Zweyter Abschnitt.

Von den Brüchen im Allgemeinen und von den Decimalbrüchen.

26. Erklärung. Wir haben bisher nur von ganzen Zahlen geredet, das ist von Zahlen, welche die Einheit mehrere male ganz, aber keine Theile derselben außerdem, enthalten; ihnen sind entgegengesetzt die gebrochnen Zahlen oder die Brüche, welche entweder bloß einige Theile des Ganzen, oder außer einigen Ganzen auch noch Theile des Ganzen enthalten.

27. Erklärung. Um einen Bruch auszudrücken bedarf man zweyer Zahlen, wovon die eine angiebt, was für Theile es sind, aus welchen der Bruch besteht, die andre aber, wie viel solcher Theile der Bruch enthält. Die erste heißt der Nenner, die zweyte der Zähler des Bruchs.

Was für Theile es sind, aus welchen der Bruch besteht, drückt man dadurch aus, daß man bestimmt, wie viel solcher Theile ein Ganzes machen. Der Nenner ist die Zahl, welche diese Anzahl angiebt.

Beyspiel. In dem Bruche zwey Fünftel ist zwey der Zähler und fünf der Nenner, und ein Fünftel ist ein solcher Theil, deren das Ganze fünf enthält.

28. Willkührlicher Satz. Man schreibt jeden Bruch so, daß man den Zähler in Ziffern oben, den Nenner in Ziffern darunter schreibt, und beyde durch einen Strich von einander absondert.

Beyspiel. Zwey Fünftel schreibt man $\frac{2}{5}$.

29. 5te Aufgabe. Wenn bey der Division zweyer ganzer Zahlen durch einander ein Rest übrig bleibt, (§. 23. nr. 6.), den Quotienten mit Hülfe eines Bruches völlig genau auszudrücken.

Auflösung. Man sucht zuerst den Quotienten in ganzen Zahlen, so wie vorhin angegeben ist, (§. 23.); hängt aber an denselben noch einen Bruch, dessen Zähler der zuletzt übrig bleibende Rest, der Nenner aber der Divisor ist.

Beweis. Die Division verlangt, daß man den Dividendus in so viele gleiche Theile eintheile, als der Divisor angiebt; ein solcher Theil ist der Quotient. Geht nun die Division auf, oder bleibt gar kein Rest übrig, so ist jener verlangte Theil in ganzen Zahlen genau ausgedrückt; bleibt hingegen ein Rest, so muß, eben so wie alle übrigen Theile des Dividendus eingetheilt sind, auch dieser noch eingetheilt werden. Diese Eintheilung aber wird gerade dadurch angedeutet, daß wir den Rest zum Zähler und den Divisor zum Nenner eines Bruches machen (§. 27.), und diesen dem Quotienten beyfügen.

Beyspiel. In §. 23. sollte der Dividendus in 27 Theile getheilt werden, nachdem man nun die übrigen Theile des Dividendus eingetheilt hat, bleiben noch 2 übrig; da nun 1 in 27 Theile getheilt, für jeden Theil $\frac{1}{27}$ giebt, so geben 2 so eingetheilt offenbar $\frac{2}{27}$, welche zum Quotienten noch hinzukommen.

30. Man könnte jede Division aus eben den Gründen ganz durch einen Bruch ausdrücken; denn z. B. 12 mit 6 dividirt, oder in 6 Theile getheilt, giebt $\frac{12}{6}$. Da man aber, wo es angeht, lieber mit ganzen Zahlen rechnet, als mit Brüchen, so setzt man statt $\frac{12}{6}$ besser 2; hätte man dagegen 11 mit 6 zu dividiren, so müßte man auf allen Fall einen Bruch beybehalten, man möchte nun $\frac{11}{6}$ oder $1\frac{5}{6}$ setzen.

31. 2ter Lehrsatz. Ein Bruch bleibt ungeändert, wenn man seinen Zähler und Nenner beyde mit einerley Zahl multiplicirt, oder auch beyde mit einerley Zahl dividirt.

Beweis. Wenn man, bey ungeändertem Zähler, den Nenner eines Bruchs vergrößert, so verringert man den Werth des Bruchs; denn je größer der Nenner ist, in desto mehr Theile ist das Ganze getheilt, und desto kleiner ist folglich jeder Theil; soll also der Bruch ungeändert bleiben, so muß man zugleich auch die Anzahl der Theile, das ist den Zähler vergrößern. Multiplicirt man nun den Nenner mit irgend einer Zahl, so werden die Theile so vielmal verkleinert, als diese Zahl angiebt; soll also der Bruch ungeändert bleiben, so muß die Anzahl der Theile eben so vielmal vergrößert werden, als die Theile selbst verkleinert sind, das ist, man muß den Zähler mit eben der Zahl multipliciren, mit welcher der Nenner multiplicirt ist. Bey der Division des Nenners hingegen werden die Theile vergrößert, z. B. auf das Doppelte, wenn nur halb so viele Theile auf das Ganze gehen sollen, als vorhin; soll also der Bruch ungeändert bleiben, so muß man auch wenigere dieser Theile nehmen, und zwar nur halb so viele, wenn die Theile doppelt so groß sind, und so in jedem ähnlichen Falle.

