daß es durchaus nöthig ist, daß die Anzahl der Ziffern hinter dem Comma in der gegebenen Zahl oder die Anzahl der Nullen im Nenner eine durch 3 theilbare Zahl sey, weil nur dann die Wurzel des Nenners sich leicht und genau finden läßt. Hat nun der Decimal-Nenner in der gegebenen Zahl eine solche Anzahl von Nullen: so hat seine Cubikwurzel nur den dritten Theil dieser Nullen, und es erhellet der Grund der Regel für die Bestimmung der Stelle des Comma's in der Wurzel.

Beyspiel. Die Cubikwurzel aus 10 bis auf Milliontheilchen genau zu bestimmen. Desgleichen die Wurzeln aus 12, 13, 25, 100.

Siebenter Abschnitt.

Von den Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

138. Erklärung. Das Wort Verhältniß zeigt eine Vergleichung zwischen zwey gleichartigen Größen an, und zwar eine Vergleichung, welche angiebt, ob sie einander gleich sind, oder wie sie von der Gleichheit abweichen.

139. Erklärung. Die Vergleichung, wie zwey Größen von der Gleichheit abweichen, läßt sich auf zweyerley Weise anstellen; denn man kann erstlich

fragen: **um wie viel** ist die eine größer, als die andre? oder man kann zweytens fragen: **wie viel mal** so groß ist die eine, als die andere? Man unterscheidet daher **das arithmetische Verhältniß** zweyer Größen, welches durch die Beantwortung der erstern Frage bestimmt wird, und **das geometrische Verhältniß** derselben, welches man kennen lernt, wenn man die zweyte Frage beantwortet.

140. **Erklärung.** Zwey Größen haben zu einander **eben dasjenige Verhältniß**, welches zwey andre Größen zu einander haben, wenn bey jenen die Beantwortung der einen oder der andern der im vorigen §. erwähnten Fragen eben so ausfällt, als bey diesen.

Zwey arithmetische Verhältnisse sind also einander gleich, wenn die erste Größe die zweyte um eben so viel übertrifft, als die dritte die vierte. Hingegen sind zwey geometrische Verhältnisse einander gleich, wenn die erste Größe in der zweyten so oft enthalten ist, als die dritte in der vierten.

Beyspiel. Das arithmetische Verhältniß der Zahlen 5, 3 ist also eben dasselbe, wie das arithmetische Verhältniß der Zahlen 9, 7.

141. **Erklärung.** Vier Größen sind in **Proportion**, wenn die erste sich eben so zur

zweyten verhält, wie die dritte zur vierten, oder wenn diese beyden Verhältnisse einander gleich sind. Man nennt die Proportion eine arithmetische, wenn die gleichen Verhältnisse arithmetische sind; hingegen eine geometrische Proportion, wenn die gleichen Verhältnisse geometrische Verhältnisse sind.

142. Erklärung. Die Glieder der Proportion sind die vier Größen, welche in Proportion oder einander proportional sind. In jeder Proportion heissen das erste und vierte Glied die äussern, das zweyte und dritte Glied die mittlern Glieder. Auch betrachtet man in jedem Verhältnisse ein Glied als das vorhergehende und eines als das nachfolgende; in der Proportion sind also das erste und dritte die vorgehenden, das zweyte und vierte die nachfolgenden Glieder.

Von den arithmetischen Verhältnissen.

143. Willkührlicher Satz. Da die arithmetische Proportion auf der Gleichheit der Differenzen zwischen den ersten und den beyden letzten Gliedern der Proportion beruht: so drückt man, daß die Zahlen 5, 3, 13, 11 in arithmetischer Proportion sind, durch folgende Bezeichnung aus

$$5 - 3 = 13 - 11.$$

144. 16ter Lehrsatz. In einer arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden mittlern Glieder der Summe der beyden äussern Glieder gleich.

Beweis. Da das zweyte Glied gegen das erste eben so viel kleiner ist, als das dritte Glied das vierte übertrifft, so ist offenbar die Summe des ersten und vierten so groß, als die Summe des zweyten und dritten; denn wenn man z. B. die Proportion $17 - 11 = 29 - 23$ hat, so ist das erste Glied um 6 größer als das zweyte und das vierte gerade eben so viel kleiner als das dritte, daher $17 = 11 + 6$ und $29 = 23 + 6$, also so wohl die Summe der äußern, als der mittlern Gliedern $= 11 + 6 + 23$.

* Der Beweis läßt sich mit Hülfe der Buchstaben-Rechnung auch so führen, daß man die arithmetische Proportion $a - b = c - d$ als Gleichung betrachtet. Addirt man dann zu beyden gleichen Größen $b + d$, so erhält man

$$a - b + b + d = c - d + b + d,$$

das ist $a + d = c + b$, und dieses ist unser Lehrsatz in Buchstaben ausgedrückt.

154. 41ste Aufgabe. Aus drey gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion das eine unbekannte Glied zu finden.

Auflösung. Man kann die Proportion immer so ausdrücken, daß das gesuchte Glied entweder das erste oder das vierte wird. Hat man sie so gestellt, so addire man die beyden mittlern Glieder und subtrahire das eine bekannte äussere Glied, dann ist der Rest das gesuchte unbekannte Glied.

Beyspiel. Man soll eine Zahl suchen, welche von 7 um eben so viel verschieden ist, als 19 von 13. Bezeichnet man die unbekannte Zahl mit x, so soll

$7 - x = 19 - 13$, oder welches einerley ist

$19 - 13 = 7 - x$, seyn, und man findet

$x = 13 + 7 - 19 = 1$, als die gesuchte Zahl.

Also ist $7 - 1 = 19 - 13$, oder in der arithmetischen Proportion, deren drey erste Glieder 19, 13, 7 sind, ist 1 das vierte.

146. Erklärung. Man nennet eine stetige arithmetische Proportion diejenige, deren beyde mittlere Glieder einander gleich sind. Alsdann heißt die Zahl, welche in beyden mittlern Gliedern vorkömmt, die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den Zahlen, welche das erste und vierte Glied der Proportion ausmachen.

Beyspiel. Die Proportion $75 - 66 = 66 - 57$ ist also eine stetige arithmetische Proportion, und 66 ist die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen 57 und 75.

147. 42ste Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Man addire die beyden gegebenen Zahlen. Die Hälfte dieser Summe ist die gesuchte mittlere Proportionalzahl.

Beyspiel. Zwischen 75 und 64 ist ist also $69\frac{1}{2}$ die mittlere arithmetische Proportionalzahl; denn es ist $\frac{75 + 64}{2} = 69\frac{1}{2}$, und $75 - 69\frac{1}{2} = 69\frac{1}{2} - 64$.

* 148. Unter den Zahlen, die in arithmetischer Proportion sind, könnten auch negative vorkommen. Denn wenn man z. B. zu 72, 50 und 18 die vierte arithmetische Proportionalzahl sucht, so giebt $72 - 50 = 18 - x$, für die letztere -4.

Sollte man zu $+15$, -12 und -19 die vierte Proportionalzahl suchen, so ist der Unterschied von $+15$ und $-12 = 27$, und man findet daher das vierte Glied der arithmetischen Proportion $= -46$, denn -12 von $+15$ abgezogen, läßt $+27$, und -46 von -19 abgezogen, läßt ebenfalls $+27$ zum Reste, (nach §. 87.). Man würde diese Proportion eigentlich so schreiben müssen:

$$15 - (-12) = -19 - (-46)$$

oder auch, wenn man die abzuziehenden Größen mit umgekehrtem Zeichen addirt:

$$15 + 12 = -19 + 46.$$

149. Erklärung. Man nennet diese mittlere Proportionalzahl auch das arithmetische

Mittel zwischen zwey andern Zahlen, und daher versteht man unter dem arithmetischen Mittel zwischen mehrern Zahlen die Summe aller dieser Zahlen dividirt mit der Menge der Zahlen.

Beyspiel Wenn an einem Orte in einem Jahre 751, im andern 697, im dritten 755, im vierten 725 Menschen gestorben sind, so sagt man: im Mittel, oder ein Jahr ins andere gerechnet, sind jedes Jahr gestorben 732 Menschen, weil $\frac{751 + 697 + 755 + 725}{4} = \frac{2928}{4} = 732$.

Von der arithmetischen Progression.

* 150. Erklärung. Wenn man eine Reihe von Zahlen hat, die so beschaffen sind, daß die erste zur zweyten eben das arithmetische Verhältniß hat, wie die zweyte zur dritten und wie die dritte zur vierten, die vierte zur fünften u. s. w., oder überhaupt, wie eine jede zu der nächst folgenden: so heißt diese Reihe von Zahlen eine arithmetische Progression, und jede dieser Zahlen heißt ein Glied der Progression

Beyspiel. Die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 u. s. w. bilden eine arithmetische Progression; denn man hat $17 - 15 = 15 - 13 = 13 - 11 = 11 - 9$ u. s. w.

* 151 In einer arithmetischen Progression ist also jedes Glied die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den beyden nächsten Gliedern. Da-

her kann man von jeder arithmetischen Progression so viele Glieder bestimmen, als man will, sobald nur zwey gegeben sind.

Beyspiel. Will man die arithmetische Progression bestimmen, worin 75 und 63 als zwey einander nächste Glieder vorkommen, so setzt man $75 - 63 = 63 - x$, und findet die Reihe: 75, 63, 51, 39, 27, 15 u. s. w. Oder, wenn man setzt $x - 75 = 75 - 63$, so findet man andere Glieder derselben Reihe, nämlich 63, 75, 87, 99, 111 u. s. w.

* 152. Wenn man mehrere, immer kleinere Glieder einer Progression berechnet, so kömmt man endlich an negative Glieder, und würde z. B. in der vorigen Progression noch folgende Glieder finden:
39, 27, 15, 3, -9, -21, -33, -45 u. s. w. Man könnte also unzählige Glieder einer Progression angeben.

* 153. Erklärung. Man nennt eine Progression eine steigende, wenn die folgenden Glieder immer größer sind, als die vorhergehenden; hingegen eine fallende, wenn die folgenden Glieder immer kleiner sind, als die vorhergehenden.

