Dritter Abschnitt.

Von den vier Rechnungs-Arten mit benannten Zahlen.

57. Erklärung. Im Vorigen haben wir die Zahlen immer nur bloß im Allgemeinen betrachtet, ohne uns bestimmte Dinge, welche abgezählt würden, zu denken, oder wir haben sie als unbenannte Zahlen betrachtet; wir werden jetzt die Anwendung der vorigen Sätze auf benannte Zahlen machen, das ist auf solche, welche sich auf bestimmte Maße, Gewichte u. s. w. beziehn.

58. Bemerkung. Die Rechnung mit benannten Zahlen würde sich in gar nichts von der Rechnung mit unbenannten Zahlen unterscheiden, wenn bey unsern Maßen, Münzen und Gewichten nicht überall Unterabtheilungen vorkämen, die wir mit eignen Namen bezeichnen; aber wegen dieses Umstandes kann es sich ereignen, daß wir Größen zu einander addiren müssen, die verschiedne Namen haben, (z. B. Pfunde zu Lothen), die aber als gleichartig anzusehn sind, weil die Größe, welche den einen Namen führt, ein bestimmter Theil oder ein bestimmtes Vielfaches der anders benannten Größe ist.

Um nun mit solchen benannten Zahlen zu rechnen, muß man diese Eintheilungen kennen, oder wissen, wie viele Ganze der kleinern Art ein Ganzes der größern Art ausmachen, z. B. wie viel Lothe auf ein Pfund gehen.

59. 20ste Aufgabe. Es sind mehrere gleichartige benannte Zahlen, die aber aus ungleich benannten Theilen bestehen können, gegeben; man soll die Summe derselben bestimmen.

Auflösung. 1. Man schreibe die Zahlen, wenn eine oder mehrere derselben aus ungleich benannten Theilen bestehn, so, daß vorne die Ganzen der größesten Art stehn, dahinter die nächst kleinern und dann die noch kleinern folgen, z. B. 5 Centner 97 Pfunde 13 Lothe. Auch setze man die gleich benannten Theile der zu addirenden Zahlen gerade unter einander.

2. Man fange mit der Summirung der vorhandenen Ganzen der kleinsten Art an. Beträgt die herauskommende Summe nicht so viel, als von diesen auf ein Ganzes der nächst größern Art gehen: so schreibt man sie sogleich als einen Theil der gesuchten Summe hin. Beträgt sie hingegen mehr: so sucht man, wie viele Ganze der nächst größern

Art in dieser Summe enthalten sind, und schreibt nur hin, wie viele Ganze der kleinsten Art man noch außerdem hat, behält aber im Sinne, wie viele Ganze der nächst größern Art man erhalten hatte.

3. Die im Sinne behaltne Anzahl von Ganzen der nächst größern Art zählt man zu dem, was außerdem in den zu addirenden Zahlen von derselben Art vorhanden ist, und überträgt, wenn es nöthig ist, wenn man nämlich mehrere Ganze dieser Art erhält, als ein Ganzes der nächst größern Art ausmachen, von dieser Summe auf diese nächst größere Art. Und so geht man alle Theile der gegebenen Zahlen ganz durch, wo man dann offenbar die richtige Summe findet.

Beyspiel. Das nebenstehende Exempel zeigt das ganze Verfahren, und es ist nur zu bemerken, das 1 Centner = 112 Pfund, 1 Pfund = 32 Loth ist.

	7 Centn.	57 Pf.	15 Loth
	19 Centn.	94 Pf.	30 Loth
		74 Pf.	9 Loth
Summe	28 Centn.	2 Pf.	22 Loth

60. 21ste Aufgabe. Zwey benannte Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. 1. Man schreibe die Zahlen so unter einander, wie in der vorigen Aufgabe; und zwar ist es gewöhnlich, die größere Zahl oben zu schreiben.

