Die Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Vom Gebrauche der Ziffern und den vier einfachen Rechnungsarten.

1. Erklärung. Die Begriffe von Einheit und Vielheit gehören so sehr zu den ursprünglichsten und einfachsten Begriffen, daß sie fast eben so wenig einer Erklärung fähig, als derselben bedürftig scheinen. Eine Zahl aber ist eine bestimmte Vielheit.

2. Erklärung. Die Arithmetik oder Rechenkunst lehrt, aus bekannten Zahlen nach gewissen Regeln andre Zahlen herleiten; und diese Ableitung unbekannter Zahlen aus bekannten nach bestimmten Regeln heißt: rechnen.

3. Erklärung. Um rechnen zu lernen, muß man zuvor zählen können. Zählen aber

heißt, eine gegebene Zahl um Eins vergrößern und diese neue Zahl mit einem eignen Namen bezeichnen; man zählt also weiter fort, wenn man zu dieser zweyten Zahl wieder Eins hinzufügt und der neuen Zahl abermals ihren Namen giebt u. s. w.

Anmerk. Die Namen der Zahlen sind willkührlich und ich kann sie hier als bekannt annehmen. Fange ich nämlich von Eins an zu zählen: so ist Eins und Eins, zwey; zwey und Eins, drey; drey und Eins, vier u. s. w.

4. Erklärung. Die einfachsten Operationen, die man mit Zahlen vornehmen kann, sind, daß man entweder zwey Zahlen zusammen vereinigt, das ist, eine Zahl sucht, die beyden zusammengenommen gleich ist; oder daß man den Unterschied zweyer Zahlen sucht, das heißt, bestimmet, um wie viel mal Eins die eine größer ist, als die andre. Das erste heißt: addiren, das zweyte: subtrahiren.

Anmerk. Das Zählen selbst ist schon ein Addiren, wo man nämlich eine gegebene Zahl mit der Zahl Eins zusammen nimmt.

5. Erklärung. Das Addiren besteht eigentlich darin, daß man zwey oder mehrere Zahlen zusammenzählt; das Subtrahiren kann man als ein Rückwärtszählen betrachten.

Beyspiel. Man soll zu fünfen sieben addiren. Man kann die fünf

* * * * *
* * * * * * *

durch eine Reihe von Zeichen, die sieben durch eine zweyte Reihe von Zeichen darstellen und nun alle diese Zeichen zusammenzählen: so findet man zwölfe als die gesuchte Zahl. Sollte man hingegen fünfe von sieben subtrahiren, so streiche man in der letztern Reihe fünf Zeichen weg, und es bleiben dann zwey.

Anmerk. Wenn man zu einer Zahl eine gleiche Zahl addirt, so erhält man ihr Zweyfaches, addirt man noch einmal dieselbe Zahl, so bekömmt man ihr Dreyfaches, und überhaupt wenn man einerley Zahl mehrmals zu ihr selbst addirt, ihr Vielfaches.

6. Erklärung. Die Zahl, welche aus der Addition mehrerer Zahlen entsteht, heißt ihre Summe oder Aggregat; daher sagt man auch summiren, statt addiren.

Die Zahl, welche bey der Subtraction übrig bleibt, heißt die Differenz oder der Unterschied der beyden gegebenen Zahlen, auch wohl der Rest.

7. Willkührliche Sätze. Um mit Bequemlichkeit zu rechnen bedarf man der Zahl-Zeichen oder Ziffern, welche willkührlich sind. Man versteht den Gebrauch der bey uns üblichen Ziffern am besten, wenn man auf die Art achtet, wie die Namen der Zahlen bey uns gewählt sind. Wir zählen nämlich von eins bis zehn mit einfachen, von einander unabhängigen Zahl-Namen; fahren dann aber so fort,

daß wir zu zehn wieder jene einfachen Zahl-Namen hinzufügen, z. B. dreyzehn; so zählen wir fort bis neunzehn, dann aber haben wir statt zehn und zehn oder zweymal zehn den Namen zwanzig und fahren mit ein und zwanzig fort, bis wir an zehn und zwanzig oder dreymal zehn kommen, wo wir dreyßig sagen. Auf ganz ähnliche Weise zählen wir bis neun und neunzig; für die dann folgende Zahl aber, welche zehn mal zehn ist, haben wir den ganz neuen Namen: einhundert. Zu einhundert fügen wir ferner im Fortzählen alle vorigen Zahl-Namen von einhundert und eins bis einhundert und neun und neunzig hinzu und kommen dann auf zweyhundert, wo es wieder eben so, und so ferner fort geht, bis neunhundert neun und neunzig. Die folgende Zahl, zehnhundert, heißt: eintausend. Das weitere Fortzählen, wie wir von eintausend und eins bis eintausend neunhundert neun und neunzig, ferner bis zweytausend, dreytausend, zehntausend und endlich bis hunderttausend kommen, ist nun leicht zu übersehen, und so geht es auch weiter noch fort, bis wir an die Zahl tausend mal tausend kommen, wofür wir den neuen Namen: eine Million haben. Zu einer Million fügen wir wieder alle vorigen Zahl-Namen, erhalten dann zwey Millionen u. s. w. und haben erst für die Zahl: tausend mal tausend Millionen den neuen Namen: eine Billion; und so endlich für tausend mal tausend Billionen den

Namen: eine Trillion; für tausend mal tausend Trillionen den Namen: eine Quadrillion u. s. w.

8. Willkührlicher Satz. Diesen an sich willkührlichen Namen entsprechen unsre Ziffern, die wir nach folgendem Gesetze gebrauchen:

Man bezeichnet die neun ersten Zahlen nach der Reihe mit folgenden einfachen Zeichen: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. die Zehn aber mit 10, zweymal zehn oder zwanzig mit 20 und so mit 30, 40 u. s. w. die verschiedenen Vielfachen von zehn. Die dazwischen fallenden Zahlen bezeichnet man dadurch, daß man statt der Null die Ziffer schreibt, welche angiebt, um wie viel diese Zahl das nächst niedrigere Vielfache von zehn übertrifft, z. B. neun und zwanzig, 29.

Für die Zahl einhundert bedienen wir uns, (wie auch die vorigen Regeln schon vermuthen lassen,) dreyer Ziffern, wir schreiben nämlich 100, und setzen für einhundert und eins u. s. w. in die letzte Stelle die gehörige einfache Ziffer; von einhundert und zehn an aber statt beyder Nullen die Ziffern, welche den Ueberschuß über einhundert angeben. Ferner bezeichnet 200, zweyhundert; 300, dreyhundert u. s. w.; 1000 aber eintausend. Bey weiterem Fortzählen schreiben wir das Zeichen der Zahl, welche zu eintausend hinzukömmt, in die Stelle der letzten Nullen, daher wir, so lange die Zahl die eintausend nicht um einhundert übertrifft, eine Null dicht hinter der eins beybehalten, z. B. in eintausend und funfzehn, 1015. Man übersieht nun leicht, daß zweytausend, 2000; zehntausend, 10000; zwanzigtausend, 20000; hunderttausend, 100000; eine Million, 1000000, geschrieben wird; in Rücksicht aller übrigen zwischen diese fallenden Zahlen aber gilt die Regel, daß man vorn an, die Ziffer oder die Ziffern schreibt, welche das nächst niedrigere Vielfache von tausend, von einer Million u. s. w. ausdrücken, dann aber immer statt der letzten Nullen die Ziffern, welche die hinzukommende Zahl bezeichnen.

Beyspiel. Neunzehn Millionen und fünf und zwanzig tausend und siebzehn wird geschrieben: 19025017.

9. Erläuterung. Jede Ziffer erhält also nach der Verschiedenheit der Stelle ihre Bedeutung; sie bedeutet Einfache oder Einer, wenn sie gar keine Ziffer rechts neben sich hat; sie bedeutet Vielfache von zehn oder Zehner, wenn ihr eine; Vielfache von Hundert oder Hunderter, wenn ihr zwey; Vielfache von Tausend oder Tausender, wenn ihr drey Ziffern folgen; und ferner Vielfache von zehntausend, wenn ihr vier; Vielfache von hunderttausend, wenn ihr fünf; Millionen, wenn ihr sechs; und endlich Billionen, wenn

ihr zwölf; Trillionen, wenn ihr achtzehn Ziffern folgen.

Beyspiel. Die Zahl $18^{'''}446744^{''}073709^{'}551615$ wo die übergeschriebenen Zeichen als bequeme Abtheilungen beym Ablesen dienen, wird ausgesprochen: Achtzehn Trillionen, vierhundert sechs und vierzig tausend und siebenhundert und vier und vierzig Billionen, drey und siebenzig tausend siebenhundert und neun Millionen, und fünfhundert ein und funfzig tausend, sechshundert und funfzehn.

Anmerk. Das Schreiben der Zahlen mit Ziffern und das Aussprechen gegebner, mit Ziffern geschriebner Zahlen muß an zahlreichen Beyspielen geübt, auch durch mündliche Erläuterungen des Lehrers faßlich gemacht werden. Um die Schüler an den verschiednen Werth zu gewöhnen, welchen die Ziffern nach ihrer Stelle erhalten, dienen vorzüglich auch Aufgaben, wie die folgende: Man soll die höchste Zahl und die kleinste Zahl angeben, die mit den Ziffern 5, 7, 3, 9 geschrieben werden können? — Die höchste ist 9753, die niedrigste 3579.

10. Erste Aufgabe. Es sind zwey oder mehrere Zahlen gegeben, man soll die Summe derselben finden.

Auflösung. 1. Man schreibe die in Ziffern gegebnen Zahlen so unter einander, daß die Einer gerade unter einander stehen und eben so auch die Zehner, die Hunderter, die Tausender u. s. w. gerade unter einander zu stehen kommen.

2. Man fange die Addition damit an, daß man die Einer zusammenzählt. Beträgt die Summe derselben weniger als zehn, so schreibt man die gefundne Zahl sogleich unter den Einern hin; ist diese Summe aber größer als zehn, so bemerke man sich zwar, wie vielmal zehn die Summe enthält, schreibe aber unter den Einern nur hin, wie viele Einer außer jenen Vielfachen von zehn vorhanden sind.

3. Eben so, wie man die Einer zusammen gezählt hat, zähle man nun auch die Zehner zusammen und nehme dazu noch die aus der Summe der Einer vorhin angemerkten Vielfachen von zehn. Erhält man auf diese Weise weniger als zehn Zehner, so schreibt man sie sogleich unter die Zehner hin; sind es aber mehr als zehn, so behält man wieder die Vielfachen von zehn besonders, und schreibt an jener Stelle nur hin, wie viele Zehner man ausser diesen Vielfachen von zehn hat.

4. Man wiederhohlt dasselbe Verfahren bey den Hundertern, zu welchen man auch so viel hinzuzählt, als man an Zehnern Vielfache von zehn erhalten hat. Und so geht man zu den Tausendern u. s. w. fort, bis man die Zahlen ganz addirt hat.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird sich am deutlichsten in der Anwendung auf ein

Beyspiel zeigen lassen. Die nebenstehenden Zahlen sind schon so geordnet, wie in nr. 1. verlangt wird. Der Grund dieser Anordnung ist offenbar, da man (Einl. §. 4.) nur gleichartige Größen zusammenzählen kann. Der Bequemlichkeit wegen zieht man unter den zu addirenden Zahlen einen Strich, um sie von der zu findenden Summe abzusondern.

$$
\begin{array}{r}
574093 \\
49854 \\
973 \\
7858437 \\
\hline
8483357
\end{array}
$$

Die eigentliche Operation des Addirens besteht nun darin, daß man alle einzelnen Theile der Zahlen zusammen zählt und diese Summen der Theile wieder in *eine* Zahl vereinigt. Dieses muß zu einem richtigen Resultate führen, da *die Summen aller Theile mehrerer Zahlen offenbar der Summe der ganzen Zahlen gleich ist* (Einl. §. 14.). Das Verfahren in nr. 2. giebt die Summe der Einer, welche in diesem Exempel 17 ist, oder ein Zehner und sieben Einer, von denen wir nur die 7 Einer hinschreiben, den einen Zehner aber im Sinne behalten und ihn sogleich der Summe der Zehner beylegen, und so 25 Zehner, das ist zwey Hunderter und fünf Zehner erhalten. Von den Zehnern werden wieder nur die fünfe hingeschrieben, weil es bequemer ist, die zwey Hunderter sogleich mit den übrigen Hundertern zu vereinigen. Wenn man so die Zahlen ganz durchgeht: so ist offenbar, daß man wirklich die Summe aller Einer, aller Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. in der unter dem Striche stehenden Zahl vereinigt erhält, welche folglich die gesuchte Summe ist.

11. Zweyte Aufgabe. Zwey gegebene Zahlen von einander zu subtrahiren, oder ihren Unterschied zu finden.

Auflösung. 1. Man drücke die Zahlen durch Ziffern aus und schreibe diese so über einander, daß die Ziffern von einerley Ordnung, das heißt, die Einer, die Zehner u. s. w. gerade über einander zu stehen kommen. Gewöhnlich pflegt man die größere Zahl oben zu setzen, welches indeß willkührlich ist. Diese Zahlen sondert man wieder durch einen darunter gezogenen Strich von der zu findenden Differenz ab.

2. Sind nun die beyden Zahlen so beschaffen, daß die größere mehr Einer, mehr Zehner u. s. w. als die kleinere enthält, oder daß jede Ziffer der größern mehr beträgt, als die unter ihr stehende Ziffer der kleinern: so ziehe man jede der unten stehenden Ziffern von der gerade über ihr stehenden ab und setze den Rest gerade darunter, nämlich den Rest der Einer gerade unter die Einer, den Rest der Zehner gerade unter die Zehner u. s. w., dann ist die herauskommende Zahl die gesuchte Differenz.

3. Es kann sich aber im Gegentheil ereignen, daß in der größern Zahl eine oder mehrere Ziffern vorkommen, die kleiner sind, als die darunter stehende oder zu derselben Ordnung gehörige Ziffer der kleinern Zahl. In diesem Falle kann man die untere Ziffer nicht von der darüber stehenden subtrahiren; man borge daher in der obern Zahl eins von der nächst höhern Ziffer, das heißt, man denke sich diese nächsthöhere Ziffer um eins vermindert, und lege dafür zehn zu der Ziffer hinzu, die ohne diese Beyhülfe zu klein war, und nun, nachdem diese Aenderung vorgenommen ist, verrichte man die Subtraction so wie in Nr. 2.

4. Die letztere Vorschrift des Borgens findet einige Schwierigkeit, wenn die Ziffer, von der man borgen soll, eine Null ist. Hat man nämlich in der nächst höheren Stelle vor einer Ziffer, die kleiner, als die darunter stehende ist, eine Null: so findet bey dieser keine Verminderung um eins, wofür man jener zehn zulegen könnte, statt; man muß daher zu der zweyten höhern Ziffer, welche nämlich zunächst vor der Null hergeht, übergehen und von dieser Eins borgen oder weggenommen denken; dafür setzt man nun zehn in die Stelle der Null; aus diesen borgt men abermals eins, um zehn zu derjenigen Ziffer zu fügen, die man zuerst zu vergrößern wünschte. Hätte man vor dieser letztern Ziffer mehr als eine Null,

so müßte man über alle diese Nullen weg, von der nächsten Ziffer, die einen wirklichen Werth hat, borgen, wodurch dann diese ganze Operation dahin ausfällt, daß man jene zu kleine Zahl um zehn vergrößert, alle ihr in ununterbrochener Reihe vorgehende Nullen in Neunen verwandelt, und die nächste höhere Ziffer um eins vermindert. Nach diesen Vorbereitungen hat die Befolgung der Regel nr. 2. weiter keine Schwierigkeit. *)

Beweis. Die Nothwendigkeit der Regel nr. 1. erhellt auch hier daraus, weil man nur gleichartige Größen von einander subtrahiren kann. Auch die Richtigkeit der zweyten Regel ist sehr einleuchtend, denn man findet gewiß, um wieviel die eine Zahl größer, als die andre ist, wenn man bestimmt, wie viele Einer, wie viele Zehner, Hunderter u. s. w. sie mehr enthält und dieses alles wieder, in eine Zahl vereinigt, ausdrückt, und das eben ist es, was nach der Regel nr. 2. geschieht.

---

*) Ich habe in dieser Auflösung mehrmals das Wort: Ziffer, gebraucht, wo man eigentlich Zahl sagen sollte, z. B. „man kann die unten stehende Ziffer nicht von der obern abziehn."

Da Ziffer eigentlich nur das Zahl-Zeichen bedeutet, so ist dieser Ausdruck allerdings nicht genau; er scheint mir aber verzeihlich, weil es uns an einem andern Worte fehlt, wodurch man andeuten könnte, daß nur von einem einzelnen Theile der beyden Zahlen die Rede sey.

Die Regeln nr. 3. und 4. für die besondern Fälle beruhen darauf, daß eins in der nächst höhern Stelle so viel bedeutet, als zehn in der folgenden nächst niedrigern Stelle. Man kann nämlich in dem nebenstehenden Exempel die obere Zahl, als die Summe

$$\begin{array}{r} 70042 \\ 53497 \\ \hline 16545 \end{array}$$

folgender Zahlen $\left\{\begin{array}{r} 69900 \\ 130 \\ \text{und } 12 \end{array}\right\}$ betrachten und dem zufolge von den Einern her so subtrahiren: 7 von 12 bleibt 5; 9 von 13 bleibt 4; 4 von 9 bleibt 5; 3 von 9 bleibt 6; 5 von 6 bleibt 1. Auch hier geht man alle Theile beyder Zahlen durch und bestimmt, um wie viel jeder Theil größer in der einen, als in der andern ist, und alle diese Differenzen vereinigt man in einer Zahl, welche dann die wahre Differenz der beyden vorgegebenen Zahlen ist.

12. Da die Subtraction gerade das Entgegengesetzte der Addition ist, so können diese beyden Rechnungsarten einander zur Prüfung dienen. Hat man nämlich zwey Zahlen zu einander addirt: so muß, wenn man die eine von der Summe abzieht, die andere übrig bleiben, wofern man recht gerechnet hat. Und eben so kann man die Richtigkeit einer vorgenommenen Subtraction prüfen, indem man die kleinere Zahl zu der gefundenen Differenz addirt, wo alsdann die größere Zahl wieder heraus kommen muß.

13. Willkührlicher Satz. Das Zeichen der Addition ist $+$, das Zeichen der Subtraction $-$ oder $\div$; man kann daher ein Beyspiel zu dem letzten Satze folgendermaßen ausdrücken: da $13 + 15 = 28$, so muß auch $28 - 13 = 15$ seyn. Man spricht dieses aus: 13 addirt zu 15 ist 28, und 28 weniger 13 beträgt 15.

14. Erklärung. Wenn man eine Zahl mehrmals zu sich selbst addirt, so erhält man ein Vielfaches dieser Zahl. Da aber dieses öftere Addiren derselben Zahl beschwerlich wäre, so giebt die Multiplication besondere Regeln, um jedes Vielfache jeder gegebnen Zahl zu finden.

15. Erklärung. Zwey Zahlen in einander multipliciren, heißt also, die eine so oft nehmen oder so vielmal vervielfältigen, als die andre angiebt. Die beyden Zahlen, welche in einander multiplicirt werden, heißen Factoren; die Zahl, welche nach der Multiplication herauskommt, das Product. Man nennt auch von jenen beyden Zahlen die eine, deren Vielfaches gesucht wird, den Multiplicandus, die andre aber, welche angiebt, wie vielmal man jene nehmen soll, den Multiplicator.

16. Bemerkung. Die Regeln der Multiplication sind nur bey größern Zahlen von Nutzen;

bey Zahlen hingegen, die nur eine Ziffer enthalten, muß man das Product durch wiederhohltes Addiren suchen. Die Regeln der Multiplication, so wie wir sie für größere Zahlen angeben werden, setzen voraus, daß man die Producte aller Zahlen, die kleiner als zehn sind, in einander, kenne. Diese Producte pflegt man in einen Täfelchen unter dem Namen des Einmal-Eins zusammen zu stellen, welches ich hier nicht mittheile, da es sich an so vielen Orten findet. Man muß sich diese einfachen Producte wohl bekannt gemacht haben, ehe man das Multipliciren größerer Zahlen unternehmen kann.

