Die
Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Vom Gebrauche der Ziffern und den vier einfachen Rechnungsarten.

1. Erklärung. Die Begriffe von Einheit und Vielheit gehören so sehr zu den ursprünglichsten und einfachsten Begriffen, daß sie fast eben so wenig einer Erklärung fähig, als derselben bedürftig scheinen. Eine Zahl aber ist eine bestimmte Vielheit.

2. Erklärung. Die Arithmetik oder Rechenkunst lehrt, aus bekannten Zahlen nach gewissen Regeln andre Zahlen herleiten; und diese Ableitung unbekannter Zahlen aus bekannten nach bestimmten Regeln heißt: rechnen.

3. Erklärung. Um rechnen zu lernen, muß man zuvor zählen können. Zählen aber

heißt, eine gegebene Zahl um Eins vergrößern und diese neue Zahl mit einem eignen Namen bezeichnen; man zählt also weiter fort, wenn man zu dieser zweyten Zahl wieder Eins hinzufügt und der neuen Zahl abermals ihren Namen giebt u. s. w.

Anmerk. Die Namen der Zahlen sind willkührlich und ich kann sie hier als bekannt annehmen. Fange ich nämlich von Eins an zu zählen: so ist Eins und Eins, zwey; zwey und Eins, drey; drey und Eins, vier u. s. w.

4. Erklärung. Die einfachsten Operationen, die man mit Zahlen vornehmen kann, sind, daß man entweder zwey Zahlen zusammen vereinigt, das ist, eine Zahl sucht, die beyden zusammengenommen gleich ist; oder daß man den Unterschied zweyer Zahlen sucht, das heißt, bestimmet, um wie viel mal Eins die eine größer ist, als die andre. Das erste heißt: addiren, das zweyte: subtrahiren.

Anmerk. Das Zählen selbst ist schon ein Addiren, wo man nämlich eine gegebene Zahl mit der Zahl Eins zusammen nimmt.

5. Erklärung. Das Addiren besteht eigentlich darin, daß man zwey oder mehrere Zahlen zusammenzählt; das Subtrahiren kann man als ein Rückwärtszählen betrachten.

Beyspiel. Man soll zu fünfen sieben addiren. Man kann die fünf

* * * * *
* * * * * * *

durch eine Reihe von Zeichen, die sieben durch eine zweyte Reihe von Zeichen darstellen und nun alle diese Zeichen zusammenzählen: so findet man zwölfe als die gesuchte Zahl. Sollte man hingegen fünfe von sieben subtrahiren, so streiche man in der letztern Reihe fünf Zeichen weg, und es bleiben dann zwey.

Anmerk. Wenn man zu einer Zahl eine gleiche Zahl addirt, so erhält man ihr Zweyfaches, addirt man noch einmal dieselbe Zahl, so bekömmt man ihr Dreyfaches, und überhaupt wenn man einerley Zahl mehrmals zu ihr selbst addirt, ihr Vielfaches.

6. Erklärung. Die Zahl, welche aus der Addition mehrerer Zahlen entsteht, heißt ihre Summe oder Aggregat; daher sagt man auch summiren, statt addiren.

Die Zahl, welche bey der Subtraction übrig bleibt, heißt die Differenz oder der Unterschied der beyden gegebenen Zahlen, auch wohl der Rest.

7. Willkührliche Sätze. Um mit Bequemlichkeit zu rechnen bedarf man der Zahl-Zeichen oder Ziffern, welche willkührlich sind. Man versteht den Gebrauch der bey uns üblichen Ziffern am besten, wenn man auf die Art achtet, wie die Namen der Zahlen bey uns gewählt sind. Wir zählen nämlich von eins bis zehn mit einfachen, von einander unabhängigen Zahl-Namen; fahren dann aber so fort,

daß wir zu zehn wieder jene einfachen Zahl-Namen hinzufügen, z. B. dreyzehn; so zählen wir fort bis neunzehn, dann aber haben wir statt zehn und zehn oder zweymal zehn den Namen zwanzig und fahren mit ein und zwanzig fort, bis wir an zehn und zwanzig oder dreymal zehn kommen, wo wir dreyßig sagen. Auf ganz ähnliche Weise zählen wir bis neun und neunzig; für die dann folgende Zahl aber, welche zehn mal zehn ist, haben wir den ganz neuen Namen: einhundert. Zu einhundert fügen wir ferner im Fortzählen alle vorigen Zahl-Namen von einhundert und eins bis einhundert und neun und neunzig hinzu und kommen dann auf zweyhundert, wo es wieder eben so, und so ferner fort geht, bis neunhundert neun und neunzig. Die folgende Zahl, zehnhundert, heißt: eintausend. Das weitere Fortzählen, wie wir von eintausend und eins bis eintausend neunhundert neun und neunzig, ferner bis zweytausend, dreytausend, zehntausend und endlich bis hunderttausend kommen, ist nun leicht zu übersehen, und so geht es auch weiter noch fort, bis wir an die Zahl tausend mal tausend kommen, wofür wir den neuen Namen: eine Million haben. Zu einer Million fügen wir wieder alle vorigen Zahl-Namen, erhalten dann zwey Millionen u. s. w. und haben erst für die Zahl: tausend mal tausend Millionen den neuen Namen: eine Billion; und so endlich für tausend mal tausend Billionen den

Namen: eine Trillion; für tausend mal tausend Trillionen den Namen: eine Quadrillion u. s. w.

