Beyspiel. Da $11 > 9$ und $101 > 100$, so ist
$11 \cdot 101 > 9 \cdot 100$, und auch
$\frac{101}{9} > \frac{100}{11}$ und $\frac{11}{100} > \frac{9}{101}$.

Fünfter Abschnitt.

Von den entgegengesetzten Größen und der Buchstaben-Rechnung.

Von den entgegengesetzten Größen.

* 82. Erklärung. Man kann zuweilen gleichartige Größen in entgegengesetzten Rücksichten betrachten, so daß eine solche Größe, in der einen Beziehung genommen, grade das Gegentheil ist von einer sonst gleichen, aber in der entgegengesetzten Beziehung genommenen Größe. Alsdann geben diese beyden Größen vereinigt Null oder heben einander auf, und man nennt diese Größen entgegengesetzte Größen.

Beyspiele. So lange man eine Entfernung z. B. 10 Meilen in gar keiner weitern Beziehung betrachtet, sondern bloß anf die absolute Größe derselben sieht: so findet hier gar kein Gedanke an Entgegensetzung Statt. Sobald man aber die 10 Meilen als einen nach bestimmter Richtung zurückgelegten Weg ansieht: so ist der Weg rückwärts dem vorwärts zurückgelegten entgegengesetzt, und wer zuerst 10 Meilen vorwärts und darauf wieder 10 Meilen zurück geht, der ist am Ende weder nach der einen noch der andern Richtung weiter gekommen, so daß man also sagen darf, daß aus der Vereinigung dieser beyden, der Größe nach gleichen aber der Richtung nach entgegengesetzten Wege, Null hervorgeht, oder diese beyden entgegengesetzten Größen einander aufheben.

* 83. Sind die beyden entgegengesetzten Größen auch in Rücksicht auf die absolute Größe ungleich: so heben sie sich nicht ganz, aber doch zum Theil auf. Wenn ich einen Weg vorwarts zurückgelegt habe und fange nun an zurück zu gehn: so mache ich mit jedem Schritte, den ich rückwärts thue, einen Theil meiner vorhin angewandten Mühe vergeblich oder gleichsam ungeschehen, und entferne mich mit jedem Schritte weiter von dem vor mir liegenden Ziele, wohin eigentlich mein Weg gerichtet war.

Eben so sind Vermögen und Schulden entgegengesetzte Größen; denn wenn ich 50 Rthlr. Vermögen habe, und mache 20 Rthlr. Schulden: so zerstöre ich dadurch einen eben so großen Theil meines Vermögens, und wer 50 Rthlr. Vermögen hat und macht 50 Rthlr. Schulden, der behält gar nichts.

* 84. Erklärung. Von zwey entgegengesetzten Größen nennet man allemal die eine positiv oder bejahet, und die andre negativ oder verneint. Welche von beyden man positiv nennen will, ist eigentlich willkührlich.

Beyspiel. Schulden sind negatives Vermögen, und baares Vermögen ist negative Schuld.

* 85. Willkührlicher Satz. Man bezeichnet die als positiv angenommenen Größen mit $+$, die negativen mit $-$. Steht eine positive Größe allein oder auch vorn an, so pflegt man das Zeichen $+$ wohl wegzulassen.

Beyspiel. Es bedenten also + 50 Rthlr. Vermögen, oder 50 Rthlr. Vermögen, (ohne vorgesetztes Zeichen,) so viel wirkliches Vermögen; hingegen — 50 Rthlr. Vermögen bedeuten 50 Rthlr. Schulden.

* 86. 24ste Aufgabe. Mehrere gleichartige, aber theils positive, theils negative Größen zu einander zu addiren.

Auflösung. Man addire die sämmtlichen positiven Zahlen wirklich, und ziehe die negativen davon ab. Ist die Summe aller positiven Zahlen größer, als die aller negativen Zahlen, so bezeichne man die erhaltene Zahl mit + oder sehe sie als positiv an; ist aber die Summe der negativen Zahlen die größere, so ziehe man die Summe der positiven davon ab und bezeichne den Rest mit —. Dieser erhaltene Rest ist das, was man als Summe der positiven und negativen Zahlen sucht.

