die Größe der einen, Bh die Größe der andern Kraft vorstellt, so ist Bigh das Parallelogramm der Kräfte und die Diagonale $Bg = 2 \cdot Bi \cdot \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha$.

Wofern nun die Reibung gefunden wird, wenn man den Druck mit einer aus Versuchen bekannten Zahl $= f$ multiplicirt: so ist die Reibung hier $= 2 \,.\, f \,.\, Q \,.\, \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,\alpha$, und wenn die Kraft $= P$ nicht bloß die Last $= Q$, sondern auch die Reibung überwinden soll, so muß sie $P = Q \,.\, (1 + 2\,f \,.\, \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,\alpha)$ sein.

Wäre die Last $= Q$ erst in D angebracht, so daß das Seil über drei Seiten des Polygons ginge: so würde der eben gefundene Ausdruck angeben, wie stark das Seil in BC gespannt sein müßte, wenn Last und Reibung überwunden werden sollten. Diese Spannung $= R$ würde, wenn in B keine Reibung wäre, durch eine Kraft $P = R$ bewirkt werden; aber da bei B eine Reibung $= 2\,f \,.\, R \,.\, \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,\alpha$ entsteht, so muß

$$P = R \,.\, (1 + 2\,f \,.\, \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha),$$
$$= Q \,.\, (1 + 2\,f \,.\, \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha)^2, \text{ sein,}$$

und so erhellet, daß

$$P = Q \,.\, (1 + 2\,f \,.\, \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha)^{n-1} \text{ wird, wenn}$$

das Seil um n Seiten des Polygons gelegt ist.

Nimmt man hier n für die Zahl aller Polygonseiten und setzt n sehr groß, so ist α wenig von $180°$ verschieden, und die Formel giebt einen desto näher für den Kreis passenden Werth, je mehr Seiten man im Polygon annimmt.

§. 169. Beispiel. Das Polygon sei ein 90 = Eck, so ist $\alpha = 176°$, $\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,\alpha = 0{,}0349$; f sei $= \frac{1}{3}$, $n = 90$, $P = Q \,.\, (1{,}02327)^{89} = Q \,.\, 7{,}747$, wenn das Seil einmal um alle Seiten des Polygons geschlungen ist.

Ist das Polygon ein 360 = Eck, so ist $\alpha = 179°$, also für $f = \frac{1}{3}$, $1 + 2\,f \,.\, \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,\alpha = 1{,}005818$, aber da für einen ganzen Umlauf des Seiles $n = 360$ ist, $P = Q \,.\, (1{,}005818)^{359} = Q \,.\, 8{,}031$.

Wäre das Seil zweimal umgeschlungen, also um 720 Seiten, so würde $P = 64{,}77\,Q$; wäre es viermal umgeschlungen, P = 4222 . Q; wäre es zehnmal umgeschlungen P mehr als 1170000000 . Q.

Die zu Ueberwindung der Friction erforderliche Kraft ist also mehr als tausend Millionen mal so groß als die Last.

Anmerkung. Coulombs Versuche über die Reibung theilt Eytelwein im 1sten Bande seiner Statik ziemlich vollständig mit.

§. 170. **Bemerkung.** Dieser Widerstand wegen der Reibung würde schon statt finden, wenn auch das Seil vollkommen biegsam wäre und nicht einer Veränderung seiner Krümmung noch einen neuen Widerstand entgegensetzte. Wegen der unvollkommenen Biegsamkeit des Seiles ist aber noch eine andre Vergrößerung des Widerstandes zu berücksichtigen.

Wenn das Seil um den Cylinder AC (Fig. 62.) läuft, und die Kraft in P die Last Q wirklich heben soll: so muß der unterhalb C liegende, bisher grade Theil des Seiles sich nun oberhalb C hinauf beugen. Wegen der Steifheit des Seiles nimmt dieses nicht sogleich die Krümmung völlig an, die es annehmen sollte; sondern das Seil drängt sich bei B etwas nach außen, indem es weniger gekrümmt bleibt, als die Krümmung des Cylinders fordert; das Gewicht Q wird daher desto mehr von der Verticale CE zurückweichen, je größer die Steifheit des Seiles ist.

§. 171. Wenn, indem P das Seil fortzieht, dieses sich von der Walze entfernt, so hat es vermöge seiner Steifheit auch einiges Bestreben, die erlangte Krümmung zu behalten, und der Theil AP des Seiles drängt sich daher ein wenig nach p hinüber. Da indeß das gekrümmte Seil viel leichter seine natürliche, grade Richtung wieder annimmt, als das grade Seil bei B die Krümmung, so ist die Wirkung der Steifheit bei A minder bedeutend.

Wegen der Steifheit der Seile ist es also so anzusehen, als ob die Last Q nicht in der Entfernung = DC vom Drehungspuncte, sondern in der Entfernung = DB angebracht wäre; sie vergrößert also das Moment der Last und erfordert dadurch eine angemessene Vergrößerung der Kraft.

§. 172. Erfahrung. Die Kraft, mit welcher das Seil bei C der Beugung widersteht, ist, es mag belastet oder unbelastet sein, ohngefehr dem Querschnitte des Seiles oder dem Quadrate seines Durchmessers proportional, und zugleich bei gleicher Dicke dem Halbmesser AD des Cylinders umgekehrt proportional. Ist das Seil bei Q belastet, so muß man auch noch den Widerstand der Last proportional setzen.

Wenn durch Versuche gefunden ist, wie groß bei bestimmtem Durchmesser des Seiles = d, bei bestimmtem Halbmesser der Rolle = r, und bestimmter Belastung = q, der Widerstand wegen der Steifheit der Seile sei, zum Beispiel = k: so findet man ziemlich nahe unter andern Umständen für die Dicke des Seiles = D, Halbmesser der Rolle = R, Belastung = Q, den Widerstand $= k \cdot \frac{D^2}{d^2} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{q}$, wofür man nach Eytelwein (Statik 2ter Band §. 320.) als einen Mittelwerth $= \frac{1}{286} \frac{D^2 \cdot Q}{R}$ setzen kann, wenn D in Linien, R in Zollen pariser Maaßes ausgedrückt ist.

§. 173. Es müßte also, wenn man die Reibung weiter nicht berücksichtigt, die Kraft

$P = Q + \frac{1}{286} \cdot \frac{D^2}{R} Q$ sein, ehe die Last wirklich gehoben werden kann.

§. 174. Anmerkung. Nach den Versuchen scheint die Steifheit nicht genau der ersten Potenz des Halbmessers der Rolle, sondern eher der Potenz $r^{1,2}$ umgekehrt proportional zu sein; auch folgt die Vermehrung des Widerstandes nicht ganz dem Verhältnisse von D^2, wobei es ohnehin auch auf die verschiedene Art der Verfertigung der Seile ankömmt; aber da die hier vorkommenden Bestimmungen wegen mancher Zufälligkeiten sich doch nicht ganz auf theoretische Formeln bringen lassen, so bemerkt Eytelwein mit Recht, daß die obige Formel als die einfachste die brauchbarste sei.

Coulombs Versuche über die Steifheit der Seile stehen bei Eytelwein im 2ten Bande der Statik. S. 29. u. f.

Neunter Abschnitt.

Von der geneigten Ebne, dem Keil und der Schraube.

§. 175. Erklärung. Eine geneigte Ebne ist jede, die mit dem Horizonte einen spitzen Winkel macht.

§. 176. Aufgabe. Einer Ebne Neigung gegen den Horizont (Fig. 63.) $BAC = \alpha$ ist gegeben; man sucht, mit welcher Gewalt eine unbekannte Kraft $= P$ wirken muß, um die Last $= Q$ zu erhalten, wenn die Richtung der Kraft durch den Schwerpunct D der zu haltenden Last geht, und unter dem Winkel $EFC = \beta$ gegen den Horizont geneigt ist.

Auflösung. Die Last $= Q$ drückt mit ihrem ganzen Gewichte $= Q$ vertical niederwärts; aber diese Kraft wird theils zum Drucke auf die Ebne, theils auf das Herabdrängen längst der Ebne verwandt. Aus diesem Grunde betrachten wir Q als aus zwei Seitenkräften entstehend, aus einer gegen AB senkrechten Kraft $= Q \cdot \text{Cos}\,\alpha$, welche bloß einen Druck auf die Ebne ausübt und von dieser ganz aufgehoben wird, und einer $= Q \cdot \text{Sin}\,\alpha$, mit welcher der Körper längst der Ebne herab zu gleiten strebt. Auf eben die Weise kann man die Kraft $= P$, die nach DE wirkt und mit AB den Winkel $\beta - \alpha$ macht, ansehen, als zerlegt in eine Kraft senkrecht auf AB, $= P \cdot \text{Sin}\,(\beta - \alpha)$, welche bloß den Druck auf diese Ebne zu verstärken oder zu schwächen beiträgt, und in eine mit AB parallele $= P \,.\, \mathrm{Cos}\,(\beta - \alpha)$, welche angewandt wird, um das Herabgleiten zu hindern.

Soll also der Körper wirklich in Ruhe bleiben, so muß $P \,.\, \mathrm{Cos}\,(\beta - \alpha) = Q \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha$ sein, oder

$$P = \frac{Q \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,(\beta - \alpha)}.$$

Will man auf die Friction sehen, so entsteht aus dem Drucke auf die Ebne $= Q \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha - P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta - \alpha)$ eine Friction, die ich durch $= f \,.\, (Q \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha - P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta - \alpha))$ angeben will, indem ich $f : 1$ als das Verhältniß ansehe, welches die Friction zum Drucke hat (§. 165.). Soll also die Kraft P bloß das Herabgleiten hindern, so braucht nur $P \,.\, \mathrm{Cos}\,(\beta - \alpha) = Q \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha - f \,.\, Q \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha + f \,.\, P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta - \alpha)$ zu sein, oder

$$P = \frac{Q \,.\, (\mathrm{Sin}\,\alpha - f \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha)}{\mathrm{Cos}\,(\beta - \alpha) - f \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta - \alpha)},$$ weil

die Friction selbst schon als eine das Herabgleiten hindernde Kraft wirkt. Soll hingegen P so groß sein, daß sie grade Last und Reibung zu überwinden vermögte, oder daß die geringste Vermehrung von P ein Hinaufziehen der Last Q bewirken würde: so muß außer der Kraft $Q \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha$ auch noch die Friction überwunden werden, und $P \,.\, \mathrm{Cos}(\beta - \alpha) = Q \,.\, \mathrm{Sin}\alpha + Q \,.\, f \,.\, \mathrm{Cos}\alpha - P \,.\, f \,.\, \mathrm{Sin}(\beta - \alpha)$ sein, also

$$P = \frac{Q\ (\mathrm{Sin}\,\alpha + f \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha)}{\mathrm{Cos}\,(\beta - \alpha) + f \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta - \alpha)}.$$

§. 177. Wenn die Richtung DE der hinaufziehenden Kraft P mit AB parallel oder $\beta = \alpha$ ist, so wird, wenn man auf die Reibung nicht sieht $P = Q \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha$, weil $\mathrm{Cos}(\beta - \alpha)$ nun $= 1$ ist; oder $P = \frac{Q \,.\, BC}{AB}$, das ist: die zum Erhalten der Last erforderliche Kraft verhält sich zur Last, wie die Höhe BC der schiefen Ebne zu ihrer Länge AB. Zieht man die Reibung in Betrachtung, so ist hier $P = Q\ (\mathrm{Sin}\,\alpha - f \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha)$, die zum Erhalten der Last und $P = Q (\mathrm{Sin}\,\alpha + f . \mathrm{Cos}\,\alpha)$ die zu Ueberwindung der Last und Friction erforderliche Kraft.

§. 178. Wäre $P = o$, so könnte der Körper in Ruhe bleiben, so lange $\mathrm{Sin}\,\alpha < f . \mathrm{Cos}\,\alpha$ ist; oder wenn man der Ebne genau die Neigung $= \alpha$ gäbe, die durch $f = \mathrm{tang}\,\alpha$ bestimmt wird, so würde dann erst eben der Körper im Begriffe sein, herabzugleiten und noch durch die Reibung in Ruhe erhalten. Diesen Winkel, durch Erfahrung bestimmt, könnte man also gebrauchen, um f daraus herzuleiten.

§. 179. Ist die Kraft $= P$ horizontal wirkend, so ist $\beta = o$, und $P = \frac{Q . (\mathrm{Sin}\,\alpha - f . \mathrm{Cos}\,\alpha)}{\mathrm{Cos}\,\alpha + f . \mathrm{Sin}\,\alpha}$ die zu Erhaltung der Last erforderliche Kraft. Sie wird $= Q . \mathrm{tang}\,\alpha$, wenn keine Reibung statt fände; dann also ist $P = Q . \frac{BC}{AC}$, die Kraft zur Last, wie die Höhe BC zur horizontalen Länge AC.

§. 180. Aufgabe. Auf der schiefen Ebne (Fig. 64.) liege ein schwerer Körper DE, den eine nach der Richtung FH drückende Kraft $= P$, in Ruhe zu erhalten strebt; man sucht die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die Richtung der Kraft P nicht durch des Körpers Schwerpunct geht, und dieser in dem einzigen Puncte D sich auf die Ebne stützt.

Auflösung. Es sei der Neigungswinkel der Ebne $ABC = \alpha$ und die Richtungslinie FH unter dem Winkel $= \beta$ gegen den Horizont geneigt. G sei des Körpers Schwerpunct, so daß dessen Gewicht $= Q$, als eine nach GI wirkende Kraft kann angesehen werden. Verlängert man die Richtungen beider Kräfte bis sie sich in K schneiden, so ist es so gut, als ob P in K nach KH und Q in K nach KI zu wirkte. Sie sind unter dem Winkel $IKH = 90° + \beta$ gegen einander geneigt, und man findet Richtung und Größe der aus ihnen entspringenden Mittelkraft, wenn man $Kl : Kn = Q : P$

nimmt, und die Diagonale Km des Parallelogramms berechnet. Diese ist $= \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2 . P . Q . Cos(90^\circ + \beta))}$, $= \sqrt{(P^2 + Q^2 - 2 P . Q . Sin\,\beta)}$, und es ist

$$Sin\ lkm = \frac{P . Sin\ (90^\circ - \beta)}{\sqrt{(P^2 + Q^2 - 2 P . Q . Sin\,\beta)}}.$$

Ist nun die Richtung Km dieser Mittelkraft nicht so, daß sie durch den unterstützten Punct D geht, so kann das Gleichgewicht nicht bestehen, sondern sie wirkt wie eine Kraft am Hebel, und bewirkt eine Drehung um D. Die erste Bedingung des Gleichgewichts ist also, daß lKm = lKD werde.

Aber wenn auch das der Fall ist, so besteht doch das Gleichgewicht nur dann, wenn KD und die damit zusammenfallende Km senkrecht auf AB ist. Trifft dieses nicht zu, so läßt sich die nach KD wirkende Kraft in eine mit AB parallele und in eine auf AB senkrechte zerlegen; die letztere würde durch den Widerstand der festen Ebne völlig zerstört, der erstern aber müßte eine neue Kraft entgegen wirken, um das Gleichgewicht zu erhalten. Wenn man auf die Reibung Rücksicht nimmt, so würde diese freilich schon als eine solche Kraft anzusehen sein, und sie trüge zu Erhaltung des Gleichgewichts bei.

§. 181. Beispiel. Die Richtung FK der Kraft P sei horizontal und die Richtung der Linie KD durch den Winkel DKI $= \gamma$ bestimmt. In diesem Falle ist $\beta = 0$, und $Sin\ lKm = \frac{P}{\sqrt{(P^2 + Q^2)}}$, welches $= Sin\,\gamma$ sein muß. Daraus folgt $(P^2 + Q^2) . Sin^2\,\gamma = P^2$ oder $Q^2\ Sin^2\,\gamma = P^2\ Cos^2\,\gamma$, folglich $tang\,\gamma = \frac{P}{Q}$.

Ist diese Bedingung erfüllt, so geht der gemeinschaftliche Druck der Schwere und der Kraft P durch D, und es findet wenigstens keine Drehung um D statt; der Punct D aber leidet den Druck $= \sqrt{(P^2 + Q^2)}$.

Die Richtung dieses Druckes ist gegen AB geneigt unter dem Winkel KDB $= 180^\circ - \gamma - (90 - \alpha)$

$= 90^\circ + \alpha - \gamma$. Es wird daher D mit einer Kraft $= \sqrt{(P^2 + Q^2)} \,.\, \mathrm{Sin}\,(90^\circ + \alpha - \gamma)$ $= \sqrt{(P^2 + Q^2)} \,.\, \mathrm{Cos}\,(\alpha - \gamma)$ gegen die Ebne gedrückt, und mit einer Kraft $= \sqrt{(P^2 + Q^2)} \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha - \gamma)$ mit der Ebne parallel aufwärts getrieben. Dem ersteren Drucke widersteht die Ebne, der zweite muß $= 0$ sein, wenn der Körper ohne Einwirkung einer neuen Kraft ruhen soll; dann also müßte $\alpha = \gamma$ sein. Leidet der Körper in D eine Reibung, die sich zum Drucke wie $f : 1$ verhält, so ist $f \,.\, \mathrm{Cos}\,(\alpha - \gamma)\, \sqrt{(P^2 + Q^2)}$ der Reibung gleich, und der Körper würde ruhen, so lange $f \,.\, \mathrm{Cos}\,(\alpha - \gamma) > \mathrm{Sin}\,(\alpha - \gamma)$ ist. Im entgegengesetzten Falle bedürfte es einer neuen mit AB parallel wirkenden Kraft $= \sqrt{(P^2 + Q^2)} \,.\, (\mathrm{Sin}\,(\alpha - \gamma) - f \,.\, \mathrm{Cos}\,(\alpha - \gamma))$, um das Gleichgewicht zu erhalten.

§. 182. Aufgabe. Auf die Ebne AB (Fig. 65.), welche unter dem Winkel $= \alpha$ gegen die Verticale geneigt ist, stützt sich eine gegebene Last $= P$, welche durch eine am Seile CP aufwärts wirkende Kraft gehalten wird; das Seil PC geht bei C über eine Rolle, deren Lage gegeben ist und trägt am andern Ende ein gegebnes Gewicht $= Q$, welches gleichfalls auf einer geneigten Ebne ruht; wie groß muß der Neigungswinkel der letztern Ebne sein, damit das Gleichgewicht bestehe, wenn die Winkel PCB und QCB gegeben sind.

Auflösung. Es sei $PCB = \beta$; $QCB = b$, $ABF = \alpha$ und der gesuchte Winkel $FDE = a$. Die Kraft, welche nach PC ziehen muß, um P zu erhalten, ist, wenn die Reibung nicht berücksichtigt wird, $= \dfrac{P \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,(\alpha - \beta)}$ (§. 176.); so groß ist also die Spannung des Seiles CP. Diese wird durch eine eben so große nach CQ wirkende Kraft hervorgebracht, da gleiche, nach der Tangente wirkende Kräfte an der kreisförmigen Rolle im Gleichgewichte sind (§. 97.), und die entgegenwirkende Kraft, nämlich die durch das Gewicht

Q hervorgebrachte Spannung des Seiles CQ muß jener Kraft gleich $\frac{Q \cdot Cos\, a}{Cos\,(a-b)} = \frac{P \cdot Cos\,\alpha}{Cos\,(\alpha-\beta)}$ sein; also wenn a gesucht wird $\frac{Q \cdot Cos\,(\alpha-\beta)}{P \cdot Cos\,\alpha} = Cos\, b + Sin\, b \cdot tang\, a$, oder $tang\, a = \frac{Q \cdot Cos\,(\alpha-\beta)}{P \cdot Cos\,\alpha \cdot Sin\, b} - Cotang\, b$.

§. 183. Soll hier b ungeändert bleiben, so wächst a mit β zugleich, oder je tiefer man, bei unveränderter Lage der Ebne AB das Gewicht P auf dieser Ebne herabschiebt, desto mehr nähert DE sich der horizontalen Lage, wenn BCQ ungeändert bleiben und das Gleichgewicht bestehen soll.

Nimmt man die Lage von C als völlig bekannt an, so wird BC = h gegeben sein, wenn man PC = λ als gegeben ansieht, indem $Sin\,(\alpha-\beta) = \frac{h \cdot Sin\,\alpha}{\lambda}$.

Ist nun die ganze Länge des Seiles bestimmt = l, also CQ = l — λ, so wäre durch den Winkel = b und die Entfernung = l — λ die Lage des Punctes Q völlig gegeben, und wir erhielten aus unsrer Gleichung den Winkel a ausgedrückt durch die gegebne Neigung = α der Ebne AB, durch die Höhe BC = h, die Länge l des ganzen Seiles und durch die beiden, als veränderlich anzusehenden Größen λ und b. Soll die Länge des Seiles unveränderlich sein, so wird, indem λ zunimmt, indem zum Beispiel das Gewicht P nach p hinabrückt, b abnehmen, weil zugleich das Gewicht Q nach q gerückt und l — λ verkleinert wird. Die Abnahme von b hängt, wenn die Lage der Ebne DE gegeben ist, auf bestimmte Weise von der Zunahme des λ ab, und ist daher durch diese bestimmt. Indem beide Gewichte nach p und q verschoben werden, kann nicht mehr auf der unter dem Winkel = a geneigten Ebne das Gleichgewicht statt finden, sondern die stützende Ebne müßte in q anders geneigt sein, also einen Winkel mit der vorigen machen;

oder wenn man eine Fläche bilden wollte, worauf Q immer dem P in seinen verschiedenen Lagen bei unveränderlicher Länge des Seiles das Gleichgewicht halten sollte, so müßte dieses eine krumme Fläche sein.

§. 184. Bemerkung. Wenn eine Last = Q auf einer krummen Fläche ruht, so wird offenbar die Kraft, welche jene erhalten kann, ganz wie bei einer geneigten Ebne bestimmt; man setzt nämlich mit Recht für den Neigungswinkel der krummen Fläche in einem bestimmten Puncte den Neigungswinkel an, welcher einer in diesem Puncte berührenden Ebne zukömmt.

§. 185. Die vorigen Betrachtungen ließen sich also auch hier anwenden und es ist aus dem vorigen leicht zu übersehen, daß man für kleine Verrückungen beider Gewichte, nach und nach die den veränderten Stellungen derselben entsprechenden Neigungswinkel von DE berechnen, und folglich wenigstens eine aus graden Stücken zusammengesetzte Linie angeben könnte, auf welcher Q fortgehen müßte, um dem fortgeschobenen P das Gleichgewicht zu halten, wenn l, die Länge des Seiles, unveränderlich bleibt.

Anmerkung. Die hier vorausgesetzten Kenntnisse erlauben nicht, die eben angedeutete Untersuchung durchzuführen; ich will daher nur einige Hauptpuncte derselben angeben. Ist Q nach q hinaufgerückt, indem P nach p herabsinkt, so ist, wenn man um C die Kreisbogen qs und Pr zieht, sQ die Verkürzung des einen und pr die gleichzeitige Verlängerung des andern Seiles, also $Qs = rp$; und wenn diese Größen sehr klein sind, daß man prP und Qsq als bei r und s rechtwinklichte Dreiecke betrachten kann,

$$Pp = \frac{pr}{\mathrm{Cos}\,(\alpha-\beta)} \text{ und } Qq = \frac{pr}{\mathrm{Cos}\,(a-b)}.$$

Indem der Körper um Pp herabsinkt, ist er nach verticaler Richtung um $Pp \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{pr \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,(\alpha-\beta)}$ gesunken und indem der andre Körper um Qq hinaufrückt, ist er vertical um $\frac{pr \,.\, \mathrm{Cos}\,a}{\mathrm{Cos}\,(a-b)}$ gestiegen; unsre Gleichung

$\frac{Q \,.\, \mathrm{Cos}\, a}{\mathrm{Cos}\,(a-b)} = \frac{P \,.\, \mathrm{Cos}\, \alpha}{\mathrm{Cos}\,(\alpha-\beta)}$ (§. 182.) heißt also, Q muß sich zu P verhalten, umgekehrt wie die verticalen Höhen, um welche diese Gewichte gleichzeitig steigen und sinken, oder die Neigung der zweiten Ebne muß so gewählt werden, daß das gleichzeitige Steigen und Sinken sich umgekehrt wie die Gewichte verhalte. Um dieses zu erhalten müßte Q auf einer gehörig gekrümmten Fläche steigen, und die richtige Anordnung dieser krummen Fläche fließt aus dem Satze, daß der gemeinschaftliche Schwerpunct beider Körper immer in derselben Horizontallinie bleiben muß. Denn ist irgend einmal die Höhe von P über dem gemeinschaftlichen Schwerpuncte $= h$ und die Tiefe von Q unter demselben $= k$, so ist (§. 94.) $k \,.\, Q = h \,.\, P$; nimmt nun h um d zu, so muß, wie wir eben gesehen haben, k um $\frac{P \,.\, d}{Q}$ zunehmen, und es bleibt noch $\left(k + \frac{P \,.\, d}{Q}\right) Q = (h + d)\, P$. Der Schwerpunct bleibt immer in gleicher Höhe. Kennt man also P und Q und die Höhe des einen über dem gemeinschaftlichen Schwerpuncte, so ist auch die Tiefe des andern unter demselben bekannt und folglich die Horizontallinie bekannt, in welcher Q sich befindet. Da man nun zugleich die Länge CQ kennt, so läßt sich für jede Höhe von P die zugehörige Lage von Q und folglich die krumme Fläche bestimmen, auf welcher Q sich hinauf bewegen muß, damit immerfort das Gleichgewicht bestehe.

§. 186. Ganz ähnliche Betrachtungen finden statt, wenn das Gleichgewicht P auf eine krumme Fläche sich stützend durch ein Gegengewicht gehalten wird. In Fig. 66. sei BGC eine solche Fläche, deren Gestalt man kennt, zum Beispiel von kreisförmigem Durchschnitte, so ist für jede Lage des einen Gewichts, etwa in G die Neigung der Tangente GT bekannt, und es läßt sich also auch hier die Krümmung der Fläche iFh bestimmen, auf welcher das zweite Gewicht fortrücken muß, um immer mit dem auf BGC fortgeschobenen Gewichte im Gleichgewichte zu sein, wenn beide durch ein über die Rolle A gehendes Seil verbunden sind.

§. 187. Anmerkung. Die Anmerkung zu §. 185. zeigt, daß der gemeinschaftliche Schwerpunct beider Gewichte, die ich P und Q nennen will, immerfort in gleicher Höhe bleibt; befand sich also (Fig. 66.) Q in F als P in C war, und ist FC horizontal, so liegt für diesen Augenblick der gemeinschaftliche Schwerpunct in FC und bleibt folglich immer in dieser Linie. Um zu zeigen, wie man nun die Curve findet, auf welcher Q fortgehen muß, will ich setzen Q sei $= P$, dann zieht man, wenn P sich in G befindet, eine Horizontale eben so tief unter CF als G oberhalb von CF entfernt ist, nimmt Ag so, daß $AG + Ag = AC + AF$ sei, und zieht mit dem Halbmesser Ag einen Kreisbogen um A; wo dieser jene Horizontale schneidet, in g, da liegt ein Punct der verlangten Curve. Eben so sind H, h gleichzeitige Stellungen der gleichen Gewichte, denn H ist so hoch über CF als h unter derselben und $AH + Ah = AC + AF$. Wäre $Q = 2P$, so müßte man, wie die zweite in der Figur dargestellte Curve zeigt, allemal g' halb so tief unter als G über CF, h' halb so tief unter als H über CF annehmen und $AG + Ag' = AC + AF = AH + Ah'$ nehmen, und so in ähnlichen Fällen.

Der Fall einer solchen Betrachtung kömmt vor, wenn ein Körper GM, etwa eine Zugbrücke, um den festen Punct M gedreht wird, dann ist es so gut, als ob ein immer gleiches Gewicht (nämlich das halbe Gewicht der Brücke, wenn ihr Schwerpunct in der Mitte liegt), auf dem Kreise CGB fortgezogen würde. Soll nun das Aufziehen der Brücke vermittelst eines Seiles GAH geschehen, so hält ein bestimmtes Gegengewicht der Brücke in allen Stellungen das Gleichgewicht, wenn es auf der Curve iFgh (oder einer nach Verschiedenheit der Größe des Gegengewichts ähnlich bestimmten Curve) fortgeschoben wird.

Eine gründlichere Auflösung, als ich hier geben konnte, giebt Jde System der reinen und angewandten Mathematik. Th. I. S. 357.

§. 188. Erklärung. Der Keil ist ein dreiseitiges Prisma, dessen man sich zum Spalten eines Körpers bedient, indem man es zwischen zwei getrennte Theile eines Körpers hineintreibt.

§. 189. Aufgabe. Das Verhältniß zu bestimmen, in welchem die auf dem Keil in D wirkende Kraft zu dem Widerstande stehen muß, welchen seine Seitenflächen BC, AC nach senkrechter Richtung leiden (Fig. 67.).

Auflösung. Wenn in D die Kraft = P senkrecht auf AB wirkt, um Kräfte = Q, welche in F und E senkrecht auf des Keiles Seitenflächen angebracht sind, zu überwältigen, so ist es so gut, als ob die Kräfte = Q beide in G, wo ihre Richtungen sich einander und die Mittellinie des Keils schneiden, angebracht wären. Ist der Winkel des Keils an seiner Schärfe ACB = α, so ist die in F wirkende Kraft = Q, den Seitenkräften = Q . Sin $\frac{1}{2}\alpha$ nach CD, und = Q . Cos $\frac{1}{2}\alpha$ senkrecht auf CD gleichgeltend. In eben solche Seitenkräfte wird die in E wirkende Kraft = Q zerlegt, und da hier die eine Seitenkraft = Q . Cos $\frac{1}{2}\alpha$ der vorigen auf CD senkrechten gleich und entgegengesetzt ist, die andre aber = Q . Sin $\frac{1}{2}\alpha$ sich mit der vorhin nach eben der Richtung wirkenden verbindet, so muß P = 2 Q . Sin $\frac{1}{2}\alpha$ sein, oder

$$P : Q = 2 . \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha : 1 = AB : BC,$$

das ist, die Kraft, welche gegen des Keiles Rücken wirkt zu dem auf die eine Seitenfläche senkrechtem Drucke, wie die Breite des Rückens zur Seitenlinie des Keils.

§. 190. Die Reibung ist beim Forttreiben des Keiles sehr stark, aber da überhaupt die Wirkungsart des dem Spalten widerstehenden Körpers schwierig zu bestimmen ist, und die ganze Untersuchung wenig Interesse darbietet, so halte ich es für unnöthig, umständlich zu untersuchen, wie hier die Kräfte gegen einander wirken.

§. 191. Erklärung. Es sei AB (Fig. 68.) ein gerader Cylinder, an welchem der Umfang der Grundfläche von C an in willkürliche Theile Cd, de u. s. w. getheilt ist. Man errichte in d, e und allen folgenden Theilungspuncten gegen die Grundfläche senkrechte Linien, die also in der Oberfläche des Cylinders liegen, und nehme allemal die Höhen dieser Senkrechten dem zwischen C und ihnen abgeschnittenen Bogen auf dem Umfange der Grundfläche proportional, nämlich df : eg

= Bogen Cd : Bogen Ce. Dann liegen die Endpuncte f, g, aller dieser Senkrechten in der Schraubenlinie.

§. 192. Wenn man auf der Schraubenlinie einen willkürlichen Punct K nimmt, so ist also seine Höhe KL dem Bogen CL proportional. Ist man um mehr als einen ganzen Umfang des Cylinders auf der Schraubenlinie fortgegangen, so ist die Höhe eines solchen Punctes M, ausgedrückt durch $LM = \frac{(\text{ganzer Umfang} + CL) \cdot df}{Cd}$.

§. 193. Erklärung. Ein jeder Theil der Schraubenlinie, der genau durch einen ganzen Umfang des Cylinders läuft, heißt Ein Schraubengang zum Beispiel CKN oder KNM; die Entfernung KM = CN heißt die Höhe des Schraubenganges.

§. 194. Erklärung. Wenn man, dem Gange der Schraubenlinie folgend, eine Erhöhung auf dem Umfange des Cylinders ausarbeitet: so heißt dieser körperlich ausgearbeitete Schraubencylinder die Schraubenspindel. Schneidet man dagegen in eine der vorigen gleiche aber hohl ausgearbeitete Cylinderfläche, in welche jener Cylinder paßt, die Schraubenlinie ausgehöhlt aus, so ist dieses die Schraubenmutter, und jene paßt in diese, wenn der hier ausgeschnittene Schraubengang genau eben die Form hat, wie der dort aufliegende oder vorragende.

195. Bemerkung. Man gebraucht die Schraube, um Lasten zu heben oder sie unterstützt zu erhalten. Wenn man die in der festgehaltenen Schraubenmutter steckende Spindel nach einer Richtung, die mit dem Umfange des Cylinders übereinstimmend ist, dreht: so rückt jeder Punct C (Fig. 69.) in dem ausgeschnittenen Schraubengange der Mutter fort; und wenn beide vertical stehen, so wird eben dadurch die Spindel mit der auf ihr ruhenden Last gehoben.

Man kann hier jeden Punct des Schraubenganges der Spindel ansehen, als ob er sich stütze auf den ausgeschnittenen Schraubengang der Mutter; es ist also so gut, als ob jeder Punct auf einer geneigten Ebne läge, deren Neigungswinkel durch die Höhe des Schraubenganges und den Umfang der Spindel bestimmt ist. Da das Steigen des Ganges für einen ganzen Umfang $= a =$ der Höhe des Schraubenganges ist, und dieses Steigen gleichförmig in allen Puncten ist: so hat man, für den Halbmesser $= r$ der Spindel, den Neigungswinkel $= \varphi$ jedes Stückes des Schraubenganges gegen eine mit der Grundfläche parallele Ebne durch $\tan \varphi = \frac{a}{2 \cdot r \cdot \pi}$ bestimmt (wo $\pi = 3{,}14159 \ldots$), denn für jedes noch so kleine Stück $= \frac{1}{n}$ des Umfanges steigt der Gang um $\frac{1}{n}$ a, also ist die Neigung der Berührungslinie $= \varphi$, durch $\tan \varphi = \frac{a}{2 \cdot r \cdot \pi}$ ausgedrückt.

§. 196. Aufgabe. Auf der vertical stehenden Schraubenspindel (Fig. 69.) ruht die Last $= Q$, man sucht die Kraft $= P$, welche am Umfange der Spindel wirken muß, um der Last das Gleichgewicht zu halten, wenn man auf die Friction keine Rücksicht nimmt.

Auflösung. Es sei der Halbmesser der Spindel $= r$, die Höhe des Schraubenganges $= a$, so ist jedes kleine Stück des Schraubenganges der Mutter als eine geneigte Ebne anzusehen, welche mit dem Horizonte den Winkel $= \varphi$ macht, dessen Tangente $\tan \varphi = \frac{a}{2 \cdot r \cdot \pi}$ ist. Denken wir uns nun die Last auf alle kleinen Theile des Schraubenganges, deren Zahl n heißen mag, gleich vertheilt, so liegt auf jedem Theile des Schraubenganges die Last $= \frac{1}{n}$ Q, die durch eine horizontal wirkende Kraft $= \frac{1}{n} Q \cdot \tan \varphi = \frac{1}{n} Q \cdot \frac{a}{2 \cdot r \cdot n}$ (nach §. 179.) erhalten werden muß. Die gesammte Kraft ist daher

$= Q \cdot \frac{a}{2.r.n} = P$, oder diese verhält sich zur Last $= Q$, wie die Höhe des Schraubenganges zum Umfange der Spindel.

§. 197. So würde es sich verhalten, wenn keine Reibung vorhanden wäre. Diese ist aber bei der Schraube sehr groß, und ohne Zweifel dadurch noch vergrößert, daß erstlich selten die Schraubenspindel mit völliger Genauigkeit in die Mutter paßt, wodurch dann Klemmungen entstehen, die nicht bloß vom Drucke der Last abhängen; und zweitens die Schraubengänge, als nicht vollkommen fest beim Drucke der Last ihre Form etwas ändern und so jene Klemmungen vermehren.

Zehnter Abschnitt.

Vom Rade an der Welle, der Rolle und dem Flaschenzuge.

§. 198. Erklärung. Eine kreisförmige Scheibe, so an einen Cylinder befestigt, daß des Cylinders Axe durch der Scheibe Mittelpunct geht, und auf ihre Ebne senkrecht steht, heißt ein Rad an der Welle oder Axe, indem der Cylinder hier die Welle oder Axe genannt wird. Eine Rolle ist dieselbe Vorrichtung im Kleinen.

§. 199. Aufgabe (Fig. 70.). Die Welle BC ruht in einer gehörig angebrachten Unterlage; man sucht das Verhältniß der am Umfange des Rades in D nach der Richtung der Tangente des Rades wirkenden Kraft $= P$, zu der am Umfange der Welle, gleichfalls nach der Richtung der Tangente ziehenden Last $= Q$.

Auflösung. Wenn man auf die Reibung nicht sieht, so ist (§. 97.) $P : Q = CB : CD$, wie der Halbmesser der Welle zum Halbmesser des Rades.

Will man auf die Reibung Rücksicht nehmen, so muß man erwägen, daß die in einem ausgehöhlten Lager ek ruhende Welle sich gegen die Unterlage da stützt, wo die mittlere Richtung aller wirkenden Kräfte sie hindrängt, zum Beispiel in g. Hier ist also g der einzige unterstützte Punct, und die Kräfte, welche bei g nach der Tangente einander entgegen wirken, müssen einander aufheben. Es sei die Richtung der Kraft Q unter dem Winkel $BlR = \beta$, die Richtung der Kraft P unter dem Winkel $DmR = \alpha$ gegen den Horizont geneigt, die in g gezogne Tangente gp mache mit dem Horizonte den Winkel $= \phi$, der sich leicht bestimmen ließe. Das Gewicht des Rades und der Welle selbst wollen wir, um leichter zu rechnen, bei Seite setzen.

Wenn die Kräfte einander im Gleichgewichte halten, so ist es für den Druck auf g eben so gut, als ob P nach gh, Q nach gi, ihren wahren Richtungen parallel, wirkten (§. 100.). Da nun $pgh = \alpha + \phi$, $pgi = \beta + \phi$; so würde sich P nach gh wirkend, zerlegen
in eine Kraft nach gp, $= P \,.\, \mathrm{Cos}\,(\alpha + \phi)$,
in eine Kraft nach gk, $= P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha + \phi)$, wo gk senkrecht auf gp, und eben so die nach gi wirkende Kraft Q
in eine nach gp, $= Q \,.\, \mathrm{Cos}\,(\beta + \phi)$,
in eine nach gk, $= Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta + \phi)$. Von dem Drucke nach gk, welcher $= P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha + \phi) + Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta + \phi)$ ist, hängt die Reibung ab, die ich
$= f \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha + \phi) + f \,.\, Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta + \phi)$ setze. Soll also die Welle in dieser Lage ruhen, so muß dieser aus der Reibung entstehende Widerstand die nach gp wirkenden Kräfte aufheben, und

$$P \,.\, \mathrm{Cos}\,(\alpha + \phi) + Q \,.\, \mathrm{Cos}\,(\beta + \phi) = f \,.\, P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha + \phi) + f \,.\, Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta + \phi),$$

sein, damit kein Fortschieben der Welle in der Unterlage statt finde.

Zugleich müssen die zur Drehung wirkenden oder sie hindernden Kräfte einander im Gleichgewichte halten; ihre Momente müssen also gleich sein. Da nun P am Umfange des Rades wirkt, dessen Halbmesser $CD = r$, Q aber und auch die Reibung bei g am Umfange der Welle wirken, deren Halbmesser $= \varrho = CB = CG$, so ist $r \cdot P = \varrho \cdot Q + \varrho \cdot f(P \cdot \mathrm{Sin}(\alpha+\varphi) + Q \cdot \mathrm{Sin}(\beta+\varphi))$.

Hier ergiebt sich die Größe von P am leichtesten durch folgende Rechnung:

Aus der ersten Gleichung ist

$$(P \cdot \mathrm{Cos}(\alpha+\varphi) + Q \cdot \mathrm{Cos}(\beta+\varphi))^2 = f^2 (P \cdot \mathrm{Sin}(\alpha+\varphi) + Q \cdot \mathrm{Sin}(\beta+\varphi))^2$$

addirt man hiezu die identische Gleichung

$$(P \cdot \mathrm{Sin}(\alpha+\varphi) + Q \cdot \mathrm{Sin}(\beta+\varphi))^2 = (P \cdot \mathrm{Sin}(\alpha+\varphi) + Q \cdot \mathrm{Sin}(\beta+\varphi))^2,$$

so ist

$$P^2 + Q^2 + 2P \cdot Q \cdot \mathrm{Cos}(\beta-\alpha) = (1+f^2) \cdot (P \cdot \mathrm{Sin}(\alpha+\varphi) + Q \cdot \mathrm{Sin}(\beta+\varphi))^2.$$

Aber aus der zweiten Gleichung war auch

$$(P \cdot \mathrm{Sin}(\alpha+\varphi) + Q \cdot \mathrm{Sin}(\beta+\varphi))^2 = \frac{(r \cdot P - \varrho \cdot Q)^2}{\varrho^2 f^2},$$

also $$\frac{P^2 + Q^2 + 2P \cdot Q \cdot \mathrm{Cos}(\beta-\alpha)}{1+f^2}$$

$$= \frac{r^2 P^2 + \varrho^2 Q^2 - 2r \cdot \varrho P \cdot Q}{\varrho^2 f^2},$$

oder

$$P^2(r^2 + (r^2 - \varrho^2) f^2) - 2PQ(r \cdot \varrho(1+f^2) + \varrho^2 f^2 \cdot \mathrm{Cos}(\beta-\alpha))$$
$$= - \varrho^2 \cdot Q^2;$$

oder $$P^2 - 2P \cdot \frac{Q \cdot (r\varrho(1+f^2) + \varrho^2 f^2 \mathrm{Cos}(\beta-\alpha))}{r^2 + r^2 f^2 - \varrho^2 f^2}$$

$$= - \frac{\varrho^2 Q^2}{r^2 + f^2(r^2 - \varrho^2)},$$ woraus P leicht bestimmt wird.

Anmerkung. Wenn die Last sehr groß ist, und folglich starke und unbiegsame Seile gebraucht werden, so muß man auch auf die wegen der Steifheit der Seile erforderliche Kraft Rücksicht nehmen, so wie dann auch die Reibung des Seiles am Umfange der Welle zu beachten ist.

§. 200. Aufgabe. Das Rad AB (Fig. 71.) ist so aufgestellt, daß seine verticale Welle mit ihrer Grundfläche cd in einer Pfanne ruhet. Das obere Ende der Welle wird durch den Zapfen e gehalten; welche Kraft $= P$ ist, am Umfange des Rades, nach der Tangente wirkend, nöthig, um grade die Friction zu überwinden.

Auflösung. Die Reibung, welche allein hier zu überwältigen ist, entsteht theils am obern Zapfen e, der sich an einen hohlen Cylinder stützt, theils an der Grundfläche der Welle cd. Die letztere hängt bloß vom Gewichte des Rades und der Welle, welches ich $= T$ setze, ab, die erstere bloß von der horizontal wirkenden Kraft $= P$. So lange das Gleichgewicht besteht, übt die Kraft P auf den Punct f der Umdrehungsaxe eben den Druck aus, als ob sie in f selbst ihrer wahren Richtung parallel wirkte, und daher entsteht, wenn $fe = fc$ ist, bei e ein Druck $= \frac{1}{2} P$ gegen die Höhlung des Cylinders, in welchem e läuft (§. 124. 92.), die diesem Drucke entsprechende Reibung nenne ich $= f . \frac{1}{2} P$, und ihr Moment ist $= \varrho . \frac{1}{2} P . f$, wenn des Zapfens e Halbmesser $= \varrho$ ist. Der Halbmesser der Welle cd sei $= \frac{1}{2} cd = r$, der Halbmesser des Rades $= fA = R$. Nenne ich nun das Moment der erst zu bestimmenden Reibung an der Welle Grundfläche $= x$, so muß

$$R . P = \varrho . f . \tfrac{1}{2} P + x, \text{ sein.}$$

Um x zu finden, dient folgende Ueberlegung.

In Fig. 72. stelle CD eben den Kreis vor, den wir in Fig. 71. mit cd bezeichnet haben. Der Inhalt dieses Kreises, dessen Halbmesser $= r$, ist $= r^2 . \pi$ und jeder seiner Theile leidet gleichviel von dem gesammten Drucke $= T$. Zertheile ich diesen Kreis so, daß um den Mittelpunct ein Kreis vom Halbmesser $= \frac{1}{n} . r$ abgeschnitten wird, so ist dessen Inhalt $= \frac{r^2 . \pi}{n^2}$, und der Druck, den er leidet $= \frac{1}{n^2} T$, da jeder Theil der Grundfläche gleich stark gedrückt wird. Die Reibung auf diesem Theile ist also $= f \cdot \frac{T}{n^2}$, das Moment dieser Reibung ohngefehr $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot r \cdot f \cdot \frac{T}{n^2}$, weil man nicht so gar erheblich fehlen wird, wenn man sich die vom Mittelpuncte bis zur Entfernung $= \frac{1}{n} \cdot r$ vertheilte Reibung, als in der Entfernung $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} r$ vereinigt denkt.

Stellen wir uns nun Kreise mit den Halbmessern $= \frac{2}{n} \cdot r$; $= \frac{3}{n} \cdot r$; $= \frac{4}{n} \cdot r$ u. s. w. um denselben Mittelpunct beschrieben vor: so ist für den ersten Ring, dessen innerer Halbmesser $= \frac{1}{n} \cdot r$, äußerer $= \frac{2}{n} \cdot r$, der Inhalt $= \frac{3 \cdot r^2 \cdot \pi}{n^2}$; der Druck, den er leidet $= \frac{3T}{n^2}$; Reibung $= \frac{3 \cdot f \cdot T}{n^2}$; Moment der Reibung, die wir uns mitten zwischen den Grenzen des Ringes vereinigt denken, ohngefehr $= \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{n} \cdot \frac{3fT}{n^2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{rfT}{n^3}$; für den zweiten Ring, die Fläche $= \frac{5r^2\pi}{n^2}$; Druck $= \frac{5T}{n^2}$; Reibung $= \frac{5fT}{n^2}$; Moment der Reibung ohngefehr $= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot r \cdot \frac{5fT}{n^2} = \frac{25}{2} \cdot \frac{rfT}{n^3}$. Es läßt sich hieraus leicht übersehen, daß die Summe der Momente der Reibung für den innern Kreis und die $(n-1)$ Ringe, in welche die Grundfläche getheilt ist,

$$= x = \frac{rfT}{2n^3}(1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 \ldots\ldots + (2n-1)^2)$$

sein wird, und der letzte eingeschlossene Factor müßte so vervollständigt werden, daß er die Summe der Quadrate aller ungraden Zahlen von 1 bis $(2n-1)$ enthielte.

Daß dieses richtig sei ergiebt sich, wenn man für die einzelnen Ringe weiter rechnet: für den letzten ist der innere Halbmesser $= \frac{n-1}{n} . r$, der äußere Halbmesser $= r$; Inhalt $= \frac{n^2 . r^2 - (n-1)^2 r^2}{n^2} \pi$, das ist $= \frac{(2n-1) r^2}{n^2} \pi$; Druck $= \frac{(2n-1)}{n^2} T$; Reibung $= \frac{(2n-1) f . T}{n^2}$; Moment der Reibung $= (r - \frac{1}{2n} . r) \frac{(2n-1) f . T}{n^2} = \frac{(2n-1)^2 . r f T}{2 . n^3}$, weil man sich die Reibung mitten zwischen den Grenzen des Ringes vereinigt denkt.

