Siebentes Exempel. Drey Zahlen zu bestimmen, deren Summe = 100, und wo die erste um 16 größer als die zweyte, die zweyte aber um 99 größer als die dritte ist.

Sechster Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzeln.

102. Erklärung. Wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt: so nennet man das Product, das Quadrat jener Zahl, oder ihre zweyte Potenz. Multiplicirt man das Quadrat einer Zahl mit der Zahl selbst: so erhält man den Cubus oder die dritte Potenz der Zahl; und so ferner die vierte Potenz einer Zahl, wenn man die dritte Porenz derselben mit der Zahl selbst multiplicirt u. s. w.

Beyspiel. Es ist also 4 das Quadrat oder die zweyte Potenz von 2; ferner 8 der Cubus oder die dritte Potenz von 2; 16 die vierte Potenz, 32 die fünfte Potenz von 2, u. s. w.

103. Erklärung. Umgekehrt versteht man unter der Quadratwurzel einer Zahl, diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, jene giebt.

Ferner ist eine Zahl die Cubikwurzel einer andern, wenn diese letztere der Cubus der erstern ist.

Da man das Quadrat die zweyte Potenz nennt, so nennt man auch wohl die Quadratwurzel die zweyte Wurzel, und so die Cubikwurzel die dritte Wurzel; und ferner die vierte Wurzel einer Zahl, diejenige Zahl, deren vierte Potenz jene Zahl giebt u. s. w.

Beyspiel. Es ist also 9 die Quadratwurzel von 81, und 3 die Cubikwurzel von 27; endlich 2 die vierte Wurzel aus 16.

104. Erklärung. Die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl suchen, oder die Quadratwurzel aus derselben ausziehen, heißt also, diese Zahl in zwey gleiche Factoren zerlegen, oder eine Zahl finden, welche mit sich selbst multiplicirt jene gegebene Zahl zum Producte giebt.

Eben so verlangt man bey der Ausziehung der Cubikwurzel eine gegebene Zahl in drey gleiche Factoren zu zerfällen.

Beyspiel. Es ist nämlich $81 = 9 \cdot 9$, und $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$, u. s. w.

105. Jede ganze Zahl hat zum Quadrate, zum Cubus und überhaupt zu jeder höheren Potenz eine ganze Zahl: aber nicht für jede ganze Zahl giebt es auch eine Quadratwurzel oder Cubikwurzel in gan-

zen Zahlen, indeß läßt sich denken, daß sich diese Wurzeln doch durch Brüche, entweder ganz genau oder ziemlich genau werden ausdrücken lassen, und wenigstens lassen sich allemal zwey, nur um eins verschiedene Zahlen angeben, davon eine größer, die andre kleiner, als die nicht genau bekannte Wurzel ist.

Beyspiel. Die Quadratwurzel aus 20 liegt zwischen 4 und 5, da das Quadrat jener $= 16$, das Quadrat dieser $= 25$ ist. Diese Quadratwurzel ist etwas kleiner als $4\frac{1}{2}$, denn $4\frac{1}{2}$ mit sich selbst multiplicirt, giebt $20\frac{1}{4}$.

106. Willkührlicher Satz. Wenn man ausdrücken will, daß eine Zahl zu irgend einer Potenz erhoben, das heißt, eine gewisse Potenz dieser Zahl gesucht werden soll: so schreibt man an die rechte Seite dieser Zahl, etwas in die Höhe gerückt, eine kleine Ziffer, welche angiebt, die wievielte Potenz man zu suchen verlangt.

Dagegen bedient man sich des Zeichens $\sqrt{\ }$, um die Wurzeln, welche gesucht werden sollen, anzudeuten, indem man nämlich dieses Zeichen $\sqrt{\ }$ vor die Zahl schreibt, deren Wurzel gesucht wird. Um aber zu bestimmen, welche Wurzel man finden soll, schreibt man in den Raum des Wurzel-Zeichens die Zahl, welche angiebt, die wievielte Wurzel man sucht. So ist also $\sqrt[2]{\ }$ das Zeichen der Quadratwurzel, statt dessen man aber auch wohl bloß $\sqrt{}$ zu schreiben pflegt; bey der Cubikwurzel aber muß man immer $\sqrt[3]{}$ schreiben, und so bey der vierten Wurzel $\sqrt[4]{}$, u. s. w.

Beyspiele. Es bedeutet also 7^2 das Quadrat von 7, und 9^5 die fünfte Potenz von 9, daher man hat: $7^2 = 49$ und $9^5 = 59049$.

Ferner ist $\sqrt[2]{}100$ oder $\sqrt{}100$ die Quadratwurzel aus 100 und $\sqrt[3]{}729$ die Cubikwurzel aus 729. Daher $\sqrt[2]{}100 = 10$ und $\sqrt[3]{}729 = 9$. Eben so würde $\sqrt[5]{}59049 =$ seyn, weil $9 . 9 . 9 . 9 . 9 = 59049$ ist, und die zehnte Wurzel aus eben jener Zahl $\sqrt[10]{}59049$ ist $= 3$.

107. Erklärung. Man nennt den Exponenten einer Potenz diejenige Zahl, welche angiebt, die wievielte Potenz die gegebene ist. Der Exponent zeigt also an, aus wie vielen Factoren, welche der Wurzel gleich sind, die als Potenz angegebene Zahl besteht.

Anmerk. Man könnte auf ähnliche Weise die Zahl, welche angiebt, die wievielte Wurzel man sucht, den Wurzel-Exponenten nennen, welches indessen nicht so gewöhnlich ist.

Beyspiel. Der Exponent der Potenz 7^3 ist 3, und 7^3 besteht aus den drey gleichen Factoren $7 \cdot 7 \cdot 7$. Der Exponent von 15^9 ist 9.

* 108. 6ter Lehrsatz. Wenn man zwey verschiedene Potenzen derselben Wurzel in einander multiplicirt: so ist das Product diejenige Potenz derselben Wurzel, deren Exponent die Summe der Exponenten der beyden gegebenen Potenzen ist.

Beyspiel. 7^5 multiplicirt mit 7^4 ist $= 7^9$.

Beweis. Die erste der beyden gegebenen Zahlen besteht aus so vielen gleichen Factoren als der Exponent angiebt, und eben so enthält auch die zweyte Zahl so viele gleiche Factoren, als der Exponent dieser zweyten Potenz bestimmt. Da nun beyde Zahlen Potenzen derselben Wurzel sind, so sind jene gleichen Factoren auch in beyden Zahlen einerley, und folglich besteht das Product aus lauter gleichen Factoren und zwar aus so vielen, als die Anzahl der gleichen Factoren in beyden Zahlen zusammen beträgt. Das Product ist also eine Potenz derselben Wurzel, von welcher jene beyden Zahlen Potenzen waren, und da der Exponent einer Potenz angiebt, wie oft die Potenz die Wurzel als Factor enthält, so ist der Exponent der Potenz für das Product so groß, als die Summe der Exponenten der beyden gegebenen Potenzen.

Beyspiel. Da $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$ und $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, so enthält das Product aus beyden die Zahl 5 sieben mal als Factor, und es ist daher $5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$.

* 109. 7ter Lehrsatz. Wenn irgend eine Potenz einer gegebenen Wurzel durch eine Potenz derselben Wurzel dividirt wird: so ist der Quotient eine Potenz derselben Wurzel, deren Exponenten man findet, wenn man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendus subtrahirt.

