ten Jahrs

$$\frac{104^3}{100^3} \cdot 10000 - \frac{104^2}{100^2} \cdot 600 - \frac{104}{100} \cdot 600 - 600,$$

u. s. w., und man müßte durch Summirung der letzten Reihe finden, wenn das Capital erschöpft ist. Am Ende des dritten Jahrs hat man nämlich

$$\frac{104^3}{100^3} \cdot 10000 - 500 \cdot \left\{ \frac{\frac{104^3}{100^3} - 1}{\frac{104}{100} - 1} \right\}, \text{ also am Ende}$$

des nten Jahrs

$$\frac{104^n}{100^n} \cdot 10000 - 500 \cdot \left\{ \frac{\frac{104^n}{100^n} - 1}{\frac{104}{100} - 1} \right\}.$$

Alle diese Exempel lassen sich aber leichter und theils auch vollständiger durch die Logarithmen auflösen, weil die Bestimmung hoher Potenzen von $\frac{104}{100}$ auf die gewöhnliche Weise sehr beschwerlich, durch Logarithmen aber leicht ist.

Achter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

* 215. Erklärung. Wenn man eine mit 1 anfangende geometrische Progression mit der Reihe der natürlichen Zahlen so verbindet, daß man das erste Glied jener Progression mit 0, das zweyte mit

1, das dritte mit 2, das vierte mit 3 u. s. w. bezeichnet, so wie in nachstehenden Zeilen:

Arithm. Progr.	0.	1.	2.	3.	4.	5	u. s. w.
Geom. Progr.	1.	4.	16.	64.	256.	1024	u. s. w.

so nennet man jede Zahl der arithmetischen Progression den Logarithmen der unter ihr stehenden Zahl der geometrischen Progression.

Anmerk. Diese Erklärung ist zwar die gewöhnliche, da aber in einer geometrischen Progression, deren erstes Glied 1 ist, alle Glieder Potenzen des Exponenten sind: so ist die folgende Erklärung ebenfalls richtig, und führt sehr leicht zu allen Folgerungen, deren man in dieser Lehre bedarf.

* 216. Erklärung. Wenn man von einer bestimmten Zahl, die immer dieselbe bleibt, mehrere verschiedene Potenzen nimmt: so heissen die Exponenten dieser Potenzen die Logarithmen der Zahlen, welchen jene Potenzen gleich sind.

Beyspiel. Ist 4 jene bestimmte Zahl, deren Potenzen gesucht werden, so ist 1 der Logarithme von 4; ferner 2 der Logarithme des Quadrats von 4 oder von 16, und so 5 der Logarithme der fünften Potenz von 4, das ist der Logarithme von 1024, u. s. w.

* 217. Erklärung. Die ganze Reihe dieser Logarithmen, zusammengestellt mit den zugehörigen Zahlen, nennt man ein logarithmisches System, und die Zahl, deren Potenzen genommen werden, oder deren Logarithme = 1 ist, heißt die Grundzahl dieses Logarithmen-Systems.

* 218. Da eine jede Zahl als Grundzahl des Systems angenommen werden kann, so ließen sich unzählige logarithmische Systeme angeben, zum Beyspiel

Logarithmen . . 0. 1. 2. 3. 4. 5 u. s. w.
zugehörige Zahlen 1. 5. 25. 125. 625. 3125;
aber wir werden nur dasjenige Logarithmen-System betrachten, dessen Grundzahl = 10 ist, weil dieses sich zu den gewöhnlichen Rechnungen am besten gebrauchen läßt. Dieses System heißt das Briggische Logarithmen-System (von Henry Brigg, der es zuerst berechnete). Es gehören in demselben mit den Logarithmen, die ganze Zahlen sind, folgende Zahlen zusammen:

Logar.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Zahlen	1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.	1000000.

* 219. Bemerkung. Nach dem, was im sechsten Abschnitte von den Potenzen vorgekommen ist, welche Brüche und negative Zahlen zu Exponenten haben, läßt sich leicht übersehn, daß es zu einem vollständigen Logarithmen-Systeme nicht genug ist, diejenigen Zahlen mit ihren Logarithmen zusammen zu stellen, deren Logarithmen ganze Zahlen sind, sondern daß auch die Brüche und negativen Zahlen als Logarithmen darin vorkommen müssen. So wie sich nämlich keine ganze oder gebrochne Zahl denken läßt, die nicht der Exponent der Potenz seyn könnte zu welcher die Grundzahl des Systems erhoben werden soll; eben so giebt es auch keine Zahl, die nicht ein Logarithme irgend einer andern Zahl wäre.