Diese Bestimmung der Reibung wird desto genauer, je größer man n oder die Anzahl der Theile nimmt. Setzte man nur $n = 10$, so wäre $2n - 1 = 19$ und

$$x = \frac{r . f . T}{2 . 1000} (1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121 + 169 + 225 + 289 + 361)$$

das gäbe $x = \frac{1330}{2000} . r . f . T$ (*), welches der Wahrheit schon sehr nahe kömmt, und nun wird

$$P = \frac{x}{R - \frac{1}{2} \varrho . f}.$$

§. 201. Diese Rechnung kann immer dienen, das Moment der Reibung zu finden, und giebt, obgleich die

(*) Die Analysis zeigt, daß die Summe jener von 1^2 bis $(2n-1)^2$ fortgesetzten Reihe allgemein $= \frac{(8n^3 - 2n)}{6}$ ist. Das gäbe das gesammte Moment der Reibung $= r . f T \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6n^2} \right)$, welches desto näher $= \frac{2}{3} . r . f . T$ ist, je größer n genommen wird; es erhellt daher, daß $\frac{2}{3} r . f . T$ der wahre Werth des Momentes der Reibung ist.

Voraussetzung, daß die Reibung jedes Ringes mitten zwischen seinen Begrenzungen vereinigt sei, nicht genau richtig ist. Resultate, welche der Wahrheit nahe genug kommen. Es ist aber oft vortheilhafter, solche Größen, wie die hier zu bestimmenden, in geometrischer Form darzustellen. Hiezu dient folgende Zeichnung.

Es sei (Fig. 73.) iC der Halbmesser der Welle. Hier läßt sich, wenn man diesen in eine willkürliche Anzahl $= n$ Theile eintheilt, durch die Länge einer in jedem Theilungspuncte errichteten Senkrechten, das Moment der dort statt findenden Friction verhältnißmäßig darstellen. Ist nämlich $ih = \frac{m}{n} . r$; $ig = \frac{m+1}{n} . r$: so ist der Ring, welcher zwischen den mit diesen Halbmessern beschriebenen Kreisen liegt $= \frac{r^2\pi}{n^2}((m+1)^2 - m^2)$ $= \frac{r^2\pi(2m+1)}{n^2}$. Dieser Ring verhält sich also zur ganzen Grundfläche wie $\frac{(2m+1)}{n^2} : 1$, und die Belastung dieses Ringes ist $= \frac{(2m+1)}{n^2} T$, Reibung $= \frac{(2m+1) f T}{n^2}$; Moment der Reibung sehr nahe $= \frac{(m+\frac{1}{2})}{n} . r . \frac{(2m+1)}{n^2} f . T = \frac{(m+\frac{1}{2})^2 . 2r f T}{n^3}$.

Für jeden Ring ist also das Moment der Reibung dem Quadrate des Abstandes vom Centro proportional. Trägt man nun die Senkrechten hk, gl, CF und alle übrigen so auf, daß sie durch $hk : gl = ih^2 : ig^2$;
$hk : CF = ih^2 : iC^2$,
und so in allen übrigen Puncten ausgedrückt werden: so stellt die Fläche hglk das Moment der auf dem Ringe hgmnop (Fig. 72.) statt findenden Reibung dar; die Fläche CFrq (Fig. 73.) das Moment der Reibung auf dem äußersten Ringe, und folglich die ganze Fläche

ikFCi das Moment der Reibung auf der ganzen Grundfläche der Welle.

Wie diese verhältnißmäßige Darstellung zu verstehen sei, läßt sich am besten so übersehen. Eben jene Welle vom Halbmesser $= r$, welche wir bisher als vertical stehend annahmen, sei wie in Fig. 70. horizontal gelegt und übe in g die Reibung $= f . T$ aus, so ist das Moment der Reibung $= r . f . T$, weil sie in der Entfernung $= r$ vom Drehungspuncte wirkt. Wenn nun $\frac{ih + ig}{2} = \left(\frac{m + \frac{1}{2}}{n}\right) r = it$ in Fig. 73. ist, so hat man das Moment der Reibung auf dem durch hg angedeuteten Ringe $= \frac{2 . it^2 . f . T}{n . r}$, also, wenn $st : CF = it^2 : r^2$, und $CF = 2r . f . T$, ist, wird $st = \frac{it^2 . 2f . T}{r}$, und die Fläche $hgkl = \frac{1}{n} r . st = \frac{2 . f . T . it^2}{n}$, das Moment der Reibung auf dem zu hg gehörigen Ringe $= \frac{\text{Fläche } hglk}{r}$. Daraus ergiebt sich also der gesammten Reibung Moment $= \frac{\text{Fläche } ikFC}{r}$, und dieses verhält sich zum Momente der Reibung am Umfange der horizontalliegenden Welle in Fig. 70., welches $= r . f . T = \frac{1}{2} CF$ ist, wie die Fläche ikFCi zur Fläche $\frac{1}{2}$ iGFC, wenn iGFC ein aus den Seiten $iC = r$ und $CF = 2r . f . T$ gebildetes Rechteck ist.

Anmerkung. Die Linie ikF (Fig. 73.) ist eine Parabel, welche die Fläche ikFC $= \frac{1}{3}$ iGFC abschneidet, wie die Analysis lehrt.

§. 202. Bemerkung. Die Bewegung unsrer zwei- und vierrädrigen Fuhrwerke hängt ganz von den Betrachtungen in §. 199. ab. In Fig. 74. stellt CH die Axe vor, um welche das Rad DF beweglich ist. Bleiben wir bei dem einfachsten Falle stehen, wo der

Wagen auf horizontalem Boden DK soll fortgezogen werden, und wo auch die fortziehende Kraft nach horizontaler Richtung BE wirkt: so sind die Hauptumstände der Bewegung folgende. Die Axe CH ist mit einer Last $= Q$ beschwert; die vertical niederwärts nach BD ihren Druck ausübt; die horizontal wirkende Kraft $= P$ würde die ganz vom horizontalen Boden getragene Last ohne Schwierigkeit fortziehen, wenn keine Reibung da wäre; sie würde bloß eine einfache der Last proportionale Reibung zu überwältigen haben, wenn das Rad an der Axe fest befestigt wäre; dann würde die zum Fortziehen erforderliche Kraft $= f(Q + R)$ sein, wenn außer der gesammten Belastung der Axe noch das Gewicht $= R$ des Rades in Rechnung gebracht wird. Man macht aber nun das Rad um die Axe beweglich, weil die Reibung des Rades am Boden viel leichter beim Wälzen des Rades als beim Fortschleifen überwunden wird.

Wegen der zwei auf die Axe wirkenden Kräfte $= Q$ nach BD, und $= P$ nach BE wird die Axe nach der Richtung BC der Mittelkraft, gegen die innere Höhlung oder die Nabe CG des Rades gedrängt, und indem das Rad wegen des Widerstandes bei D anfangen will sich fortzuwälzen, leidet es bei C eine Reibung an der Axe. Die nach BC wirkende Mittelkraft ist bei unsern Voraussetzungen $= \sqrt{(P^2 + Q^2)}$ (nach §. 52.), die Reibung, welche einen immer gleichen Theil des Druckes beträgt, sei $= \varphi \cdot \sqrt{(P^2 + Q^2)}$, und ihr Moment wird, da die Drehung um den Mittelpunct des Rades geschieht $= r \cdot \varphi \cdot \sqrt{(P^2 + Q^2)}$, sein, wenn $AC = r$ ist. Des Rades Halbmesser sei $= \varrho$, so wird eine Kraft $= \frac{r}{\varrho} \varphi \cdot \sqrt{(P^2 + Q^2)}$, am Umfange des Rades in D wirkend, der Drehung mit eben der Gewalt widerstehen, wie jene Reibung bei C, und wir können uns daher diese Kraft statt der Reibung bei C jetzt bei D angebracht denken, wo nun die Reibung am Boden, die $= F \cdot (Q + R)$ heißen mag, sich mit ihr vereiniget. F muß hier als diejenige Zahl angenommen werden, welche angiebt, welchem Theile der Last die Reibung beim Wälzen des Rades gleich ist, und nun erhellt, daß

$$P = F(Q+R) + \frac{r}{\varrho}\varphi \cdot \sqrt{(P^2+Q^2)}$$ sein

muß, also

$$P^2 - 2P \cdot F(Q+R) + F^2(Q+R)^2 = \frac{r^2 \cdot \varphi^2}{\varrho^2} \cdot (P^2+Q^2),$$

woraus $P^2 - \frac{2 \cdot P \cdot F \cdot \varrho^2 (Q+R)}{\varrho^2 - r^2 \varphi^2}$

$$= \frac{r^2 \varphi^2 Q^2 - \varrho^2 F^2 (Q+R)^2}{\varrho^2 - r^2 \varphi^2},$$ folgt, und P

leicht bestimmt wird.

Wäre der Weg nicht horizontal, so würde noch zu bestimmen sein, welchen Theil der Last die Kraft auf der geneigten Ebne zu heben habe; wäre die Richtung der Kraft nicht der geneigten Ebne parallel, so müßte man auch darauf Rücksicht nehmen.

Anmerkung. Sehr vollständig und brauchbar behandelt diesen Gegenstand Kröncke in seinem Versuch einer Theorie des Fuhrwerkes. Gießen 1802. Auch Gerstner über Frachtwagen und Straßen. Prag, 1813., und Edgeworth Observations on Wheel-Carriages and Roads. London, 1814.

§. 203. Bemerkung. Wenn man eine Rolle AB hat (Fig. 75.), deren Axe sich in der Hülse C frei drehen kann, so wird, wenn man an der Hülse die Last P befestiget, und nun dieselbe vermittelst beider Enden des um die Rolle geschlagenen Seiles DABE trägt, jedes Seil die Hälfte der Last tragen. Ist also das Seil DA bei D an einem festen Körper befestigt, so braucht die in B nach BE wirkende Kraft nur halb so groß als die Last zu sein, wenn AD und BE der Richtung parallel sind, nach welcher die Last wirkt.

Liefe (Fig. 76.) das Seil BE über eine zweite Rolle EF, die sich um M frei drehen kann, so ändert sich dadurch bloß die Richtung der Kraft, so daß eine nach FQ ziehende Kraft noch eben so groß sein müßte, als die nach der Richtung BE wirkende. Geht aber das Seil FGH abermals um eine Rolle GH, die in derselben Hülse beweglich ist, an welcher die Last hängt: so hängt nun die Last an vier Seilen und wird folglich durch eine geringere Kraft getragen u. s. w.

§. 204. Erklärung. Eine solche Verbindung von Rollen, wie eben beschrieben ist, heißt ein Flaschenzug, weil man die durch eine gemeinschaftliche Hülse verbundenen Rollen eine Flasche oder Kloben genannt hat (Fig. 76.).

§. 205. Aufgabe. An der Hülse des Flaschenzuges (Fig. 76.) hängt eine Last = P; zu bestimmen, welche Kraft = R bei L wirken muß, um jener das Gleichgewicht zu halten.

Auflösung. Wenn wir die Reibung und den Widerstand wegen Steifheit der Seile bei Seite setzen: so läßt sich die durch die Kraft R hervorgebrachte Spannung der einzelnen Seile auf folgende Weise beurtheilen. Da R an dem Hebelarme NK wirkt, so würde eine in I nach der Tangente wirkende Kraft ihr gleich sein müssen, um ihr das Gleichgewicht zu halten, da NK = NI ist. Die Spannung des Seiles IH ist also = R. Würde das von H nach G und Q gehende Seil in Q festgehalten, so leidet der in Q festgehaltene Punct einen Druck = R, oder es ist so gut, als ob eine Kraft = R nach HI, und eine Kraft = R nach GQ die Rolle GH aufwärts drückte. Sind GQ, HI nicht parallel, sondern unter dem Winkel $= \eta$ gegen einander geneigt, so bringen diese Kräfte R, und R auf die Axe O der Rolle einen Druck hervor, der (§. 63.) $= \sqrt{(R^2 + R^2 + 2R^2 . \mathrm{Cos}\,\eta)}, = R\sqrt{(2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\eta)}$. Da nun $GOH = 180^\circ - \eta$, und (Trigon. §. 65.)

$$GO : GH = R : R . \sqrt{(2 - 2\,\mathrm{Cos}\,GOH)},$$
$$= R : R . \sqrt{(2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\eta)},$$ indem

$\frac{1}{2} GH = GO . \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2} GOH = \frac{1}{2} GO . \sqrt{(2 - 2\,\mathrm{Cos}\,GOH)}$

ist: so ist dieser Druck $= \frac{R . GH}{GO}$, welcher P grade entgegen wirkt.

Es läßt sich leicht übersehen, daß die Spannung des Seiles EB, wenn Q nicht festgehalten wird, sondern das Seil über FE läuft, immer noch $= R$ ist, und daß auch in DA die Spannung $= R$ statt findet. Die Axe C wird also von einem Drucke $= \frac{R . AB}{AC}$ aufwärts getrieben, und wenn beide Axen C und O in derselben Hülse fest verbunden sind, so wirkt dieser und der vorhin gefundene Druck der Last P entgegen, so daß

$P = R . \frac{GH}{GO} + R . \frac{AB}{AC}$ wird, und R auf ähnliche Weise gegen P bestimmt würde, wenn auch mehrere Rollen auf gleiche Weise verbunden wären.

Sind die Seile parallel, so werden die Sehnen GH, AB Durchmesser und dann ist $\frac{GH}{GO} = \frac{AB}{AC} = 2$, also $R = \frac{1}{4} P$; oder die Last P wird denn auf alle Seile IH, FG, EB, DA gleich vertheilt, und R trägt nur den Theil, der durch die Anzahl der Seile bestimmt wird.

Um auf den Widerstand Rücksicht zu nehmen, den die Reibung an den Axen, die Reibung der Seile, und die Steifheit der Seile der Bewegung entgegensetzt, müßte man für jede Rolle einzeln rechnen. Soll HI mit der Kraft $= R$ gespannt werden, so müßte, wenn kein weiterer Widerstand da wäre, in L eine Kraft $= R$ wirken, diese Kräfte üben, wenn sie mit einander parallel wirken, auf die Axe N einen Druck $= 2R$ aus, und die Reibung an der Axe kann durch $= 2 f . R$ ausgedrückt werden. Um dieser Reibung willen muß die in L wirkende Kraft um $\frac{1}{n} . 2 f . R$ vermehrt werden, wenn der Halbmesser der Axe $= \frac{1}{n} . NK$ ist. Auf ähnliche Art könnte man auf die Reibung und Steifheit des Seiles

Rücksicht nehmen, und nach und nach die Einwirkung der übrigen Rollen berechnen.

§. 206. Bemerkung. Auch beim Flaschenzuge verhält sich, wenn man die Reibung bei Seite setzt, die Kraft zur Last; umgekehrt wie die Wege, welche bei entstehender Bewegung beide durchlaufen müssen. Denn in Fig. 76. ist $R = \frac{1}{4} P$, aber das Seil KL muß um eine Länge $= 4a$ fort gezogen werden, wenn das Gewicht P um die Höhe $= a$ steigen soll, weil jeder der vier Stricke sich um a verkürzen muß (vergl. §. 111.).

§. 207. Bemerkung. Unter den verschiedenen Verbindungen der Rolle, welche als Hebezeug dienen, ist auch die in Fig. 77. dargestellte merkwürdig. Hier hängt das Gewicht $= P$ an der Rolle AB und da das um AB gehende Seil in C an einem festen Gegenstande angeknüpft ist, so trägt BD nur $\frac{1}{2} P$. Diese Last $= \frac{1}{2} P$ wird von der Rolle EG wieder so getragen, daß die Hälfte auf den an den festen Gegenstand geknüpften Punct F und nur die Hälfte $= \frac{1}{4} P$ auf das Seil HG kömmt. Die Rolle IL trägt also $\frac{1}{2^2} P$ und da wieder der feste Punct K die eine Hälfte tragen muß, so trägt LM nur $\frac{1}{2^3} P$, und überhaupt, nachdem man n Rollen angewandt hat, bedarf es nur der Kraft $= \frac{1}{2^n} P$ mehr, um das Gewicht $= P$ zu tragen. Will man auf das Gewicht der Rolle Rücksicht nehmen, und sind diese alle gleich $= Q$, so trägt BD die Last $= \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} Q$;

GH trägt die Last $= \frac{1}{2^2} P + \frac{1}{2^2} Q + \frac{1}{2} Q$;

LM trägt die Last $= \frac{1}{2^3} P + \frac{1}{2^3} Q + \frac{1}{2^2} Q + \frac{1}{2} Q$,

und nachdem n Rollen gebraucht sind, trägt das letzte Seil $= \frac{1}{2^n} P + Q\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + + + \frac{1}{2}\right)$.

Es läßt sich leicht übersehen, daß auch hier die bei M oder die eben so starke bei O wirkende Kraft = R sich zur Last P umgekehrt verhält, wie die Wege, die sie bei entstehender Bewegung durchlaufen müßten, oder daß auch hier das Product aus der Kraft in ihren Weg so groß ist, als das Product aus der Last in ihren Weg, wenn man sich eine Verrückung des Systems denkt.

Eilfter Abschnitt.

Vom Räderwerk und der besten Form der Radzähne.

§. 208. Erklärung. Wenn am Umfange des Rades Vorragungen aufgesetzt oder ausgeschnitten sind, welche in die Einschnitte oder Vertiefungen am Umfange eines andern Rades eingreifen und dieses dadurch herumtreiben: so heißen solche Räder gezähnte Räder, indem die in einander greifenden Vorragungen beider Räder Zähne heißen.

Man bringt manchmal mehrere Räder auf diese Art in Verbindung und erhält so das Räderwerk.

§. 209. Erklärung. Ein gezähntes Rad heißt ein Stirnrad, wenn sich die Zähne in der kreisförmigen Ebne des Rades selbst befinden, und über den Umfang hervortreten. Es heißt ein Kammrad, wenn die Zähne senkrecht gegen die Ebne des Rades am Umfange desselben angebracht sind. Beide Arten von Räder läßt man häufig in einen Trilling eingreifen, der aus parallelen, cylindrischen, im Kreise stehenden und zwischen zwei parallelen Kreisebnen befestigten, Stäben besteht.

§. 210. Aufgabe. Zu bestimmen, in welchem Verhältnisse Kraft und Last zu einander stehen müssen, damit bei gegebnen Halbmessern der Räder des Räderwerks das Gleichgewicht bestehe.

Auflösung. Wenn (Fig. 78.) in G eine Kraft $= P$ am Umfange eines Rades vom Halbmesser $= R$, wirkt, und die gezähnte Axe, deren Halbmesser $AB = A$ ist, greift mit ihren Zähnen in die Zähne des Rades BC, dessen Halbmesser $= r$, ein: so übt die Kraft $= P$ hier einen Druck $= \frac{R.P}{A}$ aus, um den Zahn B des eingreifenden Rades fortzudrängen. Die Axe des zweiten Rades BC sei abermals gezähnt und treibe die Zähne eines dritten Rades D fort, so ist, wenn der Axe CD Halbmesser $= a$ ist, die auf den Zahn D ausgeübte Kraft $= \frac{R.P}{A} \cdot \frac{r}{a}$, und dieser in D wirkenden Kraft hält an der Axe, wenn des dritten Rades Halbmesser $= \varrho$, Halbmesser der Axe $= \alpha$, eine Last $= Q = \frac{R.r.\varrho.P}{A.a.\alpha}$ das Gleichgewicht.

Bei noch mehreren in einander greifenden Rädern würde man die Betrachtung so fortsetzen.

§. 211. Bemerkung. Wenn der Punct G (Fig. 78.) um einen Raum $= b$ fortrückt, so verrücket sich B und der anliegende Zahn B des zweiten Rades um $\frac{A b}{R}$, der Zahn D um $\frac{A.a.b}{R.r}$ und die Last Q, um $\frac{A.a.\alpha.b}{R.r.\varrho}$, so daß auch hier Wege und Kräfte in umgekehrtem Verhältnisse stehen.

Nach der Einrichtung des Räderwerkes schiebt jeder Zahn an der Axe AB einen Zahn des Rades CB fort und das Rad AG muß also n mal umgehen, während das Rad CB m mal umgeht, wenn sich die Anzahl der Zähne der Axe zur Anzahl der Zähne des Rades, wie $m : n$ verhält.

§. 212. Bemerkung. Man fordert zu einer guten Einrichtung des Räderwerkes, daß eine gleichförmige Drehung des einen Rades auch eine gleichförmige Bewegung des andern Rades hervorbringe, und daß eine gleibleibende Kraft in G auch mit unveränderlicher Gewalt das Rad CB umtreibe, während andre und andre Puncte der Zähne einander berühren. Die Figur der Zähne muß daher so bestimmt werden, daß der Punct B auf dem einen Umfange einen eben so großen Weg durchlaufe, als der Punct B auf dem Umfange des andern Kreises, und daß die zur Drehung von CB verwandte Kraft unveränderlich bleibe.

§. 213. Aufgabe. Für das Stirnrad die beste Figur der Zähne zu finden, wenn diese in einen Trilling eingreifen, dessen cylindrische Stäbe von sehr geringem Durchmesser sind.

Auflösung. Es sei (Fig. 79.) ZAX der Umfang des Rades, C sein Mittelpunct. G sei der Mittelpunct des Trillings, auf dessen Umfang OAW die Stäbe A, O, deren Querschnitte wir hier als Puncte ansehen, sich befinden.

Ist nun A der Punct, wo der Umriß des Zahnes in den Kreis ZAX einschneidet, und wo dieser von dem Kreise berührt wird, auf welchem die Trillingsstöcke eingesetzt sind: so erhält man den Umriß der Vorderseite des Zahnes nach folgender Regel:

Man nehme einen willkürlichen Bogen AB, und nehme zugleich auf dem Umfange des Kreises AOW, wo die Trillingsstöcke eingesetzt sind, einen eben so langen Bogen, AO = AB, so daß der Winkel am Mittelpuncte $AGO = \frac{AC}{AG} . ACB$. Zieht man nun CO, nimmt nach der andern Seite von A den Winkel ACd = BCD und den Abstand vom Centro Co = CO, so ist o ein Punct in der verlangten Umfangslinie des Zahnes. — So wie dieser Punct bestimmt ist, kann man mehrere bestimmen, wenn man für AB andre Werthe nimmt, und ganz nach denselben Regeln verfährt.

Beweis. AA′ stelle den so gezeichneten Zahn vor, welcher also die Stellung BB′ einnimmt, wenn das Rad CA sich so gedreht hat, daß A in den Punct B gelangt ist. Der Zahn hat den Trillingsstock vor sich her nach O gedrängt, so daß er noch in O an ihm anliegt; und da nun, nach der Zeichnung des Zahnumrisses der Bogen AO gleich dem Bogen AB ist, so haben wir der einen Forderung Genüge gethan, daß jeder Punct im Umfange des Trillings eben so viel als jeder Punct im Umfange des Rades fortrücken soll, und daß der Trilling sich gleichförmig drehen soll, wenn das Rad sich gleichförmig dreht.

Die andre zu erfüllende Bedingung war, daß die Kraft = P, welche am Umfange des Rades ABC wirkt, bei jeder Stellung des Zahnes gegen den vor ihm anliegenden Triebstock eine gleiche Kraft = Q zu Umdrehung des Trillings ausübe.

Allemal ist AO senkrecht auf die bei O gezogene Tangente des Zahnes, welches ich nachher beweisen werde; der Trillingsstock übt daher seinen gegen die Oberfläche des Zahnes senkrechten Druck (§. 77. 78.) nach der Richtung OA aus. Heißt die Kraft = P, welche nach der Tangente des Kreises ZAX wirkend das Rad umtreibt, so ist $\frac{P \cdot CD}{CO} = \frac{P \cdot CA}{CO}$ die Gewalt, mit welcher der Punct O nach OS fortgedrängt wird. Zerlegt man diese Kraft in eine nach der Richtung der verlängerten AO und in eine nach OC gegen des Rades Mittelpunct wirkende, so ist (§. 63. 65.) die nach Oa wirkende Kraft $= \frac{P \cdot CA}{CO} \cdot \frac{\text{Sin SOD}}{\text{Sin DOA}}$, weil SOD = aSO und DOA = SaO. Da SOD ein rechter Winkel ist und im Dreiecke COA offenbar

$$CA : CO = \text{Sin DOA} : \text{Sin OAC},$$

so ist $\frac{CA}{CO \, . \, \text{Sin} \, DOA} = \frac{1}{\text{Sin} \, OAC}$, also jene nach Oa wirkende Kraft $= \frac{P}{\text{Sin} \, OAC}$. Zerlegt man diese nach Oa wirkende Kraft in eine nach der Tangente OT des Trillings gerichtete und in eine nach der Verlängerung von OG wirkende, das heißt bloß auf den Mittelpunct G drückende: so ist die nach OT wirkende

$= \frac{P.}{\text{Sin} \, OAC} \, . \, \text{Cos} \, TOa.$ Es ist aber TOa $= 90 - GOA$ und folglich

$$\text{Cos} \, TOa = \text{Sin} \, GOA = \text{Sin} \, GAO = \text{Sin} \, OAC,$$

also $\frac{P}{\text{Sin} \, OAC} \, . \, \text{Cos} \, TOa = P$, das heißt, die Kraft, welche zum Umtreiben des Trillings nach der Richtung seiner Tangente wirkt, genau so groß und bei allen Stellungen des Zahnes so groß, als die nach der Tangente des Rades wirkende Kraft.

Die angegebene Gestalt des Zahnes leistet also beiden Bedingungen Genüge.

§. 214. Die krumme Linie AoA', in welcher nach Anleitung des vorigen §. so viele Puncte, als man bedurfte, bestimmt werden können, heißt die Epicycloide. Man kann sich ihre Entstehung so vorstellen. OAW (Fig. 80.) sei ein beweglicher Kreis, welcher auf dem Umfange ZAX eines andern Kreises fortgewälzt wird, so beschreibt ein Punct A im Umfange des wälzenden Kreises die Epicycloide AoA'. Denn indem der wälzende Kreis in die Lage aow gelangt, ist der Punct A im Umfange desselben nach o gerückt, wenn der Bogen Aa = ao ist. Die vorausgesetzte Gleichheit der Bogen Aa, ao giebt den Winkel oga $= \frac{Ca}{ga} \, . \, ACa$, und es wird aus den gegebnen Halbmessern $Ca = R$, $ga = r$ und dem willkürlich angenommenen Winkel $ACa = \varphi$, jedes Mal $oga = \frac{R.\phi}{r}$ gefunden, und folglich der Abstand Co aus der Gleichung

$$Co^2 = r^2 + (R+r)^2 - 2 \,.\, r \,.\, (R+r) \,.\, Cos \frac{R.\phi}{r}$$ und

der Winkel $aCd = \phi - ACd$ ist bestimmt durch

$$Sin\ aCd = \frac{r \,.\, Sin \frac{R.\phi}{r}}{Co}.$$

Nach diesen Gleichungen kann man jeden Punct der Epicycloide oder jeden Punct im Umfange des Zahns in der Zeichnung eintragen; denn wenn man $\phi = 1°$, $\phi = 2°$ u. s. w. annimmt, so ist damit ACo und Co, also die Lage des Punctes o völlig bestimmt.

§. 215. Wir haben noch zu beweisen, daß (Fig. 79.) AO auf die Epicycloide in O senkrecht ist, oder daß eben das für ao in Fig. 80. gilt. Wenn man sich vorstellt, der Kreis werde ein wenig weiter von a nach α gewälzt: so wird der Mittelpunct g nach γ und der Punct o nach ω gerückt, und da im ersten Augenblicke der wälzende Kreis sich so um a dreht, als ob a der Mittelpunct der Drehung wäre, so ist der sehr kleine Bogen $o\omega$, welchen o beschreibt, gegen oa senkrecht (*). Die Richtung des Bogens der Epicycloide ist also in jedem Puncte o durch die von o nach dem andern Endpuncte h des Durchmessers ah gezogene Linie oh bestimmt, oder ho ist in o eine Tangente der Epicycloide.

(*) Eigentlich rückt der Mittelpunct der Drehung von a nach α fort, und zugleich vergrößert sich der Halbmesser der Drehung und wird $= \alpha\omega$; man kann daher nicht den Bogen $o\omega$ als einen um a beschriebenen Kreisbogen ansehen; aber der Bogen ist bei o senkrecht auf oa, und bei ω senkrecht auf $\omega\alpha$, er kommt daher nahe überein mit einem um den Mittelpunct k gezogenen Kreisbogen, wenn k der Durchschnittspunct der Linien oa, $\omega\alpha$ ist, und $a\alpha$ sehr klein genommen wurde.

§. 216. Bemerkung. Diese Betrachtung setzt die Trillingsstöcke als sehr dünne, oder eigentlich als ohne alle Dicke voraus. Verlangt man die richtige Form für Zähne, die in cylindrische Trillingsstöcke von beträchtlichem Durchmesser eingreifen sollen, so muß man eine Curve zeichnen, welche überall von der für den Mittelpunct der Stöcke passenden Epicycloide um die halbe Dicke der Stöcke entfernt ist.

Diesen Fall und mehrere andre betrachtet Eytelwein in der Statik fester Körper 10. Capitel.

§. 217. Bemerkung. Wenn das in den Trilling eingreifende Rad ein Kammrad ist, so liegen die Kreisflächen des Rades und Trillings nicht in einer Ebne, sondern die gegen die Ebne des Kammrades senkrechten Zähne oder Kämme greifen in die Stöcke des Getriebes, die gegen die Drehungsebne des letztern senkrecht oder schief sein können.

Da die Kreislinien, in welcher die Zähne des Rades und die Getriebestöcke stehen, sich in einer durch beide gehenden Kugelfläche befinden (Geom. §. 553.): so ist es einleuchtend, daß die Wälzung des einen Kreises über dem andern hier so gedacht werden muß, daß jeder Punct im Umfange des wälzenden Kreises immer in jener Kugeloberfläche bleibe. Die Figur der Zähne wird daher hier vermittelst der sphärischen Epicycloide bestimmt, welches diejenige auf der Kugelfläche gezeichnete Curve ist, die ein Punct des wälzenden Kreises beschreibt, wenn er überall gegen den ruhenden Kreis eine gleiche Neigung behält.

Ich muß diese Untersuchung hier übergehen und auf Eytelwein verweisen, der am angeführten Orte umständlich hiervon handelt.

§. 218. Bemerkung. Oft setzt man auch einen Trilling durch eine gezähnte grade Stange in Bewegung, so daß die Stöcke des Trillings die Zähne der graden Stange, oder diese jene fortschieben. Auch hier würde man diejenige Gestalt der Zähne als die beste ansehen, welche ein gleiches Fortschieben der Stange und der Mittelpuncte der Getriebestöcke bewirkt, und für welche die immer gleiche, das Getriebe drehende Kraft, auch einen immer gleichen Druck, um die Stange fortzuschieben, ausübt.

§. 219. Aufgabe. Wenn die Trillingsstöcke sehr dünne sind, so daß man ihre Querschnitte als Puncte betrachten darf, die beste Figur der Zähne an der graden Stange BH zu bestimmen (Fig. 81.).

Auflösung. Soll EAM den Kreis vorstellen, auf dessen Umfange die Trillingsstöcke eingesetzt sind, und A ist der Punct, wo eines Zahnes Vorderseite in die Linie BA einschneidet: so nehme man AB gleich dem Kreisbogen AE und ziehe ED von E auf AB senkrecht, nehme Ad = BD und den senkrechten Abstand de = DE; dann ist e ein Punct im Umfange des Zahnes. Da man für E nach und nach andre Puncte annehmen kann, so erhält man nach dieser Regel so viele Puncte im Umrisse des Zahnes, als man verlangt.

Beweis. Wenn sich die Stange so fortschiebt, daß der Punct A nach B kömmt: so hat der Zahn AA′ die Stellung BB′ eingenommen und e ist nach E gerückt, weil BD = Ad, DE = de ist. Befand sich also in A ein Getriebestock an dem Zahne anliegend, so ist dieser nach E fortgeschoben, und der von ihm durchlaufene Bogen ist genau so lang, als die Entfernung AB, durch welche die Stange fortgeschoben ist. Eine gleichförmige Bewegung der Stange bewirkt also eine gleichförmige Bewegung des Getriebes.

Aber auch die Bedingung, daß eine unveränderliche, die Stange fortschiebende Kraft immer gleich auf die Drehung des Trillings einwirke, wird erfüllt. Es ist nämlich AE auf den Umriß des Zahnes in E senkrecht (aus ganz ähnlichen Gründen wie §. 215.), drängt also eine Kraft = P die Stange nach der Richtung AB vorwärts, so ist es eben so gut, als ob in E eine Kraft = P nach EF wirkte.

Nenne ich ECA = φ, so ist FEA = $180^\circ - \frac{1}{2}\varphi$; (Geom. 269.); und wenn ich P nach den Richtungen Eg,

senkrecht auf des Zahnes Oberfläche und ED senkrecht auf die Stange zerlegt annehme, so ist der auf den Zahn senkrechte, nach Eg gerichtete Druck
$= \frac{P}{\operatorname{Cos} FEg} = \frac{P}{\operatorname{Cos}. \frac{1}{2} \phi}$. Denkt man sich nun eine nach der Tangente EG des Getriebes wirkende Kraft $= Q$, so läßt sich auch diese nach Eg senkrecht auf des Zahnes Oberfläche und nach EC gegen des Getriebes Mittelpunct drückend zerlegen, und die nach gE wirkende Kraft ist $= \frac{Q}{\operatorname{Cos} GEg} = \frac{Q}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \phi}$. Eine Kraft $= Q$ $= P$ nach der Richtung der Tangente des Getriebes bewirkt also eben den Druck senkrecht auf die Oberfläche des Zahns, wie eine Kraft $= P$ nach der Richtung der Stange wirkend; oder damit auf die Oberfläche des Zahnes ein gleicher Druck entstehe, müssen die nach GE und nach EF wirkenden Kräfte gleich sein. Und hieraus erhellt, daß die angegebne Form des Zahns auch der zweiten Bedingung Genüge thut.

§. 220. Die hier bestimmte Curve, nach welcher die Vorderseite des Zahnes gebildet werden muß, ist die Cycloide oder Radlinie. Nach der angegebnen Zeichnung ist, wenn ich (Fig. 81.) $AC = r$ nenne, $AB = AE = r.\phi$, oder wenn ϕ in Graden gegeben ist $= r. \frac{\pi . \phi}{360^{\circ}}$; AD dagegen ist $= r.\operatorname{Sin}\phi$, also $BD = Ad = r.\phi - r.\operatorname{Sin}\phi$ und $ED = ed = r - r . \operatorname{Cos}\phi = r . \operatorname{Sin\ vers}\phi$. Für verschiedene Werthe von ϕ kann man also Ad nebst dem zugehörigen ed bestimmen, und so die ganze Cycloide zeichnen.

Nenne ich $Ad = y$, $de = x$, so ist auch $r . \operatorname{Cos}\phi = r - x$ oder $\frac{r-x}{r}$ der Cosinus des Bogens ϕ, das ist umgekehrt ϕ der Bogen dessen Cosinus $= \frac{r-x}{r}$, oder $\phi = \operatorname{Arc} . \operatorname{Cos} \frac{r-x}{r}$ oder

$\varphi = \text{Arc.Sin}\,\frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}$; denn der Bogen dessen Cosinus $= \frac{r-x}{r}$, hat den Sinus $= \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}$. Es ist also

$$y = r \cdot \left(\text{Arc.Sin}\,\frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r} - \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}\right),$$

die Gleichung für die Cycloide, welche y bestimmt, wenn man x nach Willkür annimmt.

§. 221. Die Cycloide wird durch den Punct A im Umfange des Kreises AEM beschrieben, wenn dieser sich über AH so fortwälzt, daß der fortgewälzte Bogen dem Wege auf AH gleich ist. Wenn nämlich der Kreis nach IKL gelangt ist, so ist der Punct A nach K hin gerückt (Fig. 81.) und der Bogen IK = AI. Heißt hier $IC'K = \varphi$, so ist $NI = r \cdot \text{Sin}\,\varphi$, also $AN = r \cdot \varphi - r \cdot \text{Sin}\,\varphi$, und $KN = r \cdot \text{Sin vers}\,\varphi = r\,(1 - \text{Cos}\,\varphi)$ (vergl. Trig. §. 14. 20.).

Wenn der Kreis IKL sich ein wenig weiter wälzt, so ist der erste Anfang seiner Bewegung so, als ob er sich um I drehte; daher ist der Bogen Kk der Cycloide senkrecht auf IK, so wie der Bogen bei E senkrecht auf EA. Dieser Mittelpunct der Drehung rückt von I nach i fort, während K nach k gelangt, und KI, ki sind senkrecht auf die Tangenten der Cycloide in K und k. Wenn diese Linien verlängert sich in T schneiden, so wird (wofern K, k sehr nahe an einander liegen) ein um T mit dem Halbmesser KT gezogener Kreisbogen nahe mit dem Bogen Kk der Cycloide zusammen fallen. Es ist aber $KIN = \frac{1}{2}\,\varphi$, wenn $KC'I = \varphi$ (Geom. §. 269.); heißt also $Ii = r \cdot \psi$ oder $ic'k - iC'K = \psi$: so ist $kiN = \frac{1}{2}\,\varphi + \frac{1}{2}\,\psi$, und $ITi = \frac{1}{2}\,\psi$, also

$IT = \frac{Ii \cdot \text{Sin}\,\frac{1}{2}\,(\varphi + \psi)}{\text{Sin}\,\frac{1}{2}\,\psi}$, oder, weil bei sehr kleinen Werthen von ψ, $\text{Sin}\,\frac{1}{2}\,\psi$ als $= \frac{1}{2}\,\psi$ und $\text{Cos}\,\frac{1}{2}\,\psi$ als $= 1$ kann angesehen werden,

$$IT = Ii \cdot \frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}\,\varphi}{\text{Sin}\,\frac{1}{2}\,\psi} + Ii \cdot \text{Cos}\,\varphi,$$

$$IT = \frac{r \cdot \psi \cdot \text{Sin}\,\frac{1}{2}\,\varphi}{\frac{1}{2}\,\psi} + r \cdot \psi \cdot \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\varphi,$$

$$IT = 2r \cdot \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\varphi + r \cdot \psi \cdot \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\varphi,$$

welches für ein sehr kleines ψ nicht merklich von $IT = 2r \cdot \text{Sin}\,\frac{1}{2}\,\varphi = KI$ verschieden ist. Also ist $KT = 2KI$ der Krümmungshalbmesser der Cycloide in K, das ist der Halbmesser eines mit der Cycloide dort übereinstimmenden Kreises.

§. 222. Auch hier müßte man auf die Dicke der Getriebe Rücksicht nehmen, und die Curve auf ähnliche Weise wie §. 216. verbesseru.

§. 223. Andre hier vorkommende, noch sehr mannigfaltige Betrachtungen übergehe ich, z. B. wie die Zähne müßten eingerichtet sein, wenn des Getriebes Zähne gradlinigt, nach Radien des Kreises EAM abgeschnitten wären; wie man die Reibung an den Zähnen, wie man ihre vortheilhafteste Höhe u. dergl. bestimmt. Alles dies findet man bei Eytelwein.

§. 224. Bemerkung. Man gebraucht oft, um eine vertical stehende Stange VW (Fig. 82.) vermittelst der horizontalen Hebezapfen AB zu heben, ein Rad auf dessen Umfange die Daumen Ah aufgesetzt sind. Dieses ist z. B. der Fall bei den Stampfern, die alsdann durch ihr eignes Gewicht herabfallen. Hier muß die Gestalt der Hebedaumen so bestimmt werden, erstlich daß die Hebung AH des Zapfens in jedem Augenblicke so viel betrage, als der Bogen AM, damit bei gleichförmiger Drehung des Rades auch das Heben gleichförmig geschehe, und zweitens so daß die immer gleiche Kraft, welche die Daumenwelle EGM dreht, mit immer gleicher Kraft das unveränderliche Gewicht des Stampfers hinaufdränge.

§. 225. Aufgabe. Die beste Form der Hebedaumen zu finden, damit die angegebenen Bedingungen erfüllt werden.

Auflösung. Es sei BC (Fig. 82.) der Stampfer, welcher durch die Hebelatte BA, welche immer horizontal bleibt, erhoben werden soll. In BA sei die Hebelatte in der Stellung, wo ihre untere Seite gegen den Mittelpunct G der Welle gerichtet ist. Die Figur des Daumens wird nun so gefunden. Man nimmt auf auf der durch A gezogenen Tangente AH des Kreises AMM, in welchem der Punct A um den Mittelpunct G fortrückt, die Entfernung AH gleich dem Bogen AM, zieht den Halbmesser MG, und verlängert ihn, bis die aus H auf ihn gezogene Senkrechte HN ihn trifft. Man nimmt nun, $Gn = GN$ und darauf in n senkrecht $nh = NH$: so ist h ein Punct im Umfange des Daumens. Andre Puncte h′ im Umfange des Daumens werden eben so aus $AH' = AM'$, $Gn' = GN'$ und $h'n' = H'N'$ gefunden.

Beweis. Hier ist offenbar, während das Rad sich von A bis M gedreht hat, der Punct A der Hebelatte bis H gehoben, weil Ah dann in die Lage MH gekommen ist. Offenbar ist hier AH = dem Bogen AM, also die Hebung dem von A durchlaufenen Bogen gleich, und eine gleichförmige Drehung der Welle hebt den Stampfer gleichförmig. Um die hiebei wirkenden Kräfte zu vergleichen, sei die in der Entfernung = AG vom Mittelpuncte der Welle angebrachte, die Drehung bewirkende Kraft = P: so übt diese in H eine Gewalt senkrecht auf den Radius GH aus, die $= \frac{P \cdot AG}{GH}$ ist. Diese wirkt der in H vertical herabwärts drückenden Kraft = Q schief entgegen, und Q bringt senkrecht auf HG einen Druck $= Q \cdot \mathrm{Sin}\, AHG = \frac{Q \cdot AG}{HG}$ hervor. Dieser ist so groß, wie die aus der Drehungskraft = P gefundene in H senkrecht auf GH wirkende Kraft, wenn

Q = P. Also ist zur Drehung der Welle eine immer gleiche Kraft erforderlich, weil das vertical herabdrükkende Gewicht = Q immer unveränderlich bleibt. Die angegebne Gestalt der Daumen ist also die zweckmäßigste.

§. 226. Die eben gefundene krumme Linie heißt die aus Abwickelung des Kreises entstandene, oder die Evolvente des Kreises. Stellt man sich nämlich vor, um den Kreis ADE (Fig. 82.) sei vón A gegen DE zu ein Faden gewickelt, der irgendwo, zum Beispiel bei E, befestiget sei: so wird, wenn man ihn in A faßt, und während der Abwickelung immer grade ausgedehnt erhält, sein Ende A die Curve Ahh′ durchlaufen. Der abgewickelte Bogen des Kreises, zum Beispiel Al wird gleichsam grade ausgedehnt in die bei l berührende Tangente h′l, also lh′ = Al. Aber grade eben so war unsre Curve bestimmt, daß die in A berührende Tangente AH = AM war, oder allgemein auf der am einen Endpuncte A des Bogens AM gezogenen Tangente die Entfernung AH der Länge des Bogens gleich aufgetragen ward, und es ist folglich jeder Punct der Evolvente Ahh′ eben so bestimmt, wie jeder Punct im Umfang des Daumens.

Da lh gleichsam als Radius dient, um mit denselben ein kleines Stück der Curve bei h zu beschreiben: so ist die Tangente lh′ des Kreises auf die Curve in h′ senkrecht, und wie daraus erhellt, AH bei H auf des Daumens Umriß senkrecht, und folglich IH eine Berührungslinie des Daumens, so daß die Hebelatte in allen ihren Stellungen den Daumen tangirt.

§. 227. Eine Gleichung für unsre Curve ist leicht zu finden. Es sei AGM = φ, AG = r, also der Bogen = r . φ, wenn man φ in Theilen des Halbmessers ausdrückte oder = $\frac{r \,.\, \varphi \,.\, \pi}{180^0}$, wenn φ in Graden gegeben ist. Eben so groß ist AH. Der Winkel AGH ist also derjenige, dessen Tangente $= \frac{AH}{r} = \frac{\varphi \cdot \pi}{180^\circ}$, oder derjenige Winkel, den man mit Angulus tang $\frac{\varphi \cdot \pi}{180^\circ}$ oder Arc. tang $\frac{\varphi \cdot \pi}{180^\circ}$ bezeichnen würde. Nenne ich diesen Winkel oder Bogen $= \psi$, so ist $HGM = \varphi - \psi$;

$$HG = \frac{r}{\operatorname{Cos} \psi} \text{ und } GN = Gn = HG \,.\, \operatorname{Cos}(\varphi - \psi)$$

$$= \frac{r}{\operatorname{Cos} \psi} \operatorname{Cos}(\varphi - \psi) \text{ u. } NH = nh = HG \,.\, \operatorname{Sin}(\varphi - \psi)$$

$$= \frac{r}{\operatorname{Cos} \psi} \operatorname{Sin}(\varphi - \psi).$$

Für jeden angenommenen Werth von φ ist also ψ und dann Gn, nh leicht zu bestimmen. Ist zum Beispiel $\varphi = 20^\circ$, so ist $\frac{\varphi}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{1}{9} \cdot \pi = 0{,}34684$, und es ist $0{,}34684$ die Tang. von $19^\circ\, 7\frac{2}{3}' = \psi = \text{Arc. tang } 0{,}3468$, also

$$\varphi - \psi = 52\tfrac{1}{3}'; \; Gn = \frac{r \,.\, \operatorname{Cos} 0^\circ\, 52\frac{1}{3}'}{\operatorname{Cos} .\, 19^\circ\, 7\frac{2}{3}'} = r \,.\, 1{,}0583,$$

$$\text{und } nh = \frac{r \,.\, \operatorname{Sin} 0^\circ \,.\, 52\frac{1}{3}'}{\operatorname{Cos} 19^\circ \,.\, 7\frac{2}{3}'} = 0{,}0161 \,.\, r.$$

§. 228. Anmerkung. Bei der Anordnung von Zähnen und Getriebe, bei der Anordnung der Daumen an ihrer Welle u. s. w. sind noch mancherlei Umstände zu bestimmen, die ich hier nicht erwähnen kann, worüber man aber in Eytelweins oft angeführtem Werke vollständige und gründliche Belehrung findet.

§. 229. Wenn der Zahn eines Stirnrades (Fig. 83.) in G durch die Gänge einer Schraube fortgeschoben wird, so heißt diese Schraube hier eine Schraube ohne Ende, weil sie beim Umdrehen durch das Andrängen desselben Schraubenganges an jeden unterdeß neu vorgeschobenen Zahn die Bewegung immerfort unterhält.

Der Schraubengang HI faßt bei I den Zahn G, und weil beim Umdrehen der näher gegen A liegende Punct H des Schraubenganges hinaufrückt, so wird der Zahn G gegen A zu gedrängt, und so lange fortgeschoben, bis er nach K gekommen ist, wo die Schraube ihn verläßt, zugleich aber mit dem Puncte I einen neuen Zahn ergreift.

§. 230. **Aufgabe.** Das Verhältniß zwischen der an der Axe des Rades herabhängenden Last = Q und der am Umfange der Schraube nach der Tangente des Schraubencylinders senkrecht auf die Axe wirkenden Kraft = P zu finden.

Auflösung. Es sei der Schraube Halbmesser $= \varrho$, Weite der Schraubengänge $= \alpha$, so übt die Kraft P zum Fortschieben des Zahnes eine mit der Axe der Schraube parallele Kraft $= \frac{P \cdot 2\pi\varrho}{\alpha}$ aus (§. 196.). Die an der Axe vom Halbmesser = r hängende Kraft drückt aber den Zahn, der sich in der Entfernung = R von der Axe befindet, mit der Kraft $= \frac{r \cdot Q}{R}$, und das Gleichgewicht fordert daher, daß $\frac{r \cdot Q}{R} = \frac{2\pi \cdot \varrho \cdot P}{\alpha}$, oder $P = \frac{r \cdot \alpha \cdot Q}{R \cdot 2\pi\varrho}$ sei.

Zwölfter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte biegsamer Seile.

§. 231. Aufgabe. Die Länge ACB des in bestimmten Puncten A, B (Fig. 84.) befestigten Seiles ist gegeben; man sucht den Ort, wo das an einem Ringe C befestigte, frei auf dem Seile herabgleitende Gewicht Q ruhen wird.