Beweis. Die Addition soll lehren, was man erhält, wenn man die gegebenen Zahlen alle vereinigt, oder, um bey einem Beyspiele stehen zu bleiben, wie groß der wahre Betrag eines Vermögens ist, das aus mehrern Summen baaren Geldes und aus mehrern Summen passiver Schulden besteht. Hier muß man also offenbar alle positiven Summen, das heißt, welche zu Vermehrung des Vermögens beytragen, zusammen addiren, und davon alles negative, das ist, alle Schulden abrechnen; der Rest ist der wahre Betrag des Vermögens. Findet sich nun ein Ueberschuß der positiven Zahlen, so ist auch das gesammte Vermögen reell oder positiv; betragen aber die negativen Zahlen mehr, als die positiven, so ist auch das gesämmte Vermögen ein negatives, oder besteht nur aus Schulden.

Beyspiel. In einer bergigten Gegend, wo man abwechselnd aufwärts und herabwärts geht, findet man, daß man zuerst 1000 Fuß gestiegen, dann 1200 Fuß herabgestiegen sey, hierauf einen Weg in der Ebne gemacht und dann nochmals 700 Fuß herabgestiegen sey; zuletzt steigt man wieder 500 Fuß, und will nun wissen, wie viel höher der Punct, wo man zuletzt ankam, liegt, als derjenige, von welchem man ausgegangen ist. — Die letzte Frage: wie viel höher der letztere Punct liege, deutet an, daß man das Höhersteigen als das positive betrachtet; wir haben daher + 1000 — 1200 — 700 + 500, das ist — 400 Fuß, als die Höhe, um welche man gestiegen, und es erhellet hieraus, daß man wirklich sich nicht höher sondern niedriger befindet, als Anfangs.

* 87. 25ste Aufgabe. Zwey gegebene Größen von einander zu subtrahiren, wenn auch eine oder beyde negativ sind.

Erste Auflösung. Erster Fall. Sind beyde Größen positiv: so subtrahirt man auf gewöhnliche Weise und betrachtet den Rest als positiv, wenn die Aufgabe verlangt, die kleinere Zahl von der größern abzuziehn; hingegen betrachtet man den Rest als negativ, wenn verlangt wird, die größere von der kleinern zu subtrahiren.

Beyspiel. Wenn eine Person A 1000 Rthlr. besitzt, und eine andre B 1200 Rthlr., wie viel ist dann A reicher als B? Antwort: A ist nicht reicher als B, sondern um 200 Rthlr. ärmer, oder er ist um — 200 Rthlr. reicher als B. Hier zeigt nämlich das Zeichen — an, daß nicht das Statt finde, was die Frage eigentlich angiebt, sondern das Gegentheil.

Zweyter Fall. Wenn beyde Größen negativ sind: so verrichtet man die Subtraction wieder wie gewöhnlich; aber der Rest ist nun negativ, wenn die kleinere Zahl von der größern abgezogen werden sollte, und dagegen positiv, wenn man die größere von der kleinern abzuziehen verlangte.

Beyspiel. A hat 500 Rthlr. Schulden und B 300 Rthlr. Schulden, oder mit andern Worten: A hat — 500 Rthlr. Vermögen und B hat — 300 Rthlr. Vermögen; wie viel Vermögen hat A mehr als B? — Da A mehr Schulden hat als B, so ist er ärmer als dieser und zwar um 200 Rthlr.; die Antwort ist also, daß wenn man das Vermögen des B von dem Vermögen des A subtrahirt, — 200 Rthlr. zum Rest bleibt. Hätte man umgekehrt gefragt, wie viel B mehr besitzt als A, so hätte man die erstere Zahl von der letztern abziehn müssen und erhalten + 200 Rthlr., weil B wegen geringerer Schulden wirklich so viel mehr als A besitzt.