Beyspiel. Es ist also 1, 4, 7, 10, 13, 16 u. s. w. eine steigende Progression; hingegen ist 34, 31, 28, 25, 22, 19, 16, 13 u. s. w. eine fallende Progression.

*** 154. 43ste Aufgabe. Wenn zwey nächste Glieder der arithmetischen Progression gegeben sind, jedes andre Glied zu bestimmen, wenn nur die Anzahl der Glieder, welche zwischen dem gesuchten und gegebenen Gliedern liegen, bekannt ist.**

Auflösung. Wenn man die beyden gegebenen Glieder als die ersten der Progression betrachtet: so ist der Unterschied zwischen dem ersten und dritten Gliede zweymal so groß, als zwischen dem ersten und zweyten Gliede; der Unterschied zwischen dem ersten und vierten ist dreymal so groß; der Unterschied zwischen dem ersten und zehnten ist neunmal so groß u. s. w. Hieraus ergiebt sich folgende Regel, um irgend ein Glied der Progression zu bestimmen, welches ich kurz das n^{te} Glied nennen will. Man suche den Unterschied der beyden gegebenen Glieder und multiplicire diesen mit $n - 1$, das heißt mit einer um eins kleinern Zahl, als diejenige ist, welche angiebt, das wievielte Glied das gesuchte ist. Das Product addire man zum ersten Gliede, wenn man eine steigende Progression sucht, und subtrahire es hingegen von demselben, wenn man eine fallende Progression verlangt.

Beyspiel. In der Progression, deren erste Glieder 915 und 870 sind, das dreyzehnte Glied der fallenden Progression zu finden. Man hat $915 - 870 = 45$, und $n = 13$; also $(n - 1) \cdot 45 = 12 \cdot 45 = 540$, folglich $915 - 540 = 375$, als das gesuchte dreyzehnte Glied. Das fünf und zwanzigste Glied würde man $= -165$ finden; dagegen aber das dreyzehnte Glied der steigenden Reihe, deren erste Glieder 870, 915 sind, $= 1410$.

* 155. 44ste Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Zahlen eine bestimmte Anzahl von Gliedern einer arithmetischen Progression oder von mittlern arithmetischen Proportionalzahlen zu finden.

Auflösung. Man suche den Unterschied der beyden gegebenen Zahlen; dividire diesen mit eins mehr, als die Anzahl der zwischen zu fügenden Glieder beträgt: so giebt dieser Quotient, selbst zu der kleinsten der gegebenen Zahlen addirt, das erste gesuchte Zwischenglied; addirt man zu diesem Gliede denselben Quotienten abermals, so findet man das zweyte Zwischenglied, und so jedes nächst folgende.

Beyspiel. Zwischen 7 und 112 fünf mittlere arithmetische Proportionalzahlen einzuschalten. Der Unterschied der gegebenen Zahlen ist 105, und dieser mit 6 dividirt, giebt $17\frac{1}{2}$, man findet daher die Progression 7, $24\frac{1}{2}$, 42, $59\frac{1}{2}$, 77, $94\frac{1}{2}$, 112.

* 156. 45ste Aufgabe. In einer gegebenen arithmetischen Progression die Summe einer jeden bestimmten Anzahl von Gliedern anzugeben.

Auflösung. Man addire das erste und letzte Glied desjenigen Theiles der Progression, dessen Summe man sucht; diese Summe multiplicire man mit der Anzahl der Glieder, und halbire das Product. Die herauskommende Zahl ist die Summe aller gegebenen Glieder der Progression.

Beyspiel. Da die natürlichen Zahlen eine arithmetische Progression bilden, so findet man die Summe der ersten tausend Zahlen, wenn man 1 und 1000, als die äußersten Glieder addirt, die Summe mit 1000, als der Anzahl der Glieder multiplicirt, und das Product mit 2 dividirt. Die Summe der ersten tausend natürlichen Zahlen ist also = 500500.

Beweis. Wenn man alle zu addirende Glieder der Reihe nach der Ordnung hinschreibt, und darunter dieselbe Glieder in umgekehrter Ordnung, so nämlich, daß das letzte unter dem ersten, das vor-letzte unter dem zweyten steht, so ist die Summe jeder zwey über einander stehender Glieder gleich, z. B. in den hier folgenden Reihen = 42.

7. 11. 15. 19. 23. 27. 31. 35.
35. 31. 27. 23. 19. 15. 11. 7.

Hier erhält man also die doppelte Summe der oben stehenden Reihe, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der ganzen Anzahl der Glieder multiplicirt; und es erhellt die Richtigkeit der Auflösung. Daß aber die Summe jeder zwey über einander stehender Glieder gleich werde, erhellt daraus, weil immer 11 — 7 = 35 — 31 ist.

Uebungs-Exempel. Die arithmetische Progression zu bestimmen, deren erste Glieder 2 und 3,7; oder deren erste Glieder 15 und $21\frac{3}{4}$ sind.

Das dreyßigste Glied eben jener steigenden Progression zu finden.

Zwischen 15 und 25 dreyßig mittlere arithmetische Proportionalzahlen zu bestimmen.

Die Summen folgender Progressionen zu bestimmen: 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35; und der Progression, deren erstes Glied 16, das letzte $\frac{1}{2}$ ist, wenn zwischen diesen Zahlen zwölf Glieder eingeschaltet werden, oder wenn zwanzig eingeschaltet werden.

Von den geometrischen Verhältnissen.

157. Erklärung. Da das geometrische Verhältniß zweyer Zahlen zu einander dadurch bestimmt wird, daß man angiebt, wie viel mal die eine in der andern enthalten sey: so hat man der Zahl,

welche dieses angiebt, den eigenen Namen: Exponent des Verhältnisses, gegeben.

Es haben also (§. 140.) zwey Größen dasselbe geometrische Verhältniß zu einander, welches zwey andre Größen zu einander haben, wenn der Exponent beyder Verhältnisse gleich ist.

Beyspiel. Der Exponent des Verhältnisses 5 zu 20 ist $= 4$; der Exponent des Verhältnisses 20 zu 5 ist $= \frac{1}{4}$. Die Verhältnisse 7 zu 9 und 21 zu 27 haben beyde zum Exponenten $\frac{9}{7}$, und diese beyden Verhältnisse sind also einander gleich.

Anmerk. Man muß bemerken, daß der Begriff vom Exponenten des Verhältnisses wohl zu unterscheiden ist von dem Exponenten einer Potenz.

158. Willkührlicher Satz. Man bezeichnet die geometrische Proportion oder die Gleichheit zweyer geometrischer Verhältnisse, daß z. B. 5 sich zu 20 eben so verhält, wie 1 zu 4, oder daß diese vier Zahlen in der angegebenen Ordnung in geometrischer Proportion sind, auf folgende Weise

$$5 : 20 = 1 : 4,$$

und es behalten hier die Zeichen der Division und der Gleichheit ihre gewöhnliche Bedeutung, denn es ist $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

159. 17ter Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion ist das Product der

beyden mittlern Glieder gleich dem Producte der beyden äußern Glieder.

Beweis. Man kann immer das zweyte Glied betrachten, als ein Product aus dem ersten Gliede in den Exponenten, und das vierte Glied, als ein Product aus demselben Exponenten in das dritte Glied. Multiplicirt man also das erste Glied in das vierte, so hat man ein Product aus dem ersten Gliede in das dritte und den Exponenten; und indem man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt, erhält man ein Product aus dem dritten Gliede in das erste und den Exponenten. Diese beyden Producte sind also gleich, weil sie aus denselben in einander multiplicirten Zahlen bestehen.

Beyspiel. Es ist $5 : 7 = 25 : 35$, und also auch $5 \cdot 35 = 7 \cdot 25$.

Der Beweis läßt sich auch so führen: Wenn $5 : 7 = 25 : 35$, so ist $\frac{5}{7} = \frac{25}{35}$; und wenn man beyde Glieder dieser Gleichung mit 7 und mit 35 multiplicirt, so erhält man $\frac{5 \cdot 7 \cdot 35}{7} = \frac{25 \cdot 7 \cdot 35}{35}$, oder $5 \cdot 35 = 25 \cdot 7$, wie der Lehrsatz angiebt.

160. 46ste Aufgabe. Zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Die Aufgabe verlangt, eine Zahl zu finden, die sich za der, der Ordnung nach gegebenen, dritten Zahl eben so verhält, wie die zweyte zur ersten. Man multiplicire die zweyte und dritte in einander und dividire das Product durch die erste, so ist der Quotient die gesuchte vierte Proportionalzahl. Der Beweis erhellet aus dem vorigen Lehrsatze.

Beyspiel. Zu den drey Zahlen 5, 7 und $10\frac{3}{4}$ die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden. Man hat $\frac{7 \cdot 10\frac{3}{4}}{5} = 15\frac{1}{20}$, welches die gesuchte Zahl ist.

161. Erklärung. Eine geometrische Proportion heißt eine stetige, wenn ihre beyden mittleren Glieder einander gleich sind, und die in beyden mittlern Gliedern stehende Zahl ist die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen den beyden Zahlen, welche die äußern Glieder der Proportion ausmachen.

Beyspiel. Die Proportion $12 : 36 = 36 : 108$ ist eine stetige geometrische Proportion; 35 ist die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 12 und 108, und endlich ist 108 die dritte geometrische Proportionalzahl zu 12 und 36.

162. 47ste Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Man multiplicire die beyden gegebenen Zahlen in einander, und ziehe aus dem Producte die Quadratwurzel. Diese Quadratwurzel ist die gesuchte mittlere Proportionalzahl. Die Richtigkeit dieser Auflösung erhellet daraus, weil das Product der beyden äußern Glieder gleich seyn muß dem Quadrate der mittlern Proportionalzahl (§. 159.).

Beyspiel. Die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 6 und 216 zu finden. Man erhält $6 \cdot 216 = 1296$, und $\sqrt[2]{1296} = 36$; also ist 36 die gesuchte Zahl, und $6 : 36 = 36 : 216$.

Uebungs-Exempel. Die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 10 und 100 zu finden.

Die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 100 und 200 zu finden.

163. 18ter Lehrsatz. Wenn man zwey Zahlen in einander multiplicirt: so verhält sich die Einheit zum einen Factor, wie der andre Factor zum Producte.