Beweis. Da in diesem Falle der Dividendus und der Divisor lauter gleiche Factoren enthalten, so folgt, daß man (§. 31.) um den Quotienten zu finden, so viele gleiche Factoren im Dividendus wegstreichen kann, als der Divisor enthält. Der Quotient enthält also nur so viele gleiche Factoren, als der Dividendus deren mehrere enthält, wie der Divisor; der Quotient ist also eine Potenz derselben Wurzel, deren Potenzen man durch einander dividiren sollte, und der Exponent wird so bestimmt, wie der Lehrsatz angiebt.

Beyspiel. Wenn man 7^5 mit 7^3 dividirt, so ist

$$\frac{7^5}{7^3} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} = 7 \cdot 7 = 7^2.$$

* 110. Auf diesen Lehrsatz gründet sich der Begriff der Potenzen mit negativen Exponenten. Wenn nämlich im vorigen Lehrsatze der Exponent des Divisors eine größere Zahl ist, als die des Dividendus, so ergiebt die Regel des Lehrsatzes für den Quotienten einen negativen Exponenten, weil man dann die größere Zahl von der kleinern abziehen soll (§. 87.); die Regeln der Division oder der Behandlung der Brüche geben aber für eben den Quotienten

einen Bruch, und wir können daher folgendes festsetzen.

Erklärung. Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich einem Bruche, dessen Zähler = 1, und dessen Nenner aus einer Potenz besteht, deren Wurzel mit der Wurzel jener Potenz einerley, und deren Exponent zwar jenem Exponenten an Größe gleich, aber positiv ist.

Beyspiel. Es ist also $8^{-7} = \frac{1}{8^7}$ und $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$. Denn sollte man z. B. a mit a^3 dividiren, so wäre $\frac{a}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$ nach der Regel des vorigen Lehrsatzes.

* 111. Hätte man im Dividendus und im Divisor einerley Potenz derselben Wurzel, so gäbe der Lehrsatz, Null als die Potenz des Quotienten; aber dieser Quotient ist offenbar = 1; man hat daher die mit o bezeichnete Potenz jeder Wurzel = 1, und die Reihe der Potenzen, deren Exponenten ganze Zahlen sind, ist folgende: $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, u. s. w. Ferner $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a \cdot a}$, u. s. w.

* 112. 8ter Lehrsatz. Wenn man eine Zahl, die selbst schon eine Potenz einer gegebenen Wurzel ist, auf eine Potenz erhebet: so erhält man diejenige Potenz jener ge-

gebenen Wurzel, deren Exponent das Product ist aus dem Exponenten der als Potenz gegebenen Zahl in den Exponenten der Potenz, zu welcher sie erhoben werden soll.

Beyspiel. Sucht man die zweyte Potenz von 2^7, so ist diese $= 2^{14}$, und eben so ist die fünfte Potenz von $4^5 = 4^{25}$.

Beweis. Soll man eine solche Zahl, wie 4^5, zu einer Potenz erheben, so heißt das, man soll diese Zahl mehrmals in sich selbst multipliciren. Nach dem Lehrsatze §. 108. ergiebt sich also zum Quadrate dieser Zahl diejenige Potenz derselben Wurzel, deren Exponent zweymal so groß ist, als der Exponent der gegebenen Potenz; der Cubus jener Zahl hat das Dreyfache, die vierte Potenz das Vierfache jenes Exponenten zum Exponenten, u. s. w. Man hat also allgemein a^m zur nten Potenz erhoben, oder, wie man es wol schreibt $(a^m)^n = a^{mn}$.

* 113. 9ter Lehrsatz. Man findet die Wurzel einer Zahl, welche als Potenz einer andern gegeben ist, wenn man den Exponenten dieser Potenz dividirt mit der Zahl, welche angiebt, die wievielte Wurzel die gesuchte ist.

Beyspiel. Es ist nach diesem Satze die fünfte Wurzel aus 2^{10} oder $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^2$.

Beweis. Da dieser Satz das Umgekehrte des vorigen ist, so läßt er sich aus diesem leicht beweisen. Offenbar erhält man die zuerst gegebene Zahl z. B. a wieder, wenn man diese erst zu einer Potenz erhebt und dann wieder die Wurzel auszieht, deren Wurzel-Exponent derselbe mit dem Exponenten der Potenz ist; die dritte Wurzel aus a^3 ist nämlich wieder $= a$. Nimmt man also für einen Augenblick unsern Lehrsatz als richtig an, das nämlich die $n$te Wurzel aus a^m gleich $a^{\frac{m}{n}}$ ist, so muß, wenn man diese letztere Größe zur $n$ten Potenz erhebt, wieder a^m herauskommen, und dieses ist auch wirklich der Fall, da nach §. 112. die $n$te Potenz von $a^{\frac{m}{n}}$ gleich $a^{\frac{mn}{n}} = a^m$ ist.

Man übersieht leicht, daß in diesem Falle die Richtigkeit dieser Folgerung auch die Richtigkeit des zum Grunde gelegten Lehrsatzes beweiset.

* 114. Erklärung. Wenn der Exponent einer Potenz ein Bruch ist, so wird damit angedeutet, daß man die Zahl zuerst zu der Potenz erheben soll, welche der Zähler des gebrochnen Exponenten angiebt, und daß man dann diejenige Wurzel ausziehen soll, welche durch den Nenner desselben Exponenten bestimmt wird.

Beyspiel. $3^{\frac{2}{3}}$ bedeutet die Cubikwurzel aus dem Quadrate von 3; $6^{\frac{5}{6}}$ bedeutet die sechste Wurzel aus der fünften Potenz von 6. So ist also $\sqrt[2]{10} = 10^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{10} = 10^{\frac{1}{3}}$, und überhaupt $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$. Den Grund für diese Bezeichnung enthält der vorige Lehrsatz.

Von der Ausziehung der Quadrat-wurzel.

115. 32ste Aufgabe. Es ist eine ganze Zahl gegeben, man soll angeben, aus wie vielen Ziffern ihre Quadratwurzel bestehen wird, (so weit diese nämlich sich in ganzen Zahlen ausdrücken läßt,) und zugleich die höchste Ziffer der Quadratwurzel selbst bestimmen.

Auflösung. 1. Man theile die gegebene Zahl von hinten her so ab, daß alle Abtheilungen, außer der vorn an stehenden oder höchsten, zwey Ziffern enthalten. Die höchste Abtheilung kann eine oder zwey Ziffern enthalten, so wie die gesammte Anzahl der vorhandenen Ziffern es mit sich bringt. Die Anzahl der so erhaltenen Abtheilungen ist einerley mit der Anzahl der Ziffern der Quadratwurzel.

2. Um nun auch die höchste Ziffer der Quadratwurzel zu bestimmen, suche man die höchste Quadratzahl, welche in derjenigen Zahl, die sich in der ersten Abtheilung befindet, enthalten ist, die Wurzel dieser Quadratzahl ist die gesuchte höchste Ziffer der Quadratwurzel. Man bedient sich hiezu folgendes Täfelchens:

Wurzel	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Quadratzahl	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

Beyspiel. Die Zahl 5974805 giebt, wenn man sie nach nr. 1. abtheilt, 5 | 97 | 48 | 05 | vier Abtheilungen, und ihre Quadratwurzel enthält also vier Ziffern. In der höchsten Abtheilung steht hier allein 5, und die darin enthaltene größeste Quadratzahl ist 4, deren Wurzel 2 ist. Es ist also 2 die höchste Ziffer der Quadratwurzel, und da diese vier Ziffern enthalten soll, so ist die Quadratwurzel größer als 2000, aber kleiner als 3000.