Dritter Fall. Soll man von einer positiven Größe eine negative subtrahiren: so addirt man beyde und giebt der Summe das Zeichen +. Diese Summe ist der gesuchte Unterschied.

Beyspiel. Wenn A 1500 Rthlr. baares Vermögen hat und B 500 Rthlr. Schulden, so ist der Unterschied des Vermögens offenbar 2000 Rthlr. und zwar hat A eine Summe von + 2000 Rthlr. mehr als B.

Vierter Fall. Wenn endlich eine positive Zahl von einer negativen abzuziehen ist: so findet man den Unterschied, indem man beyde addirt und die Summe als negativ betrachtet.

Beyspiel. Hätte man im letztern Beyspiele gefragt: um wie viel ist B reicher als A? so hätte man unstreitig antworten müssen, um — 2000 Rthlr.

Zweyte Auflösung. In allen einzelnen Fällen gilt folgende Regel: Man schreibe diejenige

Größe, von welcher man etwas subtrahiren soll, mit unverändertem Zeichen hin, und setze darunter die abzuziehende Größe, gebe aber der letztern das entgegengesetzte Zeichen von dem, welches sie eigentlich hat. Alsdann addire man beyde und gebe der Summe das Zeichen, welches dieselbe nach den Regeln der Addition haben muß (§. 86.). Diese Summe ist die gesuchte wahre Differenz.

Beyspiele. Es sind zwey Berge, deren einer 15000, der andere 12700 Fuß hoch ist; um wie viel ist der letztere höher als der erstere? Nach der Regel der zweyten Auflösung addirt man + 12700 zu — 15000, erhält also — 2300 Fuß, weil der letztere nicht höher sondern niedriger als jener ist.

Hätte man nicht den Höhen-Unterschied zweyer Berge oder positiver Höhen, sondern den Höhen-Unterschied der tiefsten Puncte zweyer Schlünde oder Schachten gesucht, deren einer 1200 Fuß tief oder — 1200 Fuß hoch, der andre — 500 Fuß hoch ist, und gefragt, wie viel liegt der tiefste Punct des erstern höher als des letztern; so hätte man — 1200 von — 500 subtrahiren oder zu + 500 addiren müssen, und — 700 erhalten, weil der tiefste Punct des erstern nicht höher, sondern tiefer liegt, als der des letztern.

Ferner, wenn man fragt: wie viel liegt die 12700 Fuß hohe Bergspitze über dem tiefsten Puncte des um 1200 Fuß vertieften Schachtes: so soll man — 1200, als die letzte Höhe, abziehen von + 12700; nach unsrer Regel also muß man + 12700 und + 1200 addiren, und der Höhen-Unterschied ist + 13900 Fuß. Dagegen würde man — 13900 Fuß erhalten haben, wenn man die Frage umgekehrt, oder gefragt hätte, wie viel höher der letztere Punct liege, als der erstere.

Beweis und Erläuterung. Die Richtigkeit der ersten Auflösung bedarf wohl keines Beweises, und da die letztere in allen Fällen mit jener übereinstimmt: so ist dadurch auch die Richtigkeit dieser einleuchtend. Daß aber alle angeführte Beyspiele wirklich als Subtractions-Exempel zu betrachten sind, leidet ebenfalls keinen Zweifel; denn selbst da, wo man die Zahlen addiren muß, sucht man doch wirklich den Unterschied zweyer Größen, welches eben der allgemeine Gegenstand der Subtraction ist.

* 88. 26ste Aufgabe. Zwey Zahlen, sie mögen positiv oder negativ seyn, in einander zu multipliciren.

Auflösung. Man multiplicire die Zahlen ganz auf gewöhnliche Weise, und betrachte das Product als positiv, wenn beyde Factoren einerley Zeichen haben; hingegen betrachte man es als negativ, wenn die Factoren verschiedene Zeichen haben, oder wenn der eine positiv, der andre negativ ist.