Umgekehrt hat also auch eine jede ganze oder gebrochne Zahl in einem bestimmten System ihren Logarithmen, und man verlangt von einem vollständig berechneten Logarithmen-Systeme, daß es zu einer jeden gegebenen Zahl den zugehörigen Logarithmen, und zu jedem gegebenen Logarithmen die zugehörige

Zahl, wenigstens durch Näherung, angebe, (vergl. §. 172.)

* 220. **Bemerkung.** In dem Briggischen Logarithmen-Systeme, dessen Grundzahl $= 10$ ist, gehören bloß für die Zahlen, welche ganze Potenzen von 10 sind, rationale Logarithmen mit rationalen Zahlen zusammen, hingegen gehören zu allen übrigen rationalen Zahlen irrationale Logarithmen, und zu allen übrigen rationalen Logarithmen irrationale Zahlen, denn es gehört z. B. zum Logarithmus $= \frac{1}{2}$, die Zahl $= \sqrt{10}$, zum Logarithmus $= \frac{1}{3}$, die Zahl $= \sqrt[3]{10}$, zum Logarithmus $= \frac{3}{4}$, die Zahl $= \sqrt[4]{10^3} = \sqrt[4]{1000}$, u. s. w.

Um also die Zahl, welche zu irgend einem rationalen Logarithmen gehört, zu bestimmen, wird nichts anders erfordert, als daß man 10 zu irgend einer Potenz erhebe, oder irgend eine Wurzel aus 10 oder aus einer Potenz von 10 ziehe, und so schwierig dieses auch in der Ausübung seyn mag, so ist doch diese Arbeit uns dem Begriffe nach nicht fremd. Anders aber verhält es sich, wenn man zu einer gegebenen Zahl den zugehörigen Logarithmen finden soll, denn dieses heißt, man soll angeben, zu welcher Potenz die Grundzahl 10 erhoben werden muß, damit man die gegebene Zahl, z. B. 3 erhalte. Diese Aufgabe läßt sich nicht so unmittelbar, sondern nur durch Näherung und gleichsam durch Versuche auflösen, indem man Potenzen von 10 sucht, die eine nicht viel von 3 verschiedene Zahl geben. Der Exponent der Potenz von 10, welche genau = 3 ist, wird eine irrationale Zahl, und läßt sich also überhaupt nicht vollkommen genau angeben.

Das Briggische Logarithmen-System ist wirklich so vollständig berechnet, daß man für jede ganze Zahl, die kleiner als 100000 ist, den Logarithmen sehr genau angegeben findet, und wir werden bald sehen, daß sich aus diesen berechneten Logarithmen nicht bloß der Logarithme jedes Bruches leicht und mit hinlänglicher Genauigkeit finden läßt, sondern auch der Logarithme einer Zahl, die größer als 100000 ist, ziemlich richtig angegeben werden kann.

* 221. Die Berechnung der Logarithmen, die wir in den Logarithmen-Tafeln schon zum Gebrauch fertig berechnet finden, ist sehr mühsam, indeß giebt die höhere Mathematik Mittel an die Hand, um etwas leichter dieselben zu finden, als es mit Hülfe der bisher vorgetragenen Lehren möglich ist. Um aber doch einen Begriff von der Berechnung der Logarithmen zu geben, will ich zeigen: wie man den Logarithmen von 3 im Briggischen System durch Näherung findet.

Da die Quadratwurzel aus $10 = 3,162277660169$ beynahe ist, so erhellt fürs erste, daß der Logarithme $= \frac{1}{2}$ zu der irrationalen Zahl $= 3,162277660169$ gehört, welche nur wenig größer als 3 ist, daher zur Zahl 3 ein Logarithme gehören muß, der etwas kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Sucht man nun auch die Cubicwurzel aus 10, so findet man die Zahl, deren Logarithme $= \frac{1}{3}$ ist, nämlich $\sqrt[3]{10} = 2,154434690032$. und da diese kleiner als 3 ist, so ist auch der Logarithme von 3 größer als $\frac{1}{3}$.