Beweis. Da 1 die kleinste Zahl von einer Ziffer und 10 die kleinste Zahl von zwey Ziffern ist so kann kein Quadrat einer einziffrigen Zahl weniger Ziffern enthalten, als das Quadrat von 1, aber auch nicht mehrere Ziffern als das Quadrat von 10. Da nun 100, das Quadrat von 10 und zugleich die kleinste aus drey Ziffern bestehende Zahl ist, so besteht das Quadrat jeder einziffrigen Zahl entweder aus einer oder aus zwey Ziffern. Eben so läßt sich zeigen, daß die Quadrate aller zweyziffrigen Zahlen entweder drey oder vier Ziffern enthalten; denn keines dieser Quadrate kann kleiner seyn, als das Quadrat von 10 oder als 100, welches die kleinste dreyziffrige Zahl ist, aber auch keines kann so groß seyn als das Quadrat von 100 oder als 10000, und jede ganze Zahl die kleiner als 10000 ist, hat höchstens vier Ziffern. So ließen sich für alle Fälle die Schlüsse fortsetzen und z. B. zeigen, daß die Quadrate aller fünfziffrigen Zahlen aus neun oder zehn Ziffern bestehn, weil die kleinste fünfziffrige Zahl zum Quadrate die kleinste neunziffrige Zahl hat, nnd die kleinste sechsziffrige Zahl zum Quadrate die kleinste Zahl hat, die sich mit elf Ziffern schreiben läßt. Kehrt man diese Schlüsse um, so folgt für die Bestimmung der Anzahl von Ziffern in der Quadratwurzel die in no. 1. gegebne Regel. Was nun die Bestimmung der höchsten Ziffer der Quadratwurzel betrifft, so ist offenbar, daß die Quadratwurzel einer gegebnen Zahl nicht kleiner seyn kann, als sie seyn würde, wenn in allen Abtheilungen, außer in der höchsten, Nullen ständen, z. B. daß die Wurzel aus 5 | 97 | 48 | 05 | nicht kleiner ist, als die Wurzel aus 5 00 00 00. Nun ist 4 die größte in der ersten Abtheilung enthaltene Quadratzahl, und man sieht, daß die gesuchte Wurzel größer seyn wird, als die Wurzel aus 4 000000; aber diese Wurzel ist = 2000: also ist $\sqrt{5974805}$ größer als 2000; aber gewiß kleiner als 3000, weil das Quadrat von 3000 schon 9000000 ist, und 2 ist also die höchste Ziffer der Wurzel. Und die Richtigkeit der zweyten Regel läßt sich hieraus auch allgemein einsehn.

116. Wenn man die erste Ziffer der Quadratwurzel auf diese Weise bestimmt hat, so kann man diese Wurzel als aus zwey Theilen bestehend betrach-

ten, aus einem bekannten Theile der im vorigen Exempel 2000 ist, und einem unbekannten Theile, nämlich dem, was in diesem Beyspiele noch zu 2000 hinzukommen müßte, um die Quadratwurzel vollständig auszudrücken. Die Bestimmung dieses noch unbekannten Theiles beruhet auf der Betrachtung einer Quadratzahl, deren Wurzel man als aus zwey Theilen zusammengesetzt ansieht.

117. 10ter Lehrsatz. Wenn man eine Zahl als Summe zweyer Zahlen ausdrückt, so ist der Quadrat der Summe so groß, als folgende drey Zahlen zusammen genommen: das Quadrat des einen Theiles, das Quadrat des zweyten Theiles, und das doppelt genommene Product aus einem Theile in den andern.

Beweis. Wenn 47 zum Beyspiel die Zahl ist, welche man als die Summe von 40 und 7 betrachtet, so behauptet dieser Lehrsatz, es sey das Quadrat von 47 gleich der Summe der Quadrate von 40 und von 7, zusammen genommen mit dem zweyfachen Producte aus 40 in 7, oder $47^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 7 + 7^2$.

Wenn man die Zahl so in zwey Theile getheilt läßt, nämlich $40 + 7$, so erhält man gewiß das richtige Quadrat, wenn man zuerst beyde Theile mit dem einen Theile = 7, und dann wieder beyde Theile mit dem andern = 40 multiplicirt. Deutet man diese Multiplication bloß durch Zeichen an, wie in nebenstehendem Exempel,

$$\begin{array}{r} 40 + 7 \\ 40 + 7 \\ \hline 7 \cdot 40 + 7 \cdot 7 \\ 40 \cdot 40 + 7 \cdot 40 \qquad \\ \hline \text{Quadrat} = 40^2 + 2 \cdot 7 \cdot 40 + 7^2. \end{array}$$

so kömmt im Producte das Quadrat jedes Theiles einmal, das Product aus dem einen in den andern aber zweymal vor, und die Summe dieser Theile giebt das Quadrat gerade so ausgedrückt, wie der Lehrsatz es angab.

* In allgemeinen Ausdrücken durch Buchstaben kann man jede Summe zweyer Zahlen durch $a + b$ darstellen, und das Quadrat dieser Zahl fanden wir vorhin § 95,

$= aa + 2\,ab + bb$, welches der allgemeine Ausdruck ist, den auch unser Lehrsatz angiebt.

118. Da jede Zahl, z. B. auch 47, sich auf sehr mannigfaltige Art als Summe zweyer Zahlen darstellen läßt, so kann man auch das Quadrat sehr verschieden ausdrücken. Da z. B. $47 = 31 + 16$, so ist auch $47^2 = 31^2 + 2 \cdot 31 \cdot 16 + 16^2$, und eben so hat man $529 = 500 + 29$, daher $529^2 = 500^2 + 2 \cdot 500 \cdot 29 + 29^2$.

119. 33ste Aufgabe. Die Quadratwurzel jeder ganzen Zahl so weit, als es ohne Brüche möglich ist, vollständig zu bestimmen.

Auflösung. 1. Man theile die Zahl, deren Wurzel gesucht wird, in solche Abtheilungen, wie in der 32sten Aufgabe angegeben ist, und bestimme die höchste Ziffer der Wurzel.

2. Das Quadrat dieser höchsten Ziffer ziehe man von der in der höchsten Abtheilung stehenden Zahl ab, und füge an den Rest die zwey Ziffern der zweyten Abtheilung an.

3. Man multiplicire die höchste Ziffer der Quadratwurzel mit 2, und hänge dem Producte eine Null an; man versuche, wie oft die so erhaltene Zahl in dem, was jetzt in den beyden ersten Abtheilungen noch übrig ist, enthalten sey, und setze (fürs erste nur zum Versuch,) den Quotienten, wofern er eine einziffrige Zahl ist, als zweyte Ziffer der Wurzel hin; ist dieser Quotient eine zweyziffrige Zahl, so wird die gleich zu erwähnende Probe immer lehren, daß man statt des Quotienten doch nur höchstens 9 als zweyte Ziffer der Wurzel annehmen darf.

4. Um zu bestimmen, ob diese Ziffer wirklich die richtige zweyte Ziffer der Wurzel sey, multiplicire man die im Anfange von nr. 3. aus der ersten Ziffer hergeleitete, als Divisor gebrauchte Zahl mit dieser zweyten Ziffer der Wurzel, und addire zu dem Producte das Quadrat der zweyten Ziffer. Ist diese Summe kleiner, als die am Ende von nr. 2. erhaltene, in den beyden ersten Abtheilungen noch stehende Zahl: so ist die zum Versuch angenommene Ziffer wirklich die richtige zweyte Ziffer der Quadratwurzel. Ist jene Summe hingegen größer: so muß man die zweyte Ziffer der Wurzel um eins oder zwey oder so viel verkleinern, bis die eben angegebene Probe die Richtigkeit der angenommenen zweyten Ziffer beweiset. Man muß aber bemerken, daß es nicht genug ist, die zweyte Ziffer so anzunehmen, daß jene Summe kleiner ausfalle, als die in den beyden ersten Abtheilungen noch stehende Zahl, sondern die zweyte Ziffer der Wurzel muß auch die größeste seyn, bey der diese Probe noch Statt findet.