2. Sind nun die Zahlen so beschaffen, daß von jeder Art von Theilen in der größern Zahl mehrere vorhanden sind, als in der kleinern: so hat die Subtraction gar keine Schwierigkeit und man braucht bloß die gleich benannten Theile jeden für sich von einander zu subtrahiren und die Reste als Theile der gesuchten Zahl hin zu setzen.

3. Im entgegengesetzten Falle, wo die größere Zahl von irgend einer Art von Ganzen wenigere enthält als die kleinere Zahl, ist man genöthigt zu borgen. Man rechnet nämlich dann in der größern Zahl ein Ganzes von denen der nächst größern Art ab, und legt dafür der nächst kleinern Art so viele Ganze zu, als auf jenes Eine Ganze der größern Art gehn. Die fernere Subtraction hat dann keine Schwierigkeit.

Beyspiel. Von 25 Rthlr. 19 Ggr. 8 Pf. abzuziehen 19 Rthl. 23 Ggr. 4 Pf.

25 Rthlr.	19 Ggr.	8 Pf.
19 Rthlr.	23 Ggr.	4 Pf.
5 Rthlr.	20 Ggr.	4 Pf.

61. 4ter Lehrsatz. Bey jeder Multiplication muß wenigstens der Multiplicator eine unbenannte Zahl seyn.

Beweis. Da der Multiplicator angiebt, wie vielmal man eine andre Zahl nehmen oder zu sich selbst addiren soll: so ist es gewiß ungereimt, hierzu eine benannte Zahl gebrauchen zu wollen.

Anmerkung. Die Fälle, wo man, nach der gewöhnlichen Art zu rechnen, benannte Zahlen mit benannten Zahlen zu multipliciren glaubt, müssen eigentlich anders betrachtet werden, wie sich in der Folge zeigen wird.

62. 22ste Aufgabe. Eine benannte Zahl und eine unbenannte Zahl in einander zu multipliciren.

Erste Auflösung. Betrachtet man die unbenannte Zahl als Multiplicator, so multiplicirt man mit derselben jeden einzelnen verschieden benannten Theil der andern Zahl und es ist dabey nichts weiter zu bemerken, als daß man da, wo man von Ganzen einer kleinern Art mehrere erhält, als davon auf ein Ganzes der nächst größern Art gehen, von diesen gehörig auf die nächst größere Art überträgt, so wie in der 20sten Aufgabe nr. 2. und 3. angezeigt ist.

Zweyte Auflösung. Es kann zuweilen bequemer seyn, die benannte Zahl als Multiplicator anzusehn und dann lassen sich manchmal einige Erleichterungen der Rechnung anbringen, welche ich im folgendem Exempel erläutern will.

Soll man 10 Pfund 21 Loth mit 97589 multipliciren, so ist das Product gewiß ganz dasselbe, als wenn man

96589 Pfund mit $10\frac{21}{32}$ zu multipliciren hätte. Diese Multiplication läßt sich nach §. 41. verrichten; man kann aber bequemer den Bruch in Theile zerlegen und mit jedem Theile besonders multipliciren. Da nämlich $\frac{21}{32} = \frac{16}{32} + \frac{4}{32} + \frac{1}{32}$, oder $= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$, so kann man sehr bequem zuerst die Hälfte des Multiplicandus, dann das Viertel dieser Hälfte, das ist das Achtel des Multiplicandus, endlich das Viertel dieses Achtels, das ist den zwey und dreyßigsten Theil des Multiplicandus nehmen. Man hat also

$$10 \times 97589 = 975890 \text{ Pfund}$$
$$\tfrac{1}{2} \times 97589 = 48794\tfrac{1}{2} \text{ —}$$
$$\tfrac{1}{8} \cdot 97589 = \tfrac{1}{4} \times 48794\tfrac{1}{2} = 12198\tfrac{5}{8} \text{ —}$$
$$\tfrac{1}{32} \cdot 97589 = \tfrac{1}{4} \times 12198\tfrac{5}{8} = 3049\tfrac{21}{32} \text{ —}$$

$$\text{also } 10\tfrac{21}{32} \times 97589 = 1039932\tfrac{25}{32} \text{ Pfund}$$
$$\text{oder } = 1039932 \text{ Pfund } 25 \text{ Loth.}$$