8. Willkührlicher Satz. Diesen an sich willkührlichen Namen entsprechen unsre Ziffern, die wir nach folgendem Gesetze gebrauchen:

Man bezeichnet die neun ersten Zahlen nach der Reihe mit folgenden einfachen Zeichen: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. die Zehn aber mit 10, zweymal zehn oder zwanzig mit 20 und so mit 30, 40 u. s. w. die verschiedenen Vielfachen von zehn. Die dazwischen fallenden Zahlen bezeichnet man dadurch, daß man statt der Null die Ziffer schreibt, welche angiebt, um wie viel diese Zahl das nächst niedrigere Vielfache von zehn übertrifft, z. B. neun und zwanzig, 29.

Für die Zahl einhundert bedienen wir uns, (wie auch die vorigen Regeln schon vermuthen lassen,) dreyer Ziffern, wir schreiben nämlich 100, und setzen für einhundert und eins u. s. w. in die letzte Stelle die gehörige einfache Ziffer; von einhundert und zehn an aber statt beyder Nullen die Ziffern, welche den Ueberschuß über einhundert angeben. Ferner bezeichnet 200, zweyhundert; 300, dreyhundert u. s. w.; 1000 aber eintausend. Bey weiterem Fortzählen schreiben wir das Zeichen der Zahl, welche zu eintausend hinzukömmt, in die Stelle der letzten Nullen, daher wir, so lange die Zahl die eintausend nicht um einhundert übertrifft, eine Null dicht hinter der eins beybehalten, z. B. in eintausend und funfzehn, 1015. Man übersieht nun leicht, daß zweytausend, 2000; zehntausend, 10000; zwanzigtausend, 20000; hunderttausend, 100000; eine Million, 1000000, geschrieben wird; in Rücksicht aller übrigen zwischen diese fallenden Zahlen aber gilt die Regel, daß man vorn an, die Ziffer oder die Ziffern schreibt, welche das nächst niedrigere Vielfache von tausend, von einer Million u. s. w. ausdrücken, dann aber immer statt der letzten Nullen die Ziffern, welche die hinzukommende Zahl bezeichnen.

Beyspiel. Neunzehn Millionen und fünf und zwanzig tausend und siebzehn wird geschrieben: 19025017.

9. Erläuterung. Jede Ziffer erhält also nach der Verschiedenheit der Stelle ihre Bedeutung; sie bedeutet Einfache oder Einer, wenn sie gar keine Ziffer rechts neben sich hat; sie bedeutet Vielfache von zehn oder Zehner, wenn ihr eine; Vielfache von Hundert oder Hunderter, wenn ihr zwey; Vielfache von Tausend oder Tausender, wenn ihr drey Ziffern folgen; und ferner Vielfache von zehntausend, wenn ihr vier; Vielfache von hunderttausend, wenn ihr fünf; Millionen, wenn ihr sechs; und endlich Billionen, wenn

ihr zwölf; Trillionen, wenn ihr achtzehn Ziffern folgen.

Beyspiel. Die Zahl $18'''446744''073709'551615$ wo die übergeschriebenen Zeichen als bequeme Abtheilungen beym Ablesen dienen, wird ausgesprochen: Achtzehn Trillionen, vierhundert sechs und vierzig tausend und siebenhundert und vier und vierzig Billionen, drey und siebenzig tausend siebenhundert und neun Millionen, und fünfhundert ein und funfzig tausend, sechshundert und funfzehn.

Anmerk. Das Schreiben der Zahlen mit Ziffern und das Aussprechen gegebner, mit Ziffern geschriebner Zahlen muß an zahlreichen Beyspielen geübt, auch durch mundliche Erlauterungen des Lehrers faßlich gemacht werden. Um die Schüler an den verschiednen Werth zu gewöhnen, welchen die Ziffern nach ihrer Stelle erhalten, dienen vorzuglich auch Aufgaben, wie die folgende: Man soll die höchste Zahl und die kleinste Zahl angeben, die mit den Ziffern 5, 7, 3, 9 geschrieben werden können? — Die höchste ist 9753, die niedrigste 3579.