5. Man subtrahire von der in den beyden ersten Abtheilungen stehenden Zahl die im Anfang von nr. 4. aus der richtig angenommenen zweyten Ziffer der Wurzel hergeleitete Summe, und füge an den Rest die beyden Ziffern in der dritten Abtheilung der zuerst gegebenen Zahl.

6. Um die dritte Ziffer der Wurzel zu finden, verdoppele man den gefundenen zweyziffrigen Theil der Wurzel, hänge dem Producte eine Null an, und untersuche, wie oft diese so entstandene Zahl in dem enthalten ist, was jetzt noch in den ersten drey Abtheilungen steht.

7. Der Quotient, welchen man bey dieser Division erhält, wird die richtige dritte Ziffer der Wurzel angeben, wenn das Product aus diesem Quotienten in die in nr. 6. als Divisor gebrauchte Zahl, zusammen genommen mit dem Quadrate des Quotienten, weniger beträgt, als der in den drey ersten Abtheilungen noch übrige Theil der gegebenen Zahl. Ist dieses nicht der Fall, so muß man, gerade wie in nr. 4. und mit Betrachtung eben der Vorsichts-Regeln, die dritte Ziffer so viel kleiner annehmen, bis die Probe statt findet.

8. Man verfährt dann ganz auf ähnliche Weise wie in nr. 5., und wendet die folgenden Regeln so an, daß man nun die in der vierten Abtheilung der gegebenen Zahl stehenden beyden Ziffern mit zu Hülfe nimmt; wieder aus dem bekannten, jetzt dreyziffrigen Theile der Wurzel den Divisor herleitet, mit dessen Hülfe man die vierte Ziffer der Wurzel bestimmt; und so zur fünften und allen folgenden Abtheilungen fortgeht, bis alle Ziffern der Wurzel gefunden sind.

9. Der am Ende etwa noch bleibende Rest zeigt bloß an, daß zu der in ganzen Zahlen gefundenen Wurzel noch ein Bruch hinzukommen müßte, mit dessen Bestimmung wir uns hier nicht beschäftigen.

Beyspiel. Die Wurzel aus 177241 zu finden.

	17	72	41	Wurzel
Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel	16			= 421
Erster Rest, verbunden mit den Ziffern zweyten Abtheilung . . . . =	1	72		
Das Zweyfache der ersten Ziffer der Wurzel mit angehängter Null als Divisor . . . . =		80	..	
Product dieses Divisors in den Quotienten 2 . . . . =	1	60	..	
Quadrat der zweyten Ziffer der Wurzel =		4	..	
Summe der beyden letzten Zahlen =	1	64	..	
Zweyter Rest, was nämlich von dem beym ersten Reste in den beyden ersten Abtheilungen stehenden Zahl, nach Abzug dieser Summe, übrig bleibt, mit den angefügten Ziffern der dritten Abtheilung . . . . =		8	41	
Das Zweyfache des bekannten Theils der Wurzel mit angehängter Null als Divisor . . . . =			840	
Product aus diesem Divisor in die dritte Ziffer der Wurzel . . . . =			840	
Quadrat der dritten Ziffer . . . . =			1	
Summe beyder . =			841	

Da diese Summe dem noch übrigen Theile der gegebenen Zahl gleich ist, so bleibt kein Rest, und 421 ist die genaue Wurzel der gegebenen Zahl.

Beweis. Die hier gegebenen Regeln beruhen ganz auf der in §. 117. gezeigten Zusammensetzung des Quadrates einer zweytheiligen Wurzel. Betrachtet man nämlich im vorigen Exempel die Wurzel als aus 400 und aus einem noch unbekannten Theile zusammen gesetzt: so muß die gegebene Zahl, deren Wurzel gesucht wird, gleich seyn, dem Quadrate von 400 zusammen genommen mit dem Quadrate des unbekannten Theiles und dem doppelt genommenen Producte aus 400 in diesen unbekannten Theil. Nach dem Abzuge des Quadrates von 400, welches 160000 beträgt, bleibt ein Rest = 17241, welcher folglich so groß seyn muß als daß zweyfache Product 400 in den unbekannten Theil zusammen genommen mit dem Quadrate des unbekannten Theiles. Da man fürs erste nur darauf denkt, die zweyte Ziffer der Wurzel zu finden, so begnügt man sich, zu dem was in der ersten Abtheilung als Rest bleibt, bloß die beyden Ziffern der zweyten Abtheilung hinzuzufügen; denn so lange man von dem noch unbekannten Theile nur die höchste Ziffer sucht, braucht man, wie sogleich erhellen wird, auf die folgenden Abtheilungen noch nicht zu sehen.

Sollte nun der Rest, z. B. hier 17241 bloß dem doppelten Producte aus dem bekannten Theile = 400 in den unbekannten Theil gleich seyn, so fände man den unbekannten Theil sehr leicht; denn man brauchte nur den bekannten Theil zu verdoppeln und mit dem Producte jenen Rest zu dividiren, der Quotient würde der gesuchte, noch unbekannte Theil der Wurzel seyn. Dieser Quotient ist nun freylich nicht genau der gesuchte Theil, indeß bestimmt man doch wirklich nach der Regel no. 3. die erste Ziffer dieses Quotienten und versucht dann, ob sie die zweyte Ziffer der Wurzel seyn kann. In unserm Exempel hat man so 400 und 20 als die beyden Theile der Wurzel, und wenn hiemit die Wurzel genau gefunden wäre, so müßte 2 . 400 . 20 + 20 . 20 = dem Reste, also 17241 gleich seyn; ist dieser Rest größer, so subtrahirt man, nach no. 4 und 5. die Summe jener beyden Zahlen oder 16400 von diesem Reste, und sucht nun aus dem neuen Reste, hier = 841, die dritte Ziffer der Wurzel.

Man weiß nun, daß die Wurzel zwischen 420 und 430 liegt, und sieht jetzt 420 als den bekannten Theil an, zu dem noch ein unbekannter Theil hinzu kömmt. Das Quadrat des bekannten Theils ist nun völlig abgezogen; der Rest muß also gleich seyn dem doppelten Producte aus dem unbekannten Theile in den bekannten zusammen genommen mit dem Quadrate des unbekannten, und man bestimmt die folgende Ziffer der Wurzel auf ähnliche Weise wie wir die zweyte Ziffer bestimmt haben. Und so würde man fortfahren, wenn auch die Zahl, deren Wurzel gesucht wird, noch mehrere Ziffern enthielte. Denn wenn man, nach no. 8., den dritten Rest gefunden hat, so ist das Quadrat des bekannten Theils vollständig abgezogen, und man findet also den noch unbekannten Theil beynahe richtig, wenn man den Rest durch das Doppelte des bekannten Theiles dividirt; da aber der Quotient doch den unbekannten Theil nicht genau angiebt, so sucht man nur die erste Ziffer des Quotienten oder des unbekannten Theiles, daher man dieselbe Operation für jede folgende Ziffer der Wurzel wiederholen muß.