Denn das Product enthält den zweyten Factor eben so oft, als der erste Factor die Einheit enthält.

Beyspiel. Da $7 \cdot 8 = 56$, so ist $1 : 7 = 8 : 56$.

164. 19ter Lehrsatz. Wenn man zwey Zahlen durch einander dividirt: so ver-

hält sich der Divisor zum Dividendo, wie die Einheit zum Quotienten.

Denn der Divisor ist so oft im Dividendo enthalten, als der Quotient anzeigt, das ist, als der Quotient die Einheit enthält.

Beyspiel. Da 129 dividirt mit 43 zum Quotienten 3 giebt, so ist auch $43 : 129 = 1 : 3$.

* 165. Man kann diese Lehrsätze auch auf negative Größen anwenden. Da nämlich $+7$ mit -9 multiplicirt $= -63$ ist, so hat man auch $1 : 7 = -9 : -63$. Und da -5 mit -8 multiplicirt $= +40$ ist, so ist

$$1 : -5 = -8 : +40.$$

Um das letztere Verhältniß richtig zu verstehen, muß man sich an das erinnern, was bey der Multiplication entgegengesetzter Größen (§. 88.) erwähnt ist. Eigentlich nämlich hat das positive 1 zur negativen 5 gar kein Verhältniß, denn der Begriff des Verhältnisses setzt Gleichartigkeit der verglichenen Größen voraus; aber man kann auch hier sagen: so wie die Zahl -5 nicht die Eins selbst, sondern ihr Gegentheil fünfmal enthält, so enthält auch $+40$ die Zahl -8 nicht selbst, sondern ihr Gegentheil, und zwar dieses ebenfalls fünfmal.

Bey der Division findet eben diese Anwendung statt.

166. 20ster Lehrsatz. Wenn sich eine Zahl zu einer zweyten eben so verhält,

wie eine dritte zur vierten: so verhält sich auch die erste zur dritten, wie die zweyte zur vierten.

Beweis. Da das Verhältniß der ersten zur zweyten eben dasselbe ist, wie das Verhältniß der dritten zur vierten: so haben diese beyden Verhältnisse einerley Exponenten, das heißt, das zweyte Glied ist ein eben solches Vielfaches des ersten, als das vierte ein Vielfaches des dritten ist. Nun verhält sich aber eine Zahl zu einer andern allemal eben so, wie sich die gleich vielfachen dieser beyden Zahlen zu einander verhalten.

Man kann den Beweis auch aus der Lehre von den Gleichungen herleiten. Ist nämlich $7:8 = 42:48$, so ist $\frac{7}{8} = \frac{42}{48}$, und wenn man hier beyde Größen mit 8 multiplicirt und mit 42 dividirt, so ergiebt sich, wenn man diese Rechnungs-Operationen bloß durch Zeichen andeutet, zuerst die Gleichung $7 = \frac{8 \cdot 42}{48}$, und dann $\frac{7}{42} = \frac{8}{48}$, woraus die Proportion $7 : 42 = 8 : 48$ unmittelbar folgt.

Anmerk. Ich werde bey den folgenden Lehrsätzen, der Kürze wegen, den Beweis immer an einem Beyspiele durchführen, indeß wird man auch dann die völlige Allgemeinheit der Sätze gleichwohl übersehen.

167. 21ster Lehrsatz. Wenn vier Größen in Proportion sind, daß sich nämlich die erste zur zweyten verhält, wie die dritte zur vierten: so verhält sich auch die Summe der ersten und dritten zur Summe der zweyten und vierten, wie die erste Größe zur zweyten.

Beweis. Da die Proportion $19 : 20 = 38 : 40$ richtig ist, so findet nach dem vorigen Lehrsatze auch folgende Statt $19 : 38 = 20 : 40$, und man hat daher die gleichen Exponenten $\frac{38}{19} = \frac{40}{20}$. Addirt man zu jeder dieser gleichen Größen 1, so hat man $\frac{38}{19} + 1 = \frac{40}{20} + 1$, oder $\frac{38+19}{19} = \frac{40+20}{20}$, und deshalb die Proportion

$$19 + 38 : 19 = 40 + 20 : 20,$$

oder (§. 166.) $19 + 38 : 20 + 40 = 19 : 20$.

Dieses ist gerade die Proportion, die nach dem Lehrsatze Statt finden sollte.

168. 22ster Lehrsatz. In jeder Proportion hat der Unterschied des ersten und dritten Gliedes zum Unterschiede des zweyten und vierten Gliedes eben das Verhältniß, wie das erste Glied zum zweyten.

Beweis. Wenn $15 : 90 = 7 : 42$, so ist (§. 166.) auch $15 : 7 = 90 : 42$ also $\frac{15}{7} = \frac{90}{42}$ und

$\frac{15}{7} - \frac{7}{7} = \frac{90}{42} - \frac{42}{42}$, das ist $\frac{15-7}{7} = \frac{90-42}{42}$,

und $15 - 7 : 7 = 90 - 42 : 42$, oder (§. 166.)

$$15 - 7 : 90 - 42 = 7 : 42 = 15 : 90.$$

169. Eine leichte Folgerung aus diesen beyden Lehrsätzen ist nun auch folgende: Wenn vier Größen in Proportion sind, so verhält sich die Summe der ersten und dritten zur Summe der zweyten und vierten, wie die Differenz der ersten und dritten zur Differenz der zweyten und vierten. Denn wenn man hat $7 : 19 = 20 : 54\frac{2}{7}$ so ergeben die beyden letzten Lehrsätze

$$7 + 20 : 19 + 54\tfrac{2}{7} = 7 : 19, \text{ und}$$
$$20 - 7 : 54\tfrac{2}{7} - 19 = 7 : 19,$$

woraus unmittelbar folgt

$$7 + 20 : 19 + 54\tfrac{2}{7} = 20 - 7 : 54\tfrac{2}{7} - 19.$$

170. 23ster Lehrsatz. Wenn vier Größen nach der Reihe in Proportion sind, daß sich nämlich die erste zur zweyten, wie die dritte zur vierten verhält: so verhält sich auch die Summe der ersten und zweyten zur zweyten, wie die Summe der dritten und vierten zur vierten; und ferner verhält sich die Summe der ersten und zweyten zur ersten,

wie die Summe der dritten und vierten zur dritten Größe.

Beweis. Der Beweis ließe sich ganz so, wie in §. 167. führen; man übersieht die Wahrheit des Lehrsatzes aber auch in folgender Darstellung. Da in der Proportion $7 : 5 = 28 : 20$, das zweyte Glied im ersten $\frac{7}{5}$ mal enthalten ist, so ist das zweyte in der Summe beyder einmal und $\frac{7}{5}$ mal, das ist $\frac{12}{5}$ mal enthalten; und eben so ist das vierte Glied in dem dritten $\frac{7}{5}$ mal und das vierte in der Summe des dritten und vierten einmal und $\frac{7}{5}$ mal, oder $\frac{12}{5}$ mal enthalten, also ist $7 + 5 : 5 = 28 + 20 : 20$.

Der Beweis für die zweyte Hälfte des Lehrsatzes läßt sich eben so führen, da man aus der Proportion $7 : 5 = 28 : 20$, auch hat $5 : 7 = 20 : 28$, und folglich $5 + 7 : 7 = 20 + 28 : 28$.

171. 24ster Lehrsatz. Wenn vier Zahlen in Proportion sind, so verhält sich auch der Unterschied der ersten und zweyten zur zweyten, wie der Unterschied der dritten und vierten zur vierten Zahl, und auch der Unterschied der ersten und zweyten zur ersten, wie der Unterschied der dritten und vierten zur dritten Zahl.

Beweis. In der Proportion $30 : 12 = 20 : 8$, hat man $\frac{30}{12} = \frac{20}{8}$, und offenbar auch $\frac{30-12}{12} = \frac{20-8}{8}$ oder $\frac{30}{12} - 1 = \frac{20}{8} - 1$.

Der Lehrsatz läßt sich auch unmittelbar aus dem vorigen herleiten. Wenn nämlich aus dem Verhältnisse $18 : 12 = 12 : 8$ nothwendig folgt $18 + 12 : 12 = 12 + 8 : 8$; so folgt auch umgekehrt aus der letztern Proportion, oder aus $30 : 12 = 20 : 8$, die Proportion $30 - 12 : 12 = 20 - 8 : 8$.

172. Alle vorigen Lehrsätze, wo aus einer einzigen Proportion mehrere verschiedene Proportionen hergeleitet werden, lassen sich so übersehn. Wenn vier Größen A, B, C, D in Proportion sind, so nämlich daß $A : B = C : D$,

so ist auch $B : A = D : C$.

$A : C = B : D$. (§. 166.)

$A + C : B + D = A : B$. (§. 167.)

$A - C : B - D = A : B$. (§. 168.)

$A + C : B + D = A - C : B - D$. (§. 169.)

$A + B : B = C + D : D$. (§. 170.)

$A + B : A = C + D : C$. (§. 170.)

$A - B : B = C - D : D$. (§. 171.)

$A - B : A = C - D : C$. (§. 171.)

173. 25ster Lehrsatz. Wenn zwischen sechs verschiedenen Größen folgende zwey Proportionen Statt finden, daß die erste sich zur zweyten verhält, wie die dritte zur vierten, und die zweyte sich zur fünften verhält, wie die vierte zur sechsten: so verhält sich auch die erste zur fünften, wie die dritte zur sechsten.

Beweis. Aus den gegebenen Proportionen $1:7 = 9:63$ und $7:25 = 63:225$, folgt nach §. 166. unmittelbar

$$1:9 = 7:63 \text{ und } 7:63 = 25:225,$$

da nun die beyden Verhältnisse $1:9$ und $25:225$ beyde dem Verhältnisse $7:63$ gleich sind; so sind sie auch unter sich gleich, also

$$1:9 = 25:225 \text{ oder } 1:25 = 9:225,$$

und dieses ist die Proportion, welche der Lehrsatz als richtig angiebt.

174. 26ster Lehrsatz. Wenn mehrere Größen vorhanden sind, von denen die erste eben das Verhältniß zur zweyten hat, wie die dritte zu vierten; und eben das Verhältniß, wie die fünfte zur sechsten, wie die siebente zur achten u. s. w.: so verhält sich auch

die Summe aller vorangehenden Glieder zur Summe aller nachfolgenden Glieder, wie das erste Glied zum zweyten.