Um den Logarithmen von 3 näher zu bestimmen, kann man die mittlere Proportionalzahl zwischen $\sqrt[3]{10}$ und $\sqrt[2]{10}$ suchen. Da man diese findet, indem man aus dem Producte beyder die Quadratwurzel zieht, so ist sie $= \sqrt{10^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}}$ (nach §. 108) $= \sqrt{10^{\frac{5}{6}}} = 10^{\frac{5}{12}}$. Der Logarithme dieser mittlern Proportionalzahl ist also $= \frac{5}{12}$, und die mittlere Proportionalzahl selbst findet man $= 2, 610157215683$. Sucht man abermals zwischen dieser letztern Zahl und der Quadratwurzel aus 10, das ist zwischen $10^{\frac{5}{12}}$ und $10^{\frac{1}{2}}$, die mittlere Proportionalzahl, so ist diese gleich der Quadratwurzel aus dem Producte $10^{\frac{5}{12}}$. $10^{\frac{1}{2}}$, oder aus $10^{\frac{5}{12}+\frac{1}{2}}$, oder sie ist $= \sqrt{10^{\frac{11}{12}}}$, das ist $= 10^{\frac{11}{24}}$. Ihr Logarithme ist also genau $= \frac{11}{24}$, und sie selbst findet man aus den vorhin berechneten Zahlen $= 2, 87298483336$. Dieser letztern Zahl gehört also der Logarithme $= \frac{11}{24}$, und es muß folglich zu der Zahl $= 3$ ein etwas größerer Logarithme gehören.

Man hat also jetzt $\frac{11}{24}$ und $\frac{1}{2}$ als die Gränzen, zwischen denen der Logarithme von 3 gewiß enthalten ist, und man muß nun suchen, immer mehr die Gränzen, zwischen denen er fällt, näher zu bestimmen. Sucht man nämlich abermals zwischen $10^{\frac{11}{24}}$ und $10^{\frac{1}{2}}$, oder zwischen 2, 87298483336 und 3, 162277660169 die mittlere Proportionalzahl, so ist sie gleich der Quadratwurzel aus dem Producte

$\sqrt{10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{11}{24}}} = \sqrt{10^{\frac{23}{24}}} = 10^{\frac{23}{48}}$. Der Logarithme dieser mittlern Proportionalzahl ist also $= \frac{23}{48}$, und sie selbst ist sehr nahe $= 3,01416253$. Da diese Zahl größer als 3 ist, so ist der Logarithme von 3 kleiner als $\frac{23}{48}$, aber größer als $\frac{11}{24}$, und weil zu dem Logarithmus $= \frac{11}{24}$, die Zahl $= 2,872985$ beynahe, und zum Logar. $= \frac{23}{48}$, die Zahl $= 3,01416$ beynahe gehört, und letztere die Zahl 3 sehr wenig übertrifft, so folgt, daß der Logarithmus von 3, nur wenig kleiner als $\frac{23}{48}$ oder als $0,47917$ seyn kann. Man könnte auf ganz ähnliche Weise die Annäherung noch weiter fortsetzen, wobey man aber, weil kleine Fehler oft durch die so lange fortgesetzte Rechnung bedeutenden Einfluß bekommen, suchen muß, die Rechnung mit äußerster Sorgfalt und Genauigkeit zu führen. Hier mag das bisherige, um die Methode und wenigstens die Möglichkeit einer solchen Berechnung zu zeigen, genügen.

Man braucht indeß nicht alle Logarithmen auf diesem höchst mühsamen Wege zu suchen, sondern kann aus einigen berechneten Logarithmen sehr viele andre herleiten, indem es leicht ist, den Logarithmen des Products zu finden, wenn man die Logarithmen der Factoren kennt.

* 222. 52ste Aufgabe. Wenn die Logarithmen zweyer oder mehrerer Zahlen gegeben sind, den Logarithmen des Productes zu finden.

Auflösung. Man addirt die gegebenen Logarithmen, so ist die Summe der Logarithme des Productes.

Beweis. Man muß sich hier beständig daran erinnern, daß hier eine jede Zahl als eine Potenz der Grundzahl, also im Briggischen System, als eine Potenz von 10, betrachtet wird, und daß der Logarithme angiebt, die wievielte Potenz es sey, oder daß der Logarithme der Exponent der Potenz ist. Der Beweis ist also völlig, wie in §. 108. Es ist nämlich im Briggischen Systeme ganz allgemein der Logarithme von $10^n = n$, oder wie man zu schreiben pflegt, log. $10^n = n$. Log. $10^m = m$ und folglich log. $10^{m+n} = m + n$, aber 10^{m+n} ist das Product aus 10^m und 10^n.

Beyspiel. Wenn gegeben ist, daß der Logarithme von 3, oder log. $3 = 0,4771213$ und log. $4 = 0,6020600$, so findet man log. $12 = 0,4771213 + 0,6020600 = 1,0791813$, welches auch mit den in den Tafeln berechneten Logarithmen bis auf die letzte Ziffer übereinstimmt. Ueber diese letzte Ziffer, welche eigentlich eine 2 seyn muß, bleibt man immer etwas zweifelhaft, weil die gegebenen Logarithmen, als irrationale Zahlen, nicht vollkommen genau angegeben werden können, und der kleine Fehler, der wegen der weggelassenen kleinern Decimalbrüche statt findet, in der Summe mehrerer Logarithmen leicht einen etwas erheblichern Fehler bewirken kann, der indeß für den gewöhnlichen Gebrauch immer unbedeutend ist.