17. Dritte Aufgabe. Zwey Zahlen in einander zu multipliciren, wenn das Einmal-Eins als bekannt angenommen wird.

Auflösung. Erster Fall. Wenn der Multiplicator nur aus einer Ziffer besteht.

1. Man setzt den Multiplicator unter den Multiplicandus und sondert diese Zahlen durch einen unter ihnen gezognen Strich von dem zu findenden Producte ab.

2. Man multiplicirt nun mit der untenstehenden Zahl jede Ziffer der obenstehenden Zahl. Erhält man bey diesen verschiedenen Multiplicationen nie mehr

als 9, so setzt man jede gefundene Zahl sogleich unter dem Striche an ihre gehörige Stelle, nämlich das Vielfache der Einer unter die Einer, das Vielfache der Zehner unter die Zehner u. s. w. Geben aber einige dieser verschiedenen Multiplicationen mehr als 9, schreibt man in dieser Stelle nur die Einzelnen hin, die außer den Vielfachen von zehn da sind, behält aber, wie bey der Addition (§. 10. nr. 2 und 3.), die Vielfachen von zehn im Sinne und addirt so viele Einfache zu dem in der nächst höhern Stelle gefundenen Producte, als man Vielfache von zehn in der nächst niedrigern Stelle gefunden hat. Wenn man so alle Ziffern durch multiplicirt hat, so ist die herauskommende Zahl das gesuchte Product.

Zweyter Fall. Wenn der Multiplicator mehrere Ziffern enthält.

1. Die erste vorige Regel bleibt dieselbe.

2. Man nehme zuerst die niedrigste Ziffer (oder die Einer) des Multiplicators und multiplicire damit den ganzen Multiplicandus völlig so, wie im vorigen Falle. Was heraus kommt, setzt man, wie dort, unter den Strich.

3. Eben so, wie man mit der niedrigsten Ziffer des Multiplicators alle Ziffern des Multiplicandus

durchmultiplicirt hat, verfahre man nun auch mit der nächst niedrigsten Ziffer, oder den Zehnern des Multiplicators. Das Product schreibe man dicht unter die nach nr. 2. gefundene Zahl und zwar so, daß das jetzt gefundene Vielfache der Einer des Multiplicandus unter die dortigen Zehner, das jetzt gefundene Vielfache der Zehner unter die dortigen Hunderte u. s. w. gesetzt wird; die Stelle der Einer aber in dieser Zeile ganz frey bleibt.

4. Hat der Multiplicator mehr als zwey Ziffern, so multiplicirt man mit den Hundertern desselben ebenfalls alle Ziffern des Multiplicandus und setzt dieses neue Product so, daß die beyden letzten Stellen frey bleiben, also das hier gefundne Vielfache der Einer des Multiplicandus unter den Hundertern der ersten Zeile seine Stelle erhält, und dem gemäß auch alle übrigen Ziffern zu stehn kommen.

5. Man verfährt mit den Tausendern, Zehntausendern u. s. w. des Multiplicators nach der Reihe fort eben so; schreibt aber die gefundenen Producte so unter die vorigen, daß immer eine Stelle mehr hinten frey bleibt, oder in jeder Zeile, indem man nach der Reihe mit den einzelnen Ziffern des Multiplicators fort multiplicirt, die Vielfachen der Einer des Multiplicandus immer in eine um Eins höhere Stelle zu stehen kommen.

6. Endlich addire man alle diese verschiedenen Producte, indem man die grade über einander stehenden Ziffern als zu einerley Ordnung gehörig betrachtet. Die herauskommende Summe ist das gesuchte Product.

Beweis. Wenn der zuerst betrachtete Fall statt findet, so erhellt ziemlich leicht, daß die am Ende der Rechnung gefundene Zahl die Summe aller Producte ist, welche aus der Multiplication des Multiplicators in alle Theile des Multiplicandus entstehen. Es ist aber offenbar, daß die Summe dieser Producte mit dem gesuchten Producte einerley ist, da man es als Grundsatz betrachten kann, daß das Doppelte oder jedes gleich Vielfache aller Theile, dem Doppelten oder dem eben so vielfachen des Ganzen gleich ist.

Auch im zweyten Fall findet man das gesuchte Product dadurch, daß man alle Theile des Multiplicandus durch alle Theile des Multiplicators multiplicirt und die so gefundenen Producte alle in eine Summe vereinigt; es müßte also bewiesen werden, daß man erstlich diese einzelnen Producte richtig gefunden, und insonderheit zweytens, daß man sie richtig addirt hat. Die Richtigkeit der einzelnen Produete scheint eben keinem Zweifel ausgesetzt zu seyn; denn die erste, nach nr. 2. gefundene, Zeile enthält, nach dem was schon beym ersten Falle erwähnt ist, das richtige Product der Einer des Multiplicators in den ganzen Multiplicandus; die zweyte Zeile enthält das Product der Zehner des Multiplicators in denselben u. s. w. Um aber den Grund, warum diese verschiedenen Producte auf die in der Auflösung angegebene Weise unter einander gesetzt werden, zu übersehn, wird folgendes dienen. Indem man den Multiplicandus mit der zweyten Ziffer des Multiplicators multiplicirt, erhält man ein Product, welches völlig dasselbe ist, als wenn diese Ziffer Einer bedeutete; sie bedeutet aber Zehner und offenbar ist also dies Product auch von einem zehnfach höhern Werthe, als wenn sie Einer bedeutete; und um dieses zehnfach höhere Werthes willen setzen wir die letzte Ziffer dieses Products in die Stelle der Zehner und folglich alle Ziffern in eine um eins höhere Stelle, als wo sie stehen würden, wenn jene Ziffer des Multiplicators nur Einer bedeutete. Auf eben diese Weise bestimmt man auch (nr. 4.) das Product der dritten Ziffer des Multiplicators in den Multiplicandus zuerst ohne alle Rücksicht darauf, daß diese Ziffer Hunderter bedeutet; aber um dieses ihres hundertfach höhern Werthes willen, setzt man dieses Product so unter die übrigen, daß die letzte Ziffer in der Stelle der Hunderter steht und die folgenden Stellen leer bleiben. So erhellet der Grund von der angegebenen Anordnung und darauf beruhenden Addition der Producte.

Beyspiel. 57634 mit 725 zu multipliciren.

$$
\begin{array}{r}
57634 \\
725 \\
\hline
288170 \\
115268 \\
403438 \\
\hline
41784650.
\end{array}
$$

18. Erläuterung. Es ist einleuchtend, daß das Product zweyer Zahlen dasselbe ist, man mag die eine oder die andre als Multiplicator betrachten; denn offenbar ist z. B. 5 mal 7, eben so viel als 7 mal 5. Mit Hülfe dieses Satzes läßt sich der lezte Theil des vorigen Beweises auch so darstellen: Wenn man den ganzen Multiplicandus durch die zweyte Ziffer des Multiplicators multiplicirt, so heißt das, die Anzahl von Zehnern, welche diese Ziffer anzeigt, so vielmal nehmen, als der ganze Multiplicandus angiebt; und wenn man sich die Sache so vorstellt, so übersieht man, daß dieses Product eine Anzahl von Zehnern, das durch die dritte Ziffer gefundene Product eine Anzahl von Hundertern, das vierte Product eine Anzahl von Tausender enthält u. s. w., statt daß das erste Product eine Anzahl von Einern ist. Offenbar also bedeutet die niedrigste Ziffer des zweyten Products Zehner, die niedrigste Ziffer des dritten Products Hunderter u.

s. w. und so erhellet, daß man sie nothwendig bey der Addition zu den Ziffern von gleicher Ordnung im ersten Producte zählen, und folglich auch so unter einander setzen muß, wie in der vorigen Auflösung angegeben worden.

19. Erklärung. Die Division lehrt bestimmen, wie vielmal eine gegebene Zahl in einer andern gegebenen enthalten ist.

Man kann die Division auch als eine erleichterte Rechnungs-Methode statt einer wiederhohlten Subtraction betrachten. Subtrahirte man nämlich die kleinere Zahl so oft von der größern, bis der übrig bleibende Rest kleiner wäre, als die kleinere Zahl: so fände man ebenfalls, wie oft die kleinere in der größern enthalten ist.

Beyspiel. Subtrahirt man 14 mehrmahls von 42: so findet man, daß jene dreymal in dieser enthalten ist, und daß kein Rest übrig bleibt.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \underline{14} \\ 28 \\ \underline{14} \\ 14 \\ \underline{14} \\ 0 \end{array}$$

20. Die Division ist also das Entgegengesetzte der Multiplication, denn so wie diese ein bestimmtes Vielfaches einer gegebnen Zahl finden lehrt, so lehrt

jene umgekehrt angeben, das Wievielfache der einen Zahl die andre ist.

21. Erklärung. Man nennt den Dividendus diejenige Zahl, von welcher man zu wissen verlangt, wie vielmal die zweyte Zahl, der Divisor, darin enthalten sey; die Zahl aber, welche anzeigt, wie oft diese in jene enthalten sey, heißt der Quotient.

22. 1ster Lehrsatz. Wenn man den Quotienten, welcher angiebt, wie vielmal ein gegebener Divisor in einem gegebenen Dividendus enthalten ist, mit dem Divisor multiplicirt: so erhält man als Product den Divendendus.

Beweis. Da der Quotient diejenige Zahl ist, welche angiebt, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist, oder wie oft man den Divisor nehmen muß, um den Dividendus zu erhalten: so erhellt die Richtigkeit des Lehrsatzes von selbst.

23. 4te Aufgabe. Es sind zwey Zahlen gegeben; man soll die größere durch die kleinere dividiren.

Auflösung. Erster Fall. Wenn der Divisor nur eine Ziffer enthält.

1. Man schreibe den Dividendus in Ziffern hin, ziehe vor und hinter demselben herabwärts einen Strich, und setze vor den vordern Strich den Divisor, hinter den hintern Strich aber den Quotienten, so wie man denselben nach und nach findet.

2. Ist die erste Ziffer des Dividendus, wenn man sie als einzelne Zahl betrachtet, größer als der Divisor: so untersuche man mit Hülfe des Einmal-Eins, wie oft der Divisor in ihr enthalten ist, und setze die gefundene Zahl als erste Ziffer des Quotienten hinter den Strich. In dem Falle hingegen, da die erste Ziffer des Dividendus kleiner ist, als der Divisor, nehme man die beyden ersten Ziffern zusammen, betrachte sie als eine Zahl für sich und suche, wie oft diese den Divisor enthält. Die gefundne Zahl setzt man als erste Ziffer des Quotienten hin.

3. Diese erste Ziffer des Quotienten multiplicire man in den Divisor und setze das Product unter den erwähnten ersten Theil (nämlich die erste oder beyden ersten Ziffern) des Dividendus, subtrahire jenes von diesem, und setze den Rest auf die beym Subtrahiren gewöhnliche Weise darunter.

4. Hinter die letzte Ziffer dieses Restes schreibe man die nächste Ziffer des Dividendus, nämlich die-

jenige, welche dem schon mit dem Divisor verglichenen Theile unmittelbar folgt; betrachte die so an einander gereih'ten Ziffern, als eine Zahl und suche, wie oft der Divisor in diesem zweyten Theile des Dividendus enthalten ist. Diesen neuen Quotienten setzt man als zweyte Ziffer des gesuchten Quotienten gleich hinter die in nr. 2. gefundene erste Ziffer.

5. Man multiplicirt wieder die zweyte Ziffer des Quotienten in den Divisor; subtrahirt das Product von dem in nr. 4. betrachteten zweyten Theile des Dividendus; fügt abermals (wie in Nr. 4.) an den Rest die nächste Ziffer des Dividendus; verfährt, um die dritte Ziffer des Quotienten zu finden, grade wie in nr. 4., und setzt auf ganz ähnliche Weise die Division fort, bis man alle Ziffern des Dividendus durchgegangen ist.

6. Die so nach der Reihe einzeln gefundenen und gehörig an einander gereiheten Ziffern des Quotienten betrachte man nun zusammen als eine Zahl; — und sie ist der gesuchte Quotient. Dieser Quotient giebt genau an, wie oft der Divisor im Dividendo enthalten ist, wenn bey der letzten Subtraction gar kein Rest bleibt; geschieht hingegen dieses, so zeigt er wenigstens, daß man eine Zahl, die größer als der Dividendus ist, erhalten würde, wenn man

den Divisor einmal öfter nähme, als der Quotient angiebt.

Beyspiel. 344898 mit 6 zu dividiren.

```
6) 344898 (57483
   30..
   ----
    44.
    42.
    ---
     28
     24
     --
      49
      48
      --
       18
       18
       --
        0
```

Zweyter Fall. Wenn der Divisor mehr als eine Ziffer enthält.

Dieser Fall ist zwar in der Ausübung bey weitem schwieriger, als der vorige; die Regeln aber leiden wenige Veränderung. Man ordnet nämlich die Zahlen eben so wie vorhin; nimmt aber nun, weil eine Ziffer des Dividendus gewiß kleiner, als der Divisor ist, so viele der höchsten Ziffern des Dividendus zusammen, daß man eine Zahl erhält, die größer, als der Divisor ist, und untersucht, wie oft der Divisor in diesem ersten Theile des Dividendus enthalten sey, welches dann die erste Ziffer des Quotienten giebt. Mit dieser Ziffer multiplicirt man den Divisor, subtrahirt das Product von dem betrachteten ersten Theile des Dividendus, fügt gerade so, wie vorhin, in nr. 3., an den Rest die nächste Ziffer des Dividendus und setzt die ganze Division dann, indem man immer um eine Ziffer fortrückt, gerade so fort, wie vorhin, bis man alle Ziffern so gebraucht, oder alle Theile des Dividendus mit dem Divisor verglichen hat.

Beweis. Die Gründe für die angegebenen Regeln lassen sich am leichtesten an einem Beyspiele übersehn. In dem nebenstehenden Exempel ist der Dividendus größer als 58000, also der Divisor gewiß öfter darin enthalten, als in 58000; man wird sich aber leicht überzeugen, daß 27 in 58000 tausendmal so oft enthalten ist, als in 58; nun hat man 27 in 58 zweymal, also 27 in 58000 wenigstens 2000 mal.

27)	58349	2161	
	54000		2000
	4349		100
	2700		60
	1649		1
	1620		
	29		
	27		
	2		

Hieraus folgt, daß der gesuchte Quotient größer, als 2000 ist. Sollte der Quotient genau 2000 seyn, sd müßte das Product aus 27 in 2000 dem Dividendus gleich seyn; aber der Dividendus ist um 4349 größer, als jenes Product, man erhält daher den Quotienten genauer bestimmt, wenn man untersucht, wie oft der Divisor 27 in diesem Reste enthalten ist. Um dies zu bestimmen, fangen wir wieder mit der Frage an, wie oft 27 in 4300 enthalten sey? — denn in dem Reste 4349 ist jene Zahl gewiß wenigstens eben so oft enthalten, gewiß aber auch nicht um hundertmal öfter, daher diese Frage uns die Hunderter des Quotienten sicher richtig angiebt. In 43 ist 27 einmal, also in 4300 ist 27 einhundertmal enthalten, und dieses bestimmt uns, zu dem ersten Theile 2000 des Quotienten noch 100 zuzulegen; man multiplicirt diesen zweyten Theil des Quotienten mit dem Divisor und subtrahirt das Product 2700 von dem Reste 4349; es bleibt abermals ein Rest, welcher 1649 beträgt, woraus sich ergiebt, daß der Quotient mehr als 2100 beträgt, obgleich er nicht 2200 betragen kann, weil 200 mit 27 multiplicirt mehr giebt, als der erste Rest betrug. Man fährt also fort, und vergleicht den zweyten Rest mit dem Divisor, indem man fragt, wie oft 1740 die 27 enthalte, und findet, 60 mal; wir legen daher dem Quotienten noch 60 bey, subtrahiren das Product, 60 mal 27, vom zweyten Reste und behalten so den dritten Rest 29, worin 27 noch einmal enthalten ist, da dann 2 zum letzten Reste bleibt. Der Dividendus enthält also den Divisor, so wie die Betrachtung der einzelnen Theile ergiebt, 2000 mal, 100 mal, 60 mal und 1 mal, das ist ist 2161 mal; denn wenn man nach und nach das 2000fache, das 100fache, das 60fache und 1fache des Divisors vom Dividendo abzieht, so bleiben nur 2 übrig, worin der Divisor kein ganzes mal mehr enthalten ist.

24. Da Division und Multiplication entgegengesetzte Rechnungsarten sind, so dienen sie einander zur Probe. Wenn man nämlich das Product zweyer Zahlen mit einer derselben dividirt, so muß die andere Zahl wieder herauskommen; und hingegen, wenn man nach der Division den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, so muß man den Dividendus wieder erhalten, wofern man richtig gerechnet hat.

25. Willkührlicher Satz. Das Zeichen der Multiplication ist $\times$ oder . ; das Zeichen der Division ist : ; man schreibt daher $7 \times 5 = 7 \cdot 5 = 35$, und $35 : 5 = 7$, und spricht ersteres aus: 7 multiplicirt mit 5 ist 35, und letzteres: 35 dividirt mit 5 ist, oder ist gleich 7.

Zweyter Abschnitt.

Von den Brüchen im Allgemeinen und von den Decimalbrüchen.

26. Erklärung. Wir haben bisher nur von ganzen Zahlen geredet, das ist von Zahlen, welche die Einheit mehrere male ganz, aber keine Theile derselben außerdem, enthalten; ihnen sind entgegengesetzt die gebrochnen Zahlen oder die Brüche, welche entweder bloß einige Theile des Ganzen, oder außer einigen Ganzen auch noch Theile des Ganzen enthalten.

27. Erklärung. Um einen Bruch auszudrücken bedarf man zweyer Zahlen, wovon die eine angiebt, was für Theile es sind, aus welchen der Bruch besteht, die andre aber, wie viel solcher Theile der Bruch enthält. Die erste heißt der Nenner, die zweyte der Zähler des Bruchs.

Was für Theile es sind, aus welchen der Bruch besteht, drückt man dadurch aus, daß man bestimmt, wie viel solcher Theile ein Ganzes machen. Der Nenner ist die Zahl, welche diese Anzahl angiebt.

Beyspiel. In dem Bruche zwey Fünftel ist zwey der Zähler und fünf der Nenner, und ein Fünftel ist ein solcher Theil, deren das Ganze fünf enthält.

28. Willkührlicher Satz. Man schreibt jeden Bruch so, daß man den Zähler in Ziffern oben, den Nenner in Ziffern darunter schreibt, und beyde durch einen Strich von einander absondert.

Beyspiel. Zwey Fünftel schreibt man $\frac{2}{5}$.

29. 5te Aufgabe. Wenn bey der Division zweyer ganzer Zahlen durch einander ein Rest übrig bleibt, (§. 23. nr. 6.), den Quotienten mit Hülfe eines Bruches völlig genau auszudrücken.

Auflösung. Man sucht zuerst den Quotienten in ganzen Zahlen, so wie vorhin angegeben ist, (§. 23.); hängt aber an denselben noch einen Bruch, dessen Zähler der zuletzt übrig bleibende Rest, der Nenner aber der Divisor ist.

Beweis. Die Division verlangt, daß man den Dividendus in so viele gleiche Theile eintheile, als der Divisor angiebt; ein solcher Theil ist der Quotient. Geht nun die Division auf, oder bleibt gar kein Rest übrig, so ist jener verlangte Theil in ganzen Zahlen genau ausgedrückt; bleibt hingegen ein Rest, so muß, eben so wie alle übrigen Theile des Dividendus eingetheilt sind, auch dieser noch eingetheilt werden. Diese Eintheilung aber wird gerade dadurch angedeutet, daß wir den Rest zum Zähler und den Divisor zum Nenner eines Bruches machen (§. 27.), und diesen dem Quotienten beyfügen.

Beyspiel. In §. 23. sollte der Dividendus in 27 Theile getheilt werden, nachdem man nun die übrigen Theile des Dividendus eingetheilt hat, bleiben noch 2 übrig; da nun 1 in 27 Theile getheilt, für jeden Theil $\frac{1}{27}$ giebt, so geben 2 so eingetheilt offenbar $\frac{2}{27}$, welche zum Quotienten noch hinzukommen.