Beweis. Wenn folgende gleiche Verhältnisse Statt finden $5:7=4:5\frac{3}{5}=10:14=7:9\frac{4}{5}$, so haben wir gesehen (§. 167.), daß auch

$5+4:7+5\frac{3}{5}=5:7$, also auch

$5+4:7+5\frac{3}{5}=10:14$, und daraus wiederum

$5+4+10:7+5\frac{3}{5}+14=10:14=7:9\frac{4}{5}$, also endlich

$5+4+10+7:7+5\frac{3}{5}+14+9\frac{4}{5}=7:9\frac{4}{5}=5:7$

175. 27ster Lehrsatz. Wenn zwischen sechs Größen folgende zwey Proportionen Statt finden, daß sich die erste zur zweyten verhält, wie die dritte zur vierten und zugleich auch die zweyte zur fünften, wie die sechste zur dritten: so verhält sich auch die erste zur fünften, wie die sechste zur vierten.

Beweis. Die beyden, als gegeben angenommenen Proportionen sind von der Art, wie die folgenden: $11:13=77:91$ nnd $13:143=7:77$. Sie ergeben $\frac{11}{13}=\frac{77}{91}$ und $\frac{13}{143}=\frac{7}{77}$. Multiplicirt man hier die beyden vor dem Gleichheitszeichen stehenden Größen in einander, und auch die hinter demselben stehenden Größen in einander, so erhält man gleiche Producte, und zwar $\frac{11}{13} \cdot \frac{13}{143} = \frac{77}{91} \cdot \frac{7}{77}$, woraus (§. 31.) folgt $\frac{11}{143} = \frac{7}{91}$, und folglich

$$11 : 143 = 7 : 91.$$

176. 28ster Lehrsatz. Wenn man mehrere Proportionen hat, und man sucht das Product aller ersten Glieder dieser Proportionen, das Product aller zweyten Glieder, das Product aller dritten Glieder und das Product aller vierten Glieder: so sind auch diese vier Producte in Proportion.

Beweis. Hat man die Proportionen $1 : 19 = 7 : 133$, $5 : 21 = 30 : 126$ und $3 : 8 = \frac{3}{2} : 4$: so folgt daraus $\frac{1}{19} = \frac{7}{133}$; ferner $\frac{5}{21} = \frac{30}{126}$ und $\frac{3}{8} = \frac{\frac{3}{2}}{4}$, und indem man die Producte dieser gleichen Größen sucht, $\frac{1 \cdot 5 \cdot 3}{19 \cdot 21 \cdot 8} = \frac{7 \cdot 30 \cdot \frac{3}{2}}{133 \cdot 126 \cdot 4}$, woraus dann die Proportion folgt, welche der Lehrsatz angiebt.

177. 29ster Lehrsatz. Wenn zwey gegebene Proportionen so beschaffen sind, daß das erste Glied der einen zum ersten Gliede der andern sich eben so verhält, wie das dritte

Glied jener zum dritten Gliede dieser: so verhält sich auch das zweyte Glied der ersten Proportion zum zweyten Gliede der andern, wie das vierte Glied jener zum vierten Gliede dieser.

Beweis. Sind die Proportionen $11:13 = 77:91$ und $22:7 = 154:49$, so beschaffen, daß die ersten Glieder eben das Verhältniß zu einander haben, wie die dritten Glieder: so hat man $\frac{11}{13} = \frac{77}{91}$, und $\frac{22}{7} = \frac{154}{49}$ und auch $\frac{11}{22} = \frac{77}{154}$.

Hieraus folgt, indem man die gleichen Größen $\frac{11}{13} = \frac{77}{91}$ mit den gleichen Größen $\frac{11}{22} = \frac{77}{154}$ dividirt, $\frac{22}{13} = \frac{154}{91}$, und indem man hiemit die gleichen Größen $\frac{22}{7} = \frac{154}{49}$ dividirt, folgt ferner $\frac{13}{7} = \frac{91}{49}$ und $13:7 = 91:49$, welches die im Lehrsatze angegebene Proportion ist.

* 178. Bemerkung. Obgleich die Beweise für alle diese Lehrsätze nur so geführt sind, daß man den Exponenten des Verhältnisses als eine rationale Zahl betrachtete, — in welchem Falle man auch die Verhältnisse rationale Verhältnisse nennt, — so sind doch diese Sätze auch richtig bey irrationalen Verhältnissen, das ist bey solchen, deren Exponent eine irrationale Zahl ist.

Da man den Exponenten eines irrationalen Verhältnisses durch keine bestimmte Zahl genau angeben kann, sondern sich begnügen muß, Gränzen zu bestimmen, zwischen denen die wahre Größe des Exponenten enthalten ist: so erkennet man die Gleichheit mehrerer irrationaler Verhältnisse daran, wenn der Exponent des einen Verhältnisses immer zwischen eben den Gränzen liegt, wie der Exponent des andern Verhältnisses, und dieses allemal, man mag die Gränzen, zwischen welchen der irrationale Exponent enthalten ist, noch so nahe an einander rücken oder diesen bis auf noch so kleine Theile genau bestimmen.

Beyspiele solcher irrationalen Verhältnisse sind folgende: $7 : \sqrt[3]{5}$ und $9 : \sqrt[2]{6}$ und andere. Indeß sind nicht alle Verhältnisse irrational, deren einzelne Glieder irrational sind; denn z. B. das Verhältniß $\sqrt[2]{3} : \sqrt[2]{27}$ hat den rationalen Exponenten $= 3$, weil $\sqrt[2]{27} = 3 \cdot \sqrt[2]{3}$ ist, indem $27 = 3^2 \cdot 3 = 9 \cdot 3$.

Die Anwendung der vorigen Sätze auf irrationale Verhältnisse bedarf keiner weitern Erläuterung.

Anwendung der Lehren von den geometrischen Verhältnissen.

179. Erklärung. Wenn zwey Größen so von einander abhängen, daß die eine in gleichem Maße wie die andre wächst, so nämlich, daß beyde zugleich das Doppelte, das Dreyfache u. s. w. desjeni-

gen Werthes erreichen, den man einmal für beyde als zusammengehörig gefunden hat: so sagt man, diese Größen stehen in ordentlichem oder directem Verhältnisse.

Beyspiele. Die Menge der Waare, die man erhält, steht in directem Verhältnisse mit der Anzahl von Pfunden, Ellen u. s. w., wenn nämlich diese unter sich gleich groß sind.

Der Preis einer Quantität gleicher Waare ist im ordentlichen Verhältnisse dieser Quantität selbst.

Die Zinsen, welche man von einem Capitale zieht, verhalten sich in einerley Zeit und bey einerley Zinsfuße, wie die Größe des Capitals; hingegen bey gleichen Capitalien und einerley Zinsfuße verhalten sich die Zinsen, die man erhält, direct, wie die verflossene Zeit.

Der Weg, den ein mit immer gleicher Schnelligkeit bewegter Körper zurücklegt, steht in directem Verhältnisse der Zeit. Die Wege, welche von zwey verschiedenen Körpern in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, wenn beyde sich zwar mit verschiedener, aber doch immer gleicher Geschwindigkeit bewegen, verhalten sich direct, wie diese Geschwindigkeiten.

180. Erklärung. Die Rechnungs-Regel, durch welche man in einer Proportion zwischen Größen, die in directem Verhältnisse stehn, die eine unbekannte Zahl aus den drey gegebenen findet, heißt die Regel de Tri, (Regel von dreyen).

181. Erstes Exempel. Wenn 75 Pfunde einer gewissen Waare zu 97 Rthlr. 15 Ggr. gekauft werden: wie viel kosten dann 107 Pfunde 10 Loth dieser Waare?

Man hat offenbar das Verhältniß: 75 Pf. zu 107 Pf. 10 Loth, wie 97 Rthlr. 15 Ggr. zu dem gesuchten Werthe der letztern Quantität Waare. Da man nach der Regel des 160 §. die zweyte und dritte Zahl in einander multipliciren und dann mit der ersten dividiren soll, um die vierte zu finden: so scheint es, daß man hier zwey benannte Zahlen in einander multiplicire, welches doch nicht angeht. Man muß aber bedenken, daß das Verhältniß von 75 Pfund zu $107\frac{10}{32}$ Pfund eben das ist, wie von 75 zu $107\frac{10}{32}$, so daß man hier die beyden ersten Glieder der Proportion als unbenannte Zahlen betrachten kann, da dann die Bedenklichkeit wegen der Multiplication wegfällt. Die Ausführung der Rechnung hat dann weiter keine Schwierigkeit.

Anmerk. Es ist gewöhnlich, Exempel von dieser Art so anzusetzen:

75 Pf. — 97 Rthlr. 15 Ggr. — 107 Pf. 10 Loth —

und dann die beyden letzten Glieder in einander zu multipliciren und mit dem ersten zu dividiren.

Man findet auch dann das richtige Resultat, aber es ist besser, sich bestimmt an die Verhältnisse zu erinnern, theils um die Gründe der Rechnung besser zu übersehn, theils um nicht in Gefahr zu kommen, einmal die umgekehrten Verhältnisse, von denen ich bald reden werde, mit den directen zu verwechseln.

182. Zweytes Exempel. Ein Capital von 12570 Rthlr. wird zu $4\frac{1}{2}$ pro Cent Zinsen ausgegeben, das heißt, daß 100 Rthlr. jährlich $4\frac{1}{2}$ Rthlr. Zinsen tragen: wie viel bringt dieses Capital jährlich an Zinsen auf?

183. Drittes Exempel. Die Erde durchläuft in ihrer Bahn um die Sonne in $365\frac{1}{4}$ Tagen 126530400 Meilen, wie viel durchläuft sie in einer Secunde oder in $\frac{1}{86400}$ eines Tages?

Man kann den Bruch $\frac{1}{86400}$ auf Decimalbrüche $= 0,00001157$4 bringen, und dann setzen $365,25 : 0,000011574 = 126530400$: der gesuchten Zahl.