* 223. 53ste Aufgabe. Aus den gegebenen Logarithmen zweyer Zahlen, den Logarithmen des Quotienten zu finden, der aus der Division der beyden Zahlen durch einander entsteht.

Auflösung. Von dem Logarithmen des Dividendus subtrahire man den Logarithmen des Divisors, der Rest ist der Logarithme des Quotienten.

Der Beweis ist wie in §. 109.

* 224. 54ste Aufgabe. Wenn der Logarithme irgend einer Zahl gegeben ist, die Logarithmen der Potenzen oder Wurzeln derselben Zahl zu bestimmen.

Auflösung. Da auch die Wurzeln als Potenzen betrachtet werden können, deren Exponent ein Bruch ist, so gilt folgende Regel allgemein. Man multiplicire den Logarithmen der gegebenen Zahl mit dem Exponenten der Potenz, deren Logarithme bestimmt werden soll, so ist das Product der gesuchte Logarithme.

Der Beweis ist völlig wie §. 112. und 114.

Beyspiel. Wir finden oben §. 212. den Werth eines zu Zinsen auf Zinsen belegten Capitals von 100 Rthlr., nach 10 Jahren $= \frac{104^{10}}{100^9}$ Rthlr. oder $= \frac{104^{10}}{100^{10}} \cdot 100$ Rthlr., das ist gleich der zehnten Potenz von $\frac{104}{100}$, multiplicirt mit 100. Nun ist der Logarithme von $\frac{104}{100}$, $\log. \frac{104}{100} = 0,0170333$, also der Logarithme der zehnten Potenz jenes Bruchs, $\log. \frac{104^{10}}{100^{10}} = 0,170333$. Dieser Logarithme gehört nach Angabe der Logarithmen-Tafeln zu der Zahl 1,48024, also ist $\frac{104^{10}}{100^9} = 1,48024$ wenigstens ziemlich genau, und der Werth des Capitals von 100 Rthlr. ist also nach 10 Jahren $= 148,024$ Rthlr. $= 148$ Rthlr. $\frac{1}{2}$ Ggr.

Diese Aufgabe wird also durch die Logarithmen sehr leicht aufgelöst, statt daß das Aufsuchen der 10ten Potenz nach den gewöhnlichen Regeln viel beschwerlicher gewesen wäre. In einigen Fällen würde die Berechnung nach den sonst bekannten Regeln fast unmöglich seyn, z. B. wenn man den Werth eben des Capitals nach 10 Jahren und 7 Monaten, das ist nach $10\frac{7}{12}$ Jahren wissen wollte. Hier müßte man nämlich den Bruch $\frac{104}{100}$ zu einer Potenz erheben, deren Exponent $10\frac{7}{12}$ ist, und man müßte also die zwölfte Wurzel aus der 127sten Potenz von $\frac{104}{100}$ ziehen. Dagegen findet man den Logarithmen dieser Potenz sehr leicht, denn er ist $= 10\frac{7}{12} . \log. \frac{104}{100}$, also $= 0, 180269$, und dieser Logarithme gehört zu der Zahl 1, 5145, daher der Werth jenes Capitals nach 10 Jahren 7 Monaten ist $= 151, 45$ Rthlr. $= 151$ Rthlr. $10\frac{4}{5}$ Sgr.

Von der Einrichtung der Logarithmen-Tafeln und dem Gebrauche der Logarithmen.

* 225. Erklärung. Aus dem bisherigen erhellet, daß jede Zahl, die größer als 1 ist, einen positiven Logarithmen hat, den man als aus einer ganzen Zahl und angehängten Decimalbrüchen zusammen gesetzt betrachten kann. Die ganze Zahl nun, welche in dem Logarithmen vorkommt, heißt die Kennziffer, und der Logarithme besteht also aus der Kennziffer und einem angehängten Decimalbruche.

Beyspiel. Der Logarithme von 150 ist $=$ 2, 1760913, und hier ist 2 die Kennziffer.

* 226. 31ster Lehrsatz. Im Briggischen Logarithmen-Systeme ist die Kennziffer jedes Logarithmen, der einer ganzen Zahl zu-

gehört, um eins kleiner, als die Anzahl von Ziffern dieser ganzen Zahl.

Beweis. Alle ganze Zahlen, die zwischen 1 und 10 liegen, oder aus einer Ziffer bestehen, sind zu betrachten als Potenzen von 10, deren Exponenten zwar größer als 0, aber kleiner als 1 sind. Die Logarithmen dieser Zahlen haben daher 0 zur Kennziffer, indem sie bloß aus Brüchen bestehn und keine Ganze enthalten.