30. Man könnte jede Division aus eben den Gründen ganz durch einen Bruch ausdrücken; denn z. B. 12 mit 6 dividirt, oder in 6 Theile getheilt, giebt $\frac{12}{6}$. Da man aber, wo es angeht, lieber mit ganzen Zahlen rechnet, als mit Brüchen, so setzt man statt $\frac{12}{6}$ besser 2; hätte man dagegen 11 mit 6 zu dividiren, so müßte man auf allen Fall einen Bruch beybehalten, man möchte nun $\frac{11}{6}$ oder $1\frac{5}{6}$ setzen.

31. 2ter Lehrsatz. **Ein Bruch bleibt ungeändert, wenn man seinen Zähler und Nenner beyde mit einerley Zahl multiplicirt, oder auch beyde mit einerley Zahl dividirt.**

Beweis. Wenn man, bey ungeändertem Zähler, den Nenner eines Bruchs vergrößert, so verringert man den Werth des Bruchs; denn je größer der Nenner ist, in desto mehr Theile ist das Ganze getheilt, und desto kleiner ist folglich jeder Theil; soll also der Bruch ungeändert bleiben, so muß man zugleich auch die Anzahl der Theile, das ist den Zähler vergrößern. Multiplicirt man nun den Nenner mit irgend einer Zahl, so werden die Theile so vielmal verkleinert, als diese Zahl angiebt; soll also der Bruch ungeändert bleiben, so muß die Anzahl der Theile eben so vielmal vergrößert werden, als die Theile selbst verkleinert sind, das ist, man muß den Zähler mit eben der Zahl multipliciren, mit welcher der Nenner multiplicirt ist. Bey der Division des Nenners hingegen werden die Theile vergrößert, z. B. auf das Doppelte, wenn nur halb so viele Theile auf das Ganze gehen sollen, als vorhin; soll also der Bruch ungeändert bleiben, so muß man auch wenigere dieser Theile nehmen, und zwar nur halb so viele, wenn die Theile doppelt so groß sind, und so in jedem ähnlichen Falle.

Beyspiel. Multiplicirt man den Bruch $\frac{5}{6}$ im Zähler und Nenner mit 3, so ist $\frac{15}{18}$ eben so viel als $\frac{5}{6}$, da man Achtzehntel erhält, wenn man jedes Sechstel in drey gleiche Theile zerlegt.

Auf ähnliche Weise verändert man durch die Division den Bruch $\frac{12}{16}$ in $\frac{6}{8}$ oder in $\frac{3}{4}$.

32. Jeder Bruch läßt sich also auf unzählich mannigfaltige Weise ausdrücken; z. B. folgende Brüche bedeuten alle einerley: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{24}{36}$, $\frac{200}{300}$, $\frac{128}{192}$ u. s. w.

33. Unter den Formen, worauf man einen Bruch, z. B. $\frac{4}{6}$, durch Division des Zählers und Nenners bringen kann, können auch solche wie folgende vorkommen: $\frac{1\frac{1}{3}}{2}$, das heißt ein Halbes und ein Drittel eines Halben; oder auch solche wie: $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$, das ist ein solcher Theil, deren das Ganze anderthalb enthält. Aber man vermeidet solche Brüche gern, wozu sich im Folgenden die Mittel finden.

34. 6te Aufgabe. Jeden gegebenen Bruch auf einen andern gegebnen Nenner zu bringen, der größer, als der Nenner des gegebnen Bruchs ist.

Auflösung. Die Aufgabe verlangt, daß man den Bruch, ohne seinen Werth zu verändern, so ausdrücke, daß er den gegebnen Nenner erhalte. Man untersuche deshalb, wie oft der Nenner des Bruchs in diesem neuen Nenner enthalten sey; mit der Zahl, welche man so findet, multiplicire man die Zähler des gegebnen Bruchs: so ist das herauskommende Product der Zähler des gesuchten neuen Ausdrucks für den Bruch.

Beyspiel. Den Bruch $\frac{7}{8}$ auf den Nenner 64 zu bringen. Da 8 in 64 achtmal enthalten ist, so nehme man 8 mal 7 zum Zähler des Bruchs und 64 zum Nenner; also ist $\frac{56}{64}$ der gesuchte Ausdruck.

Beweis. Da man auf diese Weise Zähler und Nenner des gegebnen Bruchs mit einerley Zahl multiplicirt: so bleibt der Bruch ungeändert (§. 31.), erhält aber zugleich den verlangten Nenner.

Anmerk. Wie man verfährt, wenn der neue Nenner kein genaues Vielfaches des ersten Nenners ist, ergiebt sich aus dem Folgenden.

35. Man könnte eben so gut jeden Bruch auf einen gegebnen Zähler bringen; aber dieses hat in der Anwendung keinen Nutzen. Sollte man z. B. $\frac{7}{8}$ so ausdrücken, daß der Zähler 49 würde, so erhielte man $\frac{49}{56}$.

36. 7te Aufgabe. Mehrere gegebene Brüche auf einerley Nenner zu bringen.

Erste Auflösung. Da man den Zähler und Nenner eines Bruches immer so auszudrücken wünscht, daß der Zähler so wohl als der Nenner bloß ganze Zahlen enthalte: so darf man zu dem gemeinschaftlichen Nenner nicht jede willkührliche Zahl wählen, sondern nimmt am sichersten zu diesem gemeinschaftlichen Nenner das Product aus allen Nennern der gegebnen Brüche. Hat man so den Nenner bestimmt: so findet man den Zähler jedes Bruchs nach der vorigen Aufgabe.

Beyspiel. Die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{7}$ auf einerley Nenner zu bringen. Das Product der Nenner ist 210, die Brüche sind also, wenn man sie auf diesen Nenner bringt, $\frac{42}{210}$, $\frac{175}{210}$, $\frac{90}{210}$.

Zweyte Auflösung. Die in der vorigen Auflösung angegebene Bestimmung des gemeinschaftlichen Nenners ist völlig allgemein, in allen Fällen anwendbar; man kann aber in einigen Fällen einen kleinern gemeinschaftlichen Nenner gebrauchen, und wo dies möglich ist, da thut man es lieber, weil sich mit Brüchen desto bequemer rechnen läßt, je kleiner der Nenner und folglich auch (bey gleichem Werthe des ganzen Bruchs) der Zähler ist. Wenn nämlich einige Nenner der gegebnen Brüche gemeinschaftliche Factoren haben, oder Producte sind aus Factoren, deren einer in mehrern dieser Nenner vorkommt: so braucht man zum gemeinschaftlichen Nenner nicht das Product aus allen Nennern zu nehmen, sondern man nimmt bloß das Product aller verschiedenen in den Nennern vorkommenden Factoren, da man hiedurch den Zweck in allen Zählern, bloß ganze Zahlen zu erhalten, schon erreicht. Ist der gemeinschaftliche Nenner gefunden, so sucht man die einzelnen Zähler, wie vorhin.

Beyspiel. Die Brüche $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{28}$, $\frac{5}{21}$ und $\frac{7}{36}$ auf einerley Nenner zu bringen. Da alle Nenner hier Producte ganzer Zahlen sind, nämlich 2 mal 4, 7 mal 4, 7 mal 3, und 3 mal 12; oder 3 mal 3 mal 4: so multiplicire man diese Factoren so in einander, daß man die in mehrern Nennern vorkommenden Factoren nur einmal in das Product aufnimmt, wodurch man also für den allgemeinen Nenner $2 \times 4 \times 7 \times 3 \times 3, = 504$ erhält. Dann sind die gegebnen Brüche in folgende verwandelt: $\frac{315}{504}, \frac{54}{504}, \frac{120}{504}, \frac{98}{504}$.

37. 8te Aufgabe. Mehrere gegebene Brüche zu einander zu addiren.

Auflösung. Man bringe alle gegebene Brüche auf einerley Nenner, addire die Zähler der auf einerley Nenner gebrachten Brüche zu einander, und mache diese Summe der Zähler zum Zähler, jenen gemeinschaftlichen Nenner aber zum Nenner eines Bruches. Dieser Bruch ist die gesuchte Summe der gegebnen Brüche.

Beweis. Da man nur gleichartige Größen addiren kann, so ist es nothwendig die Brüche auf einerley Nenner zu bringen; ist aber dieses geschehen: so bezeichnet der Nenner bloß, was für Dinge, was für Theile nämlich, es sind, die man addiren soll, die Zähler hingegen geben die Anzahl dieser Theile an. Addirt man also die Zähler zusammen, behält aber den Nenner bey: so hat man die Summe der Menge dieser Theile.

Beyspiel. Die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ zu addiren, diese Brüche sind $\frac{15}{30}, \frac{10}{30}, \frac{6}{30}$, also die Summe $\frac{15}{30} + \frac{10}{30} + \frac{6}{30} = \frac{15 + 10 + 6}{30} = \frac{31}{30} = 1\frac{1}{30}$.

38. 9te Aufgabe. Zwey Brüche von einander zu subtrahiren.

Auflösung. Man bringe die Brüche auf einerley Nenner und subtrahire die dadurch bestimmten Zähler von einander: so ist die gesuchte Differenz ein Bruch, dessen Zähler die Differenz der Zähler der auf einerley Nenner gebrachten Brüche, und dessen Nenner jener gemeinschaftliche Nenner ist.

Der Beweis ist dem im vorigen §. geführten völlig ähnlich.

Beyspiel. Die Brüche $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{7}$ von einander zu subtrahiren. Diese Brüche geben, auf einerley Nenner gebracht, $\frac{7}{42}$ und $\frac{6}{42}$; die Differenz ist also $\frac{1}{42}$.

39. Erklärung. Man kann den Begriff der Multiplication auch auf Brüche anwenden, obgleich man dann nicht an ein wiederholtes Addiren denken darf. Die Multiplication verlangt nämlich, daß man eine Zahl so oft nehme, als durch eine zweyte Zahl angegeben wird; ist also diese zweyte Zahl ein Bruch, so heißt das offenbar, man soll nicht jene erstere Zahl mehrere male ganz nehmen, sondern solche Theile von ihr, wie die zweyte Zahl bestimmt.

Beyspiel. Die Zahl 3 ein Viertel mal nehmen, heißt den vierten Theil derselben nehmen; und eben so $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ mal nehmen, heißt die Zahl $\frac{2}{3}$ in fünf gleiche Theile zerlegen, und drey derselben wieder zusammen nehmen.

40. Zehnte Aufgabe. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.

Auflösung. Man multiplicirt den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl und macht dieses Product zum Zähler eines Bruches, dem man den Nenner des gegebnen Bruchs zum Nenner giebt. Dieses ist das gesuchte Product.

Beweis. Da man Theile von derselben Art beybehält, wie die Theile des gegebenen Bruches, die Anzahl dieser Theile aber so viel mal vervielfältigt, als die ganze Zahl, welche Multiplicator ist, verlangt, so ist einleuchtend die Multiplication richtig geschehn.

Beyspiel. $\frac{5}{16}$ mit 7 zu multipliciren. Man erhält $\frac{35}{16}$, das ist $2\frac{3}{16}$.

41. 11te Aufgabe. Eine ganze Zahl oder auch jeden Bruch mit einem Bruche zu multipliciren.

Auflösung. Erster Fall. Wenn der Multiplicandus eine ganze Zahl ist.

Man bilde einen Bruch, dessen Zähler das Product aus dem Zähler des gegebenen Bruchs in die ganze Zahl, und dessen Nenner der Nenner des gegebenen Bruches ist. Dieser Bruch ist das gesuchte Product.

Zweyter Fall. Wenn auch der Multiplicandus ein Bruch ist.

Man multiplicire den Zähler des Multiplicators in den Zähler des Multiplicandus, und den Nenner des Multiplicators in den Nenner des Multiplicandus: so ist das gesuchte Product ein Bruch, dessen Zähler jenes Product der beyden Zähler, und dessen Nenner das Product beyder Nenner ist.

Beweis. Den Beweis für den ersten Fall könnte man aus §. 18. herleiten; denn wenn es einerley ist, welchen der beyden Factoren man als Multiplicator betrachtet, so ist dieser Fall einerley mit dem in der vorigen Aufgabe aufgelös'ten Falle. Man kann aber den Beweis für diesen Fall auch leicht aus dem, welchen ich jetzt für den zweyten Fall mittheilen und an einem Beyspiele erläutern will, herleiten. Soll man z. B. $\frac{3}{7}$ mit $\frac{8}{13}$ multipliciren, so heißt das $\frac{3}{7}$ in 13 gleiche Theile eintheilen und 8 davon zusammen nehmen. Theilt man nun $\frac{1}{7}$ in 13 gleiche Theile, so erhält man Theile, deren 13 mal 7, das ist 91 ein Ganzes machen; ein solcher Theil, der dreyzehnte Theil eines Siebentels, ist also $\frac{1}{91}$, folglich der dreyzehnte Theil von 3 Siebenteln ist $\frac{3}{91}$, und endlich 8 solcher Theile zusammen sind $\frac{24}{91}$ oder $\frac{3 \cdot 8}{7 \cdot 13}$, wie der Regel in der Auflösung gemäß ist. Und was von diesem Beyspiele gilt, würde von jedem andern auch gelten.

42. Zwölfte Aufgabe. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren.

Erste Auflösung. Man dividire den Zähler des Bruchs durch die gegebne ganze Zahl, und mache den Quotienten zum Zähler eines neuen Bruches, welchem man den Nenner des gegebnen Bruchs zum Nenner giebt. Der herauskommende Bruch zeigt an, wie oft die ganze Zahl in dem gegebenen Bruche enthalten sey, oder eigentlich was für Theile man erhält, wenn man den gegebenen Bruch so eintheilt, wie der Divisor verlangt.

Zweyte Auflösung. Man multiplicire den Nenner des gegebenen Bruchs mit der zum Divisor gegebenen ganzen Zahl, und mache dies Product zum Nenner eines Bruches, dessen Zähler mit dem Zähler des gegebenen Bruches einerley ist. Der gefundene Bruch ist der verlangte Quotient.

Beyspiel. Den Bruch $\frac{21}{26}$ mit 7 zu dividiren. Man findet den Quotienten nach der ersten Regel $\frac{3}{26}$, nach der zweyten Regel $\frac{21}{182}$, beyde Ausdrücke sind gleichbedeutend (§. 31.).

Beweis. Die Division verlangt, daß man den Dividendus in so viele gleiche Theile zerlege, als der Divisor angiebt, und die Größe eines solchen Theiles bestimme. Dieses thut man offenbar nach der ersten Regel, denn man behält Theile derselben

Art, wie sie der Dividendus enthält, und zerlegt, indem man den Zähler dividirt, die Anzahl der Theile, so wie der Divisor verlangt. Befolgt man dagegen die zweyte Regel: so zertheilt man, indem man den Nenner des Dividendus multiplicirt, jeden Theil des Dividendus in so viele Stücke, als der Divisor verlangt; offenbar also muß man von diesen so viel mal verkleinerten Stücken eben so viele nehmen, als der Dividendus enthielt.

Anmerk. Bey Brüchen, wo die Division des Zählers (nach der ersten Auflösung) nicht ohne Rest aufgeht, bedient man sich, um den Quotienten zu finden, lieber der zweyten Methode; hingegen ist die erste Methode vorzuziehen, wenn der Zähler des Dividendus durch den Divisor ohne Rest theilbar ist.

43. 13te Aufgabe. Einen Bruch mit einem Bruche zu dividiren.

Auflösung. Man bringe beyde Brüche auf einerley Nenner: so ist der gesuchte Quotient ein Bruch, dessen Zähler der so veränderte Zähler des Dividendus, und dessen Nenner der auf gleiche Weise veränderte Zähler des Divisors ist.

Beyspiel. $\frac{5}{11}$ mit $\frac{7}{13}$ zu dividiren. Bringt man diese Brüche auf einerley Nenner, so sind sie $\frac{65}{143}$ und $\frac{77}{143}$, der gesuchte Quotient ist also $\frac{65}{77}$.

Beweis. Wenn man die Brüche auf einerley Nenner gebracht hat: so ist offenbar der eine Bruch eben so oft in dem andern enthalten, als der Zähler von jenem in dem Zähler von diesem; denn gewiß sind z. B. $\frac{4}{7}$ das Doppelte von $\frac{2}{7}$, eben so wol als 4 das Doppelte von 2 ist. Da man nun die Division der beyden Zähler, wenn man sie als ganze Zahlen betrachtet, dadurch andeuten kann, daß man sie als Bruch (nach §. 30.) schreibt: so erhellt die Richtigkeit der Auflösung.

44. Man giebt gewöhnlich die Regel: man solle, um zwey Brüche durch einander zu dividiren, den Divisor umkehren, oder seinen Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler machen, und den so veränderten Divisor in den Dividendus (nach §. 41.) multipliciren. Diese Regel kommt mit der hier gegebenen auf eins hinaus. Jn dem Beyspiele des vorigen §. hatte man nämlich zum Dividendus $\frac{5}{11}$, zum umgekehrten Divisor $\frac{13}{7}$, und $\frac{5}{11}$ mit $\frac{13}{7}$ multiplicirt giebt $\frac{65}{77}$, wie dort für den Quotienten.

45. Man kann die letztere Aufgabe leicht auf den Fall anwenden, da der Dividendus eine ganze Zahl ist. Jn diesem Falle nämlich kann man den Dividendus leicht in einen Bruch verwandeln, dessen Nenner mit dem Nenner des Divisors einerley ist.

Beyspiel. Man soll 18 mit $\frac{6}{25}$ dividiren. Da 18 einerley ist mit $\frac{450}{25}$: so ist der Quotient $\frac{450}{6}$, das ist 75. Der Bruch $\frac{6}{25}$ ist also in 18, 75 mal enthalten.

* 46. 14te Aufgabe. Einen Bruch, ohne daß sein Werth geändert wird, durch die möglichst kleinsten Zahlen im Zähler und Nenner auszudrücken.

Auflösung. Man bringt einen Bruch, ohne seinen Werth zu ändern, auf kleinere Zahlen, wenn man Zähler und Nenner mit einerley Zahl dividirt. Da es aber oft Schwierigkeit hat, anzugeben, ob es Zahlen giebt, durch welche der Zähler sowol als der Nenner sich ohne Rest dividiren lassen: so dienen zu Bestimmung des größten möglichen Divisors folgende Regeln:

1. Man dividire die größere Zahl durch die kleinere, ohne darauf zu sehen, welche von beyden Nenner oder Zähler ist, und bemerke sich den Rest, welchen ich den ersten Rest nennen will. Bleibt hier kein Rest, so ist die kleinere Zahl selbst der gesuchte Divisor.

2. Hat man vorhin einen Rest behalten: so dividire man die kleinere Zahl durch diesen ersten Rest und bemerke den hier übrig bleibenden zweyten Rest; giebt es aber keinen zweyten Rest, oder geht diese Division auf, so ist der erste Rest der gesuchte Divisor.

3. Ist ein zweyter Rest geblieben, so dividire man den ersten Rest durch den zweyten Rest und bemerke den dritten, hier bleibenden Rest; bleibt hier kein Rest, so ist der zweyte Rest der gesuchte Divisor.

4. Und so fahre man fort den zweyten Rest durch den dritten, den dritten durch den vierten und

so ferner zu dividiren, bis endlich eine dieser Divisionen aufgeht, dann ist der zuletzt gefundene Rest der gesuchte größte Divisor, welchen es für die beyden gegebenen Zahlen giebt.

Beyspiel. Den Bruch $\frac{5145}{5943}$ durch die möglichst kleinsten Zahlen auszudrücken. — 5943 mit 5145 dividirt, läßt 798 zum ersten Reste; 5145 mit 798 dividirt, läßt 357 zum zweyten Reste; 798 mit 357 dividirt, läßt 84 zum dritten Reste; 357 mit 84 dividirt, läßt 21 zum vierten Reste; endlich 84 mit 21 dividirt, geht auf. Also ist 21 der gesuchte Divisor, und es ist $\frac{5145}{5943} = \frac{245}{283}$.