Auflösung. Man zieht durch einen der beiden Endpuncte B, wo das Seil festgehalten wird, die Verticallinie BE und schneidet auf derselben den Punct E so ab, daß AE der ganzen Länge des Seiles gleich, AE = AC + CB wird. Halbirt man dann BE in F, und zieht FC horizontal: so ist C die Lage, die der Ring einnehmen wird, und ACB die durch das Gewicht bewirkte Lage des Seiles.

Beweis. Die an C wirkenden Kräfte nach CQ, CA, CB sind im Gleichgewichte, wenn sie sich wie die Sinus der Winkel ACB, BCQ, ACQ verhalten. Der Ring wird offenbar da ruhen, wo die Spannung des Seiles nach beiden Seiten gleich, also wo
Sin BCQ = Sin ACQ gleich ist. Das geschieht, wenn FCE = BCF und FC senkrecht auf CQ ist, also an der durch die Construction der Auflösung bezeichneten Stelle.

§. 232. Anmerkung. Dieser Ort ist zugleich die niedrigste Stelle, welche der Ring, am Seile fortgeschoben, erreichen kann. Wer mit den Eigenschaften der Ellipse bekannt ist, könnte dies sehr leicht beweisen; denn alle Stellungen, in welche der auf dem Seile fortrückende Ring C gelangen kann, liegen auf dem Umfange einer Ellipse, deren Brennpuncte A und B sind. Nun hat die Ellipse die Eigenschaft, daß eine durch einen Punct des Umfangs gezogne Linie eine Tangente der Ellipse ist, wenn sie gleiche Winkel mit beiden nach den Brennpuncten A, B gezogenen graden Linien macht. In dem richtig bestimmten Orte C des Ringes ist HF eine solche Linie, da ACH = BCF, und folglich die horizontale Linie HF eine Tangente des ganzen Weges, den der fortgleitende Ring durchläuft, also ist offenbar seine tiefste Lage in C.

§. 233. Lehrsatz. Wenn an den Knoten C, D, E des bei A und B (Fig. 85.) befestigten Seiles die vertical niederwärts ziehenden Gewichte P, Q, R wirken; so verhält sich die Spannung der äußersten Theile des Seiles AC, BE, umgekehrt wie die Sinus der Winkel, die sie mit der Verticallinie machen.

Beweis. Im Puncte C wirken drei Kräfte, die sich im Gleichgewichte erhalten, das Gewicht = P nach CP, die Spannung des Seiles CD nach CD, die Spannung des Seiles AC nach CA. Etwas Aehnliches findet in D und E statt. Nenne ich die Spannung des Seiles AC, $= T'$; des Seiles CD Spannung $= T''$, des Seiles DE $= T'''$; des Seiles EB Spannung $= T''''$: so muß (§. 65.), wenn $CAG = \varphi'$, $DCP = \varphi''$, $EDQ = \varphi'''$, $BER = \varphi''''$ oder $EBF = 180^\circ - \varphi''''$ heißt,

$T' : T'' = \sin\varphi'' : \sin\varphi'$;
$T'' : T''' = \sin\varphi''' : \sin\varphi''$;
$T''' : T'''' = \sin\varphi'''' : \sin\varphi'''$, sein; es ist also
$T' : T'''' = \sin\varphi'''' : \sin\varphi'$.

§. 234. Eben dies Gesetz gilt, wie die angeführten Proportionen zeigen, auch für die übrigen Theile des zwischen jeden zwei Knoten grade gespannten Seiles; denn es ist auch die Spannung des Theiles AC zur Spannung von DE, wie Sin DER, zu Sin CAG. Eben das würde statt finden, es mögten der mit Gewichten beschwerten Knoten so viel man wollte sein.

§. 235. Lehrsatz. Wenn das Seil ACDEB in A, B befestigt, und in den Knoten C, D, E (Fig. 85.) mit angehängten vertical herabziehenden Gewichten P, Q, R beschwert ist, so ist die Summe der angehängten Gewichte $P + Q + R$ gleich der Summe der beiden Producte, welche man für jedes Ende aus der Spannung am einen Ende in den Cosinus des Winkels, welchen hier das Seil mit der Verticale macht, findet, oder $P + Q + R = T' . \text{Cos}\, GAC + T'''' . \text{Cos}\, EBF$, $= T' . \text{Cos}\, \varphi' - T'''' \text{Cos}\, \varphi''''$, wenn ich die Bezeichnungen aus §. 233. beibehalte.

Beweis. Offenbar ist (§. 65.)

$T' : P = \text{Sin}\, DCP : \text{Sin}\, ACD$, oder weil

$ACD = 360^\circ - \varphi'' - (180^\circ - \varphi') = 180^\circ - (\varphi'' - \varphi')$

$T' : P = \text{Sin}\, \varphi'' : \text{Sin}\, (\varphi'' - \varphi')$.

Eben so $T'' : Q = \text{Sin}\, \varphi''' : \text{Sin}\, (\varphi''' - \varphi'')$,

$T''' : R = \text{Sin}\, \varphi'''' : \text{Sin}\, (\varphi'''' - \varphi''')$.

Hieraus folgt

$$P = T' . \text{Cos}\, \varphi' - \frac{T' . \text{Sin}\, \varphi' . \text{Cos}\, \varphi''}{\text{Sin}\, \varphi''};$$

$$Q = T'' . \text{Cos}\, \varphi'' - \frac{T'' . \text{Sin}\, \varphi'' . \text{Cos}\, \varphi'''}{\text{Sin}\, \varphi'''};$$

$$R = T''' . \text{Cos}\, \varphi''' - \frac{T''' . \text{Sin}\, \varphi''' . \text{Cos}\, \varphi''''}{\text{Sin}\, \varphi''''}.$$

Da nun nach §. 233. 234. nothwendig auch

$T' . \text{Sin}\, \varphi' = T'' . \text{Sin}\, \varphi'' = T''' . \text{Sin}\, \varphi''' = T'''' . \text{Sin}\, \varphi''''$,

so folgt aus jenen Gleichungen

$$P = T' . \text{Cos}\, \varphi' - T'' . \text{Cos}\, \varphi'';$$
$$Q = T'' . \text{Cos}\, \varphi'' - T''' . \text{Cos}\, \varphi''';$$
$$R = T''' . \text{Cos}\, \varphi''' - T'''' . \text{Cos}\, \varphi'''';$$

also $P + Q + R = T' . \text{Cos}\, \varphi' - T'''' . \text{Cos}\, \varphi''''$.

§. 236. Auch dieser Satz gilt bei jeder Anzahl von Gewichten. Er gilt auch für jeden Theil des Seiles, da

$$P = T' . \text{Cos}\, \varphi' - T'' . \text{Cos}\, \varphi'';$$
$$P + Q = T' . \text{Cos}\, \varphi' - T''' . \text{Cos}\, \varphi''',$$

und so in allen Fällen ist.

§. 237. Aus den Bestimmungen der beiden Lehrsätze §. 233. 235. folgt allgemein

$$P = T' . \text{Cos}\, \varphi' - T'' . \text{Cos}\, \varphi'', \text{ und}$$
$$T' . \text{Sin}\, \varphi' = T'' . \text{Sin}\, \varphi'';$$

also $P = T'\left(\text{Cos}\,\varphi' - \dfrac{\text{Sin}\,\varphi'\,.\,\text{Cos}\,\varphi''}{\text{Sin}\,\varphi''}\right)$,

oder $P = T'\,.\,\dfrac{\text{Sin}\,(\varphi''-\varphi')}{\text{Sin}\,\varphi''}$;

und eben so $Q = T''\,.\,\dfrac{\text{Sin}\,(\varphi'''-\varphi'')}{\text{Sin}\,\varphi'''}$;

also

$$P+Q = \frac{T'.\,\text{Sin}\,\varphi'''.\,\text{Sin}(\varphi''-\varphi')+T''.\,\text{Sin}\,\varphi''.\,\text{Sin}(\varphi'''-\varphi'')}{\text{Sin}\,\varphi''\,.\,\text{Sin}\,\varphi'''},$$

oder

$$P+Q = \frac{T'(\text{Sin}\,\varphi'''.\,\text{Sin}\,(\varphi''-\varphi')+\text{Sin}\,\varphi'.\,\text{Sin}\,(\varphi'''-\varphi''))}{\text{Sin}\,\varphi''\,.\,\text{Sin}\,\varphi'''};$$

$$P+Q = \frac{T'(\text{Sin}\,\varphi'''.\,\text{Sin}\,\varphi''.\,\text{Cos}\,\varphi'-\text{Sin}\,\varphi'.\,\text{Cos}\,\varphi'''.\,\text{Sin}\,\varphi''))}{\text{Sin}\,\varphi''\,.\,\text{Sin}\,\varphi'''};$$

$$P+Q = \frac{T'\,\text{Sin}\,(\varphi'''-\varphi')}{\text{Sin}\,\varphi'''}.$$

Es erhellt also leicht, daß bei jeder Anzahl von Gewichten immerfort

$$P+Q+R = \frac{T'.\,\text{Sin}\,(\varphi^{\text{IV}}-\varphi')}{\text{Sin}\,\varphi^{\text{IV}}};$$

$$P+Q+R+S = \frac{T'.\,\text{Sin}\,(\varphi^{\text{V}}-\varphi')}{\text{Sin}\,\varphi^{\text{V}}}$$ und so

weiter ist.

Wenn also die Summe aller Gewichte $= V$ heißt, und $\varphi' = \alpha$ der Winkel ist, welchen das erste Stück des Seiles mit der Verticallinie macht, β aber der Winkel, den das letzte Stück des Seiles mit der Verticallinie macht, nämlich $\beta = 180^\circ - EBF$, so ist

$$V = \frac{T'.\,\text{Sin}\,(\beta-\alpha)}{\text{Sin}\,\beta},$$ und wenn die Spannung am andern äußersten Ende $= T^N$ heißt, auch

$$V = \frac{T^N.\,\text{Sin}\,(\beta-\alpha)}{\text{Sin}\,\alpha}.$$

§. 238. Ist ein Theil des Seiles, wie AB Fig. 86. horizontal, so ist für diesen φ oder $\beta = 90^\circ$, wenn man also die hier statt findende Spannung $= C$ als bekannt annimmt, so wird für jeden andern Punct D des Seiles die dortige Spannung $T = \frac{C}{\text{Sin}\,\phi}$ und über das

$V = \frac{T\,.\,\text{Sin}\,(90^\circ - \phi)}{\text{Sin}\,90^\circ}$ oder $V = T\,.\,\text{Cos}\,\phi$, wenn V die Summe der Gewichte ist, welche das Seil zwischen B und D belasten. $T\,.\,\text{Sin}\,\phi$ ist die der Spannung entsprechende horizontale Kraft, die also überall gleich $= C$ ist; $T\,.\,\text{Cos}\,\phi$ die der Spannung entsprechende verticale Kraft $= V$ gleich der Summe der Belastungen vom horizontalen Puncte an bis zu dem Puncte D, dessen Spannung man bestimmt.

§. 239. Erklärung. Wenn ein überall gleich starkes und folglich überall gleich schweres Seil in zwei Puncten befestigt und frei aufgehängt wird: so nimmt es eine bestimmte Krümmung an und bildet eine krumme Linie, welche die Kettenlinie heißt.

§. 240. Aufgabe. Die Haupteigenschaften der Kettenlinie zu bestimmen.

Auflösung. Da unsre vorigen Betrachtungen immer gelten, es mag die Anzahl der mit Gewichten beschwerten Knoten und der zwischenliegenden graden Theile des Seiles größer oder kleiner sein: so können wir sie auch da anwenden, wo jedes Stückchen des Seiles bloß mit seinem eigenen Gewichte drückt. Hier könnten wir uns das Seil als in eine sehr große Anzahl kleiner, gleicher Stücke getheilt denken, die jeder fast als grade anzusehen wären, und jeder belastet mit einem, seiner Länge proportionalen Gewichte.

Heißt also hier (Fig. 87.) der unterste Punct der Kettenlinie C oder ist sie in C horizontal, und in einem andern Puncte G unter dem Winkel $= \alpha$ gegen die Verticallinie geneigt, die von C bis G sich erstreckende Länge des Seiles aber $= CG = s$, so ist das Gewicht dieses Theiles der Länge proportional $= g\,.\,s = V$, folglich für jeden Punct G die Spannung $= T = \frac{C}{\operatorname{Sin} \alpha}$ und auch $T = \frac{gs}{\operatorname{Cos} \alpha}$, also $\operatorname{tang} \alpha = \frac{C}{gs}$. Für alle Puncte der Kettenlinie also ist die Tangente des Winkels, welchen die Kettenlinie mit der Verticale macht, umgekehrt der Länge des Bogens vom niedrigsten Puncte an gerechnet, proportional.

§. 241. Es ist etwas schwierig, aus dieser Eigenschaft eine genaue Regel, um die Kettenlinie zu zeichnen, herzuleiten, indem bloß die Lage der Berührungslinie in Vergleichung gegen die Länge des Bogens bestimmt ist. Folgende Methode kann indeß dazu dienen, ein Polygon zu zeichnen, das nahe mit der wahren Kettenlinie übereinstimmt.

Man zertheile die ganze Länge des Seiles in ziemlich kleine, gleiche Stücke von der Länge $= a$, und nehme an, die Spannung $= C$ im niedrigsten Puncte der Kettenlinie sei dem Gewichte von n solchen Stücken gleich $= n \cdot g \cdot a$, wenn das Gewicht jedes Stückes $= g \cdot a$ heißt. Da nun das Stück AB (Fig. 88.) horizontal und seine Spannung $= g \cdot n \cdot a$ sein soll, so ist für das nächste Stück $\operatorname{tang} \varphi = \frac{C}{g \cdot s} = n$, weil $s = a$ ist. Für das folgende Stück, wo $s = 2a$; $\operatorname{tang} \varphi' = \frac{1}{2} n$; für das folgende $\operatorname{tang} \varphi'' = \frac{1}{3} n$ und so ferner. Diese Zeichnung wird desto genauer richtig, je kleiner man die Stücke nimmt. Je nachdem man C und folglich n größer oder kleiner annimmt, fällt die Spannung des Seiles flacher oder minder flach aus.

§. 242. Hier ist auf das Gewicht des unteren Stückes keine Rücksicht genommen. Wollte man das Gewicht der Hälfte dieses Stückes (indem man die andere Hälfte auf die andere Seite rechnete), mit zu dem wirkenden Gewichte ziehen, so wäre für eine durchaus gleich schwere Kette, für das nächste Stück (Fig. 88.)

$$\text{tang}\,\varphi = \text{tang BCM} = \frac{C}{\frac{3}{2}\,g\,a} = \tfrac{2}{3}\,n;$$

für das folgende

$$\text{tang}\,\varphi' = \text{tang CDN} = \frac{C}{\frac{5}{2}\,g\,a} = \tfrac{2}{5}\,n;$$

für das dritte $\text{tang}\,\varphi'' = \frac{2}{7}\,n$, und so weiter.

Hieraus erhellt schon die Nothwendigkeit, die Stücke klein zu nehmen, damit die Spannung C dem Gewichte vieler solcher Stücke gleiche.

Beispiel. Es sei $n = 100$: so giebt

die erste Regel, die zweite Regel

beim ersten Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 100$; $\varphi = 89°.25\tfrac{1}{2}'$; $\text{tang}\,\varphi = 66{,}7$; $\varphi = 89°.8\tfrac{1}{2}'$;

beim zweiten Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 50$; $\varphi = 88.51\tfrac{1}{4}$; $\text{tang}\,\varphi = 40$; $\varphi = 88.34$;

beim dritten Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 33{,}3$; $\varphi = 88.17$; $\text{tang}\,\varphi = 28{,}6$; $\varphi = 88.0$;

beim vierten Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 25$; $\varphi = 87.42\tfrac{1}{2}$; $\text{tang}\,\varphi = 22{,}2$; $\varphi = 87.25\tfrac{1}{2}$;

beim fünften Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 20$; $\varphi = 87.8\tfrac{1}{2}$; $\text{tang}\,\varphi = 18{,}2$; $\varphi = 86.51\tfrac{1}{2}$;

beim sechsten Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 16{,}7$; $\varphi = 86.34$; $\text{tang}\,\varphi = 15{,}4$; $\varphi = 86.17$;

beim siebenten Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 14{,}3$; $\varphi = 86.0$; $\text{tang}\,\varphi = 13{,}3$; $\varphi = 85.42$;

beim achten Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 12{,}5$; $\varphi = 85.26$; $\text{tang}\,\varphi = 11{,}8$; $\varphi = 85.9\tfrac{1}{2}$;

beim neunten Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 11{,}1$; $\varphi = 84.51$; $\text{tang}\,\varphi = 10{,}56$; $\varphi = 84.35\tfrac{1}{2}$;

beim zehnten Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 10$; $\varphi = 84.17\tfrac{1}{2}$; $\text{tang}\,\varphi = 9{,}5$; $\varphi = 83.59\tfrac{1}{2}$;

beim zwanzigsten Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 5$; $\varphi = 78.41\tfrac{1}{2}$; $\text{tang}\,\varphi = 4{,}9$; $\varphi = 78.28$;

beim funfzigsten Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 2$; $\varphi = 63.26$; $\text{tang}\,\varphi = 1{,}98$; $\varphi = 63.13$;

beim hundertsten Stücke,
$\text{tang}\,\varphi = 1$; $\varphi = 45°.0'$; $\text{tang}\,\varphi = 0{,}995$; $\varphi = 44.51\tfrac{1}{2}$.

So ergiebt sich ohngefehr, wieviel beide Rechnungen von einander abweichen, und eine Regel wie diese muß dem genügen, der nicht durch vollständigere analytische Kenntnisse in den Stand gesetzt wird, genauere Regeln verstehen und anwenden zu können.

Wenn man durch A eine horizontale Linie AV zieht, so läßt sich auch bestimmen, über welchem Puncte derselben und in welcher Höhe sich die Endpuncte der einzelnen Stücke befinden. Nimmt man nämlich die aus der vorigen Rechnung bekannten Werthe von φ, und bezeichnet sie für das erste Stück mit φ', für das zweite mit φ'' und so weiter, so ist, da $CB = a$,

für das 1. Stück $Bm = a \,.\, \mathrm{Sin}\,\varphi'$; $Cm = a \,.\, \mathrm{Cos}\,\varphi'$;

für das 2. Stück $Bn = a\,(\mathrm{Sin}\,\varphi' + \mathrm{Sin}\,\varphi'')$,

$Dn = a\,(\mathrm{Cos}\,\varphi' + \mathrm{Cos}\,\varphi'')$;

für das 3. Stück $Bo = a\,(\mathrm{Sin}\,\varphi' + \mathrm{Sin}\,\varphi'' + \mathrm{Sin}\,\varphi''')$,

$Eo = a\,(\mathrm{Cos}\,\varphi' + \mathrm{Cos}\,\varphi'' + \mathrm{Cos}\,\varphi''')$.

§. 243. Aehnliche Betrachtungen könnten selbst dienen, um die Gestalt einer frei hängenden Kette zu bestimmen, deren Glieder von ungleichem Gewichte bei gleicher Länge sind. Nähme (Fig. 88.) von B an das Gewicht jedes gleich langen Gliedes in arithmetischem Verhältnisse zu, so daß

$BC = g \,.\, a$; $CD = (g+1)\,a$; $DE = (g+2)\,a$;

wöge; dann würde für $C = n \,.\, g \,.\, a$,

beim 1. Stücke $\mathrm{tang}\,\varphi' = \mathrm{tang}\,BCm = n$;

beim 2. Stücke $\mathrm{tang}\,\varphi'' = \mathrm{tang}\,CDn = \dfrac{n \,.\, g}{2g+1}$;

beim 3. Stücke $\mathrm{tang}\,\varphi''' = \mathrm{tang}\,DEo = \dfrac{n \,.\, g}{3g+3}$;

beim (m+1)ten St. $\mathrm{tang}\,\varphi = \dfrac{n \,.\, g}{m.g+1+2+3+4+++m}$,

oder $\mathrm{tang}\,\varphi = \dfrac{n \,.\, g}{m \,.\, g + \frac{1}{2}(m+1) \,.\, m}$, sein.

Dreizehnter Abschnitt.

Anwendungen der Statik auf einige bei Bauen vorkommende Holz-Verbindungen.

§. 244. **Aufgabe.** Eine Stange AB ist irgendwo mit einem vertical niederwärts wirkenden Gewichte $= P$ belastet; sie ruht bei B (Fig. 89.) auf dem horizontalen Boden und lehnt sich bei A an die verticale Wand AC, gegen welche sie unter dem Winkel $BAC = \alpha$ geneigt ist; den Druck zu bestimmen, welchen in A die Wand nach horizontaler Richtung und in B der Boden nach verticaler Richtung leidet, nebst der Kraft, welche in B horizontal wirken muß, um das Ausgleiten der Stange zu hindern.

Auflösung. Die Länge der Stange sei $= a$ und ihr eignes Gewicht $= Q$ stelle man sich in ihrer Mitte im Schwerpuncte vereinigt, in D aber die Last $= P$ hängend vor. Wenn hier die Entfernung $BD = b$, so üben diese beiden Gewichte in A einen verticalen Druck $= \frac{1}{2} Q + \frac{bP}{a}$, und in B einen verticalen Druck $= \frac{1}{2} Q + \frac{(a-b)P}{a}$, aus. Dem verticalen Drucke in A wirkt nach horizontaler Richtung die Wand, nach der Richtung BA die in A unterstützenden Kräfte entgegen; denkt man sich daher die Kraft $Ae = \frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P$, nach den Richtungen Ad, Af zerlegt, so ist im Parallelogramm der Kräfte $Ae : Ad = 1 : \tang \alpha$, und $Ae : Af = \operatorname{Cos} \alpha : 1$; also die nach Ad wirkende Kraft oder der Druck, den die Wand nach horizontaler Richtung leidet, $= \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) \tang \alpha$, die nach der Richtung der Stange wirkende Kraft $= \frac{\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P}{\operatorname{Cos} \alpha}$.

Die letztere Kraft drückt in B nach der Richtung Bi und wird in eine horizontale Kraft $= \tang \alpha \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right)$ und eine verticale Kraft $= \frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P$ zerlegt. Mit der letztern verbindet sich der schon Anfangs gefundene verticale Druck auf B, welcher $= \frac{1}{2} Q + \frac{(a - b)}{a} P$ war. Der gesammte verticale Druck auf den Boden in B ist also $= Q + P$, die zu Erhaltung der Stange in B nöthige horizontale Kraft ist $= \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) \tang \alpha$ gleich dem Drucke, welchen in A die Wand leidet.

§. 245. Wenn zwei Dachsparren unter gleichem Winkel gegen den Horizont geneigt, in A sich gegen einander stützen (Fig. 90.) und in B, E gehörig gehalten werden: so hebt der in A entstehende horizontale Druck sich auf, wenn beide Sparren bloß mit ihrem eignen, gleich großen Gewichte beschwert sind; der horizontale Druck jedes Sparren aber ist in B und in E durch $\frac{1}{2} Q . \tang \alpha = \frac{1}{2} Q . \operatorname{Cotang} ABE$ ausgedrückt, und dieses ist es, was man den Sparrenschub nennt. Der Sparrenschub nimmt also sehr beträchtlich ab, wenn man die Neigung der Sparren gegen den Horizont oder den Winkel ABE vergrößert, und deshalb giebt man denjenigen Dächern einen scharfen Winkel an der Spitze, die keine quer durchgehende Balken, um den Sparrenschub aufzuhalten, haben, z. B. Kirchendächern.

§. 246. Auch die Vertheilung der Last bei Hängewerken läßt sich hieraus ohngefehr übersehen. Wäre

(Fig. 91.) der Balken BC, in seinem Schwerpuncte unterstützt, bei A am Ende von AD aufgehängt, und stützte sich der tragende Balken AD in A an eine verticale Wand; so wäre in §. 244. $b = a$ und folglich der horizontale Druck bei A und der horizontale Schub bei $D = (\frac{1}{2} Q + P) . \tan \alpha$. Da beim Hängewerke jeder der verbundenen Balken AD, AE nur die Hälfte des Balkens BC trägt, so ist der horizontale Schub bei D und bei E, $= \frac{1}{2} (Q + P) \tan \alpha$ $= \frac{1}{2} (Q + P) \operatorname{Cotang} ADC$ und die Pfeiler DF, EG tragen zugleich den verticalen Druck $= Q + \frac{1}{2} P$, wenn Q das Gewicht von AD und P das Gewicht des ganzen aufgehängten Balkens ist.

Ganz so verhält es sich nun bei Brücken und ähnlichen Hängewerken nicht, sondern da liegt der Balken zugleich bei D und E auf, und wird von den Pfeilern unmittelbar unterstützt. Der Balken BC wird also in drei Puncten unterstützt, und es tritt hier der Fall ein, wo man wegen der Biegsamkeit des Balkens fragen kann, wie die Last ihren Druck in diesem Falle vertheilt. Eine Frage, auf deren Beantwortung wir uns hier nicht einlassen können, die aber Eytelwein näher erörtert (Statik 2 Thl. §. 371. 372.).

§. 247. Aufgabe. Eine in D mit dem Gewichte $= P$ belastete Stange (Fig. 89.) lehnt sich gegen die verticale Wand AC und steht frei auf dem horizontalen Boden BC; man verlangt den Winkel zu bestimmen, unter welchem sie geneigt stehen darf, um noch durch die Reibung bei A und bei B am Ausgleiten gehindert zu werden.

Auflösung. Der gesuchte Winkel CAB sei $= \varphi$, die Länge der Stange $= a$, ihr Gewicht, welches wir uns als in ihrer Mitte, im Schwerpuncte vereinigt vorstellen, $= Q$, BD sei $= b$. Eben so wie in §. 244. ist der verticale Druck in $A = \frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P$; der verticale Druck in B, $= \frac{1}{2} Q + \frac{a - b}{a} . P$. Bezeichne ich nun den Bruch, mit welchem der Druck multiplicirt werden muß, um die Stärke der Reibung anzugeben mit f, und nenne den noch unbekannten horizontalen Druck, welchen die Wand in A leidet $= R$, so ist $f \, . \, R$ die bei A entstehende Reibung, und die nach Ae wirkende Kraft ist nur $= \frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f \, . \, R$, also die Kraft nach Ad ist $= \tang \varphi \, . \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f \, . \, R \right)$, welche eben jene R sein soll, also $= R$ gesetzt, giebt

$$R \, (1 + f \, . \tang \varphi) = \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P \right) \tang \varphi$$

$$R = \frac{\left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P \right) \tang \varphi}{1 + f \, . \tang \varphi}.$$

Die Kraft nach Af wird $= \frac{1}{\operatorname{Cos} \varphi} . \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f \, . \, R \right)$, und diese bringt in B den verticalen Druck $= \frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f \, . \, R$ hervor, welcher in Verbindung mit $\frac{1}{2} Q + \frac{a - b}{a} P$, den gesammten Verticaldruck in B, $= Q + P - f \, . \, R$ giebt und folglich die Reibung in B,

$$= f \, (P + Q) - f^2 R;$$

der horizontale Schub in B hingegen wird

$$= \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f \, . \, R \right) \tang \varphi.$$

Da nun die Friction bei B dem horizontalen Schube das Gleichgewicht halten soll, so ist $f \, (P + Q) - f^2 R$

$$= \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f \, . \, R \right) \tang \varphi,$$

oder $f \, (P + Q) - \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P \right) \tang \varphi$

$$= f \, . \, R \, (f - \tang \varphi),$$

oder aus dem gefundenen Werthe von R

$$f(P+Q) - \left(\tfrac{1}{2}Q + \frac{b}{a}P\right)\tan\varphi$$

$$= \frac{f.(f - \tan\varphi)\left(\tfrac{1}{2}Q + \frac{b}{a}P\right)\tan\varphi}{1 + f.\tan\varphi},$$

das ist, wenn man die Gleichung richtig ordnet

$$f(P+Q) = \tan\varphi\left((1+f^2)\left(\tfrac{1}{2}Q+\frac{b}{a}P\right)-f^2(P+Q)\right),$$

also $\tan\varphi = \dfrac{af(P+Q)}{(1+f^2)(\tfrac{1}{2}aQ + bP) - af^2(P+Q)}$.

Wenn die Stange unter dem so bestimmten Winkel gegen die Verticallinie geneigt ist, so reicht die Reibung grade noch hin, um sie vor dem Ausgleiten zu sichern.

§. 248. Ist kein Gewicht an die Stange angehängt, sondern drückt bloß ihre eigne Schwere, so ist $P = 0$, und

$$\tan\varphi = \frac{2f}{1 - f^2}.$$

Auch wenn das Gewicht an der Mitte der Stange aufgehängt wäre, würde man

$\tan\varphi = \dfrac{2f}{1 - f^2}$, finden; ist es aber ganz am oberen Ende bei A aufgehängt, also $b = a$, so hat man

$\tan\varphi = \dfrac{f.(P+Q)}{\tfrac{1}{2}Q + P - \tfrac{1}{2}Qf^2}$, wogegen

$\tan\varphi = \dfrac{f.(P+Q)}{\tfrac{1}{2}Q(1-f^2) - f^2P}$ wird, wenn $b = 0$ oder das Gewicht ganz unten bei B angebracht ist.

§. 249. Hätte die Stange selbst keine Schwere, oder wäre wenigstens Q unbedeutend gegen P: so ergäbe sich für eine oben bei A angebrachte Last $\tan\varphi = f$ für eine ganz unten bei B angebrachte Last $\tan\varphi = -\dfrac{1}{f}$, und für eine in dem Puncte D angebrachte Last

$$\tang \varphi = \frac{af}{b(1+f^2) - af^2}.$$

Der letztere Ausdruck giebt $\tang \varphi = \infty$, wenn $b = \frac{af^2}{1+f^2}$. Schon für diesen Werth von b könnte also die Stange in jeder Lage vermöge der Reibung ruhen, und der negative Werth, denn man für kleinere Werthe von b erhält, zeigt, daß ein Bestreben zum Ausgleiten gar nicht mehr statt finde, sondern durch die Reibung mehr geleistet werde, als zu Verhinderung des Ausgleitens erfordert würde.

Die allgemeine Gleichung

$$\tang \varphi = \frac{af(P+Q)}{(1+f^2)(\frac{1}{2}aQ+bP) - af^2(P+Q)}$$

zeigt, daß allemal $\varphi = 90^\circ$ oder jede Stellung der Stange möglich wird, wenn

$$P = \frac{\frac{1}{2}aQ(1-f^2)}{(a-b)f^2-b}$$ ist, oder für $b = \frac{1}{n}a$,

wenn $P = \frac{\frac{1}{2}Q(1-f^2)}{\frac{n-1}{n}.f^2 - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{2}n.Q.(1-f^2)}{f^2n-(1+f^2)}$.

Für $f = \frac{1}{3}$ könnte also die Stange in jeder Stellung ruhen, wenn die Belastung

$= \frac{\frac{1}{2}.n.\frac{8}{9}.Q}{\frac{n}{9}-\frac{10}{9}} = \frac{4.n.Q}{n-10}$ ist; also für $BD = \frac{1}{20}AB$, oder $n = 20$, wenn $P = 8.Q$ ist.

§. 250. Aufgabe. Der aufrecht stehende Balken AB (Fig. 92.) wird durch eine horizontale an seinem oberen Ende wirkende Kraft $= P$ nach AP hin gedrückt. Eine in der Ebne PAB liegende Strebe DC hindert das Umstürzen, man sucht den Druck, den CD und BC leiden.

Auflösung. Es sei $AB = a$, $DC = b$, $CDB = \alpha$, also $BC = b \sin \alpha$, so ist der mit AP parallele Druck, den C leidet $= \frac{P \cdot a}{b \cdot \operatorname{Sin} \alpha}$. Diesem wird nach der Richtung DC und BC widerstanden, und wir müssen ihn daher nach diesen Richtungen zerlegen. Eine Kraft nach CE, die $= \frac{P \cdot a}{b \cdot \operatorname{Sin} \alpha}$ ist, bringt nach CA, CD zerlegt, einen Druck $= \frac{P \cdot a}{b \cdot \operatorname{Sin} \alpha} \cdot \operatorname{tang} \alpha = \frac{P \cdot a}{b \cdot \operatorname{Cos} \alpha}$ nach CA hervor, mit dieser Gewalt wird daher B aufwärts gezogen; und einen Druck $= \frac{P \cdot a}{b \cdot \operatorname{Sin} \alpha \cdot \operatorname{Cos} \alpha}$ $= \frac{2 \cdot P \cdot a}{b \cdot \operatorname{Sin} 2\alpha}$ nach der Richtung der Strebe, welcher sie schief gegen D drückt. Sucht man hieraus den horizontalen und verticalen Druck, den D leidet, so ist der verticale Druck $= \frac{P \cdot a}{b \cdot \operatorname{Cos} \alpha}$ eben so groß, als der entgegengesetzte den B leidet, der horizontale Druck aber $= \frac{P \cdot a}{b \cdot \operatorname{Sin} \alpha}$, eben so groß als er in C war, und wenn man mit ihm den horizontalen Druck vereiniget, den B leidet, indem AB sich um C drehen will, so ist, weil dieser $= - \frac{P \cdot (a - b \operatorname{Sin} \alpha)}{b \cdot \operatorname{Sin} \alpha}$, die Summe beider $= P$.

§. 251. **Aufgabe.** Der horizontale, auf AB ruhende Balken AE, der in E mit einem Gewichte $= P$ belastet ist, wird von dem Winkelbande DC unterstützt; man sucht den Druck, welchen die einzelnen Puncte dieser Holzverbindung leiden (Fig. 93.).

Auflösung. Da man AE als einen um den Endpunct beweglichen Hebel ansehen kann, so leidet D den verticalen Druck $= \frac{P \cdot AE}{AD}$ niederwärts und A den verticalen Druck $= \frac{P . DE}{AD}$ aufwärts. Dieser verticale Druck in D vertheilt sich auf das Winkelband nach der Richtung DC, und auf AD nach der Richtung DE. Der Druck nach DE wird $= \frac{P . DE}{AD} . \tang ACD$, der Druck nach DC $= \frac{2P . DE}{AD . \text{Cos}\, ACD}$.

Nimmt man die Länge des Bandes CD als gegeben an $= b$, so ist AD $= b . \sin ACD$, also der Druck nach der Richtung der Strebe $= \frac{2P . DE}{b . \sin 2 . ACD}$, welcher am kleinsten wird für ACD $= 45$ Grad, indem dann $\sin 2 . ACD = 1$, seinen größten Werth erhält.

Der horizontale Druck nach DE ist eben so groß, als derjenige horizontale Druck, den der Punct C von dem gedrückten Winkelbande leidet; der verticale Druck, den A aufwärts litt zusammen genommen mit dem verticalen Drucke, den das Winkelband bei C ausübt ist $= P$, also wird B bloß vertical mit der ganzen Last $= P$ niederwärts gedrückt; die Verbindungspuncte A, C und D aber leiden die verschiedenen Pressungen, die wir eben bestimmt haben; das Winkelband nämlich übt bei C einen Druck aus, und strebt zugleich bei D horizontal sich nach DE fortzuschieben; bei A ist ein Bestreben, den Balken AE bei A aufwärts loszureißen u. s. w.

§. 252. Aufgabe. Zwei Dachsparren AB, BC (Fig. 94.) sind bei B auf einander gesetzt, der obere lehnt sich in A an die verticale Wand AD, der untere ruht bei C auf dem horizontalen Boden CD, und seinem horizontalen Schube wirkt bei C die erforderliche Kraft entgegen; man sucht eine Bestimmung für die Neigungswinkel beider Sparren, damit es bei B keiner fremden Kraft, um sie zu erhalten, bedürfe.

Auflösung. Des unteren Sparren Länge sei

BC = a, seine Neigung BCD = α; des oberen Sparren Länge BA = b; seine Neigung gegen den Horizont ABE = β, das Gewicht des unteren Sparren = a . g, des oberen = b . γ.

Aus §. 244. ist bekannt, daß der obere Sparren in B den horizontalen Schub = $\frac{1}{2}$ b . γ . Cotang β und den verticalen Druck = bγ hervorbringt. Diese beiden nach Bc und nach Ba wirkenden Kräfte bringen eine Mittelkraft hervor, deren Neigung gegen den Horizont sich leicht bestimmen ließe. Aber der unter dem Winkel = α geneigte untere Sparren, übt in B einen horizontalen Druck = $\frac{1}{2}$ a . g . Cotang α aus; und es muß, wenn das Ausgleiten bei C gehindert wird, aus den drei Kräften = bγ nach Ba;

= $\frac{1}{2}$ bγ . Cotang β nach Bc,

= — $\frac{1}{2}$ ag . Cotang α nach Bc, eine nach der Richtung des Sparren BC selbst wirkende Mittelkraft entstehen, indem sonst kein Widerstand die Bewegung aufhält, und folglich das Gleichgewicht nur besteht, wenn der Mittelkraft Richtung auf BC fällt. Da die gesammte Kraft nach Ba, = bγ, die gesammte Kraft nach Bc,

= $\frac{1}{2}$ bγ . Cotang β — $\frac{1}{2}$ ag . Cotang α

ist, so findet man der aus ihnen entstehenden Mittelkraft Neigung gegen den Horizont = cBd durch

$$\text{tang cBd} = \frac{2b\gamma}{b\gamma . \text{Cotang}\,\beta - ag . \text{Cotang}\,\alpha}$$

bestimmt, uud es muß folglich

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{2 . b . \gamma}{b . \gamma . \text{Cotang}\,\beta - ag . \text{Cotang}\,\alpha},$$

das ist b . γ . tang α . Cotang β = ag + 2bγ, sein.

Der Winkel β wird also durch α so bestimmt, daß

$$\text{Cotang}\,\beta = \left(2 + \frac{a . g}{b . \gamma}\right) \text{Cotang}\,\alpha,$$

oder $\text{tang}\,\alpha = \left(2 + \frac{a . g}{b . \gamma}\right) \text{tang}\,\beta$ ist.

§. 253. **Aufgabe.** In dem eben betrachteten

Falle den Sparrenschub bei C und den verticalen Druck zu finden, den C leidet.

Auflösung. Aus der horizontalen Kraft $= \frac{1}{2} b\gamma . \text{Cotang}\,\beta - \frac{1}{2} ag . \text{Cotang}\,\alpha$ und der verticalen Kraft $= b\gamma$, ergiebt sich die nach BC wirkende Mittelkraft (§. 63.)

$$= \sqrt{(b^2\gamma^2 + \tfrac{1}{4}(b\gamma . \text{Cotang}\,\beta - ag . \text{Cotang}\,\alpha)^2)},$$

oder wenn man für Cotang β den wegen des Gleichgewichts erforderlichen Werth setzt (§. 252.),

$$= \sqrt{(b^2\gamma^2 + \tfrac{1}{4} \text{Cotang}^2\alpha . (2b\gamma + ag - ag)^2)},$$

$$= b\gamma . \sqrt{(1 + \text{Cotang}^2\alpha)} = b\gamma \text{ Cosec}\,\alpha = \frac{b\gamma}{\text{Sin}\,\alpha};$$

diese bei C nach der Richtung BC drückende Kraft giebt eine horizontale Kraft $= b\gamma . \text{Cotang}\,\alpha$; mit ihr verbindet sich der vom Sparren BC für sich allein entstehende Sparrenschub $= \frac{1}{2} ag . \text{Cotang}\,\alpha$; die Summe beider ist der Druck, den C nach horizontaler Richtung leidet $= \text{Cotang}\,\alpha\,(b\gamma + \frac{1}{2} ag)$, welches

$$= \tfrac{1}{2} b\gamma . \text{Cotang}\,\beta \text{ ist.}$$

Der Sparrenschub beider vereinten Sparren ist also in C grade so stark, als der Sparrenschub des oberen Sparren in B war.

Der verticale Druck wird wegen der nach BC wirkenden Kraft $= b\gamma$, und sie wird vermehrt durch das ganze Gewicht des unteren Sparren $= g . a$, der gesammte verticale Druck ist also $= ag + b\gamma$.

§. 254. Man könnte die Betrachtungen des vorigen §. auch auf folgende Art anstellen. Da der Sparren AB durch die Wand AD und die Unterstützung des Punctes B ganz ruhend erhalten wird: so ist offenbar, daß sein Gewicht in A den horizontalen Druck $= \frac{1}{2} b\gamma . \text{Cotang}\,\beta$ hervorbringt, in B aber den horizontalen Druck $= \frac{1}{2} b\gamma . \text{Cotang}\,\beta$ und den verticalen $= b\gamma$. Das Gewicht des Sparren BC bringt in B einen verticalen Druck $= \frac{1}{2} . ag$ und in C einen verticalen Druck $= \frac{1}{2} ag$ hervor. In B wirken also die beiden Kräfte, eine $= \frac{1}{2}$ bγ . Cotang β, horizontal, eine $=$ bγ $+ \frac{1}{2}$ ag, vertical. Sie geben eine Mittelkraft, deren Richtung gegen den Horizont $= \varphi$ durch die Gleichung $\text{tang}\,\varphi = \frac{b\gamma + \frac{1}{2}ag}{\frac{1}{2}b\gamma . \text{Cotang}\,\beta}$ gegeben ist, und diese Richtung muß in BC fallen, damit der Sparren selbst sie ganz aufhebe. Es muß also $\varphi = \alpha$,

$\text{Cotang}\,\beta . \text{tang}\,\alpha = 2 + \frac{ag}{b\gamma}$, sein.

Die nach der Richtung des Sparren entstehende Mittelkraft aber ist

$$= \sqrt{\left(\frac{b^2\gamma^2 \text{Cotang}^2\beta}{4} + (b\gamma + \tfrac{1}{2}ag)^2\right)},$$ oder

da $\frac{b\gamma + \frac{1}{2}ag}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{1}{2}b\gamma . \text{Cotang}\,\beta$, ist jene Kraft

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\text{tang}^2\alpha} + 1\right)} . (b\gamma + \tfrac{1}{2}ag) = \frac{b\gamma + \frac{1}{2}ag}{\text{Sin}\,\alpha}.$$

Diese giebt den Sparrenschub in C $= (b\gamma + \frac{1}{2}ag)\,\text{Cotang}\,\alpha$, welches $= \frac{1}{2}b\gamma . \text{Cotang}\,\beta$ ist, und den verticalen Druck in C $= b\gamma + \frac{1}{2}ag$, wozu noch die vorhin schon auf C verlegte verticale Kraft $= \frac{1}{2}ag$ kömmt.

§. 253*. Es läßt sich leicht übersehen, daß man den Punct C wieder durch einen geneigt stehenden Sparren unterstützen könnte, dessen Neigungswinkel $= \alpha'$, wenn c . G sein Gewicht bedeutete durch

$\text{tang}\,\alpha' = \frac{b.\gamma + a.g + \frac{1}{2}c.G}{\frac{1}{2}b.\gamma.\text{Cotang}\,\beta}$ gegeben wäre, und auch an seinem unteren Ende würde der Sparrenschub $= \frac{1}{2}b\gamma . \text{Cotang}\,\beta$, der verticale Druck aber dem Gewichte aller Sparren gleich gefunden $= b.\gamma + a.g + c.G$.

Anmerkung. Es läßt sich wohl übersehen, daß bloß bei A und bei C ein gleicher horizontaler Druck entstehen kann, weil in den Verbindungspuncten der Sparren bei B der entgegengesetzte horizontale Druck sich aufhebt. Das gesammte Gewicht der Sparren aber lastet auf C.

§. 254*. Aus §. 233. erhellt, daß bei Seilen, die durch Gewichte gespannt werden, die nach horizontaler Richtung zerlegte Spannung überall gleich, nach verticaler Richtung aber (§. 237. 238.) den belastenden Gewichten gleich ist. Hier findet grade eben das statt, nur mit dem Unterschiede, daß die Belastung hier ein Druck von oben ist, statt daß es dort ein Zug nach unten war.

§. 255. Wenn man die Kraft $= T$ nennt, welche aus dem von obenher wirkenden Drucke nach der Richtung irgend eines der über einander gesetzten Sparren, auf diesen entsteht, so ist der daraus entspringende Sparrenschub $= T \cdot \text{Cos}\,\beta$, wenn die Neigung $= \beta$ ist, und dieser ist bei allen über einander gestellten Sparren gleich, also $T \cdot \text{Cos}\,\beta = C$, wenn C diesen beständigen Werth darstellt.

Der verticale Druck hingegen $= T \cdot \text{Sin}\,\beta$ ist $= V$, gleich der Summe des Gewichtes aller oberhalb stehenden Sparren, oder wenn alle gleich dick und gleich schwer sind und ihre gesammte Länge $= s$ heißt, $T \cdot \text{Sin}\,\beta = g \cdot s$.

Eben diese Bestimmungen erhielten wir §. 240. für die Kettenlinie und es ist folglich, wenn man die Sparrenverbindung sich aus lauter durchaus gleichen Stücken zusammengesetzt denkt, und diese sehr klein annimmt, für jeden Punct der Sparrenverbindung $\text{Cotang}\,\beta = \frac{C}{gs}$, welches da β hier die Neigung gegen den Horizont bedeutet, eben die Bestimmung für die Lage jedes Theiles der Sparrenverbindung giebt, wie in §. 240. für die Kettenlinie, wo α die Neigung gegen die Verticallinie war.

Eine solche aus sehr kleinen, gleichen Sparren ausgeführte Verbindung, müßte also nach der Kettenlinie geformt werden.

Anmerkung. An diese Betrachtungen würden sich Untersuchungen über die Gewölbe anschließen; da aber diese in zu mannigfaltige Verwickelung führen würden, so verweise ich nur auf Eytelweins Statik 2ter Band, wo diese Lehre sehr vollständig abgehandelt ist, auch die wichtigsten dahin gehörigen Schriften erwähnt werden. Zu diesen verdient noch beigefügt zu werden, Georg Reichenbachs Theorie der Brückenbögen und Vorschläge zu eisernen Brücken.

Vierzehnter Abschnitt.

Von Vergleichung der Festigkeit der Körper.

§. 256. Bemerkung. Obgleich die Statik fester Körper nur diejenigen Fälle betrachten soll, wo die Gestalt der Körper sich nicht ändert: so ist es doch bekannt, daß bei den in der Ausübung vorkommenden Körpern eine vollkommene Festigkeit nicht statt findet; sondern daß die Körper bei Einwirkung sehr mächtiger Kräfte zerreißen oder zerbrechen. Die Kraft, welche hiezu erfordert wird, giebt uns also ein Maaß der Festigkeit der Körper.

§. 257. Erklärung. Wenn ein prismatischer Körper nach der Richtung seiner Länge durch eine für seine Festigkeit zu große Kraft aus einander gezogen wird, so zerreißt er, und die Ebne des Bruches ist auf die Richtung der Kraft senkrecht. Die zu diesem Zerreißen nöthige Kraft heißt das Maaß der absoluten Festigkeit des Körpers.

Wirkt dagegen die Kraft senkrecht auf die Längenrichtung des prismatischen Körpers, der entfernt von dem Angriffspuncte der Kraft unverrückbar fest gehalten wird: so zerbricht diese, bei hinreichender Gewalt, den Körper, und dient nun, weil es hier zugleich auf die Entfernung der Kraft vom Unterstützungspuncte ankömmt, als Maaß der relativen Festigkeit.

Eine Kraft endlich, die nach der Längenrichtung des prismatischen Körpers diesen zusammen zu drücken strebt, kann ihn zerdrücken, und dient dann als Maaß seiner rückwirkenden Festigkeit.

§. 258. Lehrsatz. Die absolute Festigkeit prismatischer Körper von gleicher Art ist der Größe ihres Querschnitts proportional.

Denn die absolute Festigkeit steht offenbar im Verhältniß der Anzahl der zu zerreißenden Theilchen, Fasern, Fibern und dergleichen.

§. 259. Zahlreiche Versuche haben uns mit der absoluten Festigkeit der verschiedenen Körper bekannt gemacht. Unter den Hölzern gehören Eichenholz und Buchenholz zu den festesten; unter den Metallen hat Eisen und vorzüglich Stahl den Vorzug.