10. Erste Aufgabe. Es sind zwey oder mehrere Zahlen gegeben, man soll die Summe derselben finden.

Auflösung. 1. Man schreibe die in Ziffern gegebnen Zahlen so unter einander, daß die Einer gerade unter einander stehen und eben so auch die Zehner, die Hunderter, die Tausender u. s. w. gerade unter einander zu stehen kommen.

2. Man fange die Addition damit an, daß man die Einer zusammenzählt. Beträgt die Summe derselben weniger als zehn, so schreibt man die gefundne Zahl sogleich unter den Einern hin; ist diese Summe aber größer als zehn, so bemerke man sich zwar, wie vielmal zehn die Summe enthält, schreibe aber unter den Einern nur hin, wie viele Einer außer jenen Vielfachen von zehn vorhanden sind.

3. Eben so, wie man die Einer zusammen gezählt hat, zähle man nun auch die Zehner zusammen und nehme dazu noch die aus der Summe der Einer vorhin angemerkten Vielfachen von zehn. Erhält man auf diese Weise weniger als zehn Zehner, so schreibt man sie sogleich unter die Zehner hin; sind es aber mehr als zehn, so behält man wieder die Vielfachen von zehn besonders, und schreibt an jener Stelle nur hin, wie viele Zehner man ausser diesen Vielfachen von zehn hat.

4. Man wiederhohlt dasselbe Verfahren bey den Hundertern, zu welchen man auch so viel hinzuzählt, als man an Zehnern Vielfache von zehn erhalten hat. Und so geht man zu den Tausendern u. s. w. fort, bis man die Zahlen ganz addirt hat.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird sich am deutlichsten in der Anwendung auf ein

Beyspiel zeigen lassen. Die nebenstehenden Zahlen sind schon so geordnet, wie in nr. 1. verlangt wird. Der Grund dieser Anordnung ist offenbar, da man (Einl. §. 4.) nur gleichartige Größen zusammenzählen kann. Der Bequemlichkeit wegen zieht man unter den zu addirenden Zahlen einen Strich, um sie von der zu findenden Summe abzusondern.

$$
\begin{array}{r}
574093 \\
49854 \\
973 \\
7858437 \\
\hline
8483357
\end{array}
$$

Die eigentliche Operation des Addirens besteht nun darin, daß man alle einzelnen Theile der Zahlen zusammen zählt und diese Summen der Theile wieder in *eine* Zahl vereinigt. Dieses muß zu einem richtigen Resultate führen, da *die Summen aller Theile mehrerer Zahlen offenbar der Summe der ganzen Zahlen gleich ist* (Einl. §. 14.). Das Verfahren in nr. 2. giebt die Summe der Einer, welche in diesem Exempel 17 ist, oder ein Zehner und sieben Einer, von denen wir nur die 7 Einer hinschreiben, den einen Zehner aber im Sinne behalten und ihn sogleich der Summe der Zehner beylegen, und so 25 Zehner, das ist zwey Hunderter und fünf Zehner erhalten. Von den Zehnern werden wieder nur die fünfe hingeschrieben, weil es bequemer ist, die zwey Hunderter sogleich mit den übrigen Hundertern zu vereinigen. Wenn man so die Zahlen ganz durchgeht: so ist offenbar, daß man wirklich die Summe aller Einer, aller Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. in der unter dem Striche stehenden Zahl vereinigt erhält, welche folglich die gesuchte Summe ist.

11. Zweyte Aufgabe. Zwey gegebene Zahlen von einander zu subtrahiren, oder ihren Unterschied zu finden.

Auflösung. 1. Man drücke die Zahlen durch Ziffern aus und schreibe diese so über einander, daß die Ziffern von einerley Ordnung, das heißt, die Einer, die Zehner u. s. w. gerade über einander zu stehen kommen. Gewöhnlich pflegt man die größere Zahl oben zu setzen, welches indeß willkührlich ist. Diese Zahlen sondert man wieder durch einen darunter gezogenen Strich von der zu findenden Differenz ab.

2. Sind nun die beyden Zahlen so beschaffen, daß die größere mehr Einer, mehr Zehner u. s. w. als die kleinere enthält, oder daß jede Ziffer der größern mehr beträgt, als die unter ihr stehende Ziffer der kleinern: so ziehe man jede der unten stehenden Ziffern von der gerade über ihr stehenden ab und setze den Rest gerade darunter, nämlich den Rest der Einer gerade unter die Einer, den Rest der Zehner gerade unter die Zehner u. s. w., dann ist die herauskommende Zahl die gesuchte Differenz.

3. Es kann sich aber im Gegentheil ereignen, daß in der größern Zahl eine oder mehrere Ziffern vorkommen, die kleiner sind, als die darunter stehende oder zu derselben Ordnung gehörige Ziffer der kleinern Zahl. In diesem Falle kann man die untere Ziffer nicht von der darüber stehenden subtrahiren; man borge daher in der obern Zahl eins von der nächst höhern Ziffer, das heißt, man denke sich diese nächst-höhere Ziffer um eins vermindert, und lege dafür zehn zu der Ziffer hinzu, die ohne diese Beyhülfe zu klein war, und nun, nachdem diese Aenderung vorgenommen ist, verrichte man die Subtraction so wie in Nr. 2.