Beweis. Daß die so gefundene Zahl wirklich in beyden Zahlen aufgeht, erhellt aus folgendem: Geht die erste Division auf, so braucht es nicht bewiesen zu werden, daß die kleinere Zahl selbst der gesuchte Divisor ist. Bleibt aber hier (in nr. 1.) ein Rest, so kann man die größere Zahl als aus zwey Theilen bestehend betrachten, aus einem Vielfachen der kleinern Zahl und diesem ersten Reste. Geht nun die zweyte Division auf (nr. 2.), so ist eben darum die kleinere Zahl ein genaues Vielfaches des ersten Restes; aber auch die größere Zahl ist dann durch diesen Rest theilbar, denn ihr erster Theil ist ein Vielfaches des kleinern, und also durch alle die Zahlen theilbar, welche in dieser aufgehen, und ihr zweyter Theil ist der erste Rest selbst; beyde Theile der größern Zahl, und folglich auch diese ganze Zahl, lassen sich also dann durch den ersten Rest dividiren. Findet der dritte Fall (nr. 3.) statt, daß bey der dritten Division kein Rest bleibt, so ist der erste Rest ein Vielfaches des zweyten, und die kleinere Zahl, welche aus einem Vielfachen des ersten Restes und aus dem zweyten Reste besteht, ebenfalls durch den zweyten Rest divisibel, und folglich endlich beyde Theile der größern Zahl und also auch diese selbst durch den zweyten Rest theilbar. Und so läßt sich immer der Beweis führen, daß der letzte Rest ein gemeinschaftlicher Divisor für beyde Zahlen ist.

Daß aber dieser gemeinschaftliche Divisor zugleich auch der größte ist, welchen es für jene beyden Zahlen giebt, wollen wir nur für den Fall nr. 2. beweisen, da die zweyte Division aufgeht; die Anwendung auf die übrigen Fälle ist dann nicht sehr schwer.

In diesem Falle ist die kleinere Zahl ein Vielfaches des ersten Restes und die größere besteht aus einem Vielfachen der kleinern Zahl und aus eben dem ersten Reste. Nun gehen zwar alle Zahlen, die in der kleinern Zahl aufgehen, auch in dem ersten Theile der größern auf; aber unter diesen verschiedenen möglichen Divisoren wird es vielleicht nur wenige geben, welche zugleich in dem zweyten Theile der größern Zahl oder im ersten Reste aufgehen, gewiß aber giebt es keinen größern gemeinschaftlichen Divisor für beyde Theile der größern Zahl, als den ersten Rest selbst, und dieser ist folglich auch der größte gemeinschaftliche Divisor der beyden zuerst gegebenen Zahlen.

Von den Decimalbrüchen.

47. Erklärung. Decimalbrüche nennt man alle Brüche, deren Nenner bloß aus einer Eins mit angehängten Nullen besteht, oder deren Nenner 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. ist.

Beyspiele. $\frac{9}{10}$, $\frac{25}{1000}$, $\frac{175}{100000}$, $\frac{27358}{1000}$.

48. **3ter Lehrsatz.** Jeden Decimalbruch, der im Zähler mehr als eine Ziffer hat, kann man als Summe mehrerer Decimalbrüche ausdrücken, deren jeder im Zähler nur eine Ziffer hat.

Beweis. Ein solcher Bruch, wie $\frac{725}{10000}$, ist offenbar die Summe von $\frac{7}{100}$, $\frac{2}{1000}$ und $\frac{5}{10000}$, und man kann sich leicht überzeugen, daß eine solche Zerfällung des Bruches allemal statt findet.

49. Hat man also eine ganze Zahl mit angehängtem Decimalbruche, z. B. $27\frac{9758}{10000}$, so ist diese $= 27 + \frac{9}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{8}{10000}$. Die Nenner aller dieser Brüche sind durch nichts von einander verschieden, als durch die Menge der Nullen, welche nach der Eins folgen, und deshalb ist es möglich, sie ganz ohne Nenner zu schreiben, und ihren Werth oder den Nenner, welcher ihnen zukömmt, auf andere Weise anzudeuten.

50. **Willkührlicher Satz.** Wenn man eine ganze Zahl mit angehängtem Decimalbruche hat, und der letztere in seine einfachen Theile zerlegt ist: so schreibe man die ganze Zahl auf die gewöhnliche Weise und mache hinter derselben ein Comma; hinter das Comma setze man in derselben Zeile den Zähler der Zehntheile, gleich dahinter den Zähler der Hundert-

theile, dann den Zähler der Tausendtheile u. s. w., so daß also jede folgende Ziffer immer einen zehnfach geringern Werth hat, als die nächst vorhergehende.

Beyspiel. Die Zahl $325\frac{275807}{1000000}$ ist also $= 25, 275807$.

Die Zahl $7\frac{25}{10000}$ ist $= 7, 0025$, weil es hier keine Zehntel und Hunderttel giebt, also in deren Stellen Nullen kommen.

Hätte man gar keine ganze Zahl, sondern z. B. $\frac{375}{1000}$, so würde man schreiben $0, 375$; und hier ist die voranstehende Null nicht überflüssig, da man ohne sie den Ort, wo das Comma stehen muß, oder wo die Brüche anfangen, nicht anzeigen könnte, und folglich den Werth der Ziffern unbestimmt ließe.

Man kann so gar mehr als eine Null vorn anzusetzen genöthigt seyn, wenn man z. B. $\frac{3}{100000}$ ausdrücken soll, wofür man schreibt: $0, 00003$. Dagegen sind hinter dem Comma angehängte Nullen eben so bedeutungslos, als bey ganzen Zahlen vorn an stehende Nullen.

51. 15te Aufgabe. Jeden gegebenen Bruch in Decimalbrüchen, so genau als es verlangt wird, auszudrücken.

Auflösung. Obgleich nicht jeder Bruch sich völlig genau in Decimalbrüchen ausdrücken läßt:

so kann man ihn doch allemal so genau durch dieselben ausdrücken, als es in jedem Falle verlangt wird. Daher

1. überlege man zuerst, wie genau der Bruch ausgedrückt werden soll, ob es z. B. hinlänglich ist, wenn der gefundene Decimalbruch nur nicht um mehr als $\frac{1}{10000}$, oder als $\frac{1}{100000}$ u. s. w. von dem wahren Werthe des gegebenen Bruches abweicht.

2. Hat man so bestimmt, bis zu was für Decimaltheilen genau man den Bruch ausdrücken will: so nehme man den Nenner solcher Bruchtheile zum Nenner des gesuchten Bruchs, und

3. verfahre dann völlig wie in der sechsten Aufgabe (§. 34.).

Beyspiel. Den Bruch $\frac{1}{7}$ in Decimalbrüchen bis auf $\frac{1}{1000000}$ genau auszudrücken. Man findet $\frac{1}{7} = 0,142857$. Eigentlich ist $\frac{1}{7} = \frac{142857\frac{1}{7}}{1000000}$; der vorige Ausdruck ist also nur um ein Siebentel eines Milliontheilchens fehlerhaft.

52. Anmerkung. Es kann beym ersten Anblicke zwar scheinen, als ob diese Verwandlung der gewöhnlichen Brüche in Decimalbrüche nicht vortheilhaft sey, da man sie nur selten völlig genau in Decimalbrüchen ausdrücken kann; aber wenn man bedenkt, daß man ohne sonderliche

Schwierigkeit den Ausdruck noch bis auf viel kleinere Theile genau machen kann, und dann die Unannehmlichkeit betrachtet, welche bey andern Brüchen statt findet, wenn man viele auf einerley Nenner bringen muß, so wird man bald die Bequemlichkeit des Gebrauchs der Decimalbrüche anerkennen.

53. 16te Aufgabe. Mehrere gegebene Decimalbrüche zu einander zu addiren.

Auflösung. 1. Man schreibe alle diese Brüche auf die vorhin (§. 50.) angegebene Weise, und setze sie so unter einander, daß die Commata und folglich auch alle Einer, alle Zehntheile, alle Hunderttheile u. s. w. gerade über einander stehn.

2. Man addire die gerade über einander stehenden einzelnen Ziffern völlig so, wie man es bey ganzen Zahlen macht, und übertrage die Vielfachen von zehn, die man an irgend einer Stelle erhält, gerade wie dort, auf die nächst höhere Stelle.

3. Wenn die Addition vollendet ist, setze man das Comma hinter die Summe der Einer; die herauskommende Zahl ist die gesuchte Summe.

Beyspiel. Die Zahlen 5, 0072; 0, 51 und 307, 405376 zu addiren.

$$\begin{array}{r@{,\,}l} 5 & 0072 \\ 0 & 51 \\ 307 & 405376 \\ \hline 312 & 922576 \end{array}$$

Eines Beweises werden diese Regeln nicht bedürfen, da der Beweis völlig auf denselben Gründen beruht, wie bey der Addition ganzer Zahlen.

54. 17te Aufgabe. Zwey in Decimalbrüchen gegebene Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. 1. Man setze wieder die Zahlen so unter einander, daß die Ziffern von einerley Art gerade über einander stehen. Haben die Zahlen nicht beyde gleich viele Ziffern hinter dem Comma: so hänge man der einen so viele Nullen an, bis die Menge der hinter dem Comma stehenden Ziffern bey beyden gleich ist.

2. Die Subtraction verrichte man völlig, wie bey ganzen Zahlen, und

3. setze man das Comma im gefundenen Reste dicht hinter die Differenz der Einer.

Beyspiel. $\frac{7}{3295}$ von $\frac{43}{409}$ zu subtrahiren.

Jene Brüche lassen sich bis auf $\frac{1}{10000000}$ genau durch nebenstehende Decimalbrüche ausdrücken, wo man dann die Differenz leicht findet. Hätte man die Brüche auf gewöhnliche Weise subtrahirt, so würde man erhalten haben: $\frac{138822}{1347655}$.

0, 1051344
0, 0021244
0, 10301

55. 18te Aufgabe. Zwey Zahlen, welche Decimalbrüche enthalten, in einander zu multiplicireu.

Auflösung. 1. Man verrichte die Multiplication völlig so, als wenn die Zahlen ganze Zahlen wären, ohne irgend Rücksicht auf das Comma zu nehmen.

2. Nach vollendeter Multiplication setze man im Producte das Comma so, daß so viele Ziffern des Productes hinter dem Comma stehen, als sich in beyden Zahlen zusammen hinter dem Comma befinden, oder als die Summe der Ziffern hinter dem Comma in beyden Zahlen beträgt.

Beyspiel. 5, 73 mit 0, 00075 zu multipliciren.

$$
\begin{array}{r}
5,\ 73 \\
0,\ 00075 \\
\hline
2865 \\
4011 \\
\hline
0,\ 0042975
\end{array}
$$

Hier kommen sieben Ziffern des Productes hinter dem Comma, weil im einen Factor zwey, im anderu fünfe hinter demselben sind.

Beweis. Daß man zuerst bey der Multiplication völlig so verfährt, wie bey ganzen Zahlen, ist offenbar richtig, da der Werth der einzelnen Ziffern gerade so wie dort in jeder nächsten Stelle zehnfach höher ist, als in der nächst niedrigern. Indeß läßt sich die Richtigkeit auch der zweyten Regel sehr leicht übersehen, wenn man die Brüche mit ihren Nennern schreibt. Denn alsdann ist der Zähler das Product beyder Zähler, welche nun offenbar (wie in der Regel nr. 1.) als ganze Zahlen (§. 41.) multiplicirt werden; der Nenner aber ist das Product beyder Nenner, und enthält nun hinter der Eins so viele Nullen, als die Anzahl der Nullen in beyden andern Nennern zusammen beträgt. Da nun, wenn man das Product ohne Nenner schreibt, eben so viele Ziffern hinter dem Comma stehen müssen, als der Nenner Nullen enthielt: so erhellet auch die Richtigkeit der vorigen Regel.

Im vorigen Beyspiele würde man finden: $\frac{573}{100}$ multiplicirt mit $\frac{75}{100000} = \frac{42975}{10000000}$.

56. 19te Aufgabe. Zwey Zahlen, welche Decimalbrüche enthalten, durch einander zu dividiren.

Auflösung. 1. Da der Zweck dieser Division ist, auch den Quotienten in Decimalbrüchen ausgedrückt zu erhalten, und man nur selten annehmen darf, daß die Division aufgehen werde: so überlege man zuerst, bis zu was für Theilen genau man den Quotienten ausgedrückt zu haben verlangt.

2. Man gebe den Dividendus, wenn er nicht schon ohnehin so viele Ziffern hinter dem Comma hat, durch hinten angehängte Nullen so viele Ziffern hinter dem Comma, als die Zahl von Ziffern hinter dem Comma im Divisor, zusammengenommen mit der Zahl der Nullen im Nenner des Decimaltheils beträgt, bis zu welchem genau der Quotient bestimmt werden soll.

3. Die Division verrichte man völlig so, wie bey ganzen Zahlen.

4. Endlich setze man im Quotienten das Comma so, daß die Anzahl der Ziffern hinter dem Comma im Quotienten gleich ist dem Unterschiede zwischen der Menge von Ziffern, die sich in dem nach nr. 2. veränderten Dividendus, und die sich im Divisor hinter dem Comma befinden.

Beyspiel. 579, 03 mit 0, 07 zu dividiren. Wollte man sich hier begnügen, den Quotienten bloß in ganzen Zahlen auszudrücken und alle Brüche wegzulassen: so hätte man nicht nöthig, die in nr. 2. erwähnte Veränderung mit dem Dividendus vorzunehmen. Man erhielte dann den Quotienten = 8271, wo aber noch Brüche hinzukommen müßten. Soll hingegen der Quotient bis auf $\frac{1}{1000}$ genau gefunden werden, so muß man 57903000 mit 7 dividiren, und erhält, wenn man das Comma nach nr. 4. gehörig setzt, 8271, 857 zum Quotienten.

Beweis. Der Beweis für die gegebenen Regeln beruht auf dem, was im Allgemeinen von Division der Brüche (§. 43.) und von Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche (§. 51.) gelehrt ist. Schreibt man nämlich die zu dividirenden Decimalbrüche mit ihren Nennern, und bringt sie auf einerley Nenner, z. B. im vorigen Exempel $\frac{57903}{100}$ und $\frac{7}{100}$: so ist der Quotient $\frac{57903}{7}$; und wenn man diesen Bruch (nach §. 51.) auf einen Decimalbruch bringt, so ergiebt sich eben das Resultat, wie vorhin.

Uebungs-Exempel. Zu addiren 57, 98594; 0, 782 und 0, 0000743.

Folgende Brüche auf Decimalbrüche zu bringen und zu addiren: $\frac{7}{9}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{18}{302}$, $\frac{15}{419}$.

Folgende Brüche auf Decimalbrüche zu bringen und von einander zu subtrahiren: $\frac{4}{1954}$ von $\frac{517}{3712}$; $\frac{29}{3274}$ von $\frac{1}{23}$; und $\frac{394}{516}$ von 5, 7348290.

Folgende Zahlen in einander zu multipliciren: 35, 070842 in 0, 0007589; 38947, 3 in 5, 0000072; 0, 005432 in 0, 00000076.

Endlich folgende Zahlen durch einander zu dividiren: 7, 485764 durch 0, 00573421; 0, 00005 durch 27, 5437; 29, 00567321 durch 123, 456789; und 0, 57 durch 1009, 00027.

Dritter Abschnitt.

Von den vier Rechnungs-Arten mit benannten Zahlen.

57. Erklärung. Im Vorigen haben wir die Zahlen immer nur bloß im Allgemeinen betrachtet, ohne uns bestimmte Dinge, welche abgezählt würden, zu denken, oder wir haben sie als unbenannte Zahlen betrachtet; wir werden jetzt die Anwendung der vorigen Sätze auf benannte Zahlen machen, das ist auf solche, welche sich auf bestimmte Maße, Gewichte u. s. w. beziehn.

58. Bemerkung. Die Rechnung mit benannten Zahlen würde sich in gar nichts von der Rechnung mit unbenannten Zahlen unterscheiden, wenn bey unsern Maßen, Münzen und Gewichten nicht überall Unterabtheilungen vorkämen, die wir mit eignen Namen bezeichnen; aber wegen dieses Umstandes kann es sich ereignen, daß wir Größen zu einander addiren müssen, die verschiedne Namen haben, (z. B. Pfunde zu Lothen), die aber als gleichartig anzusehn sind, weil die Größe, welche den einen Namen führt, ein bestimmter Theil oder ein bestimmtes Vielfaches der anders benannten Größe ist.

Um nun mit solchen benannten Zahlen zu rechnen, muß man diese Eintheilungen kennen, oder wissen, wie viele Ganze der kleinern Art ein Ganzes der größern Art ausmachen, z. B. wie viel Lothe auf ein Pfund gehen.

59. 20ste Aufgabe. Es sind mehrere gleichartige benannte Zahlen, die aber aus ungleich benannten Theilen bestehen können, gegeben; man soll die Summe derselben bestimmen.

Auflösung. 1. Man schreibe die Zahlen, wenn eine oder mehrere derselben aus ungleich benannten Theilen bestehn, so, daß vorne die Ganzen der größesten Art stehn, dahinter die nächst kleinern und dann die noch kleinern folgen, z. B. 5 Centner 97 Pfunde 13 Lothe. Auch setze man die gleich benannten Theile der zu addirenden Zahlen gerade unter einander.

2. Man fange mit der Summirung der vorhandenen Ganzen der kleinsten Art an. Beträgt die herauskommende Summe nicht so viel, als von diesen auf ein Ganzes der nächst größern Art gehen: so schreibt man sie sogleich als einen Theil der gesuchten Summe hin. Beträgt sie hingegen mehr: so sucht man, wie viele Ganze der nächst größern

Art in dieser Summe enthalten sind, und schreibt nur hin, wie viele Ganze der kleinsten Art man noch außerdem hat, behält aber im Sinne, wie viele Ganze der nächst größern Art man erhalten hatte.

3. Die im Sinne behaltne Anzahl von Ganzen der nächst größern Art zählt man zu dem, was außerdem in den zu addirenden Zahlen von derselben Art vorhanden ist, und überträgt, wenn es nöthig ist, wenn man nämlich mehrere Ganze dieser Art erhält, als ein Ganzes der nächst größern Art ausmachen, von dieser Summe auf diese nächst größere Art. Und so geht man alle Theile der gegebenen Zahlen ganz durch, wo man dann offenbar die richtige Summe findet.

Beyspiel. Das nebenstehende Exempel zeigt das ganze Verfahren, und es ist nur zu bemerken, das 1 Centner = 112 Pfund, 1 Pfund = 32 Loth ist.

	7 Centn.	57 Pf.	15 Loth
	19 Centn.	94 Pf.	30 Loth
		74 Pf.	9 Loth
Summe	28 Centn.	2 Pf.	22 Loth

60. 21ste Aufgabe. Zwey benannte Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. 1. Man schreibe die Zahlen so unter einander, wie in der vorigen Aufgabe; und zwar ist es gewöhnlich, die größere Zahl oben zu schreiben.

2. Sind nun die Zahlen so beschaffen, daß von jeder Art von Theilen in der größern Zahl mehrere vorhanden sind, als in der kleinern: so hat die Subtraction gar keine Schwierigkeit und man braucht bloß die gleich benannten Theile jeden für sich von einander zu subtrahiren und die Reste als Theile der gesuchten Zahl hin zu setzen.

3. Im entgegengesetzten Falle, wo die größere Zahl von irgend einer Art von Ganzen wenigere enthält als die kleinere Zahl, ist man genöthigt zu borgen. Man rechnet nämlich dann in der größern Zahl ein Ganzes von denen der nächst größern Art ab, und legt dafür der nächst kleinern Art so viele Ganze zu, als auf jenes Eine Ganze der größern Art gehn. Die fernere Subtraction hat dann keine Schwierigkeit.

Beyspiel. Von 25 Rthlr. 19 Ggr. 8 Pf. abzuziehen 19 Rthl. 23 Ggr. 4 Pf.

25 Rthlr.	19 Ggr.	8 Pf.
19 Rthlr.	23 Ggr.	4 Pf.
5 Rthlr.	20 Ggr.	4 Pf.

61. 4ter Lehrsatz. Bey jeder Multiplication muß wenigstens der Multiplicator eine unbenannte Zahl seyn.

Beweis. Da der Multiplicator angiebt, wie vielmal man eine andre Zahl nehmen oder zu sich selbst addiren soll: so ist es gewiß ungereimt, hierzu eine benannte Zahl gebrauchen zu wollen.