Zweytes Beyspiel. Die Wurzel aus 8457932 zu finden.

	8	45	79	32	Wurzel
Quadr. des ersten Theils der Wurzel	4	00	00	00	$= 2000$
Rest =	4	45	79	32	$+ 900$
Verdoppelter erster Theil = 4000; Der Quotient scheint zwar 11 zu werden, aber die Probe ergiebt 9 für die zweyte Ziffer der Wurzel					$+ 8$
$4000 \cdot 900 + 900^2 =$	4	41	00	00	
Rest =		4	79	32	
Verdoppelter bekannter Theil = 5800; Da die folgende Ziffer der Wurzel ein Zehner ist, so erhielte das Product aus diesem in 5800 drey Nullen; man überzeugt sich daher leicht, daß in die Stelle der Zehner eine Null, in die Stelle der Einer 8 kömmt, und es ist $5800 \cdot 8 + 8 \cdot 8 \;. =$		4	64	64	
Rest =			14	68	

Da hier ein Rest bleibt, so liegt die genaue Wurzel zwischen 2908 und 2909, und es müßte noch der hinzukommende Bruch bestimmt werden.

Anmerk. In der Geometrie wird noch ein anderer Beweis für diese Regeln zu Bestimmung der Quadratwurzel vorkommen.

120. **34ste Aufgabe.** Die Quadratwurzel eines gegebenen Bruches zu bestimmen.

Auflösung. Man suche die Quadratwurzel des Zählers und die Quadratwurzel des Nenners jede besonders, und mache jene zum Zähler, diese zum Nenner eines Bruches, so ist dieser neue Bruch die gesuchte Wurzel.

Beweis. Da man das Quadrat eines Bruches findet, wenn man das Quadrat des Zählers zum Zähler, und das Quadrat des Nenners zum Nenner eines neuen Bruches macht: so ist offenbar die umgekehrte Regel die richtige zu Bestimmung der Quadratwurzel.

Beyspiel. Die Quadratwurzel aus $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{2}$; die Quadratwurzel aus $\frac{64}{81}$ ist $= \frac{8}{9}$, u. s. w.

121. Anmerkung. Man pflegt die Quadratwurzel eines Bruches nur dann auf diese Weise zu suchen, wenn sich so wohl die Wurzel des Zählers, als des Nenners genau in ganzen Zahlen angeben läßt. In allen übrigen Fällen ist es weit bequemer, den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, und dann die Wurzel nach den Regeln der 36sten Aufgabe zu bestimmen.

* 122. 11ter Lehrsatz. Das Quadrat eines durch die kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruches ist allemal ein Bruch, der sich gleichfalls nicht durch kleinere Zahlen ausdrücken läßt.

Beweis. Wenn ein Bruch auf die möglichst kleinsten Zahlen gebracht ist (§. 46.), so haben Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor mehr, das heißt, wenn auch der Zähler sowol als der Nenner sich als Product aus mehreren Zahlen betrachten läßt: so kommt doch keiner dieser Factoren im Zähler und im Nenner zugleich vor. Sucht man nun das Quadrat des Bruches, so enthält zwar der Zähler dieses Quadrates alle die Factoren zweymal, welche im Zähler der Wurzel vorkommen, und der Nenner des Quadrates enthält die Quadrate aller im Nenner der Wurzel vorkommenden Factoren, oder diese selbst gleichfalls zweymal. Da aber unter den Factoren des Nenners der Wurzel sich keiner befand, welcher auch im Zähler vorkäme: so ist offenbar, daß dieses auch im Quadrate nicht der Fall seyn kann, weil gar keine andre Zahlen weder im Zähler noch im Nenner als Factoren vorkommen, als diejenigen, die auch in der Wurzel vorkamen, und das Quadrat ist also ein Bruch, welcher sich nicht durch kleinere Zahlen ausdrücken läßt.

Beyspiel. Der Bruch $\frac{63}{64}$ oder $\frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8}$ ist ein solcher, der sich nicht durch kleinere Zahlen ausdrücken läßt, und sein Quadrat $\frac{7^2 \cdot 9^2}{8^2 \cdot 8^2}$ oder $\frac{7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}$ läßt sich gleichfalls nicht auf kleinere Zahlen bringen.

* 123. Es läßt sich hieraus leicht der Schluß ziehen, daß auch jeder andre Bruch einen Bruch und keine ganze Zahl zum Quadrate hat, bloß mit Ausnahme des Falles, da der Zähler des Bruches ein genaues Vielfaches des Nenners, und folglich der Bruch einer ganzen Zahl gleich ist, und dann ist freylich auch das Quadrat eine ganze Zahl.

* 124. 12ter Lehrsatz. Wenn die Quadratwurzel einer ganzen Zahl sich nicht genau durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt, so giebt es auch keinen bestimmten Bruch, welcher ganz genau diese Wurzel angäbe.

Beweis. Da das Quadrat jedes gegebenen Bruches ein Bruch ist: so kann keine ganze Zahl das genaue Quadrat eines Bruches seyn; und es ist also gewiß, daß die Quadratwurzel einer ganzen Zahl entweder selbst eine ganze Zahl seyn wird, oder sich auch nicht durch einen bestimmten Bruch genau ausdrücken läßt.

* 125. Obgleich aber zufolge dieses Satzes eine solche Wurzel sich gar nicht strenge genau angeben läßt: so kann man doch Brüche bestimmen, welche ihr sehr nahe kommen und welche so gar ihr so nahe kommen, als man nur verlangen mag.

Beyspiel. Die Quadratwurzel aus 20 ist beynahe $= 4\frac{1}{2}$, noch genauer ist sie $4\frac{47}{100}$, und noch genauer $4\frac{472}{1000}$, denn das Quadrat der letztern ist 19, 998784, welches wenig über $\frac{1}{1000}$ von 20 abweicht; und so könnte man Brüche angeben, welche diese Wurzel noch weit genauer darstellten.

* 126. Erklärung. Man nennt diejenigen Zahlen rationale Zahlen, welche sich entweder durch ganze Zahlen oder durch bestimmte Brüche ausdrücken lassen; dagegen heißen diejenigen irrational, deren streng genauer Werth sich durch einen Bruch so wenig, als durch eine ganze Zahl angeben läßt.

* 127. Erklärung. Den wahren Werth einer irrationalen Zahl kann man also nur durch

Näherung oder Annäherung bestimmen, das heißt dadurch, daß man Brüche angiebt, welche sehr wenig von dem genauen Werthe der irrationalen Zahl abweichen, und es giebt immer Mittel, diese Näherung so weit zu treiben, als man will, oder Brüche zu finden, die um etwas Geringeres, als irgend ein gegebener Bruch von dem wahren Werthe der irrationalen Zahl abweichen.

Beyspiel. Die Quadratwurzel aus 2, oder $\sqrt{2}$ ist also eine irrationale Zahl, und so auch $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ u. s. w. Man bedient sich am besten der Decimalbrüche, um diese und alle ähnlichen Wurzeln durch Annäherung zu bestimmen.

128. 35ste Aufgabe. Die Quadratwurzel einer jeden ganzen Zahl in Decimalbrüchen so genau auszudrücken, als verlangt wird.

Auflösung. 1. Man setze zuerst fest, bis zu was für Decimaltheilen genau man die Wurzel zu wissen verlangt, und wie viele Ziffern man daher hinter dem Comma in der Wurzel berechnen muß, und hänge dann der Zahl, deren Wurzel gesucht wird, doppelt so viele Nullen an, als die Wurzel Decimalstellen, d. i. Ziffern hinter dem Comma ererhalten soll. Diese Nullen sondre man, wie Decimalbrüche, durch ein Comma von der ganzen Zahl ab.