4. Die letztere Vorschrift des Borgens findet einige Schwierigkeit, wenn die Ziffer, von der man borgen soll, eine Null ist. Hat man nämlich in der nächst höheren Stelle vor einer Ziffer, die kleiner, als die darunter stehende ist, eine Null: so findet bey dieser keine Verminderung um eins, wofür man jener zehn zulegen könnte, statt; man muß daher zu der zweyten höhern Ziffer, welche nämlich zunächst vor der Null hergeht, übergehen und von dieser Eins borgen oder weggenommen denken; dafür setzt man nun zehn in die Stelle der Null; aus diesen borgt men abermals eins, um zehn zu derjenigen Ziffer zu fügen, die man zuerst zu vergrößern wünschte. Hätte man vor dieser letztern Ziffer mehr als eine Null,

so müßte man über alle diese Nullen weg, von der nächsten Ziffer, die einen wirklichen Werth hat, borgen, wodurch dann diese ganze Operation dahin ausfällt, daß man jene zu kleine Zahl um zehn vergrößert, alle ihr in ununterbrochener Reihe vorgehende Nullen in Neunen verwandelt, und die nächste höhere Ziffer um eins vermindert. Nach diesen Vorbereitungen hat die Befolgung der Regel nr. 2. weiter keine Schwierigkeit. *)

Beweis. Die Nothwendigkeit der Regel nr. 1. erhellt auch hier daraus, weil man nur gleichartige Größen von einander subtrahiren kann. Auch die Richtigkeit der zweyten Regel ist sehr einleuchtend, denn man findet gewiß, um wieviel die eine Zahl größer, als die andre ist, wenn man bestimmt, wie viele Einer, wie viele Zehner, Hunderter u. s. w. sie mehr enthält und dieses alles wieder, in eine Zahl vereinigt, ausdrückt, und das eben ist es, was nach der Regel nr. 2. geschieht.

---

*) Ich habe in dieser Auflösung mehrmals das Wort: Ziffer, gebraucht, wo man eigentlich Zahl sagen sollte, z. B. „man kann die unten stehende Ziffer nicht von der obern abziehn."

Da Ziffer eigentlich nur das Zahl-Zeichen bedeutet, so ist dieser Ausdruck allerdings nicht genau; er scheint mir aber verzeihlich, weil es uns an einem andern Worte fehlt, wodurch man andeuten könnte, daß nur von einem einzelnen Theile der beyden Zahlen die Rede sey.

Die Regeln nr. 3. und 4. für die besondern Fälle beruhen darauf, daß **eins** in der nächst höhern Stelle so viel bedeutet, als **zehn** in der folgenden nächst niedrigern Stelle. Man kann nämlich in dem nebenstehenden Exempel die obere Zahl, als die Summe

$$\begin{array}{r} 70042 \\ \underline{53497} \\ 16545 \end{array}$$

folgender Zahlen $\left\{\begin{array}{r} 69900 \\ 130 \\ \text{und } 12 \end{array}\right\}$ betrachten und dem zufolge von den Einern her so subtrahiren: 7 von 12 bleibt 5; 9 von 13 bleibt 4; 4 von 9 bleibt 5; 3 von 9 bleibt 6; 5 von 6 bleibt 1. Auch hier geht man alle Theile beyder Zahlen durch und bestimmt, um wie viel jeder Theil größer in der einen, als in der andern ist, und alle diese Differenzen vereinigt man in **einer** Zahl, welche dann die wahre Differenz der beyden vorgegebenen Zahlen ist.

12. Da die Subtraction gerade das Entgegengesetzte der Addition ist, so können diese beyden Rechnungsarten einander zur Prüfung dienen. Hat man nämlich zwey Zahlen zu einander addirt: so muß, wenn man die eine von der Summe abzieht, die andere übrig bleiben, wofern man recht gerechnet hat. Und eben so kann man die Richtigkeit einer vorgenommenen Subtraction prüfen, indem man die kleinere Zahl zu der gefundenen Differenz addirt, wo alsdann die größere Zahl wieder heraus kommen muß.

13. Willkührlicher Satz. Das Zeichen der Addition ist $+$, das Zeichen der Subtraction $-$ oder $\div$; man kann daher ein Beyspiel zu dem letzten Satze folgendermaßen ausdrücken: da $13 + 15 = 28$, so muß auch $28 - 13 = 15$ seyn. Man spricht dieses aus: 13 addirt zu 15 ist 28, und 28 weniger 13 beträgt 15.