Alle zweyziffrige Zahlen haben einen Logarithmen der zur Kennziffer 1 hat; denn da 10 die erste und 100 die zweyte Potenz der Grundzahl ist, so ist jede zwischen beyde fallende Zahl eine Potenz von 10, deren Exponent 1 mit einem angehängten Bruche ist, und eben so groß ist also ihr Logarithme in diesem Systeme. Eben so erhellt, daß alle dreyziffrige Zahlen einen Logarithmen haben, dessen Kennziffer 2 ist; daß die Logarithmen aller vierziffrigen Zahlen 3 zur Kennziffer haben, u. s. w.

* 227. Es ist nun aber leicht zu übersehn, daß dieses auch noch gilt für alle ganze Zahlen, denen Brüche angehängt sind, dieses mögen nun gewöhnliche oder Decimalbrüche seyn, denn z. B. der Logarithmus von $11\frac{7}{8}$ ist gewiß größer als der Logarithme von 11, und kleiner als der Logarithme von 12; seine Kennziffer ist also dieselbe, wie die Kennziffer des Logarithmen von 11, und er unterscheidet sich von diesem bloß durch den der Kennziffer angehängten Decimalbruch.

Dieser Lehrsatz setzt uns also in Stand, die Kennziffer eines jeden Logarithmen zu bestimmen, welche zu einer Zahl gehört, die größer als 1 ist.

Für diejenigen Brüche, die kleiner als 1 sind, werden wir nachher etwas Näheres in Hinsicht der Logarithmen bestimmen.

* 228. 32ster Lehrsatz. Wenn der Briggische Logarithme irgend einer Zahl gegeben ist, und man multiplicirt oder dividirt diese Zahl mit irgend einer ganzen Potenz von 10; so ist der Logarithme des Products oder des Quotienten bloß durch seine Kennziffer von dem Logarithmen jener ersten Zahl verschieden.

Beyspiel. Der Lehrsatz behauptet, wenn z. B. log. 2621 = 3, 4184670: so sey der Logarithmus von 26210, 262100 u. s. w., und auch von 2, 621, von 26,21, von 262, 1 u. s. w. von jenem Logarithmen bloß dadurch unterschieden, daß die letztern eine andere Kennziffer haben.

Beweis. Da nach §. 222. der Logarithme des Products gefunden wird, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt: so erhellt die Richtigkeit des Lehrsatzes von selbst, weil die Logarithmen der ganzen Potenzen von 10, ganze Zahlen sind. Man erhält also, um bey dem eben angegebenen Beyspiel zu bleiben: log. 262100 = log. 2621 + log. 100 also = 3, 4184670 + 2, 00 = 5, 4184670. Und auf ganz ähnliche Weise nach §. 223. log. 2, 621 = log. $\frac{2621}{1000}$ = 3, 4184670 — 3. = 0, 4184670. Dieses läßt sich auf alle ähnliche Fälle anwenden, und sogar auf diejenigen Fälle, wo die Zahl aus bloßen Decimalbrüchen besteht, wie z. B. 0, 02621.

* 229. Den Logarithmus eines Decimalbruches, der kleiner als 1 ist, findet man schon nach der

Regel des §. 223. leicht, indem man z. B. für den Logarithmen von 0, 002621 setzt, log. 0, 002621

$$= \frac{\text{log. } 2621}{\text{log. } 1000000} = \text{log. } 2621 - \text{log. } 1000000$$

$= 3, 4184670 - 6$, oder $= 0, 4184670 - 3$, wo man dann den Logarithmen $= + 0, 4184670 - 3$ beybehalten, oder auch $= - 2, 5815330$, welches beydes einerley ist, setzen kann, je nachdem das eine oder das andere den Umständen nach bequem ist.

Behält man die Form $0, 4184670 - 3$ bey, so kann man $- 3$ als negative Kennziffer betrachten und die Regel merken, daß diese negative Kennziffer $= 1$ ist, wenn der Decimalbruch Zehntel enthält, daß nach dem Comma keine Null folgt, wie in 0, 2621; daß ferner diese Kennziffer $= - 2$ ist; wenn in der Stelle der Zehntel eine Null steht, in der Stelle der Hunderttheile aber eine andre Ziffer vorkommt, wie 0, 02621; daß sie $= - 3$ ist, wenn die erste Ziffer des Decimalbruchs Tausendtheile bedeutet, wie in 0, 002621, und so weiter.