2. Man verrichtet die Ausziehung der Wurzel völlig so, als wenn die Zahl mit den angehängten Nullen zusammen eine ganze Zahl wäre. (§. 119.)

3. Wenn man dann die Wurzel vollständig gefunden hat, so setzt man das Comma so, daß in der Wurzel halb so viele Ziffern hinter dem Comma stehen, als man in der gegebenen Zahl Ziffern oder Nullen hinter dem Comma hatte.

Beweis. Nachdem man der Zahl die gehörige Anzahl Nullen angehängt hat, kann man sie als einen gewöhnlichen Bruch schreiben, da sie dann einen Nenner erhält, welcher aus einer 1, mit eben so vielen angehängten Nullen besteht, als man der gegebenen ganzen Zahl selbst Nullen angehängt hatte, und diese Anzahl von Nullen ist, nach unserer Voraussetzung, allemal eine gerade Zahl. Man findet die Wurzel dieses Bruches, indem man die Wurzel des Zählers zum Zähler und die Wurzel des Nenners zum Nenner eines neuen Bruches macht (§. 120.). Die Wurzel des Zählers muß nach no. 2. und nach der 33sten Aufgabe gesucht werden; die Wurzel des Nenners aber ist eine 1 mit halb so vielen Nullen, als jener Nenner selbst hatte. Will man also nun die Wurzel als Decimalbruch schreiben, so kommen hinter dem Comma halb so viele Ziffern zu stehen, als man der gegebenen Zahl Nullen angehängt hatte.

Beyspiel. Die Quadratwurzel aus 10 bis auf ein Milliontheilchen genau anzugeben. Man sucht die Quadratwurzel aus $\frac{10\,000000000000}{1000000000000}$, welche $= \frac{3162278}{1000000}$ beynahe, oder beynahe $= 3,\ 162278$ ist.

* 129. 36ste Aufgabe. Die Quadratwurzel einer jeden Zahl, welche aus einer ganzen Zahl mit angehängtem Bruche, oder auch bloß aus einem Bruche besteht, zu bestimmen.

Auflösung. 1. Man bestimme, bis zu was für Decimaltheilen genau man die Wurzel zu haben verlangt, oder wie viele Ziffern man hinter dem Comma in der Wurzel, wenn diese sich nicht genau finden läßt, berechnen will.

2. Alsdann verwandle man den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch, und zwar suche man den Decimalbruch bis auf doppelt so viele Ziffern hinter dem Comma, als man in der Wurzel zu haben verlangt. Läßt sich der Bruch mit wenigern Ziffern genau ausdrücken, so hängt man so viele Nullen an, bis diese Anzahl von Ziffern herauskömmt.

3. Man sucht nun die Quadratwurzel so, als ob die Zahl mit dem Decimalbruche zusammen eine ganze Zahl wäre, wobey man aber vor allen Dingen darauf achten muß, daß die Menge der Ziffern hinter dem Comma in der Zahl, woraus die Quadratwurzel gezogen werden soll, eine grade Zahl sey, damit eine der Abtheilungen mit dem Comma zusammen treffe. Denn im entgegengesetzten Falle hätte der zum Decimalbruche gehörige Nenner eine ungrade Anzahl von Nullen, und seine Wurzel ließe sich nicht genau angeben, welches durchaus nothwendig ist.

4. Endlich setze man das Comma in der Wurzel so, das hinter dem Comma halb so viele Ziffern sind, als man in der Zahl, woraus die Wurzel gezogen ward, hinter demselben hatte.

Die Richtigkeit dieser Auflösung erhellet aus dem Beweise der vorigen Aufgabe.

Uebungs-Exempel. Die Quadratwurzel aus folgenden Zahlen so weit zu finden, als es in ganzen Zahlen möglich ist: aus 54732198745, aus 45678901234, aus 37945780010234.

* Aus denselben Zahlen die Quadratwurzel bis auf Milliontheile genau zu finden, auch die Quadratwurzeln aus 2, aus $2\frac{1}{2}$, aus $2\frac{3}{4}$, aus 12, aus 24 eben so genau zu bestimmen.

Von der Ausziehung der Cubikwurzel.

* 130. 37ste Aufgabe. Es ist eine ganze Zahl gegeben, man soll bestimmen aus wie vielen Ziffern ihre Cubikwurzel bestehen wird.

Auflösung. Man theile die Zahl von hinten her so ab, daß in jeder Abtheilung drey Ziffern stehen, ausgenommen in der höchsten Abtheilung, in welcher eine, zwey oder drey Ziffern stehen können, je nachdem es die gesammte Anzahl der Ziffern ergiebt. So viele Abtheilungen, als man auf diese Weise erhält, eben so viele Ziffern enthält die Cubikwurzel.

Beweis. Da der Cubus von 1 selbst 1 ist, der Cubus von 10 aber 1000, so haben alle einziffrigen Zahlen einen Cubus von einer, zwey oder drey Ziffern. Da 100 zur dritten Potenz erhoben, 1000000 giebt: so besteht der Cubus jeder zweyziffrigen Zahl aus vier, fünf oder sechs Ziffern, und so schließt man ferner, daß der Cubus jeder dreyziffrigen Zahl sieben, oder acht oder neun Ziffern enthält u. s. w., und hieraus folgt umgekehrt die

Regel, welche die Auflösung angiebt. Man vergleiche §. 115.

* 131. Es wäre nun leicht, auch die höchste Ziffer der Cubikwurzel zu bestimmen, und man kann dann auf eine ähnliche Weise, wie bey der Quadratwurzel, nach und nach die übrigen Ziffern finden, indem man immer die Wurzel als aus zwey Theilen bestehend betrachtet, deren einer schon bekannt ist, der andre aber noch bestimmt werden soll.

* 132. 13ter Lehrsatz. Der Cubus jeder zweytheiligen Wurzel, das ist jeder Zahl, die man als Summe zweyer andrer betrachtet, besteht aus der Summe folgender Theile: dem Cubus des ersten Theiles, dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des ersten Theiles in den zweyten Theil; dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des zweyten Theiles in den ersten Theil, und dem Cubus des zweyten Theiles.

Beweis. Da man eine jede Summe zweyer Zahlen völlig allgemein durch $a + b$ ausdrücken kann, wo dann a den einen und b den andern Theil bezeichnet: so braucht man nur den Cubus dieser Größe zu suchen, um sich von der Wahrheit des Lehrsatzes zu überzeugen. Man erhält als Quadrat dieser Größe nach §. 95. und 106.

$$\begin{array}{lrrrr}
 & & = a^2 & + 2ab & + b^2 \\
\text{und wenn man nochmals mit} & & & a & + b \\
\hline
\text{multiplicirt, so} & & & a^2b + 2ab^2 & + b^3 \\
 & a^3 & + 2a^2b & + ab^2 & \\
\hline
\text{wird der Cubus} & = a^3 & + 3a^2b & + 3ab^2 & + b^3
\end{array}$$

welcher also wirklich so zusammen gesetzt ist, wie der Lehrsatz angiebt.

Beyspiel. Man hat also von 35 oder $30 + 5$ den Cubus

$$= 30^3 + 3 \cdot 30^2 \cdot 5 + 3 \cdot 30 \cdot 5^2 + 5^3$$

das ist $= 27000 + 13500 + 2250 + 125$.
welches 42875 beträgt.