Anmerkung. Die Fälle, wo man, nach der gewöhnlichen Art zu rechnen, benannte Zahlen mit benannten Zahlen zu multipliciren glaubt, müssen eigentlich anders betrachtet werden, wie sich in der Folge zeigen wird.

62. 22ste Aufgabe. Eine benannte Zahl und eine unbenannte Zahl in einander zu multipliciren.

Erste Auflösung. Betrachtet man die unbenannte Zahl als Multiplicator, so multiplicirt man mit derselben jeden einzelnen verschieden benannten Theil der andern Zahl und es ist dabey nichts weiter zu bemerken, als daß man da, wo man von Ganzen einer kleinern Art mehrere erhält, als davon auf ein Ganzes der nächst größern Art gehen, von diesen gehörig auf die nächst größere Art überträgt, so wie in der 20sten Aufgabe nr. 2. und 3. angezeigt ist.

Zweyte Auflösung. Es kann zuweilen bequemer seyn, die benannte Zahl als Multiplicator anzusehn und dann lassen sich manchmal einige Erleichterungen der Rechnung anbringen, welche ich im folgendem Exempel erläutern will.

Soll man 10 Pfund 21 Loth mit 97589 multipliciren, so ist das Product gewiß ganz dasselbe, als wenn man

96589 Pfund mit $10\frac{21}{32}$ zu multipliciren hätte. Diese Multiplication läßt sich nach §. 41. verrichten; man kann aber bequemer den Bruch in Theile zerlegen und mit jedem Theile besonders multipliciren. Da nämlich $\frac{21}{32} = \frac{16}{32} + \frac{4}{32} + \frac{1}{32}$, oder $= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$, so kann man sehr bequem zuerst die Hälfte des Multiplicandus, dann das Viertel dieser Hälfte, das ist das Achtel des Multiplicandus, endlich das Viertel dieses Achtels, das ist den zwey und dreyßigsten Theil des Multiplicandus nehmen. Man hat also

$$\begin{array}{rcl} 10 \times 97589 &=& 975890 \text{ Pfund} \\ \frac{1}{2} \times 97589 &=& 48794\frac{1}{2} \text{ —} \\ \frac{1}{8} \cdot 97589 = \frac{1}{4} \times 48794\frac{1}{2} &=& 12198\frac{5}{8} \text{ —} \\ \frac{1}{32} \cdot 97589 = \frac{1}{4} \times 12198\frac{5}{8} &=& 3049\frac{21}{32} \text{ —} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{also } 10\frac{21}{32} \times 97589 = 1039932\frac{25}{32} \text{ Pfund}$$
$$\text{oder} = 1039932 \text{ Pfund } 25 \text{ Loth.}$$

60. Anmerkung. Dieses Zertheilen oder Zerstreuen der Brüche erleichtert oft die Rechnung sehr; es erfordert aber einige Uebung, um bey verschiednen Nennern und Zählern die vortheilhafteste Eintheilung der Brüche zur Erleichterung der Rechnung zu finden.

64. 5ter Lehrsatz. **Bey der Division benannter Zahlen ist allemal entweder der Divisor oder der Quotient eine unbenannte Zahl.**

Beweis. Bey der Division fragt man entweder, wie oft der Divisor im Dividendo enthalten sey, und in diesem Falle müssen beyde gleichartige Zahlen seyn, der Quotient aber wird eine unbenannte Zahl; oder man fragt, wie groß ein Theil des Dividendus werde, wenn man ihn in so viele Stücke theilt, als der Divisor angiebt, und hier ist offenbar der Divisor eine unbenannte, der Quotient aber eine mit dem Dividendus gleich benannte Zahl.

65. 23ste Aufgabe. Eine benannte Zahl durch eine benannte oder unbenannte Zahl zu dividiren.

Auflösung. Erster Fall. Ist der Divisor eine benannte Zahl: so ist es am bequemsten, Dividendus und Divisor ganz auf einerley Namen zu bringen, nämlich statt der verschieden benannten Theile die gehörige Anzahl derjenigen Ganzen zu setzen, die unter den vorkommenden die kleinsten sind, indem man z. B. statt 7 Pfund 12 Loth, 236 Loth setzt. Alsdann geschieht die Division völlig wie bey unbenannten Zahlen.

Zweyter Fall. Wenn der Divisor eine unbenannte Zahl ist: so dividirt man mit demselben zuerst die Anzahl der vorhandenen Ganzen der größesten Art und erhält zum Quotienten Ganze derselben Art; den Rest verwandelt man in Ganze der nächst kleinern Art, und nimmt dazu was im Dividendo gleichartiges vorhanden ist und setzt die Division hier und bey den etwa noch vorhandenen kleinern Theilen eben so wie bey den größesten fort.

Beyspiel. Man soll 2579 Rthlr. 7 Ggr. 5 Pf. mit 16 dividiren. Von der größten Art hat man 2579, welche mit 16 dividirt, 161 Rthlr. geben und 3 Rthlr. zum Reste lassen. Diese 3 Rthlr. sind 72 Ggr., also mit den sonst noch vorhandenen 7 Ggr. zusammen 79 Ggr. Diese mit 16 dividirt, geben im Quotienten 4 Ggr. und zum Reste 15 Ggr. Da nun 15 Ggr. = 180 Pfennige, so beträgt der ganze Rest 185 Pfennige, und der letzte Theil des Quotienten $11\frac{9}{16}$ Pfennige. Der ganze Quotient ist demnach 161 Rthlr. 4 Ggr. $11\frac{9}{16}$ Pfennig.

Vierter Abschnitt.

Erste Grundlehren von den Gleichungen.

66. Erklärung. Jeder arithmetische Satz, welcher eine Gleichheit zwischen zwey verschiedenen Größen ausdrückt, heißt eine Gleichung.

Beyspiel. So ist also schon der Ausdruck $4 = 2 . 2$; oder $7 = 5 + 2$, eine Gleichung. Indeß sind die Fälle, wo man eigentlich Gebrauch von Gleichungen macht, diejenigen, wo die gleichen Größen auf eine mehr verwickelte Art ausgedrückt sind, und wo eine unbekannte Größe durch eine solche gegebene Gleichung bestimmt werden soll.

67. Grundsatz. Wenn man in einer Gleichung zu jeder der beyden gleichen Größen gleich viel addirt; oder, wenn man von jeder der beyden gleichen Größen gleich viel subtrahirt: so sind im ersten Falle die Summen und im letzten Falle die Reste gleich.

Beyspiel. Es ist $5 \cdot 7 = 29 + 6$, und folglich wenn man zu beyden 7 addirt, so ist auch

$$5 \cdot 7 + 7 = 29 + 6 + 7, \text{ oder}$$
$$6 \cdot 7 = 29 + 13.$$

Eben so ist $25 + 8 = 10 + 15 + 8$, und daher, wenn man von beyden Größen 8 abzieht

$$25 = 10 + 15.$$

68. Grundsatz. Wenn man in einer Gleichung beyde gleiche Größen mit einerley Zahl multiplicirt oder mit einerley Zahl dividirt: so sind im erstern Falle die beyden Producte, und im letztern die beyden Quotienten gleich.

Beyspiel. Da 10 Rthlr. = 240 Sgr., so ist auch das Doppelte 20 Rthlr. = 480 Sgr. und auch die Viertel jener Größen sind einander gleich, nämlich $2\frac{1}{2}$ Rthlr. = 60 Sgr. u. s. w.

69. Grundsatz. Hat man zwey verschiedene Gleichungen, also vier verschieden

ausgedrückte Größen, von denen die erste und zweyte einander gleich, und auch die dritte und vierte einander gleich sind: so erhält man gleiche Summen, wenn man die erste jener Größen zur dritten und die zweyte zur vierten addirt; und eben so erhält man gleiche Größen, wenn man die erste jener Größe von der dritten und die zweyte von der vierten abzieht.

Beyspiel. Man hat 48 Ggr. = 2 Rthl.
und 96 Ggr. = 6 Gulden.
also die Summe 144 Ggr. = 2 Rthlr. + 6 Gulden.
und der Unterschied 48 Ggr. = 6 Gulden — 2 Rthlr.

70. Aus dem letzten Grundsatze folgt, wenn man auch mehrere Gleichungen hat, daß die Summe aller vor dem Gleichheits-Zeichen stehenden Größen eben so groß ist, als die Summe aller Größen, welche hinter demselben stehen.

Beyspiel. Da 2 Louisd'or = 10 Rthlr.
15 Rthlr. = 360 Ggr.
20 Gulden = 320 Ggr.

so ist auch
2 Louisd'or + 15 Rthl. + 20 Guld. = 10 Rthl. + 680 Ggr.
und ferner 2 Louisd. + 5 Rthlr. + 20 Guld. = 680 Ggr.

71. Grundsatz. Wenn man zwey verschiedene Gleichungen hat, und man mul-

tiplicirt die beyden vor dem Gleichheits-Zeichen stehenden Größen in einander, und eben so die beyden nach dem Gleichheits-Zeichen stehenden Größen: so sind die Producte gleich. Und auf ähnliche Weise erhält man gleiche Quotienten, wenn man die in der ersten Gleichung vor dem Gleichheits-Zeichen stehende Größe durch die in der letzten Gleichung vor demselben stehende Größe dividirt, und zugleich die in der ersten Gleichung hinter dem Gleichheits-Zeichen stehende Größe mit derjenigen dividirt, welche in der letzten Gleichung hinter demselben steht.

Beyspiel. Da 5 Rthl. = 120 Ggr.
und $\frac{48}{24} = 2$

so sind die Producte $\frac{240}{24}$ Rthl. = 240 Ggr.

Ferner da $10 . 8 = 40 . 2$
und $10 = 2 . 5$

so giebt die Division $\frac{10 . 8}{10} = \frac{40 . 2}{2 . 5}$

das ist $8 = \frac{40}{5}$

72. Der vorige Grundsatz gilt in Rücksicht der Multiplication auch dann noch, wenn man mehrere Gleichungen hat und alle vor dem Gleichheits-Zeichen stehende Größen in einander, und so auch alle

nach dem Gleichheits-Zeichen stehende Größen in einander multiplicirt; denn auch in diesem Falle werden die Producte einander gleich.

73. Dieses sind die Grundsätze, auf welchen die ganze Lehre von den Gleichungen und die ganze Algebra beruht. Um den Gebrauch derselben und das Verfahren bey Bestimmung unbekannter Größen durch gegebene Gleichungen zu zeigen, folgen hier einige Beyspiele. Die vollständigere Abhandlung dieser Lehre gehört in die Algebra.

74. Erstes Exempel. Aus den beyden Gleichungen 48 Ggr. = 2 Rthlr. und 144 Ggr. = 9 Gulden zu bestimmen, wie viele Gulden auf einen Reichsthaler gehn.

Die erste Gleichung	48 Ggr. = 2 Rthlr.	giebt
mit 3 multiplicirt	144 Ggr. = 6 Rthlr.,	
da nun auch	144 Ggr. = 9 Gulden,	
so sind auch	6 Rthlr = 9 Gulden,	und
indem man mit 6 dividirt	1 Rthlr. = $1\frac{1}{2}$ Gulden.	

75. Zweytes Exempel. Es sind folgende Gleichungen gegeben:

20 Guineen = 21 Pf. Sterling,
1 Pf. Sterling = 204 Schill. Hamb. Banco.
5 Louisd'or = 835 Schill. Hamb. Banco.
endlich 1 Louisd'or = 120 Ggr.

man soll bestimmen, wie viele gute Groschen eine Guinee werth ist.

Die zweyte Gleichung giebt, wenn man sie mit 21 multiplicirt, 21 Pf. St. = 4284 Schill. Hamb. Bco.

also auch 20 Guineen $=$ 4284 Schill. Hamb. Bco.
und folglich 1 Guinee $=$ $214\frac{1}{5}$ Schill. Hamb. Bco.

Aus der letzten der vier Gleichungen folgt
5 Louisd'or $=$ 600 Ggr.
und dann aus der dritten Gleichung
600 Ggr. $=$ 835 Schill. Hamb. Bco.
Um diese Gleichung mit der vorhin gefundenen
1 Guinee $=$ $214\frac{1}{5}$ Schill. Hamb. Bco.
zu vergleichen, multiplicire ich jene mit $214\frac{1}{5}$ und dividire dann mit 835, dann ist nach der Multiplication
128520 Ggr. $= 214\frac{1}{5} \times 835$ Schill. Hamb. Bco.
wo es bequemer ist, die letztere Multiplication bloß anzudeuten, da die folgende Division sogleich den einen Factor aufhebt, und dann giebt die Division
$153\frac{765}{835}$ Ggr. $=$ $214\frac{1}{5}$ Schill. Hamb. Bco.
also 1 Guinee $=$ $153\frac{765}{835}$ Ggr.
oder 1 Guinee $=$ $153\frac{153}{167}$ Ggr. $=$ 6 Rthl. 9 Ggr. $10\frac{166}{167}$ Pf.

76. Drittes Exempel. Drey Personen A, B, C haben eine Summe von 1000 Rthlr. zu theilen und es ist bestimmt, daß B 50 Rthlr. mehr als A, C aber noch 75 Rthlr. mehr als B erhalten solle: es ist zu bestimmen, wie viel ein jeder erhält.

Um die unbekannte Summe, welche A bekommt, zuerst nur mit einem kurzen Zeichen anzudeuten, setze ich dafür das Zeichen x. Da nun B erstlich eben so viel als A, und zweytens noch 50 Rthlr. außerdem erhält, so läßt sich die Summe, welche B haben soll, durch x + 50 ausdrücken, und C bekommt noch 75 Rthlr. mehr, also

$x + 125$. Man hat also

für A die Summe $= x$;

für B die Summe $= x + 50$;

für C die Summe $= x + 125$;

Diese drey Summen zusammen betragen $3x + 175$, nämlich das Dreyfache der unbekannten Zahl x und außerdem noch 175. Die Summe dieser drey Größen soll so viel betragen, als die zu theilende Summe von 1000 Rthlr. Daher erhält man die Gleichung $3x + 175 = 1000$, oder $3x + 175$ Rthlr. $= 1000$ Rthlr.

Subtrahirt man hier von beyden gleichen Größen 175 Rthlr., so bleibt $3x = 825$ Rthlr., das heißt, das Dreyfache der Summe, welche A erhält, beträgt 825 Rthl.; also diese Summe selbst oder $x = 275$ Rthlr. Folglich bekommt A $= 275$ Rthlr.

B $= 275$ Rthlr. $+ 50$ Rthlr. $= 325$ Rthlr.

C $= 275$ Rthlr. $+ 125$ Rthlr. $= 400$ Rthlr.

welches zusammen 1000 Rthlr. beträgt.

Anhang.

Aus diesen Grundsätzen für die gleichen Größen lassen sich leicht folgende für ungleiche Größen herleiten.

77. Grundsatz. Wenn von zwey ungleichen Größen die erste größer ist, als die zweyte und man addirt zu jeder derselben

einerley Größe oder auch gleiche Größen, so ist die erste Summe größer als die zweyte; addirt man aber zu der ersten jener Größen mehr als zu der zweyten, so ist noch weit mehr die erste Summe größer, als die zweyte.

Beyspiel. Es ist 1 Ggr. $>$ 1 Pfennig, also auch 1 Ggr. und 1 Pfennig $>$ 2 Pfennig.

78. Grundsatz. Wenn von zwey ungleichen Größen die erste größer ist, als die zweyte, und man subtrahirt von beyden einerley oder auch gleiche Größen, so ist der erste Rest größer, als der zweyte; subtrahirt man von der ersten weniger, als von der zweyten, so ist noch weit mehr der erste Rest größer, als der zweyte. Hat man hingegen zwey gleiche Größen, und subtrahirt von der ersten mehr als von der zweyten, so ist der erste Rest kleiner als der zweyte.

Beyspiel. Da $8 > 7$, so ist auch $8-2 > 7-2$, und $8-1 > 7-1$; ferner ist $8-3 < 8-2$, oder $8-2 > 8-3$.

79. Grundsatz. Wenn von zwey ungleichen Größen die erste größer ist, als

die zweyte, und man multiplicirt beyde mit gleichen Größen, so ist das erste Product größer als das zweyte. Ferner wenn man eben jene Größen durch gleiche Größen dividirt, so ist der erste Quotient größer als der zweyte.

Beyspiel. $5 > 4$, $5 \cdot 3 > 4 \cdot 3$ und $\frac{5}{2} > \frac{4}{2}$.

80. Grundsatz. Wenn man gleiche Größen mit ungleichen Größen dividirt, nämlich die erste mit einer größern Zahl als die zweyte, so ist der erste Quotient kleiner als der zweyte.

Beyspiel. Es ist $\frac{7}{8} < \frac{7}{4}$.

81. Grundsatz. Wenn von vier Größen die erste größer ist als die zweyte, und die dritte größer als die vierte: so ist das Product der ersten in die dritte größer, als das Product aus der zweyten in die vierte. Hingegen ist der Quotient, welchen man bey der Division der ersten durch die vierte erhält größer, als der Quotient, welchen man erhält, indem man die zweyte durch die dritte dividirt.

Beyspiel. Da $11 > 9$ und $101 > 100$, so ist $11 \cdot 101 > 9 \cdot 100$, und auch $\frac{101}{9} > \frac{100}{11}$ und $\frac{11}{100} > \frac{9}{101}$.

Fünfter Abschnitt.

Von den entgegengesetzten Größen und der Buchstaben-Rechnung.

Von den entgegengesetzten Größen.

* 82. Erklärung. Man kann zuweilen gleichartige Größen in entgegengesetzten Rücksichten betrachten, so daß eine solche Größe, in der einen Beziehung genommen, grade das Gegentheil ist von einer sonst gleichen, aber in der entgegengesetzten Beziehung genommenen Größe. Alsdann geben diese beyden Größen vereinigt Null oder heben einander auf, und man nennt diese Größen entgegengesetzte Größen.

Beyspiele. So lange man eine Entfernung z. B. 10 Meilen in gar keiner weitern Beziehung betrachtet, sondern bloß auf die absolute Größe derselben sieht: so findet hier gar kein Gedanke an Entgegensetzung Statt. Sobald man aber die 10 Meilen als einen nach bestimmter Richtung zurückgelegten Weg ansieht: so ist der Weg rückwärts dem vorwärts zurückgelegten entgegengesetzt, und wer zuerst 10 Meilen vorwärts und darauf wieder 10 Meilen zurück geht, der ist am Ende weder nach der einen noch der andern Richtung weiter gekommen, so daß man also sagen darf, daß aus der Vereinigung dieser beyden, der Größe nach gleichen aber der Richtung nach entgegengesetzten Wege, Null hervorgeht, oder diese beyden entgegengesetzten Größen einander aufheben.

* 83. Sind die beyden entgegengesetzten Größen auch in Rücksicht auf die absolute Größe ungleich: so heben sie sich nicht ganz, aber doch zum Theil auf. Wenn ich einen Weg vorwarts zurückgelegt habe und fange nun an zurück zu gehn: so mache ich mit jedem Schritte, den ich rückwärts thue, einen Theil meiner vorhin angewandten Mühe vergeblich oder gleichsam ungeschehen, und entferne mich mit jedem Schritte weiter von dem vor mir liegenden Ziele, wohin eigentlich mein Weg gerichtet war.

Eben so sind Vermögen und Schulden entgegengesetzte Größen; denn wenn ich 50 Rthlr. Vermögen habe, und mache 20 Rthlr. Schulden: so zerstöre ich dadurch einen eben so großen Theil meines Vermögens, und wer 50 Rthlr. Vermögen hat und macht 50 Rthlr. Schulden, der behält gar nichts.

* 84. Erklärung. Von zwey entgegengesetzten Größen nennet man allemal die eine positiv oder bejahet, und die andre negativ oder verneint. Welche von beyden man positiv nennen will, ist eigentlich willkührlich.

Beyspiel. Schulden sind negatives Vermögen, und baares Vermögen ist negative Schuld.

* 85. Willkührlicher Satz. Man bezeichnet die als positiv angenommenen Größen mit +, die negativen mit —. Steht eine positive Größe allein oder auch vorn an, so pflegt man das Zeichen + wohl wegzulassen.