Beweis. Ehe wir die Richtigkeit dieser Regel untersuchen können, muß zwar bewiesen werden, daß es überhaupt möglich sey, eine Zahl, welche als positiv oder negativ betrachtet wird, als Multiplicator zu gebrauchen, da dieses dem 4ten Lehrsatze (§. 61.) entgegen zu seyn scheint. So fern man nämlich bloß an eine Vervielfachung einer positiven oder negativen Zahl denkt, so ist der Multiplicator eine ohne alle Beziehung betrachtete Zahl, bey welchem kein Gedanke an positiv und negativ statt findet; denn es ist z. B. das Dreyfache eines Vermögens von 100 Rthlr., gewiß ein Vermögen von 300 Rthlr., und das Dreyfache einer Schuld, die 100 Rthlr. betrug, ist eine Schuld von 300 Rthlr. Man wird aber den Begriff eines negativen Multiplicators zugestehn, wenn man die folgende Aufgabe beantworten soll: „Es ist eine gewisse positive oder negative Größe gegeben; man soll eine Größe angeben, welche das Zehnfache jener, aber ihr entgegengesetzt ist.“ — Hier betrachtet man den Multiplicator als negativ, um anzuzeigen, daß das Product das Entgegengesetzte von dem seyn soll, was es bey einer bloßen Vervielfachung seyn würde; und nun ist es natürlich, daß man dagegen den Multiplicator dann positiv nennt, wenn das Product das unveränderte Vielfache des Multiplicandus seyn soll.

Der Beweis für die in der Auflösung gegebene Regel ist nun leicht. Denn soll der positive Multiplicandus bloß vervielfacht werden, das heißt, ist auch der Multiplicator positiv, so wird das Product positiv seyn; hingegen ist das unverändert genommene Vielfache eines negativen Multiplicandus negativ. Bey einem negativen Multiplicator findet das Umgekehrte Statt. Denn nun soll das gesuchte Product zwar ein Vielfaches des gegebenen Multiplicandus, aber ihm entgegengesetzt seyn und das Product wird also nun negativ, wenn der Multiplicandus positiv ist, und dagegen positiv, wenn dieser negativ ist.

Beyspiel. Das Vermögen der Person A ist dreymal so groß, als die Schulden des B, oder — 3 mal so groß, als das Vermögen des letztern; hat also B ein Vermögen von — 300 Rthlr., so hat A ein Vermögen von + 900 Rthlr.; hätte dagegen B ein wahres Vermögen von + 500 Rthlr., so besäße A — 1500 Rthlr., oder 1500 Rthlr. Schulden, weil sein Vermögen das Dreyfache aber Entgegengesetzte von dem seyn soll, was B besitzt.

* 89. 27ste Aufgabe. Zwey Größen von gleicher oder entgegengesetzter Art durch einander zu dividiren.

Auflösung. Man dividire auf die gewöhnliche Weise und bezeichne den Quotienten mit +, wenn Dividendus und Divisor von einerley Art sind; dagegen betrachte man den Quotienten als negativ, wenn Dividendus und Divisor einander entgegengesetzt sind, oder verschiedene Zeichen haben.

Beweis. Nach dem, was bey der Multiplication erinnert worden ist, wird man leicht übersehn, daß man den Quotienten als positiv anzusehn hat, wenn der Divisor wirklich im Dividendo enthalten ist, daß heißt, wenn entweder beyde positiv, oder beyde negativ sind. Dagegen ist der Quotient negativ, wenn Dividendus und Divisor von entgegengesetzter Art sind; denn der negative Divisor ist im positiven Dividendus nicht selbst enthalten, sondern das Entgegengesetzte desselben ist darin enthalten, und dieses wird durch das negative Zeichen des Quotienten angedeutet.