* 133. 38ste Aufgabe. **Die Cubikwurzel jeder ganzen Zahl so weit zu bestimmen, als es in ganzen Zahlen möglich ist.**

Auflösung. 1. Man theile die Zahl, deren Wurzel gesucht wird, so ab, wie in der vorigen Aufgabe, und untersuche dann, welche vollständige Cubikzahl in den Ziffern der ersten Abtheilung enthalten ist. Die Wurzel dieser Cubikzahl ist die erste Ziffer der gesuchten Wurzel. Die Cubikzahlen der einziffrigen Zahlen sind folgende:

Wurzel	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Cubus	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

2. Man ziehe den Cubus der ersten Ziffer der Wurzel von dem ab, was in der höchsten Abtheilung steht, und füge an den Rest die drey Ziffern der zweyten Abtheilung.

3. Um die zweyte Ziffer der Wurzel zu finden, nehme man das Quadrat der ersten Ziffer, multiplicire dieses mit 3, und hänge dem Producte zwey Nullen an; die heraus kommende Zahl gebrauche man als Divisor, und suche, wie oft sie in der am Ende von no. 2. erhaltenen Zahl vorkömmt; den Quotienten nimmt man, fürs erste zum Versuch, als zweyte Ziffer der Wurzel an.

4. Man multiplicire diese zweyte Ziffer in das dreymal genommene Quadrat der ersten Ziffer, und hänge dem Producte zwey Nullen an; man suche ferner das dreyfache Product aus dem Quadrate der zweyten Ziffer in die erste Ziffer, und hänge dem Producte eine Null an; endlich suche man den Cubus der zweyten Ziffer. Die Summe dieser drey Zahlen subtrahire man von dem, was jetzt noch in den beyden ersten Abtheilungen steht, das ist von der in nr. 2. bestimmten Zahl, und füge an den Rest die drey Ziffern der dritten Abtheilung. Hätte es sich gefunden, daß jene Summe größer wäre, als die in den beyden höchsten Abtheilungen noch stehende Zahl: so muß man die zweyte Ziffer der Wurzel kleiner annehmen, doch aber darauf achten, daß man die größte Zahl, bey der diese Probe noch Statt findet, zur zweyten Ziffer annehme.

5. Man nehme die gefundenen zwey Ziffern der Wurzel als eine Zahl zusammen, suche ihr Quadrat, nehme das Dreyfache derselben und hänge daran zwey Nullen: hiemit dividire man die jetzt noch in den drey ersten Abtheilungen stehende Zahl, nehme den Quotienten zur dritten Ziffer der Wurzel und

6. berechne folgende drey Zahlen: das dreyfache Product aus der dritten Ziffer der Wurzel in das Quadrat des ersten zweyziffrigen Theiles, welchem Producte man zwey Nullen anhängt; das dreyfache Product aus dem Quadrate der dritten Ziffer der Wurzel in den ersten zweyziffrigen Theil mit einer angehängten Null; endlich den Cubus der dritten Ziffer. Die Summe dieser drey Zahlen subtrahirt man von dem, was in den drey ersten Abtheilungen noch steht, und vermindert, wenn diese Summe zu

groß ist, die dritte Ziffer der Wurzel gehörig, wie in nr. 4.

7. An den Rest, der bey dieser Subtraction bleibt, hängt man die Ziffern der vierten Abtheilung und setzt die Rechnung nun auf ähnliche Weise fort, bis man alle Abtheilungen der gegebenen Zahl durchgegangen ist.

Beyspiel. Die Cubikwurzel aus 955671625 zu finden.

Gegebene Zahl =	955	671	625	Wurzel = 985.
Cubus der ersten Ziffer d. Wurzel =	729	—		
Rest mit den angehängten Ziffern der zweyten Abtheilung . . . =	226	671		
Dreyfaches Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel mit zwey angehängten Nullen als Divisor = 24300.				
Der Quotient ist zwar = 9, aber die zweyte Ziffer der Wurzel wird = 8, und man findet:				
$3 \cdot 9^2 \cdot 8$ mit zwey angehängten Nullen . . . = 194400.				
$3 \cdot 9 \cdot 8^2$ mit einer angehängten Null . = 17280.				
und 8^3 . . . . . = 512.				
Summe dieser drey Zahlen =	212	192	—	
Rest mit den angehängten Ziffern der dritten Abtheilung . . =	14	479	625	
Das dreyfache Quadrat des bekannten zweyziffrigen Theils der Wurzel, mit zwey angehängten Nullen als Divisor = 2881200.				
Die dritte Ziffer der Wurzel = 5, und				
$3 \cdot 98^2 \cdot 5$ mit zwey angehängten Nullen = 14406000.				
$3 \cdot 98 \cdot 5^2$ mit einer angehängten Null . = 73500.				
und 5^3 . . . = 125.				
Summe dieser drey Zahlen =	14	479	625	

Es bleibt also hier kein Rest, und es ist 985 die genaue Cubikwurzel.

Beweis. Man kann den Beweis hier auf sehr ähnliche Weise, wie bey der Quadratwurzel führen. Was zuerst die Bestimmung der höchsten Ziffer der Wurzel betrifft, so ist z. B. im vorigen Exempel sogleich offenbar, daß die Wurzel zwischen 900 und 1000 fällt, indem $900^3 = 729000000$, kleiner, hingegen $1000 = 1000000000$ größer, als die gegebene Zahl ist. Zieht man nun, indem man 900 als den ersten Theil der Cubikwurzel betrachtet, den Cubus dieses ersten Theiles ab: so muß der gesammte übrig bleibende Rest gleich seyn der Summe folgender drey Zahlen: dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des ersten Theils in den noch unbekannten zweyten Theil; dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des unbekannten zweyten Theiles in den ersten Theil; endlich dem Cubus des zweyten Theiles. Unter diesen drey Zahlen ist die erstere die größeste, weil der bekannte Theil beträchtlich größer, als der noch zu bestimmende zweyte Theil der Wurzel ist, und also um so mehr, das Quadrat von jenem das Quadrat von diesem übertrifft. Sollte der Rest bloß der ersten dieser drey Zahlen gleich seyn, so erhielte man den unbekannten Theil der Wurzel genau, wenn man den Rest durch das dreyfache Quadrat des bekannten Theiles dividirte; und man sieht hieraus, das also diese Division wenigstens ungefähr die erste Ziffer des unbekannten Theiles angeben wird. Man betrachtet nun für einen Augenblick den zweyten Theil der Wurzel so, als ob er bloß aus dieser Ziffer mit den gehörigen angehängten Nullen, (in unserm Exempel aus 90, weil jener Quotient 9 ist,) bestände und sucht die Summe der drey Zahlen $3 \cdot 900^2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 \cdot 90^2 + 90^3$. Findet sich diese Summe, wie hier der Fall ist, größer als der noch vorhandene Rest: so sieht man, daß man die zweyte Ziffer der Wurzel kleiner annehmen muß, daß nämlich die Wurzel nur etwas über 980 seyn wird. Man subtrahirt also $3 \cdot 900^2 \cdot 80 + 3 \cdot 900 \cdot 80^2 + 80^3$ und nachdem dies geschehen, ist der vollständige Cubus von 980 abgezogen, welche Zahl man jetzt als ersten Theil der Wurzel ansieht, und die ganz ähnliche Rechnung zu Bestimmung der dritten Ziffer wieder anfängt.