230. Die Logarithmen-Tafeln, die man bey allen Rechnungen mit Logarithmen zur Hand haben muß, enthalten nun die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100000, oder die kleinern Tafeln wenigstens von 1 bis 10000. Wenn man also den Logarithmen für eine dieser Zahlen gebraucht, so hat man nichts zu thun, als denselben aus den Tafeln abzuschreiben. Es können aber Fälle vorkommen, da man den Logarithmen einer Zahl wissen will, die selbst nicht in den Tafeln vorkommt, z. B. den Logarithmen einer Zahl, die aus einer ganzen Zahl und angehängten Brüchen besteht, und für diese Fälle muß man insonderheit die Regeln, wie ma sich helfen kann, bemerken.

Anmerk. Unter den Logarithmen-Tafeln gehören zu den brauchbarsten Schulze's Sammlung logarithmischer, trigonometrischer u. a. Tafeln. — Vega's logarithmische, trigonometrische u. a. Tafeln. — Tables portatives des logarithmes, par Callet; und andere.

* 231. 55ste Aufgabe. Den Logarithmen einer Zahl zu bestimmen, die in den Logarithmen-Tafeln nicht selbst vorkommt.

Auflösung. Es können mehrere Fälle vorkommen, wo man die Zahl, deren Logarithme gesucht wird, nicht unmittelbar in den Tafeln findet.

Erster Fall. Wenn die Zahl, deren Logarithme gesucht wird, größer ist, als die in den Tafeln vorkommenden Zahlen.

Ich will die Regeln für diesen Fall sogleich auf ein Beyspiel anwenden, nämlich den Logarithmen von 567889 zu finden. Offenbar ist dieser Logarithme größer als der von 567880, und kleiner als der Logarithme von 567890. In den Tafeln findet man

$$\log. 56789 = 4,7542642$$
$$\log. 56788 = 4,7542566$$

also ist nach §. 228. $\log. 567890 = 5,7542642$,

$$\log. 567880 = 5,7542566,$$

und der Unterschied beyder ist $= 0,0000076$, da nun der Unterschied von 567889 und 567890 nur ein Zehntel ist von dem Unterschiede zwischen 567880 und 567890: so nimmt man an, das genau genug auch der Unterschied der Logarithmen jener beyden Zahlen nur ein Zehntel von dem Unterschiede der Logarithmen der letztern beyden Zahlen ist, oder der gesuchte Logarithme etwa um 0,0000008 kleiner, als der Logarithme von 567890.

Zweyter Fall. Wenn die Zahl aus einer ganzen Zahl und einem angehängten gewöhnlichen Bruche besteht, zum Beyspiel $47809\frac{5}{27}$.

Man bringe die ganze Zahl mit dem Bruche auf einerley Nenner, indem man $47809\frac{5}{27} = \frac{1290848}{27}$ setzt. Alsdann ist log. 1290848 — log. 27 der gesuchte Logarithme.

Wenn die Zahl beträchtlich groß ist, so kann man auch auf folgende Art verfahren: Man sucht den Logarithmen der beyden nächsten ganzen Zahlen, also bey dem vorigen Beyspiele die Logarithmen von 47809 und 47810, sucht ihren Unterschied, und legt zum Logarithmus der kleinern Zahl einen solchen Theil jenes Unterschiedes, wie der Bruch angiebt, hinzu. Die Tafeln geben

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 47810 & = 4,6795187. \\ \text{log. } 47809 & = 4,6795097. \\ \hline \text{Unterschied} & = 0,0000090. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \frac{5}{27} \text{ des Unterschiedes} & = 0,0000017, \\ \text{dies addirt zu log. } 47809 & = 4,6795097 \\ \hline \text{giebt log. } 47809\frac{5}{27} & = 4,6795114. \end{array}$$

Diese letztere Regel ist indeß nicht mit Sicherheit anzuwenden, wenn die ganze Zahl klein ist; denn log. $2\frac{1}{2}$ liegt bey weitem nicht in der Mitte zwischen log. 2 und log. 3. Ganz genau ist es zwar auch bey größern Zahlen nicht wahr, daß z. B. log. $57980\frac{1}{2}$ zwischen log. 57980 und 57981 in die Mitte fällt, aber hier ist der Fehler klein genug, um übersehn zu werden.

Dritter Fall. Wenn die Zahl Decimalbrüche enthält.

Die Zahl mag aus einer ganzen Zahl mit angehängten Decimalbrüchen oder bloß aus Decimalbrüchen bestehn: so kann man immer den Logarithmen so suchen, als ob gar kein Comma da wäre, oder als ob alle Ziffern zusammen eine ganze Zahl ausmachten. Die Kennziffer aber muß man nach dem, was §. 226. und 229. erwähnt ist, bestimmen.