Beyspiel. A hat 100 Rthlr. Schulden, B hingegen nur 20 Rthlr Schulden; wie viel mal ist das Vermögen des letztern in dem Vermögen des erstern enthalten? — Es ist wirklich 5 mal, also + 5 mal darin enthalten, indem 100 Rthlr. Schulden wirklich das Fünffache von 20 Rthlr. Schulden sind.

Wenn hingegen zwar A 100 Rthlr. Schulden, B aber 20 Rthlr. wirkliches Vermögen hat, so kann man die Frage, wie viel mal das Vermögen des letztern in dem Vermögen des erstern enthalten sey, eigentlich gar nicht beantworten. Dieses zeigt man durch das negative Zeichen an, welches man dem Quotienten giebt, und man muß die Auflösung, daß A ein — 5 mal so großes Vermögen als B habe, so verstehen, daß das Vermögen von A zwar der Summe nach fünfmal so groß, als das Vermögen von B, der Art nach aber das Entgegengesetzte sey, weil der letztere zwar baares Vermögen, der erstere aber bloß Schulden hat.

Von der Buchstaben-Rechnung.

* 90. Willkührlicher Satz. Man kann statt der Zahlen Buchstaben gebrauchen und durch diese sowohl bekannte, als unbekannte Zahlen ausdrücken. Da man aber Buchstaben nicht immer zu einander addiren, oder die übrigen Rechnungs-Operationen damit verrichten kann: so drückt man, wo es nöthig ist, diese Rechnungs-Operationen bloß durch Zeichen aus.

Beyspiel. Es bedeutet also $5a + 6b$, daß die Zahl $5a$ zur Zahl $6b$ soll addirt werden; eben so zeigt $a - b$ an, daß b von a abzuziehen sey; ferner ab oder $a \times b$ die Multiplication dieser beyden Zahlen in einander, und $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ die Division der erstern durch die letztere.

* 91. Es ist hierbey noch zu bemerken, daß man zwar $2a$, $3a$ u. s. w. schreibt, wenn die Größe a mehrmal genommen werden soll, daß es aber eben nicht üblich ist $1a$ zu schreiben, sondern daß man gewöhnlich statt dessen bloß a setzt.

Ferner pflegt man auch wohl, wenn man Größen hat, deren Summe oder Differenz in einen gemeinschaftlichen Factor sollen multiplicirt oder durch einen gemeinschaftlichen Divisor dividirt werden, diese in eine Parenthese einzuschließen, so daß $(f + g) . c$ bedeutet, daß die

Summe von f und g mit e soll multiplicirt werden. Eben so bedeutet $(a + b + c) : (f - g)$, daß die Summe der drey ersten Größen durch den Unterschied der beyden letztern zu dividiren ist, u. s. w.

* 92. Erklärung. Da indeß in manchen Fällen die einfachen Rechnungs-Operationen doch auch bey Buchstaben sich wirklich ausführen lassen: so lehrt die Buchstaben-Rechnung, auf welche Weise dieses insonderheit bey Größen, die aus mehrern positiven und negativen Theilen bestehen, geschieht.

* 93. 28ste Aufgabe. Mehrere Größen, welche durch Buchstaben ausgedrückt sind, zu einander zu addiren.

Auflösung. Man kann diese Größen gerade so betrachten, wie benannte Zahlen und hier diejenigen Größen, welche mit einerley Buchstaben bezeichnet sind, wirklich addiren; bey denen aber, wo dies nicht angeht, die Addition bloß durch das Additions-Zeichen anzeigen. Kommen in den zu addirenden Größen negative Theile vor: so muß man die Regeln der 24sten Aufgabe befolgen.

Beyspiel. Die Größen $5a + 7b - 8c$ und $7a - 5b + 27d - e$ zu addiren.

$$\begin{array}{rrrrr} 5a & + 7b & - 8c & & \\ 7a & - 5b & & + 27d & - e \\ \hline \end{array}$$

Summe $= 12a + 2b - 8c + 27d - e$

* 94. 29ste Aufgabe. Größen, welche in Buchstaben ausgedrückt sind, von einander zu subtrahiren.