Beyspiel. Multiplicirt man den Bruch $\frac{5}{6}$ im Zähler und Nenner mit 3, so ist $\frac{15}{18}$ eben so viel als $\frac{5}{6}$, da man Achtzehntel erhält, wenn man jedes Sechstel in drey gleiche Theile zerlegt.

Auf ähnliche Weise verändert man durch die Division den Bruch $\frac{12}{16}$ in $\frac{6}{8}$ oder in $\frac{3}{4}$.

32. Jeder Bruch läßt sich also auf unzählich mannigfaltige Weise ausdrücken; z. B. folgende Brüche bedeuten alle einerley: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{24}{36}$, $\frac{200}{300}$, $\frac{128}{192}$ u. s. w.

33. Unter den Formen, worauf man einen Bruch, z. B. $\frac{4}{6}$, durch Division des Zählers und Nenners bringen kann, können auch solche wie folgende vorkommen: $\frac{1\frac{1}{3}}{2}$, das heißt ein Halbes und ein Drittel eines Halben; oder auch solche wie: $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$, das ist ein solcher Theil, deren das Ganze anderthalb enthält. Aber man vermeidet solche Brüche gern, wozu sich im Folgenden die Mittel finden.

34. 6te Aufgabe. Jeden gegebenen Bruch auf einen andern gegebnen Nenner zu bringen, der größer, als der Nenner des gegebnen Bruchs ist.

Auflösung. Die Aufgabe verlangt, daß man den Bruch, ohne seinen Werth zu verändern, so ausdrücke, daß er den gegebnen Nenner erhalte. Man untersuche deshalb, wie oft der Nenner des Bruchs in diesem neuen Nenner enthalten sey; mit der Zahl, welche man so findet, multiplicire man die Zähler des gegebnen Bruchs: so ist das herauskommende Product der Zähler des gesuchten neuen Ausdrucks für den Bruch.

Beyspiel. Den Bruch $\frac{7}{8}$ auf den Nenner 64 zu bringen. Da 8 in 64 achtmal enthalten ist, so nehme man 8 mal 7 zum Zähler des Bruchs und 64 zum Nenner; also ist $\frac{56}{64}$ der gesuchte Ausdruck.

Beweis. Da man auf diese Weise Zähler und Nenner des gegebnen Bruchs mit einerley Zahl multiplicirt: so bleibt der Bruch ungeändert (§. 31.), erhält aber zugleich den verlangten Nenner.

Anmerk. Wie man verfährt, wenn der neue Nenner kein genaues Vielfaches des ersten Nenners ist, ergiebt sich aus dem Folgenden.

35. Man könnte eben so gut jeden Bruch auf einen gegebnen Zähler bringen; aber dieses hat in der Anwendung keinen Nutzen. Sollte man z. B. $\frac{7}{8}$ so ausdrücken, daß der Zähler 49 würde, so erhielte man $\frac{49}{56}$.

36. 7te Aufgabe. Mehrere gegebene Brüche auf einerley Nenner zu bringen.

Erste Auflösung. Da man den Zähler und Nenner eines Bruches immer so auszudrücken wünscht, daß der Zähler so wohl als der Nenner bloß ganze Zahlen enthalte: so darf man zu dem gemeinschaftlichen Nenner nicht jede willkührliche Zahl wählen, sondern nimmt am sichersten zu diesem gemeinschaftlichen Nenner das Product aus allen Nennern der gegebnen Brüche. Hat man so den Nenner bestimmt: so findet man den Zähler jedes Bruchs nach der vorigen Aufgabe.

Beyspiel. Die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{7}$ auf einerley Nenner zu bringen. Das Product der Nenner ist 210, die Brüche sind also, wenn man sie auf diesen Nenner bringt, $\frac{42}{210}$, $\frac{175}{210}$, $\frac{90}{210}$.

Zweyte Auflösung. Die in der vorigen Auflösung angegebene Bestimmung des gemeinschaftlichen Nenners ist völlig allgemein, in allen Fällen anwendbar; man kann aber in einigen Fällen einen kleinern gemeinschaftlichen Nenner gebrauchen, und wo dies möglich ist, da thut man es lieber, weil sich mit Brüchen desto bequemer rechnen läßt, je kleiner der Nenner und folglich auch (bey gleichem Werthe des ganzen Bruchs) der Zähler ist. Wenn nämlich einige Nenner der gegebnen Brüche gemeinschaftliche Factoren haben, oder Producte sind aus Factoren, deren einer in mehrern dieser Nenner vorkommt: so braucht man zum gemeinschaftlichen Nenner nicht das Product aus allen Nennern zu nehmen, sondern man nimmt bloß das Product aller verschiedenen in den Nennern vorkommenden Factoren, da man hiedurch den Zweck in allen Zählern, bloß ganze Zahlen zu erhalten, schon erreicht. Ist der gemeinschaftliche Nenner gefunden, so sucht man die einzelnen Zähler, wie vorhin.