14. Erklärung. Wenn man eine Zahl mehrmals zu sich selbst addirt, so erhält man ein Vielfaches dieser Zahl. Da aber dieses öftere Addiren derselben Zahl beschwerlich wäre, so giebt die Multiplication besondere Regeln, um jedes Vielfache jeder gegebnen Zahl zu finden.

15. Erklärung. Zwey Zahlen in einander multipliciren, heißt also, die eine so oft nehmen oder so vielmal vervielfältigen, als die andre angiebt. Die beyden Zahlen, welche in einander multiplicirt werden, heißen Factoren; die Zahl, welche nach der Multiplication herauskommt, das Product. Man nennt auch von jenen beyden Zahlen die eine, deren Vielfaches gesucht wird, den Multiplicandus, die andre aber, welche angiebt, wie vielmal man jene nehmen soll, den Multiplicator.

16. Bemerkung. Die Regeln der Multiplication sind nur bey größern Zahlen von Nutzen;

bey Zahlen hingegen, die nur eine Ziffer enthalten, muß man das Product durch wiederhohltes Addiren suchen. Die Regeln der Multiplication, so wie wir sie für größere Zahlen angeben werden, setzen voraus, daß man die Producte aller Zahlen, die kleiner als zehn sind, in einander, kenne. Diese Producte pflegt man in einen Täfelchen unter dem Namen des Einmal-Eins zusammen zu stellen, welches ich hier nicht mittheile, da es sich an so vielen Orten findet. Man muß sich diese einfachen Producte wohl bekannt gemacht haben, ehe man das Multipliciren größerer Zahlen unternehmen kann.

17. Dritte Aufgabe. Zwey Zahlen in einander zu multipliciren, wenn das Einmal-Eins als bekannt angenommen wird.

Auflösung. Erster Fall. Wenn der Multiplicator nur aus einer Ziffer besteht.

1. Man setzt den Multiplicator unter den Multiplicandus und sondert diese Zahlen durch einen unter ihnen gezognen Strich von dem zu findenden Producte ab.

2. Man multiplicirt nun mit der untenstehenden Zahl jede Ziffer der obenstehenden Zahl. Erhält man bey diesen verschiedenen Multiplicationen nie mehr

als 9, so setzt man jede gefundene Zahl sogleich unter dem Striche an ihre gehörige Stelle, nämlich das Vielfache der Einer unter die Einer, das Vielfache der Zehner unter die Zehner u. s. w. Geben aber einige dieser verschiedenen Multiplicationen mehr als 9, schreibt man in dieser Stelle nur die Einzelnen hin, die außer den Vielfachen von zehn da sind, behält aber, wie bey der Addition (§. 10. nr. 2 und 3.), die Vielfachen von zehn im Sinne und addirt so viele Einfache zu dem in der nächst höhern Stelle gefundenen Producte, als man Vielfache von zehn in der nächst niedrigern Stelle gefunden hat. Wenn man so alle Ziffern durch multiplicirt hat, so ist die herauskommende Zahl das gesuchte Product.

Zweyter Fall. Wenn der Multiplicator mehrere Ziffern enthält.

1. Die erste vorige Regel bleibt dieselbe.

2. Man nehme zuerst die niedrigste Ziffer (oder die Einer) des Multiplicators und multiplicire damit den ganzen Multiplicandus völlig so, wie im vorigen Falle. Was heraus kommt, setzt man, wie dort, unter den Strich.

3. Eben so, wie man mit der niedrigsten Ziffer des Multiplicators alle Ziffern des Multiplicandus

durchmultiplicirt hat, verfahre man nun auch mit der nächst niedrigsten Ziffer, oder den Zehnern des Multiplicators. Das Product schreibe man dicht unter die nach nr. 2. gefundene Zahl und zwar so, daß das jetzt gefundene Vielfache der Einer des Multiplicandus unter die dortigen Zehner, das jetzt gefundene Vielfache der Zehner unter die dortigen Hunderte u. s. w. gesetzt wird; die Stelle der Einer aber in dieser Zeile ganz frey bleibt.

4. Hat der Multiplicator mehr als zwey Ziffern, so multiplicirt man mit den Hundertern desselben ebenfalls alle Ziffern des Multiplicandus und setzt dieses neue Product so, daß die beyden letzten Stellen frey bleiben, also das hier gefundne Vielfache der Einer des Multiplicandus unter den Hundertern der ersten Zeile seine Stelle erhält, und dem gemäß auch alle übrigen Ziffern zu stehn kommen.

5. Man verfährt mit den Tausendern, Zehntausendern u. s. w. des Multiplicators nach der Reihe fort eben so; schreibt aber die gefundenen Producte so unter die vorigen, daß immer eine Stelle mehr hinten frey bleibt, oder in jeder Zeile, indem man nach der Reihe mit den einzelnen Ziffern des Multiplicators fort multiplicirt, die Vielfachen der Einer des Multiplicandus immer in eine um Eins höhere Stelle zu stehen kommen.