Beyspiel. Es bedenten also + 50 Rthlr. Vermögen, oder 50 Rthlr. Vermögen, (ohne vorgesetztes Zeichen,) so viel wirkliches Vermögen; hingegen — 50 Rthlr. Vermögen bedeuten 50 Rthlr. Schulden.

* 86. 24ste Aufgabe. Mehrere gleichartige, aber theils positive, theils negative Größen zu einander zu addiren.

Auflösung. Man addire die sämmtlichen positiven Zahlen wirklich, und ziehe die negativen davon ab. Ist die Summe aller positiven Zahlen größer, als die aller negativen Zahlen, so bezeichne man die erhaltene Zahl mit + oder sehe sie als positiv an; ist aber die Summe der negativen Zahlen die größere, so ziehe man die Summe der positiven davon ab und bezeichne den Rest mit —. Dieser erhaltene Rest ist das, was man als Summe der positiven und negativen Zahlen sucht.

Beweis. Die Addition soll lehren, was man erhält, wenn man die gegebenen Zahlen alle vereinigt, oder, um bey einem Beyspiele stehen zu bleiben, wie groß der wahre Betrag eines Vermögens ist, das aus mehrern Summen baaren Geldes und aus mehrern Summen passiver Schulden besteht. Hier muß man also offenbar alle positiven Summen, das heißt, welche zu Vermehrung des Vermögens beytragen, zusammen addiren, und davon alles negative, das ist, alle Schulden abrechnen; der Rest ist der wahre Betrag des Vermögens. Findet sich nun ein Ueberschuß der positiven Zahlen, so ist auch das gesammte Vermögen reell oder positiv; betragen aber die negativen Zahlen mehr, als die positiven, so ist auch das gesämmte Vermögen ein negatives, oder besteht nur aus Schulden.

Beyspiel. In einer bergigten Gegend, wo man abwechselnd aufwärts und herabwärts geht, findet man, daß man zuerst 1000 Fuß gestiegen, dann 1200 Fuß herabgestiegen sey, hierauf einen Weg in der Ebne gemacht und dann nochmals 700 Fuß herabgestiegen sey; zuletzt steigt man wieder 500 Fuß, und will nun wissen, wie viel höher der Punct, wo man zuletzt ankam, liegt, als derjenige, von welchem man ausgegangen ist. — Die letzte Frage: wie viel höher der letztere Punct liege, deutet an, daß man das Höhersteigen als das positive betrachtet; wir haben daher + 1000 — 1200 — 700 + 500, das ist — 400 Fuß, als die Höhe, um welche man gestiegen, und es erhellet hieraus, daß man wirklich sich nicht höher sondern niedriger befindet, als Anfangs.

* 87. 25ste Aufgabe. Zwey gegebene Größen von einander zu subtrahiren, wenn auch eine oder beyde negativ sind.

Erste Auflösung. Erster Fall. Sind beyde Größen positiv: so subtrahirt man auf gewöhnliche Weise und betrachtet den Rest als positiv, wenn die Aufgabe verlangt, die kleinere Zahl von der größern abzuziehn; hingegen betrachtet man den Rest als negativ, wenn verlangt wird, die größere von der kleinern zu subtrahiren.

Beyspiel. Wenn eine Person A 1000 Rthlr. besitzt, und eine andre B 1200 Rthlr., wie viel ist dann A reicher als B? Antwort: A ist nicht reicher als B, sondern um 200 Rthlr. ärmer, oder er ist um — 200 Rthlr. reicher als B. Hier zeigt nämlich das Zeichen — an, daß nicht das Statt finde, was die Frage eigentlich angiebt, sondern das Gegentheil.

Zweyter Fall. Wenn beyde Größen negativ sind: so verrichtet man die Subtraction wieder wie gewöhnlich; aber der Rest ist nun negativ, wenn die kleinere Zahl von der größern abgezogen werden sollte, und dagegen positiv, wenn man die größere von der kleinern abzuziehen verlangte.

Beyspiel. A hat 500 Rthlr. Schulden und B 300 Rthlr. Schulden, oder mit andern Worten: A hat — 500 Rthlr. Vermögen und B hat — 300 Rthlr. Vermögen; wie viel Vermögen hat A mehr als B? — Da A mehr Schulden hat als B, so ist er ärmer als dieser und zwar um 200 Rthlr.; die Antwort ist also, daß wenn man das Vermögen des B von dem Vermögen des A subtrahirt, — 200 Rthlr. zum Rest bleibt. Hätte man umgekehrt gefragt, wie viel B mehr besitzt als A, so hätte man die erstere Zahl von der letztern abziehn müssen und erhalten + 200 Rthlr., weil B wegen geringerer Schulden wirklich so viel mehr als A besitzt.

Dritter Fall. Soll man von einer positiven Größe eine negative subtrahiren: so addirt man beyde und giebt der Summe das Zeichen +. Diese Summe ist der gesuchte Unterschied.

Beyspiel. Wenn A 1500 Rthlr. baares Vermögen hat und B 500 Rthlr. Schulden, so ist der Unterschied des Vermögens offenbar 2000 Rthlr. und zwar hat A eine Summe von + 2000 Rthlr. mehr als B.

Vierter Fall. Wenn endlich eine positive Zahl von einer negativen abzuziehen ist: so findet man den Unterschied, indem man beyde addirt und die Summe als negativ betrachtet.

Beyspiel. Hätte man im letztern Beyspiele gefragt: um wie viel ist B reicher als A? so hätte man unstreitig antworten müssen, um — 2000 Rthlr.

Zweyte Auflösung. In allen einzelnen Fällen gilt folgende Regel: Man schreibe diejenige

Größe, von welcher man etwas subtrahiren soll, mit unverändertem Zeichen hin, und setze darunter die abzuziehende Größe, gebe aber der letztern das entgegengesetzte Zeichen von dem, welches sie eigentlich hat. Alsdann addire man beyde und gebe der Summe das Zeichen, welches dieselbe nach den Regeln der Addition haben muß (§. 86.). Diese Summe ist die gesuchte wahre Differenz.

Beyspiele. Es sind zwey Berge, deren einer 15000, der andere 12700 Fuß hoch ist; um wie viel ist der letztere höher als der erstere? Nach der Regel der zweyten Auflösung addirt man + 12700 zu — 15000, erhält also — 2300 Fuß, weil der letztere nicht höher sondern niedriger als jener ist.

Hätte man nicht den Höhen-Unterschied zweyer Berge oder positiver Höhen, sondern den Höhen-Unterschied der tiefsten Puncte zweyer Schlünde oder Schachten gesucht, deren einer 1200 Fuß tief oder — 1200 Fuß hoch, der andre — 500 Fuß hoch ist, und gefragt, wie viel liegt der tiefste Punct des erstern höher als des letztern; so hätte man — 1200 von — 500 subtrahiren oder zu + 500 addiren müssen, und — 700 erhalten, weil der tiefste Punct des erstern nicht höher, sondern tiefer liegt, als der des letztern.

Ferner, wenn man fragt: wie viel liegt die 12700 Fuß hohe Bergspitze über dem tiefsten Puncte des um 1200 Fuß vertieften Schachtes: so soll man — 1200, als die letzte Höhe, abziehen von + 12700; nach unsrer Regel also muß man + 12700 und + 1200 addiren, und der Höhen-Unterschied ist + 13900 Fuß. Dagegen würde man — 13900 Fuß erhalten haben, wenn man die Frage umgekehrt, oder gefragt hätte, wie viel höher der letztere Punct liege, als der erstere.

Beweis und Erläuterung. Die Richtigkeit der ersten Auflösung bedarf wohl keines Beweises, und da die letztere in allen Fällen mit jener übereinstimmt: so ist dadurch auch die Richtigkeit dieser einleuchtend. Daß aber alle angeführte Beyspiele wirklich als Subtractions-Exempel zu betrachten sind, leidet ebenfalls keinen Zweifel; denn selbst da, wo man die Zahlen addiren muß, sucht man doch wirklich den Unterschied zweyer Größen, welches eben der allgemeine Gegenstand der Subtraction ist.

* 88. 26ste Aufgabe. Zwey Zahlen, sie mögen positiv oder negativ seyn, in einander zu multipliciren.

Auflösung. Man multiplicire die Zahlen ganz auf gewöhnliche Weise, und betrachte das Product als positiv, wenn beyde Factoren einerley Zeichen haben; hingegen betrachte man es als negativ, wenn die Factoren verschiedene Zeichen haben, oder wenn der eine positiv, der andre negativ ist.

Beweis. Ehe wir die Richtigkeit dieser Regel untersuchen können, muß zwar bewiesen werden, daß es überhaupt möglich sey, eine Zahl, welche als positiv oder negativ betrachtet wird, als Multiplicator zu gebrauchen, da dieses dem 4ten Lehrsatze (§. 61.) entgegen zu seyn scheint. So fern man nämlich bloß an eine Vervielfachung einer positiven oder negativen Zahl denkt, so ist der Multiplicator eine ohne alle Beziehung betrachtete Zahl, bey welchem kein Gedanke an positiv und negativ statt findet; denn es ist z. B. das Dreyfache eines Vermögens von 100 Rthlr., gewiß ein Vermögen von 300 Rthlr., und das Dreyfache einer Schuld, die 100 Rthlr. betrug, ist eine Schuld von 300 Rthlr. Man wird aber den Begriff eines negativen Multiplicators zugestehn, wenn man die folgende Aufgabe beantworten soll: „Es ist eine gewisse positive oder negative Größe gegeben; man soll eine Größe angeben, welche das Zehnfache jener, aber ihr entgegengesetzt ist.“ — Hier betrachtet man den Multiplicator als negativ, um anzuzeigen, daß das Product das Entgegengesetzte von dem seyn soll, was es bey einer bloßen Vervielfachung seyn würde; und nun ist es natürlich, daß man dagegen den Multiplicator dann positiv nennt, wenn das Product das unveränderte Vielfache des Multiplicandus seyn soll.

Der Beweis für die in der Auflösung gegebene Regel ist nun leicht. Denn soll der positive Multiplicandus bloß vervielfacht werden, das heißt, ist auch der Multiplicator positiv, so wird das Product positiv seyn; hingegen ist das unverändert genommene Vielfache eines negativen Multiplicandus negativ. Bey einem negativen Multiplicator findet das Umgekehrte Statt. Denn nun soll das gesuchte Product zwar ein Vielfaches des gegebenen Multiplicandus, aber ihm entgegengesetzt seyn und das Product wird also nun negativ, wenn der Multiplicandus positiv ist, und dagegen positiv, wenn dieser negativ ist.

Beyspiel. Das Vermögen der Person A ist dreymal so groß, als die Schulden des B, oder — 3 mal so groß, als das Vermögen des letztern; hat also B ein Vermögen von — 300 Rthlr., so hat A ein Vermögen von + 900 Rthlr.; hätte dagegen B ein wahres Vermögen von + 500 Rthlr., so besäße A — 1500 Rthlr., oder 1500 Rthlr. Schulden, weil sein Vermögen das Dreyfache aber Entgegengesetzte von dem seyn soll, was B besitzt.

* 89. 27ste Aufgabe. Zwey Größen von gleicher oder entgegengesetzter Art durch einander zu dividiren.

Auflösung. Man dividire auf die gewöhnliche Weise und bezeichne den Quotienten mit +, wenn Dividendus und Divisor von einerley Art sind; dagegen betrachte man den Quotienten als negativ, wenn Dividendus und Divisor einander entgegengesetzt sind, oder verschiedene Zeichen haben.

Beweis. Nach dem, was bey der Multiplication erinnert worden ist, wird man leicht übersehn, daß man den Quotienten als positiv anzusehn hat, wenn der Divisor wirklich im Dividendo enthalten ist, daß heißt, wenn entweder beyde positiv, oder beyde negativ sind. Dagegen ist der Quotient negativ, wenn Dividendus und Divisor von entgegengesetzter Art sind; denn der negative Divisor ist im positiven Dividendus nicht selbst enthalten, sondern das Entgegengesetzte desselben ist darin enthalten, und dieses wird durch das negative Zeichen des Quotienten angedeutet.

Beyspiel. A hat 100 Rthlr. Schulden, B hingegen nur 20 Rthlr Schulden; wie viel mal ist das Vermögen des letztern in dem Vermögen des erstern enthalten? — Es ist wirklich 5 mal, also + 5 mal darin enthalten, indem 100 Rthlr. Schulden wirklich das Fünffache von 20 Rthlr. Schulden sind.

Wenn hingegen zwar A 100 Rthlr. Schulden, B aber 20 Rthlr. wirkliches Vermögen hat, so kann man die Frage, wie viel mal das Vermögen des letztern in dem Vermögen des erstern enthalten sey, eigentlich gar nicht beantworten. Dieses zeigt man durch das negative Zeichen an, welches man dem Quotienten giebt, und man muß die Auflösung, daß A ein — 5 mal so großes Vermögen als B habe, so verstehen, daß das Vermögen von A zwar der Summe nach fünfmal so groß, als das Vermögen von B, der Art nach aber das Entgegengesetzte sey, weil der letztere zwar baares Vermögen, der erstere aber bloß Schulden hat.

Von der Buchstaben-Rechnung.

* 90. Willkührlicher Satz. Man kann statt der Zahlen Buchstaben gebrauchen und durch diese sowohl bekannte, als unbekannte Zahlen ausdrücken. Da man aber Buchstaben nicht immer zu einander addiren, oder die übrigen Rechnungs-Operationen damit verrichten kann: so drückt man, wo es nöthig ist, diese Rechnungs-Operationen bloß durch Zeichen aus.

Beyspiel. Es bedeutet also $5a + 6b$, daß die Zahl $5a$ zur Zahl $6b$ soll addirt werden; eben so zeigt $a - b$ an, daß b von a abzuziehen sey; ferner ab oder $a \times b$ die Multiplication dieser beyden Zahlen in einander, und $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ die Division der erstern durch die letztere.

* 91. Es ist hierbey noch zu bemerken, daß man zwar $2a$, $3a$ u. s. w. schreibt, wenn die Größe a mehrmal genommen werden soll, daß es aber eben nicht üblich ist $1a$ zu schreiben, sondern daß man gewöhnlich statt dessen bloß a setzt.

Ferner pflegt man auch wohl, wenn man Größen hat, deren Summe oder Differenz in einen gemeinschaftlichen Factor sollen multiplicirt oder durch einen gemeinschaftlichen Divisor dividirt werden, diese in eine Parenthese einzuschließen, so daß $(f + g) \cdot c$ bedeutet, daß die

Summe von f und g mit e soll multiplicirt werden. Eben so bedeutet $(a + b + c) : (f - g)$, daß die Summe der drey ersten Größen durch den Unterschied der beyden letztern zu dividiren ist, u. s. w.

* 92. Erklärung. Da indeß in manchen Fällen die einfachen Rechnungs-Operationen doch auch bey Buchstaben sich wirklich ausführen lassen: so lehrt die Buchstaben-Rechnung, auf welche Weise dieses insonderheit bey Größen, die aus mehrern positiven und negativen Theilen bestehen, geschieht.

* 93. 28ste Aufgabe. Mehrere Größen, welche durch Buchstaben ausgedrückt sind, zu einander zu addiren.

Auflösung. Man kann diese Größen gerade so betrachten, wie benannte Zahlen und hier diejenigen Größen, welche mit einerley Buchstaben bezeichnet sind, wirklich addiren; bey denen aber, wo dies nicht angeht, die Addition bloß durch das Additions-Zeichen anzeigen. Kommen in den zu addirenden Größen negative Theile vor: so muß man die Regeln der 24sten Aufgabe befolgen.

Beyspiel. Die Größen $5a + 7b - 8c$ und $7a - 5b + 27d - e$ zu addiren.

$$\begin{array}{lllll} & 5a + 7b - 8c & & \\ & 7a - 5b & + 27d - c \\ \hline \text{Summe} = & 12a + 2b - 8c & + 27d - e \end{array}$$

* 94. 29ste Aufgabe. Größen, welche in Buchstaben ausgedrückt sind, von einander zu subtrahiren.

Auflösung. Auch hier findet die wirklich ausgeführte Subtraction nur Statt, wenn Größen, die mit einerley Buchstaben bezeichnet sind, vorkommen; übrigens gelten die Regeln, welche bey den entgegengesetzten Größen angegeben worden (§. 87.).

Beyspiel. Von der Größe $-15a + 6b - d + 8f$ soll abgezogen werden $6a + 7d - 9e - f$.

Man kann nach der Regel der zweyten Auflösung der 25sten Aufgabe die Zeichen der letztern Zahl in die entgegengesetzten verwandeln und dann folgende Größen zu einander addiren:

$$\begin{array}{l} -15a + 6b - d + 8f \\ -6a \quad\quad - 7d + f + 9e \\ \hline \end{array}$$

so ist die gesuchte Differenz

$$-21a + 6b - 8d + 9f + 9e$$

Zweytes Beyspiel. Man kann auch Größen von folgender Form haben: $ma + 7b - nc + d$, und $la - mb + 2nc + d$. Soll man hier die letztere von der erstern abziehn,

nämlich von $ma + 7b - nc + d$
abziehn $la - mb + 2nc + d$,

so ist der Rest $ma - la + 7b + mb - 3nc$
oder $= (m - l)a + (7 + m)b - 3nc$.

* 95. 30ste Aufgabe. Zwey durch Buchstaben gegebene Größen in einander zu multipliciren.

Auflösung 1. Man multiplicire mit jedem einzelnen Stücke des Multiplicators alle Theile des Multiplicandus, und zwar verrichte man, wo Zahlen vorkommen, die Multiplication wirklich; bey den Buchstaben hingegen deute man sie bloß durch Zeichen an, und befolge bey negativen Größen die Regeln des 88 §.

2. Die einzelnen Theile des Productes vereinige man in eine Summe und suche dabey alle Glieder, welche einerley Buchstaben enthalten, wirklich zusammen zu zählen.

Beyspiel. Die Größe a + b mit a + b zu multipliciren.

$$\begin{array}{rl} & a + b \\ & a + b \\ \hline & aa + ab \\ & \quad\; + ab + bb \\ \hline \text{Product} = & aa + 2\,ab + bb \end{array}$$

Zweytes Beyspiel. 5 a + 15 b + 3 c mit a — 3 b zu multipliciren.

$$\begin{array}{rl} & 5\,a + 15\,b + 3\,c \\ & \qquad\quad a - 3\,b \\ \hline & 5\,aa + 15\,ab + 3\,ac \\ & \qquad - 15\,ab \qquad - 45\,bb - 9\,bc \\ \hline \text{Product} = & 5\,aa + 3\,ac - 45\,bb - 9\,bc \\ \text{oder} = & (5\,a + 3\,c)\,a - (45\,b + 9\,c)\,b. \end{array}$$

* 96. 31ste Aufgabe. Zwey in Buchstaben ausgedrückte Größen durch einander zu dividiren.

Auflösung. Wo die Division nicht aufgeht, pflegt man sie bloß dadurch anzudeuten, daß man den Dividendus zum Zähler eines Bruches macht, dessen Nenner der Divisor ist. Glaubt man aber, daß entweder der ganze Dividendus oder einige Theile desselben sich wirklich dividiren lassen, (welches der Fall ist, wenn sie eben die Buchstaben enthalten, wie der Divisor,) so verrichtet man die Division auf ähnliche Weise, wie bey ganzen Zahlen.

Beyspiel. $aa - bb$ mit $a + b$ zu dividiren.

$$\begin{array}{l} a + b)\ aa - bb\ (\text{Quotient} = a - b. \\ \qquad\ \ \underline{aa + ab} \\ \qquad\ \ - ab - bb \\ \qquad\ \ \underline{- ab - bb} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Da das erste Glied des Divisors im ersten Gliede des Dividendus a mal enthalten ist, so ist a der erste Theil des Quotienten, und dieser giebt mit $a + b$ multiplicirt $aa + bb$. Dieses Product vom Dividendo subtrahirt, läßt zum Rest $- ab - bb$, woraus sich $- b$ als zweyter Theil des Quotienten ergiebt.