Beyspiel. Die Brüche $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{28}$, $\frac{5}{21}$ und $\frac{7}{36}$ auf einerley Nenner zu bringen. Da alle Nenner hier Producte ganzer Zahlen sind, nämlich 2 mal 4, 7 mal 4, 7 mal 3, und 3 mal 12; oder 3 mal 3 mal 4: so multiplicire man diese Factoren so in einander, daß man die in mehrern Nennern vorkommenden Factoren nur einmal in das Product aufnimmt, wodurch man also für den allgemeinen Nenner $2 \times 4 \times 7 \times 3 \times 3, = 504$ erhält. Dann sind die gegebnen Brüche in folgende verwandelt: $\frac{315}{504}$, $\frac{54}{504}$, $\frac{120}{504}$, $\frac{98}{504}$.

37. 8te Aufgabe. Mehrere gegebene Brüche zu einander zu addiren.

Auflösung. Man bringe alle gegebene Brüche auf einerley Nenner, addire die Zähler der auf einerley Nenner gebrachten Brüche zu einander, und mache diese Summe der Zähler zum Zähler, jenen gemeinschaftlichen Nenner aber zum Nenner eines Bruches. Dieser Bruch ist die gesuchte Summe der gegebnen Brüche.

Beweis. Da man nur gleichartige Größen addiren kann, so ist es nothwendig die Brüche auf einerley Nenner zu bringen; ist aber dieses geschehen: so bezeichnet der Nenner bloß, was für Dinge, was für Theile nämlich, es sind, die man addiren soll, die Zähler hingegen geben die Anzahl dieser Theile an. Addirt man also die Zähler zusammen, behält aber den Nenner bey: so hat man die Summe der Menge dieser Theile.

Beyspiel. Die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ zu addiren, diese Brüche sind $\frac{15}{30}$, $\frac{10}{30}$, $\frac{6}{30}$, also die Summe $\frac{15}{30} +$ $\frac{10}{30} + \frac{6}{30} = \frac{15 + 10 + 6}{30} = \frac{31}{30} = 1\frac{1}{30}$.

38. 9te Aufgabe. Zwey Brüche von einander zu subtrahiren.

Auflösung. Man bringe die Brüche auf einerley Nenner und subtrahire die dadurch bestimmten Zähler von einander: so ist die gesuchte Differenz ein Bruch, dessen Zähler die Differenz der Zähler der auf einerley Nenner gebrachten Brüche, und dessen Nenner jener gemeinschaftliche Nenner ist.

Der Beweis ist dem im vorigen §. geführten völlig ähnlich.

Beyspiel. Die Brüche $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{7}$ von einander zu subtrahiren. Diese Brüche geben, auf einerley Nenner gebracht, $\frac{7}{42}$ und $\frac{6}{42}$; die Differenz ist also $\frac{1}{42}$.

39. Erklärung. Man kann den Begriff der Multiplication auch auf Brüche anwenden, obgleich man dann nicht an ein wiederholtes Addiren denken darf. Die Multiplication verlangt nämlich, daß man eine Zahl so oft nehme, als durch eine zweyte Zahl angegeben wird; ist also diese zweyte Zahl ein Bruch, so heißt das offenbar, man soll nicht jene erstere Zahl mehrere male ganz nehmen, sondern solche Theile von ihr, wie die zweyte Zahl bestimmt.

Beyspiel. Die Zahl 3 ein Viertel mal nehmen, heißt den vierten Theil derselben nehmen; und eben so $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ mal nehmen, heißt die Zahl $\frac{2}{3}$ in fünf gleiche Theile zerlegen, und drey derselben wieder zusammen nehmen.

40. Zehnte Aufgabe. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.

Auflösung. Man multiplicirt den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl und macht dieses Product zum Zähler eines Bruches, dem man den Nenner des gegebnen Bruchs zum Nenner giebt. Dieses ist das gesuchte Product.

Beweis. Da man Theile von derselben Art beybehält, wie die Theile des gegebenen Bruches, die Anzahl dieser Theile aber so viel mal vervielfältigt, als die ganze Zahl, welche Multiplicator ist, verlangt, so ist einleuchtend die Multiplication richtig geschehn.

Beyspiel. $\frac{5}{16}$ mit 7 zu multipliciren. Man erhält $\frac{35}{16}$, das ist $2\frac{3}{16}$.

41. 11te Aufgabe. Eine ganze Zahl oder auch jeden Bruch mit einem Bruche zu multipliciren.

Auflösung. Erster Fall. Wenn der Multiplicandus eine ganze Zahl ist.