184. Viertes Exempel. In eben der Zeit, in welcher die Erde 1000000 Meilen durchläuft, macht der Planet Mercur in seiner Bahn 1606700 Meilen, wie viele Meilen durchläuft der letztere in 1 Secunde, wenn man dabey die Rechnung des vorigen Exempels zum Grunde legt?

185. Erklärung. Zwey Größen stehen in umgekehrtem Verhältnisse, wenn sie so mit einander verbunden sind, daß die eine immer eben so vielmal größer wird, als die andre sich verkleinert, so daß jene ihren doppelten, dreyfachen u. s. w. Werth erreicht, gerade dann, wenn die andre zur Hälfte, zum Drittel u. s. w. herabgekommen ist.

Beyspiele. Eine gleiche Arbeit wird in desto kürzerer Zeit ausgerichtet, je mehrere Arbeiter man dabey anstellt, und die verwandte Zeit verhält sich umgekehrt, wie die gebrauchte Anzahl von Arbeitern.

Einerley Länge enthält eine desto größere Anzahl von Fußen, je kleiner das Maß ist, welches man einen Fuß nennt; und die Größe des Maßes steht also in umgekehrtem Verhältnisse der Zahl, welche angiebt, wie oft das Maß in einer gegebenen Länge enthalten ist.

Bey gleichem Gewichte verschiedener Körper ist ihre Größe, oder der Raum, den sie einnehmen, in umgekehrdem Verhältnisse ihrer Dichtigkeiten; denn der doppelt so dichte Körper braucht, um eben so viel zu wiegen, nur halb so groß zu seyn, als der in Vergleichung mit diesem halb so dichte Körper.

Wenn zwey Körper einerley Weg mit ungleichen, aber doch unveränderlichen Geschwindigkeiten durchlaufen: so verhalten sich ihre Geschwindigkeiten umgekehrt, wie die Zeiten, in welchen jene gleichen Wege von ihnen durchlaufen werden.

186. Man pflegt die Regeln, wornach die hieher gehörigen Aufgaben berechnet werden, die umgekehrte Regel de Tri zu nennen. Die Rechnung wird zwar eben so geführt, wie aus der allgemeinen Lehre von den Verhältnissen bekannt ist, aber man muß bey dem Ansatze oder der Stellung der Glieder des Verhältnisses darauf achten, ob die Verhältnisse direct oder umgekehrt sind.

187. Erstes Exempel. Wenn eine gewisse Arbeit von 100 Arbeitern in 15 Tagen vollendet werden kann, wie viele Arbeiter sind nöthig, um sie in 2 Tagen zu vollenden?

Da man hier nicht sagen kann, die erste Anzahl von Tagen verhält sich zu der zweyten, wie die mit jenen zusammen gehörige Zahl von Arbeitern zu der gesuchten Zahl, sondern vielmehr: die erste Anzahl von Tagen verhält sich zur zweyten, wie die gesuchte Anzahl von Arbeitern zur gegebenen: so setzt man am besten:

15 : 2 = die unbekannte Zahl : 100,

oder auch 2 : 15 = 100 : der unbekannten Zahl.

188. Zweytes Exempel. Wenn ein Capital von 6575 Rthlr. in 6 Jahren $1972\frac{1}{2}$ Rthlr. Zinsen trägt, wie groß wird das Capital seyn, welches in $20\frac{3}{4}$ Jahren eben so viele Zinsen bringt?

189. Drittes Exempel. Wenn man den Werth des Silbers zum Werthe des Goldes, wie 1 zu $14\frac{2}{3}$ bey gleichen Gewichten setzt, und annimmt, daß der Werth von 1 Pfund Sterling $152\frac{1}{2}$ As feines Gold betrage; wie viel beträgt es an Silber?

190. Erklärung. Wenn eine Größe von mehrern Größen so abhängt, daß jene erste ihren doppelten, dreyfachen u. s. w. Werth erlangt, wenn irgend eine der letztern doppelt so groß, dreymal so groß u. s. w. genommen wird: so ist jene erstere

Größe in **zusammengesetztem directem** Verhältnisse aller letztern Größen.

Beyspiele. Der Preis einer Quantität Waare verhält sich erstlich, wie die Menge der Waare, und zweytens, wie ihr innerer Werth; das Verhältniß jenes Preises ist also aus den beyden letztern Verhältnissen zusammen gesetzt.

Die Zinsen von Capitalien verhalten sich wie die Größe der Capitalien, wie die Zeit, während welcher sie in Zinsen stehen, und wie der Zinsfuß, worunter man die Bestimmung versteht, wie viele Zinsen man von einer bestimmten Summe Capital, z. B. von 100 bezahlt.

Der Weg, den ein bewegter Körper mit immer gleicher Geschwindigkeit durchläuft, ist in zusammengesetztem Verhältnisse dieser Geschwindigkeit und der Zeit, die er anwendet, um diesen Weg zurückzulegen.

191. Unter den verschiedenen Größen, von welchen eine andre Größe abhängt, können auch solche vorkommen, durch deren Verkleinerung diese Größe in eben dem Maße wächst, wie jene abnehmen; dann ist das zusammengesetzte Verhältniß in Rücksicht dieser ein **umgekehrtes** Verhältniß.

Beyspiele. Die Zeit, in welcher man eine bestimmte Summe Zinsen von Capitalien erlangt, verhält sich umgekehrt, wie die Größe der Capitalien, und umgekehrt wie die Anzahl von Procenten, die man als Zinsen zieht.

Wenn mehrere Körper sich mit ungleichen aber doch unveränderlichen Geschwindigkeiten durch bestimmte Räume bewegen: so verhält sich die Zeit, welche sie dazu anwenden, direct wie diese Räume, aber umgekehrt, wie die Geschwindigkeiten.

Die Zeit, welche von mehrern Arbeitern zu irgend einer Arbeit verwandt wird, ist in directem Verhältnisse der Quantität der Arbeit, und in umgekehrtem Verhältnisse der Anzahl der Arbeiter.

Der Raum, den verschiedenartige Körper einnehmen, ist in directem Verhältnisse der Gewichte, und in umgekehrtem Verhältnisse der Dichtigkeiten.

192. 30ster Lehrsatz. Wenn das Verhältniß zweyer Größen, welche ich die erste und zweyte nennen will, zusammen gesetzt ist aus mehrern Verhältnissen, nämlich aus dem Verhältnisse einer dritten Größe zur vierten, einer fünften zur sechsten u. s. w., so verhält sich auch die erste zur zweyten, wie das Product aus allen vorangehenden Gliedern der letztern Verhältnisse zu dem Producte aus allen nachfolgenden Gliedern eben derselben Verhältnisse.

Beweis. Wenn das Verhältniß der ersten zur zweyten Größe aus mehrern einfachen Verhältnissen zusammen gesetzt ist: so muß der Exponent des zusammen gesetzten Verhältnisses so beschaffen seyn, daß er, wenn man irgend eines der einfachen

Verhältnisse ändert, in eben dem Maaße abnimmt oder wächst, wie der Exponent dieses geänderten Verhältnisses abnimmt oder wächst. Dieses findet aber nur Statt, wenn der Exponent des zusammen gesetzten Verhältnisses das Product aus allen Exponenten der einfachen Verhältnisse ist, und das eben ist es, was der Lehrsatz behauptet.

Beyspiel. Wenn von 100 Rthlr. Capital in 12 Monaten $5\frac{1}{4}$ Rthlr. Zinsen gegeben werden, wie viel Zinsen trägt ein Capital von 12705 Rthlr. in 15 Monaten? — Hier ist das Verhältniß der Zinsen, nämlich das Verhältniß von $5\frac{1}{4}$ zu der gesuchten Zahl, zusammen gesetzt aus dem Verhältnisse der Capitalien und dem Verhältnisse der Zeiten, oder aus $100 : 12705$ und $12 : 15$. Nach dem Lehrsatze ist also $100 . 12 : 15 . 12705 = 5\frac{1}{4}$: der gesuchten Zahl.

Man hätte offenbar diese Aufgabe in zwey zerlegen können, indem man zuerst gefragt hätte: 100 Rthlr. geben $5\frac{1}{4}$ Rthlr. Zinsen, was geben in gleicher Zeit 12705 Rthlr. an Zinsen? diese Zinsen-Summe würde man finden $= \frac{12705 \cdot 5\frac{1}{4}}{100}$ Rthlr.; und man würde dann zweytens fragen: das Capital giebt in 12 Monaten $\frac{12705 \cdot 5\frac{1}{4}}{100}$ Rthlr. Zinsen, wie viel trägt dasselbe Capital in 15 Monaten? das Resultat würde dann gewesen seyn, $\frac{12705 \cdot 15 \cdot 5\frac{1}{4}}{100 \cdot 12}$ Rthlr. Zinsen, welches auch aus der Regel des Lehrsatzes folgt, indem $100 . 12 : 15 . 12705 = 5\frac{1}{4} : \frac{15 . 12705 . 5\frac{1}{4}}{100 . 12}$.

Anmerk. Man nennt diese Rechnungs-Regel für die zusammengesetzten Verhältnisse die Regula Multiplex, auch wohl, wenn das Verhältniß nur aus zweyen zusammen gesetzt ist, die Regula de Quinque.

193. Erstes Exempel. Zu wie viel Procenten jährlich muß man ein Capital von 15600 Rthlr. auf Zinsen geben, um davon in 6 Jahren und 6 Monaten 5070 Rthlr. Zinsen zu ziehn?

Das Verhältniß der Zinsen, nämlich 5070 zur gesuchten Zahl ist zusammen gesetzt aus den Verhältnissen

$$15600 : 100;$$
$$\text{und} \quad 6\tfrac{1}{2} : 1.$$

194. Zweytes Exempel. Wenn 15 Arbeiter in 7 Tagen eine Erdmasse von 200 Fuß lang, 16 Fuß breit und 4 Fuß tief ausarbeiten können, wie viel Zeit gebrauchen 25 Arbeiter, um eine Erdmasse von 500 Fuß lang, 12 Fuß breit und 6 Fuß tief unter sonst gleichen Bedingungen auszuarbeiten?