Auflösung. Auch hier findet die wirklich ausgeführte Subtraction nur Statt, wenn Größen, die mit einerley Buchstaben bezeichnet sind, vorkommen; übrigens gelten die Regeln, welche bey den entgegengesetzten Größen angegeben worden (§. 87.).

Beyspiel. Von der Größe $-15a+6b-d+8f$ soll abgezogen werden $6a+7d-9e-f$.

Man kann nach der Regel der zweyten Auflösung der 25sten Aufgabe die Zeichen der letztern Zahl in die entgegengesetzten verwandeln und dann folgende Größen zu einander addiren:

$$\begin{array}{l} -15a+6b-d+8f \\ -6a-7d+f+9e \\ \hline \end{array}$$

so ist die gesuchte Differenz

$$-21a+6b-8d+9f+9e$$

Zweytes Beyspiel. Man kann auch Größen von folgender Form haben: $ma+7b-nc+d$, und $la-mb+2nc+d$. Soll man hier die letztere von der erstern abziehn,

nämlich von $ma+7b-nc+d$
abziehn $la-mb+2nc+d$,

so ist der Rest $ma-la+7b+mb-3nc$
oder $=(m-l)a+(7+m)b-3nc$.

* 95. 30ste Aufgabe. Zwey durch Buchstaben gegebene Größen in einander zu multipliciren.

Auflösung 1. Man multiplicire mit jedem einzelnen Stücke des Multiplicators alle Theile des Multiplicandus, und zwar verrichte man, wo Zahlen vorkommen, die Multiplication wirklich; bey den Buchstaben hingegen deute man sie bloß durch Zeichen an, und befolge bey negativen Größen die Regeln des 88 §.

2. Die einzelnen Theile des Productes vereinige man in eine Summe und suche dabey alle Glieder, welche einerley Buchstaben enthalten, wirklich zusammen zu zählen.

Beyspiel. Die Größe $a + b$ mit $a + b$ zu multipliciren.

$$\begin{array}{llll} & a + b & & \\ & a + b & & \\ \hline & aa + ab & & \\ & \quad + ab + bb & & \\ \hline \text{Product} = & aa + 2\,ab + bb & & \end{array}$$

Zweytes Beyspiel. $5\,a + 15\,b + 3\,c$ mit $a - 3\,b$ zu multipliciren.

$$\begin{array}{ll} & 5\,a + 15\,b + 3\,c \\ & \qquad a - 3\,b \\ \hline & 5\,aa + 15\,ab + 3\,ac \\ & \qquad - 15\,ab \qquad - 45\,bb - 9\,bc \\ \hline \text{Product} & = 5\,aa + 3\,ac - 45\,bb - 9\,bc \\ \text{oder} & = (5\,a + 3\,c)\,a - (45\,b + 9\,c)\,b. \end{array}$$

* 96. 31ste Aufgabe. Zwey in Buchstaben ausgedrückte Größen durch einander zu dividiren.

Auflösung. Wo die Division nicht aufgeht, pflegt man sie bloß dadurch anzudeuten, daß man den Dividendus zum Zähler eines Bruches macht, dessen Nenner der Divisor ist. Glaubt man aber, daß entweder der ganze Dividendus oder einige Theile desselben sich wirklich dividiren lassen, (welches der Fall ist, wenn sie eben die Buchstaben enthalten, wie der Divisor,) so verrichtet man die Division auf ähnliche Weise, wie bey ganzen Zahlen.

Beyspiel. $aa - bb$ mit $a + b$ zu dividiren.

$$
\begin{array}{l}
a + b)\; aa - bb \;(\text{Quotient} = a - b. \\
 \underline{aa + ab} \\
 - ab - bb \\
 \underline{- ab - bb} \\
 0
\end{array}
$$

Da das erste Glied des Divisors im ersten Gliede des Dividendus a mal enthalten ist, so ist a der erste Theil des Quotienten, und dieser giebt mit $a + b$ multiplicirt $aa + bb$. Dieses Product vom Dividendo subtrahirt, läßt zum Rest $- ab - bb$, woraus sich $- b$ als zweyter Theil des Quotienten ergiebt.