Man bilde einen Bruch, dessen Zähler das Product aus dem Zähler des gegebenen Bruchs in die ganze Zahl, und dessen Nenner der Nenner des gegebenen Bruches ist. Dieser Bruch ist das gesuchte Product.

Zweyter Fall. Wenn auch der Multiplicandus ein Bruch ist.

Man multiplicire den Zähler des Multiplicators in den Zähler des Multiplicandus, und den Nenner des Multiplicators in den Nenner des Multiplicandus: so ist das gesuchte Product ein Bruch, dessen Zähler jenes Product der beyden Zähler, und dessen Nenner das Product beyder Nenner ist.

Beweis. Den Beweis für den ersten Fall könnte man aus §. 18. herleiten; denn wenn es einerley ist, welchen der beyden Factoren man als Multiplicator betrachtet, so ist dieser Fall einerley mit dem in der vorigen Aufgabe aufgelös'ten Falle. Man kann aber den Beweis für diesen Fall auch leicht aus dem, welchen ich jetzt für den zweyten Fall mittheilen und an einem Beyspiele erläutern will, herleiten. Soll man z. B. $\frac{3}{7}$ mit $\frac{8}{13}$ multipliciren, so heißt das $\frac{3}{7}$ in 13 gleiche Theile eintheilen und 8 davon zusammen nehmen. Theilt man nun $\frac{1}{7}$ in 13 gleiche Theile, so erhält man Theile, deren 13 mal 7, das ist 91 ein Ganzes machen; ein solcher Theil, der dreyzehnte Theil eines Siebentels, ist also $\frac{1}{91}$, folglich der dreyzehnte Theil von 3 Siebenteln ist $\frac{3}{91}$, und endlich 8 solcher Theile zusammen sind $\frac{24}{91}$ oder $\frac{3 \cdot 8}{7 \cdot 13}$, wie der Regel in der Auflösung gemäß ist. Und was von diesem Beyspiele gilt, würde von jedem andern auch gelten.

42. **Zwölfte Aufgabe.** Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren.

Erste Auflösung. Man dividire den Zähler des Bruchs durch die gegebne ganze Zahl, und mache den Quotienten zum Zähler eines neuen Bruches, welchem man den Nenner des gegebnen Bruchs zum Nenner giebt. Der herauskommende Bruch zeigt an, wie oft die ganze Zahl in dem gegebenen Bruche enthalten sey, oder eigentlich was für Theile man erhält, wenn man den gegebenen Bruch so eintheilt, wie der Divisor verlangt.

Zweyte Auflösung. Man multiplicire den Nenner des gegebenen Bruchs mit der zum Divisor gegebenen ganzen Zahl, und mache dies Product zum Nenner eines Bruches, dessen Zähler mit dem Zähler des gegebenen Bruches einerley ist. Der gefundene Bruch ist der verlangte Quotient.

Beyspiel. Den Bruch $\frac{21}{26}$ mit 7 zu dividiren. Man findet den Quotienten nach der ersten Regel $\frac{3}{26}$, nach der zweyten Regel $\frac{21}{182}$, beyde Ausdrücke sind gleichbedeutend (§. 31.).

Beweis. Die Division verlangt, daß man den Dividendus in so viele gleiche Theile zerlege, als der Divisor angiebt, und die Größe eines solchen Theiles bestimme. Dieses thut man offenbar nach der ersten Regel, denn man behält Theile derselben

Art, wie sie der Dividendus enthält, und zerlegt, indem man den Zähler dividirt, die Anzahl der Theile, so wie der Divisor verlangt. Befolgt man dagegen die zweyte Regel: so zertheilt man, indem man den Nenner des Dividendus multiplicirt, jeden Theil des Dividendus in so viele Stücke, als der Divisor verlangt; offenbar also muß man von diesen so viel mal verkleinerten Stücken eben so viele nehmen, als der Dividendus enthielt.

Anmerk. Bey Brüchen, wo die Division des Zählers (nach der ersten Auflösung) nicht ohne Rest aufgeht, bedient man sich, um den Quotienten zu finden, lieber der zweyten Methode; hingegen ist die erste Methode vorzuziehen, wenn der Zähler des Dividendus durch den Divisor ohne Rest theilbar ist.

43. 13te Aufgabe. Einen Bruch mit einem Bruche zu dividiren.

Auflösung. Man bringe beyde Brüche auf einerley Nenner: so ist der gesuchte Quotient ein Bruch, dessen Zähler der so veränderte Zähler des Dividendus, und dessen Nenner der auf gleiche Weise veränderte Zähler des Divisors ist.

Beyspiel. $\frac{5}{11}$ mit $\frac{7}{13}$ zu dividiren. Bringt man diese Brüche auf einerley Nenner, so sind sie $\frac{65}{143}$ und $\frac{77}{143}$, der gesuchte Quotient ist also $\frac{65}{77}$.