§. 260. Wenn ein prismatischer Körper von erheblicher Länge so aufgehängt ist, daß seine Längenrichtung vertical ist: so haben seine höheren Querschnitte mehr Last zu tragen, als seine niedriger liegenden, indem jene außer dem etwa unten angehängten Gewichte auch noch die unteren Theile des Körpers tragen müssen. Man könnte daher fragen, nach welchem Gesetze die Querschnitte des Körpers zunehmen müßten, damit jeder höher liegende Querschnitt dem vergrößerten Gewichte eben so gut widerstehe, als jeder niedrigere dem geringern Gewichte. Aber diese eben nicht schwere Untersuchung ist von keiner großen Brauchbarkeit.

§. 261. Erklärung. Wir nennen Körper biegsam, wenn sie sich vor dem Zerbrechen krümmen, spröde dagegen und unbiegsam, wenn ihr Zerbrechen ohne vorherige Beugung erfolgt.

§. 262. Lehrsatz. Ein parallelepipedischer Balken (Fig. 95.) ABCD ist bei D in einem auf die Länge BD senkrechten Querschnitte befestiget; die Kraft = Q wirkt senkrecht auf die Längenrichtung BD und Breitenrichtung BA, parallel mit der Höhenrichtung AC. Unter diesen Umständen ist die relative Festigkeit des Balkens, wenn man den Balken selbst als ohne Schwere betrachtet, seiner Breite AB und dem Quadrate seiner Höhe AC direct, der Länge BD aber, das ist der Entfernung der Kraft Q von dem unterstützten Querschnitte umgekehrt proportional.

Beweis. Nennt man die absolute Festigkeit des Balkens $= P$, oder ist eine Kraft $= P$ nach der Richtung DB wirkend nöthig, um ihn zu zerreißen: so ist P dem Querschnitte, das heißt der Breite und Höhe oder dem Producte AB, AC proportional. Stellen wir uns diese Kraft in dem Schwerpuncte G der Brechungsfläche, als dem durch die Kraft Q bewirkten Brechen entgegen wirkend vor, so ist, da H hier als Unterstützungspunct anzusehen ist (§. 97.) $P \cdot \frac{1}{2} DE = Q \cdot BD$, weil $GH = \frac{1}{2} DE$ des Schwerpuncts Lage bestimmt, also

$$Q = \frac{\frac{1}{2} P \cdot DE}{BD} = \frac{\frac{1}{2} P \cdot CA}{BD}.$$

P kann durch $K \cdot AB \cdot AC$ ausgedrückt werden, wenn K die absolute Festigkeit für den als Einheit angenommenen Querschnitt ist, und folglich ist

$$Q = \frac{1}{2} K \cdot \frac{AB \cdot AC^2}{BD}.$$

§. 263. Wäre der Balken (Fig. 96.) in der Mitte bei A unterstützt, und an beiden Enden mit gleichen Gewichten Q . Q so beschwert, daß er bräche: so würde, wenn $l = BC$ des Balkens ganze Länge, b seine Breite, h seine Höhe bedeutet, $Q = \frac{\frac{1}{2} K \cdot bh^2}{\frac{1}{2} l}$; also ist die Summe der an beiden Enden erforderlichen Gewichte $= \frac{2K \cdot b \cdot h^2}{l}$, viermal so groß, als das Gewicht sein würde, welches zum Zerbrechen hinreicht, wenn der Balken am einen Ende fest eingemauert und am andern mit dem das Zerbrechen bewirkenden Gewichte beschwert ist.

Da die Unterlage hier den Druck $= 2 . Q = \frac{2K . bh^2}{l}$ leidet: so ist einleuchtend, daß umgekehrt ein in B und C unterstützter Balken, in der Mitte mit einem Gewichte $= \frac{2K . bh^2}{l}$ belastet werden könnte, ehe er zu brechen anfängt.

§. 264. Bemerkung. Wir haben den Balken als vollkommen spröde betrachtet, so daß er zerbreche ohne vorherige Biegung; aber dieses findet fast nie ganz statt. Alle Körper leiden eine Biegung ehe sie brechen, und beim Holze vorzüglich dehnen die Fasern sich merklich aus, ehe sie zerreißen.

Ist also FA (Fig. 97.) ein bei F fest eingemauerter, bei A belasteter Balken: so nimmt dieser, obgleich er grade war, eine Krümmung an, indem die Fasern in BG sich ausdehnen, in FC zusammen gedrückt werden. Da die Krümmung dieses Ausdehnen einiger und Zusammendrücken andrer Fasern nothwendig zur Folge hat, so giebt es eine gewisse Linie AH, in welcher weder das eine noch das andere statt findet. Für diejenigen Fasern aber, die gedehnt oder zusammen gepreßt sind, ist die Kraft, mit welcher sie einer größern Dehnung oder einer größern Zusammenpressung widerstehen, der schon erlangten Ausdehnung oder Zusammendrückung proportional.

§. 265. Lehrsatz. Auch bei biegsamen parallelepipedischen Balken ist die zum Brechen erforderliche Kraft dem Quadrate der Höhe direct, der Breite direct, und der Länge umgekehrt proportional, wenn der Balken am einen Ende eingemauert, und am andern die zum Brechen erforderliche Kraft angebracht ist.

Beweis. GA (Fig. 97.) sei die Gestalt, welche der Balken im Augenblicke des Brechens angenommen hat; MN sei in L, mn in l senkrecht auf diejenige Linie, welche weder Dehnung noch Zusammenpressung leidet; op sei mit mn parallel. Dann ist die Fiber Mm um oM ausgedehnt, und widersteht dem Zerreißen mit einer Kraft, die der oM proportional ist, die ich daher $= p \cdot oM$ setzen will.

Jede näher an AH liegende Fiber wird weniger ausgedehnt und leistet daher einen geringern Widerstand, in eben dem Verhältnisse, wie die im Dreiecke oLM parallel mit oM an jener Stelle gezogene Linie kürzer ist. Hieraus läßt sich übersehen, daß der gesammte Widerstand, den alle zwischen L und M liegenden Fibern leisten, dem Dreiecke oLM proportional ist, weil die Fiber Mm$\mu\nu$ mit einer Kraft widersteht, die dem Producte aus ihrem Querschnitte in ihre Dehnung oM proportional ist, und die Summe dieser Producte dem Dreiecke LoM proportional ist.

Eben so ist die Summe der Kräfte, welche unterhalb L vermöge der Zusammenpressung widerstehen; dem Dreiecke NLp proportional, weil jede Fiber in Verhältniß der ihr aufgezwungenen Verkürzung widersteht.

Dieser Dreiecke Fläche ist dem Quadrate der Höhe proportional; denn wenn der Balken sich nur bis an rq erstreckte, so wäre $Lrq : LoM = Lq^2 : LM^2$, also ist die Kraft, mit welcher alle Fibern des Balkens dem Zerreißen widerstehen, dem Quadrate der Höhe proportional. Daß sie auch der Breite proportional ist, erhellt von selbst, da in allen mit GFA parallelen Längenschnitten eben die Kräfte sich dem Zerreißen widersetzen. Endlich verhält sich das Moment der Kraft Q, wie die von A senkrecht auf GK gezogne Linie, welche als mit der Länge einerlei kann angesehen werden, da die Krümmung des Balkens nie sehr erheblich ist.

Anmerkung. Dieser Beweis läßt wenigstens den Hauptgegenstand übersehen, nämlich daß die Stärke des Balkens der Breite und dem Quadrate der Höhe proportional ist. Nähere Untersuchungen über diesen Gegenstand und Versuche über die Festigkeit der Körper giebt Eytelwein im 2ten Bande.

§. 269. Lehrsatz. Aufgabe. Mit Hülfe des trigonometrischen Satzes, daß

$\text{Sin } 3A = 3 \,.\, \text{Sin } A \,.\, \text{Cos}^2 A - \text{Sin}^3 A$ ist, die cubische Gleichung $x^3 - fx + g = 0$, aufzulösen, wenn f, g gegebene Größen sind.

Auflösung. Für einen bestimmten Halbmesser $= r$, wird der Sinus des Winkels 3A durch eine Linie $= a$ dargestellt, und $\frac{a}{r} = \text{Sin } 3A$ ist die Zahl, welche wir in den Tafeln unter dem Namen Sinus finden (Trig. §. 5. 17.).

Für eben den Halbmesser stelle eine Linie $= z$ den Sinus des Winkels A dar, oder es sei $\text{Sin } A = \frac{z}{r}$; $\text{Cos } A = \sqrt{(1 - \text{Sin}^2 A)} = \sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)}$, so wird sich die trigonometrische Formel (Trigon. §. 46.) für Sin 3A in folgender Form darstellen,

$$\frac{a}{r} = \frac{3z}{r}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) - \frac{z^3}{r^3}, \text{ das ist}$$
$$ar^2 = 3r^2 z - 4z^3; \text{ oder}$$
$$z^3 - \tfrac{3}{4} r^2 z + \tfrac{1}{4} ar^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat mit der aufzulösenden $x^3 - fx + g = 0$ ganz einerlei Form, und da jene für jeden Werth von r und a gilt, so ist es mir erlaubt

$\tfrac{3}{4} r^2 =$ dem gegebenen f,

und $\tfrac{1}{4} ar^2 =$ dem gegebenen g, anzunehmen,

also $r^2 = \tfrac{4}{3} f$; $a = \frac{3g}{f}$,

In der Gleichung $z^3 - \tfrac{3}{4} r^2 z + \tfrac{1}{4} a \,.\, r^2 = 0$ ist $z = r \,.\, \text{Sin } A$, wenn $a = r \,.\, \text{Sin } 3A$ ist. Berechne ich also aus den gegebenen f und g, $\frac{a}{r} = \frac{3g \,.\, \sqrt{3}}{2f \,.\, \sqrt{f}}$ und nenne den Winkel $= 3A$, welcher zum Sinus $\frac{3g \,.\, \sqrt{3}}{2f \,.\, \sqrt{f}}$ gehört, so ist $x = r \,.\, \text{Sin } A = \frac{2 \,.\, \sqrt{f}}{\sqrt{3}} \,.\, \text{Sin } A$ der gesuchte Werth für x.

Beispiel. Die zu lösende Gleichung sei
$x^3 - 5x + 2 = 0$, so ist $r^2 = \frac{20}{3}$;
$a = \frac{6}{5}$; $\frac{a}{r} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{5 \cdot \sqrt{5}} = 0{,}464758$, welches
$= \text{Sin } 3A$ sein soll. Diese Zahl gehört aber als Sinus zu $27^\circ . 41' . 40''$, also ist
$3A = 27^\circ\ 41'\ 40''$;
$A = 9^\circ\ 13'\ 53\frac{1}{3}$;
und $x = r . \text{Sin} A = 2 . \sqrt{\frac{5}{3}} . \text{Sin } 9^\circ\ 13'\ 53\frac{1}{3}''$
$= 2{,}581989 . \text{Sin } 9^\circ\ 13'\ 53\frac{1}{3}''$.
$= 2{,}581989 . 1{,}604236$.
$= 0{,}414213$.
welches die richtige Wurzel ist.

Anmerkung. Eigentlich gehört die Zahl $= 0{,}464758$, als Sinus eben so gut zum Winkel $360^\circ + 27^\circ\ 41'\ 40''$, und auch zum Winkel $720^\circ + 27^\circ\ 41'\ 40''$; man könnte also für $3A$ auch diese Werthe setzen und fände dann $A = 129^\circ\ 13'\ 53\frac{1}{3}'$, oder auch
$A = 249^\circ\ 13'\ 53\frac{1}{3}'$.

Dem ersteren Werthe gehört der Sinus $= 0{,}774597$, also $x = r . 0{,}774597 = 2{,}581989 . 0{,}774597$
$= 2{,}000000$.
und $x = + 2$, ist eine zweite richtige Wurzel.

Dem zweiten Werthe für A gehört der Sinus
$= - 0{,}9350206$; also $x = - 2{,}581989 . 0{,}93502$.
$x = - 2{,}414214$.
als die dritte Wurzel.

Es ist nämlich $x^3 - 5x + 2 = (x-2)(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$, und der gegebenen Gleichung entsprechen daher die drei Werthe $x = 2$; $x = -1 + \sqrt{2}$; $x = -1 - \sqrt{2}$.

§. 267. Aufgabe. ABCDG (Fig. 98.) ist der Querschnitt eines Cylinders, welche Breite AB und Höhe BC muß man dem daraus zu schneidenden rechtwinklichten Balken geben, damit dieser der stärkste sei, der sich aus diesem Cylinder schneiden läßt.

Auflösung. Wenn des Cylinders Halbmesser $EB = R$ ist, so ist des aus ihm zu schneidenden stärksten

Balkens halbe Breite $EF = \frac{R}{\sqrt{3}}$, und seine halbe Höhe $= FB = R \,.\, \sqrt{\tfrac{2}{3}}$.

Beweis. Nenne ich des Balkens Breite $= 2x$, Höhe $= 2y$, so ist $EF = x$, $FB = y$, und $x^2 + y^2 = R^2$. Die Stärke des Balkens ist der Größe $AB \,.\, BC^2$ proportional (§. 262.), also der Größe $8xy^2$ proportional, ich will sie $= 8 \,.\, m \,.\, x \,.\, y^2$ setzen.

Setze ich nun für irgend einen Werth von x, welchem im Kreise ein bestimmtes y entspricht, die Stärke des Balkens $= 8\,m\,x\,y^2 = b^3$, oder $x \,.\, y^2 = \frac{b^3}{8m}$, wofür ich kurz $= p^3$ schreiben will, so würde $x \,.\, (R^2 - x^2) = p^3$, also $x^3 - R^2 \,.\, x + p^3 = 0$. Wenn also R und p, das heißt der Halbmesser des Baumes und die verlangte Stärke des Balkens gegeben wären, so würde hier nach den in §. 266. gebrauchten Ausdrücken $r^2 = \frac{4}{3} R^2$, $a = \frac{3p^3}{R^2}$ und $\text{Sin}\, 3A = \frac{3p^3 \,.\, \sqrt{3}}{2R^3}$, woraus dann $x = \frac{2R}{\sqrt{3}} \,.\, \text{Sin}\, A$ folgt.

Es ist bekannt, daß kein Sinus größer als $= 1$ sein kann, daß man also für die Stärke des Balkens nichts Größeres fordern darf, als höchstens, daß $\frac{3p^3 \,.\, \sqrt{3}}{2R^3} = 1$, werde, das ist, daß p höchstens $= R \,.\, \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[2]{3}}$ sei.

In diesem Falle, wo der Balken die größeste mögliche Stärke hat, ist $\text{Sin}\, 3A = 1$, also $A = 30^\circ$, und $\text{Sin}\, A = \text{Sin}\, 30^\circ = \frac{1}{2}$, folglich $x = \frac{R}{\sqrt[2]{3}}$ und $y = \sqrt{(R^2 - x^2)} = R \,.\, \sqrt{\tfrac{2}{3}}$.

Dieses sind also die Abmessungen des stärksten Balkens, den man aus dem Cylinder vom Halbmesser $= R$

erhalten kann, indem p nicht größer darf angenommen werden.

§. 268. Giebt man dem Balken diese Abmessungen, so wird seine Stärke durch $8\,x\,y^2 = \frac{16}{3\cdot\sqrt{3}} \cdot R^3$ $= 3{,}079 \cdot R^3$ ausgedrückt, welches $= \frac{b^3}{m} = 8 \cdot p^3$ ist. Für jedes andre Verhältniß der Abmessungen, die im Kreise möglich sind, ist die Stärke geringer, z. B. für $x = \frac{1}{2}\,R$, wozu $y^2 = \frac{3}{4}\,R^2$ gehört, ist die Stärke nur $= 3\,R^3$. Wollte man dagegen die Stärke größer verlangen, als jener Ausdruck angiebt, so erhielte x gar keinen möglichen positiven Werth.

§. 269. Bemerkung. Es gehörte hieher die Beantwortung mehrerer Fragen, die ich hier nur erwähnen kann, um nicht zu weitläuftig zu werden. Zum Beispiel folgende.

Es ist ein prismatischer Balken von gegebenem Querschnitte mit einem Ende eingemauert; man sucht seine Stärke in Vergleichung gegen einen parallelepipedischen. — — Hier müßte man sich das Prisma in schmale, verticale Scheiben zerlegt denken, die man jede als wenig von einem Parallelepipedo verschieden ansehen und die Stärke des Balkens aus der Summe berechnen könnte, die sich für die Stärke der einzelnen Scheiben ergiebt.

Eine andre hieher gehörige Frage ist: Ein überall gleich breiter Balken, ist am einen Ende in eine Wand eingemauert, und am andern Ende mit einem Gewichte beschwert: welche Gestalt muß das verticale Längenprofil des Balkens haben, damit er in jedem Querschnitte dem Brechen gleich stark widerstehe. — Wegen der eignen Schwere des Balkens leiden die gegen dK hin liegenden Querschnitte (Fig. 99.) eine größere Gewalt, und der

Balken wird, wenn alle Querschnitte gleich sind, da, wo er eingemauert ist, brechen, theils weil das Moment der am Ende des Balkens angebrachten Kraft hier am größesten ist, theils weil das Gewicht des Balkens selbst das Brechen befördert. Gäbe man nun dem Balken, bei überall gleicher Breite, gegen dK zu eine immer größere Höhe, so daß der verticale Längenschnitt etwa wie EdnF würde, so könnte die schwächste Stelle wo anders liegen, odder man könnte auch die gegen dK hin wachsende Dicke oder Höhe so bestimmen, daß in allen Puncten dem Brechen mit gleicher Gewalt Widerstand geleistet würde. Wenn das letztere der Fall ist, so sagt man, der Balken sei ein überall gleich widerstehender Balken.

§. 270. Bemerkung. Die Bestimmung der rückwirkenden Festigkeit oder der Last, welche ein aufrecht stehender prismatischer Körper, ein Pfeiler oder eine Säule tragen kann, ohne zusammen zu brechen, beruht auf der Untersuchung der Gestalt, welche ein elastischer Körper von prismatischer Form annimmt, wenn er durch Kräfte genöthiget wird, von seiner natürlichen, graden Stellung abzuweichen.

Eine verticale Säule wird, ehe sie bricht, eine Krümmung annehmen, die zuerst daher entsteht, daß entweder der Druck am Gipfel nicht über den ganzen Querschnitt gleichförmig vertheilt ist, oder daß irgendwo in der Masse der Säule schwächere Theile eine stärkere Zusammenpressung erlauben. Ist nun die Säule ein wenig gebogen, so widersteht sie, als ein elastischer Körper, dem fernern Beugen und Brechen, und wie sie widersteht, hängt von der Gestalt ab, die der elastische Körper annehmen kann. Die Gesetze dieser Krümmung ließen sich vielleicht auch hier entwickeln, aber ich besorge, wenigstens nicht ohne große Weitläuftigkeit, dieses ausführen zu können, und verweise daher auf vollständigere Werke, insbesondere auf Eytelwein.

Hier mag es genügen zu bemerken, daß die rückwirkende Festigkeit gleichartiger, parallelepipedischer Körper sich verhält, direct wie der Cubus der Dicke, direct wie die Breite, und umgekehrt wie das Quadrat der Länge, wenn man nämlich die Höhe der Säule ihre Länge nennt, unter Dicke aber diejenige Abmessung des Querschnitts versteht, nach welcher die Biegung erfolgt, und unter Breite die hierauf senkrechte Abmessung des Querschnittes.

Die Gesetze des Gleichgewichts flüssiger Körper.

Erster Abschnitt.

Vom Gleichgewichte flüssiger Körper, die der Schwere nicht unterworfen sind.

§. 1. Erklärung. Flüssige Körper haben einen so schwachen Zusammenhang ihrer Theile, daß diese durch sehr geringe Kräfte getrennt oder in eine andre Lage gebracht werden können.

§. 2. Erfahrung. Wenn ein flüssiger Körper, der der Schwere nicht unterworfen ist, bei dem Drucke einer auf ihn wirkenden Kraft im Gleichgewichte bleibt: so verbreitet sich jener Druck durch die ganze Masse gleichförmig, und jedes Theilchen leidet einen gleichen Druck.

§. 3. Erläuterung. Da ein Druck, den wir uns auf einen flüssigen Körper wirkend denken, die Gestalt dieses Körpers zu ändern strebt, so stellen wir uns den Körper am besten, als in ein Gefäß eingeschlossen vor. Es sei ABCD (Fig. 100.) dieses Gefäß, in dessen Mündung BEFC sich ein genau schließender Kolben befinde, den eine Kraft nach der Richtung HG gegen den flüssigen Körper drängt, welcher den ganzen innern Raum des Gefäßes bis an lm ausfüllt. Bleibt nun bei diesem Drucke alles in Ruhe, so verbreitet sich der Druck durch die ganze Masse gleichförmig; jedes Stück der Wand, dessen Größe der Grundfläche des Kolbens gleicht, leidet genau denselben Druck, welchen die gesammte auf FE wirkende Kraft ausübt, jedes halb so große Stück der Wand leidet den halben, jedes doppelt so große Stück den doppelten Druck u. s. w. Auch jedes Theilchen des flüssigen Körpers selbst, welches im Innern desselben liegt, wird von allen Seiten her auf diese Weise gedrückt.

§. 4. Bemerkung. Obgleich alle flüssige Körper, an welchen wir Erfahrungen anstellen können, der Einwirkung der Schwere unterworfen sind: so tritt doch diese gleichmäßige Fortpflanzung und Vertheilung des Druckes so klar hervor, daß wir deutlich erkennen, wie es sich ohne Zuthun der Schwere verhalten würde. Wenn in dem Gefäße (Fig. 100.) Wasser enthalten ist, auf das mit Hülfe des Kolbens eine große Kraft drückt: so findet man, daß eine der Grundfläche lm des Kolbens gleiche Oeffnung hi mit einer Gewalt muß verschlossen gehalten werden, welche der auf den Kolben wirkenden gleich ist, oder daß ein bei hi entgegen drückender Kolben, vermöge der auf lm wirkenden Kraft, mit einer Gewalt fortgetrieben wird, die sich zu der auf lm drückenden Kraft verhält, wie die Größe der Fläche hi zur Fläche lm.

§. 5. Erklärung. Es giebt flüssige Körper, welche durch einen Druck von außen, sich in einen engeren Raum zusammen pressen lassen, und der Zusammendrückkung mit immer größerer Gewalt widerstehen, je mehr sie schon zusammen gedrückt sind. Diese heißen nicht bloß zusammendrückbare, compressible, flüssige, sondern auch elastische, oder expansible, weil sie sich wieder ausdehnen, wenn der Druck nachläßt, durch welchen sie in den so engen Raum gepreßt waren. Andre Fluida erlauben keine Zusammendrückung und sind bei vermindertem Drucke auch keiner irgend merklichen Ausdehnung fähig. Diese heißen unelastisch.

Die verschiedenen Luftarten gehören zu den elastischen, Wasser und ähnliche Körper zu den unelastischen Flüssigen.

§. 6. Erklärung. Die unelastischen Flüssigen heißen tropfbare, weil man kleine Massen derselben in Form von Tropfen von der großen Masse trennen kann, und sie ohne Hülfe von Gefäßen sich in einzelnen Tropfen erhalten; bei den elastischen ist dieses nicht möglich, denn ein aus dem Gefäße herausgenommenes und von allem äußern Druck befreites Theilchen behält nicht die Form eines Tropfens, die wir ihm im ersten Augenblicke ebenfalls zuschreiben könnten, sondern dehnt sich, weil es gar keinen Druck leidet, in einen viel größern Raum aus.

§. 7. Erklärung. Man pflegt die Lehre vom Gleichgewichte flüssiger Körper in zwei Theile zu zerlegen, die Hydrostatik, welche vom Gleichgewichte tropfbarer Körper handelt, unter denen wir gewöhnlich das Wasser, als den bekanntesten, zu nennen pflegen, die Aërostatik, die vom Gleichgewichte elastisch flüssiger Körper, wie die Luft, handelt. Da aber viele Erscheinungen bei beiden Arten flüssiger Körper vorkommen, so werden wir zuerst alle Arten von flüssigen Körpern im Allgemeinen betrachten.

§. 8. Bemerkung. Bei den elastischen Flüssigen ist es offenbar, daß sie den sie zusammendrückenden Kolben mit eben der Gewalt drücken, mit welcher er auf sie wirkt; denn waren sie zu der diesem Drucke angemessenen Verdichtung gebracht, so treiben sie den Kolben sogleich zurück, wenn die auf ihn drückende Kraft im geringsten nachläßt, und eben so dehnen sie sich zum Beispiel durch die Oeffnung hi aus, wenn der dortige Gegendruck zu geringe ist. Tropfbare Körper, in ein hinreichend festes Gefäß eingeschlossen, treiben zwar bei vermindertem Drucke auf lm den Kolben nicht zurück; aber daß jeder ihrer Theile den ganzen Druck leidet, welcher der auf den Kolben drückenden Kraft angemessen ist, erhellt daraus, weil überall, wo wir eine Oeffnung im Gefäße machen, ein Gegendruck, der Größe der Oeffnung proportional, nöthig ist, um das Ausfließen des Wassers zu hindern. Dieser Druck, den jedes Theilchen leidet, vermindert sich sogleich, wenn der Druck auf lm abnimmt, und würde in einem nicht schweren Fluido ganz verschwinden, wenn die drückende Kraft ganz zu wirken aufhörte. Im letztern Falle würde der in ABEFCD enthaltene tropfbare Körper ganz ruhig bleiben, und keinen Druck mehr auf die Wände ausüben, gegen welche er sich vorher mit Gewalt andrängte, als die Kraft bei lm einen Druck auf ihn ausübte. In diesem letztern Falle bedürfte es nicht einmal eines Gefäßes, sondern der gar nicht schwere Körper würde ohne gegenseitigen Druck seiner Theile in der Gestalt und Lage verharren, die er einmal hatte.

§. 9. Es scheint im ersten Augenblicke auffallend, daß eine Kraft = P, welche auf lm vermittelst des Kolbens wirkt, einen so vervielfachten Druck gegen die Wände ausübt; denn wenn der ganze innere Raum der Wand des Gefäßes = 1000 . lm ist, so leidet jeder Raum der Wand, der = lm ist, den Druck = P, und dieser Druck wird folglich auf dem ganzen Raume der Wand tausendfach vorkommen. Aber etwas Aehnliches ereignet sich ja auch in andern Fällen. Wenn ein Hebel am längern Arme mit einem Pfunde beschwert ist, und mit dem $\frac{1}{100}$ so langen, kurzen Arme sich gegen einen festen Körper stützt, so leidet dieser Körper einen Druck = 100 Pfund und die Unterlage einen Druck = 101 Pfunde, obgleich jenes eine Pfund die einzige thätige Kraft ist. Diese anscheinende Vervielfältigung der Kraft findet dort, und findet hier, nur im Zustande des Gleichgewichts statt; denn bei entstehender Bewegung wird das eine Ende des Hebels zwar mit großer Gewalt, aber langsam bewegt, und eben so würde auch hier das geringste Ausweichen der Wände ein sehr erhebliches

Fortschieben des Kolbens erfordern, wenn der Druck auf alle Theilchen unverändert bleiben sollte.

§. 10. Der Druck, den jedes Theilchen der Wand leidet, ist auf dieses Stück der Wand senkrecht; denn der Gegendruck, welcher von außen her erforderlich ist, um das Gleichgewicht zu erhalten, muß senkrecht auf die Oberfläche, den angegebnen Bestimmungen gemäß sein. Eben so leidet auch jedes innerhalb liegende Theilchen, das wir uns entweder als ein abgesondertes Stück des flüssigen Körpers selbst, oder als einen fremden Körper vorstellen können, in jedem Puncte seiner Oberfläche einen senkrechten Druck, der den vorigen Bestimmungen gemäß, nämlich dem Drucke auf lm und der Größe jenes Theiles der Oberfläche proportional ist.

§. 11. Aufgabe. Wenn man sich den flüssigen Körper als nicht schwer denkt, Formeln für den Druck, den jedes Stück der Wand, vermöge eines bekannten äußern Druckes, leidet, anzugeben.

Auflösung. Wir können die auf den Kolben drükkende Kraft als ein Gewicht $= P$ ansehen. Da dieses auf die Fläche lm, die $= f^2$ heißen mag, vertheilt ist, und jeder andre Theil hi $= g^2$ der Oberfläche, einen seiner Größe proportionalen Druck leidet, so ist $f^2 : g^2 = P : \frac{g^2}{f^2} P$, und $\frac{g^2 P}{f^2}$ ist der Druck auf hi.

Wenn man sich ein aus demselben flüssigen Körper bestehendes Prisma denkt, dessen Grundfläche $= f^2$ ist, und dessen Höhe $= h$ so groß genommen wird, daß bei Einwirkung der Schwere das Gewicht desselben $= P$, also $f^2 . h = P$ wäre, wenn wir das Gewicht des Cubicfußes oder allgemein der bei der Körpermessung zum Grunde liegenden Einheit, $= 1$ setzen: so wäre $\frac{P}{f^2} = h$, und der Druck, den jeder Theil $= g^2$ der Oberfläche leidet $= g^2 . h$. Der Druck würde also in jedem Puncte durch das Gewicht eines gleich hohen Prisma's eben jenes

Körpers ausgedrückt, wenn man sich dieses immer über derjenigen Oberfläche errichtet denkt, für welche der Druck soll bestimmt werden.

Anmerkung. Es kann wohl nicht auffallend sein, daß wir uns hier des Gewichts einer flüssigen Masse bedienen, um den Druck abzumessen, obgleich wir von der Schwere abstrahiren wollten. Unstreitig ist es uns erlaubt, die Wirkungen, welche ohne die Schwere statt finden, abgesondert zu betrachten, und das ist ja nur der Zweck unsrer jetzigen Betrachtungen. Jene Gewichte dienen nur als bequeme Abmessungen des Druckes.

§. 12. Diese Ueberlegungen erklären es, warum man den Druck, welchen irgend ein Theil des flüssigen Körpers oder ein Theil der Wand des Gefäßes leidet, durch die Höhe einer Wassersäule anzugeben pflegt, indem man da, wenn das Gewicht eines Cubicfußes Wasser = 1 gesetzt wird, nicht noch besonders der Größe der Oberfläche zu erwähnen braucht, die den Druck leidet.

§. 13. Lehrsatz. Obgleich jeder Theil der Wand und jedes Theilchen des Flüssigen selbst den eben bestimmten Druck leidet, so ist doch die Gewalt, mit welcher das ganze Gefäß nebst dem darin enthaltenen Fluido fortgetrieben wird, nur eben so groß, als wenn die nach HG wirkende Kraft = P auf einen festen Körper wirkte (Fig. 101.).

Beweis. Da alle Wände des Gefäßes mit überall gleichen, auf die einzelnen Puncte senkrechten Kräften gedrückt werden: so wirkt dieser Druck an einer Stelle dem an der andern entgegen, und die auf die Wände drückenden Kräfte heben einander auf. Es sei die nach der Richtung HG senkrecht gegen des Kolbens Grundfläche lm drückende Kraft gleich dem Gewichte einer über dieser Grundfläche stehenden Wassersäule von der Höhe = h, so ist der senkrechte Druck auf irgend einen Theil no der Oberfläche des Gefäßes = h . no. Dieser Druck läßt sich, wenn man irgend eine willkürliche Linie zieht, zum Beispiel DE, zerlegen nach einer Richtung mit dieser Linie parallel und nach einer auf sie senkrechten Richtung. Stellt qr den Druck vor, welchen no senkrecht leidet, und ist sr senkrecht auf die tr ihr parallel, so ist der auf DE senkrechte Druck, welchen no leidet,

$$= \frac{sr}{qr} . h . no;$$

der mit DE parallele Druck $= \frac{tr}{qr} . h . no.$

Es ist aber, wenn man nu, ov senkrecht auf DE zieht $uv = \frac{no . sr}{qr}$, also der auf DE senkrechte Druck, den no leidet $= h . uv$.

Verlängert man die Senkrechten, bis sie bei w, x die Oberfläche des Gefäßes abermals treffen, so ist der auf wx senkrechte Druck, den wx leidet, $= h . wx$, und wenn man durch Zerlegung den auf DE senkrechten Druck suchet, dieser $= h . uv$. Diese beiden gegen DE senkrecht drückenden gleichen Kräfte, die auf no und wx wirken, sind einander grade entgegengesetzt, und treiben folglich das ganze Gefäß gar nicht zur Bewegung an, sondern streben bloß die Wände des Gefäßes aus einander zu drängen, welches wegen der Festigkeit des Gefäßes ohne Erfolg bleibt.

Aber eben so, wie der auf DE senkrechte Druck für die Theile no, wx gleich und entgegengesetzt ist, so ist für die Theile no und zy der mit DE parallele Druck gleich und entgegengesetzt. Sind nämlich ny, oz mit DE parallel gezogen, so ist offenbar wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke tqr, noa, der mit DE parallele Druck auf no, $= an . h$, eben so groß als der mit DE parallele Druck auf zy.

Es ist leicht einzusehen, daß man so, wenn das Gefäß (Fig. 102.) in Schichten parallel mit ac zerlegt wird, den Druck auf ab parallel mit ac, dem entgegengesetzten Drucke auf cd gleich, und eben so den mit ac parallelen Druck auf be, df, auf eg, fh u. s. w. sich gegenseitig zerstörend finden wird, wenn bd, ef, gh mit ac parallel sind. Eben so heben die senkrecht auf ac wirkenden Kräfte auf cd und ci, auf df und ik, auf fh und kl einander auf; und so erhellt für diesen Querschnitt und auf eben die Weise für alle Querschnitte des Gefäßes, daß die durch den Druck des Flüssigen hervorgebrachten Kräfte gar nicht beitragen, daß Gefäß zur Bewegung anzutreiben.

Der Raum lm wird von innen eben so wie jeder andre Theil der Wand des Gefäßes gedrückt, und dieser Druck wird, in Beziehung auf das ganze Gefäß, durch den Druck auf die entgegengesetzten Theile der Wand aufgehoben. Aber lm leidet nun zugleich von außen her den Druck $= P = h . lm$, der sich bei keinem andern Theile der Wand findet, und dieser Druck wird durch keine gegenwirkende Kraft aufgehoben, sondern treibt das ganze Gefäß mit dem darin enthaltenen Fluido eben so zur Bewegung an, als wenn die vereinte Masse des Gefäßes und des Flüssigen ein fester Körper wäre.

§. 14. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, den ein in das Fluidum ABCD (Fig. 101.) eingetauchter fester Körper Z leidet, wenn keine Einwirkung der Schwere statt findet, und der flüssige Körper durch eine Kraft $= P = h . lm$, senkrecht auf lm gedrückt wird.

Auflösung. Jeder Theil der Oberfläche des Körpers z leidet einen Druck, gleich dem Gewichte einer Wassersäule (*) von der Höhe $= h$, deren Grundfläche jenem Theile der Oberfläche gleich wäre. Aber da der Körper Z von allen Seiten mit Kräften, den Theilen seiner Oberfläche proportional, senkrecht auf jeden Theil der Oberfläche gedrückt wird: so halten diese Kräfte (§. 13.) einander im Gleichgewichte und der feste Körper wird, wenn er selbst nicht schwer ist, in jeder Stellung ruhen.

(*) Denn das Gewicht des Wassers werden wir immer als Einheit ansehen.

§. 15. Der Körper Z wird von allen Seiten her mit einer gewissen Kraft gedrückt; wenn er nicht fest genug wäre, um diesen Druck auszuhalten, so würde er zerdrückt werden.

§. 16. Bemerkung. Wenn der in ABCD (Fig. 100.) enthaltene flüssige Körper der Zusammendrückung fähig ist: so widersteht der Druck des Flüssigen erst dann völlig der zusammendrückenden Kraft, wenn der Körper zu einer gewissen Dichtigkeit gelangt ist. War der Druck für die bestehende Verdichtung des Flüssigen zu groß, so wird der Kolben EF weiter hinein getrieben, und das Fluidum dadurch bis zu dem Grade verdichtet, daß es nun der weitern Verdichtung mit einer dem äußeren Drucke gleichen Gewalt widersteht; war die Verdichtung zu groß für den auf EF wirkenden Druck, so dehnt das Fluidum sich, indem es den Kolben zurück treibt, in einen größern Raum aus, bis der bei verminderter Dichtigkeit abnehmende Druck mit dem äußeren Drucke im Gleichgewichte ist. Hieraus erhellt, daß die Dichtigkeit und der ausgeübte Druck bei diesen Körpern in einer bestimmten Verbindung stehen.

§. 17. Erfahrung. Bei allen elastischen Flüssigen, die wir kennen, ist der Druck, den sie ausüben, der Dichtigkeit proportional, oder umgekehrt, wenn ein gewisser auf lm wirkender Druck, $= h . lm$, den elastisch flüssigen Körper in den Raum $= A$ zusammen preßt, so wird der doppelte Druck $= 2 . h . lm$, ihn in den Raum $= \frac{1}{2} A$, der dreifache Druck ihn in den Raum $= \frac{1}{3} A$ zusammen drängen (vergleiche in der Folge §. 54.).

§. 18. Diese Regel findet bei den Verdichtungen und Verdünnungen der Luft, welche wir mit Genauigkeit beobachten können, statt. Es ist zwar wahrscheinlich, daß es auch für die Luft eine Grenze der größesten Verdichtung geben mag, wo sie durch größere Kräfte nicht mehr in einen engern Raum gebracht werden kann, und daß es eine Grenze der größesten Verdünnung geben mag, wo sie selbst bei ganz verschwindendem Drucke sich nicht weiter ausdehnt; aber diese Grenzen scheinen bei unsern Versuchen lange nicht erreicht zu werden, und wir reden daher von jener Regel als von einer allgemein gültigen.

§. 19. Aufgabe. Es ist der Druck gegeben, mit welchem ein elastisch flüssiger Körper zusammen gedrückt wird; die Dichtigkeit zu bestimmen, bei welcher das Gleichgewicht eintreten kann.

Auflösung. Wenn man weiß, daß der flüssige Körper die Dichtigkeit $= b$ annimmt, wenn jedes Theilchen mit einer Kraft gleich dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe $= a$ gedrückt wird: so wird für den Druck $= h \,.\, lm$ auf den Kolben von der Grundfläche $= lm$, das Gleichgewicht bestehen, wenn die Dichtigkeit

$$= \frac{b \,.\, h}{a} \text{ ist.}$$

h bedeutet hier die Höhe einer Wassersäule, deren Gewicht den Druck abmißt, so wie a es in dem anderen Falle that.

§. 20. Anmerkung. Daß die Dichtigkeit der Luft nicht bloß vom Drucke, sondern auch von der Wärme abhängt, werden wir nachher näher betrachten: hier beziehen wir alles auf sonst gleiche Umstände, also auf einen bestimmten Wärmegrad.

§. 21. Bemerkung. Die Gesetze, nach welchen die Luft mit Hülfe der Luftpumpe verdünnt und verdichtet wird, hängen fast gar nicht von der Schwere der Luft ab, und deshalb werde ich sie hier abhandeln. Allerdings ist die Luft schwer; aber der Uebergang der Luft aus einem luftvollen Gefäße in ein luftleeres, hängt fast gänzlich von ihrer Elasticität und auf keine merkliche Weise von ihrem Gewichte ab.

Das Wesentlichste bei der Luftpumpe ist, daß der Raum AB (Fig. 103.) mit einem Cylinder DE, aus welchem man die Luft wegschaffen kann, verbunden ist. Will man die Luft in AB verdünnen, so muß bei f ein

Hahn sein, der der äußern Luft den Zugang verschließt, und die zwischen D und dem Kolben GH enthaltene Luft muß durch eine Oeffnung bei f einen Ausgang ins Freie finden. Gewöhnlich ist der Hahn f so gebohrt, daß er bei einer Stellung einen freien Durchgang der Luft von dem Raume DH in die freie Luft gestattet, und daß er bei einer zweiten Stellung, wenn man ihn um einen Quadranten dreht, einen freien Durchgang der Luft von DH nach AB giebt; während der eine Durchgang geöffnet ist, ist der andre verschlossen.

Will man die Luft in AB verdünnen, so dreht man den Hahn f so, daß die Luft DH mit der äußeren Luft in Verbindung, der Durchgang nach AB aber gesperrt ist; man bringt nun den Kolben ganz nahe an DI, und öffnet, wenn das geschehen ist, den Durchgang von AB nach dem Cylinder. Wird nun der Kolben nach E zu zurückgezogen, so strömt die Luft, vermöge ihrer Elasticität aus AB durch den Hahn f in den Cylinder über, und in diesem ganzen Raume ist eine verdünnte Luft, die mit der äußeren Luft in keiner Verbindung steht. Man dreht jetzt den Hahn f so, daß AB ganz verschlossen ist, und die Luft in DE mit der äußeren in Verbindung steht; die Luft in AB bleibt also verdünnt, während der Kolben an DI geschoben, und alle Luft aus dem Cylinder ausgetrieben wird. Jetzt öffnet man wieder den Durchgang von AB nach dem Cylinder, damit beim Rückgange des Kolbens nach E zu die verdünnte Luft in AB sich in den Cylinder verbreite und folglich sich noch mehr verdünne. Und so setzt man die Arbeit fort, indem man immer beim Vorwärtsgehen des Kolbens gegen DI zu, die Verbindung mit der freien Luft öffnet, und dagegen die Verbindung mit AB öffnet, wenn man den Kolben nach E hin zurückzieht.

Soll die Luft in AB verdichtet werden, so verfährt man umgekehrt. Man öffnet die Verbindung mit der freien Luft, während der Kolben nach E zurückgeht; dann schließt man den freien Ausgang der Luft bei f und läßt ihr nur den Weg nach AB offen, damit sie, wenn man den Kolben gegen DI zu schiebt, genöthigt werde, sich in das Gefäß AB zu drängen und sich folglich da zu verdichten. Beim Zurückgehen des Kolbens nach E ist AB geschlossen, und neue Luft tritt von außen in den Cylinder, die man abermals, indem man den Kolben gegen DI treibt, zwingt, in das Gefäß AB zu gehen, indem man bloß die dorthin führende Oeffnung des Hahnes f offen läßt.

§. 22. Aufgabe. Die Größe des inneren Raumes (Fig. 103.) AB, in welchem die Luft verdünnt werden soll, ist gegeben, nebst der Größe des cylindrischen Raumes, welcher beim völligen Rückgange des Kolbens sich mit Luft aus dem Gefäße füllt; zu bestimmen, bis zu welchem Grade die Verdünnung der Luft getrieben ist, nachdem man auf die gehörige Art den Kolben n mal zurückgetrieben hat.

Auflösung. Es sei der innere Raum des Gefäßes AB bis an den Hahn f durch $= a$, der innere Raum des Cylinders, welcher sich beim Rückgange des Kolbens mit Luft aus dem Gefäße füllt, durch $= b$ ausgedrückt, so wird beim ersten Zurückgehen des Kolbens die Luft, welche den Raum $= a$ einnahm, als sie im Zustande der ursprünglichen Dichtigkeit war, jetzt in den Raum $= a + b$ ausgedehnt. Setze ich also ihre ursprüngliche Dichtigkeit $= D$, so ist nach einmaligem Zurückziehen des Kolbens die Dichtigkeit $= \frac{a}{a+b} . D$.
Die im Cylinder enthaltene Luft wird jetzt heraus getrieben, und die noch im Raume $= a$ enthaltene Luft dehnt sich beim zweiten Zurückgehen des Kolbens wieder in den Raum $= a + b$ aus; ihre Dichtigkeit nach dem zweiten Kolbenzuge verhält sich also zu der nach dem ersten Kol-

benzuge, wie a zu $a+b$, und die Dichtigkeit ist folglich nach dem zweiten Kolbenzuge $= \frac{a^2}{(a+b)^2} D$. Aus ähnlichen Gründen ist sie nach dem dritten Kolbenzuge

$$= \frac{a^3}{(a+b)^3} D;$$

nach dem n^{ten} Kolbenzuge $= \frac{a^n}{(a+b)^n} D$.

§. 23. So würde es sein, wenn im strengsten Sinne alle zwischen f und dem Kolben befindliche Luft bei dem Fortschieben des Kolbens gegen DI herausgetrieben würde. Ganz vollkommen geschieht das nie; sondern es ist fast unvermeidlich, daß nicht ein kleiner Raum bei f, der sogenannte schädliche Raum, mit Luft von der natürlichen Dichtigkeit $= D$ gefüllt bleibe, und die Verdünnung schwäche. Heißt die Größe dieses Raumes $= c$: so ist es beim ersten Kolbenzuge die Luft des Raumes $= a+c$, die sich in den Raum $= a+b+c$ ausdehnt und nach dem ersten Kolbenzuge ist die Dichtigkeit $= \frac{a+c}{a+c+b} D$; beim zweiten Kolbenzuge dehnt sich die Luft in dem Raume $= c$, deren Dichtigkeit $= D$ und die Luft im Raume $= a$, deren Dichtigkeit $= \frac{a+c}{a+c+b} . D$ war, in den Raum $= a+c+b$ aus. Die ganze Luftmasse war also, als der Kolben an DI anlag,

$$= c . D + a . \frac{a+c}{a+c+b} . D,$$ und diese wird beim zweiten Kolbenzuge in den Raum $= a+b+c$ ausgedehnt. Heißt also jetzt ihre Dichtigkeit $= d'$, so ist

$$(a+b+c) . d' = c . D + a . \frac{a+c}{a+c+b} . D,$$

und $d' = \frac{c}{a+b+c} D + \frac{a(a+c) . D}{(a+b+c)^2}$.

Wenn der Kolben zum zweitenmale an DI geschoben ist, so ist im Raume $= a$ Luft von der Dichtigkeit

$= d'$, die in diesem Raume enthaltne Luftmasse $= a . d'$; die im schädlichen Raume $= c$ enthaltne Luftmasse hat die Dichtigkeit $= D$, ihre ganze Masse ist $= c . D$, also die gesammte Luftmasse

$$= c . D + a . d' = c . D + \frac{a . c . D}{a+b+c} + \frac{a^2 (a+c) D}{(a+b+c)^2},$$

indem diese sich in den Raum $= a+b+c$ ausdehnt, nimmt sie die Dichtigkeit $= d''$ an und $d'' . (a+b+c)$ ist jener Luftmasse gleich, also

$$d'' = \frac{c . D}{a+b+c} + \frac{a . c . D}{(a+b+c)^2} + \frac{a^2 (a+c) D}{(a+b+c)^3};$$

Wenn abermals der Kolben nach DI geschoben ist, so ist die vorhandene Luftmasse $= a . d'' + c . D$, und diese erlangt beim vierten Kolbenzuge die Dichtigkeit $= d'''$ und es ist $d''' . (a+b+c) = a . d'' + c . D$,

$$\text{also } d''' = \frac{c . D}{a+b+c} + \frac{a . c . D}{(a+b+c)^2} + \frac{a^2 c . D}{(a+b+c)^3} + \frac{a^3 (a+c) D}{(a+b+c)^4},$$

$$\text{oder } d''' = c . D \left(\frac{1}{a+b+c} + \frac{a}{(a+b+c)^2} + \frac{a^2}{(a+b+c)^3} + \frac{a^3}{(a+b+c)^4} \right) + \frac{a^4 D}{(a+b+c)^4}$$

und nach n Kolbenzügen die Dichtigkeit $= \delta =$

$$c . D \left(\frac{1}{a+b+c} + \frac{a}{(a+b+c)^2} + \frac{a^2}{(a+b+c)^3} + + + + \frac{a^{n-1}}{(a+b+c)^n} \right) + \frac{a^n D}{(a+b+c)^n}.$$

Wegen des schädlichen Raumes läßt sich also die Verdünnung nicht bis zu jedem willkürlichen Grade treiben; denn die Summe der im ersten Gliede dargestellten geometrischen Reihe ist, je größer n wird, desto näher (Arithmetik §. 211.)

$= \frac{1}{(b+c)}$, also bleibt, wenn auch das letzte Glied ganz unbedeutend wird doch $\delta = \frac{c}{b+c} \cdot D$ und dieses ist die Grenze der Verdünnung.

§. 24. Warum dies die Grenze der Verdünnung ist, läßt sich auch so übersehen. Wenn bloß die im schädlichen Raume enthaltene Luft, deren Masse $= c \cdot D$ ist, sich in den Raum $= b + c$ vertheilt, so bleibt noch ihre Dichtigkeit $= \frac{c}{b+c} \cdot D$. Wäre also die Luft in AB schon so weit verdünnt, so würde beim Zurückgehen des Kolbens gar keine Luft mehr durch den Hahn in den Cylinder strömen, und also das Spielen des Kolbens ohne allen Erfolg fortgesetzt.