Will man den Logarithmen von 37,54 suchen, so ist $\log. 3754 = 3,5744943$, aber weil $37,54 = \frac{3754}{100}$, so muß man den Logarithmus von 100 abziehn, und hat also $\log. 37,54 = 1,5744943$. Den Fall, da die Zahl ein bloßer Decimalbruch ist, haben wir §. 229. betrachtet.

* 232. 56ste Aufgabe. Zu einem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl mit Hülfe der Tafeln zu finden.

Auflösung. Wenn der Logarithme ganz genau in den Tafeln vorkommt, so findet man ohne Schwierigkeit die zugehörige Zahl, welche dann daneben steht. Dieser Fall ist aber der seltnere, denn gewöhnlich findet man, daß der gegebene Logarithme zwischen zwey in der Tafel stehende Logarithmen fällt. Z. B. der Logarithme 4,8162907 fällt zwischen die beyden in den Tafeln stehenden Logarithmen 4,8162877 und 4,8162943. Da nun die beyden letztern Logarithmen zu 65507 und 65508 gehören, so fällt die Zahl, zu welcher der gegebene

Logarithme gehört, zwischen 65507 und 65508. Der Unterschied der beyden letztern Logarithmen ist = 0,0000066, und der gegebene Logarithme ist um 0,0000030 größer, als der Logarithme von 65507, man kann daher verhältnißmäßig $65507\frac{3}{66}$ oder 65507,455, als die zum gegebenen Logarithmen gehörige Zahl annehmen.

Hätte der gegebene Logarithme auch eine andere Kennziffer gehabt, so würde man gleichwohl die Zahl nach dieser Methode richtig bestimmen, nur daß man das Comma so setzen muß, daß vor dem Comma eine Ziffer mehr sey, als die Kennziffer angiebt. Zum Logarithmen 1,8162907 gehört also die Zahl 65,507455. und zum Logarithmen 7,8162907 die Zahl 65507455.

* 233. Der Gebrauch, den man von den Logarithmen macht, besteht nun hauptsächlich darin, daß man sich durch Hülfe derselben das Multipliciren, das Dividiren, die Erhebung zu Potenzen und die Ausziehung der Wurzeln sehr erleichtert.

Kehrt man nämlich die Aufgaben §. 222., 223., 224. um, so erhält man folgende Regeln:

Soll man das Product aus mehrern Zahlen bestimmen, so suche man in den Tafeln die Logarithmen dieser Zahlen und addire sie; die Summe suche man unter den Logarithmen auf, so ist die daneben stehende Zahl das gesuchte Product.

Beyspiel. Das Product der Zahlen 75,84, 976, 7,32 zu finden. Man hat

$$\begin{array}{rl} \log.\ 75,84 &= 1,8798983 \\ \log.\ 976 &= 2,9894498 \\ \log.\ 7,32 &= 0,8645111 \\ \hline \text{log. des Products} &= 5,7338592. \end{array}$$

Diesen Logarithmen findet man in den Tafeln nicht genau, man hat aber log. 54182 = 4,7338550,
log. 54183 = 4,7338630.

$$\begin{array}{rl} \text{Es ist also auch log. } 541820 &= 5,7338550 \\ \log.\ 541830 &= 5,7338630. \\ \hline \text{Unterschied} &= 0,0000080. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Dagegen ist zwischen log. } 541820 &= 5,7338550 \\ \text{und dem log. des Productes} &= 5,7338592 \\ \text{der Unterschied} &= 0,0000042; \end{array}$$

also gehört der letztere Logarithme, weil $80 : 42 = 10 : \frac{42}{8}$ zu $541820 + \frac{42}{8}$, das ist zu 541825 ohngefähr, welches also das gesuchte Product ist.

Um den Quotienten zu finden, welcher aus der Division zweyer Zahlen durch einander entsteht, subtrahire man den Logarithmen des Divisors vom Logarithmen des Dividendus; den Rest suche man unter den Logarithmen in den Tafeln auf, so ist die daneben stehende Zahl der Quotient.

Beyspiel. Die Zahl 789,543 durch 75,474 zu dividiren. Es ist log. 789,543 = 2,8973757
log. 75,474 = 1,8777974

log. des Quotienten = 1,0195783;

$$\text{also } \frac{789,543}{74,474} = 10,4611.$$

Um irgend eine Potenz oder Wurzel einer Zahl zu finden, suche man den Logarithmen dieser Zahl, multiplicire ihn mit dem Exponenten der Potenz, und suche das Product als Logarithmen in der Tafel auf: so ist die nebenstehende Zahl die gesuchte Potenz.