6. Endlich addire man alle diese verschiedenen Producte, indem man die grade über einander stehenden Ziffern als zu einerley Ordnung gehörig betrachtet. Die herauskommende Summe ist das gesuchte Product.

Beweis. Wenn der zuerst betrachtete Fall statt findet, so erhellt ziemlich leicht, daß die am Ende der Rechnung gefundene Zahl die Summe aller Producte ist, welche aus der Multiplication des Multiplicators in alle Theile des Multiplicandus entstehen. Es ist aber offenbar, daß die Summe dieser Producte mit dem gesuchten Producte einerley ist, da man es als Grundsatz betrachten kann, daß das Doppelte oder jedes gleich Vielfache aller Theile, dem Doppelten oder dem eben so vielfachen des Ganzen gleich ist.

Auch im zweyten Fall findet man das gesuchte Product dadurch, daß man alle Theile des Multiplicandus durch alle Theile des Multiplicators multiplicirt und die so gefundenen Producte alle in eine Summe vereinigt; es müßte also bewiesen werden, daß man erstlich diese einzelnen Producte richtig gefunden, und insonderheit zweytens, daß man sie richtig addirt hat. Die Richtigkeit der einzelnen Produete scheint eben keinem Zweifel ausgesetzt zu seyn; denn die erste, nach nr. 2. gefundene, Zeile enthält, nach dem was schon beym ersten Falle erwähnt ist, das richtige Product der Einer des Multiplicators in den ganzen Multiplicandus; die zweyte Zeile enthält das Product der Zehner des Multiplicators in denselben u. s. w. Um aber den Grund, warum diese verschiedenen Producte auf die in der Auflösung angegebene Weise unter einander gesetzt werden, zu übersehn, wird folgendes dienen. Indem man den Multiplicandus mit der zweyten Ziffer des Multiplicators multiplicirt, erhält man ein Product, welches völlig dasselbe ist, als wenn diese Ziffer Einer bedeutete; sie bedeutet aber Zehner und offenbar ist also dies Product auch von einem zehnfach höhern Werthe, als wenn sie Einer bedeutete; und um dieses zehnfach höhere Werthes willen setzen wir die letzte Ziffer dieses Products in die Stelle der Zehner und folglich alle Ziffern in eine um eins höhere Stelle, als wo sie stehen würden, wenn jene Ziffer des Multiplicators nur Einer bedeutete. Auf eben diese Weise bestimmt man auch (nr. 4.) das Product der dritten Ziffer des Multiplicators in den Multiplicandus zuerst ohne alle Rücksicht darauf, daß diese Ziffer Hunderter bedeutet; aber um dieses ihres hundertfach höhern Werthes willen, setzt man dieses Product so unter die übrigen, daß die letzte Ziffer in der Stelle der Hunderter steht und die folgenden Stellen leer bleiben. So erhellet der Grund von der angegebenen Anordnung und darauf beruhenden Addition der Producte.

Beyspiel. 57634 mit 725 zu multipliciren.

$$\begin{array}{r}
57634 \\
725 \\
\hline
288170 \\
115268 \\
403438 \\
\hline
41784650.
\end{array}$$

18. Erläuterung. Es ist einleuchtend, daß das Product zweyer Zahlen dasselbe ist, man mag die eine oder die andre als Multiplicator betrachten; denn offenbar ist z. B. 5 mal 7, eben so viel als 7 mal 5. Mit Hülfe dieses Satzes läßt sich der lezte Theil des vorigen Beweises auch so darstellen: Wenn man den ganzen Multiplicandus durch die zweyte Ziffer des Multiplicators multiplicirt, so heißt das, die Anzahl von Zehnern, welche diese Ziffer anzeigt, so vielmal nehmen, als der ganze Multiplicandus angiebt; und wenn man sich die Sache so vorstellt, so übersieht man, daß dieses Product eine Anzahl von Zehnern, das durch die dritte Ziffer gefundene Product eine Anzahl von Hundertern, das vierte Product eine Anzahl von Tausender enthält u. s. w., statt daß das erste Product eine Anzahl von Einern ist. Offenbar also bedeutet die niedrigste Ziffer des zweyten Products Zehner, die niedrigste Ziffer des dritten Products Hunderter u.

s. w. und so erhellet, daß man sie nothwendig bey der Addition zu den Ziffern von gleicher Ordnung im ersten Producte zählen, und folglich auch so unter einander setzen muß, wie in der vorigen Auflösung angegeben worden.

19. Erklärung. Die Division lehrt bestimmen, wie vielmal eine gegebene Zahl in einer andern gegebenen enthalten ist.

Man kann die Division auch als eine erleichterte Rechnungs-Methode statt einer wiederhohlten Subtraction betrachten. Subtrahirte man nämlich die kleinere Zahl so oft von der größern, bis der übrig bleibende Rest kleiner wäre, als die kleinere Zahl: so fände man ebenfalls, wie oft die kleinere in der größern enthalten ist.