§. 25. Aufgabe. Die Größe des innern Raumes AB, in welchem die Luft verdichtet werden soll $= a$, und der Raum, welcher im Cylinder bei jedem Kolbenzuge frei wird, $= b$, ist bekannt; man verlangt den nach n maligem Kolbenschube zu Stande gebrachten Grad der Verdichtung zu bestimmen.

Auflösung. Wenn der Kolben beim Anfange der Operation ganz nach E zurückgezogen ist, so wird beim ersten Kolbenschube gegen DI zu alle in $a + b$ befindliche Luft von der natürlichen Dichtigkeit $= D$ in den Raum $= a$ zusammengedrängt, wo sie folglich die Dichtigkeit $d' = \frac{(a+b)}{a} D$ erlangt.

Hier bleibt die Luftmasse $= a \cdot d' = (a + b) D$ verschlossen während des Rückgangs des Kolbens; aber beim zweiten Kolbenschube wird die in den Cylinder eingelassene Luftmasse $= b \cdot D$ mit jener zusammen in den Raum $= a$ gedrängt, die Dichtigkeit wird also $= d'' = \frac{(a+2b)}{a} D$;

nach dem dritten Kolbenschube $= d''' = \left(\frac{a+3b}{a}\right) D$,

nach dem nten Kolbenschube $= \delta = \left(\frac{a+nb}{a}\right) D$.

§. 26. Auch hier hat der schädliche Raum etwas Einfluß; aber dieser ist weniger erheblich, weshalb ich dabei nicht verweilen will.

Anmerkung. Ueber die mannigfaltigen Einrichtungen und Verbesserungen der Luftpumpe viel zu sagen, ist hier der Ort nicht. Die physicalischen Wörterbücher von Gehler und Fischer geben Nachrichten davon, auch findet man manche neuere Verbesserung in Gilberts Annalen der Physik beschrieben.

Zweiter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte tropfbar flüssiger Körper, auf welche die Schwere wirkt.

§. 27. Bemerkung. Wenn in einer engen, verticalen Röhre (Fig. 104.) Wasser enthalten ist, dessen einzelne Theilchen durch die Schwere niederwärts getrieben werden, so drückt offenbar das oberste Theilchen a mit seinem ganzen Gewichte auf das zunächst unter ihm liegende, und nun leidet nicht bloß das Theilchen b einen Druck, gleich dem Gewichte des a, sondern da der Druck nach allen Richtungen eben so groß ist, so leidet auch die Wand bei b auf jedem ihrer Theile einen diesem Gewichte gemäßen Druck. Mit diesem Drucke verbindet sich das Gewicht des Theilchens b, und folglich wird jeder Punct des Theilchens c einen Druck leiden, der gleich ist dem Gewichte einer über der gedrückten Fläche als Basis stehenden Wassersäule von der Höhe der kleinen Säule ab, und eben so ließe sich für alle folgenden Theilchen fortschließen (§. 11.).

Wäre die eben betrachtete Röhre bei f mit einem weiteren, gleichfalls mit Wasser gefüllten Gefäße AB verbunden; so würde offenbar bei f das Gewicht der ganzen verticalen Wassersäule eben so drücken, wie in §. 3. die auf den Kolben wirkende Kraft, und das Wasser in der obersten Schichte AC des Gefäßes wird also, schon ohne Rücksicht auf seine eigne Schwere, mit einer Gewalt, gleich dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe af gedrückt, und diesen Druck leidet auch jedes Theilchen der Wand neben dieser Schichte.

§. 28. Lehrsatz. Wenn ein tropfbarer Körper, auf welchen die Schwere wirkt, im Gleichgewichte ist: so ist seine freie, nicht durch ein Gefäß zurückgehaltene Oberfläche eine horizontale Ebne.

Beweis. Wenn man sich den flüssigen Körper in dünne verticale Säulen zerlegt denkt, wie ac (Fig. 105.): so übt eine solche Säule ac in c einen Druck aus, der dem Gewichte der Säule ac gleich ist. Mit dieser Gewalt wird aber nicht bloß ihr unterer Querschnitt c gedrückt, sondern auch die neben c liegenden Theilchen leiden einen eben so großen Druck, jede bestimmte Fläche nämlich einen Druck gleich dem Gewichte einer über ihr errichteten Säule des Flüssigen von der Höhe ac. Uebte also nicht die benachbarte Säule bd einen eben so großen Gegendruck aus, so würde bei c und d das Gleichgewicht nicht bestehen; die Säule bd muß daher eben so hoch sein, oder a und b, und so alle Puncte der Oberfläche AB, müssen in einer horizontalen Ebne liegen.

§. 29. Aufgabe. Das grade prismatische Gefäß ABCD (Fig. 106.), dessen Boden CD horizontal steht, ist bis an AB mit Wasser gefüllt, man sucht den Druck, welchen der Boden des Gefäßes leidet.

Auflösung. Auf jeden Punct e des Bodens drückt das ganze Gewicht der über demselben stehenden Wassersäule. Jeder Theil der Bodenfläche leidet also einen Druck gleich dem Gewichte einer über diesem Theile der Fläche errichteten Wassersäule von der Höhe $= AC$. Heißt also die Größe der Bodenfläche $= f^2$, und die Höhe $AC = h$, so ist $h \,.\, f^2$ der gesammte Druck, den der Boden leidet, wenn man das Gewicht einer Wassermasse, die der als Körpermaaß dienenden Einheit gleich ist, = 1 setzt.

§. 30. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, welchen der horizontale Boden AB (Fig. 107.) irgend eines Gefäßes leidet, wenn es bis CD mit Wasser gefüllt ist.

Auflösung. Der Druck, welchen der Boden leidet, ist so groß, als das Gewicht der ganzen prismatischen Wassersäule ABFE, deren Grundfläche der Boden ist, und deren Höhe gleich ist dem senkrechten Abstande der beiden horizontalen Flächen AB, CD von einander.

Beweis. Denn wenn auch ein Theil des Gefäßes so wie CDGH enger ist, so wirkt doch das Gewicht des in demselben enthaltenen Wassers auf das darunter befindliche eben so wie in Fig. 100. der Kolben, und bringt in der ganzen, wenn gleich viel größern Schicht GHki schon ohne Rücksicht auf das eigene Gewicht derselben einen Druck hervor, der durch die Höhe DH der Wassersäule CDHG ausgedrückt wird. Obgleich also die Fläche ik viel größer als die Fläche GH ist, so leidet doch jene den ganzen Druck einer Wassersäule von der Höhe il; und da diese Schlüsse sich für jede folgende Schicht fortführen lassen, so erhellt, daß der horizontale Boden allemal den angegebenen Druck leidet.

§. 31. Nach den von §. 8 bis 13. mitgetheilten Erläuterungen darf ich wohl nicht fürchten, daß dieser, sonst dem Anfänger paradox scheinende Satz noch einige Dunkelheit haben könne. Wer indeß noch immer sich nicht darin finden könnte, der erwäge, daß der Druck auf den Boden theils von der unmittelbar darauf ruhenden Last, theils aber von der Mittheilung des (Fig. 108.) auf ab ausgeübten Gegendruckes herrührt; denn indem das Wasser sich gegen ab drängt, was nothwendig geschieht, wegen des Druckes, den das in ef befindliche Wasser ausübt, so leiden ja die an ab liegenden Wassertheilchen einen Druck, der sich rückwärts fortpflanzt, und in Verbindung mit dem Gewichte von ad den Druck auf den Boden hervorbringt.

Wenn zwischen den beiden horizontalen Flächen ab', cd, Stahlfedern eingeklemmt sind, die sich vertical auszudehnen streben: so sieht jeder sogleich, daß cd nicht bloß vermöge des Gewichtes der Stahlfedern einen Druck leidet, sondern außerdem noch den gesammten Druck aushält, den die Spannung der Federn sowohl gegen ab als gegen cd hervorbringt. Und etwas ziemlich Aehnliches findet hier statt.

§. 32. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, welchen irgend ein Punct m der Wand des Gefäßes leidet, wenn dieses bis an CD (Fig. 107.) mit Wasser gefüllt ist.

Auflösung. Wenn man sich um den Punct m eine sehr kleine Fläche $= g^2$ begrenzt denkt: so leidet sie einen senkrechten Druck, welcher gleich ist dem Gewichte einer Wassersäule von der Grundfläche $= g^2$ und von der Höhe $Em = h$, gleich der verticalen Tiefe des Punctes m unter der Oberfläche CD des Wassers.

Beweis. Jede horizontale Wasserschichte mn wird von allen höher liegenden so gedrückt, als wenn das ganze Wasserprisma, das diese horizontale Schichte zur Basis hat und sich bis an des Wassers Oberfläche erstreckt, mit Wasser gefüllt, auf ihr lastete; dieser Druck pflanzt sich nach allen Richtungen fort, und ist folglich auf jeden gleichen Theil der Wand in eben der Höhe, in welcher jene Wasserschicht sich befindet, eben so groß, und folglich bestimmt die Tiefe des Punctes m unter der Oberfläche CD die Höhe der Wassersäule, welche den Druck auf m angiebt.

§. 33. Lehrsatz. Wenn eine gekrümmte Röhre (Fig. 109.) ABC mit Wasser gefüllt ist: so liegen die Oberflächen des Wassers DE, FG in den beiden Schenkeln der Röhre beim Gleichgewichte in einerlei Horizontal-Ebne.

Beweis. Denkt man sich irgendwo, etwa bei m eine Wand, die beide Schenkel trennte: so leidet der Punct m von dem Wasser in Dm einen Druck, welcher seiner Tiefe mn unter der Oberfläche DE proportional ist. Befände sich die Oberfläche FG nicht so hoch, so würde m von dem Wasser in Gm weniger gedrückt, und es könnte daher, wenn keine Wand bei m die Bewegung hindert, die Ruhe nicht bestehen, sondern das Wasser würde bei m sich nach der Seite hin bewegen, wohin der stärkere Druck es treibt. Das Gleichgewicht besteht also nur bei gleicher Höhe der Oberfläche DE, FG.

§. 34. Auf den Schlüssen des 30. und 32. §. beruht das ehemals sehr berühmte Experiment mit dem hydrostatischen Hebel, wo sehr große Gewichte durch eine unbedeutende Wassermasse gehoben werden. Man verbindet nämlich (Fig. 110) eine enge aber hohe, verticale Röhre AB mit einem weiten Gefäße, das überall an den Seiten und zugleich oben mit dem horizontalen Deckel CD fest verschlossen ist. Füllt man nun das untere Gefäß und die damit verbundene Röhre ganz bis an A mit Wasser, so leidet CD den ganzen Druck aufwärts, den das Gewicht einer über CD stehenden bis an A reichenden Wassersäule ausüben würde.

Ist z. B. AB 6 Fuß hoch und 2 Zoll weit, so enthält sie nur etwa 226 Cubiczoll oder ohngefehr 9 Pfund Wasser; die Fläche CD aber leidet, wenn sie 3 Fuß im Durchmesser hat, einen Druck von 2960 Pfunden. Bringt man statt des festen Bodens CD ein wasserdicht übergespanntes Leder an, so leidet jeder Raum von 2 Zoll Durchmesser eben den Druck, welchen die ganze Wassermasse AB unmittelbar ausüben könnte u. s. w.

§. 35. Hieraus erklärt sich der große Nachtheil, den es hervorbringt, wenn am Boden einer Schleuse dem Wasser sich unterwärts ein Zugang öffnet. Denn steht außerhalb der Schleusenthüren das Wasser 20 Fuß hoch, und ist innerhalb die Höhe vielleicht nur 4 Fuß, so wird jeder Quadratfuß des Schleusenbodens mit einer Wasserhöhe von 16 Fußen, das ist mit dem Gewichte von 16 Cubicfußen Wasser oder mehr als 1100 Pfund gedrückt.

§. 36. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, welchen die ganze verticale Wand AB (Fig. 111.) des bis an AC mit Wasser gefüllten Gefäßes ABC leidet.

Auflösung. Wenn die horizontale Breite der Wand $= b$, ihre Höhe von B bis an die Oberfläche des Wassers $= h$ heißt, so ist der Druck, welchen die ganze Wand leidet $= \frac{1}{2} bh^2$.

Beweis. Man stelle sich die ganze Wand in n gleiche, horizontale Streifen zerlegt vor: so ist die Höhe jedes horizontalen Streifens $= \frac{1}{n} h$, und der Druck auf den obersten größer als o und kleiner als $b \cdot \frac{1}{n} h \cdot \frac{1}{n} h$, denn das letztere wäre der Druck, welchen er litte, wenn der ganze Streifen Ae sich in der Tiefe $= \frac{1}{n} h$ unter der Oberfläche befände. Aus denselben Gründen läßt sich übersehen, daß so wie wir fanden,

für den ersten Streifen, der Druck > 0; $< \frac{b \cdot h^2}{n \cdot n}$;

auch für den zweiten ist, der Druck $> \frac{b \cdot h^2}{n \cdot n}$; $< \frac{2b \cdot h^2}{n \cdot n}$;

für den dritten, der Druck $> \frac{2b \cdot h^2}{n \cdot n}$; $< \frac{3b \cdot h^2}{n^2}$;

für den vierten, der Druck $> \frac{3b \cdot h^2}{n^2}$; $< \frac{4b \cdot h^2}{n^2}$;

für den n^{ten}, d. Dr. $> \frac{(n-1) b \cdot h^2}{n^2}$; $< \frac{n \cdot b \cdot h^2}{n^2}$;

Also der Druck auf die ganze Wand

größer als $\frac{b \cdot h^2}{n^2} (1 + 2 + 3 + 4 + + + (n-1))$

und kleiner als $\frac{b \cdot h^2}{n^2} (1 + 2 + 3 + 4 + + + n)$,

das ist größer als $\frac{1}{2} \frac{b \cdot h^2}{n} (n-1)$ (Arithm. §. 156.);

und kleiner als $\frac{1}{2} \frac{b \cdot h^2}{n} (n+1)$.

Da nun dieses gilt, man mag n nehmen so groß man will, und der gesammte Druck immer zwischen jene Grenzen fällt, so ist er $= \frac{1}{2}$ b h².

Diese Grenzen wurden nämlich dadurch gefunden, daß wir zuerst uns jeden Streifen nur in derjenigen Tiefe dachten, wo sich seine obere Seite befindet, also den Druck zu klein angaben; dann aber ihn in der Tiefe dachten, wo sich seine untere Seite befindet, also den Druck zu groß angaben.

§. 37. Man kann diese Auflösung auch in einer andern Form darstellen. Da in jeder Tiefe, z. B. in m, der Druck der Höhe der darüber stehenden Wassersäule proportional ist: so kann man den verhältnißmäßigen Druck in allen Puncten durch Linien darstellen. Trägt man nämlich ef = Ae, mn = Am senkrecht auf Am auf, so stellt mn die Höhe der in m, fe die Höhe der in e drückenden Wassersäule dar, und da alle diese Höhenlinien ef, mn sich in der Seite AK des gleichschenklichten rechtwinklichten Dreiecks AKB endigen, so stellt das Dreieck ABK die Summe aller der auf AB drükkenden Wassersäulchen ef, mn u. s. w. dar; und da dieses Dreiecks Inhalt $= \frac{1}{2}$ AB . BK $= \frac{1}{2}$ h² ist: so leidet die Wand, deren Breite = b den gesammten Druck $= \frac{1}{2}$ b h², als Inhalt des Prisma's ABKG. Denn der Druck auf den Streifen Aed ist gleich dem Gewichte des über Aef errichteten Prisma's von der Höhe = b; der Druck auf den Streifen mr ist gleich dem Gewichte eines Prisma's von der Grundfläche mr und Höhe mn, oder, was eben dasselbe ist, gleich einem Prisma über der Grundfläche nmqs von der Höhe qr = b u. s. w.

§. 38. Der Schwerpunct der parallelogrammischen Wand liegt in der Tiefe $= \frac{1}{2}$ h unter der Oberfläche; man findet also den gesammten Druck auf die Wand, wenn man den Inhalt desjenigen Wasserkörpers sucht, dessen Grundfläche der Wand gleich und dessen Höhe der Tiefe des Schwerpuncts unter dem Wasserspiegel gleich ist.

§. 39. Lehrsatz. Man findet für jede Gestalt der Wand den gesammten Druck, welchen sie leidet, wenn man das Gewicht desjenigen aus der flüssigen Masse gebildeten Körpers sucht, dessen Grundfläche die Oberfläche der Wand und dessen Höhe die Tiefe des Schwerpunctes der Wandfläche unter dem Wasserspiegel ist.

Beweis. Wenn man irgend einen in der Tiefe $= h$ unter dem Wasserspiegel liegenden schmalen horizontalen Streifen der Wand betrachtet, dessen Quadratinhalt $= f^2$ ist, so leidet er den Druck $= f^2 . h$; eben so fände man $'f^2 h'$ als den Druck für einen andern Streifen, $''f^2 h''$ für einen dritten u. s. w. Der gesammte Druck wird daher hier eben so ausgedrückt wie das Moment aller Theile der Wand in Beziehung auf eine in der Oberfläche des Wassers liegende Drehungsaxe (vergl. Statik §. 94. 95. 146.) und dieses Moment ist eben so groß als das Gewicht der ganzen Wand in die Entfernung des Schwerpunctes von der Drehungsaxe multiplicirt. Also ist dieser letztere Ausdruck auch hier der richtige für den Druck, welchen das Wasser auf die Wand ausübt, nur mit dem Unterschiede, daß man hier bloß die Größe der ganzen Wand in der Formel verstehen muß, und als Gewichtseinheit das Gewicht eines Cubicfußes oder der Körpereinheit des drückenden Fluidi zu betrachten hat.

§. 40. Aufgabe. Die Gewalt zu bestimmen, mit welcher der Druck des Wassers in einer cylindrischen Röhre, diese zu zersprengen strebt.

Auflösung. Der Kreis ABCD (Fig. 112.) stelle den Querschnitt der Röhre vor. Wir wollen uns vorstellen, die Röhre sei in allen übrigen Puncten überflüssig stark, und bloß in den auf einerlei Durchmesser liegenden Stellen A und B nur grade so stark als zum Widerstande gegen den Druck des Wassers erforderlich ist. Würde nun der halbe Cylinder ADB unverrückt festgehalten: so ist es so gut, als ob der Druck des Wassers auf ACB diese Hälfte nach einer auf AB senkrechten Richtung von jener loszureißen strebte, und man muß daher den Druck auf jedes Theilchen mn der Wand nach Richtungen auf AB senkrecht und damit parallel zerlegen; der gesammte auf AB senkrechte Druck giebt die Kraft, welche die Röhre bei A und B zu zerreißen strebt. Der Druck auf mn sei $= p$, und durch pq dargestellt, so ist der auf AB senkrechte Theil dieses Druckes $= ps$ $= p \cdot \mathrm{Cos}\, qps = \frac{p \cdot no}{mn}$, oder da der Druck des Wassers auf den Bogen mn diesem Bogen selbst proportional $= h \cdot mn \cdot a$ ist, wenn die Tiefe unter dem Wasserspiegel $= h$ und die Breite des Streifens $= a$, so ist der entsprechende auf AB senkrechte Druck $= h \cdot a \cdot no$. Es läßt sich leicht übersehen, daß der gesammte Druck, den alle Theile des Halbkreises leiden, auf diese Weise zerlegt, einen auf AB senkrechten Druck giebt, der $= h \cdot a \cdot AB$ ist, oder daß der ganze Druck, den der halbe Cylinder ACB leidet, sich zu der Kraft, mit welcher derselbe den Cylinder bei A und B zu zerreißen strebt, verhält wie $\pi \cdot r$ zu $2r$. Jeder der Puncte B und B muß also einzeln betrachtet der Kraft $= a \cdot h \cdot r$ widerstehen, und hiernach muß die Dicke der Röhre und ihre Festigkeit bestimmt werden.

Anmerkung. Einige hierher gehörige Erfahrungen führt Langsdorf im Lehrbuch der Hydraulik S. 131. an.

§. 41. Bemerkung. Wenn man sich eine dem Drucke des Wassers ausgesetzte verticale Wand denkt, wie Fig. 111., so könnte man fragen, wo man eine Horizontallinie qr als Axe, um welche die Wand sich drehen dürfe, festhalten müsse, damit der Wasserdruck die Wand in Beziehung auf diese Axe im Gleichgewichte halte. Oder man könnte fragen, wo muß ein auf die Wandfläche senkrecht drückendes Gewicht, dem gesammten Wasserdrucke gleich, angebracht werden, um in Beziehung auf irgend eine horizontale Axe BG in der Ebne der Wand eben das Drehungsmoment hervorzubringen, welches der Wasserdruck selbst in Beziehung auf eben die

Axe hervorbringt? — Wenn qr die Horizontallinie ist, in welcher jenes Gewicht wirken müßte, so sagt man, in qr liege der Mittelpunct des Druckes.

§. 41*. Aufgabe. Für eine verticale, parallelogrammische Wand ABG (Fig. 111.) den Mittelpunct des Druckes zu finden.

Auflösung. Er liegt, wenn die Höhe vom Boden BGF bis an den Wasserspiegel $= h$ ist, in der Höhe $= \frac{1}{3} h$ über dem Boden.

Beweis. Wenn man das Prisma ABKG so construirt, wie §. 37. ergiebt, so leidet jede Schichte der Wand einen Druck gleich dem Gewichte des horizontal neben ihm liegenden Querschnittes des Prisma's; die Momente der einzelnen Pressungen sind also eben so groß, als wenn der Druck des ganzen Prisma's in seinem Schwerpuncte, das ist (Statik §. 138.) in der Höhe $= \frac{1}{3} h$ vereiniget wäre.

§. 42. Wenn eine verticale Mauer dem Drucke des Wassers widerstehen soll: so könnte man hiernach leicht die zu einer hinreichenden Stabilität erforderlichen Abmessungen bestimmen, indem es so gut ist, als ob in der Höhe $= \frac{1}{3} h$ eine Kraft dem ganzen Wasserdrucke gleich horizontal wirkte.

Hierher gehörige practische Anwendungen theilt Woltman mit in seinen Beiträgen zur hydraulischen Architectur 2. B. S. 80.

§. 43. Es kommen manchmal Fälle vor, wo ein höher liegendes Land seine Entwässerungsgräben durch niedrigere Gegenden ziehen muß, die bei ganz freiem Zusturze des Wassers würden überschwemmt werden. Hier muß man daher Einrichtungen treffen, um bei hohem Wasser den Zufluß von dem höhern Lande her abzuhalten. Man pflegt in solchen Fällen eine gewisse Höhe zu bestimmen, bis zu welcher das Wasser schon muß gefallen sein, ehe das höhere Land seiner Entwässerung freien Lauf lassen darf, und da wäre es allenfalls möglich, durch eine verticale Klappe, die um eine horizontale Axe beweglich sich öffnen könnte, den Abfluß zu hemmen. Die Axe müßte nämlich so liegen, daß der Mittelpunct des Drukkes zu der Zeit, wo das Wasser abfließen dürfte, an derjenigen Seite der Axe läge, wo der Druck ein Oeffnen bewirkt, zu der Zeit hingegen, wo der Abfluß gehemmt werden soll, an der andern Seite der Axe, wo die Klappe sich gegen einen festen Widerstand stemmt.

Bedeutet (Fig. 113.) EF die ohngefehre Höhe des Wassers im niedrigen Lande, DG den Wasserstand im höhern: so muß, wenn der Wasserdruck keine niedrigern Puncte als H treffen kann, die Höhe AH = $\frac{1}{3}$ HD sein, damit die Klappe grade im Gleichgewichte bleibe, wenn die horizontale Axe in A ist. Steigt das Wasser höher als D, so liegt der Mittelpunct des Druckes oberhalb A und die Klappe drängt sich gegen H zu, ohne sich zu öffnen; sinkt es dagegen unter D, so ist das Moment des Druckes auf AE größer als auf AD, und das Wasser fließt nach F zu ab.

Diese Benutzung der Lehre vom Mittelpuncte des Druckes wird indeß wohl nicht leicht anwendbar sein, da Reibung, Einrosten der Zapfen und dergleichen bedeutende Ungleichheiten hervorbringen mögten.

§. 44. Aufgabe. Ein Gefäß (Fig. 114.) ist mit flüssigen Körpern verschiedener Art gefüllt, man sucht den Druck gegen Boden und Wände für den Zustand des Gleichgewichts.

Auflösung. Die Körper legen sich in dem Gefäße ABCD (Fig. 114.) in Schichten, die durch horizontale Oberflächen begrenzt sind. Wiegt nun ein Cubicfuß des obern Flüssigen = G, und ist die Höhe des Raumes, den er einnimmt = H, so ist der Druck, den jeder Theil = f^2 der Fläche GH leidet, wo die beiden obern Fluida einander begrenzen, gleich dem Gewichte G . f^2 . H. Für das Gewicht eines Cubicfußes des zweiten Körpers, der sich zwischen GH und IK befindet, setze ich = g; die Höhe, welche er einnimmt, = h, so ist für jeden Theil = f^2 der Grundfläche IK, der Druck

$= f^2 (G . H + g . h)$. Und endlich wenn des untern Fluidi Gewicht durch $= \gamma$, Höhe durch $= \vartheta$ ausgedrückt wird, der Druck auf einen im Boden DC liegenden Flächentheil $= f^2$,

$$= f^2 (G . H + g . h + \gamma . \vartheta).$$

Ein Theil der Seitenwand, dessen Quadratinhalt $= f^2$ ist, wird, wenn er in der Tiefe $= k$ unter IK liegt, von einem Gewichte $= f^2 (G . H + g . h + \gamma . k)$ gedrückt und so in allen ähnlichen Fällen.

§. 45. Aufgabe. Die gekrümmte Röhre AD (Fig. 115.) ist mit einem schweren Flüssigen, dessen Cubicfuß $= G$ wiegt, bis an die Horizontallinie AD gefüllt; man gießt auf AB einen leichtern Körper, dessen Cubicfuß $= g$ wiegt, bis zu einer Höhe $= h$ oberhalb der Oberfläche des vorigen; bis zu welcher Höhe wird die Oberfläche CD steigen müssen, damit das Gleichgewicht eintrete?

Auflösung. Gesetzt die Oberfläche AB sänke bis EH und die gegenüber liegende Oberfläche CD stiege bis FG, so daß der Unterschied der Höhen $= x$ wäre, das ist die senkrechte Höhe $GK = x$: so leidet offenbar jedes Theilchen der Oberfläche EH einen Druck, der durch $= G . x$ ausgedrückt, oder durch die Höhe einer Wassersäule $= G . x$ abgemessen wird, wenn ein Cubicfuß Wasser als Einheit der Gewichte angenommen wird. In der Röhre IH hingegen leidet die Oberfläche EH einen Druck, welcher durch die Höhe $= g . h$ einer Wassersäule abgemessen wird. Beide Pressungen müßten offenbar gleich sein (§. 28. 33.), also $x = \frac{g}{G} . h$.

§. 46. Rechnet man das Quecksilber 14mal so schwer als Wasser, so würde, wenn von EH bis FG Quecksilber sich befindet, und Wasser im Schenkel IH aufgegossen wäre, $GK = \frac{1}{14} h$ sein. Hätte man also diese Röhre an einem Wasserbehälter angebracht, in welchem man die Höhe über EH, bis zu welcher er gefüllt ist, nicht bequem abmessen könnte, so bedürfte es nur der Abmessung der mit dem Wasserdrucke das Gleichgewicht haltenden Quecksilbersäule GK, um die Wasserhöhe zu bestimmen. Eine von EH bis an des Wassers Oberfläche reichende Wassersäule wiegt bei gleicher Grundfläche eben so viel als die von K bis an G reichende Quecksilbersäule.

§. 47. Lehrsatz. Obgleich jeder Punct im Boden des mit Wasser gefüllten Gefäßes ABCD (Fig. 107.) einen Druck leidet, welcher dem Gewichte einer bis an des Wassers Oberfläche CD reichenden verticalen Wassersäule entspricht: so bedarf es doch, um das ganze Gefäß zu erhalten, nur einer Kraft, die dem Gewichte des gesammten Flüssigen in ABCD und dem Gewichte des Gefäßes gleich ist.

Beweis. Es läßt sich genau so, wie in §. 13. zeigen, daß ein Stück iq der Wand einen Druck vertical aufwärts leidet, der $= qr \,.\, h$ ist, wenn die Tiefe dieses Stückchens der Wand unter der Oberfläche CD $= h$ heißt. Das in derselben Verticale liegende Stückchen sp des Bodens leidet den Druck $= qr \,.\, (h + pi)$ vertical niederwärts, und die Kraft, welche das ganze Gefäß trägt, braucht also in Beziehung auf diesen Theil des Flüssigen nur dem Unterschiede beider Pressungen, das ist dem Gewichte der Wassersäule qisp gleich zu sein. Eben das läßt sich für alle Wassersäulen zeigen, und die das Gefäß erhaltende Kraft hat folglich außer dem Gewichte des Gefäßes nur noch das ganze Gewicht des flüssigen Körpers zu tragen, indem alle übrigen auf die Wände wirkenden Kräfte einander aufheben.

Dritter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte elastisch flüssiger Körper, auf welche die Schwere wirkt.

§. 48. Erfahrung. Die Luft ist schwer. — Man kann dieses bemerken, wenn man ein Gefäß, das sich vermittelst eines Hahnes schließen läßt, durch die Luftpumpe so gut als möglich luftleer macht, indem es dann an Gewicht verliert. Das Barometer zeigt dieses noch deutlicher.

§. 49. Erklärung. Das Barometer wird (Fig. 116.) aus einer gebogenen Glasröhre verfertigt, deren längerer Schenkel AB oben bei B luftdicht zugeschmolzen ist. Man füllt diese bei C offen bleibende Röhre mit Queckſilber und verfährt dabei so, daß in den Schenkel AB gar keine Luft gelangt. Wenn man das so vollendete Barometer vertical aufstellt, so findet man, daß das Quecksilber in der luftdicht verschlossenen Röhre eine gewisse Höhe über der Oberfläche des Quecksilbers im offenen Schenkel behält, und daß sich über der Oberfläche cd im geschlossenen Schenkel ein ganz leerer Raum bildet, wenn die Röhre AB lang genug ist. Der verticale Höhen-Unterschied, um welchen cd über ab liegt, heißt die Barometerhöhe, sie beträgt in niedrigen Gegenden und auf dem Meere etwa 28 pariser Zoll.

§. 50. Bemerkung. Wir befinden uns in einem Luftmeere, dessen Höhe zu bestimmen, wir unmittelbar gar nicht im Stande sein würden. Ohne Zweifel übt dieses sehr hoch über uns stehende Luftmeer einen sehr erheblichen Druck aus, den wir nur darum nicht empfinden, weil alle Körper nicht bloß von Luft umgeben, sondern mit Luft durchdrungen sind. Unsre Kenntniß von dem Luftmeere oder der Atmosphäre erhält daher einen wichtigen Beitrag, wenn wir den Druck der über uns stehenden Luft durch ein ihm gleiches Gewicht zu bestimmen oder dem Auge darzustellen wissen.

§. 51. Lehrsatz. Der gesammte Druck der Luft auf irgend eine Fläche $= f^2$ beträgt so viel als das Gewicht eines über derselben Fläche $= f^2$ stehenden Quecksilbersäule, deren Höhe der Barometerhöhe gleich ist.

Beweis. Die Quecksilbersaule abcd (Fig. 116.) befindet sich unter ganz ähnlichen Umständen, wie die waren, welche wir §. 46. voraussetzten. Die Oberfläche cd nämlich ist gegen den Druck der Luft ganz gesichert, indem oberhalb cd ein luftleerer Raum ist; cd leidet daher, wenn alles gut ausgeführt ist, gar keinen Druck. Dagegen ist ab ein Theil des Bodens, auf welchem die Atmosphäre mit ihrem ganzen Gewichte lastet, und jeder Punct in ab trägt das gesammte Gewicht der vertical über ihm stehenden Luftsäule. Dem äußeren Drucke auf ab hält das Gewicht des Quecksilbersäule cdef das Gleichgewicht, das ist, jeder Punct der Fläche ab wird, so gut wie jeder Punct der Fläche ef mit einem Gewichte gleich dem einer Quecksilbersaule von der Höhe df belastet. Hieraus läßt sich der Druck berechnen, den eine bestimmte Fläche leidet, denn jeder Quadratzoll wird einen Druck gleich dem Gewichte von etwa 28 Cubiczoll Quecksilber leiden.

§. 52. Erfahrung. Die Luft ist elastisch. Dieses zeigen schon die in §. 21—26. erwähnten Erscheinungen der Luftpumpe.

§. 53. Bemerkung. Auf der Schwere und Elasticität der Luft beruht die ganze Einrichtung der Saugepumpen. In einem verticalen Cylinder ABEF (Fig. 117.) wird ein Kolben, der eine sich nach oben öffnende Klappe hat, auf und nieder bewegt; in diesem Cylinder, dessen unteres Ende in die Wassermasse CD eingetaucht ist, befindet sich unten bei EF eine sich nach oben öffnende Klappe, die das Wasser zwar einläßt, aber ihm den Ausgang verschließt, so wie die Klappe im Kolben, der obern Luft den Eintritt in den Raum ABFE verschließt, den Austritt aber gestattet.

Ist nun AB die tiefste, ab die höchste Stellung, die der Kolben erreichen kann, so verdünnt sich die Luft in dem Raume ABFE, indem man den Kolben aufwärts zieht. Die verdünnte Luft übt einen geringern Druck aus, als die vorhin im Raume ABEF enthaltene, der auf CD lastende Druck der freien Atmosphäre drängt daher, während der Kolben steigt, das Wasser über EF hinauf, etwa bis GH. Wenn der Kolben seinen höchsten Stand ab erreicht hat, und zurückzugehen anfängt, so schließt sich die Klappe bei EF und die Röhre bleibt bis an GH gefüllt; die vorhin verdünnte Luft wird wieder verdichtet, und wenn der Kolben bis gegen AB herabgekommen ist, so hat sie (weil ein Theil ihres vorigen Raumes mit dem Wasser EFHG gefüllt ist), eine größere Dichtigkeit als im anfänglichen, natürlichen Zustande; ihr Druck ist daher größer als der Druck der Atmospäre auf AB, sie öffnet das Ventil oder die Klappe im Kolben, und in dem Raume ABGH bleibt nur noch Luft von der Dichtigkeit der äußeren Luft. Indem diese sich beim Steigen des Kolbens wieder verdünnt, drängt sich aufs neue Wasser bei EF ein; es steigt höher, etwa bis IK, und bei fortwährendem Hin- und Herziehen des Kolbens erreicht endlich das Wasser diesen, tritt über ihn hinauf, und kann nun bei LM ausgegossen werden.

§. 54. Erfahrung. Die Elasticität der Luft, oder der Druck, welchen eingeschlossene Luft ausübt, ist der Dichtigkeit proportional.

Die Versuche, welche dieses beweisen, lassen sich etwa so anstellen. Will man beweisen, daß bei der Verdichtung der Luft der Druck, den sie ausübt, der Dichtigkeit proportional ist: so füllt man die offene Röhre

(Fig. 118.) etwa bis an abcd mit Quecksilber, schmelzt dann den kürzeren Schenkel bei e luftdicht zu, und gießt in den längern Schenkel df Quecksilber nach. Dieses nöthiget durch seinen Druck die Luft in eb sich zusammenzupressen; und man findet nun, daß sie in die Hälfte ihres vorigen Raumes zusammengepreßt ist, wenn die Höhe der Quecksilberoberfläche f über der Oberfläche im andern Schenkel, der Barometerhöhe gleich ist; daß sie noch ein Dritthel des vorigen Raumes einnimmt, wenn der Unterschied der Quecksilberhöhen gleich der doppelten Barometerhöhe ist; daß sie in ein Vierthel des anfänglichen Raumes zusammengepreßt ist, wenn der Unterschied der Quecksilberhöhen in beiden Schenkeln so viel als die dreifache Barometerhöhe beträgt u. s. w.

Da die Luft im natürlichen Zustande schon einen Druck leidet, welcher durch das Gewicht einer Quecksilbersäule, deren Höhe $= b$, gleich der Barometerhöhe ist, abgemessen wird, so verdoppelt man den Druck, wenn man so viel Quecksilber eingießt, daß die Oberfläche f sich um die Höhe $= b$ über die entgegengesetzte Oberfläche erhebt; man erhält den dreifachen Druck, wenn diese Höhe gleich der doppelten Barometerhöhe ist u. s. w.

Versuche zum Beweise, daß eben dieses Gesetz bei Verdünnung der Luft gelte, könnte man etwa so anstellen. Man füllt eine gleichschenkliche gebogene Röhre (Fig. 119.) mit Quecksilber etwa bis an abcd, verschließt dann den einen Schenkel luftdicht bei e, und nimmt nun nach und nach Quecksilber aus dem andern Schenkel weg. Indem so die Oberfläche cd sinkt, wird auch ab sinken, und der Raum, den die Luft füllt, sich vergrößern. Die verdünnte Luft kann nicht mehr ganz dem Drucke der äußeren Luft widerstehen, und das Quecksilber im offenen Schenkel steht daher niedriger, als im geschlossenen Schenkel, etwa dort in h, wenn es hier in fg steht. Man findet nun, daß der Höhen Unterschied der beiden Quecksilberflächen gleich der halben Barometerhöhe ist, wenn die Luft bei e in das doppelte des Raumes ausgedehnt ist, den sie vorhin einnahm; dann also trägt sie noch den halben Druck der Atmosphäre, oder übt einen, diesem halben Drucke gleichen Druck aus, und die andre Hälfte des Druckes wird von der Quecksilbersäule getragen. Man findet ferner, wenn die Luft in den dreifachen Raum ausgedehnt ist, die Höhe der Quecksilbersäule gleich zwei Drittheln der Barometerhöhe; bei der Ausdehnung in den vierfachen Raum gleich drei Viertheln der Barometerhöhe u. s. w.

§. 55. Dieses Gesetz, daß die Dichtigkeit der Luft dem Drucke, welchen sie ausübt, proportional ist, heißt das Mariottische Gesetz, von seinem Entdecker.

§. 56. Aufgabe. Zu bestimmen, wie hoch das Wasser in einer Pumpe nach den verschiedenen Kolbenzügen steigen wird.

Auflösung. Es sei ABba der Raum $= a$, den der Kolben bei seinem Spielen durchläuft, ABEF $= b$ der Raum zwischen dem niedrigsten Kolbenstande und der anfänglichen Oberfläche des Wassers, k die Höhe einer dem Drucke der Luft gleich drückenden Wassersäule.

Beim ersten Kolbenhube dehnt die Luft, deren Volumen $= b$ war, sich in den Raum $= (a + b)$ aus, ihre Dichtigkeit und ihr Druck ist also $= \frac{b}{a + b}$ dessen, der vorhin statt fand; also ihr Druck $= \frac{b \,.\, k}{a + b}$, und das Wasser steigt daher so hoch, daß seine Höhe $=$ GE $= x$ mit jener Druckhöhe $= \frac{b \,.\, k}{a + b}$ zusammen dem Drucke der Atmosphäre gleich ist,

$$\frac{b \,.\, k}{a + b} + x = k,$$

oder

$$x = \frac{a \,.\, k}{a + b}.$$

Beim ersten Zurückgehen des Kolbens bleibt nur der Raum ABG, dessen Höhe $= b - x$ ist, mit Luft gefüllt, die nach dem zweiten Kolbenhube den Raum von der Höhe $= a + b - x$ einnimmt. Diese Luft übet also den Druck $= \frac{(b-x)}{a+b-x} k = \left(\frac{b - \frac{a \cdot k}{a+b}}{a+b - \frac{a \cdot k}{a+b}} \right) k$ aus, und die Höhe $= y$, zu welcher das Wasser steigt, ist

$$y = k - \left(\frac{b-x}{a+b-x} \right) k = \frac{ak}{a+b-x} = \frac{ak}{a+b - \frac{ak}{a+b}}.$$

Eben so könnte man die Höhe bei den folgenden Kolbenzügen bestimmen.

§. 57. Es ist einleuchtend, daß die Höhe des Wassers in der Pumpe nie die ganze Höhe $= k$ erreichen kann, wenn des Kolbens Höhe über die Wasserfläche CD größer als $= k$ ist, indem die Höhe $= k$ nur dann erreicht wird, wenn über der gehobenen Wasserfläche sich gar keine Luft mehr befindet.

§. 58. Bemerkung. Da das Barometer den Druck der Luft oder das Gewicht der über uns stehenden Luftsäule abmißt, so muß gewiß das Barometer fallen, wenn man sich in höhere Gegenden begiebt. Dieses Fallen des Barometers giebt uns unmittelbar an, wie viel die Luftsäule wiegt, welche wir unter uns gelassen haben. Es würde uns unmittelbar die erreichte Höhe angeben, zu welcher wir gestiegen sind, wenn die Luft eine überall gleiche Dichtigkeit hätte; aber da die höheren Luftschichten einen immer geringern Druck leiden, so sind sie ohne Zweifel weniger zusammen gepreßt, also von geringerer Dichtigkeit. Die Dichtigkeit jeder höhern Luftschichte ist dem verminderten Drucke proportional, und dieses Gesetz kann uns leiten, den Luftdruck in verschiedenen Höhen zu bestimmen.

§. 59. Lehrsatz. Wenn man in der Atmosphäre um immer gleiche Höhen $= h$ steigt, so daß der dritte

Standpunct um die Höhe $= h$ über dem zweiten, der vierte um $= h$ über dem dritten und so weiter liegt, so bilden die in diesen verschiedenen Standpuncten beobachteten Barometerhöhen eine geometrische Reihe.

Beweis. Es sei zuerst die Höhe $= h$ klein genug, um die Dichtigkeit der Luftsäule von der Höhe $= h$ als überall gleich anzusehen, so kann man, obgleich eigentlich die Dichtigkeit der Luft nach dem Gesetze der Stetigkeit, in unmerklichen Uebergängen, abnimmt, sie betrachten, als ob sie aus Schichten von der Höhe $= h$ bestände, deren jede durchaus gleichartig in sich selbst wäre, jede höhere aber eine geringere Dichtigkeit hätte, als die niedrigere.

Die Dichtigkeit der untersten Schichte sei $= D$, die Barometerhöhe im untersten Standpuncte $= K$, so wird, wenn man hier die Dichtigkeit des Quecksilbers als Einheit betrachtet, oder das Gewicht der Cubic-Einheit an Quecksilber $= 1$ setzt, das Gewicht einer Luftsäule von der Höhe $= h$, durch $= h.D$ dargestellt, indem man, wenn z. B. 1 Cubiczoll die Einheit ist, das Gewicht einer Quecksilbersäule von h Zoll Höhe über der Basis $= 1$ Quadratzoll durch $= h$, und das Gewicht einer Luftsäule über eben der Grundfläche von eben der Höhe durch $= D.h$ darstellt.

Wenn man um die Höhe $= h$ steigt, so fällt das Barometer von $= K$, auf $= K - h.D$ und die nächste Schichte leidet nur noch den Druck $= K - h.D$, also ist ihre Dichtigkeit $= \frac{D.(K - h.D)}{K}$, indem

$$K : K - h.D = D : \frac{D.(K - h.D)}{K} \text{ ist.}$$

Die nächste Schichte von der Höhe $= h$ übt folglich einen Druck $= \frac{h.D.(K - h.D)}{K}$ aus, und indem man abermals um die Höhe $= h$ steigt, fällt das Barometer auf $K - h.D - \frac{h.D(K - h.D)}{K}$, das ist auf

$$K - 2.h.D + \frac{h^2.D^2}{K} = \frac{(K - h.D)^2}{K}.$$

Diese Formel stellt also wieder den Druck dar, welchen die dritte Luftschichte leidet, und ihre Dichtigkeit verhält sich daher zu D, wie dieser Druck oder diese Barometerhöhe zu K; die Dichtigkeit der dritten Schichte ist also $= \frac{D.(K - h.D)^2}{K^2}$, und indem man in ihr von der Höhe $= 2h$ zur Höhe $= 3h$ steigt, läßt man eine Luftsäule vom Gewichte $= \frac{h.D(K - h.D)^2}{K^2}$ unter sich zurück. Das Barometer also, welches in der Höhe $= 2h$, noch $= \frac{(K - h.D)^2}{K}$ zeigte, fällt in der Höhe $= 3h$, auf $= \frac{(K - h.D)^2}{K} - \frac{h.D(K - h.D)^2}{K^2}$, das ist auf $= \frac{(K - h.D)^3}{K^2}$.

Eben so ergiebt es sich, daß in der Höhe $= 4h$, die Barometerhöhe $= \frac{(K - h.D)^4}{K^3}$, in der Höhe $= n.h$, die Barometerhöhe $= \frac{(K - h.D)^n}{K^{n-1}}$ ist.

Hier ist also die Richtigkeit des Lehrsatzes klar, wenn man eine Schichte von der Höhe $= h$ als durchaus gleich dicht betrachtet. Aber auch, wenn man eine Menge solcher Schichten zusammen nimmt, und um größere Höhen $= H = n.h$ steigt: so erhellt aus dem Vorigen, daß in der Höhe $= 0$, die Barometerhöhe $= K$,

in d. Höhe $= H = n.h$, d. Barometerh. $= K.\left(\frac{K - h.D}{K}\right)^n$, in d. Höhe $= 2H = 2.n.h$, d. Baromtrh. $= K.\left(\frac{K-h.D}{K}\right)^{2.n}$.

in d. H. $= 3H = 3.n.h$, d. Baromtrh. $= K.\left(\frac{K-h.D}{K}\right)^{3.n}$,

in d. H. $= m.H = m.n.h$, d. Baromtrh. $= K.\left(\frac{K-h.D}{K}\right)^{m.n}$

ist. Auch hier also, wo die Höhe $= H$ eine Menge solcher kleiner Schichten in sich schließen kann, bilden die Barometerhöhen, welche man in den Höhen $= 0$, $= H$, $= 2H$, $= 3H$ u. s. w. beobachtet, eine geometrische Reihe, deren Exponent $= \frac{K-h.D}{K} = 1 - \frac{h.D}{K}$ ist (Arithm. §. 206.).

Wofern es also irgend erlaubt ist, für sehr kleine Höhen $= h$ der Luftschichten, jede derselben als durchaus gleich dicht anzusehen, so gilt das Gesetz im Lehrsatze allgemein.

§. 60. Da es bei diesem Satze gar nicht darauf ankömmt, wie hoch man die als gleichförmig dicht betrachteten Schichten ansehen will, so ist es gewiß, daß das gefundene Gesetz wirklich in der Atmosphäre statt findet. Denn Schichten von sehr unbedeutender Höhe können ganz gewiß als gleichförmig dicht angesehen werden, und da wir unter n eine sehr große Zahl verstehen, also eine beträchtliche Menge solcher Schichten zusammen nehmen dürfen, so ergeben sich leicht Regeln, die den eben betrachteten Lehrsatz anwendbar machen, ohne daß es nöthig ist, die einzelnen Höhen $= h$ jener, als gleich dicht gesetzten Schichten, zu kennen.

§. 61. Aufgabe. Wenn bekannt ist, um welche Höhe $= H$ man von dem Orte, wo die Barometerhöhe $= K$ ist, steigen muß, damit die Barometerhöhe auf $= l$ sich vermindere, allgemein zu bestimmen, um welche Höhe $= x$ man von eben jenem Orte an steigen müsse, wenn die Barometerhöhe sich bis auf $= p$ vermindern soll.