Diese Zeiten verhalten sich direct, wie die Längen, wie die Breiten und wie die Tiefen, aber umgekehrt wie die Anzahl der Arbeiter. Man hat also:

$$7 \text{ Tage} : \text{der gesuchten Zahl} = \left\{ \begin{array}{rcr} 200 & : & 500 \\ 16 & : & 12 \\ 4 & : & 6 \\ 25 & : & 15 \end{array} \right.$$

oder $7 : \text{der gesuchten Zahl} = 320000 : 540000.$

195. Drittes Exempel. Der Planet Mercur durchläuft 1589, 4 Meilen während die Erde 1000 Meilen in ihrer Bahn zurücklegt; nun beträgt die ganze Bahn des Mercur 48979900 Meilen, und die ganze Bahn der Erde 126530400 Meilen. Wie viele Tage gebraucht der Mercur um seine Bahn zu durchlaufen, wenn die Erde ihre ganze Bahn in $365\frac{1}{4}$ Tagen vollendet?

196. Man pflegt auch die Ketten-Regel, als zu dieser Lehre von zusammengesetzten Verhältnissen gehörig zu betrachten, obgleich man sie besser unter die Lehre von den Gleichungen bringt. Man löset durch sie Aufgaben, wie folgende, auf: Wie viel Crusaden beträgt eine Summe von 1500 holländischen Ducaten, wenn 1 Crusado, 44 Grote flämisch; 1 holländischer Ducate, 7 Mk. 5 ßl. Hamburger Courant; $120\frac{1}{2}$ Mk. Hamburger Courant, 100 Mk. Hamburger Banco und 1 Mk. Hamburger Banco, 24 Grote flämisch betragen? — Man kann nämlich so ansetzen:

1 Crusado : 1 Gr. fläm. = 44 : 1;
1 Gr. fläm. : 1 Mk. Banco = 1 : 24;
1 Mk. Banco : 1 Mk. Cour. = $120\frac{1}{2}$: 100;
1 Mk. Cour. : 1 Ducaten = 1 : $7\frac{5}{16}$;
1 Ducaten : 1500 Duc. = 1 : 1500,

woraus man ableitet:

1 Crus. : 1500 Duc. = 44 . $120\frac{1}{2}$: 24 . 100 . $7\frac{5}{16}$. 1500.

Leichter übersieht man aber die Gründe der Rechnung so, wie diese oben §. 75. geführt ist.

197. In den Rechnungen, welche auf der Lehre von Verhältnissen beruhen, gehört unter andern ferner die Gesellschafts-Rechnung und die Vermischungs-Rechnung, wovon die folgenden Aufgaben einen Begriff geben.

Erstes Exempel. Drey Kaufleute treten zu einer Handels-Unternehmung zusammen, der erste giebt dazu 1000 Rthlr., der zweyte 1200 Rthlr. der dritte 2500 Rthlr. her. Der am Ende heraus kommende Gewinn von 925 Rthlr. soll unter sie nach Verhältniß des ausgelegten Geldes getheilt werden.

Da mit dem gesammten ausgelegten Gelde, nämlich mit 4700 Rthlr., eine Summe von 925 Rthlr. gewonnen worden: so findet man offenbar den Gewinn, der dem erstern zukömmt, aus dem Verhältnisse:

4700 Rthl. Auslage : 100 Rthl. Auslage = 925 Rthl. Gewinn zu dem Gewinne der ersten Person,

und eben so für die beyden andern.

198. Zweytes Exempel. Man hat zwey Sorten Waaren von einerley Art, aber von ungleicher Güte, die eine kann zu 20 Ggr. 6 Pf. die andre zu 16 Ggr. das Pfund verkauft werden; wie muß man diese Waare vermischen, um 100 Pfunde

zu erhalten, die man das Pfund zu 18 Ggr. verkaufen kann?

Man nehme hier die Unterschiede der beyden gegebenen Preise von dem Mittelpreise, also $20\frac{1}{2} - 18 = 2\frac{1}{2}$ Ggr. und $18 - 16 = 2$ Ggr., und setze das Verhältniß der von der bessern Sorte zu nehmenden Quantität zu der ganzen Quantität von 100 Pfund, wie die Summe beyder Unterschiede zu dem letztern Unterschiede, das ist, wie $4\frac{1}{2}$ zu 2. So erhält man für die Quantität der bessern Waare $\frac{4 \cdot 100}{9} = 44\frac{4}{9}$ Pfund, und für die Quantität der schlechtern Waare, nach eben der Regel,

$$\frac{5 \cdot 100}{9} = 55\frac{5}{9} \text{ Pfund.}$$ Und wirklich kosten

$44\frac{4}{9}$ Pfund zu 16 Ggr. — $888\frac{8}{9}$ Ggr.
und $55\frac{5}{9}$ Pfund zu $20\frac{1}{2}$ Ggr. — $911\frac{1}{9}$ Ggr.
also diese 100 Pfunde zusammen 1800 Ggr.

* Man kann diese Aufgabe und alle ähnlichen leichter mit Hülfe der Buchstaben-Rechnung auflösen. Setzt man nämlich die von der schlechtern Sorte zu nehmende Anzahl Pfunde $= x$, die von der bessern Sorte $= y$, so muß

$$16x + 20\tfrac{1}{2}\,y = 1800$$

und $x + y = 100$ seyn.

Die erstere Gleichung giebt

$$x = \frac{1800}{16} - \frac{20\frac{1}{2}}{16}\,y,$$

die letztere $x = 100 - y$; beyde Werthe von x müssen gleich seyn, das ist

$$\frac{1800}{16} - \frac{20\frac{1}{2}}{16}\,y = 100 - y,$$

oder $112\frac{1}{2} - 1\frac{9}{32}\,y = 100 - y$,

folglich $12\frac{1}{2} = \frac{9}{32}\,y$,

und $y = 44\frac{4}{9}$.

* 199. Drittes Exempel. Es soll die Mischung aus drey verschiedenen Sorten bestehn, deren eine 14 Ggr., die andre 16 Ggr., die dritte 20 Ggr. das Pfund kostet, und man will davon 100 Pfund zu 18 Ggr. zusammen bringen.

In diesem Falle hat man zwar, indem man die drey gesuchten Quantitäten x, y, z setzt, die zwey Gleichungen

$$x + y + z = 100$$

$$\text{und } 14x + 16y + 20z = 1800,$$

aber damit ist die Aufgabe nicht völlig bestimmt, sondern es giebt mehrere Auflösungen, die alle der Forderung Genüge thun. Nimmt man z. B. $x = 0$, oder soll die Mischung nur aus zwey Sorten bestehen, so erhält man $y = 50$, und $z = 50$. Will man von der schlechtesten Sorte 10 Pfund zur Mischung setzen, so ist $x = 10$, also $y + z = 90$, und $10 . 14 + 16y + 20z = 1800$, woraus $y = 35$, und $z = 55$ folgt. Und so erhielte man unzählige Auflösungen, je nachdem man für x andere Werthe in ganzen Zahlen oder Brüchen ansetzte.

* 200. Ich füge hier noch einige Aufgaben an, die theils auf den Lehren von Verhältnissen, theils auf dem beruhen, was vorhin von den Gleichungen gelehrt worden ist.

Erstes Exempel. Eine gewisse Summe Geldes soll so unter drey Personen getheilt werden, daß die drey Antheile des ersten, zweyten und dritten sich zu einander verhalten, wie 5, 7 und 8; und außerdem ist bestimmt, daß der dritte 75 Rthlr. mehr erhalten soll, als der erste: wie groß ist die zu theilende Summe und wie viel erhält jeder?

Nennt man die Theile x, y, z, so soll $x : y = 5 : 7$, und $x : z = 5 : 8$ seyn, also $y = \frac{7}{5}x$ und $z = \frac{8}{5}x$, überdas aber ist $z = x + 75$, woraus $\frac{8}{5}x = x + 75$ folgt, und dann alles fernere leicht gefunden wird.

* 201. Zweytes Exempel. Eine Person reiset von einem Orte ab und macht in 10 Stunden 7 Meilen; 5 Stunden nachher reiset ein andrer ihm nach und dieser legt in 12 Stunden 9 Meilen zurück, nach wie viel Stunden und in welcher Entfernung wird er den zuerst Abgereisten antreffen?

Nennt man die Entfernung von dem Orte der Abreise, wo beyde zusammen treffen, $= x$, so gebraucht der letztere, um diese Entfernung zu erreichen, die Zeit $\frac{12 \cdot x}{9}$, der erstere aber $\frac{10 \cdot x}{7}$ Stunden. Da nun jene Zeit 5 Stunden weniger beträgt, als diese, so ist $5 + \frac{12 \cdot x}{9} = \frac{10 \cdot x}{7}$.

* 202. Drittes Exempel. Aus zwey Orten, die 50 Meilen von einander entfernt sind, reisen zwey Personen einander entgegen. Der eine reiset 12 Stunden später ab, als der andre, und macht 6 Meilen in 10 Stunden, statt daß der andre 7 Meilen in 11 Stunden macht. Wo werden sie einander treffen?

* 203. Viertes Exempel. Der Planet Mars befindet sich in Opposition mit der Sonne, wenn er so steht, daß die Erde mit ihm und der Sonne in gerader Linie ist und sich zwischen beyden befindet. Wenn nun dieses in einem gewissen Augenblicke Statt findet, so soll man bestimmen, wann es sich wieder ereignen wird, wenn man weiß, daß der Mars sich in 687 Tagen um die Sonne bewegt und die Erde in $365\frac{1}{4}$ Tagen.