Zweytes Beyspiel. $aaa - bbb - abc - aac - bbc$ zu dividiren mit $a - b - c$.

$$
\begin{array}{l}
 \text{Quotient} \\
a - b - c)\; aaa - bbb - abc - aac - bbc \;(aa + ab + bb. \\
 \underline{aaa - aab \qquad\quad - aac} \\
 + aab - bbb - abc - bbc \\
 \underline{aab - abb - abc} \\
 abb - bbb - bbc \\
 \underline{abb - bbb - bbc} \\
 0
\end{array}
$$

Nachtrag von Aufgaben,

welche als Beyspiele zur Erläuterung der beyden letzten Abschnitte dienen.

---

* 97. Erstes Exempel. Drey Personen haben eine Summe von 1750 Rthlr. so zu theilen, daß der zweyte dreymal so viel, als der erste und außerdem noch 100 Rthlr. bekömmt, der dritte aber gerade halb so viel erhält, als der erste.

Zweytes Exempel. Vier Personen haben 2840 Rthlr. zu theilen, so daß der erste und vierte gleich viel erhalten, der zweyte soll halb so viel als der erste und außerdem 355 Rthlr. erhalten, und der dritte zwey Fünftel dessen, was der erste bekömmt und außerdem 426 Rthlr.

* 98. Alle ähnlichen Beyspiele sind in folgender allgemeinen Aufgabe enthalten. Eine Summe, die wir mit a bezeichnen, soll unter vier Personen so getheilt werden, daß der Antheil des zweyten bestehe aus dem m mal genommenen Antheile des erstern und aus einer zugelegten Summe $= b$; daß ferner der Dritte das n fache dessen erhält, was der erste bekam uud außerdem noch c; endlich der vierte die Summe des erstern Antheils p mal genommen und außerdem noch d.

Nennet man hier den unbekannten Antheil des erstern $= x$, so erhält

der erste die Summe $= x$,
der zweyte „ „ „ $= mx + b$,
der dritte „ „ „ $= nx + c$,
der vierte „ „ „ $= px + e$.

Diese vier Summen betragen zusammen

$$x + mx + nx + px + b + c + d,$$

oder $x(1 + m + n + p) + b + c + d$.

Da nun diese Summe $= a$ seyn soll, so hat man die Gleichung

$$x(1 + m + n + p) + b + c + d = a,$$

also $x(1 + m + n + p) = a - b - c - d$

und $x = \dfrac{a - b - c - d}{1 + m + n + p.}$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks oder dieser Formel kann man die beyden in Zahlen gegebenen Exempel leicht auflösen. Man hat z. B. im zweyten Exempel $a = 2840$, $b = 355$, $c = 426$ und $d = 0$; ferner $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{2}{5}$ und $p = 1$, daher

$$x = \frac{2840 - 355 - 426}{1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + 1} = \frac{2059}{2\frac{9}{10}},$$

das giebt $x = 710$,

und man findet, daß im zweyten Exempel alle Personen gleich viel erhalten.

* 99. Drittes Exempel. Man sucht zwey Zahlen, deren Summe $= 50$ und deren Differenz $= 17$ ist.

Viertes Exempel. Es sollen zwey Zahlen bestimmt werden, so daß das Doppelte der ersten, addirt zum Drittel der zweyten, 500 giebt, und daß das Siebenfache der erstern, abgezogen vom Zehnfachen der zweyten, 600 zum Reste läßt.