Beweis. Wenn man die Brüche auf einerley Nenner gebracht hat: so ist offenbar der eine Bruch eben so oft in dem andern enthalten, als der Zähler von jenem in dem Zähler von diesem; denn gewiß sind z. B. $\frac{4}{7}$ das Doppelte von $\frac{2}{7}$, eben so wol als 4 das Doppelte von 2 ist. Da man nun die Division der beyden Zähler, wenn man sie als ganze Zahlen betrachtet, dadurch andeuten kann, daß man sie als Bruch (nach §. 30.) schreibt: so erhellt die Richtigkeit der Auflösung.

44. Man giebt gewöhnlich die Regel: man solle, um zwey Brüche durch einander zu dividiren, den Divisor umkehren, oder seinen Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler machen, und den so veränderten Divisor in den Dividendus (nach §. 41.) multipliciren. Diese Regel kommt mit der hier gegebenen auf eins hinaus. In dem Beyspiele des vorigen §. hatte man nämlich zum Dividendus $\frac{5}{11}$, zum umgekehrten Divisor $\frac{13}{7}$, und $\frac{5}{11}$ mit $\frac{13}{7}$ multiplicirt giebt $\frac{65}{77}$, wie dort für den Quotienten.

45. Man kann die letztere Aufgabe leicht auf den Fall anwenden, da der Dividendus eine ganze Zahl ist. In diesem Falle nämlich kann man den Dividendus leicht in einen Bruch verwandeln, dessen Nenner mit dem Nenner des Divisors einerley ist.

Beyspiel. Man soll 18 mit $\frac{6}{25}$ dividiren. Da 18 einerley ist mit $\frac{450}{25}$: so ist der Quotient $\frac{450}{6}$, das ist 75. Der Bruch $\frac{6}{25}$ ist also in 18, 75 mal enthalten.

* 46. 14te Aufgabe. Einen Bruch, ohne daß sein Werth geändert wird, durch die möglichst kleinsten Zahlen im Zähler und Nenner auszudrücken.

Auflösung. Man bringt einen Bruch, ohne seinen Werth zu ändern, auf kleinere Zahlen, wenn man Zähler und Nenner mit einerley Zahl dividirt. Da es aber oft Schwierigkeit hat, anzugeben, ob es Zahlen giebt, durch welche der Zähler sowol als der Nenner sich ohne Rest dividiren lassen: so dienen zu Bestimmung des größten möglichen Divisors folgende Regeln:

1. Man dividire die größere Zahl durch die kleinere, ohne darauf zu sehen, welche von beyden Nenner oder Zähler ist, und bemerke sich den Rest, welchen ich den ersten Rest nennen will. Bleibt hier kein Rest, so ist die kleinere Zahl selbst der gesuchte Divisor.

2. Hat man vorhin einen Rest behalten: so dividire man die kleinere Zahl durch diesen ersten Rest und bemerke den hier übrig bleibenden zweyten Rest; giebt es aber keinen zweyten Rest, oder geht diese Division auf, so ist der erste Rest der gesuchte Divisor.

3. Ist ein zweyter Rest geblieben, so dividire man den ersten Rest durch den zweyten Rest und bemerke den dritten, hier bleibenden Rest; bleibt hier kein Rest, so ist der zweyte Rest der gesuchte Divisor.

4. Und so fahre man fort den zweyten Rest durch den dritten, den dritten durch den vierten und

so ferner zu dividiren, bis endlich eine dieser Divisionen aufgeht, dann ist der zuletzt gefundene Rest der gesuchte größte Divisor, welchen es für die beyden gegebenen Zahlen giebt.

Beyspiel. Den Bruch $\frac{5145}{5943}$ durch die möglichst kleinsten Zahlen auszudrücken. — 5943 mit 5145 dividirt, läßt 798 zum ersten Reste; 5145 mit 798 dividirt, läßt 357 zum zweyten Reste; 798 mit 357 dividirt, läßt 84 zum dritten Reste; 357 mit 84 dividirt, läßt 21 zum vierten Reste; endlich 84 mit 21 dividirt, geht auf. Also ist 21 der gesuchte Divisor, und es ist $\frac{5145}{5943} = \frac{245}{283}$.

Beweis. Daß die so gefundene Zahl wirklich in beyden Zahlen aufgeht, erhellt aus folgendem: Geht die erste Division auf, so braucht es nicht bewiesen zu werden, daß die kleinere Zahl selbst der gesuchte Divisor ist. Bleibt aber hier (in nr. 1.) ein Rest, so kann man die größere Zahl als aus zwey Theilen bestehend betrachten, aus einem Vielfachen der kleinern Zahl und diesem ersten Reste. Geht nun die zweyte Division auf (nr. 2.), so ist eben darum die kleinere Zahl ein genaues Vielfaches des ersten Restes; aber auch die größere Zahl ist dann durch diesen Rest theilbar, denn ihr erster Theil ist ein Vielfaches des kleinern, und also durch alle die Zahlen theilbar, welche in dieser aufgehen, und ihr zweyter Theil ist der erste Rest selbst; beyde Theile der größern Zahl, und folglich auch diese ganze Zahl, lassen sich also dann durch den ersten Rest dividiren. Findet der dritte Fall (nr. 3.) statt, daß bey der dritten Division kein Rest bleibt, so ist der erste Rest ein Vielfaches des zweyten, und die kleinere Zahl, welche aus einem Vielfachen des ersten Restes und aus dem zweyten Reste besteht, ebenfalls durch den zweyten Rest divisibel, und folglich endlich beyde Theile der größern Zahl und also auch diese selbst durch den zweyten Rest theilbar. Und so läßt sich immer der Beweis führen, daß der letzte Rest ein gemeinschaftlicher Divisor für beyde Zahlen ist.