Um sich die Sache klar vorzustellen, betrachte man eine Uhr mit zwey Zeigern, und denke sich unter dem Minutenzeiger die Erde, unter dem Stundenzeiger den Mars. Stehen diese Anfangs gerade über einander, z. B. beyde auf 12, so läuft der eine, die Erde sogleich vor dem Mars voraus, und es ist nicht möglich, daß sie eher wieder zusammen kommen, als bis die Erde einen ganzen Umlauf und noch etwas mehr vollendet hat. Es sey x der Theil, den die Erde über einen ganzen Umlauf vollendet, daß also x ein Bruch ist, der sich zu 1 verhält, wie dieser Theil des Umfangs zum ganzen Umkreise. Die Erde durchläuft den ganzen Umkreis in $365\frac{1}{4}$ Tagen, also das hinzukommende Stück in $x \cdot 365\frac{1}{4}$ Tagen; der Mars durchläuft eben dieses Stück in $x \cdot 687$ Tagen, und da die Zeit, in welcher der Mars dieses Stück durchläuft, eben so groß ist, als die Zeit, in welcher die Erde einen ganzen Umkreis und dann noch dieses Stück zurücklegt; so hat man

$$365\tfrac{1}{4} + x \cdot 365\tfrac{1}{4} = x \cdot 687$$

und $365\frac{1}{4} = 321\frac{3}{4} \cdot x$

oder $1461 = 1287 \cdot x$

$$x = \tfrac{487}{429} = 1\tfrac{58}{429}.$$

Die Erde macht also 2 ganze Umläufe und noch $\frac{58}{429}$ oder beynahe $\frac{1}{7}$ eines Umlaufes, ehe sie den Mars wieder erreicht, und es vergehen also bis zur nächsten Opposition $2\frac{58}{429} \cdot 365\frac{1}{4}$ Tage, oder etwa 780 Tage.

Aufgaben zur Uebung. Die Länge der Bahn des Mars verhält sich zur Länge der Erdbahn, wie 1524 zu 1, diese Bahn durchläuft er in 687 Tagen, die Erde die ihrige in $365\frac{1}{4}$ Tagen: wie verhält sich die Geschwindigkeit des Mars zur Geschwindigkeit der Erde?

Es sollen 500 Pfund Waare aus drey Sorten gemischt werden, deren eine 1 Rthlr., die andere 22 Ggr., die dritte 1 Rthlr. 3 Ggr. kostet, und man will die Mischung zu 1 Rthlr. 2 Ggr. verkaufen: wie viel von jeder Sorte muß man nehmen, wenn man von der wohlfeilsten Sorte 10 Pfund, oder 30 Pfund, oder 50 Pfund, oder 100 Pfund nimmt?

Vier Personen sollen eine gewisse Summe Geldes so theilen, daß die Antheile des ersten, zweyten, dritten und vierten sich zu einander verhalten, wie 1 zu 3, zu 5, zu 7, und die Summe dessen, was der erste und vierte erhält, soll zusammen 1000 Rthlr. betragen: wie groß ist die zu theilende Summe und wie viel bekommt jeder?

Wie viel Tage vergehn von einer Opposition des Jupiter zur andern, wenn der Jupiter zu seinem Umlaufe um die Sonne 11 Jahre 315 Tage gebraucht, die Erde aber zu dem ihrigen $365\frac{1}{4}$ Tage.

Von den geometrischen Progressionen.

* 204. Erklärung. Wenn eine Reihe von Zahlen so beschaffen ist, daß jede drey zunächst auf einander folgende Zahlen in stetiger geometrischer Proportion sind: so heißt diese Zahl-Reihe eine geometrische Progression, und die einzelnen Zahlen sind die Glieder dieser Progression.

Beyspiel. Die Reihe $1 . 5 . 25 . 125 . 625$ u. s. w. ist eine geometrische Progression, weil das erste Glied sich zum zweyten verhält, wie das zweyte zum dritten, das dritte zum vierten u. s. w. Eben so ist $2 . 3 . 4\frac{1}{2} . 6\frac{3}{4} . 10\frac{1}{8} . 15\frac{3}{16}$ u. s. w., und auch $2 . \frac{1}{2} . \frac{1}{8} . \frac{1}{32} . \frac{1}{128}$ u. s. w. eine geometrische Progression.

* 205. Erklärung. Eine Progression ist steigend, wenn jedes folgende Glied größer, fallend aber, wenn jedes folgende Glied kleiner ist, als das vorhergehende.

* 206. Erklärung. Der Exponent einer geometrischen Progression ist die Zahl,

welche angiebt, wie oft jedes vorhergehende Glied im nächstfolgenden enthalten ist. Er ist größer, als eins, wenn die Reihe steigend, und kleiner als eins, wenn die Reihe fallend ist.

Beyspiel. Der Exponent der Reihe $1 . 5 . 25 . 125$ u. s. w. ist $= 5$; der Exponent der Reihe $2 . 3 . 4\frac{1}{2}$ $6\frac{3}{4}$ u. s. w. ist $= 1\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$; und der Exponent der Reihe $2 . \frac{1}{2} . \frac{1}{8} . \frac{1}{32}$ u. s. w. ist $= \frac{1}{4}$.

* 207. 48ste Aufgabe. Wenn zwey, einander nächste Glieder einer geometrischen Progression gegeben sind, so viele der übrigen Glieder, als man will, zu finden.

Auflösung. Man dividire das letzte der beyden gegebenen Glieder durch das erste, so hat man den Exponenten der Progression; mit diesem multiplicire man das zweyte gegebene Glied, um das dritte zu erhalten; multiplicire das dritte abermals mit dem Exponenten, um das vierte zu bekommen u. s. w. Will man Glieder haben, die vor den gegebenen vorangehen, so dividire man das erste gegebene Glied mit dem Exponenten, um das erste vorhergehende Glied zu haben, und dividire so jedes Glied mit dem Exponenten, um das nächst vorhergehende zu erhalten.

Beyspiel. Die Reihe zu finden, deren zwey nächste Glieder $2 . 5$ sind. Ihr Exponent ist $2\frac{1}{2}$, und man erhält die folgenden Glieder der Reihe

$$2 . 5 . 12\frac{1}{2} . 31\frac{1}{4} . 78\frac{1}{8} \text{ u. s. w.}$$

und die vorhergehenden Glieder in umgekehrter Ordnung

$$5 . 2 . \frac{4}{5} . \frac{8}{25} . \frac{16}{125} . \frac{32}{625} \text{ u. s. w.}$$

* 208. 49ste Aufgabe. Wenn das erste Glied einer geometrischen Progression und

ihr Exponent gegeben ist, jedes der folgenden Glieder zu bestimmen, ohne daß man nöthig hat, das zweyte, dritte und überhaupt alle dazwischen liegende Glieder bis an das gesuchte Glied, zu bestimmen.

Auflösung. Wenn bestimmt ist, das wievielte Glied der Reihe man sucht: so nehme man die um eins niedrigere Potenz des Exponenten, z. B. die neunte Potenz, wenn das zehnte Glied gesucht wird, und multiplicire damit das erste Glied. Das Product ist das gesuchte Glied.

Beweis. Da das zweyte Glied ein Product ist aus dem ersten Gliede und aus dem Exponenten; das dritte Glied ein Product aus dem zweyten Gliede und dem Exponenten u. s. w., so ist auch das dritte Glied ein Product aus dem ersten Gliede in das Quadrat des Exponenten, das vierte Glied ein Product aus dem ersten Gliede in die dritte Potenz des Exponenten, und so ferner das zehnte Glied ein Product aus dem ersten Gliede in die neunte Potenz des Exponenten, und so jedes andre.

Beyspiel. Das zwölfte Glied der Progression zu finden, deren erstes Glied 1750, und deren Exponent 2 ist. Die elfte Potenz von zwey ist $= 2048$, also das zwölfte Glied $= 1750 \,.\, 2048 = 3584000$. Wollte man das zwölfte Glied der fallenden Reihe haben, deren Exponent $\frac{1}{2}$ und erstes Glied 1750 ist, so fände man es $= \frac{1750}{2048}$.

* 209. 50ste Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Zahlen eine bestimmte Anzahl von Zahlen so zu bestimmen, daß sie eine

geometrische Progression bilden, wenn man voraussetzt, daß man im Stande sey, aus einer Zahl jede verlangte Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Man dividire die größere gegebene Zahl durch die kleinere und ziehe aus dem Quotienten die Quadratwurzel, wenn nur eine Zahl zwischen den beyden gegebenen gesucht wird; die Cubikwurzel, wenn man zwey Glieder einschalten will; die vierte Wurzel, wenn drey Glieder verlangt werden u. s. w., also die nte Wurzel, wenn die Anzahl der einzuschaltenden Glieder $= n - 1$ ist. Diese Wurzel ist der Exponent der Progression, deren einzelne Glieder man nun nach der vorigen Aufgabe bestimmt.

Beweis. Jede geometrische Progression läßt sich ganz allgemein durch Buchstaben so ausdrücken: $a . ab . ab^2 . ab^3 . ab^4 . ab^5 . ab^6$ u. s. w., denn hier verhält sich jedes Glied zum folgenden wie $a : ab$ oder $= 1 : b$. Der Exponent dieser Progression ist $= b$. Will man also hier zwischen dem ersten Gliede und dem sechsten vier Glieder einschalten: so sucht man nach der Auflösung die fünfte Wurzel aus $\frac{a . b^5}{a}$ das ist aus b^5, welche b, als der Exponent der Reihe ist. — Man kann die Sache noch vollständiger so übersehn. Wenn zwischen zwey Zahlen c und d sieben Zahlen eingeschaltet werden sollen, so sucht man nach den Regeln der Auflösung die achte Wurzel aus $\frac{d}{c}$, und diese ist der Exponent $= \sqrt[8]{\frac{d}{c}}$, oder $= \frac{d^{\frac{1}{8}}}{c^{\frac{1}{8}}}$. Die Progression wird also

$$c \;.\; \frac{c\,.\,d^{\frac{1}{8}}}{c^{\frac{1}{8}}} \;.\; \frac{c\,.\,d^{\frac{2}{8}}}{c^{\frac{2}{8}}} \;.\; \frac{c\,.\,d^{\frac{3}{8}}}{c^{\frac{3}{8}}} \;.\; \frac{c\,.\,d^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}} \;.\; \frac{c\,.\,d^{\frac{5}{8}}}{c^{\frac{5}{8}}}$$

$$\frac{c\,.\,d^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{3}{4}}} \;.\; \frac{c\,.\,d^{\frac{7}{8}}}{c^{\frac{7}{8}}} \;.\; \frac{c\,.\,d^{\frac{8}{8}}}{c},$$ wo das letzte Glied $= d$,

und sieben Zahlen eingeschaltet sind. Auf diese Weise bestimmt man also zwischen zwey gegebenen Zahlen mehrere mittlere geometrische Proportionalzahlen.