Beyspiele. Die 50ste Potenz von $\frac{104}{100}$ zu finden. Da log. $\frac{104}{100} = 0,0170333$, so ist das Funfzigfache $\frac{104^{50}}{100^{50}} = 0,8516650$. Die Tafeln geben

4,8516619, als Logarithmen von 71066

also 4,8516650, als Logarithmen von 71066,5

es ist also für die Kennziffer 0, die zum Logarithmen gehörige Zahl $= \frac{104^{50}}{100^{50}} = 7,10665$; und wenn man dieses mit §. 212. und 224. vergleicht, so folgt, daß 100 Rthlr. zu Zinsen auf Zinsen von 4 Procenten belegt, nach 50 Jahren, 710 Rthlr. 16 Ggr. hervorbringen.

Die 15te Wurzel aus 16 oder $16^{\frac{1}{15}}$ zu bestimmen.

log. 16 = 1,2041200

dividirt mit 15.

log. $16^{\frac{1}{15}} = 0,0802747$.

Da nun log. 1,2030 = 0,0802656,

und beynahe log. 1,203025 = 0,0802747,

so ist $\sqrt[15]{16} = 1,203025$.

* 234. Beyspiele von der Anwendung der Logarithmen.

Erstes Exempel. Zu 57986, 9487 und 432805 die vierte Proportionalzahl zu finden.

Zweytes Exempel. Jemand hat einige Stücke Waare, zusammen von 1219 Ellen, für 725 Rthlr. gekauft, wie theuer kann er die Elle wieder verkaufen, wenn er 20 Procent profitiren will?

* 235. Drittes Exempel Die Aufgabe §. 214. durch die Logarithmen genau aufzulösen.

Wir fanden dort, daß am Ende des nten Jahrs der noch übrige Rest des Capitales sey

$$= \frac{104^n}{100^n} \cdot 10000 - \frac{500 \cdot \left(\frac{104^n}{100^n} - 1\right)}{\frac{104}{100} - 1}$$

oder wenn man alles auf einen Nenner bringt, und statt $\frac{104}{100} - 1 = 0,04$ setzt:

$$\frac{\frac{104^n}{100^n} \cdot 10000 \cdot 0,04 - 500 \cdot \frac{104^n}{100^n} + 500}{0,04};$$

das ist $\frac{104^n}{100^n} \cdot \left(10000 - \frac{500}{0,04}\right) + \frac{500}{0,04}$.

Wenn also nach n Jahren das Capital ganz aufgezehrt ist, so muß diese Summe $= 0$ seyn,

also $\frac{104^n}{100^n} = \frac{500}{500 - 0,04 \cdot 10000} = \frac{500}{500 - 400}$,

folglich $n \cdot \log \frac{104}{100} = \log. \frac{500}{100} = \log. 5$,

$$\text{und } n = \frac{\log. 5}{\log. \frac{104}{100}} = \frac{0,6989700}{0,0170333} = 41,018.$$

Da nun n eine Anzahl von Jahren bedeutet, so ist am Ende des 41sten Jahrs das Capital beynahe völlig erschöpft.

* 236. Viertes Exempel. Jemand wünscht ein Capital von 4000 Rthlr. auf Zeitrenten so zu belegen, daß er 10 Jahre lang ansehnliche Procente zieht, dann aber das Capital als aufgezehrt betrachtet: wie viele Procente kann er erhalten, wenn derjenige, welcher das Capital annimmt, das Geld zu 4 Procent und zu Zins auf Zinsen benutzen kann.

Wenn die Person, welche das Capital ausgiebt, jährlich m Procente Zinsen erhält, also jährlich 40 m Rthlr., so sind die sämmtlichen empfangenen Zinsgelder am Ende des 10ten Jahrs so viel werth, als die Summe einer geometrischen Progression, deren erstes Glied 40 . m und deren Exponent $\frac{104}{100}$ ist, und diese Reihe hat 10 Glieder, wenn man annimmt, daß die Zinsen immer mit Anfange des Jahrs bezahlt werden. Die Summe dieser Reihe soll nun eben so viel betragen, als die 4000 Rthlr. mit Zinsen auf Zinsen nach 10 Jahren werth sind, das ist $= \frac{104^{10}}{100^{10}} \cdot 4000$. Hieraus läßt sich m bestimmen.

* 237. Fünftes Exempel. Ein Ehepaar setzt in eine Wittwen-Casse jährlich 45 Rthlr., und zwar immer zu Anfange des Jahres ein; nachdem dieses 20 Jahre geschehen ist, stirbt der Mann, und die Wittwe erhält nun zu Anfange jedes Jahrs aus der Wittwen-Casse 150 Rthlr. Die Wittwe überlebt den Mann 10 Jahre: wie viel Vortheil oder Schaden hat dann am Ende dieser Zeit die Wittwen-