Beyspiel. Subtrahirt man 14 mehrmahls von 42: so findet man, daß jene dreymal in dieser enthalten ist, und daß kein Rest übrig bleibt.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \underline{14} \\ 28 \\ \underline{14} \\ 14 \\ \underline{14} \\ 0 \end{array}$$

20. Die Division ist also das Entgegengesetzte der Multiplication, denn so wie diese ein bestimmtes Vielfaches einer gegebnen Zahl finden lehrt, so lehrt

jene umgekehrt angeben, das Wievielfache der einen Zahl die andre ist.

21. Erklärung. Man nennt den Dividendus diejenige Zahl, von welcher man zu wissen verlangt, wie vielmal die zweyte Zahl, der Divisor, darin enthalten sey; die Zahl aber, welche anzeigt, wie oft diese in jene enthalten sey, heißt der Quotient.

22. 1ster Lehrsatz. Wenn man den Quotienten, welcher angiebt, wie vielmal ein gegebener Divisor in einem gegebenen Dividendus enthalten ist, mit dem Divisor multiplicirt: so erhält man als Product den Divendendus.

Beweis. Da der Quotient diejenige Zahl ist, welche angiebt, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist, oder wie oft man den Divisor nehmen muß, um den Dividendus zu erhalten: so erhellt die Richtigkeit des Lehrsatzes von selbst.

23. 4te Aufgabe. Es sind zwey Zahlen gegeben; man soll die größere durch die kleinere dividiren.

Auflösung. Erster Fall. Wenn der Divisor nur eine Ziffer enthält.

1. Man schreibe den Dividendus in Ziffern hin, ziehe vor und hinter demselben herabwärts einen Strich, und setze vor den vordern Strich den Divisor, hinter den hintern Strich aber den Quotienten, so wie man denselben nach und nach findet.

2. Ist die erste Ziffer des Dividendus, wenn man sie als einzelne Zahl betrachtet, größer als der Divisor: so untersuche man mit Hülfe des Einmal-Eins, wie oft der Divisor in ihr enthalten ist, und setze die gefundene Zahl als erste Ziffer des Quotienten hinter den Strich. In dem Falle hingegen, da die erste Ziffer des Dividendus kleiner ist, als der Divisor, nehme man die beyden ersten Ziffern zusammen, betrachte sie als eine Zahl für sich und suche, wie oft diese den Divisor enthält. Die gefundne Zahl setzt man als erste Ziffer des Quotienten hin.

3. Diese erste Ziffer des Quotienten multiplicire man in den Divisor und setze das Product unter den erwähnten ersten Theil (nämlich die erste oder beyden ersten Ziffern) des Dividendus, subtrahire jenes von diesem, und setze den Rest auf die beym Subtrahiren gewöhnliche Weise darunter.

4. Hinter die letzte Ziffer dieses Restes schreibe man die nächste Ziffer des Dividendus, nämlich die-

jenige, welche dem schon mit dem Divisor verglichenen Theile unmittelbar folgt; betrachte die so an einander gereih'ten Ziffern, als eine Zahl und suche, wie oft der Divisor in diesem zweyten Theile des Dividendus enthalten ist. Diesen neuen Quotienten setzt man als zweyte Ziffer des gesuchten Quotienten gleich hinter die in nr. 2. gefundene erste Ziffer.

5. Man multiplicirt wieder die zweyte Ziffer des Quotienten in den Divisor; subtrahirt das Product von dem in nr. 4. betrachteten zweyten Theile des Dividendus; fügt abermals (wie in Nr. 4.) an den Rest die nächste Ziffer des Dividendus; verfährt, um die dritte Ziffer des Quotienten zu finden, grade wie in nr. 4., und setzt auf ganz ähnliche Weise die Division fort, bis man alle Ziffern des Dividendus durchgegangen ist.

6. Die so nach der Reihe einzeln gefundenen und gehörig an einander gereiheten Ziffern des Quotienten betrachte man nun zusammen als eine Zahl; — und sie ist der gesuchte Quotient. Dieser Quotient giebt genau an, wie oft der Divisor im Dividendo enthalten ist, wenn bey der letzten Subtraction gar kein Rest bleibt; geschieht hingegen dieses, so zeigt er wenigstens, daß man eine Zahl, die größer als der Dividendus ist, erhalten würde, wenn man

den Divisor einmal öfter nähme, als der Quotient angiebt.

Beyspiel. 344898 mit 6 zu dividiren.

```
6) 344898 (57483
   30..
   ----
    44.
    42.
    ---
     28
     24
     --
      49
      48
      --
       18
       18
       --
        0
```

Zweyter Fall. Wenn der Divisor mehr als eine Ziffer enthält.