Daß aber dieser gemeinschaftliche Divisor zugleich auch der größte ist, welchen es für jene beyden Zahlen giebt, wollen wir nur für den Fall nr. 2. beweisen, da die zweyte Division aufgeht; die Anwendung auf die übrigen Fälle ist dann nicht sehr schwer.

In diesem Falle ist die kleinere Zahl ein Vielfaches des ersten Restes und die größere besteht aus einem Vielfachen der kleinern Zahl und aus eben dem ersten Reste. Nun gehen zwar alle Zahlen, die in der kleinern Zahl aufgehen, auch in dem ersten Theile der größern auf; aber unter diesen verschiedenen möglichen Divisoren wird es vielleicht nur wenige geben, welche zugleich in dem zweyten Theile der größern Zahl oder im ersten Reste aufgehen, gewiß aber giebt es keinen größern gemeinschaftlichen Divisor für beyde Theile der größern Zahl, als den ersten Rest selbst, und dieser ist folglich auch der größte gemeinschaftliche Divisor der beyden zuerst gegebenen Zahlen.

Von den Decimalbrüchen.

47. Erklärung. Decimalbrüche nennt man alle Brüche, deren Nenner bloß aus einer Eins mit angehängten Nullen besteht, oder deren Nenner 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. ist.

Beyspiele. $\frac{9}{10}$, $\frac{25}{1000}$, $\frac{175}{100000}$, $\frac{27358}{1000}$.

48. 3ter Lehrsatz. Jeden Decimalbruch, der im Zähler mehr als eine Ziffer hat, kann man als Summe mehrerer Decimalbrüche ausdrücken, deren jeder im Zähler nur eine Ziffer hat.

Beweis. Ein solcher Bruch, wie $\frac{725}{10000}$, ist offenbar die Summe von $\frac{7}{100}$, $\frac{2}{1000}$ und $\frac{5}{10000}$, und man kann sich leicht überzeugen, daß eine solche Zerfällung des Bruches allemal statt findet.

49. Hat man also eine ganze Zahl mit angehängtem Decimalbruche, z. B. $27\frac{9758}{10000}$, so ist diese $= 27 + \frac{9}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{8}{10000}$. Die Nenner aller dieser Brüche sind durch nichts von einander verschieden, als durch die Menge der Nullen, welche nach der Eins folgen, und deshalb ist es möglich, sie ganz ohne Nenner zu schreiben, und ihren Werth oder den Nenner, welcher ihnen zukömmt, auf andere Weise anzudeuten.

50. Willkührlicher Satz. Wenn man eine ganze Zahl mit angehängtem Decimalbruche hat, und der letztere in seine einfachen Theile zerlegt ist: so schreibe man die ganze Zahl auf die gewöhnliche Weise und mache hinter derselben ein Comma; hinter das Comma setze man in derselben Zeile den Zähler der Zehntheile, gleich dahinter den Zähler der Hundert-

theile, dann den Zähler der Tausendtheile u. s. w., so daß also jede folgende Ziffer immer einen zehnfach geringern Werth hat, als die nächst vorhergehende.

Beyspiel. Die Zahl $325\frac{275807}{1000000}$ ist also = 25, 275807.

Die Zahl $7\frac{25}{10000}$ ist = 7, 0025, weil es hier keine Zehntel und Hunderttel giebt, also in deren Stellen Nullen kommen.

Hätte man gar keine ganze Zahl, sondern z. B. $\frac{375}{1000}$, so würde man schreiben 0, 375; und hier ist die voranstehende Null nicht überflüssig, da man ohne sie den Ort, wo das Comma stehen muß, oder wo die Brüche anfangen, nicht anzeigen könnte, und folglich den Werth der Ziffern unbestimmt ließe.

Man kann so gar mehr als eine Null vorn anzusetzen genöthigt seyn, wenn man z. B. $\frac{3}{100000}$ ausdrücken soll, wofür man schreibt: 0, 00003. Dagegen sind hinter dem Comma angehängte Nullen eben so bedeutungslos, als bey ganzen Zahlen vorn an stehende Nullen.

51. 15te Aufgabe. Jeden gegebenen Bruch in Decimalbrüchen, so genau als es verlangt wird, auszudrücken.