* 100. Allgemein lassen sich alle ähnliche Aufgaben so ausdrücken. Es sollen zwey Zahlen so be-

stimmt werden, daß, wenn man die erste m mal nimmt und dieses Product zum n fachen der zweyten addirt, eine gewisse Summe $=$ a herauskomme; und ferner, daß das p fache der erstern abgezogen von dem q fachen der zweyten einen Rest $=$ b lasse. Nennet man hier die erste Zahl x, die zweyte y, so hat man aus der Aufgabe die beyden Gleichungen:

$$mx + ny = a,$$
$$qy - px = b.$$

Ich multiplicire die erste Gleichung mit q, die zweyte mit n, so finde ich

$$mqx + nqy = aq,$$
$$- pnx + nqy = bn,$$

und wenn ich die letztere von der erstern abziehe

$$mqx + npx = aq - bn,$$

oder $x(mq + np) = aq - bn$,

das ist $x = \frac{aq - bn}{mq + np}$.

Da nun ferner nach der zweyten Gleichung

$$qy = b + px = b + \frac{apq - bpn}{mq + np},$$

oder, wenn man den letzten Theil ganz auf einerley Nenner bringt,

$$qy = \frac{bmq + bnp + apq - bnp}{mq + np},$$

folglich $y = \frac{bm + ap}{mq + np}$.

Im dritten Exempel war a $= 50$ und b $= 17$, aber m $= 1$, n $= 1$, p $= 1$, q $= 1$, folglich

$$x = \frac{50 - 17}{2} = 16\tfrac{1}{2}.$$

$$y = \frac{50 + 17}{2} = 33\tfrac{1}{2}.$$

* 101. Um die Allgemeinheit dieser Auflösung zu zeigen, will ich sie noch auf ein Beyspiel anwenden, wo eine der gesuchten Zahlen negativ wird.

Fünftes Exempel. Zwey Zahlen x und y so zu bestimmen, daß $7x + 5y = 604$, und $2x - 3y = 239$ ist.

Die Buchstaben des vorigen §. haben hier folgende Werthe: $a = 604$, $b = 239$, $m = 7$, $n = 5$, $p = -2$, $q = -3$, die letztern sind beyde negativ, weil wir hier nicht $qy - px = b$, sondern $px - qy = b$ haben, und es wird nun

$$x = \frac{-3 \cdot 604 - 5 \cdot 239}{-3 \cdot 7 \quad - 2 \cdot 5} = \frac{-1812 - 1195}{-21 \quad -10}$$

oder $x = \frac{-3007}{-31} = + 97.$

Hingegen

$$y = \frac{239 \cdot 7 - 604 \cdot 2}{-3 \cdot 7 - 2 \cdot 5} = \frac{1673 - 1208}{-31} = \frac{465}{-31} = -15.$$

Die beyden gesuchten Zahlen sind also $+97$ und -15.

Sechstes Exempel. Zwey Zahlen so zu bestimmen, daß ein Fünftel der einen addirt zum Zwölffachen der andern 50 beträgt, und daß man hingegen -50 erhält, wenn man das Vierfache der erstern vom Zweyfachen der andern subtrahirt.

Siebentes Exempel. Drey Zahlen zu bestimmen, deren Summe = 100, und wo die erste um 16 größer als die zweyte, die zweyte aber um 99 größer als die dritte ist.

Sechster Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzeln.

102. Erklärung. Wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt: so nennet man das Product, das Quadrat jener Zahl, oder ihre zweyte Potenz. Multiplicirt man das Quadrat einer Zahl mit der Zahl selbst: so erhält man den Cubus oder die dritte Potenz der Zahl; und so ferner die vierte Potenz einer Zahl, wenn man die dritte Porenz derselben mit der Zahl selbst multiplicirt u. s. w.

Beyspiel. Es ist also 4 das Quadrat oder die zweyte Potenz von 2; ferner 8 der Cubus oder die dritte Potenz von 2; 16 die vierte Potenz, 32 die fünfte Potenz von 2, u. s. w.

103. Erklärung. Umgekehrt versteht man unter der Quadratwurzel einer Zahl, diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, jene giebt.