Auflösung. Unsre Formel in §. 58. ergab, daß mit der Höhe $= 0$, die Barometerhöhe $= K$, mit der Höhe $= H$, die Barometerhöhe $= K . \left(\frac{K - h . D}{K}\right)^n$, mit d. Höhe $= m . H$, d. Barometerh. $= K . \left(\frac{K - h . D}{K}\right)^{m . n}$ zusammen gehöre. Hat also die Beobachtung ergeben, daß in der Höhe $= H$, die Barometerhöhe $= l$ ist, so hat man $l = K . \left(\frac{K - h . D}{K}\right)^n$,

$$\text{also} \left(\frac{K - h . D}{K}\right)^n = \frac{l}{K},$$ und folglich entspricht jeder Höhe $= m . H$ über dem Puncte, von welchem wir ausgingen, die Barometerhöhe $= K . \frac{l^m}{K^m}$, oder wenn dafür die in unbekannter Höhe beobachtete Barometerhöhe $= p$, gesetzt wird, $K . \left(\frac{l}{K}\right)^m = p$,

$$\text{so ist} \left(\frac{l}{K}\right)^m = \frac{p}{K};$$ oder (Arithm. §. 224.)

$$m . \log \frac{l}{K} = \log \frac{p}{K},$$

$$\text{also } m = \frac{\log p - \log K}{\log l - \log K} = \frac{\log K - \log p}{\log K - \log l},$$

und die mit diesem Barometerstande $= p$ zusammengehörige Höhe über dem anfänglichen Standpuncte, ist

$$x = m . H = \frac{H}{\log K - \log l} (\log K - \log p).$$

Für einen andern Barometerstand $= q$ fände man die Höhe $= y$ über dem Orte, wo der Barometerstand $= K$ war,

$$y = \frac{H (\log K - \log q)}{\log K - \log l}.$$

Der Höhen-Unterschied der beiden Orte, an welchen die Barometerstände p und q sind, ist also

$$x - y = \frac{H}{\log K - \log l} (\log q - \log p).$$

Und dieses ist die allgemein brauchbare Formel für alle Höhenmessungen, so lange man die Dichtigkeit der Luft als bloß vom Drucke abhängig betrachtet.

§. 62. K, l, q, p sind hier linearische Größen; aber es kann nicht auffallend sein, daß wir ihre Logarithmen angeben sollen. Eigentlich erhielten wir ja $x - y = \frac{H}{\log \frac{K}{l}} \cdot \log \frac{q}{p}$, wo $\frac{K}{l}$ und $\frac{q}{p}$ Zahlen darstellen, und in den vorigen Ausdrücken sind also die Zahlen zu verstehen, welche die Barometerhöhen im bestimmten Maaße ausdrücken.

§. 63. Der Coefficient $\frac{H}{\log \frac{K}{l}}$ ist beständig für alle einzelnen Bestimmungen. Wenn wir hier, wo nur von oberflächlichen Bestimmungen die Rede sein kann, annehmen, daß das Barometer von 28 Zoll = 336 Linien = K auf 27 Zoll 11 Linien = 335 Linien = l falle, wenn man = 75 Fuß = H steigt, so ist

$$\frac{H}{\log \frac{K}{l}} = \frac{75}{\log \frac{336}{335}} = \frac{75}{0{,}0012945} = 57937 \text{ Fuß}.$$

Wenn also diese Zahlen in allen Fällen richtig wären, so hätte man

die Höhe $x - y = 57937 \log \frac{q}{p}$, wenn man sich der gewöhnlichen Logarithmen bedient.

§. 64. Bemerkung. Obgleich man sich, wie die eben mitgetheilte Berechnung zeigt, jedes Logarithmen-systems bei diesen Rechnungen bedienen kann, so gewähren doch die unter dem Namen der natürlichen Logarithmen bekannten Logarithmen in der Darstellung des beständigen Factors einen bedeutenden Vortheil. Wenn man die Rechnung so führt, wie eben geschehen ist, so sieht man wohl, daß man den briggischen Logarithmen von $\frac{q}{p}$ mit 57937 Fuß multipliciren muß, um die Höhe $x - y$ zu erhalten; aber diese 57937 Fuß sind keine in der Natur selbst nachzuweisende Größe, welches dagegen der Fall ist, wenn man natürliche Logarithmen gebraucht.

Das System der natürlichen Logarithmen hat das Eigenthümliche, daß $\log \text{nat} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ desto näher $= \frac{1}{n}$ ist, je kleiner dieser Bruch wird. Fassen wir bloß diese Eigenthümlichkeit ins Auge und nehmen nun an, die Barometerhöhen l und K sind sehr wenig verschieden, so daß $K = l + \lambda$ und λ sehr klein ist, so geben die logarithmischen Formeln des 61. §.

$$x - y = \frac{H}{\log \frac{K}{l}} \log \frac{q}{p} = \frac{H}{\log \left(1 + \frac{\lambda}{l}\right)} \log \frac{q}{p},$$ da wir jedes logarithmische System hier gebrauchen dürfen, so dürfen wir auch das der natürlichen Logarithmen gebrauchen, und in diesem ist für ein sehr kleines λ,

$$\log. \text{naturalis} \left(1 + \frac{\lambda}{l}\right) = \frac{\lambda}{l},$$

folglich $x - y = \frac{H \cdot l}{\lambda} \cdot \log. \text{nat.} \frac{q}{p}$; denn es versteht sich, daß wir Logarithmen desselben Systems überall in derselben Formel gebrauchen müssen.

Um den Coefficienten $\frac{H \cdot l}{\lambda}$ bequemer zu übersehen, muß man bemerken, daß H die Höhe derjenigen Luftsäule ist, welche eben so viel — bei gleicher Grundfläche — wiegt, als die Quecksilbersäule von der Höhe $= \lambda$; denn wir mußten um die Höhe $= H$ in der Luft hinaufsteigen, damit das Barometer von $= K$ bis auf $= l$, das ist um die Höhe $= K - l = \lambda$ fiele. Betrachten wir also diese Luftsäule von der Höhe $= H$ als überall gleich dicht, und nennen D die Zahl, welche das Verhältniß der Dichtigkeit der Luft zur Dichtigkeit des Quecksilbers ausdrückt, so daß jene zu dieser wie $D : 1$ ist, so wiegt die Luftmasse $= H \,.\, D$ eben so viel als die Quecksilbermasse $= \lambda$; oder, da die Quecksilbersäule $= \lambda$ so viel als die Luftsäule, deren Volumen oder Höhe $= H$ ist, wiegt, so hat man:

Dichtigkeit der Luft zur Dichtigkeit des Quecksilbers, wie λ zu H, das ist

$$D = \frac{\lambda}{H}.$$

Jener Coefficient kann also durch

$\frac{H \,.\, l}{\lambda} = \frac{l}{D}$ ausgedrückt werden, und stellt nun dar, die Höhe einer Luftsäule von der gleichförmigen Dichtigkeit $= D$, welche eben so viel als die ganze Quecksilbersäule $= l$ wiegt. Wäre das Quecksilber 10000 mal so dicht als Luft, so würde für $l = 28$ Zoll $= 2\frac{1}{3}$ Fuß $\frac{l}{D} = \frac{2\frac{1}{3}}{\frac{1}{10000}} = 23333$ Fuß, und eine so hohe Luftsäule von der überall gleichen Dichtigkeit $= D = \frac{1}{10000}$ würde eben so gut, als die wirkliche, sich oberwärts verdünnende, aber viel höhere Luftsäule, der Quecksilbersäule von 28 Zoll das Gleichgewicht halten.

Wollen wir uns also der natürlichen Logarithmen bedienen, so ist

die Höhe $= x - y = \frac{l}{D}$ log. naturalis $\frac{q}{p}$, und

$\frac{1}{D}$ ist im Allgemeinen die Höhe der Luftsäule von der Dichtigkeit $= D$, welche der Quecksilbersäule $= l$ das Gleichgewicht hält. Dieses gilt für jeden Werth von l; denn da bei sonst gleichen Umständen die Dichtigkeit der Barometerhöhe proportional ist, so hat man bei sonst gleichen Umständen für eine andre Barometerhöhe $= l'$, die Dichtigkeit $D' = \frac{l' \cdot D}{l}$, also $\frac{l'}{D'} = \frac{l}{D}$, man kann also der Barometerhöhe $= l$, welchen Werth man will, geben, wenn nur die dazu gehörige richtige Dichtigkeit $= D$ angenommen wird.

Vierter Abschnitt.

Nähere Anleitung zu barometrischen Höhenmessungen.

§. 65. **Bemerkungen.** Es ist bekannt, daß alle Körper sich bei zunehmender Wärme ausdehnen, und daß diese Erscheinung uns dient, die Wärme-Unterschiede vermittelst des Thermometers, welches die Ausdehnung des Quecksilbers zeigt, zu bestimmen. Dieser Einfluß der Wärme wirkt auf eine zweifache Weise auf die Bestimmung der Höhen vermittelst des Barometers. Zuerst ist es nicht gleichgültig, ob ich denselben Druck der Luft mit wärmerem oder kälterem Quecksilber abmesse; denn da das Quecksilber sich bei zunehmender Wärme in einen größeren Raum ausdehnt, also eine geringere Dichtigkeit annimmt, so wiegt eine sonst gleiche Quecksilbersäule von 28 Zoll Höhe, weniger, wenn sie wärmer ist.

Zweitens dehnt sich die Luft noch viel mehr als das Quecksilber bei zunehmender Wärme aus, und die Rücksicht darauf macht eine starke Correction bei den vorigen Rechnungen nöthig.

§. 66. Da die Dichtigkeit des Quecksilbers nicht immer gleich ist, so kann sie nicht unbeschränkt als Einheit zum Maaße der Dichtigkeiten angenommen werden, sondern die Dichtigkeit des reinen Quecksilbers kann nur bei einer bestimmten Temperatur, wofür ich die Wärme des gefrierenden Wassers annehme, als Einheit gelten. Genaue Erfahrungen (Laplace Exposition du systeme du monde. Paris, 1808. pag. 89.) zeigen, daß das Quecksilber seine Dichtigkeit um $\frac{1}{4330}$ ändert, wenn die Wärme sich um 1 Gr. des Reaumurschen Quecksilber-Thermometers ändert (*). Hat man also die Barometerhöhe bei einer Wärme $= m$ Graden des Reaumurschen Thermometers $= l$ gefunden, so würde dasselbe

(*) Die Lehre vom Thermometer gehört nicht hieher; ich erwähne daher hier nur, daß man an den Thermometern die zwei Puncte als feste Puncte anmerkt, welche das Quecksilber im Thermometer im gefrierenden Wasser und im kochenden Wasser erreicht. Der Kochpunct muß bei bestimmtem Barometerstande beobachtet werden. Den Raum zwischen jenen beiden Puncten theilt man am Reaumurschen Thermometer in 80 gleiche Grade, die von 0 bis 80 vom Gefrierpuncte bis zum Kochpuncte fortgezählt werden; eben solche Grade trägt man unter Null auf und erhält so die Grade -1, -2 u. s. w. Am Centesimalthermometer theilt man eben jenen Raum in 100 Grade, fängt mit 0 vom Frostpuncte zu zählen an, und hat 100 Grade beim Siedepuncte. Das Fahrenheitische Thermometer theilt eben jenen Raum in 180°, fängt aber beim Frostpuncte mit $+32$ Grad an, und zählt nur fort, so daß der Siedepunct des Wassers bei 212 Graden ist. Der Nullpunct des Fahrenheitischen Thermometers liegt neben $\div 14\frac{2}{9}$ Grad Reaumur und neben $\div 15\frac{7}{9}$ Grad Centesimal.

Quecksilber bei 0 Graden nur eine Säule von der Länge $= l - \frac{m}{4330} . l$ gebildet haben. Dieses ist die Reduction der Barometerstände auf eine gleiche Temperatur.

§. 67. Aber auch die Luft behält bei gleichem Drucke nicht dieselbe Dichtigkeit, wenn die Wärme verschieden ist. Die Elasticität der Luft nimmt zu, wenn sie erwärmt wird, daher sieht man zum Beispiel in der Röhre edf (Fig. 118.) das Quecksilber von der bei eab eingesperrten Luft höher hinauf gedrängt, im Schenkel df steigen, wenn die Luft, die in den Raum eab eingeschlossen ist, erwärmt wird. Denken wir uns daher die ganze von der Erde bis an die oberen Grenzen des Luftkreises sich erstreckende Luftsäule, so wird in ihr die nach unten zu allmählig zunehmende Verdichtung nicht mehr bloß nach Verhältniß des Druckes wachsen, sondern, da in der Nähe der Erde die Wärme größer ist, als in beträchtlichen Höhen, so wird die untere Luft sich nicht ganz so zusammen pressen lassen, als sie bei minderer Erwärmung es thun würde. Wenn die Barometer (Fig. 120.) in der verticalen Luftsaule AC in A und B aufgestellt sind, so trägt noch immer die Quecksilberfläche des unteren Barometers die ganze oberhalb A stehende Luftsäule, und das Barometer in B giebt den Druck der ganzen oberhalb B stehenden Luftsaule an; aber der Raum BA enthält, wenn die Wärme nach unten hin zunimmt, eine geringere Luftmasse, ihre Elasticität hat gleichsam den übrigen Theil der Luftmasse, der nach den einfachen Gesetzen des Druckes bei gleichförmiger Wärme sich zwischen A und B befinden würde, hinaufgedrängt. Hieraus folgt, daß bei größerer Wärme die Luftsäule AB weniger wiegen und folglich einen geringeren Unterschied der Barometerstände veranlassen wird.

§. 68. Nach Biots sehr sorgfältigen Versuchen ist die Dichtigkeit der Luft bei 28 pariser Zoll Barometerhöhe $= \frac{1}{10494,9}$ der Dichtigkeit des Quecksilbers, wenn die Luft sowohl als das Quecksilber die Temperatur des gefrierenden Wassers hat. Für diese Temperatur also ist $D = \frac{1}{10494,9}$, wenn $l = 28$ Zoll pariser Maaß ist; und eine gleichförmig dichte Luftsäule von 0 Grad Wärme würde bei 24488 pariser Fuß Höhe der Quecksilbersäule von 28 Zoll das Gleichgewicht halten. Hiernach also wäre $\frac{l}{D} = 24488$ pariser Fuß der Coefficient, mit welchem in §. 64. der natürliche Logarithme multiplicirt werden sollte.

Aber Laplace äußert die Meinung, daß man $D = \frac{1}{10506,2}$ setzen müsse, weil die Luft im Freien allemal feucht sei und weniger wiege, als die ausgetrocknete, deren Biot und Arrago sich bei den Versuchen bedienten, und insbesondere, weil Ramonds Barometerbeobachtungen diese Dichtigkeit als diejenige anzugeben scheinen, die im Freien bei 28 Zoll Barometerhöhe und 0 Grad Temperatur statt findet. Nimmt man diesen Werth von D, so ist $\frac{l}{D} = 24514$ pariser Fuß, und diesen letztern Werth wird man gebrauchen müssen, wenn man die mehrere oder mindere Feuchtigkeit der Luft nicht noch besonders beachten will, welches zu thun manche Schwierigkeiten hat.

§. 69. Die Ausdehnung der Luft beträgt für jeden Grad der Reaumurschen Thermometerscale 0,00469 oder $\frac{10}{2132}$; daher ist für jeden gegebnen Wärmegrad, gleich m Graden Reaumur die Dichtigkeit

$$= \left(1 - \frac{m}{213,2}\right) D = (1 - m \,.\, 0,00469) \,.\, \frac{1}{10506,2}$$

und zu 28 Zoll Barometerhöhe würde für m Grade

Wärme der Werth von $\frac{1}{D} = \frac{24514}{1 - m \cdot 0{,}00469}$ pariser Fuß gehören. Will man statt dieses bei natürlichen Logarithmen brauchbaren Coefficienten lieber den gebrauchen, der zu jedem Logarithmen-Systeme anwendbar ist, so muß man wissen, daß nach den eben angeführten Erfahrungen bei der Temperatur von 0 Grade oder bei der Kälte des gefrierenden Wassers das Barometer von 28 Zoll auf 27,99 Zoll fällt, wenn man 8,755 Fuß steigt. Die Formel in §. 62. 63. ist also

$$x - y = \frac{8{,}755 \text{ Fuß}}{\log. \frac{28}{27{,}99}} \log. \frac{q}{p},$$

also für briggische Logarithmen

$$x - y = \frac{8{,}755 \text{ Fuß}}{0{,}0001551} \log. \text{brigg.} \frac{q}{p}$$

$= 56447{,}5 \cdot \log. \text{brigg.} \frac{q}{p}$, wenn die Beobachtung bei 0 Grad Wärme angestellt ist.

§. 70. Aufgabe. Aus den gegebenen gleichzeitigen Barometerständen und Temperaturen an zwei Orten, die verticale Höhe des einen über dem andern zu bestimmen.

Auflösung. Erster Fall. Wenn die ganze zwischen beiden Orten enthaltene Luftsäule eine gleiche Wärme hat.

Man reducirt beide, sowohl im höhern als im niedrigern Orte beobachteten Quecksilberhöhen im Barometer auf die Normaltemperatur, um so die Höhe einer Quecksilbersäule von der als Einheit angenommenen Dichtigkeit zu haben, dies geschieht, wenn die Eiskälte diese Normaltemperatur ist, indem man die beobachtete Barometerhöhe $= p$ in $= p\left(1 - \frac{m}{4330}\right)$ verwandelt, wenn die Wärme $= m$ Grade Reaumur war.

Man berechnet dann, indem man die reducirten Barometerhöhen $= q'$ in dem niedrigern und $= p'$ in dem höhern Puncte nennt, zuerst die Höhe nach der Formel $= 56447{,}5 \,.\, \log.\,\mathrm{br.} \frac{q'}{p'}$, wenn man briggische, oder nach der Formel, Höhe $= 24514 \,.\, \log.\,\mathrm{nat.} \frac{q'}{p'}$, wenn man natürliche Logarithmen gebrauchen will. Um die so gefundene uncorrigirte Höhe, wegen der Wärme zu verbessern, sucht man, wenn die Wärme der Luft an beiden Orten und in der ganzen zwischenliegenden Luftsäule $= m$ Grade ist, jene uncorrigirte Höhe $= x'$, dividirt sie mit 213 und legt dem x' so viele 213 Theile zu als der Wärmegrad $= m$ des Reaumurschen Thermometers über Null angiebt, findet also die Höhe

$$= x' + \frac{m}{213}\, x'.$$

Zweiter Fall. Ist die Wärme an dem obern Orte geringer als am unteren, so corrigirt man den Barometerstand jedes Ortes, so wie es die an jedem Orte gefundene Temperatur erfordert; nimmt dann das arithmetische Mittel aus beiden Temperaturen, sieht die ganze Luftsäule so an, als ob sie diese mittlere Temperatur in jedem Puncte hätte, so daß die zuletzt angeführte Verbesserung der uncorrigirten Höhe x' eben so angebracht wird, wie im vorigen Falle.

Beispiel. D'Aubuisson stellte am 17. Oct. 1809 folgende Beobachtungen zu Bestimmung der Höhe des Monte Gregorio an.

Das Barometer stand oben auf 22,351 Zoll, bei einer Temperatur des Quecksilbers = 8,4 Grade, und einer Temperatur der (etwas kälteren) Luft = 7,9 Grade. Das Barometer stand unten auf 27,418 Zoll und das Quecksilber in demselben war = 15,9 Grad, die Luft unten = 16 Gr. Reaumur warm.

Reduction der Barometerstände:

log. 22,351 = 1,349297	log. 27,418 = 1,438036
log. 8,4 = 0,924279	log. 15,9 = 1,201397
2,273576	2,639433
log. 4330 = 3,636488	3,636488
0,637088 - 2	0,002945 - 1
= log. 0,04336.	= log. 0,10068.

Die Barometerhöhen waren = 22,351 und = 27,418
Correction = 0,043 0,101

bei 0° wären die Barometerhöhen gewesen = 22,308 und = 27,317.
$= p'$ und $= q'$.

Die Temperatur der Luft war oben = 7,9 Grade
unten = 16,0

also das arithmetische Mittel = 11,95 Grade.

Der Coefficient = 56447,5 pariser Fuß

geht also über in $= 56447{,}5 + \frac{11{,}95}{213} \cdot 56447{,}5$,

das ist in = 59614 pariser Fuß,

und die Höhe ist $= 59614 \cdot \log.\ \text{brigg.}\ \frac{27{,}317}{22{,}308}$

log. br. 27,317 = 1,436433
log. br. 22,308 = 1,348461

$\log.\ \text{br.}\ \frac{27{,}317}{22{,}308} = 0{,}087972$

also Höhe des Monte Gregorio = 59614 . 0,08797
= 5244 Fuß.

Diese Höhe erfordert noch eine kleine Verbesserung, wegen der Abnahme der Schwere, die ich gleich erwähnen will.

§. 71. Bemerkung. Die Barometerhöhe hängt von der mehrern oder mindern Feuchtigkeit der Luft ab, indem die Luft durch die in ihr schwebenden Dämpfe bald mehr bald minder dicht ist, als sie nach dem Drucke und der Temperatur sein sollte; aber da es nicht meine Absicht ist, hier eine vollständige Anleitung zum Höhenmessen zu geben, so übergehe ich diesen, überdas noch nicht ganz genau bestimmbaren Einfluß. Eben so muß ich die Ungleichheiten fast ganz übergehen, die sich in den barometrischen Höhenmessungen ergeben müssen, wenn die Zunahme der Temperatur in den untern Schichten ungleichförmig ist. Wir haben im vorigen §. im zweiten Falle angenommen, man dürfe das arithmetische Mittel aus den Wärmegraden statt der Temperatur der ganzen Luftsäule setzen; dieses ist aber gewiß oft irrig, da z. B. an warmen Tagen die Luft in der Nähe der Erde viel mehr erhitzt ist, als in 20 Fuß Höhe, und da an Sommerabenden die Luft nahe an der Erde viel kühler ist als in einiger Höhe über der Erde. Eigentlich sollte man die Wärme jedes einzelnen Theiles der zwischen beiden Orten liegenden Luftsäule kennen, und daraus das Gewicht der ganzen Luftsäule berechnen, was aber nicht gut möglich ist, weshalb man sich meistens mit jenem arithmetischen Mittel begnügen muß.

§. 72. Außer diesen Correctionen bedarf die Höhenmessung noch einer Verbesserung, deren umständliche Erklärung nicht hieher gehört. Die Kraft der Schwere nimmt in beträchtlichen Höhen ab, und eine gleiche Quecksilbermasse wiegt auf dem Berge weniger als unten. Das leichtere Quecksilber steht daher auf der Höhe des Berges etwas zu hoch, oder es würde eine etwas geringere Barometerhöhe zeigen, wenn die Schwerkraft oben so stark als unten wirkte. Aus diesem Grunde giebt unsre Beobachtung die Differenz der Barometerhöhen etwas zu klein, und folglich unsre Rechnung die Berghöhen etwas zu klein, und man müßte z. B. beim Monte Gregorio noch 15 Fuß addiren und würde ihn so = 5259 Fuß finden.

§. 73. Anmerkung. Eine sehr leichte, populäre Anleitung zum Höhenmessen giebt Benzenbergs Beschreibung eines einfachen Reisebarometers, nebst Anleitung zu Berechnung der Berghöhen. Düsseldorf, 1811., ein Buch, in welchem sich auch die nöthigsten Tafeln finden. Vollständige Tafeln enthält Bernh. von Lindenau's Werk: Tables barometriques pour faciliter les calculs du nivellement et des mesures des hauteurs par le baromètre. Gotha, 1809.

Fünfter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte fester Körper, die in flüssige eingetaucht sind, und von der Stabilität schwimmender Körper.

§. 74. Aufgabe. Den Druck zu finden, welchen ein bestimmter Punct A des im Wasser eingetauchten Körpers BC leidet (Fig. 121.).

Auflösung. Wenn DE des Wassers horizontale Oberfläche ist, so leidet jedes in der horizontalen Schichte AF befindliche Waſſertheilchen den Druck, welcher dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe GH angemessen ist (§. 32.). Einen eben so großen Druck übt also auch das Wasser bei A auf den Körper aus, oder der Theil $= f^2$ der Oberfläche des Körpers wird so gedrückt, als ob eine Wassersäule von der Grundfläche $= f^2$ und einer Höhe, die seiner Tiefe unter der Oberfläche gleich ist, auf ihm ruhte.

§. 75. Lehrsatz. Wenn der ganz im Wasser untergetauchte Körper BC (Fig. 122.) im Gleichgewichte ist, so treibt der Druck des Wassers auf den ganzen Körper, ihn mit einer Kraft aufwärts, welche gleich ist dem Gewichte einer, dem Volumen des Körpers gleichen Wassermasse.

Beweis. Das Theilchen op der Oberfläche des Körpers leidet einen gegen sie senkrechten Druck, gleich dem Gewichte einer über op stehenden Wassersäule von der Höhe = qs, und es läßt sich ganz so wie in §. 47. zeigen, daß dieser Druck nach verticaler Richtung mit eben der Gewalt wirkt, wie das Gewicht einer eben so hohen über der horizontalen Projection tu des Theiles op der Oberfläche errichteten Wassersäule von eben der Höhe. Es wird also op mit einem Gewichte = tu . sq niederwärts gedrückt. Aus eben den Gründen aber leidet das durch dieselben Verticallinien begrenzte Stück mn der Oberfläche des Körpers einen Druck = tu . sr vertical aufwärts, das ist gleich dem Gewichte einer über der horizontalen Projection von mn errichteten Wassersäule, deren Höhe gleich der Tiefe der mn unter der Oberfläche ist. Mit andern Worten, op leidet den verticalen niederwärts gehenden Druck der ganzen Wassersäule vopw; der durch eben die Verticallinien begrenzte Theil mn der Oberfläche leidet aufwärts den ganzen Druck einer Wassersäule, die den Raum vmnw füllen könnte; der Unterschied beider ist gleich dem Gewichte des Wassers, das den Raum opnm füllen könnte, und mit dieser Gewalt wird der zwischen omnp liegende Theil des Körpers aufwärts getrieben. Es erhellt also leicht, da dies für alle so begrenzte Theile des Körpers gilt, daß der ganze Körper einen Druck aufwärts leidet, der gleich ist dem Gewichte desjenigen Wassers, welches in dem durch den festen Körper ausgefüllten Raume Platz hätte.

§. 76. Dieser Satz ist nicht auf tropfbare Körper beschränkt, sondern gilt auch für elastische Fluida. Auch bei diesen ist der Druck, den ein untergetauchter oder ganz von dem Flüssigen umgebener Körper leidet, gleich dem Gewichte desjenigen Theiles des Fluidi, der sich hier befinden müßte, um das Gleichgewicht zu erhalten, wenn der feste Körper nicht da wäre. Ist also der eingetauchte Körper von sehr erheblicher Größe so muß man (Fig. 123.) darauf Rücksicht nehmen, daß die Schichte FG von größerer Dichtigkeit als die Schichte ED ist, und das Gewicht der in dem Raume des Körpers BC

Platz findenden Luft so berechnen, wie es diesen verschiedenen Dichtigkeiten gemäß ist.

§. 77. Bemerkung. Dem so gefundenen vertical aufwärts pressenden Drucke des flüssigen Körpers auf den festen Körper, wirkt das Gewicht des Körpers selbst entgegen. Wiegt daher der ganze Körper eben so viel als die Wassermasse, die er aus der Stelle treibt, und ist er zugleich von durchaus gleicher Beschaffenheit, so ruht er von selbst an der Stelle, die er grade einnimmt. Ist das Gewicht des eingetauchten Körpers größer, als das Gewicht des von ihm aus der Stelle getriebenen Wassers, so hat er ein Bestreben zu sinken, und muß durch eine fremde Kraft erhalten werden, wenn das Gleichgewicht bestehen soll. Wenn dagegen der feste Körper weniger wiegt, als eine eben so große Wassermasse, so treibt der Druck des Wassers den ganz untergetauchten Körper aufwärts, und dieser muß entweder durch eine fremde Kraft erhalten werden, oder wird erst schwimmend zur Ruhe kommen.

§. 78. Lehrsatz. Wenn ein fester Körper, der weniger wiegt, als ein gleiches Volumen Wasser, nur zum Theil in das Wasser eingetaucht ist, so kann er nur dann ruhen, wenn sein eingetauchter Theil grade so viel Wasser aus der Stelle treibt, daß das Gewicht dieses Wassers dem Gewichte des ganzen Körpers gleich ist (Fig. 124.).

Beweis. Das Theilchen mn der Oberfläche des Körpers BC leidet einen Druck aufwärts, der dem Gewichte der Wassersäule, die den Raum mnpo füllen würde, gleich ist. Der gesammte Druck, den das Wasser auf den Körper nach verticaler Richtung ausübt, ist also gleich dem Gewichte des Wassers, welches in dem Raume Platz hätte, den der eingetauchte Theil des Körpers füllt, oder gleich dem Gewichte des Wassers, welches der feste Körper aus der Stelle getrieben hat. Ist also dieses dem entgegenwirkenden Gewichte des Körpers gleich, so halten diese gesammten Kräfte einander das

Gleichgewicht, und nur in diesem Falle kann der Körper ruhen.

§. 79. Lehrsatz. Der schwimmende Körper kann ohne Einwirkung einer fremden Macht nur dann ruhen, wenn neben der Bedingung des vorigen Lehrsatzes auch noch die erfüllt wird, daß der Schwerpunct des ganzen Körpers sich in eben der Verticallinie befindet, in welcher der Schwerpunct der aus der Stelle getriebenen Wassermasse liegt.

Beweis. Da jeder Punct der im Wasser befindlichen Oberfläche des Körpers mit einer Kraft aufwärts gedrückt wird, die gleich ist dem Gewichte des Wassersäulchens das über ihm bis an die Horizontalfläche des Wasserspiegels stehen könnte: so ist der Mittelpunct aller jener nach parallelen Richtungen aufwärts drückender Kräfte einerlei mit dem Schwerpuncte einer Wassermasse, die den Raum ausfüllte, aus welchem der feste Körper das Wasser vertrieben hat. Man kann also alle vertical aufwärts drückenden Kräfte des Wassers so ansehen, als ob ihre Summe in diesem Schwerpuncte vereinigt wäre; und da nun das Gewicht des ganzen Körpers so wirkt, als ob es in seinem Schwerpuncte vereinigt wäre, so können diese beiden nach verticaler Richtung wirkenden Kräfte einander nicht im Gleichgewichte oder den Körper nicht ruhend erhalten, wenn sie nicht in einerlei Verticale liegen.

§. 80. Bemerkung. Der Druck des Wassers auf die Oberfläche des eingetauchten festen Körpers äußert sich also grade so, als ob er an Gewicht verlöhre. Aus diesem Grunde können Körper, die im Wasser untersinken, dennoch im Wasser viel leichter gehoben werden, und man empfindet erst dann ihre ganze Schwere, wenn man sie über die Oberfläche des Wassers hervorheben will. Dieser Verlust an Gewicht ist desto beträchtlicher, je dichter der flüssige Körper ist, in den der feste eingetaucht ward, da er immer so viel beträgt, als das aus der Stelle getriebene Fluidum wiegt.

§. 81. Erklärung. Die specifische Schwere oder eigenthümliche Schwere eines Körpers wird angegeben, indem man bestimmt, wie viel mal so viel ein gewisses Volumen dieses Körpers wiegt, als ein gleiches Volumen desjenigen Körpers, dessen eigenthümliche Schwere man als Einheit annimmt.

§. 82. Bemerkung. Man pflegt gewöhnlich die eigenthümliche Schwere des reinen destillirten Wassers als Einheit anzunehmen; aber es ist, wegen der ungleichen Ausdehnung der Körper durch die Wärme nöthig, die Vergleichungen zwischen den eigenthümlichen Schweren bei einer bestimmten Wärme anzustellen, oder sie auf gleiche Temperatur zurück zu führen.

§. 83. Aufgabe. Eines gegebenen festen Körpers eigenthümliche Schwere zu bestimmen.

Auflösung. Erster Fall. Wenn der Körper im Wasser untersinkt. Man wiegt den Körper zuerst an einer sehr feinen Waage auf gewöhnliche Weise; man wägt ihn dann, wie Fig. 125. zeigt, indem man ihn im Wasser ABC untertaucht. Fand man vorhin sein Gewicht $= P$, jetzt im Wasser $= Q$, so ist $P - Q$ das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser und es verhält sich das specifische Gewicht des Körpers zu dem specifischen Gewichte des Wassers wie P zu $P - Q$.

Zweiter Fall. Wenn der Körper leichter als Wasser ist, so kann man sein Untersinken dadurch bewirken, daß man einen schweren Körper von bekanntem Gewichte und von bekannter eigenthümlicher Schwere mit ihm verbindet. Ergiebt sich nun das Gewicht des zu untersuchenden Körpers außer dem Wasser $= P$, das Gewicht des angehängten Körpers $= p$, und weiß man, daß der angehängte schwere Körper im Wasser das Gewicht $= q$ haben würde, so erhält man, indem man die beiden vereinigten Körper im Wasser $= R$ wiegend findet, das Gewicht des zu prüfenden leichtern Körpers im Wasser $= R - q$, und also seinen Verlust an Gewicht $= P - (R - q)$. So viel wiegt das Wasser, welches an Volumen ihm gleicht, und seine specifische Schwere wird also durch $\frac{P}{P-(R-q)}$ ausgedrückt, wenn die des Wassers = 1 ist.

§. 84. Aufgabe. Eines flüssigen Körpers absolute und eigenthümliche Schwere zu bestimmen.

Auflösung. Will man zuerst genau bestimmen, wie viel ein Cubiczoll des Flüssigen wiegt: so ist es am besten, einen sehr genau gearbeiteten soliden Cubiczoll aus Metall machen zu lassen; diesen auf gewöhnliche Weise außer dem Flüssigen abzuwiegen und dann durch genaue Abwiegung desselben in dem Flüssigen zu finden, wie viel er an Gewicht verliert. Dieser Gewichtverlust ist das Gewicht eines Cubiczolles des flüssigen Körpers.

Kömmt es bloß auf das relative Gewicht des flüssigen Körpers an, so wiegt man eben so einen festen Körper in demselben ab und nun ergiebt sich das specifische Gewicht desselben in Vergleichung gegen das des festen Körpers, wenn man den Gewichtverlust im Flüssigen mit dem Gewichte des Körpers, welches er im Freien hatte, dividirt. Will man das specifische Gewicht des Flüssigen sogleich mit dem specifischen Gewichte des Wassers vergleichen, so muß man den Gewichtsverlust = P desselben im Wasser abgewogenen Körpers, und den Gewichtsverlust = Q eben des in dem gegebenen flüssigen Körper abgewogenen festen Körpers durch einander dividiren. Oder des gegebenen flüssigen Körpers specifische Schwere ist zur specifischen Schwere des Wassers, wie $Q : P = \frac{Q}{P} : 1$.

§. 85. Um die verhältnißmäßigen eigenthümlichen Gewichte verschiedener flüssiger Körper zu vergleichen, dienen auch die Aräometer, welches hohle schwimmende Körper sind. Diese sind entweder so eingerichtet, daß sie sich (Fig. 126.) während ihr cylindrischer Hals ab vertical bleibt, zu ungleichen Tiefen einsenken können, und man nun aus dieser Tiefe, welche durch eine Scale an jenem Halse abgemessen wird, die specifische Schwere des Flüssigen bestimmt; oder sie haben nur ein einziges bestimmtes Merkmal am Halse ab, und werden durch Hülfe mehrerer oder minderer etwa bei aa aufgelegter Gewichte bis zu diesem Zeichen in den flüssigen Körper hinabgedrückt. Im ersteren Falle steigt der Hals desto höher aus dem Fluido hervor, je dichter und schwerer dieses ist, und Zahlen auf dem Halse aufgetragen, zeigen an, welche eigene Schwere der Einsenkung bis zu einem oder dem andern Puncte der Scale entspricht. Im letztern Falle muß man das Aräometer mit desto mehr Gewicht beschweren, je dichter oder specifisch schwerer der flüssige Körper ist, in den es eingetaucht wurde.

Unter diesen Aräometern sind die durch Gewichte regulirten die besten. Eine gute Einrichtung derselben beschreibt Tralles in Gilberts Annalen. Jahrg. 1808. 30. Band. Die Angaben der specifischen Gewichte verschiedener Körper findet man am vollständigsten in Brisson über die specifischen Gewichte der Körper, übersetzt von Blumhof.

§. 86. Bei allen diesen Abwiegungen muß man auf die Temperatur Rücksicht nehmen. Denn da die verschiedenen Körper durch die Wärme in ungleichem Maaße ausgedehnt werden, so bleibt das Verhältniß ihrer specifischen Gewichte nicht bei allen Temperaturen ungeändert.

Bei den Abwiegungen in der Luft muß man noch darauf Rücksicht nehmen, daß auch da der abgewogene Körper etwas, obgleich wenig, an Gewicht verliert, indem die Luft ihn mit einer Kraft aufwärts drückt, welche dem Gewichte der aus der Stelle getriebenen Luft gleich ist.

§. 87. Die Ueberlegung, daß diese Einwirkung des Druckes der Luft veränderlich sein muß, indem die Dichtigkeit der Luft sich ändert, hat zu Erfindung des Manometers oder Dichtigkeitmessers der Luft Veranlassung gegeben. Macht man nämlich, so gut als möglich, eine große Kugel A (Fig. 127.) luftleer, verschließt sie und hängt sie an eine feine Wage, wo ein Gegengewicht aus einem der schwersten Metalle ihr das Gleichgewicht hält: so verliert A desto mehr an Gewicht, je dichter die Luft ist, in welcher die Abwiegung geschieht; und, obgleich auch B in dichterer Luft mehr an Gewicht verliert, so ist doch dieses wegen des kleinen Volumens des aus schwerer Materie gemachten Gewichtes B unbedeutend. Findet man also, daß bei einem gewissen Zustande der Luft das Gleichgewicht zwischen A und B besteht; daß man dagegen zu einer andern Zeit dem Gewichte bei B zum Beispiel 20 Gran zulegen muß, um das Gleichgewicht herzustellen: so wiegt die Luft, welche dem Unterschiede der körperlichen Räume von A und B an Volumen gleich ist, im letztern Falle 20 Gran weniger, als im ersteren.

Dieses Instrument giebt also, wenn es mit vollkommener Genauigkeit gebraucht wird, wirklich die Aenderungen in der Dichtigkeit der Luft in Gewichtszahlen an.

§. 88. Auch die Kunst, in der Luft zu schiffen, beruht auf den hier abgehandelten Lehren. Da die meisten Körper so überaus viel schwerer sind als Luft, so bedarf es einer Verbindung mit einem sehr leichten Körper, um jene in der Luft zu erheben. Ein solcher ist das Wasserstoffgas, welches nur $\frac{1}{6}$ so schwer als die atmosphärische Luft, oder wenn man es recht rein erhält, noch leichter ist. Füllt man also mit dieser Luft-Art einen aus dünnem Zeuge luftdicht gemachten Ballon, so treibt der Druck der umgebenden Luft diesen mit bedeutender Gewalt, so daß er angehängte schwere Körper mit sich heben kann, in die Höhe. Beim Höhersteigen gelangt er in dünnere Luftschichten, wenn er also sein Volumen ungeändert behält, so nimmt seine Steigekraft immer mehr ab, und man kann die Grenze, bis zu welcher er bei ge-

gebnem angehängtem Gewichte steigen kann, leicht bestimmen.

§. 89. **Beispiel.** Ein kugelförmiger Ballon von 28 Fuß Durchmesser sei mit Luft gefüllt, deren Gewicht $\frac{1}{6}$ so viel beträgt, als das Gewicht eines gleichen Volumens atmosphärischer Luft, die unter einem eben so großen Drucke steht und eben so warm ist; die sämmtlichen mit dieser Luftmasse verbundenen übrigen Körper wiegen 700 Pfund, zu bestimmen, mit welcher Gewalt der Ballon zu steigen anfängt, und wie hoch er steigt.

Der Kugel Inhalt ist $= 11494$ Cubicfuß, also wenn 1 Cubicfuß Wasser $= 70$ Pfund wiegt und atmosphärische Luft etwa $\frac{1}{770}$ dieses Gewichts hat, die aus der Stelle getriebene Luft $\frac{1}{11} \cdot 11494 = 1040$ Pfunde. Mit dieser Kraft trieb ihn nun zwar die umgebende Luft aufwärts; aber auch die im Ballon eingeschlossene Luft wog ohngefehr $\frac{1}{6} \cdot 1040 = 170$ Pfund. Der Ballon hatte für sich allein also doch nur eine Steigekraft $= 870$ Pfunde. War er nun mit 700 Pfund anderer Belastung beschwert, so waren 170 Pfund Steigekraft übrig. Hiermit hätte der Ballon eigentlich so hoch steigen sollen, bis das gesammte Gewicht von $170 + 700$ Pfund der in dem Raume von 11500 Cubicfuß enthaltenen Luft gleich wog, das ist bis

11500 Cubicfuß Luft 870 Pfunde wogen,
oder 1 Cubicfuß $\frac{87}{1150} = 0{,}076$ Pfund.

In der Nähe der Erde setzten wir sie $\frac{1}{11} = 0{,}091$ Pfund also hätte jene Dichtigkeit da statt gefunden, wo die Barometerhöhe $= \frac{5}{6}$ derjenigen Barometerhöhe war, die unten statt fand.

Aehnliche Berechnungen wirklicher Fälle giebt **Gilbert** in den Annalen der Physik. Jahrg. 1804. 1805. 16. und 20. Band.

§. 90. **Bemerkung.** Obgleich ein schwimmender Körper ruhen kann, wenn das Gewicht des aus der Stelle getriebenen Flüssigen gleich ist dem Gewichte des ganzen schwimmenden Körpers, und wenn die Schwerpuncte jener beiden Massen in einerlei Verticale liegen, so ist doch durch diese Bedingungen die Lage des Körpers nicht fest bestimmt, sondern es sind mehrere Lagen möglich, bei denen das Gleichgewicht besteht.

§. 91. Erklärung. Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers heißt sicher, wenn der Körper bei einer ihm ertheilten geringen Abweichung von der für das Gleichgewicht passenden Lage, wieder zu ihr zurück kehrt; unsicher oder wankend dagegen, wenn der Körper, nachdem man ihn von jener Lage entfernt hatte, nicht wieder zu ihr zurückkehrt, sondern sich in eine andre gleichfalls den Bedingungen des Gleichgewichts entsprechende Lage begiebt. Die Stabilität des Gleichgewichtes schwimmender Körper wird nach diesen Umständen bestimmt.

§. 92. Anmerkung. Die Untersuchung über die verschiedenen Lagen, in welchen ein schwimmender Körper ruhen kann, führt meistens auf verwickelte Rechnungen, ich gebe daher hier nur ein Beispiel, das sich noch ziemlich leicht übersehen läßt. Bossut handelt im Traité d'Hydrodynamique umständlicher hiervon; Euler in seiner scientia navalis und Bouguer im Traité du navire zeigen die Anwendung dieser Lehren auf den Schiffbau.

§. 93. Aufgabe. Ein grades Prisma, dessen Querschnitt das gegebene Dreieck ABC ist (Fig. 128.), soll so schwimmen, daß bei horizontaler Axe des Prisma's nur ein Winkel der Grundfläche eingetaucht ist; man sucht die Lage, in welcher dieses möglich ist.

Auflösung. Da die Axe des Prisma's horizontal ist, so gilt für alle auf die Axe senkrechten Querschnitte, was für einen gilt, und wir haben daher nur nöthig, das Dreieck ABC so zu betrachten, als ob seine Ebne der schwimmende Körper wäre.

Stellt DE die Wasserfläche vor und ist die Stellung des Dreiecks dem Gewichte entsprechend, so muß der Wasserkörper CDE dem Prisma CAB gleich wiegen, und wenn H des aus der Stelle getriebenen Wassers, I des ganzen Dreieckes Schwerpunct ist, so muß HI vertical sein. Wir wollen den schwimmenden Körper als homogen ansehen, damit sein Schwerpunct nach Statik §. 138. gefunden werden könne. Theilt man dann AB in G in zwei gleiche Hälften und nimmt auf CG, CI $= \frac{2}{3}$ CG, so ist I des schwimmenden Körpers Schwerpunct; ist ferner DF = FE in der Linie DE, und nimmt man CH $= \frac{2}{3}$ CF, so hat man H als des aus der Stelle getriebenen Wassers Schwerpunct.

Es sei AC = b, CB = a, und die gesuchten Linien CD = x, CE = y, so ist

Inhalt ABC : Inhalt CDE = ab : xy (Trigonom. §. 68.), folglich wenn die eigene Schwere des Wassers = P, des schwimmenden Körpers = p heißt,

p . ab = P . xy, das Gewicht des schwimmenden Körpers und des aus der Stelle getriebenen Flüssigen. Dieses ist die erste Bedingung des Gleichgewichtes. Die zweite ist, daß HI und folglich (Geom. §. 274.) auch FG vertical sei. Zieht man also DG, EG, so sind DFG, EFG bei F rechtwinklichte Dreiecke, und überdies DG = GE, weil DF = EF.

Es ist aber in dem völlig bekannten Dreiecke ABC auch CG = c bekannt und ACG = γ; BCG = δ bekannt, und es wird

$$DG^2 = c^2 + x^2 - 2cx \,.\, \mathrm{Cos}\,\gamma = GE^2 = c^2 + y^2 - 2cy \,.\, \mathrm{Cos}\,\delta,$$

oder, weil $y = \frac{p \,.\, ab}{P \,.\, x}$ war,

$$x^2 - 2cx \,.\, \mathrm{Cos}\,\gamma = \frac{p^2 \,.\, a^2b^2}{P^2 \,.\, x^2} - \frac{2c \,.\, p \,.\, ab}{P \,.\, x} \mathrm{Cos}\,\delta,$$

das ist

$$x^4 - 2cx^3 \,\mathrm{Cos}\,\gamma + 2c \,.\, \frac{p}{P} \,ab \,.\, x \,\mathrm{Cos}\,\delta - \frac{p^2a^2b^2}{P^2} = 0;$$

Die Werthe von x, welche diese Gleichung vom vierten Grade angiebt, würden die Lage bestimmen, bei welchen das Gleichgewicht besteht.

Wir wollen nun den Fall betrachten, da das Dreieck zwei gleiche Schenkel $a = b$ hat, und wo folglich auch $\gamma = \delta$ wird; dann geht unsre Gleichung in

$$x^4 - 2cx^3 \operatorname{Cos}\gamma + 2c \cdot \frac{p}{P} \cdot b^2 x \cdot \operatorname{Cos}\gamma - \frac{p^2 b^4}{P^2} = 0$$

über; oder in

$$x^2 (x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma) + \frac{pb^2}{P}\left(2cx \operatorname{Cos}\gamma - \frac{pb^2}{P}\right) = 0,$$

oder in

$$x^2\left(x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma + \frac{pb^2}{P}\right) - \frac{pb^2}{P}\left(x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma + \frac{pb^2}{P}\right) = 0,$$

oder in $\left(x^2 - \frac{pb^2}{P}\right)\left(x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma + \frac{pb^2}{P}\right) = 0.$

Hier kann also, damit der Werth der Gleichung Null gebe,

x entweder $= \pm\, b \sqrt{\frac{p}{P}}$,

oder $x = c \operatorname{Cos}\gamma \pm \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2 \gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$, werden, indem sowohl

$\left(x^2 - \frac{pb^2}{P}\right) = 0$; als $x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma + \frac{pb^2}{P} = 0$,

sein kann.

Da negative Auflösungen für unsre Aufgabe nicht passen, so giebt es drei Lagen, welche das Dreieck mit einer eingetauchten Ecke annehmen kann,

erstlich wo $x = b \cdot \sqrt{\frac{p}{P}}$ und $y = b \sqrt{\frac{p}{P}}$;

zweitens wo $x = c \operatorname{Cos}\gamma + \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$

und $y = \frac{pb^2}{P} \cdot \frac{1}{c \operatorname{Cos}\gamma + \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}}$, oder welches dasselbe ist, $y = c\,\mathrm{Cos}\gamma - \sqrt{\left(c^2\,\mathrm{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$;

drittens wo $x = c\,\mathrm{Cos}\gamma - \sqrt{\left(c^2\,\mathrm{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$,

$$y = c\,\mathrm{Cos}\gamma + \sqrt{\left(c^2\,\mathrm{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)} \text{ ist.}$$

§. 94. Diese drei verschiedenen Lagen des gleichschenklichten Dreieckes sind möglich, wenn $c\,\mathrm{Cos}\gamma > b \,.\, \sqrt{\frac{p}{P}}$ ist, und zugleich $b > c\,\mathrm{Cos}\gamma + \sqrt{\left(c^2\,\mathrm{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$. Aber außerdem kann das Dreieck auch so liegen, daß es mit zwei eingetauchten Ecken schwimmt.