Zweytes Beyspiel. $aaa - bbb - abc - aac - bbc$ zu dividiren mit $a - b - c$.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Quotient} \\ a - b - c)\ aaa - bbb - abc - aac - bbc\ (aa + ab + bb. \\ \qquad\quad\ \underline{aaa - aab \qquad\quad - aac} \\ \qquad\quad\ + aab - bbb - abc - bbc \\ \qquad\quad\ \underline{\quad aab - abb - abc} \\ \qquad\qquad\quad abb - bbb - bbc \\ \qquad\qquad\quad \underline{abb - bbb - bbc} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Nachtrag von Aufgaben,

welche als Beyspiele zur Erläuterung der beyden letzten Abschnitte dienen.

---

* 97. Erstes Exempel. Drey Personen haben eine Summe von 1750 Rthlr. so zu theilen, daß der zweyte dreymal so viel, als der erste und außerdem noch 100 Rthlr. bekömmt, der dritte aber gerade halb so viel erhält, als der erste.

Zweytes Exempel. Vier Personen haben 2840 Rthlr. zu theilen, so daß der erste und vierte gleich viel erhalten, der zweyte soll halb so viel als der erste und außerdem 355 Rthlr. erhalten, und der dritte zwey Fünftel dessen, was der erste bekömmt und außerdem 426 Rthlr.

* 98. Alle ähnlichen Beyspiele sind in folgender allgemeinen Aufgabe enthalten. Eine Summe, die wir mit a bezeichnen, soll unter vier Personen so getheilt werden, daß der Antheil des zweyten bestehe aus dem m mal genommenen Antheile des erstern und aus einer zugelegten Summe $= b$; daß ferner der Dritte das n fache dessen erhält, was der erste bekam uud außerdem noch c; endlich der vierte die Summe des erstern Antheils p mal genommen und außerdem noch d.

Nennet man hier den unbekannten Antheil des erstern $= x$, so erhält

der erste die Summe $= x$,
der zweyte " " " $= mx + b$,
der dritte " " " $= nx + c$,
der vierte " " " $= px + e$.

Diese vier Summen betragen zusammen

$$x + mx + nx + px + b + c + d,$$

oder $x(1 + m + n + p) + b + c + d$.

Da nun diese Summe $= a$ seyn soll, so hat man die Gleichung

$$x(1 + m + n + p) + b + c + d = a,$$

also $x(1 + m + n + p) = a - b - c - d$

$$\text{und } x = \frac{a - b - c - d}{1 + m + n + p}.$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks oder dieser Formel kann man die beyden in Zahlen gegebenen Exempel leicht auflösen. Man hat z. B. im zweyten Exempel $a = 2840$, $b = 355$, $c = 426$ und $d = 0$; ferner $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{2}{5}$ und $p = 1$, daher

$$x = \frac{2840 - 355 - 426}{1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + 1} = \frac{2059}{2\frac{9}{10}},$$

das giebt $x = 710$,
und man findet, daß im zweyten Exempel alle Personen gleich viel erhalten.

* 99. Drittes Exempel. Man sucht zwey Zahlen, deren Summe $= 50$ und deren Differenz $= 17$ ist.

Viertes Exempel. Es sollen zwey Zahlen bestimmt werden, so daß das Doppelte der ersten, addirt zum Drittel der zweyten, 500 giebt, und daß das Siebenfache der erstern, abgezogen vom Zehnfachen der zweyten, 600 zum Reste läßt.

* 100. Allgemein lassen sich alle ähnliche Aufgaben so ausdrücken. Es sollen zwey Zahlen so be-

stimmt werden, daß, wenn man die erste m mal nimmt und dieses Product zum n fachen der zweyten addirt, eine gewisse Summe = a herauskomme; und ferner, daß das p fache der erstern abgezogen von dem q fachen der zweyten einen Rest = b lasse. Nennet man hier die erste Zahl x, die zweyte y, so hat man aus der Aufgabe die beyden Gleichungen:

$$mx + ny = a,$$
$$qy - px = b.$$

Ich multiplicire die erste Gleichung mit q, die zweyte mit n, so finde ich

$$mqx + nqy = aq,$$
$$- pnx + nqy = bn,$$

und wenn ich die letztere von der erstern abziehe

$$mqx + npx = aq - bn,$$

oder $x(mq + np) = aq - bn$,

das ist $x = \frac{aq - bn}{mq + np}$.

Da nun ferner nach der zweyten Gleichung

$$qy = b + px = b + \frac{apq - bpn}{mq + np},$$

oder, wenn man den letzten Theil ganz auf einerley Nenner bringt,

$$qy = \frac{bmq + bnp + apq - bnp}{mq + np},$$

folglich $y = \frac{bm + ap}{mq + np}$.

Im dritten Exempel war a = 50 und b = 17, aber m = 1, n = 1, p = 1, q = 1, folglich

$$x = \frac{50 - 17}{2} = 16\tfrac{1}{2}.$$

$$y = \frac{50 + 17}{2} = 33\tfrac{1}{2}.$$

* 101. Um die Allgemeinheit dieser Auflösung zu zeigen, will ich sie noch auf ein Beyspiel anwenden, wo eine der gesuchten Zahlen negativ wird.

Fünftes Exempel. Zwey Zahlen x und y so zu bestimmen, daß $7x + 5y = 604$, und $2x - 3y = 239$ ist.

Die Buchstaben des vorigen §. haben hier folgende Werthe: $a = 604$, $b = 239$, $m = 7$, $n = 5$, $p = -2$, $q = -3$, die letztern sind beyde negativ, weil wir hier nicht $qy - px = b$, sondern $px - qy = b$ haben, und es wird nun

$$x = \frac{-3 \cdot 604 - 5 \cdot 239}{-3 \cdot 7 \quad -2 \cdot 5} = \frac{-1812 - 1195}{-21 \quad -10}$$

oder $x = \frac{-3007}{-31} = +97.$

Hingegen

$$y = \frac{239 \cdot 7 - 604 \cdot 2}{-3 \cdot 7 - 2 \cdot 5} = \frac{1673 - 1208}{-31} = \frac{465}{-31} = -15.$$

Die beyden gesuchten Zahlen sind also $+97$ und -15.

Sechstes Exempel. Zwey Zahlen so zu bestimmen, daß ein Fünftel der einen addirt zum Zwölffachen der andern 50 beträgt, und daß man hingegen -50 erhält, wenn man das Vierfache der erstern vom Zweyfachen der andern subtrahirt.

Siebentes Exempel. Drey Zahlen zu bestimmen, deren Summe = 100, und wo die erste um 16 größer als die zweyte, die zweyte aber um 99 größer als die dritte ist.

Sechster Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzeln.

102. Erklärung. Wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt: so nennet man das Product, das Quadrat jener Zahl, oder ihre zweyte Potenz. Multiplicirt man das Quadrat einer Zahl mit der Zahl selbst: so erhält man den Cubus oder die dritte Potenz der Zahl; und so ferner die vierte Potenz einer Zahl, wenn man die dritte Porenz derselben mit der Zahl selbst multiplicirt u. s. w.

Beyspiel. Es ist also 4 das Quadrat oder die zweyte Potenz von 2; ferner 8 der Cubus oder die dritte Potenz von 2; 16 die vierte Potenz, 32 die fünfte Potenz von 2, u. s. w.

103. Erklärung. Umgekehrt versteht man unter der Quadratwurzel einer Zahl, diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, jene giebt.

Ferner ist eine Zahl die Cubikwurzel einer andern, wenn diese letztere der Cubus der erstern ist.

Da man das Quadrat die zweyte Potenz nennt, so nennt man auch wohl die Quadratwurzel die zweyte Wurzel, und so die Cubikwurzel die dritte Wurzel; und ferner die vierte Wurzel einer Zahl, diejenige Zahl, deren vierte Potenz jene Zahl giebt u. s. w.

Beyspiel. Es ist also 9 die Quadratwurzel von 81, und 3 die Cubikwurzel von 27; endlich 2 die vierte Wurzel aus 16.

104. Erklärung. Die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl suchen, oder die Quadratwurzel aus derselben ausziehen, heißt also, diese Zahl in zwey gleiche Factoren zerlegen, oder eine Zahl finden, welche mit sich selbst multiplicirt jene gegebene Zahl zum Producte giebt.

Eben so verlangt man bey der Ausziehung der Cubikwurzel eine gegebene Zahl in drey gleiche Factoren zu zerfällen.

Beyspiel. Es ist nämlich $81 = 9 \cdot 9$, und $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$, u. s. w.

105. Jede ganze Zahl hat zum Quadrate, zum Cubus und überhaupt zu jeder höheren Potenz eine ganze Zahl: aber nicht für jede ganze Zahl giebt es auch eine Quadratwurzel oder Cubikwurzel in gan-

zen Zahlen, indeß läßt sich denken, daß sich diese Wurzeln doch durch Brüche, entweder ganz genau oder ziemlich genau werden ausdrücken lassen, und wenigstens lassen sich allemal zwey, nur um eins verschiedene Zahlen angeben, davon eine größer, die andre kleiner, als die nicht genau bekannte Wurzel ist.

Beyspiel. Die Quadratwurzel aus 20 liegt zwischen 4 und 5, da das Quadrat jener $= 16$, das Quadrat dieser $= 25$ ist. Diese Quadratwurzel ist etwas kleiner als $4\frac{1}{2}$, denn $4\frac{1}{2}$ mit sich selbst multiplicirt, giebt $20\frac{1}{4}$.

106. Willkührlicher Satz. Wenn man ausdrücken will, daß eine Zahl zu irgend einer Potenz erhoben, das heißt, eine gewisse Potenz dieser Zahl gesucht werden soll: so schreibt man an die rechte Seite dieser Zahl, etwas in die Höhe gerückt, eine kleine Ziffer, welche angiebt, die wievielte Potenz man zu suchen verlangt.

Dagegen bedient man sich des Zeichens $\sqrt{\ }$, um die Wurzeln, welche gesucht werden sollen, anzudeuten, indem man nämlich dieses Zeichen $\sqrt{\ }$ vor die Zahl schreibt, deren Wurzel gesucht wird. Um aber zu bestimmen, welche Wurzel man finden soll, schreibt man in den Raum des Wurzel-Zeichens die Zahl, welche angiebt, die wievielte Wurzel man sucht. So ist also $\sqrt[2]{\ }$ das Zeichen der Quadratwurzel, ſtatt deſſen man aber auch wohl bloß $\sqrt{}$ zu ſchreiben pflegt; bey der Cubikwurzel aber muß man immer $\sqrt[3]{}$ ſchreiben, und ſo bey der vierten Wurzel $\sqrt[4]{}$, u. ſ. w.

Beyſpiele. Es bedeutet alſo 7^2 das Quadrat von 7, und 9^5 die fünfte Potenz von 9, daher man hat: $7^2 = 49$ und $9^5 = 59049$.

Ferner iſt $\sqrt[2]{100}$ oder $\sqrt{100}$ die Quadratwurzel aus 100 und $\sqrt[3]{729}$ die Cubikwurzel aus 729. Daher $\sqrt[2]{100} = 10$ und $\sqrt[3]{729} = 9$. Eben ſo würde $\sqrt[5]{59049} =$ ſeyn, weil $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59049$ iſt, und die zehnte Wurzel aus eben jener Zahl $\sqrt[10]{59049}$ iſt $= 3$.

107. Erklärung. Man nennt den Exponenten einer Potenz diejenige Zahl, welche angiebt, die wievielte Potenz die gegebene iſt. Der Exponent zeigt alſo an, aus wie vielen Factoren, welche der Wurzel gleich ſind, die als Potenz angegebene Zahl beſteht.

Anmerk. Man könnte auf ähnliche Weiſe die Zahl, welche angiebt, die wievielte Wurzel man ſucht, den Wurzel-Exponenten nennen, welches indeſſen nicht ſo gewöhnlich iſt.

Beyspiel. Der Exponent der Potenz 7^3 ist 3, und 7^3 besteht aus den drey gleichen Factoren $7 \cdot 7 \cdot 7$. Der Exponent von 15^9 ist 9.

* 108. 6ter Lehrsatz. Wenn man zwey verschiedene Potenzen derselben Wurzel in einander multiplicirt: so ist das Product diejenige Potenz derselben Wurzel, deren Exponent die Summe der Exponenten der beyden gegebenen Potenzen ist.

Beyspiel. 7^5 multiplicirt mit 7^4 ist $= 7^9$.

Beweis. Die erste der beyden gegebenen Zahlen besteht aus so vielen gleichen Factoren als der Exponent angiebt, und eben so enthält auch die zweyte Zahl so viele gleiche Factoren, als der Exponent dieser zweyten Potenz bestimmt. Da nun beyde Zahlen Potenzen derselben Wurzel sind, so sind jene gleichen Factoren auch in beyden Zahlen einerley, und folglich besteht das Product aus lauter gleichen Factoren und zwar aus so vielen, als die Anzahl der gleichen Factoren in beyden Zahlen zusammen beträgt. Das Product ist also eine Potenz derselben Wurzel, von welcher jene beyden Zahlen Potenzen waren, und da der Exponent einer Potenz angiebt, wie oft die Potenz die Wurzel als Factor enthält, so ist der Exponent der Potenz für das Product so groß, als die Summe der Exponenten der beyden gegebenen Potenzen.

Beyspiel. Da $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$ und $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, so enthält das Product aus beyden die Zahl 5 sieben mal als Factor, und es ist daher $5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$.

* 109. 7ter Lehrsatz. Wenn irgend eine Potenz einer gegebenen Wurzel durch eine Potenz derselben Wurzel dividirt wird: so ist der Quotient eine Potenz derselben Wurzel, deren Exponenten man findet, wenn man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendus subtrahirt.

Beweis. Da in diesem Falle der Dividendus und der Divisor lauter gleiche Factoren enthalten, so folgt, daß man (§. 31.) um den Quotienten zu finden, so viele gleiche Factoren im Dividendus wegstreichen kann, als der Divisor enthält. Der Quotient enthält also nur so viele gleiche Factoren, als der Dividendus deren mehrere enthält, wie der Divisor; der Quotient ist also eine Potenz derselben Wurzel, deren Potenzen man durch einander dividiren sollte, und der Exponent wird so bestimmt, wie der Lehrsatz angiebt.

Beyspiel. Wenn man 7^5 mit 7^3 dividirt, so ist $\frac{7^5}{7^3} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} = 7 \cdot 7 = 7^2$.

* 110. Auf diesen Lehrsatz gründet sich der Begriff der Potenzen mit negativen Exponenten. Wenn nämlich im vorigen Lehrsatze der Exponent des Divisors eine größere Zahl ist, als die des Dividendus, so ergiebt die Regel des Lehrsatzes für den Quotienten einen negativen Exponenten, weil man dann die größere Zahl von der kleinern abziehen soll (§. 87.); die Regeln der Division oder der Behandlung der Brüche geben aber für eben den Quotienten

einen Bruch, und wir können daher folgendes festsetzen.

Erklärung. Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich einem Bruche, dessen Zähler $= 1$, und dessen Nenner aus einer Potenz besteht, deren Wurzel mit der Wurzel jener Potenz einerley, und deren Exponent zwar jenem Exponenten an Größe gleich, aber positiv ist.

Beyspiel. Es ist also $8^{-7} = \frac{1}{8^7}$ und $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$. Denn sollte man z. B. a mit a^3 dividiren, so wäre $\frac{a}{a\,.\,a\,.\,a} = \frac{1}{a\,.\,a} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$ nach der Regel des vorigen Lehrsatzes.

* 111. Hätte man im Dividendus und im Divisor einerley Potenz derselben Wurzel, so gäbe der Lehrsatz, Null als die Potenz des Quotienten; aber dieser Quotient ist offenbar $= 1$; man hat daher die mit o bezeichnete Potenz jeder Wurzel $= 1$, und die Reihe der Potenzen, deren Exponenten ganze Zahlen sind, ist folgende: $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^2 = a\,.\,a$, $a^3 = a\,.\,a\,.\,a$, u. s. w. Ferner $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a\,.\,a}$, u. s. w.

* 112. 8ter Lehrsatz. Wenn man eine Zahl, die selbst schon eine Potenz einer gegebenen Wurzel ist, auf eine Potenz erhebet: so erhält man diejenige Potenz jener ge-

gebenen Wurzel, deren Exponent das Product ist aus dem Exponenten der als Potenz gegebenen Zahl in den Exponenten der Potenz, zu welcher sie erhoben werden soll.

Beyspiel. Sucht man die zweyte Potenz von 2^7, so ist diese $= 2^{14}$, und eben so ist die fünfte Potenz von $4^5 = 4^{25}$.

Beweis. Soll man eine solche Zahl, wie 4^5, zu einer Potenz erheben, so heißt das, man soll diese Zahl mehrmals in sich selbst multipliciren. Nach dem Lehrsatze §. 108. ergiebt sich also zum Quadrate dieser Zahl diejenige Potenz derselben Wurzel, deren Exponent zweymal so groß ist, als der Exponent der gegebenen Potenz; der Cubus jener Zahl hat das Dreyfache, die vierte Potenz das Vierfache jenes Exponenten zum Exponenten, u. s. w. Man hat also allgemein a^m zur $n$ten Potenz erhoben, oder, wie man es wol schreibt $(a^m)^n = a^{mn}$.

* 113. 9ter Lehrsatz. Man findet die Wurzel einer Zahl, welche als Potenz einer andern gegeben ist, wenn man den Exponenten dieser Potenz dividirt mit der Zahl, welche angiebt, die wievielte Wurzel die gesuchte ist.

Beyspiel. Es ist nach diesem Satze die fünfte Wurzel aus 2^{10} oder $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^2$.

Beweis. Da dieser Satz das Umgekehrte des vorigen ist, so läßt er sich aus diesem leicht beweisen. Offenbar erhält man die zuerst gegebene Zahl z. B. a wieder, wenn man diese erst zu einer Potenz erhebt und dann wieder die Wurzel auszieht, deren Wurzel-Exponent derselbe mit dem Exponenten der Potenz ist; die dritte Wurzel aus a^3 ist nämlich wieder $= a$. Nimmt man also für einen Augenblick unsern Lehrsatz als richtig an, das nämlich die $n$te Wurzel aus a^m gleich $a^{\frac{m}{n}}$ ist, so muß, wenn man diese letztere Größe zur $n$ten Potenz erhebt, wieder a^m herauskommen, und dieses ist auch wirklich der Fall, da nach §. 112. die $n$te Potenz von $a^{\frac{m}{n}}$ gleich $a^{\frac{mn}{n}} = a^m$ ist.

Man übersieht leicht, daß in diesem Falle die Richtigkeit dieser Folgerung auch die Richtigkeit des zum Grunde gelegten Lehrsatzes beweiset.

* 114. Erklärung. Wenn der Exponent einer Potenz ein Bruch ist, so wird damit angedeutet, daß man die Zahl zuerst zu der Potenz erheben soll, welche der Zähler des gebrochnen Exponenten angiebt, und daß man dann diejenige Wurzel ausziehen soll, welche durch den Nenner desselben Exponenten bestimmt wird.

Beyspiel. $3^{\frac{2}{3}}$ bedeutet die Cubikwurzel aus dem Quadrate von 3; $6^{\frac{5}{6}}$ bedeutet die sechste Wurzel aus der fünften Potenz von 6. So ist also $\sqrt[2]{10} = 10^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{10} = 10^{\frac{1}{3}}$, und überhaupt $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$. Den Grund für diese Bezeichnung enthält der vorige Lehrsatz.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel.

115. 32ste Aufgabe. Es ist eine ganze Zahl gegeben, man soll angeben, aus wie vielen Ziffern ihre Quadratwurzel bestehen wird, (so weit diese nämlich sich in ganzen Zahlen ausdrücken läßt,) und zugleich die höchste Ziffer der Quadratwurzel selbst bestimmen.

Auflösung. 1. Man theile die gegebene Zahl von hinten her so ab, daß alle Abtheilungen, außer der vorn an stehenden oder höchsten, zwey Ziffern enthalten. Die höchste Abtheilung kann eine oder zwey Ziffern enthalten, so wie die gesammte Anzahl der vorhandenen Ziffern es mit sich bringt. Die Anzahl der so erhaltenen Abtheilungen ist einerley mit der Anzahl der Ziffern der Quadratwurzel.