Beyspiel. Zwischen 10 und 1000 zwey mittlere geometrische Proportionalzahlen zu bestimmen. Der Exponent wird $\sqrt[3]{100} = 4,6416$, und die Progression

$$10 \;.\; 46,416 \;.\; 215,444 \;.\; 1000.$$

* 210. 51ste Aufgabe. Es ist eine gewisse Anzahl von Gliedern einer geometrischen Progression gegeben, man sucht die Summe aller dieser Glieder.

Auflösung. Man multiplicire das letzte gegebene Glied der Progression mit dem Exponenten und ziehe von dem Producte das erste Glied ab; ferner subtrahire man Eins vom Exponenten und dividire jene Differenz mit dieser. Der Quotient ist die gesuchte Summe.

Beyspiele. Die Summe der Reihe 1 . 3 . 9 . 27 . 81 . 243 . 729 zu finden. Der Exponent ist 3; und $3 \cdot 729 = 2187$, ferner $2187 - 1 = 2186$, und der um Eins verminderte Exponent $= 2$, also die Summe $= \frac{2186}{2} = 1093$.

Der Reihe $2 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{8} \,.\, \frac{1}{32} \,.\, \frac{1}{128}$ Exponent ist $\frac{1}{4}$, also soll nach der Auflösung die Summe $= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{128} - 2}{\frac{1}{4} - 1}$ seyn.

das ist $= \frac{-1\frac{511}{512}}{-\frac{3}{4}} = + \frac{1023}{384} = 2\frac{255}{384} = 2\frac{85}{128}$.

Beweis. Man kann die Richtigkeit dieses Verfahrens am besten an dem allgemeinen Ausdrucke für eine geometrische Reihe übersehen. Setzt man nämlich die Summe der Reihe $a \,.\, ab \,.\, ab^2 \,.\, ab^3 \,.\, ab^4 \,.\, ab^5 \,.\, ab^6 \,.\, ab^7$ vorläufig nur $= S$, wo S also eine unbekannte Zahl ist, also

$a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + ab^6 + ab^7 = S$,

so ist auch, wenn man mit b multiplicirt

$ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + ab^6 + ab^7 + ab^8 = bS$,

Subtrahirt man nun die erstere Gleichung von der letztern, so ist, weil die meisten Glieder sich aufheben, $ab^8 - a = bS - S$; also, indem man mit $b - 1$ dividirt, $\frac{ab^8 - a}{b - 1} = S$, gleich der Summe aller gegebenen Glieder der Progression; und dieses ist eben der Ausdruck, den wir in der Auflösung mit Worten angegeben haben.

* 211. Bey einer fallenden Reihe ist die Summe eigentlich $= \frac{a - ab^8}{1 - b}$, weil hier $b < 1$ ist.

Wenn b ein ziemlich kleiner Bruch ist, und man eine ansehnliche Reihe von Gliedern summiren will: so wird b^n ein immer weniger bedeutender Bruch, je größer n oder je größer die Anzahl der Glieder ist. Läßt man also in einem solchen Falle ab^n als etwas sehr unbedeutendes weg, so ist ziemlich genau $\frac{a}{1 - b}$ die Summe einer solchen fallenden Progression, und diese Summe ist desto genauer, je mehrere der immer kleiner werdenden Glieder man zusammen nimmt.

Beyspiele. Die Summe der Reihe $\frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16} . \frac{1}{32} . \frac{1}{64} . \frac{1}{128} . \frac{1}{256} . \frac{1}{512}$ ist nach der 51sten Aufgabe $= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{511}{512}$. Hätte man noch die zwey folgenden Glieder der Reihe, $\frac{1}{1024} . \frac{1}{2048}$ zur Summe hinzugefügt; so wäre diese Summe $\frac{2047}{2048}$, welches viel weniger von 1 verschieden ist, als die vorige Summe $\frac{511}{512}$. Je mehrere Glieder man mit zu der Summe nimmt, desto näher kommt sie an 1, kann aber dennoch nie größer als 1 werden.

Man sagt daher, daß Eins die Gränze ist, welche von der Summe dieser Reihe nie überschritten, aber immer näher erreicht wird, je mehrere Glieder man addirt.

Nimmt man von der Reihe $\frac{1}{3} . \frac{1}{9} . \frac{1}{27} . \frac{1}{81}$ u. s. w. sehr viele der immer kleinern Glieder zusammen, so ist $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$ beynahe die Summe dieser Reihe, oder eigentlich die Gränze, welcher diese Summe sich immer mehr nähert, je weiter man die Reihe fortsetzt. Man pflegt auch wohl zu sagen, die Summe der Glieder dieser Reihe betrüge wirklich $\frac{1}{2}$, wenn man eine unendliche Anzahl Glieder zusammen nähme. Der Sinn dieses Ausdruckes ist aber eigentlich nur, daß bey immer weiterer Fortsetzung der Reihe, die Summe immer näher und näher an diese Gränze kommt.

* 212. Diese Lehren finden ihre Anwendung bey der Berechnung der Zinsen, wo man immer die Zinsen wieder zum Capitale schlägt; ferner bey Berechnung der Leibrenten und der Beyträge zu Wittwen-Cassen u. s. w.

Erstes Exempel. Wenn man 100 Rthlr. Capital zu 4 pro Cent jährlicher Zinsen belegt, und am Ende jedes Jahres die erworbenen Zinsen zum Capitale schlägt, so daß diese nun selbst auch Zinsen tragen: wie viel Capital hat man dann am Ende des zehnten Jahrs?

Im ersten Jahre erhält man 4 Rthlr. Zinsen, hat also am Ende des ersten Jahrs 104 Rthlr. Capital. Diese tragen im zweyten Jahre an Zinsen $\frac{4 \cdot 104}{100}$ Rthlr., und da man diese zum Capitale legt, so ist das Capital am Ende des zweyten Jahrs

$$= 104 + \frac{4 \cdot 104}{100} = \frac{104 \cdot 100 + 4 \cdot 104}{100} = \frac{104^2}{100} \text{ Rthlr.}$$

Damit erwirbt man im dritten Jahre $\frac{4 \cdot 104^2}{100^2}$ Rthlr. an Zinsen, und hat dann in allem $\frac{104^2}{100} + \frac{4 \cdot 104^2}{100^2}$, oder $\frac{104^2 \cdot 100 + 104^2 \cdot 4}{100^2} = \frac{104^3}{100^2}$ Rthlr. Und wenn man so fortschließt: so findet man das Capital am Ende des zehnten Jahrs $= \frac{104^{10}}{100^9}$ Rthlr, und die so am Ende der verschiednen Jahre vorhandnen Capitale bilden eine geometrische Progression, deren erstes Glied 100, und deren Exponent $\frac{104}{100}$ ist.

Wäre das Capital 500 Rthlr. gewesen, so würde das erste Glied der Reihe 500 seyn, der Exponent aber derselbe bleiben, wenn nur das Capital zu 4 pro Cent belegt bleibt.

* 213. Zweytes Exempel. Jemand ist nach 5 Jahren ein Capital von 800 Rthlr. zu be-

zahlen schuldig; er kommt aber mit seinem Creditor überein, daß er schon jetzt dies Capital bezahlen will, jedoch mit einem solchen Abzuge oder Interusurio, daß das jetzt zu entrichtende Capital, wenn es zu 4 pro Cent belegt, Zinsen auf Zinsen trüge, am Ende des fünften Jahres 800 Rthlr. betrage. Wie viel muß er jetzt bezahlen?

Wenn jemand über ein Jahr 104 Rthlr. zu bezahlen hat, so könnte er jetzt diese Schuld mit 100 Rthlr. tilgen, weil der Creditor die übrigen 4 Rthlr. als Zinsen während des Jahres ziehen kann; eine Schuld von 800 Rthlr. kann also ein Jahr voraus mit $\frac{100}{104} \cdot 800$ Rthlr, zwey Jahr voraus mit $\frac{100^2}{104^2} \cdot 800$ Rthlr. u. s. w. getilgt werden.

*214. Drittes Exempel. Jemand belegt ein Capital von 10000 Rthlr. zu 4 vom Hundert, verbraucht aber jährlich mehr als die Zinsen, nämlich 600 Rthlr., so daß er sein Capital von Jahr zu Jahr verkleinert: wie viel Jahre werden hingehn, bis das Capital ganz aufgezehrt ist?

Am Ende des ersten Jahres würde, wenn nichts abginge, Capital und Zinsen $\frac{104}{100} \cdot 10000$ Rthlr. betragen, nach Abzug der 600 Rthlr. hat man aber nur $\frac{104}{100} \cdot 10000 - 600$. Dieses Capital trägt im zweyten Jahre wieder Zinsen, und würde in diesem Jahre anwachsen zu $\frac{104^2}{100^2} \cdot 10000 - \frac{104}{100} \cdot 600$, wenn nicht abermals die 600 abgingen. Nach Abzug dieser hat man also am Ende des zweyten Jahrs $\frac{104^2}{100^2} \cdot 10000 - \frac{104}{100} \cdot 600 - 600$; am Ende des dritten Jahrs

$$\frac{104^3}{100^3} \cdot 10000 - \frac{104^2}{100^2} \cdot 600 - \frac{104}{100} \cdot 600 - 600,$$

u. s. w., und man müßte durch Summirung der letzten Reihe finden, wenn das Capital erschöpft ist. Am Ende des dritten Jahrs hat man nämlich

$$\frac{104^3}{100^3} \cdot 10000 - 500 \cdot \left\{\frac{\frac{104^3}{100^3} - 1}{\frac{104}{100} - 1}\right\},$$ also am Ende

des nten Jahrs

$$\frac{104^n}{100^n} \cdot 10000 - 500 \cdot \left\{\frac{\frac{104^n}{100^n} - 1}{\frac{104}{100} - 1}\right\}.$$

Alle diese Exempel lassen sich aber leichter und theils auch vollständiger durch die Logarithmen auflösen, weil die Bestimmung hoher Potenzen von $\frac{104}{100}$ auf die gewöhnliche Weise sehr beschwerlich, durch Logarithmen aber leicht ist.

Achter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

* 215. Erklärung. Wenn man eine mit 1 anfangende geometrische Progression mit der Reihe der natürlichen Zahlen so verbindet, daß man das erste Glied jener Progression mit 0, das zweyte mit