§. 95. Aufgabe. Eben der in §. 93. beschriebene Körper soll so schwimmen, daß zwei Ecken eingetaucht sind, man sucht die Bestimmungen für seine Lage.

Auflösung. Man kann sich die vorige Figur (Fig. 128.) umgekehrt vorstellen, so daß ADEB unter dem Wasser liegt. Da nun des ganzen Dreiecks Inhalt $= \frac{1}{2}\,ab\,.\,\mathrm{Sin}\,(\gamma + \delta)$, und Gewicht $= \frac{p\,.\,ab}{2}\,.\,\mathrm{Sin}\,(\gamma + \delta)$, des Trapezes ADEB Inhalt $= \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,(\gamma + \delta)\,(ab - xy)$ Gewicht $= \frac{1}{2}\,P\,.\,\mathrm{Sin}\,(\gamma + \delta)\,(ab - xy)$ ist, so muß $P\,(ab - xy) = p\,.\,ab$, oder $xy = \frac{ab\,.\,(P - p)}{P}$ sein, und zugleich muß wie vorhin
$x^2 - 2cx\,\mathrm{Cos}\gamma = y^2 - 2cy\,\mathrm{Cos}\delta$, werden.

Nehme ich wieder $a = b$ und $\gamma = \delta$, so soll $y = \frac{b^2\,(P - p)}{P\,.\,x}$ sein, und folglich

$$x^4 - 2cx^3\,\mathrm{Cos}\gamma + \frac{2cb^2x(P-p)\,\mathrm{Cos}\gamma}{P} - \frac{b^4(P-p)^2}{P^2} = 0,$$

diese Gleichung läßt sich in zwei Factoren zerlegen

$$\left(x^2 - \frac{b^2(P-p)}{P}\right)\left(x^2 - 2cx\,Cos\gamma + \frac{b^2(P-p)}{P}\right) = 0,$$

und es kann $x = b\sqrt{\frac{P-p}{P}}$,

oder $x = c\,Cos\gamma + \sqrt{\left(c^2 Cos^2\gamma - \frac{b^2(P-p)}{P}\right)}$,

oder $x = c\,Cos\gamma - \sqrt{\left(c^2 Cos^2\gamma - \frac{b^2(P-p)}{P}\right)}$

sein, und dieses sind die drei Werthe, die x erhalten kann.

§. 96. Beispiel. Es sei $c = \frac{1}{2}b$, oder $\gamma = 60°$, so kann das gleichschenklichte Dreieck in folgenden Stellungen schwimmen. Erstlich mit einer Ecke unter dem Wasser, sowohl wenn $x = y = b\sqrt{\frac{p}{P}}$ ist, als wenn

$$x = \tfrac{1}{4}b \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{16}b^2 - \tfrac{p}{P}b^2\right)}$$

und $y = \frac{1}{4}b \mp \sqrt{\left(\frac{1}{16}b^2 - \frac{p}{P}b^2\right)}$ ist.

Zweitens mit zwei Spitzen unter dem Wasser, wenn $x = y = b\sqrt{\frac{P-p}{P}}$, und

wenn $x = \frac{1}{4}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}b^2 - b^2\left(\frac{P-p}{P}\right)\right)}$ ist.

Wäre $P = 20 \, . \, p$, oder der schwimmende Körper nur $\frac{1}{20}$ so schwer als der Flüssige, worin er eingetaucht ist, so gäbe das für die beiden ersten Fälle $x = y = b\sqrt{\frac{1}{20}}$,

$x = \frac{1}{4}b \pm \sqrt{(\frac{4}{80}b^2)}$,

für die beiden letztern Fälle $x = y = b \, . \sqrt{\frac{19}{20}}$,

und $x = \frac{1}{4}b \pm \sqrt{(\frac{1}{16} - \frac{19}{20})} \, . \, b$,

wo also der letzte unmöglich wird.

Das Dreieck kann in den vier Stellungen schwimmen, die Fig. 129. 130. 131. 132. darstellt, wenn das Fluidum die hier vorausgesetzte sehr große specifische Schwere hat.

§. 96. Aufgabe. Ein schwimmender Körper ABCD (Fig. 133.), der in der Stellung ABCD ruhete, wird in die Stellung EFGH so gebracht, daß sein eingetauchter Theil noch eben so groß ist als vorhin; man soll bestimmen, ob er in die vorige Lage zurück zu kehren oder eine andre anzunehmen, ein Bestreben hat.

Auflösung. Damit der Körper schwimmend im Gleichgewichte sei, muß des ganzen Körpers ABCD Gewicht = P eben so groß sein, als das Gewicht des aus der Stelle getriebenen Wassers. Ist also MN die Oberfläche des Wassers und K der Schwerpunct der Wassermasse, die in OBDP Raum fände, so muß OBDP . b = P sein, wenn b das Gewicht von 1 Cubicfuß Wasser bedeutet; und des ganzen Körpers Schwerpunct muß in der Verticallinie KL liegen, wenn der Körper in der Stellung ABCD ruhen soll. Wir haben nicht nöthig, den schwimmenden Körper als homogen anzunehmen und können daher seinen Schwerpunct von der Mitte der Figur entfernen; wir können denselben also entweder unterhalb K oder oberhalb annehmen.

Erster Fall. Der Schwerpunct g des schwimmenden Körpers liege unterhalb K.

Indem nun der Körper in die Stellung EFGH so gebracht wird, daß sein eingetauchter Theil eben so groß als vorhin bleibt, kömmt der vorhin eingetauchte Theil in die Lage QFGR und sein Schwerpunct gelangt nach k; aber k ist jetzt nicht der Schwerpunct des aus der Stelle getriebenen Wassers, sondern da dieses den Raum SFGT einnehmen würde, so liegt sein Schwerpunct offenbar mehr nach Q zu, etwa in U. Der Schwerpunct des ganzen Körpers ist aus g nach γ gerückt, und es ist nun so als ob in γ die Kraft $= P$ niederwärts, in U die Kraft $= P$ als Druck des Wassers aufwärts wirkte, und beide Kräfte streben dahin, den Körper in seine vorige Stellung zu bringen. Die vorige Gleichgewichtsstellung hatte also, wenn der Schwerpunct des ganzen Körpers unterhalb K lag, erhebliche Stabilität.

Zweiter Fall. Der Schwerpunct f des schwimmenden Körpers liege oberhalb des Schwerpunctes K der aus der Stelle getriebenen Wassermasse.

Indem der Körper in die Lage EFGH kömmt, rückt sein Schwerpunct nach φ, und der aus der Stelle getriebenen Wassermasse Schwerpunct nach U. Es ist also ganz so, als ob in φ eine Kraft $= P$ niederwärts und in U eine gleiche Kraft aufwärts wirkte. Beide tragen bei, den Körper in seine alte Stellung zurück zu bringen, so lange die durch φ gezogne Verticale zwischen U und K, oder so lange φ niedriger liegt, als der Durchschnittspunct V der beiden durch U und k auf OP, QR gezognen Senkrechten. Befände sich φ in V, so würde der Körper in seiner neuen Lage ruhen. Hätte der Schwerpunct f′ so hoch gelegen, daß φ' jenseits V fiele, so würden Kräfte, deren eine in φ' niederwärts und eine in U aufwärts wirkt, beide den Körper von seiner alten Lage noch mehr zu entfernen streben, und sein Gleichgewicht hätte keine Stabilität.

§. 97. Erklärung. Wenn man durch den Schwerpunct U der jetzt aus der Stelle getriebenen Wassermasse eine Senkrechte UV auf den Wasserspiegel zieht, und zugleich diejenige Stellung der Linie $\gamma k V$ bemerkt, in welche die vor der Störung des Gleichgewichtes durch den Schwerpunct der Wassermasse gezogne, auf den Wasserspiegel Senkrechte jetzt gelangt ist: so heißt der Durchschnittspunct V beider Linien das Metacentrum des schwimmenden Körpers.

§. 98. Die vorigen Betrachtungen ergeben, daß der Schwerpunct des ganzen Körpers unterhalb des Metacentri liegen muß, wenn der Körper einige Stabilität haben soll.

§. 99. Die Betrachtungen des 96. §. lassen sich aber nun auch rechnend anstellen. Des Körpers Gewicht sei = P und eben so groß das Gewicht der aus der Stelle getriebenen Wassermasse, ehe das Gleichgewicht gestört ward. Indem der Körper in die Stellung EFGH gebracht wird, bleibt, wie wir vorausgesetzt haben, das Gewicht des aus der Stelle getriebenen Wassers = P, und folglich ist das Dreieck SQW = RWT, welches, wenn der Winkel SWQ sehr klein sein soll, nur statt findet, wenn WQ = WR ist, indem, wenn der Winkel SWQ = RWT = α, des Dreiecks Inhalt $= \frac{1}{2}$ SW . WQ . Sin $\alpha = \frac{1}{2}$ RW . WT . Sin α ist, und bei sehr kleinen Schwankungen SW nahe genug = QW, RW = WT bleibt.

In der jetzigen Stellung des Körpers ist sein Schwerpunct g nach γ gerückt, und wir können leicht das Moment aller wirkenden Kräfte in Beziehung auf diesen Punct ausrechnen.

Außer dem Gewichte = P des ganzen Körpers, welches wir als in γ vereinigt und dort vertical niederwärts wirkend betrachten, ist der vertical aufwärts strebende Druck des Wassers die einzige Kraft, welche den Körper zu drehen strebt. Die letztere kennen wir, da der Schwerpunct U des jetzt eingetauchten Theiles oder der aus der Stelle getriebenen Wassermasse nicht bekannt ist, am besten ansehen als entspringend aus drei Kräften, die sich in dem nach k gerückten Schwerpuncte der beim Gleichgewichte aus der Stelle getriebnen Wassermasse und in den Schwerpuncten der Dreiecke SWQ, RWT befinden. Die jetzt aus der Stelle getriebene Wassermasse ist nämlich = P — RWT + SWQ, und es ist also so gut, als ob erstlich die Kraft = P in k vertical aufwärts wirkte; zweitens das Gewicht der Wassermasse RWT in ihrem Schwerpuncte vertical niederwärts,

und endlich das Gewicht des Wassers SWQ in seinem Schwerpuncte vertical aufwärts. Diese drei Kräfte sind $= P$; $= \frac{1}{2}\,WT^2 . \text{Sin}\,\alpha$, und $= \frac{1}{2}\,WQ^2 . \text{Sin}\,\alpha$. Zieht man durch die jetzige Stellung γ des Schwerpunctes des ganzen schwimmenden Körpers eine Verticale γX, so ist für den Fall, da γ unterhalb k liegt
das Moment von P, $= P . kZ = P . k\gamma . \text{Sin}\,\alpha$,
das Mom. v. WRT ist $= (\frac{2}{3}\,WT - kZ) . \frac{1}{2}\,WT^2 . \text{Sin}\,\alpha$
und dieses Moment hat dasselbe Zeichen, wie das von P, da beide Kräfte eine Drehung nach derselben Seite um γ bewirken.

Das Moment von WQS ist, wenn ich sogleich $\frac{1}{2}\,WQ^2 . \text{Sin}\,\alpha = \frac{1}{2}\,WT^2 . \text{Sin}\,\alpha$ setze,

$$= (\tfrac{2}{3}\,WS + kZ)\,\tfrac{1}{2}\,WT^2 . \text{Sin}\,\alpha,$$

und hat dasselbe Zeichen, weil auch diese Kraft die Seite EF zu heben strebt. Die Summe aller Momente ist also $= P . k\gamma . \text{Sin}\,\alpha + \frac{2}{3}\,WT^3 . \text{Sin}\,\alpha$, und dadurch wird die Größe der Stabilität des Körpers ausgedrückt, indem sein Bestreben, in die vorige Lage zurückzukehren, desto größer ist, je größer sich dieses Moment findet. Und hier findet immer Stabilität statt, weil, wenn γ niedriger als k liegt, alle Kräfte sich vereinigen, um den Körper in seine vorige Lage zurückzubringen.

Liegt der Schwerpunct f höher als der Schwerpunct K, der aus der Stelle getriebenen Wassermasse, so rückt jener nach φ, dieser nach k, indem der Körper seine Stellung ändert. Berechnet man jetzt, auf ähnliche Art wie vorhin, die Momente der einzelnen Theile, in welche wir den Wasserdruck zerlegt haben, so ist erstlich der in k wirkenden Kraft $= P$, Moment in Beziehung auf den Drehungspunct φ, durch welchen die Verticale φy gezogen ist,

$$= - P . k\varphi . \text{Sin}\,\alpha,$$ und hier negativ, weil diese Kraft den Körper von seiner vorigen Stellung mehr zu entfernen strebt. Das Moment des Gewichtes von RWT wirkt dem vorigen entgegen und ist $= \frac{1}{2}\,WT^2 . \text{Sin}\,\alpha\,(\frac{2}{3}\,WT + \varphi W . \text{Sin}\,\alpha)$; das Mo-

ment des Gewichtes von SWQ wirkt zu Unterstützung der zweiten Kraft und ist

$$= + \tfrac{1}{2} WT^2 . \text{Sin}\,\alpha\,(\tfrac{2}{3} WT - \varphi W . \text{Sin}\,\alpha).$$

Die Summe aller Momente ist also

$$= - P . k\varphi . \text{Sin}\,\alpha + \tfrac{2}{3} WT^3 . \text{Sin}\,\alpha,$$

und dieses Moment deutet auf wirkliche Stabilität des Körpers, so lange es positiv, auf Mangel an Stabilität, wenn es negativ ist.

Aus dieser Formel läßt sich also die Stabilität finden, wenn erstlich des Körpers Gewicht $= P$, zweitens der Abstand seines Schwerpunctes von dem Schwerpuncte des beim Gleichgewichte aus der Stelle getriebenen Wassers $= k\varphi$, und endlich die Breite, welche der Körper in der Höhe des Wasserspiegels hat $= OP = 2\,WT$ bekannt ist. Aus dieser Formel würde die Lage von U in jedem Falle bestimmt, und es ist offenbar, daß der Körper in seiner neuen Lage wieder ruhen wird, wenn φ in V läge; aber sich weiter von seiner vorigen Lage entfernen oder ganz umschlagen wird, wenn $W\varphi$ größer als WV wäre.

Sechster Abschnitt.

Vom Gleichgewichte tropfbarer Körper in Haarröhrchen.

§. 100. Erfahrung. Wenn man eine sehr enge an beiden Enden offene Glasröhre in Wasser oder einen andern Körper, der das Glas benetzt, eintaucht, so steigt das Wasser in dieser Röhre höher als der Wasserspiegel der Masse ist, worin sie eingetaucht wurde. Beobachtet man die Vorsicht, daß man die Röhre vorher inwendig mit dem Flüssigen befeuchtet, in welches man sie eintaucht, so steigt es allemal gleich hoch, wenn der Durchmesser der Röhre gleich ist, ja man bemerkt sogar, daß diese Höhe bei gut benetzten Röhren und gleichen Durchmessern der Röhren dieselbe ist, wenn auch die Röhren aus verschiedenen Materien verfertigt sind, vorausgesetzt, daß das Fluidum, worin man sie eintaucht, immer dasselbe sei.

Verschiedene Fluida erreichen ungleiche Höhen, die nicht grade mit ihrem specifischen Gewichte im Verhältnisse stehen.

Bei genauerer Aufmerksamkeit findet man, daß die Oberfläche des in dem feinen Röhrchen oder Haarröhrchen AB (Fig. 134.) aufgestiegenen Flüssigen in der Mitte vertieft ist, oder wenn die Röhre cylindrisch ist, eine ohngefehr halbkugelförmige Höhlung bildet.

§. 101. Erfahrung. Dagegen giebt es andre Flüssige, die das Glas nicht befeuchten, zum Beispiel Quecksilber, und diese steigen nicht nur nicht über des umgebenden Flüssigen Oberfläche hinauf im Haarröhrchen, sondern sie bleiben, so wie Fig. 135. zeigt, mit ihrer Oberfläche ab in der Röhre unter dem Spiegel CD des umgebenden Flüssigen, endigen sich aber oben in eine convexe Halbkugel, so wie jene in eine concave Halbkugel.

§. 102. Aehnliche Erscheinungen zeigen sich auch unter andern Umständen. In weiten Gefäßen zieht das Wasser sich an den Wänden höher hinauf, das Quecksilber hingegen steht an den Wänden eines Glasgefäßes niedriger als in der Mitte.

§. 103. Bemerkung. Da die Schwere als eine anziehende Kraft der ganzen Erde betrachtet werden kann, und sehr viele Erscheinungen darauf leiten, jedem Theilchen der Materie eine anziehende Kraft zuzuschreiben, so ist es leicht, den Gedanken zu fassen, daß das Höhersteigen des Wassers im Haarröhrchen von der anziehenden Kraft der Röhre herrühre, oder davon, daß die Theilchen der Röhre das Wasser mit mehr Kraft anziehen, als die Wassertheilchen sich unter einander. Beim Quecksilber muß ohne Zweifel das Gegentheil statt finden.

Die hier wirkende Attraction muß wohl nur in sehr kleinen Abständen merklich sein, denn das Wasser steigt nicht höher, wenn auch die Röhre AB länger ist. Ja die dünne Wasserschichte, welche bloß die Röhre von innen befeuchtet, scheint dick genug zu sein, um die Verschiedenheit in der anziehenden Kraft ungleichartiger Materien unmerklich zu machen, indem das Wasser in Röhren von ungleicher Materie aber gleichem Durchmesser gleich hoch steigt, wenn nur die Wände vollkommen benetzt waren.

§. 104. Die Wassersäule EF wird hier also dadurch getragen, daß die äußerste Schichte sich an die Wand der Röhre anhängt, diese eine zweite Schichte neben sich hinaufzieht, die zweite eine dritte u. s. w., und das ganze Gewicht der Säule EB wird also getragen von der in jedem Puncte der cylindrischen Wand wirksamen anziehenden Kraft.

§. 105. Bemerkung. Um die Richtigkeit dieser Hypothese zu prüfen, denken wir uns die Röhre AB nach GH verlängert, jedoch so, daß die Wände der Röhre AB aus dem festen Körper, z. B. Glas, die eingebildeten Wände der FGH aber bloß aus den umgebenden Wassertheilchen bestehen. Da die in der Röhre AB stehende Wassersäule bei der freien Verbindung mit dem Fluido im Gleichgewichte ist, so muß die ganze Säule EB von Kräften erhalten werden, die auf das übrige Fluidum oder auf das der bequemern Vergleichung wegen als abgesondert gedachte Fluidum BFGH nicht wirken.

Allerdings wirken auch die Wassertheilchen selbst anziehend auf einander, aber genau so in der Wassersäule HI als in der FK, weshalb diese Einwirkung sich durch keine Ungleichheit in beiden Schenkeln verräth. Die Wassertheilchen, die zunächst unter dem Ende der Glasröhre bei F, B liegen, werden aufwärts durch die anziehende Kraft = V des Glases gezogen. Zwar ziehen die unterhalb liegenden Wassertheilchen, die gleichsam die Wand des Theiles FK bilden, auch niederwärts, aber dieses findet eben so gut in der gleich hohen Wasserschichte unterhalb H statt, und kommt also nicht, als der einen Wassersäule eigenthümlich vor. Die Theilchen, welche unmittelbar oberhalb FB liegen, werden von der oberhalb ab liegenden Glasröhre mit der Kraft = V aufwärts, von den als Röhrenwand gedachten Wassertheilchen unterhalb FB mit der dem Wasser eigenthümlichen Anziehungskraft = U herabgezogen. Die beiden Wassertheilchen, die unmittelbar oberhalb und unterhalb FB an der Röhrenwand anliegen, werden also mit der gesammten Kraft = 2V — U aufwärts gezogen.

Die höhern Schichten werden offenbar, da entferntere Theilchen gar nicht einwirken, gleich stark aufwärts und niederwärts gezogen; denn selbst die höchste Schichte hat über sich und unter sich Glaswände, und da wir nur die an den Glaswänden hängenden Theilchen zu betrachten haben, so leidet selbst die oberste Schichte keinen größern Zug aufwä..s als niederwärts.

§. 106. Lehrsatz. Die Höhe, zu welcher das Wasser in einem cylindrischen Haarröhrchen steigt, verhält sich unter sonst gleichen Umständen sehr nahe umgekehrt wie der Halbmesser der Röhre.

Beweis. Die Kräfte U und V verhalten sich wie der Umfang der Röhre, da sie in jedem Puncte des Umfangs wirken; daher kann man, wenn r der Röhre Halbmesser, und folglich ihr Umfang $= 2r\pi$ ist, $U = 2r\pi \cdot u$ und $V = 2r\pi \cdot v$ setzen. Hier drücken u, v die Zahlen aus, welche nach Verschiedenheit der Materien ungleich sind.

Es ist also $2V - U = 2\pi r\,(2v - u)$ die Kraft, welche das Wassersäulchen EB trägt. Die Säule EB besteht aus einem Cylinder von der Höhe $mn = l$ und dem oberhalb m liegenden Stücke, welches ohngefehr als ein Cylinder von der Höhe $= r$, aus dem die Halbkugel vom Halbmesser $= r$ weggenommen ist, kann angesehen werden. Der Cylinder mn ist $= \pi \cdot r^2 l$, jenes Stück $= \frac{1}{3}\,\pi \cdot r^3$. Nenne ich also das Gewicht einer Cubiclinie Wassers $= g$, und drücke alle Längen in Linienmaaße aus, so ist das Gewicht der Wassersäule

$$= \pi \cdot r^2 \cdot g\,(l + \tfrac{1}{3}\,r),$$

und dieses muß $= 2\pi r \cdot (2v - u)$,

oder $\frac{1}{2}\,r \cdot g\,(l + \frac{1}{3}\,r) = 2v - u$, sein. v und u bleiben dasselbe, wenn die Materien des Röhrchens und des Flüssigen dieselben bleiben, und $r \cdot g\,(l + \frac{1}{3}\,r)$ bleibt daher ungeändert bei verschiedenen Halbmessern der Röhre. Da r gewöhnlich sehr klein gegen l ist, so ist $l + \frac{1}{3}\,r$

von l nicht sehr verschieden, und daher beinahe l . r immer gleich groß bei verschiedenen Halbmessern der Röhre. Es ist folglich l halb so groß bei einem doppelt so großen Werthe von r, und überhaupt l im umgekehrten Verhältnisse von r.

§. 107. Bei ganz genauen Versuchen findet man, daß in Röhren von verschiedenen Halbmessern R und r, die Höhen L, l bis an den niedrigsten Punct der concaven Oberflächen nicht genau in dem Verhältnisse $L : l = r : R$ stehen, sondern daß

$$r (l + \tfrac{1}{3} r) = R (L + \tfrac{1}{3} R) \text{ ist.}$$

Gay-Lüssacs Versuche, welche Laplace in seiner Abhandlung über die Haarröhrchen anführt (Gilb. Annal. Jahrg. 1809. 33. Bd.) zeigen dieses.

§. 108. Wenn in unsrer Formel $U > 2V$ oder $u > 2v$ wäre, so würde die aufwärts ziehende Kraft negativ, und das Fluidum würde nun so wie Quecksilber in Glasröhren sich niedriger halten, als die freie Oberfläche des umgebenden Flüssigen.

§. 109. Lehrsatz. Auch zwischen zwei parallelen Ebnen steigt das diese Ebnen benetzende Fluidum zu einer Höhe, die sehr nahe dem Abstande der Ebnen von einander umgekehrt proportional ist.

Beweis. Die horizontale Länge der parallelen Ebne sei $= a$, so ist $= 2a$ die ganze Größe der Linie, welche, indem sie das Fluidum berührt, anziehend auf dieses wirkt. Wir können daher nach eben den Gründen, wie vorhin $2V - U = 2a (2v - u)$, als wirkende Kraft setzen. Das Gewicht der gehobenen Wassersäule ist, wenn der Abstand der Ebnen von einander $= d$, und die Höhe mn $= l$ heißt $= g . a . d . l$; aber oberhalb m (Fig. 134.) befindet sich noch das ausgehöhlte Prisma, welches die Breite $= d$ und Höhe $= \frac{1}{2} d$ hat, aus welchem aber der halbe Cylinder vom Radius $= \frac{1}{2} d$ weggenommen ist. Dieses ausgehöhlten Prisn'a's Inhalt ist $= a\,(\frac{1}{2}\,d^2 - \frac{1}{8}\,\pi d^2)$, und folglich der ganzen gehobenen Wassersaule Gewicht $= g\,.\,a\,.\,d\,.\,l + g\,.\,a\,\frac{1}{2}\,d^2\,(1 - \frac{1}{4}\,\pi)$, und dieses muß $= 2a\,(2v - u)$ sein, also muß da v, u und g bei denselben Materien gleiche Werthe behalten $dl + \frac{1}{2}\,d^2\,(1 - \frac{1}{4}\,\pi)$ bei allen Abständen der Ebnen von einander immer gleich bleiben, welches bei der Kleinheit von d beinahe dl immer gleich, oder für verschiedene Abstände d, D, die zugehörige Höhe l, L beinahe strenge im umgekehrten Verhältniß der Abstände giebt.

§. 110. Hierauf gründet sich das Experiment, wo man zwei verticale Ebnen, nicht parallel, sondern unter einen sehr spitzen Winkel gegen einander geneigt, aufstellt. Die zwischen ihnen aufsteigende Flüssigkeit, in welche sie eingetaucht worden, steigt da, wo sie einander sehr nahe sind, sehr hoch, in den Puncten hingegen, wo beide Ebnen mehr von einander abstehen, minder hoch; und so bildet die Oberfläche des Flüssigen eine krumme Linie, deren Puncte in Höhen, den Abständen umgekehrt proportional liegen, welches die Hyperbel ist.

§. 111. **Bemerkung.** Woher es rührt, daß die Oberfläche des gehobenen Wassers eine Höhlung bildet, die bei sehr engen Röhren beinahe einer hohlen Halbkugel gleicht, läßt sich aus dem Vorigen wohl übersehen. Indem nämlich das Wasser eigentlich nur an der Röhrenwand hinaufgezogen wird, und die folgenden concentrischen Wasserschichten nur von den benachbarten Wassertheilchen, die schon gehoben sind, getragen werden, so ist es einleuchtend, daß diese weniger und weniger sich heben, und folglich eine in der Mitte hohle Oberfläche bilden werden. Laplace zeigt nun überdies, daß bei einer so gebildeten hohlen Oberfläche der Druck, den das Fluidum auf sich selbst, das ist auf die tiefer liegenden Theile, vermöge der gegenseitigen Attraction der Theilchen ausübt, viel geringer ist, als bei ebner Oberfläche; daß also, wenn die Oberfläche HD eben, die Oberfläche

Emo hohl ist, die Wassertheilchen an der letztern (abgesehen von der Einwirkung der Schwere) nicht mit der Gewalt niederwärts drängen, oder sich nicht mit der Gewalt den sie anziehenden Theilchen unterhalb m zu nähern streben, wie bei ebner Oberfläche. So wirkt der Meniscus Emopq gleichsam mit einer saugenden Kraft, und hebt, wenn er selbst durch fremde Kräfte gehalten wird, das Wasser in der Röhre.

Bei convexer Oberfläche findet das Umgekehrte statt. Die gegenseitige Anziehung der Theilchen drängt bei convexer Oberfläche die in dieser Fläche liegenden Theilchen stärker gegen die unteren als es bei ebener Oberfläche geschähe, und deshalb reicht eine niedrigere Säule mit convexer Oberfläche hin, um einer höheren mit ebner Oberfläche das Gleichgewicht zu halten.

§. 112. Diese Bemerkung ist deswegen wichtig, weil sie lehrt, daß im Barometer, dessen einer Schenkel weit genug ist, um eine fast horizontale Quecksilberfläche darzubieten, selbst die höchste Wölbung der Quecksilberfläche im andern Schenkel nicht die volle Höhe zeigt, welche das Quecksilber erreichen sollte, oder bei hinlänglich großer und deshalb horizontaler Oberfläche erreichen würde. Wenn also die Schenkel des Barometers ungleich sind, und vorzüglich, wenn der eine ein erheblich weites Gefäß bildet, und der andre sehr eng ist, so muß man zu der beobachteten größten Höhe der Wölbung des Quecksilbers im luftleeren Schenkel noch etwas zulegen, um die Einwirkung dieser Attractionskraft in Rechnung zu bringen.

Biot giebt in seinem traité de Physique Tom. I. pag. 90. ein Täfelchen zu diesem Zwecke, nach Laplace's Formeln berechnet.

§. 113. Zur Erläuterung der in §. 111. angestellten Betrachtungen dient folgender Versuch, den Laplace anführt.

Man nimmt eine gebogene Röhre, deren einer Schenkel sehr enge, der andre erheblich weit ist, beide aber oben offen sind. Gießt man in diese, nachdem sie gut mit Alkohol benetzt worden, Alkohol etwa bis an ab, so steht seine Oberfläche im engen Schenkel um eine bestimmte Höhe = l höher, als im andern, und die dortige Oberfläche cd ist concav. Gießt man nun bei ab mehr Alkohol nach, bis die Oberfläche im engen Schenkel das Ende desselben erreicht, so nimmt die Concavität der dortigen Oberfläche langsam ab, und die Oberfläche ist eine Ebne, wenn man den weitern Schenkel bis an gh, bis zu eben der Horizontalfläche gefüllt hat, in welcher die Oeffnung ef liegt. Gießt man noch mehr Alkohol nach, so drängt sich über ef ein convexer Tropfen, ohne abzufließen, hervor, der endlich die Gestalt einer Halbkugel annimmt; diese erreicht er aber erst, wenn der Alkohol im Schenkel gh so hoch über die durch das Ende ef gelegte Ebne herauf gestiegen ist, als vorhin der Höhen-Unterschied der Flächen cd und ab war. — Hier ist also der Druck, den ein convexer Tropfen ausübt, genau eben so viel stärker in Vergleichung gegen den Druck bei ebner Oberfläche, als er bei concaver Oberfläche schwächer in Vergleichung gegen den Druck bei ebner Oberfläche war.

Ganz ähnlich ist folgender Versuch, ab (Fig. 137.) sei ein an beiden Enden offenes Haarröhrchen, in welchem der Alkohol eine Höhe = l erreicht, wenn man es in ein Gefäß mit Alkohol taucht. Flößt man in diese Röhre Alkohol ein, indem man sie frei in verticaler Lage hält, so füllt sich der untere Theil der Röhre mit Alkohol, der sich zugleich unten als ein concaver Tropfen hervordrängt. Je höher der Alkohol in der Röhre steigt, desto mehr wird dieser Tropfen einer Halbkugel ähnlich, und erreicht diese Form völlig, wenn die Röhre bis zur Höhe = 2l mit Alkohol gefüllt ist. Hier ist l die Höhe, welche durch die Wirkung der Röhre auf das innerhalb liegende Fluidum oder durch die Wirkung des concaven Meniscus cd getragen wird; und das zweite l wird verwandt, um be als convexe Halbkugel hervorzudrängen, indem die Röhre diese Tropfen mit einer Gewalt gleich dem Gewichte der Säule l in sich hereinzuziehen strebt, oder das zweite l wird getragen durch den vermehrten Gegendruck der convexen Oberfläche be.

Man stellt diese Versuche am liebsten mit Alkohol an, weil er noch gleichförmiger als Wasser alle Erscheinungen darstellt.

Siebenter Abschnitt.

Hydrostatische Betrachtungen über die Figur der Erde.

§. 114. Bemerkung. So wie bei den Haarröhrchen jedes Theilchen der Materie eine anziehende Kraft äußerte, so finden wir auch in der Wirkung der Weltkörper auf einander die Attraction als eine Kraft wieder, die jedem Theilchen der Materie eigenthümlich ist. Die Bewegungen der Himmelskörper zeigen, daß bei den Attractionen, die unsrer Schwere gleich wirken, die Kraft der Attraction sich für denselben Körper umgekehrt verhält, wie das Quadrat der Entfernungen des angezogenen Körpers von dem anziehenden, und bei gleichen Entfernungen wie die Massen der Körper. Setzen wir also dieses als das hier allgemein geltende Gesetz voraus, so läßt sich bestimmen, mit welcher Gewalt ein Körper unter gewissen Bedingungen angezogen wird.

§. 115. Lehrsatz. Wenn ABFE eine hohle Kugelschale von geringer Dicke vorstellt, so wird ein innerhalb derselben liegender Punct D, von ihr nach allen Seiten hin, gleich stark angezogen.

Beweis. (Fig. 138.) Man zeichne bei EF einen Kreis von sehr kleinem Halbmesser auf die Kugelfläche, ziehe von jedem Puncte des Umfangs dieses Kreises grade Linien durch den angezognen Punct D bis wieder an die Kugelfläche, so begrenzen die beiden Kegelflächen, deren Querschnitte DEF, DAB sind, bei AB ein zweites Stück der Kugelfläche, dessen Durchmesser AB ist, so wie des erstern Durchmesser EF war. Das Theilchen EF der Kugelfläche hat den Inhalt $= \frac{1}{4}\pi . EF^2$, und wenn die Dicke der Kugelschale $= f$, die Attractionskraft eines Theilchens vom Inhalte $= a^3$ in der Entfernung $= b$ durch G ausgedrückt wird, so ist des Theilchens $EF = \frac{1}{4} f . \pi . EF^2$, Attraction auf D durch $\frac{G . b^2}{a^3} . \frac{\frac{1}{4}\pi f . EF^2}{ED^2}$ ausgedrückt, indem diese Attraction sich zu G verhalten muß, direct wie die Massen $\frac{1}{4}\pi f . EF^2$ und a^3 und umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen b^2 und ED^2. Der Punct D wird aber zugleich nach entgegengesetzter Richtung von dem Theilchen AB der Kugelschale angezogen mit der Kraft $= \frac{\frac{1}{4}\pi f . AB^2}{AD^2} . \frac{G . b^2}{a^3}$, und diese Kraft ist, weil (Geom. §. 291.) $\frac{AB}{AD} = \frac{EF}{ED}$, eben so groß als die von EF auf D wirkende; jene beiden Theilchen ziehen also den Punct D mit gleicher Gewalt nach entgegengesetzten Richtungen, und eben so giebt es für jedes Theilchen der Kugelschale ein zweites correspondirendes Theilchen, welches die Attraction von jenem völlig aufhebt. D also wird nach keiner Seite hin, ein Bestreben zur Bewegung erhalten.

§. 114*. Der hier geführte Beweis gilt nur für sehr kleine Werthe von EF und AB; da aber jedem solchen, wenn gleich überaus klein gedachten Theile der Kugelschichte ein andres Theilchen entspricht, welches seine Attraction aufhebt, so gilt dennoch der Beweis strenge für die ganze Kugelschichte.

§. 115*. Ist aber der Satz wahr für eine Kugelschale von geringer Dicke, so gilt er nun auch, die Differenz ihres innern und äußern Durchmessers mag sein, welche sie will; denn eine dicke Kugelschale kann als aus solchen dünnen Kugelschalen zusammengesetzt gedacht werden.

§. 116. Lehrsatz. Wenn die Kugel ADFBA (Fig. 139.) auf den Punct H und die Kugel adfba auf den Punct h anziehend wirkt, und es ist für die Abstände von den Mittelpuncten C und c, HC : hc = AC : ac: so verhält sich die auf H wirkende Kraft zu der auf h wirkenden, wie die Halbmesser der Kugeln, wenn die Attraction der Größe der Theilchen direct und dem Quadrate der Abstände umgekehrt proportional ist.

Beweis. Man denke sich von beiden Kugeln zuerst nur Kugelschichten, deren Dicke bei jeder von beiden $\frac{1}{n}$ des Halbmessers beträgt, also bei der ersten $= \frac{1}{n}$ AC, bei der zweiten $= \frac{1}{n}$. ac ist. Zieht man nun unter gleichen Winkeln GHB = ghb und FHB = fhb Linien von den angezogenen Puncten nach einem größten Kreise der Kugel, so erhellt, weil HC : EC = hc : ec, daß die abgeschnittenen Kreisbogen AE, ED den ae, ed ähnlich sind, oder AE : ae = AC : ac = ED : ed. Wenn der Halbkreis AFB sich um die Axe AB dreht, so beschreibt DE einen auf der Kugelfläche liegenden Ring, dessen Inhalt wir, wenn DE und der Winkel FHG sehr klein ist, durch 2π . NE . ED ausdrücken können, wenn EN den senkrechten Abstand von der Axe, oder des Ringes Halbmesser, bedeutet. Legen wir also diesem Ringe eine Dicke $= \frac{1}{n}$ AC bei, so ist sein Inhalt $= 2\pi \cdot \frac{1}{n} AC \cdot NE \cdot ED$. Jedes Theilchen DE dieses Ringes wirkt anziehend auf H mit einer Kraft, die seiner Masse direct und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, das ist mit einer Kraft $= \frac{DE}{HE^2} \cdot \frac{G \cdot b^2}{a^3}$, wenn G die anziehende Kraft eines Körpers $= a^3$ in der Entfernung $= b$ angiebt. Aber es ist offenbar, daß die verschiedenen Theile unseres Ringes ihre auf AB senkrechten Wirkungen gegenseitig zerstören, weil jedem DE ein eben solches Stück gegenüber liegt; wir zerlegen daher die nach EH gerichtete Attractionskraft und finden die der Axe HB parallele Kraft $= \frac{DE}{HE^2} \cdot \frac{G \cdot b^2}{a^3} \cdot \frac{HN}{HE}$ für das Stückchen DE und folglich für den ganzen Ring, welchen DE beschreibt, die nach HB gerichtete Attractionskraft

$$= \frac{2\pi \cdot \frac{1}{n} AC \cdot DE \cdot EN \cdot HN}{HE^3} \cdot \frac{G \cdot b^2}{a^3}.$$

Ganz dieselben Ueberlegungen zeigen, daß in der andern Kugel der durch de beschriebene Ring auf h eine

$$\text{Attraction} = \frac{2\pi \cdot \frac{1}{n} ac \cdot de \cdot en \cdot hn}{he^3} \cdot \frac{G \cdot b^2}{a^3} \text{ nach}$$

der Richtung hb ausübt. Da nun
$HC : AC = hc : ac$, ferner $DHC = dhc$ und
$EHC = ehc$, und folglich
$EH : eh = DE : de = EN : en = HN : hn = AC : ac$
ist, so kann man

$$de \cdot en \cdot hn = \frac{DE \cdot EN \cdot HN \cdot ac^3}{AC^3}$$

und $he^3 = \frac{HE^3 \cdot ac^3}{AC^3}$ setzen. Also die Anziehung des durch de beschriebenen Kugelringes auf h läßt sich durch $2\pi \cdot \frac{1}{n} \cdot ac \cdot \frac{DE \cdot EN \cdot HN}{HE^3} \cdot \frac{G \cdot b^2}{a^3}$ ausdrücken, und verhält sich folglich zur Attraction des ähnlichen Kugelringes, welchen DE beschreibt, wie ac zu AC.

Offenbar findet diese Vergleichung statt, für jeden kleinen Kugelring, wenn nur seine Lage auf der einen und auf der andern Kugel eine ähnliche ist, und seine Dicke dem Halbmesser proportional genommen wird. Wenn aber für alle Theile der einen Kugel die Attraction auf H, sich zu der von allen ähnlich angenommenen Theilen der andern Kugel auf h ausgeübten Attraction, verhält, wie AC zu ac, so findet auch für die Attraction der ganzen Kugeln eben dieses Verhältniß statt. Puncte also H, h, die in Vergleichung gegen die Halbmesser der auf sie wirkenden Kugeln ähnlich liegend sind, oder für die HC : hc = AC : ac ist, leiden eine gegen den Mittelpunct jener Kugeln gerichtete Anziehung, die dem Halbmesser der Kugeln proportional ist.

§. 117. Ganz allgemein ist die von der Kugel AFBA auf H ausgeübte Attraction im Verhältniß ihrer Masse und im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes HC, also durch $\frac{G \cdot b^2}{a^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot AC^3}{HC^2}$ ausgedrückt. Diese allgemeine Regel, die ich hier nicht umständlich beweisen will, giebt bei einem bestimmten Verhältnisse der HC gegen AC, z. B. HC = m . AC

$$\frac{G \cdot b^2}{a^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot AC}{m^2},$$ also in diesem bestimmten Falle die Attraction dem Halbmesser der Kugel proportional.

§. 118. Liegt der angezogene Punct in der Oberfläche der Kugel selbst, so ist HC = AC und folglich bei gleichartigen Kugeln von ungleichem Halbmesser die Attraction, welche einen in der Oberfläche liegenden Punct gegen den Mittelpunct der Kugel treibt, dem Halbmesser der Kugel proportional.

§. 119. Lehrsatz. Wenn innerhalb einer Kugel, welche aus gleichartiger Materie besteht, sich ein Körper D (Fig. 138.) befindet, so wird dieser mit einer Gewalt, die dem Abstande vom Mittelpuncte proportional ist, gegen den Mittelpunct angezogen.

Beweis. Denkt man sich um den Mittelpunct C eine Kugel-Oberfläche vom Halbmesser CD, so leidet der Punct D vermöge der sämmtlichen über ihm oder entfernter als er vom Centro liegenden Kugelschichten gar keine Attraction gegen den Mittelpunct, indem die Wirkung der einzelnen Theile jeder Schichte sich gegenseitig aufhebt (§. 113.). Der Punct D leidet also nur die Attraction der Kugel vom Halbmesser CD, an deren Oberfläche er sich befindet. Denken wir uns also D in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpuncte: so ist (§. 116. 118.) die anziehende Kraft, die ihn gegen den Mittelpunct treibt, seinem Abstande vom Mittelpuncte proportional.

§. 120. Bemerkung. Wir sind gewohnt, die Schwere als eine unveränderliche Kraft, und ihre Einwirkung auf gegebene Körper, als an allen Orten gleich, anzusehen. Hier aber erhellt, daß wir bei größerer Annäherung zum Mittelpuncte der Erde, die Schwerkraft als abnehmend anzusehen haben. Könnten wir also den Druck, welchen zum Beispiel ein Pfund Blei an der Oberfläche der Erde ausübt, mit demjenigen Drucke vergleichen, den es in großen Tiefen unter der Erde ausübt, so würden wir den letztern geringer finden. Um hier nur ein Beispiel zu geben, wie eine solche Vergleichung allenfalls möglich wäre, wollen wir uns eine elastische Feder denken, die durch das Gewicht von einem Pfunde bis auf einen bestimmten Grad zusammengedrückt würde, wenn wir den Versuch auf der Oberfläche der Erde anstellten; diese Feder wird von demselben Bleigewichte, das wir 1 Pfund nannten, nicht mehr ganz zu demselben Grade gespannt werden, wenn wir uns tief unter die Oberfläche der Erde begeben könnten. Und so würden wir es immer finden, wenn wir den durch die Schwerkraft bewirkten Druck desselben Körpers, mit Kräften vergleichen könnten, die wie die Federkraft überall dieselben bleiben.

§. 121. Nennen wir also die Attractionskraft, oder die Schwerkraft, so wie wir sie an der Oberfläche der Erde beobachten, $= G$, so wird sie, wenn der Erde Halbmesser $= r$ heißt, in der Entfernung $\frac{m}{n} \cdot r$ vom Centro, wenn $\frac{m}{n} < 1$ ist, nur noch $= \frac{m}{n} \cdot G$ sein, und ein Körper, der auf der Oberfläche der Erde 1 Pfund wöge, wird dort nur den Druck ausüben, den bei uns ein Gewicht von $\frac{m}{n}$ Pfund ausübt.

§. 122. Lehrsatz. Wenn keine andern Kräfte auf die einzelnen Theilchen des Erdkörpers, außer der Attraction aller Theilchen auf einander, wirken: so könnte das Gleichgewicht bestehen, wenn die Erde eine kugelförmige Wassermasse wäre.

Beweis. Ist die Erde eine Wasserkugel, so leidet jedes Wassertheilchen den Druck, den das Gewicht der über ihm stehenden Wassersäule hervorbringt. Wir könnten uns eine vom Mittelpuncte bis an die Oberfläche gehende Röhre Cab (Fig. 140.) denken, in welcher das Wasser von dem übrigen Wasser der Kugel abgesondert wäre. Da in dieser Röhre das Theilchen abcd gegen C herabgezogen wird, so drückt es mit seinem ganzen Gewichte auf cd; das der Entfernung vom Centro angemessene Gewicht des Theilchens cdef verbindet sich hiermit, und die Summe beider giebt den Druck auf ef und so weiter. Denken wir uns nun ein andres gegen den Mittelpunct zu gerichtetes Röhrchen ghik und eine Verbindungsröhre ek, die ein Stück eines Kreises um den Mittelpunct C ist, so übet das Wasser in ghki offenbar eben den Druck wie in abde aus, und das Wasser in der Verbindungsröhre wird von beiden Enden her gleich gedrückt, folglich bleibt die Wassermasse abekhg in Ruhe.

So läßt sich für alle Puncte der kugelförmigen Wassermasse zeigen, daß das Gleichgewicht statt findet, wenn keine andern Kräfte als die Attraction aller Theile auf jeden Punct der Masse wirken.

§. 123. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, den irgend ein Punct innerhalb der Wasserkugel leidet, wenn jedes Theilchen bloß durch die Attractionskraft aller Theilchen gegen den Mittelpunct getrieben wird.

Auflösung. Es sei $= G$ das Gewicht eines Cubicfußes Wasser an der Oberfläche, R der Halbmesser der Kugel, so wird in der Entfernung $= x$ vom Centro der Cubicfuß Wasser nur noch $\frac{x \cdot G}{R}$ wiegen.

Stellt man sich die Wassersäule Cab in n gleiche Theile getheilt, und die Röhre als überall gleich weit vor, so beträgt das Gewicht des oberen Theilchens, dessen Inhalt wir durch die Höhe $= \frac{1}{n}$ R darstellen,

weniger als $\frac{1}{n}$ G . R, und mehr als $\frac{1}{n} \cdot R \cdot \frac{n-1}{n} G$, indem seine entferntesten Puncte sich in dem Abstande $= R$, seine dem Centro nächsten Puncte sich in dem Abstande $= \frac{n-1}{n} R$ vom Centro befinden. Des zweiten Theilchens Gewicht ist

kleiner als $\frac{n-1}{n^2} RG$, größer als $\frac{n-2}{n^2} RG$,

das dritte Gewicht

kleiner als $\frac{n-2}{n^2} RG$, größer als $\frac{n-3}{n^2} RG$.

Wollen wir also den Druck bestimmen, welchen das Theilchen leidet, welches $= \frac{m}{n} R$ vom Centro entfernt ist, oder das, welches von der Oberfläche an das $(n-m)$te heißen würde: so ist dieser Druck kleiner als

$$\frac{RG}{n^2}(n+(n-1)+(n-2)+(n-3)++(m+1))$$

und größer als

$$\frac{RG}{n^2}((n-1)+(n-2)+++m).$$

Hieraus ließe sich der Druck bestimmen, den jedes Theilchen leidet. Ist $m = 0$ oder verlangt man den Druck für das im Mittelpuncte selbst liegende Theilchen, so ist dieser kleiner als

$$\frac{RG}{n^2}(n+(n-1)+(n-2)++++1)$$

und größer als

$$\frac{RG}{n^2}((n-1)+(n-2)+(n-3)+++1)$$

also kleiner als $\frac{R.G.(n+1).n}{2.n^2}$,

und größer als $\frac{RG}{n^2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$;

er muß also $= \frac{1}{2} R.G$ sein, oder halb so groß, als er sein würde, wenn die Säule von der Höhe = R überall mit der Kraft = G zum Mittelpuncte hin gezogen würde.