Auflösung. Obgleich nicht jeder Bruch sich völlig genau in Decimalbrüchen ausdrücken läßt:

so kann man ihn doch allemal so genau durch dieselben ausdrücken, als es in jedem Falle verlangt wird. Daher

1. überlege man zuerst, wie genau der Bruch ausgedrückt werden soll, ob es z. B. hinlänglich ist, wenn der gefundene Decimalbruch nur nicht um mehr als $\frac{1}{10000}$, oder als $\frac{1}{100000}$ u. s. w. von dem wahren Werthe des gegebenen Bruches abweicht.

2. Hat man so bestimmt, bis zu was für Decimaltheilen genau man den Bruch ausdrücken will: so nehme man den Nenner solcher Bruchtheile zum Nenner des gesuchten Bruchs, und

3. verfahre dann völlig wie in der sechsten Aufgabe (§. 34.).

Beyspiel. Den Bruch $\frac{1}{7}$ in Decimalbrüchen bis auf $\frac{1}{1000000}$ genau auszudrücken. Man findet $\frac{1}{7} = 0,142857$. Eigentlich ist $\frac{1}{7} = \frac{142857\frac{1}{7}}{1000000}$; der vorige Ausdruck ist also nur um ein Siebentel eines Milliontheilchens fehlerhaft.

52. Anmerkung. Es kann beym ersten Anblicke zwar scheinen, als ob diese Verwandlung der gewöhnlichen Brüche in Decimalbrüche nicht vortheilhaft sey, da man sie nur selten völlig genau in Decimalbrüchen ausdrücken kann; aber wenn man bedenkt, daß man ohne sonderliche

Schwierigkeit den Ausdruck noch bis auf viel kleinere Theile genau machen kann, und dann die Unannehmlichkeit betrachtet, welche bey andern Brüchen statt findet, wenn man viele auf einerley Nenner bringen muß, so wird man bald die Bequemlichkeit des Gebrauchs der Decimalbrüche anerkennen.

53. 16te Aufgabe. Mehrere gegebene Decimalbrüche zu einander zu addiren.

Auflösung. 1. Man schreibe alle diese Brüche auf die vorhin (§. 50.) angegebene Weise, und setze sie so unter einander, daß die Commata und folglich auch alle Einer, alle Zehntheile, alle Hunderttheile u. s. w. gerade über einander stehn.

2. Man addire die gerade über einander stehenden einzelnen Ziffern völlig so, wie man es bey ganzen Zahlen macht, und übertrage die Vielfachen von zehn, die man an irgend einer Stelle erhält, gerade wie dort, auf die nächst höhere Stelle.

3. Wenn die Addition vollendet ist, setze man das Comma hinter die Summe der Einer; die herauskommende Zahl ist die gesuchte Summe.

Beyspiel. Die Zahlen 5, 0072; 0, 51 und 307, 405376 zu addiren.

5, 0072
0, 51
307, 405376
312, 922576

Eines Beweises werden diese Regeln nicht bedürfen, da der Beweis völlig auf denselben Gründen beruht, wie bey der Addition ganzer Zahlen.

54. 17te Aufgabe. Zwey in Decimalbrüchen gegebene Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. 1. Man setze wieder die Zahlen so unter einander, daß die Ziffern von einerley Art gerade über einander stehen. Haben die Zahlen nicht beyde gleich viele Ziffern hinter dem Comma: so hänge man der einen so viele Nullen an, bis die Menge der hinter dem Comma stehenden Ziffern bey beyden gleich ist.

2. Die Subtraction verrichte man völlig, wie bey ganzen Zahlen, und

3. setze man das Comma im gefundenen Reste dicht hinter die Differenz der Einer.

Beyspiel. $\frac{7}{3295}$ von $\frac{43}{409}$ zu subtrahiren.

Jene Brüche lassen sich bis auf $\frac{1}{10000000}$ genau durch nebenstehende Decimalbrüche ausdrücken, wo man dann die Differenz leicht findet. Hätte man die Brüche auf gewöhnliche Weise subtrahirt, so würde man erhalten haben: $\frac{138822}{1347655}$.

$$\begin{array}{r} 0,\ 1051344 \\ 0,\ 0021244 \\ \hline 0,\ 10301 \end{array}$$

55. 18te Aufgabe. Zwey Zahlen, welche Decimalbrüche enthalten, in einander zu multipliciren.

Auflösung. 1. Man verrichte die Multiplication völlig so, als wenn die Zahlen ganze Zahlen wären, ohne irgend Rücksicht auf das Comma zu nehmen.

2. Nach vollendeter Multiplication setze man im Producte das Comma so, daß so viele Ziffern des Productes hinter dem Comma stehen, als sich in beyden Zahlen zusammen hinter dem Comma befinden, oder als die Summe der Ziffern hinter dem Comma in beyden Zahlen beträgt.