Dieser Fall ist zwar in der Ausübung bey weitem schwieriger, als der vorige; die Regeln aber leiden wenige Veränderung. Man ordnet nämlich die Zahlen eben so wie vorhin; nimmt aber nun, weil *eine* Ziffer des Dividendus gewiß kleiner, als der Divisor ist, so viele der höchsten Ziffern des Dividendus zusammen, daß man eine Zahl erhält, die *größer*, als der Divisor ist, und untersucht, wie oft der Divisor in diesem ersten Theile des Dividendus enthalten sey, welches dann die erste Ziffer des Quotienten giebt. Mit dieser Ziffer multiplicirt man den Divisor, subtrahirt das Product von dem betrachteten ersten Theile des Dividendus, fügt gerade so, wie vorhin, in nr. 3., an den Rest die nächste Ziffer des Dividendus und setzt die ganze Division dann, indem man immer um eine Ziffer fortrückt, gerade so fort, wie vorhin, bis man alle Ziffern so gebraucht, oder alle Theile des Dividendus mit dem Divisor verglichen hat.

Beweis. Die Gründe für die angegebenen Regeln lassen sich am leichtesten an einem Beyspiele übersehn. In dem nebenstehenden Exempel ist der Dividendus größer als 58000, also der Divisor gewiß öfter darin enthalten, als in 58000; man wird sich aber leicht überzeugen, daß 27 in 58000 tausendmal so oft enthalten ist, als in 58; nun hat man 27 in 58 zweymal, also 27 in 58000 wenigstens 2000 mal. Hieraus folgt, daß der gesuchte Quotient größer, als 2000 ist. Sollte der Quotient genau 2000 seyn, so müßte das Product aus 27 in 2000 dem Dividendus gleich seyn; aber der Dividendus ist um 4349

$$\begin{array}{r|r|r}
27) & 58349 & 2161 \\
 & \underline{54000} & 2000 \\
 & 4349 & 100 \\
 & \underline{2700} & 60 \\
 & 1649 & 1 \\
 & \underline{1620} & \\
 & 29 & \\
 & \underline{27} & \\
 & 2 &
\end{array}$$

größer, als jenes Product, man erhält daher den Quotienten genauer bestimmt, wenn man untersucht, wie oft der Divisor 27 in diesem Reste enthalten ist. Um dies zu bestimmen, fangen wir wieder mit der Frage an, wie oft 27 in 4300 enthalten sey? — denn in dem Reste 4349 ist jene Zahl gewiß wenigstens eben so oft enthalten, gewiß aber auch nicht um hundertmal öfter, daher diese Frage uns die Hunderter des Quotienten sicher richtig angiebt. In 43 ist 27 einmal, also in 4300 ist 27 einhundertmal enthalten, und dieses bestimmt uns, zu dem ersten Theile 2000 des Quotienten noch 100 zuzulegen; man multiplicirt diesen zweyten Theil des Quotienten mit dem Divisor und subtrahirt das Product 2700 von dem Reste 4349; es bleibt abermals ein Rest, welcher 1649 beträgt, woraus sich ergiebt, daß der Quotient mehr als 2100 beträgt, obgleich er nicht 2200 betragen kann, weil 200 mit 27 multiplicirt mehr giebt, als der erste Rest betrug. Man fährt also fort, und vergleicht den zweyten Rest mit dem Divisor, indem man fragt, wie oft 1740 die 27 enthalte, und findet, 60 mal; wir legen daher dem Quotienten noch 60 bey, subtrahiren das Product, 60 mal 27, vom zweyten Reste und behalten so den dritten Rest 29, worin 27 noch einmal enthalten ist, da dann 2 zum letzten Reste bleibt. Der Dividendus enthält also den Divisor, so wie die Betrachtung der einzelnen Theile ergiebt, 2000 mal, 100 mal, 60 mal und 1 mal, das ist ist 2161 mal; denn wenn man nach und nach das 2000fache, das 100fache, das 60fache und 1fache des Divisors vom Dividendo abzieht, so bleiben nur 2 übrig, worin der Divisor kein ganzes mal mehr enthalten ist.

24. Da Division und Multiplication entgegengesetzte Rechnungsarten sind, so dienen sie einander zur Probe. Wenn man nämlich das Product zweyer Zahlen mit einer derselben dividirt, so muß die andere Zahl wieder herauskommen; und hingegen, wenn man nach der Division den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, so muß man den Dividendus wieder erhalten, wofern man richtig gerechnet hat.

25. Willkührlicher Satz. Das Zeichen der Multiplication ist $\times$ oder . ; das Zeichen der Division ist : ; man schreibt daher $7 \times 5 = 7 \cdot 5 = 35$, und $35 : 5 = 7$, und spricht ersteres aus: 7 multiplicirt mit 5 ist 35, und letzteres: 35 dividirt mit 5 ist, oder ist gleich 7.