Ich habe hier die Rechnung so dargestellt, wie sie eigentlich mit Beybehaltung aller vorkommenden Nullen vollständig geführt werden müßte, und die Richtigkeit dieser Rechnung wird aus diesem Beweise erhellen. In der Auflösung selbst habe ich diese Regeln so abgefaßt, wie man, zu Abkürzung der Arbeit, gewöhnlich zu rechnen pflegt; man wird die Gründe für diese Regeln aus dem Beweise leicht finden, z. B. die Gründe, warum man in nr. 3. 4. 5. 6. zuweilen zwey, zuweilen eine Null anhängt. Diese Nullen finden sich nämlich bey vollständig geführter Rechnung von selbst, wie auch folgendes ausführlich berechnete Beyspiel zeigt.

Beyspiel. Die Cubikwurzel aus 2000000 zu finden.

Gegebene Zahl = 2	000	000	Wurzel
Cubus des ersten Theils = 1	000	000	= 100
			+ 20
Rest = 1	000	000	+ 6
Dreyfaches Quadrat des ersten Theils als Divisor = 30000.			
Zweyter Theil der Wurzel = 20.			
Dreyfaches Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten . . . . . = 600000			
Dreyfaches Product aus dem Quadrate des zweyten Theils in den ersten . . = 120000			
Cubus des zweyten Theils = 8000			
Summe =	728	000	
Rest =	272	000	
Dreyfaches Quadrat des bekannten zweyziffrigen Theils als Divisor = 43200.			
Dritte Ziffer der Wurzel = 6.			
Dreyfaches Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten $= 3 \cdot 120^2 \cdot 6$ . . = 259200			
Dreyfaches Product aus dem Quadrate d. zweyten Theils in den ersten $= 3 \cdot 120 \cdot 6^2 = 12960$			
Cubus des zweyten Theils = 216			
Summe =	272	376	

Da diese letztere Summe größer ist, als der noch übrige Rest, so folgt, daß die Wurzel eigentlich etwas kleiner als 126 ist.

Anmerk. Die Gründe für diese Regeln lassen sich auch geometrisch zeigen, wie in der Geometrie erklärt werden wird.

* 134. 39ste Aufgabe. Die Cubikwurzel eines Bruches zu finden.

Auflösung. Man suche die Cubikwurzel des Zählers und des Nenners jede besonders und mache die erstere zum Zähler, die letztere zum Nenner eines Bruches. Dieser Bruch ist die gesuchte Wurzel.

Beweis. Der Cubus eines gegebenen Bruches hat zum Zähler den Cubus des Zählers und zum Nenner den Cubus des Nenners des gegebenen Bruches; es ist nämlich der Cubus von $\frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$ und daher auch umgekehrt die Cubikwurzel aus $\frac{a}{b}$ oder $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

Beyspiel. Es ist $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$.

* 135. 14ter Lehrsatz. Der Cubus eines jeden wirklichen Bruches ist selbst ein Bruch.

Beweis. Wenn der Bruch ein wahrer Bruch, nämlich nicht einer ganzen Zahl gleich ist, also nicht der Zähler ein genaues Vielfaches des Nenners: so kann man ihn allemal, ohne seinen Werth zu ändern, so ausdrücken, daß Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben (§. 46.). Da nun der Cubus eines Bruches weder im Zähler noch im Nenner andere Factoren erhält, als die Wurzel hatte, sondern bloß im Zähler die Factoren des Zählers der Wurzel, und im Nenner die Factoren des Nenners der Wurzel dreymal wiederhohlt vorkommen: so ist offenbar, daß auch der Cubus sich nicht auf kleinere Zahlen bringen läßt, wenn dies bey der Wurzel nicht der Fall war, und daß der Cubus gewiß keine ganze Zahl seyn kann, wenn die Wurzel ein wahrer Bruch ist.

* 136. 15ter Lehrsatz. **Wenn die Cubikwurzel einer ganzen Zahl sich nicht genau durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt: so giebt es auch keinen bestimmten Bruch, der diese Wurzel ganz genau angäbe.**

Beweis. Da der Cubus eines jeden Bruches, der selbst nicht einer ganzen Zahl gleich ist, nothwendig ein Bruch ist: so kann keine ganze Zahl der genaue Cubus eines bestimmten Bruches seyn. Die Cubikwurzel jeder ganzen Zahl ist also entweder ebenfalls eine ganze Zahl, oder sie ist eine irrationale Zahl, welche sich durch keinen bestimmten Bruch, sondern nur näherungsweise durch eine Reihe von immer kleinern Brüchen, und dadurch so genau, als man verlangt, angeben läßt.

* 137. 40ste Aufgabe. **Die Cubikwurzel jeder ganzen Zahl, auch jedes Bruches, oder einer ganzen Zahl, welcher ein Bruch angehängt ist, durch Decimalbrüche so genau, als nur verlangt wird, zu bestimmen.**

Auflösung. 1. Man bestimme, bis zu was für Decimaltheilen genau man die Wurzel zu wissen verlangt, und wie viele Ziffern hinter dem Comma man demnach in der Wurzel berechnen muß; und gebe nun der Zahl, deren Wurzel gesucht wird, dreymal so viele Ziffern hinter dem Comma, als die Wurzel hinter dem Comma erhalten soll. Dieses geschieht, indem man die Brüche in Decimalbrüche verwandelt und diese bis auf so viele Ziffern, als eben angegeben ist, berechnet, oder wenn sich nicht so viele Ziffern ergeben, die nöthige Zahl von Nullen anhängt.

2. Man theile nun die Zahl eben so wie eine ganze Zahl von drey zu drey Ziffern ab, gebe aber ins besondere Achtung, daß einer dieser Theilungspuncte mit dem Comma zusammen treffe, welches auch von selbst geschieht, wenn man die Anzahl der Ziffern hinter dem Comma nach der Regel nr. 1. bestimmt, und jeder der Abtheilungen drey Ziffern giebt.

3. Die Ausziehung der Wurzel verrichtet man so, als ob die Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen wird, eine ganze Zahl wäre; setzt dann aber das Comma so, daß hinter demselben nur ein Drittheil von der Anzahl von Ziffern bleiben, die man in der gegebenen Zahl hinter dem Comma hatte.

Beweis. Betrachtet man die Zahl mit dem angehängten Decimalbruche, aus welcher die Wurzel gesucht wird, so, wie sie mit ihrem Decimal-Nenner geschrieben werden muß, wenn man sich des Comma's nicht bedienen will: so bedarf die Richtigkeit dieser Regeln kaum eines Beweises. Man übersieht aber, daß es durchaus nöthig ist, daß die Anzahl der Ziffern hinter dem Comma in der gegebenen Zahl oder die Anzahl der Nullen im Nenner eine durch 3 theilbare Zahl sey, weil nur dann die Wurzel des Nenners sich leicht und genau finden läßt. Hat nun der Decimal-Nenner in der gegebenen Zahl eine solche Anzahl von Nullen: so hat seine Cubikwurzel nur den dritten Theil dieser Nullen, und es erhellet der Grund der Regel für die Bestimmung der Stelle des Comma's in der Wurzel.

Beyspiel. Die Cubikwurzel aus 10 bis auf Milliontheilchen genau zu bestimmen. Desgleichen die Wurzeln aus 12, 13, 25, 100.

Siebenter Abschnitt.

Von den Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

138. Erklärung. Das Wort Verhältniß zeigt eine Vergleichung zwischen zwey gleichartigen Größen an, und zwar eine Vergleichung, welche angiebt, ob sie einander gleich sind, oder wie sie von der Gleichheit abweichen.

139. Erklärung. Die Vergleichung, wie zwey Größen von der Gleichheit abweichen, läßt sich auf zweyerley Weise anstellen; denn man kann erstlich