Beyspiel. 5, 73 mit 0, 00075 zu multipliciren.

$$
\begin{array}{r}
5,\ 73 \\
0,\ 00075 \\
\hline
2865 \\
4011 \\
\hline
0,\ 0042975
\end{array}
$$

Hier kommen sieben Ziffern des Productes hinter dem Comma, weil im einen Factor zwey, im andern fünfe hinter demselben sind.

Beweis. Daß man zuerst bey der Multiplication völlig so verfährt, wie bey ganzen Zahlen, ist offenbar richtig, da der Werth der einzelnen Ziffern gerade so wie dort in jeder nächsten Stelle zehnfach höher ist, als in der nächst niedrigern. Indeß läßt sich die Richtigkeit auch der zweyten Regel sehr leicht übersehen, wenn man die Brüche mit ihren Nennern schreibt. Denn alsdann ist der Zähler das Product beyder Zähler, welche nun offenbar (wie in der Regel nr. 1.) als ganze Zahlen (§. 41.) multiplicirt werden; der Nenner aber ist das Product beyder Nenner, und enthält nun hinter der Eins so viele Nullen, als die Anzahl der Nullen in beyden andern Nennern zusammen beträgt. Da nun, wenn man das Product ohne Nenner schreibt, eben so viele Ziffern hinter dem Comma stehen müssen, als der Nenner Nullen enthielt: so erhellet auch die Richtigkeit der vorigen Regel.

Im vorigen Beyspiele würde man finden: $\frac{573}{100}$ multiplicirt mit $\frac{75}{100000} = \frac{42975}{10000000}$.

56. 19te Aufgabe. Zwey Zahlen, welche Decimalbrüche enthalten, durch einander zu dividiren.

Auflösung. 1. Da der Zweck dieser Division ist, auch den Quotienten in Decimalbrüchen ausgedrückt zu erhalten, und man nur selten annehmen darf, daß die Division aufgehen werde: so überlege man zuerst, bis zu was für Theilen genau man den Quotienten ausgedrückt zu haben verlangt.

2. Man gebe den Dividendus, wenn er nicht schon ohnehin so viele Ziffern hinter dem Comma hat, durch hinten angehängte Nullen so viele Ziffern hinter dem Comma, als die Zahl von Ziffern hinter dem Comma im Divisor, zusammengenommen mit der Zahl der Nullen im Nenner des Decimaltheils beträgt, bis zu welchem genau der Quotient bestimmt werden soll.

3. Die Division verrichte man völlig so, wie bey ganzen Zahlen.

4. Endlich setze man im Quotienten das Comma so, daß die Anzahl der Ziffern hinter dem Comma im Quotienten gleich ist dem Unterschiede zwischen der Menge von Ziffern, die sich in dem nach nr. 2. veränderten Dividendus, und die sich im Divisor hinter dem Comma befinden.

Beyspiel. 579, 03 mit 0, 07 zu dividiren. Wollte man sich hier begnügen, den Quotienten bloß in ganzen Zahlen auszudrücken und alle Brüche wegzulassen: so hätte man nicht nöthig, die in nr. 2. erwähnte Veränderung mit dem Dividendus vorzunehmen. Man erhielte dann den Quotienten = 8271, wo aber noch Brüche hinzukommen müßten. Soll hingegen der Quotient bis auf $\frac{1}{1000}$ genau gefunden werden, so muß man 57903000 mit 7 dividiren, und erhält, wenn man das Comma nach nr. 4. gehörig setzt, 8271, 857 zum Quotienten.

Beweis. Der Beweis für die gegebenen Regeln beruht auf dem, was im Allgemeinen von Division der Brüche (§. 43.) und von Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche (§. 51.) gelehrt ist. Schreibt man nämlich die zu dividirenden Decimalbrüche mit ihren Nennern, und bringt sie auf einerley Nenner, z. B. im vorigen Exempel $\frac{57903}{100}$ und $\frac{7}{100}$: so ist der Quotient $\frac{57903}{7}$; und wenn man diesen Bruch (nach §. 51.) auf einen Decimalbruch bringt, so ergiebt sich eben das Resultat, wie vorhin.

Uebungs-Exempel. Zu addiren 57, 98594; 0, 782 und 0, 0000743.

Folgende Brüche auf Decimalbrüche zu bringen und zu addiren: $\frac{7}{9}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{18}{302}$, $\frac{15}{419}$.

Folgende Brüche auf Decimalbrüche zu bringen und von einander zu subtrahiren: $\frac{4}{1954}$ von $\frac{517}{3712}$; $\frac{29}{3274}$ von $\frac{1}{23}$; und $\frac{394}{516}$ von 5, 7348290.

Folgende Zahlen in einander zu multipliciren: 35, 070842 in 0, 0007589; 38947, 3 in 5, 0000072; 0, 005432 in 0, 00000076.

Endlich folgende Zahlen durch einander zu dividiren: 7, 485764 durch 0, 00573421; 0, 00005 durch 27, 5437; 29, 00567321 durch 123, 456789; und 0, 57 durch 1009, 00027.