§. 124. Die Summirung der allgemeinen Reihen §. 123. gäbe in der Entfernung $= \frac{m}{n}$ R vom Mittelpuncte den Druck kleiner als $\frac{RG}{n^2} \frac{(n+m+1)(n-m)}{2}$

und größer als $\frac{RG}{n^2} \frac{(n+m-1)(n-m)}{2}$

also $= \frac{RG(n^2-m^2)}{2n^2}$; also z. B.

in der Entfernung $= \frac{7}{8}$ R, Druck $= \frac{15}{128}$. R . G,
in der Entfernung $= \frac{3}{4}$ R, Druck $= \frac{28}{128}$. R . G,
in der Entfernung $= \frac{5}{8}$ R, Druck $= \frac{39}{128}$. R . G,
in der Entfernung $= \frac{1}{2}$ R, Druck $= \frac{48}{128}$. R . G,
in der Entfernung $= \frac{3}{8}$ R, Druck $= \frac{55}{128}$. R . G,
in der Entfernung $= \frac{1}{4}$ R, Druck $= \frac{60}{128}$. R . G,
in der Entfernung $= \frac{1}{8}$ R, Druck $= \frac{63}{128}$. R . G,
in der Entfernung = o . R, Druck $= \frac{1}{2}$. R . G.

§. 125. Bemerkung. Die Erde dreht sich um ihre Axe, dadurch entsteht, wie die Mechanik lehrt, eine Schwungkraft oder für die Theilchen, die nicht in der Axe liegen, ein Bestreben, sich von der Axe zu entfernen, welches ihrem Abstande von der Axe proportional ist. Jedes Theilchen in der Axe wird also eben so wie im Zustande der Ruhe gegen den Mittelpunct getrieben; jedes von der Axe entfernte Theilchen aber wird durch zwei Kräfte getrieben, durch die Attraction gegen den Mittelpunct, und durch die Schwungkraft senkrecht von der Axe abwärts.

§. 126. Die Schwungkraft ist dem Abstande von der Axe proportional, also an der Oberfläche der Erde am Aequator am größesten. Nehmen wir an, daß dort die Schwerkraft $= G$, die Schwungkraft $= \frac{1}{f} G$ sei, in der Entfernung $= R$ vom Mittelpuncte, so ist in andern Puncten in der Entfernung $= x$ von der Axe die Schwungkraft $= \frac{1}{f} \cdot \frac{x}{R} \cdot G$.

§. 127. Bemerkung. Die Erde behält nicht mehr die Kugelgestalt, wenn sie sich um ihre Axe dreht, sondern die Oberfläche entfernt sich am Aequator mehr vom Centro als sie am Pole davon entfernt ist; wir dürfen also eigentlich die anziehende Kraft am Pole an der Erd-Oberfläche nicht gleich derjenigen setzen, welche an der Oberfläche um den Aequator statt findet. Um indeß nur ohngefehr die Erscheinungen zu übersehen, wird in dem folgenden Lehrsatze auf diesen Umstand keine Rücksicht genommen.

§. 128. Lehrsatz. Wenn die Erde sich um ihre Axe dreht, so muß sie, wofern sie ein gleichartiger beinahe kugelförmiger Wasserkörper ist, einen erheblich größern Aequatoreal-Durchmesser haben, als ihre Axe ist.

Beweis. aC sei (Fig. 140.) eine in der Axe der Erde liegende Röhre, deren Wasser in freier Verbindung mit der, am Mittelpuncte mit ihr vereinigten, im Aequator liegenden Röhre Ce steht. In der Entfernung $= x$ vom Mittelpuncte wird ein Wassertheilchen in der Axe mit der Attractionskraft $= \frac{x}{R} G$ gegen den Mittelpunct getrieben, und wenn die halbe Axe $= r$ ist, so wird der im Mittelpuncte der Erde liegende Punct C der Röhre aC, den Druck $= \frac{1}{2} r \cdot G$ leiden, wenn die halbe Axe $= r$, und die Attraction an der Oberfläche $= G$ ist (§. 123.).

In der Entfernung $= x$ vom Mittelpuncte wird ein im Aequator liegendes Theilchen von der Schwere und Schwungkraft mit der Gewalt $= \frac{x}{R} G - \frac{x}{R} \cdot \frac{1}{f} G$ gegen den Mittelpunct getrieben. Erreicht also die Wassersäule CE hier die Höhe $= R$, so übt diese auf den Mittelpunct einen Druck $= \frac{1}{2} R \cdot \left(1 - \frac{1}{f}\right) G$ aus.

Der Druck muß von beiden Röhren her im Centro gleich sein und es ist daher ohngefehr

$$r = \left(1 - \frac{1}{f}\right) R.$$

Eine ähnliche Vergrößerung des Aequatoreal-Halbmessers wird offenbar in der sich drehenden Wasserkugel statt finden, wenn auch keine Röhren das Wasser zusammenhalten, und folglich wird die Erde, ihrer Umdrehung wegen, eine abgeplattete Kugel.

§. 129. Aus der Schnelligkeit der Umdrehung der Erde ergiebt sich $\frac{1}{f}$ ohngefehr $= \frac{1}{290}$, darnach würde also die Erd-Axe $= \frac{289}{290}$ des Aequatoreal-Durchmessers. Aber diese Rechnung bedarf noch einiger Verbesserung. Es ist nämlich, wie ich schon bemerkt habe, nicht richtig, daß G an der Oberfläche der Erde am Pole eben das bedeutet, wie am Aequator; denn wenn wir uns eine kugelähnliche aber abgeplattete feste Masse denken, so übt diese auf die am Pole in der Entfernung $= r$ vom Mittelpuncte liegenden Puncte eine größere Attractionskraft aus, als auf die in der größern Entfernung $= R$ liegenden Puncte. Nenne ich also die Attractionskraft des ruhenden abgeplatteten Sphäroids am Pole $= g$, am Aequator $= G$, so ist eigentlich $\frac{1}{2} r \cdot g = \frac{1}{2} R \cdot \left(1 - \frac{1}{f}\right) G$, und g ist größer als G, also

$rg = RG\left(1 - \frac{1}{f}\right)$ nnd folglich r kleiner als

$$R\left(1 - \frac{1}{f}\right).$$

Eine genauere Rechnung zeigt, daß r ohngefehr $= \frac{229}{230}$ R sein müßte, wenn die Erde überall gleich dicht wäre, wie wir es hier annehmen.

§. 130. Aehnliche Betrachtungen ließen sich nun auch anstellen, um zu finden, wie weit das Wasser bei g oder in andern Puncten sich vom Mittelpuncte entfernen wird, um das Gleichgewicht herzustellen. Aber um diese Betrachtung vollständig anzustellen, müßte man wissen, wie ein abgeplatteter, beinahe kugelförmiger Körper vermöge seiner Attractionskraft wirkt, welches sich hier nicht wohl erklären läßt. Einige, nicht so gar schwere Untersuchungen hierüber habe ich in meiner Uebersetzung von Eulers Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper mitgetheilt.

Achter Abschnitt.

Vom Drucke der Erde gegen Mauern.

§. 131. Bemerkung. Lockere Erde ist zwar kein flüssiger Körper; aber in manchen Beziehungen stimmt sie doch fast mehr mit diesen, als mit festen Körpern überein. Das Zerfließen flüssiger Körper, die durch kein Gefäß zusammen gehalten werden, finden wir bei trockenem Sande als ein Herabrollen oder ein Abflächen wieder, und obgleich dieser schon zur Ruhe kömmt, wenn seine Oberfläche unter einem Winkel von 30 Graden oder 50 Graden geneigt ist, statt daß das Wasser eine horizontale Oberfläche fordert, so ist doch jenes Herabgleiten der Sandkörnchen über einander, mit dem völligen Zerfließen flüssiger Körper sehr wohl zu vergleichen.

§. 132. Es würde keine geringe Schwierigkeit haben, die Gesetze des Gleichgewichts dieser, gleichsam halbflüssigen Körper für alle Fälle genau anzugeben. Auch hier findet allerdings, wie bei Wasser, eine Fortpflanzung des Druckes nach allen Seiten statt; aber keinesweges eine nach allen Seiten gleiche Fortpflanzung des Druckes. Wie sich ein in Fig. 100. auf EF wirkender Druck auf die Wand bei B, B äußern würde, wenn das Gefäß mit trockenem Sande gefüllt wäre, läßt sich nicht wohl bestimmen, und wir würden zu dieser Bestimmung wenigstens noch einer auf Erfahrung gestützten

Regel bedürfen, wie der Druck von der Richtung der Kraft gegen diejenige Richtung, nach welcher der Druck statt finden soll, und wie er von der Menge der zwischen liegenden Sandtheilchen abhänge u. s. w.

§. 133. Erfahrung. Jede bestimmte Art von Sand, trockener Erde oder ähnlichen Körpern lagert sich, freiliegend aufgeschüttet, unter einem bestimmten Winkel. Daher legt sich aufgehäufter Sand in einen ohngefehr conisch geformten Haufen.

§. 134. Dieser Winkel giebt uns ein Maaß für die Reibung, welche die Sandkörnchen leiden, indem sie über den unter ihnen liegenden herabrollen, denn es ist offenbar (Statik §. 178.), daß der Reibungscoefficient $=$ tang β ist, wenn β jenen Winkel bedeutet, unter welchem, gegen den Horizont geneigt, sich die Sandmasse abflächt.

§. 135. Bemerkung. Denken wir uns nun eine Sandmasse (Fig. 141.) ABCD, die sich gegen die Mauer AB stützt, so hat jene ein Bestreben, abzusinken, und drückt deshalb gegen die Mauer. Stellt DBC den Winkel $= \beta$ vor, unter welchem der Sand ruhen würde, wenn keine Wand da wäre, so ist es allerdings das ganze Prisma ABD, welches sich gegen die Wand drängt; aber wir dürfen dieses nicht als einen festen, gegen AB zu auf der Ebne BD herabgleitenden Körper ansehen; denn dieser würde wegen der Reibung ruhen, wenn DBC $= \beta$ ist. Jede Schichte dieses Prisma's strebt über die andre sich wegzuschieben, und der Keil ABE zum Beispiel übt mehr Druck auf AB aus, als der Keil ABD, wenn man nämlich beide als feste Massen betrachtet, ausüben würde. Man kann nun untersuchen, unter welchem Winkel ABE $= \phi$ man die Linie BE ziehen muß, damit eine feste keilförmige Masse ABE, auf der Ebne EB herabgleitend, den größten

Druck auf AB ausübe, wenn die Zahl $= \tang \beta$ angiebt, welcher Theil des Druckes der Reibung gleich ist. Der so gefundene Druck auf AB scheint derjenige zu sein, welchen die vom Sande gedrückte Mauer leidet, wenn dieser sich unter dem Winkel $= \beta =$ DBC lagern würde, wenn man ihn frei aufschüttet.

§. 136. Aufgabe. Den Druck einer Sandmasse auf die Wand AB zu finden, deren Höhe AB $= h$ ist.

Auflösung. Sehen wir irgend ein Prisma, dessen Größe durch den Winkel ABE $= \varphi$ bestimmt ist, als einen festen Körper an, der auf der Ebne EB herabzugleiten strebt, so ist dieses Prisma's Inhalt $= \frac{1}{2} h^2 \tang \varphi$, und eine horizontal wirkende Kraft muß (wenn man das Gewicht eines Cubicfußes $= 1$ setzt),

$$= \tfrac{1}{2} h^2 . \tang \varphi \frac{(\operatorname{Cos} \varphi - f . \operatorname{Sin} \varphi)}{\operatorname{Sin} \varphi + f . \operatorname{Cos} \varphi} \text{ sein}$$

(Statik §. 179.), wenn sie diesen Körper erhalten soll. Da wir nun angenommen haben, der Reibungs-Coefficient sei $= \tang \beta = f$, so müssen wir suchen, wie φ anzunehmen sei, damit die horizontale Kraft

$$Q = \tfrac{1}{2} h^2 . \tang \varphi \left(\frac{\operatorname{Cos} \varphi - \tang \beta . \operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Sin} \varphi + \tang \beta . \operatorname{Cos} \varphi} \right)$$

möglichst klein ausfalle; und Q ist der Druck, den die Wand nach horizontaler Richtung leidet.

Dieser Ausdruck giebt

$$Q . \operatorname{Sin} \varphi + Q . \tang \beta . \operatorname{Cos} \varphi$$
$$= \tfrac{1}{2} h^2 . \operatorname{Sin} \varphi - \frac{\tfrac{1}{2} h^2 . \tang \beta . \operatorname{Sin}^2 \varphi}{\operatorname{Cos} \varphi}$$

oder $(Q - \tfrac{1}{2} h^2) \tang \varphi + Q . \tang \beta$
$$= - \tfrac{1}{2} h^2 . \tang \beta . \tang^2 \varphi,$$

oder $\tang^2 \varphi + \tang \varphi \dfrac{(Q - \tfrac{1}{2} h^2)}{\tfrac{1}{2} h^2 . \tang \beta} = - \dfrac{2Q}{h^2},$

also endlich

$$\tang \varphi = \frac{\frac{1}{2} h^2 - Q}{h^2 . \tang \beta} \pm \sqrt{\left(\frac{(\frac{1}{2} h^2 - Q)^2}{h^4 . \tang^2 \beta} - \frac{2Q}{h^2}\right)}$$

der irrationale Theil dieses Ausdrucks giebt entwickelt

$$\sqrt{\left(\frac{Q^2 - Q(h^2 + 2h^2 . \tang^2 \beta) + \frac{1}{4} h^4}{h^4 . \tang^2 \beta}\right)}$$

und er würde unmöglich werden, sobald

$$Q^2 + \tfrac{1}{4} h^4 < Q(h^2 + 2h^2 . \tang^2 \beta) \text{ wäre.}$$

Es ist daher der durch

$$Q^2 - Q(h^2 + 2h^2 . \tang^2 \beta) + \tfrac{1}{4} h^4 = 0,$$

ausgedrückte Werth von Q der äußerste, den Q erreichen kann; oder, wenn man diese quadratische Gleichung auflöst, so ergiebt sich

$$Q = \tfrac{1}{2} h^2 + h^2 . \tang^2 \beta \pm \sqrt{(h^4 . \tang^4 \beta + h^4 . \tang^2 \beta)}$$

oder $Q = \frac{1}{2} h^2 + h^2 . \tang^2 \beta \pm h^2 . \tang \beta . \mathrm{Sec}\, \beta$

(da $\sqrt{(1 + \tang^2 \beta)} = \mathrm{Sec}\, \beta$ ist)

als der äußerste Werth, den Q erreichen kann, da ein über diese Grenze hinaus liegender Werth ein unmögliches φ gäbe.

Bei diesem Werthe von Q wird

$$\tang \varphi = \frac{\frac{1}{2} h^2 - Q}{h^2 . \tang \beta},$$ weil der vorhin noch beigefügte irrationale Theil jetzt verschwindet. Es ist also, wenn man für Q jenen Werth setzt

$$\tang \varphi = - \tang \beta \mp \mathrm{Sec}\, \beta,$$

und hier offenbart sich, daß man nur das untere Zeichen gebrauchen darf, und $\tang \varphi = \mathrm{Sec}\, \beta - \tang \beta$ setzen muß, indem $\tang \varphi$ gewiß nicht negativ werden kann.

Der größeste Druck, den solche gegen die feste Wand herabgleitende Prismen ausüben würden, ist also

$$Q = \tfrac{1}{2} h^2 + h^2 . \tang \beta . (\tang \beta - \mathrm{Sec}\, \beta),$$

oder $Q = \frac{1}{2} h^2 - h^2 . \tang \beta\, (\mathrm{Sec}\, \beta - \tang \beta)$, und man ist wohl berechtiget, dieses als den wahren Druck anzusehen, den die Mauer AB leidet.

Für $\beta = 45^\circ$ wird dieser Druck

$$= \frac{1}{2} h^2 - h^2 (0{,}41423)$$

und ist immer desto größer, je kleiner β ist.

§. 137. Wenn Q kleiner als

$$\frac{1}{2} h^2 - h^2 . \tang \beta (\sec \beta - \tang \beta)$$ ist,

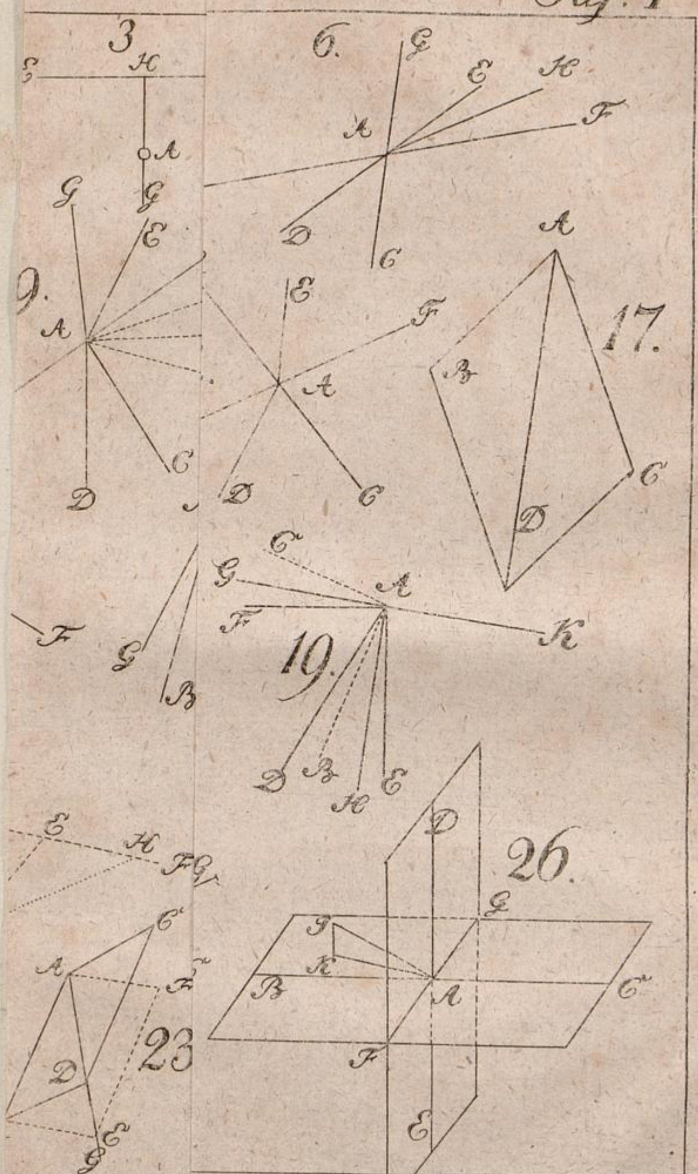
so erhält φ mögliche Werthe; fällt der Werth von Q zwischen $\frac{1}{2} h^2 - h^2 . \tang \beta (\sec \beta - \tang \beta)$

und $\frac{1}{2} h^2 + h^2 . \tang \beta (\sec \beta + \tang \beta)$,

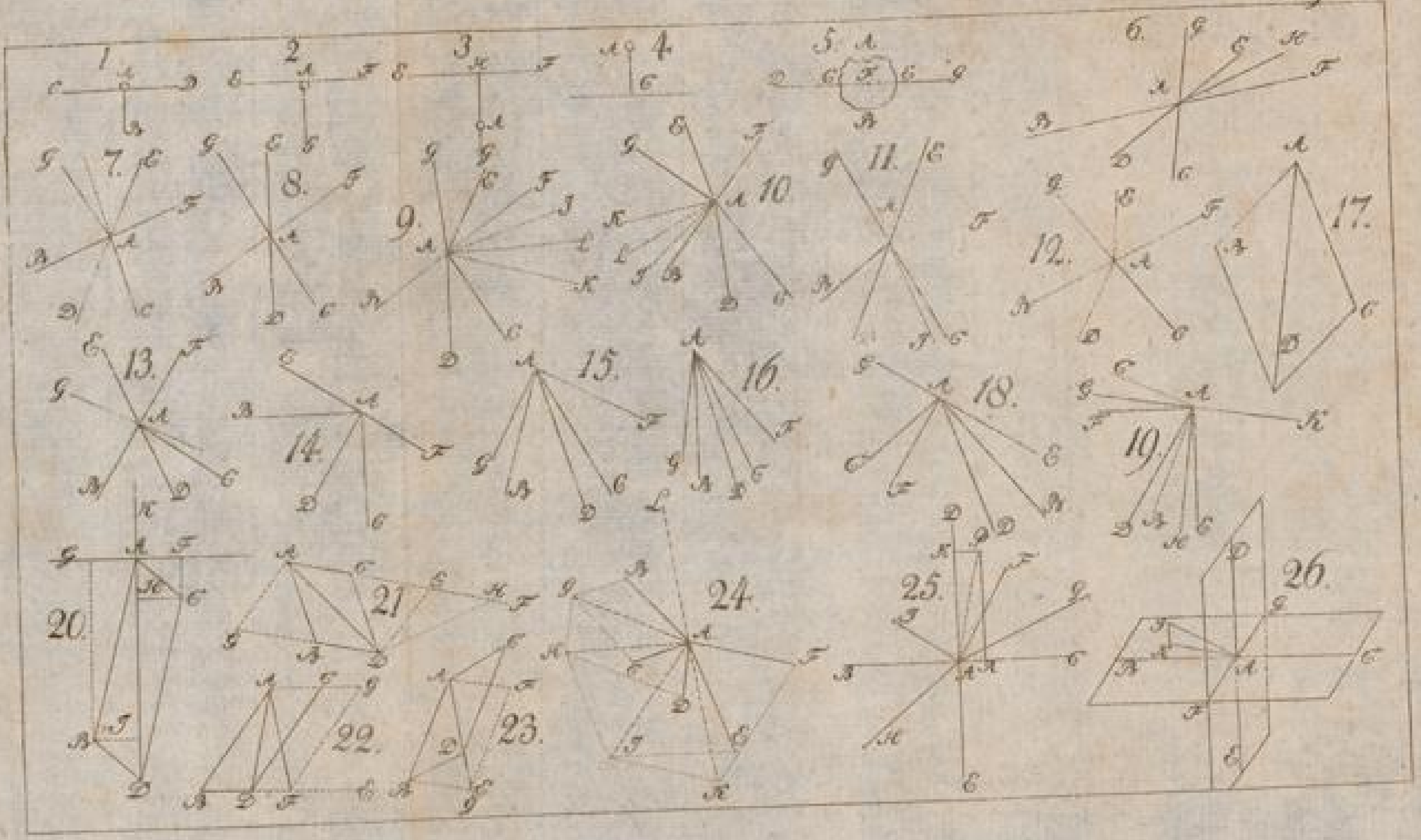
so ist φ unmöglich. Für noch größere Werthe kommen zwar anscheinend mögliche Werthe für φ heraus, aber da sie tang φ negativ, oder φ als einen stumpfen Winkel angeben, so sind sie offenbar unbrauchbar.

§. 138. Ich wage es nicht, hier weitere Folgerungen aus diesen Schlüssen abzuleiten. Sehr zweckmäßige Versuche über den Druck der Erde hat Hr. Woltman in seinen Beiträgen zur hydraulischen Architectur 3. und 4. Band bekannt gemacht, und die Theorie dieses Gegenstandes vollständiger behandelt. Auf diese muß ich hier, wo größere Umständlichkeit zweckwidrig sein würde, verweisen.

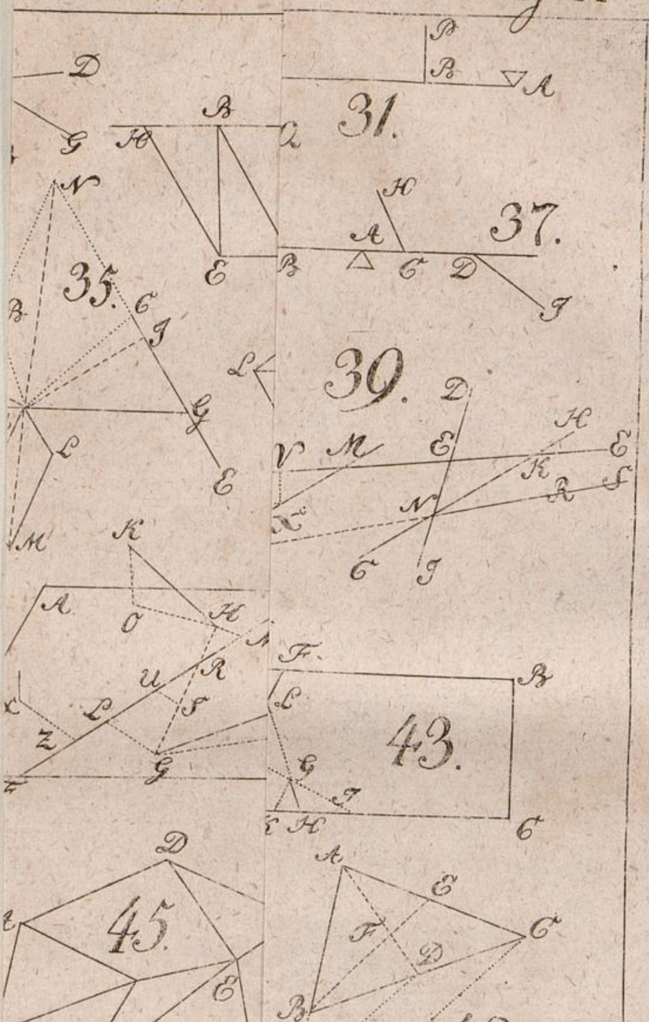
Taf. I



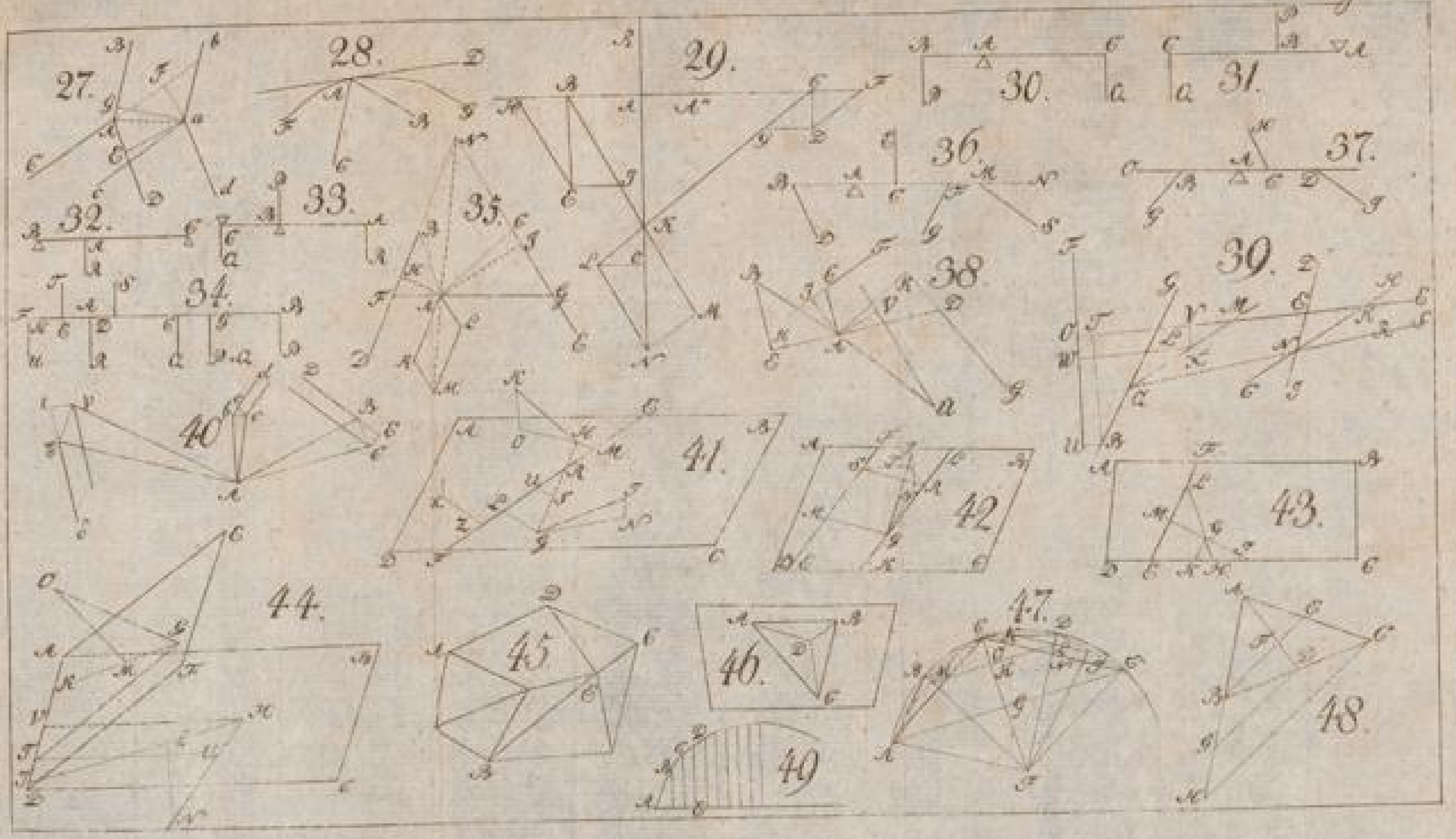
Taf. I



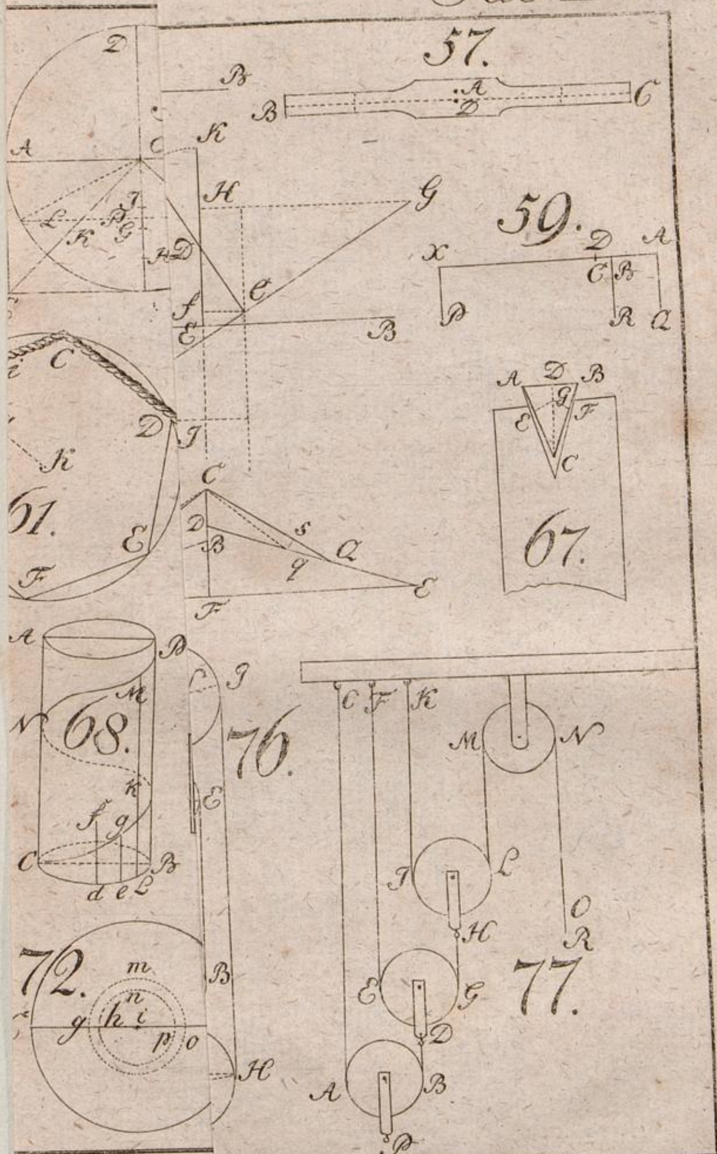
Taf: II



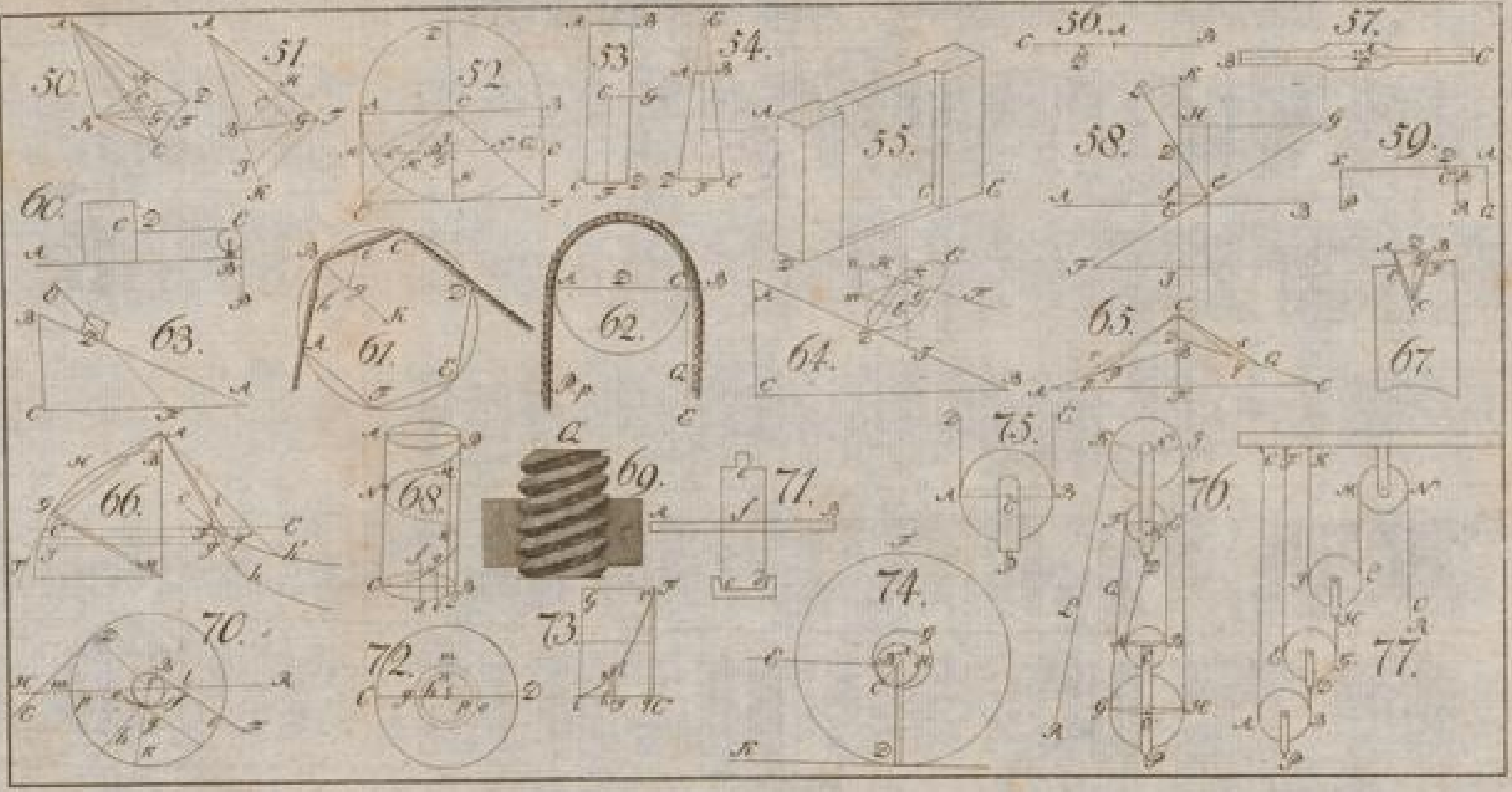
Taf. II



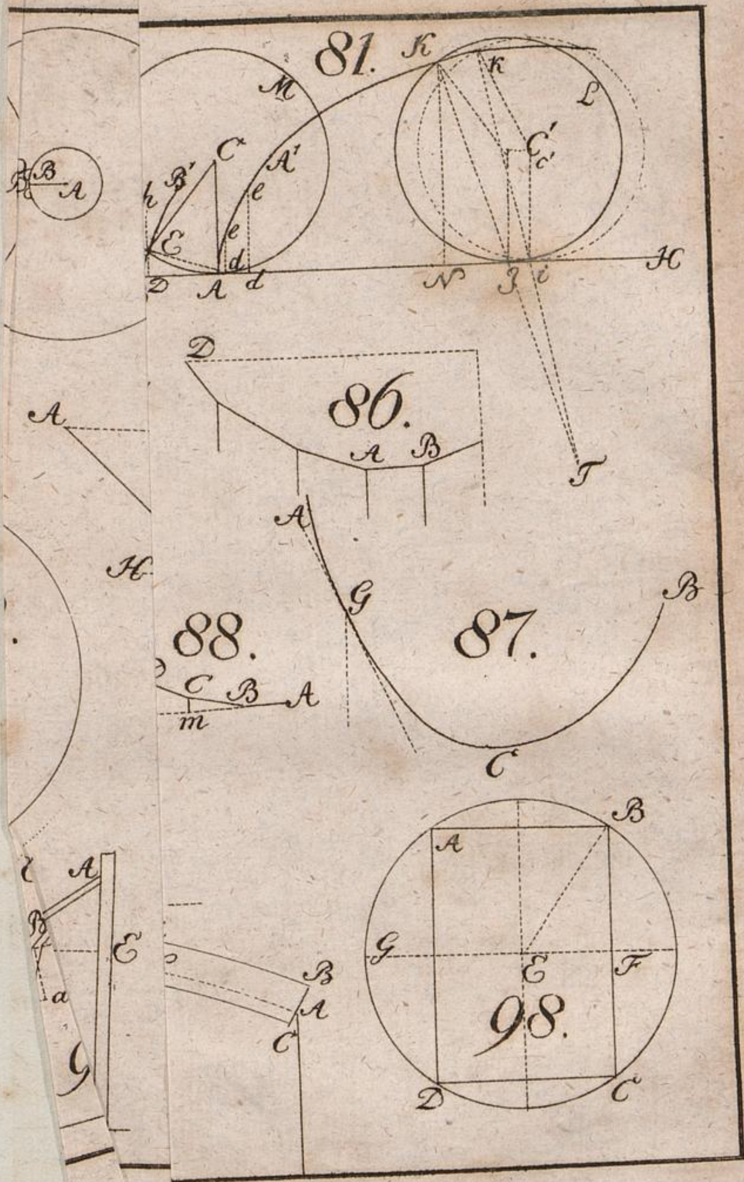
Tab: III.



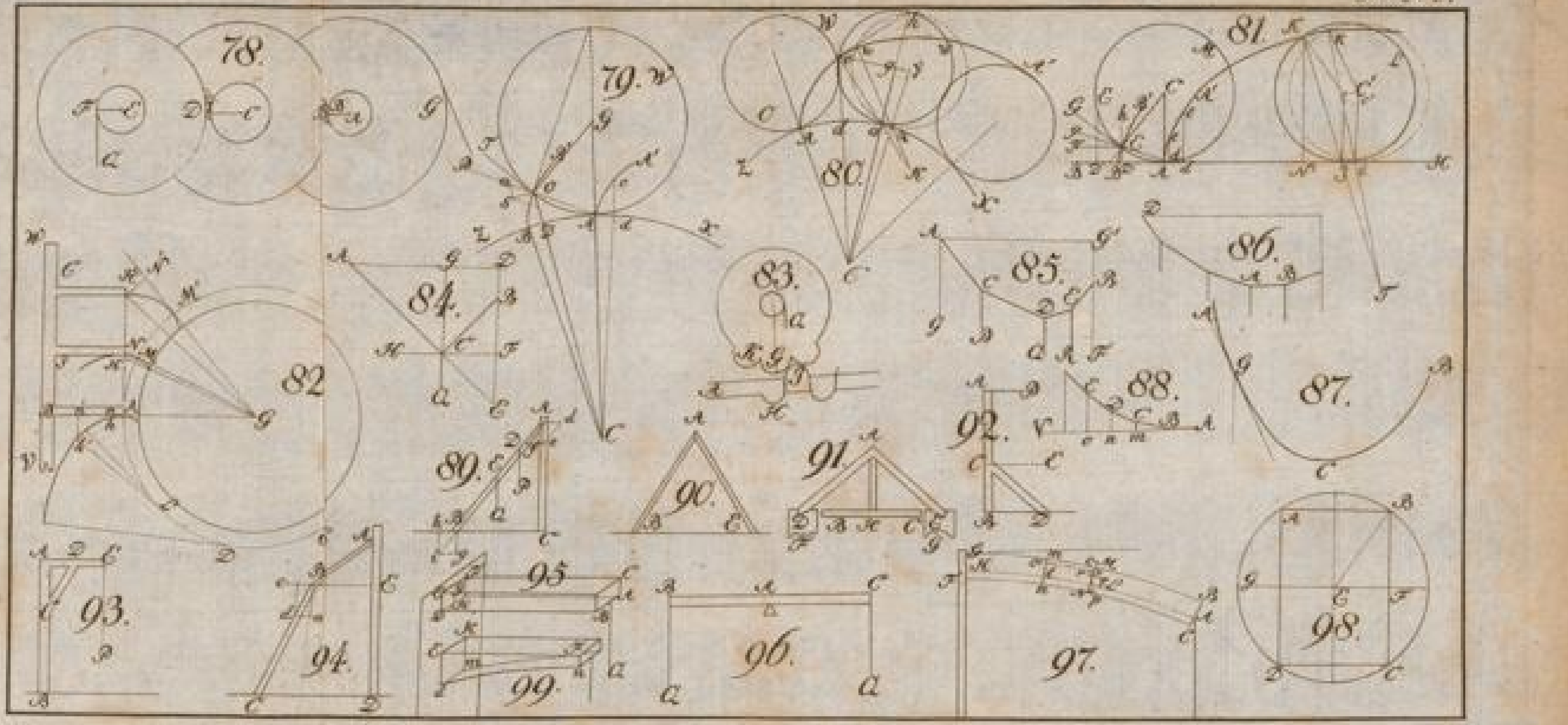
Tab. III.



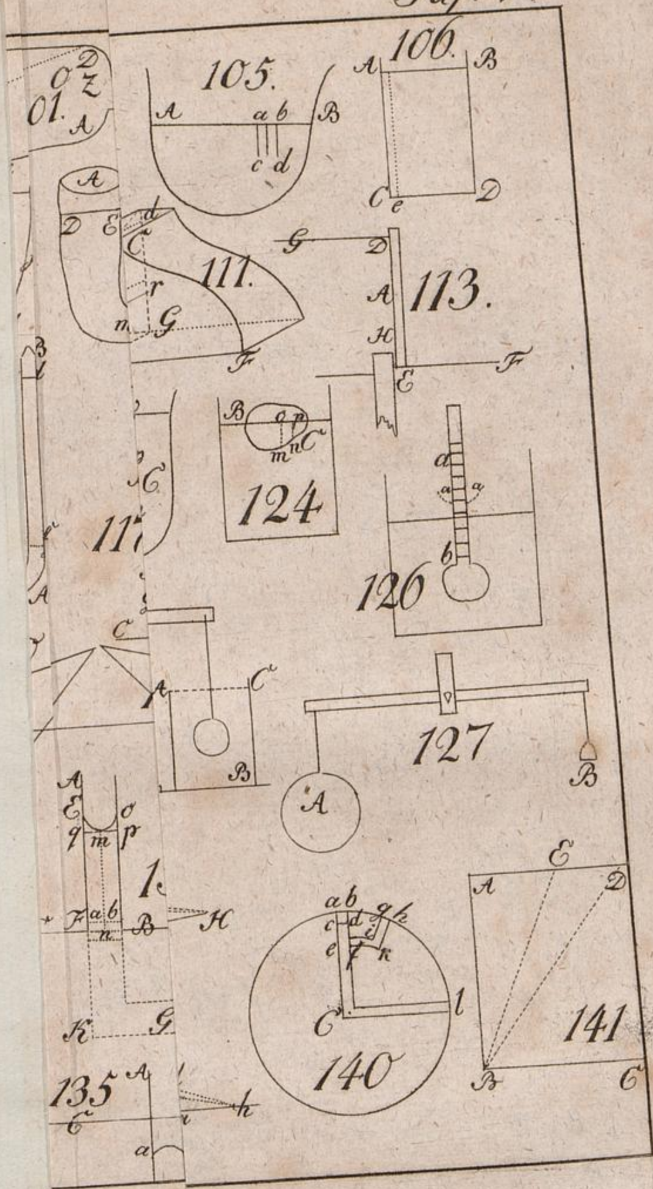
Tab: IV



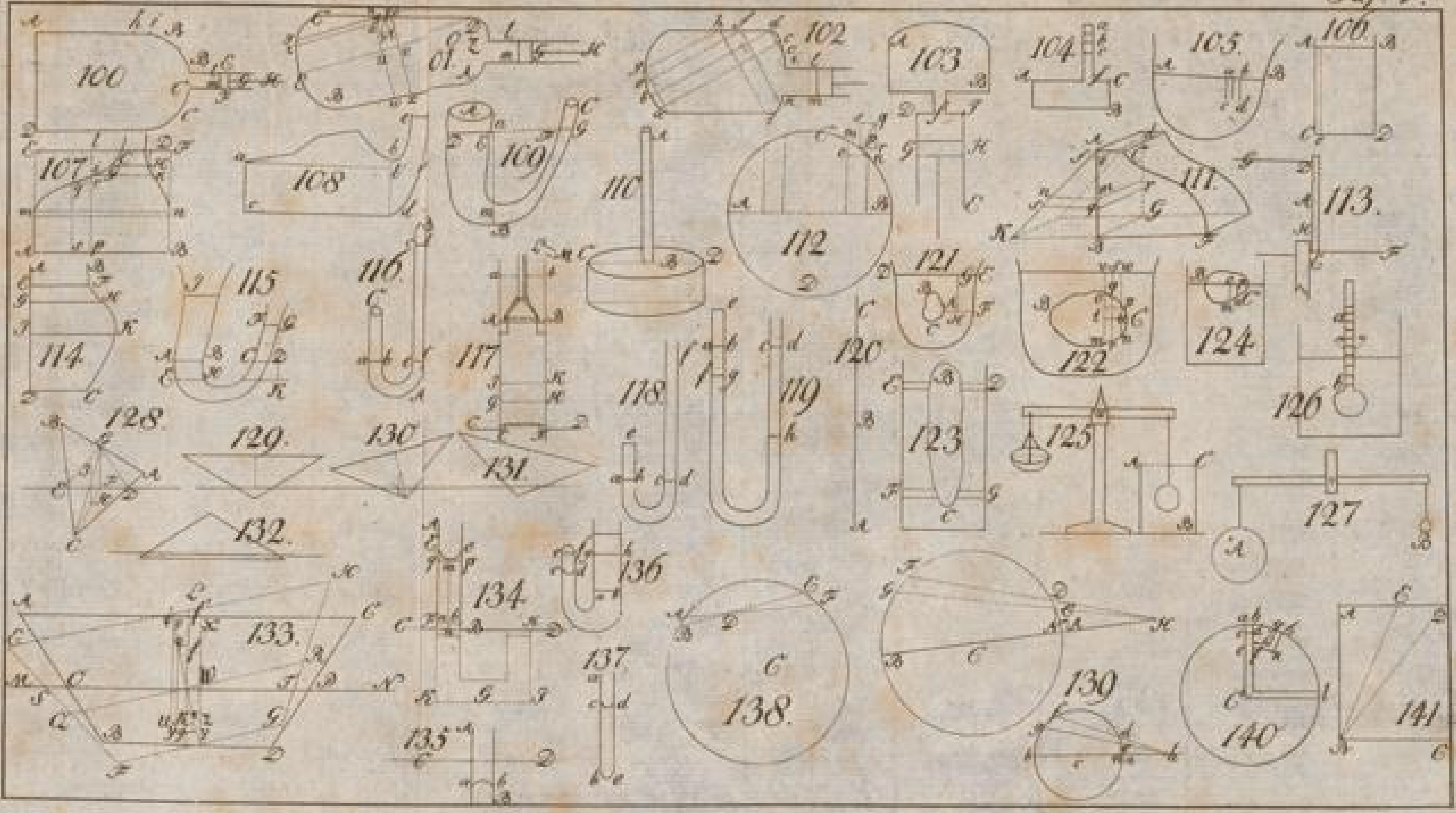
Tab: IV



Taf: V.



Taf. V.



The work itself and the containing map(s) were digitized with different types of scanners. The Colorchecker shown here refers to the map(s) only.

Das Werk selbst und die enthaltene(n) Karte(n) wurden mit unterschiedlichen Scannern digitalisiert. Dieser Colorchecker gilt nur für diese Karte(n).