60. Anmerkung. Dieses Zertheilen oder Zerstreuen der Brüche erleichtert oft die Rechnung sehr; es erfordert aber einige Uebung, um bey verschiednen Nennern und Zählern die vortheilhafteste Eintheilung der Brüche zur Erleichterung der Rechnung zu finden.

64. 5ter Lehrsatz. Bey der Division benannter Zahlen ist allemal entweder der Divisor oder der Quotient eine unbenannte Zahl.

Beweis. Bey der Division fragt man entweder, wie oft der Divisor im Dividendo enthalten sey, und in diesem Falle müssen beyde gleichartige Zahlen seyn, der Quotient aber wird eine unbenannte Zahl; oder man fragt, wie groß ein Theil des Dividendus werde, wenn man ihn in so viele Stücke theilt, als der Divisor angiebt, und hier ist offenbar der Divisor eine unbenannte, der Quotient aber eine mit dem Dividendus gleich benannte Zahl.

65. 23ste Aufgabe. Eine benannte Zahl durch eine benannte oder unbenannte Zahl zu dividiren.

Auflösung. Erster Fall. Ist der Divisor eine benannte Zahl: so ist es am bequemsten, Dividendus uud Divisor ganz auf einerley Namen zu bringen, nämlich statt der verschieden benannten Theile die gehörige Anzahl derjenigen Ganzen zu setzen, die unter den vorkommenden die kleinsten sind, indem man z. B. statt 7 Pfund 12 Loth, 236 Loth setzt. Alsdann geschieht die Division völlig wie bey unbenannten Zahlen.

Zweyter Fall. Wenn der Divisor eine unbenannte Zahl ist: so dividirt man mit demselben zuerst die Anzahl der vorhandenen Ganzen der größesten Art und erhält zum Quotienten Ganze derselben Art; den Rest verwandelt man in Ganze der nächst kleinern Art, und nimmt dazu was im Dividendo gleichartiges vorhanden ist und setzt die Division hier und bey den etwa noch vorhandenen kleinern Theilen eben so wie bey den größesten fort.

Beyspiel. Man soll 2579 Rthlr. 7 Ggr. 5 Pf. mit 16 dividiren. Von der größten Art hat man 2579, welche mit 16 dividirt, 161 Rthlr. geben und 3 Rthlr. zum Reste lassen. Diese 3 Rthlr. sind 72 Ggr., also mit den sonst noch vorhandenen 7 Ggr. zusammen 79 Ggr. Diese mit 16 dividirt, geben im Quotienten 4 Ggr. und zum Reste 15 Ggr. Da nun 15 Ggr. = 180 Pfennige, so beträgt der ganze Rest 185 Pfennige, und der letzte Theil des Quotienten $11\frac{9}{16}$ Pfennige. Der ganze Quotient ist demnach 161 Rthlr. 4 Ggr. $11\frac{9}{16}$ Pfennig.

Vierter Abschnitt.

Erste Grundlehren von den Gleichungen.

66. Erklärung. Jeder arithmetische Satz, welcher eine Gleichheit zwischen zwey verschiedenen Größen ausdrückt, heißt eine Gleichung.

Beyspiel. So ist also schon der Ausdruck $4 = 2 \cdot 2$; oder $7 = 5 + 2$, eine Gleichung. Indeß sind die Fälle, wo man eigentlich Gebrauch von Gleichungen macht, diejenigen, wo die gleichen Größen auf eine mehr verwickelte Art ausgedrückt sind, und wo eine unbekannte Größe durch eine solche gegebene Gleichung bestimmt werden soll.