2. Um nun auch die höchste Ziffer der Quadratwurzel zu bestimmen, suche man die höchste Quadratzahl, welche in derjenigen Zahl, die sich in der ersten Abtheilung befindet, enthalten ist, die Wurzel dieser Quadratzahl ist die gesuchte höchste Ziffer der Quadratwurzel. Man bedient sich hiezu folgendes Täfelchens:

Wurzel	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Quadratzahl	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

Beyspiel. Die Zahl 5974805 giebt, wenn man sie nach nr. 1. abtheilt, 5 | 97 | 48 | 05 | vier Abtheilungen, und ihre Quadratwurzel enthält also vier Ziffern. In der höchsten Abtheilung steht hier allein 5, und die darin enthaltene größeste Quadratzahl ist 4, deren Wurzel 2 ist. Es ist also 2 die höchste Ziffer der Quadratwurzel, und da diese vier Ziffern enthalten soll, so ist die Quadratwurzel größer als 2000, aber kleiner als 3000.

Beweis. Da 1 die kleinste Zahl von einer Ziffer und 10 die kleinste Zahl von zwey Ziffern ist so kann kein Quadrat einer einziffrigen Zahl weniger Ziffern enthalten, als das Quadrat von 1, aber auch nicht mehrere Ziffern als das Quadrat von 10. Da nun 100, das Quadrat von 10 und zugleich die kleinste aus drey Ziffern bestehende Zahl ist, so besteht das Quadrat jeder einziffrigen Zahl entweder aus einer oder aus zwey Ziffern. Eben so läßt sich zeigen, daß die Quadrate aller zweyziffrigen Zahlen entweder drey oder vier Ziffern enthalten; denn keines dieser Quadrate kann kleiner seyn, als das Quadrat von 10 oder als 100, welches die kleinste dreyziffrige Zahl ist, aber auch keines kann so groß seyn als das Quadrat von 100 oder als 10000, und jede ganze Zahl die kleiner als 10000 ist, hat höchstens vier Ziffern. So ließen sich für alle Fälle die Schlüsse fortsetzen und z. B. zeigen, daß die Quadrate aller fünfziffrigen Zahlen aus neun oder zehn Ziffern bestehn, weil die kleinste fünfziffrige Zahl zum Quadrate die kleinste neunziffrige Zahl hat, und die kleinste sechsziffrige Zahl zum Quadrate die kleinste Zahl hat, die sich mit elf Ziffern schreiben läßt. Kehrt man diese Schlüsse um, so folgt für die Bestimmung der Anzahl von Ziffern in der Quadratwurzel die in no. 1. gegebne Regel. Was nun die Bestimmung der höchsten Ziffer der Quadratwurzel betrifft, so ist offenbar, daß die Quadratwurzel einer gegebnen Zahl nicht kleiner seyn kann, als sie seyn würde, wenn in allen Abtheilungen, außer in der höchsten, Nullen ständen, z. B. daß die Wurzel aus 5 | 97 | 48 | 05 | nicht kleiner ist, als die Wurzel aus 5 00 00 00. Nun ist 4 die größte in der ersten Abtheilung enthaltene Quadratzahl, und man sieht, daß die gesuchte Wurzel größer seyn wird, als die Wurzel aus 4 000000; aber diese Wurzel ist $=$ 2000: also ist $\sqrt{5974805}$ größer als 2000; aber gewiß kleiner als 3000, weil das Quadrat von 3000 schon 9000000 ist, und 2 ist also die höchste Ziffer der Wurzel. Und die Richtigkeit der zweyten Regel läßt sich hieraus auch allgemein einsehn.

116. Wenn man die erste Ziffer der Quadratwurzel auf diese Weise bestimmt hat, so kann man diese Wurzel als aus zwey Theilen bestehend betrach-

ten, aus einem bekannten Theile der im vorigen Exempel 2000 ist, und einem unbekannten Theile, nämlich dem, was in diesem Beyspiele noch zu 2000 hinzukommen müßte, um die Quadratwurzel vollständig auszudrücken. Die Bestimmung dieses noch unbekannten Theiles beruhet auf der Betrachtung einer Quadratzahl, deren Wurzel man als aus zwey Theilen zusammengesetzt ansieht.

117. 10ter Lehrsatz. Wenn man eine Zahl als Summe zweyer Zahlen ausdrückt, so ist der Quadrat der Summe so groß, als folgende drey Zahlen zusammen genommen: das Quadrat des einen Theiles, das Quadrat des zweyten Theiles, und das doppelt genommene Product aus einem Theile in den andern.

Beweis. Wenn 47 zum Beyspiel die Zahl ist, welche man als die Summe von 40 und 7 betrachtet, so behauptet dieser Lehrsatz, es sey das Quadrat von 47 gleich der Summe der Quadrate von 40 und von 7, zusammen genommen mit dem zweyfachen Producte aus 40 in 7, oder $47^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 7 + 7^2$.

Wenn man die Zahl so in zwey Theile getheilt läßt, nämlich $40 + 7$, so erhält man gewiß das richtige Quadrat, wenn man zuerst beyde Theile mit dem einen Theile $= 7$, und dann wieder beyde Theile mit dem andern $= 40$ multiplicirt. Deutet man diese Multiplication bloß durch Zeichen an, wie in nebenstehendem Exempel,

$$\begin{array}{r} 40 + 7 \\ 40 + 7 \\ \hline 7 \cdot 40 + 7 \cdot 7 \\ 40 \cdot 40 + 7 \cdot 40 \\ \hline \text{Quadrat} = 40^2 + 2 \cdot 7 \cdot 40 + 7^2. \end{array}$$

so kömmt im Producte das Quadrat jedes Theiles einmal, das Product aus dem einen in den andern aber zweymal vor, und die Summe dieser Theile giebt das Quadrat gerade so ausgedrückt, wie der Lehrsatz es angab.

* In allgemeinen Ausdrücken durch Buchstaben kann man jede Summe zweyer Zahlen durch $a + b$ darstellen, und das Quadrat dieser Zahl fanden wir vorhin § 95,

$= aa + 2\,ab + bb$, welches der allgemeine Ausdruck ist, den auch unser Lehrsatz angiebt.

118. Da jede Zahl, z. B. auch 47, sich auf sehr mannigfaltige Art als Summe zweyer Zahlen darstellen läßt, so kann man auch das Quadrat sehr verschieden ausdrücken. Da z. B. $47 = 31 + 16$, so ist auch $47^2 = 31^2 + 2 \cdot 31 \cdot 16 + 16^2$, und eben so hat man $529 = 500 + 29$, daher $529^2 = 500^2 + 2 \cdot 500 \cdot 29 + 29^2$.

119. 33ste Aufgabe. Die Quadratwurzel jeder ganzen Zahl so weit, als es ohne Brüche möglich ist, vollständig zu bestimmen.

Auflösung. 1. Man theile die Zahl, deren Wurzel gesucht wird, in solche Abtheilungen, wie in der 32sten Aufgabe angegeben ist, und bestimme die höchste Ziffer der Wurzel.

2. Das Quadrat dieser höchsten Ziffer ziehe man von der in der höchsten Abtheilung stehenden Zahl ab, und füge an den Rest die zwey Ziffern der zweyten Abtheilung an.

3. Man multiplicire die höchste Ziffer der Quadratwurzel mit 2, und hänge dem Producte eine Null an; man versuche, wie oft die so erhaltene Zahl in dem, was jetzt in den beyden ersten Abtheilungen noch übrig ist, enthalten sey, und setze (fürs erste nur zum Versuch,) den Quotienten, wofern er eine einziffrige Zahl ist, als zweyte Ziffer der Wurzel hin; ist dieser Quotient eine zweyziffrige Zahl, so wird die gleich zu erwähnende Probe immer lehren, daß man statt des Quotienten doch nur höchstens 9 als zweyte Ziffer der Wurzel annehmen darf.

4. Um zu bestimmen, ob diese Ziffer wirklich die richtige zweyte Ziffer der Wurzel sey, multiplicire man die im Anfange von nr. 3. aus der ersten Ziffer hergeleitete, als Divisor gebrauchte Zahl mit dieser zweyten Ziffer der Wurzel, und addire zu dem Producte das Quadrat der zweyten Ziffer. Ist diese Summe kleiner, als die am Ende von nr. 2. erhaltene, in den beyden ersten Abtheilungen noch stehende Zahl: so ist die zum Versuch angenommene Ziffer wirklich die richtige zweyte Ziffer der Quadratwurzel. Ist jene Summe hingegen größer: so muß man die zweyte Ziffer der Wurzel um eins oder zwey oder so viel verkleinern, bis die eben angegebene Probe die Richtigkeit der angenommenen zweyten Ziffer beweiset. Man muß aber bemerken, daß es nicht genug ist, die zweyte Ziffer so anzunehmen, daß jene Summe kleiner ausfalle, als die in den beyden ersten Abtheilungen noch stehende Zahl, sondern die zweyte Ziffer der Wurzel muß auch die größeste seyn, bey der diese Probe noch Statt findet.

5. Man subtrahire von der in den beyden ersten Abtheilungen stehenden Zahl die im Anfang von nr. 4. aus der richtig angenommenen zweyten Ziffer der Wurzel hergeleitete Summe, und füge an den Rest die beyden Ziffern in der dritten Abtheilung der zuerst gegebenen Zahl.

6. Um die dritte Ziffer der Wurzel zu finden, verdoppele man den gefundenen zweyziffrigen Theil der Wurzel, hänge dem Producte eine Null an, und untersuche, wie oft diese so entstandene Zahl in dem enthalten ist, was jetzt noch in den ersten drey Abtheilungen steht.

7. Der Quotient, welchen man bey dieser Division erhält, wird die richtige dritte Ziffer der Wurzel angeben, wenn das Product aus diesem Quotienten in die in nr. 6. als Divisor gebrauchte Zahl, zusammen genommen mit dem Quadrate des Quotienten, weniger beträgt, als der in den drey ersten Abtheilungen noch übrige Theil der gegebenen Zahl. Ist dieses nicht der Fall, so muß man, gerade wie in nr. 4. und mit Betrachtung eben der Vorsichts-Regeln, die dritte Ziffer so viel kleiner annehmen, bis die Probe statt findet.

8. Man verfährt dann ganz auf ähnliche Weise wie in nr. 5., und wendet die folgenden Regeln so an, daß man nun die in der vierten Abtheilung der gegebenen Zahl stehenden beyden Ziffern mit zu Hülfe nimmt; wieder aus dem bekannten, jetzt dreyziffrigen Theile der Wurzel den Divisor herleitet, mit dessen Hülfe man die vierte Ziffer der Wurzel bestimmt; und so zur fünften und allen folgenden Abtheilungen fortgeht, bis alle Ziffern der Wurzel gefunden sind.

9. Der am Ende etwa noch bleibende Rest zeigt bloß an, daß zu der in ganzen Zahlen gefundenen Wurzel noch ein Bruch hinzukommen müßte, mit dessen Bestimmung wir uns hier nicht beschäftigen.

Beyspiel. Die Wurzel aus 177241 zu finden.

	17	72	41	Wurzel
Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel	16			= 421
Erster Rest, verbunden mit den Ziffern zweyten Abtheilung . . . . =	1	72		
Das Zweyfache der ersten Ziffer der Wurzel mit angehängter Null als Divisor . . . . =		80	..	
Product dieses Divisors in den Quotienten 2 . . . . =	1	60	..	
Quadrat der zweyten Ziffer der Wurzel =		4	..	
Summe der beyden letzten Zahlen =	1	64	..	
Zweyter Rest, was nämlich von dem beym ersten Reste in den beyden ersten Abtheilungen stehenden Zahl, nach Abzug dieser Summe, übrig bleibt, mit den angefügten Ziffern der dritten Abtheilung . . . . =		8	41	
Das Zweyfache des bekannten Theils der Wurzel mit angehängter Null als Divisor . . . . =		8	40	
Product aus diesem Divisor in die dritte Ziffer der Wurzel . . . . =		8	40	
Quadrat der dritten Ziffer . . . . =			1	
Summe beyder . =		8	41	

Da diese Summe dem noch übrigen Theile der gegebenen Zahl gleich ist, so bleibt kein Rest, und 421 ist die genaue Wurzel der gegebenen Zahl.

Beweis. Die hier gegebenen Regeln beruhen ganz auf der in §. 117. gezeigten Zusammensetzung des Quadrates einer zweytheiligen Wurzel. Betrachtet man nämlich im vorigen Exempel die Wurzel als aus 400 und aus einem noch unbekannten Theile zusammen gesetzt: so muß die gegebene Zahl, deren Wurzel gesucht wird, gleich seyn, dem Quadrate von 400 zusammen genommen mit dem Quadrate des unbekannten Theiles und dem doppelt genommenen Producte aus 400 in diesen unbekannten Theil. Nach dem Abzuge des Quadrates von 400, welches 160000 beträgt, bleibt ein Rest = 17241, welcher folglich so groß seyn muß als daß zweyfache Product 400 in den unbekannten Theil zusammen genommen mit dem Quadrate des unbekannten Theiles. Da man fürs erste nur darauf denkt, die zweyte Ziffer der Wurzel zu finden, so begnügt man sich, zu dem was in der ersten Abtheilung als Rest bleibt, bloß die beyden Ziffern der zweyten Abtheilung hinzuzufügen; denn so lange man von dem noch unbekannten Theile nur die höchste Ziffer sucht, braucht man, wie sogleich erhellen wird, auf die folgenden Abtheilungen noch nicht zu sehen.

Sollte nun der Rest, z. B. hier 17241 bloß dem doppelten Producte aus dem bekannten Theile = 400 in den unbekannten Theil gleich seyn, so fände man den unbekannten Theil sehr leicht; denn man brauchte nur den bekannten Theil zu verdoppeln und mit dem Producte jenen Rest zu dividiren, der Quotient würde der gesuchte, noch unbekannte Theil der Wurzel seyn. Dieser Quotient ist nun freylich nicht genau der gesuchte Theil, indeß bestimmt man doch wirklich nach der Regel no. 3. die erste Ziffer dieses Quotienten und versucht dann, ob sie die zweyte Ziffer der Wurzel seyn kann. In unserm Exempel hat man so 400 und 20 als die beyden Theile der Wurzel, und wenn hiemit die Wurzel genau gefunden wäre, so müßte $2 \cdot 400 \cdot 20 + 20 \cdot 20 =$ dem Reste, also 17241 gleich seyn; ist dieser Rest größer, so subtrahirt man, nach no. 4 und 5. die Summe jener beyden Zahlen oder 16400 von diesem Reste, und sucht nun aus dem neuen Reste, hier = 841, die dritte Ziffer der Wurzel.

Man weiß nun, daß die Wurzel zwischen 420 und 430 liegt, und sieht jetzt 420 als den bekannten Theil an, zu dem noch ein unbekannter Theil hinzu kömmt. Das Quadrat des bekannten Theils ist nun völlig abgezogen; der Rest muß also gleich seyn dem doppelten Producte aus dem unbekannten Theile in den bekannten zusammen genommen mit dem Quadrate des unbekannten, und man bestimmt die folgende Ziffer der Wurzel auf ähnliche Weise wie wir die zweyte Ziffer bestimmt haben. Und so würde man fortfahren, wenn auch die Zahl, deren Wurzel gesucht wird, noch mehrere Ziffern enthielte. Denn wenn man, nach no. 8., den dritten Rest gefunden hat, so ist das Quadrat des bekannten Theils vollständig abgezogen, und man findet also den noch unbekannten Theil beynahe richtig, wenn man den Rest durch das Doppelte des bekannten Theiles dividirt; da aber der Quotient doch den unbekannten Theil nicht genau angiebt, so sucht man nur die erste Ziffer des Quotienten oder des unbekannten Theiles, daher man dieselbe Operation für jede folgende Ziffer der Wurzel wiederholen muß.

Zweytes Beyspiel. Die Wurzel aus 8457932 zu finden.

	8	45	79	32	Wurzel
Quadr. des ersten Theils der Wurzel	4	00	00	00	$= 2000$
					$+ 900$
Rest =	4	45	79	32	$+ 8$
Verdoppelter erster Theil = 4000; Der Quotient scheint zwar 11 zu werden, aber die Probe ergiebt 9 für die zweyte Ziffer der Wurzel $4000 \cdot 900 + 900^2 =$	4	41	00	00	
Rest =		4	79	32	
Verdoppelter bekannter Theil = 5800; Da die folgende Ziffer der Wurzel ein Zehner ist, so erhielte das Product aus diesem in 5800 drey Nullen; man überzeugt sich daher leicht, daß in die Stelle der Zehner eine Null, in die Stelle der Einer 8 kömmt, und es ist $5800 \cdot 8 + 8 \cdot 8 \cdot =$		4	64	64	
Rest =			14	68	

Da hier ein Rest bleibt, so liegt die genaue Wurzel zwischen 2908 und 2909, und es müßte noch der hinzukommende Bruch bestimmt werden.

Anmerk. In der Geometrie wird noch ein anderer Beweis für diese Regeln zu Bestimmung der Quadratwurzel vorkommen.

120. **34ste Aufgabe. Die Quadratwurzel eines gegebenen Bruches zu bestimmen.**

Auflösung. Man suche die Quadratwurzel des Zählers und die Quadratwurzel des Nenners jede besonders, und mache jene zum Zähler, diese zum Nenner eines Bruches, so ist dieser neue Bruch die gesuchte Wurzel.

Beweis. Da man das Quadrat eines Bruches findet, wenn man das Quadrat des Zählers zum Zähler, und das Quadrat des Nenners zum Nenner eines neuen Bruches macht: so ist offenbar die umgekehrte Regel die richtige zu Bestimmung der Quadratwurzel.

Beyspiel. Die Quadratwurzel aus $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{2}$; die Quadratwurzel aus $\frac{64}{81}$ ist $= \frac{8}{9}$, u. s. w.

121. Anmerkung. Man pflegt die Quadratwurzel eines Bruches nur dann auf diese Weise zu suchen, wenn sich so wohl die Wurzel des Zählers, als des Nenners genau in ganzen Zahlen angeben läßt. In allen übrigen Fällen ist es weit bequemer, den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, und dann die Wurzel nach den Regeln der 36sten Aufgabe zu bestimmen.

* 122. 11ter Lehrsatz. **Das Quadrat eines durch die kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruches ist allemal ein Bruch, der sich gleichfalls nicht durch kleinere Zahlen ausdrücken läßt.**

Beweis. Wenn ein Bruch auf die möglichst kleinsten Zahlen gebracht ist (§. 46.), so haben Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor mehr, das heißt, wenn auch der Zähler sowol als der Nenner sich als Product aus mehreren Zahlen betrachten läßt: so kommt doch keiner dieser Factoren im Zähler und im Nenner zugleich vor. Sucht man nun das Quadrat des Bruches, so enthält zwar der Zähler dieses Quadrates alle die Factoren zweymal, welche im Zähler der Wurzel vorkommen, und der Nenner des Quadrates enthält die Quadrate aller im Nenner der Wurzel vorkommenden Factoren, oder diese selbst gleichfalls zweymal. Da aber unter den Factoren des Nenners der Wurzel sich keiner befand, welcher auch im Zähler vorkäme: so ist offenbar, daß dieses auch im Quadrate nicht der Fall seyn kann, weil gar keine andre Zahlen weder im Zähler noch im Nenner als Factoren vorkommen, als diejenigen, die auch in der Wurzel vorkamen, und das Quadrat ist also ein Bruch, welcher sich nicht durch kleinere Zahlen ausdrücken läßt.

Beyspiel. Der Bruch $\frac{63}{64}$ oder $\frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8}$ ist ein solcher, der sich nicht durch kleinere Zahlen ausdrücken läßt, und sein Quadrat $\frac{7^2 \cdot 9^2}{8^2 \cdot 8^2}$ oder $\frac{7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}$ läßt sich gleichfalls nicht auf kleinere Zahlen bringen.

*123. Es läßt sich hieraus leicht der Schluß ziehen, daß auch jeder andre Bruch einen Bruch und keine ganze Zahl zum Quadrate hat, bloß mit Ausnahme des Falles, da der Zähler des Bruches ein genaues Vielfaches des Nenners, und folglich der Bruch einer ganzen Zahl gleich ist, und dann ist freylich auch das Quadrat eine ganze Zahl.

* 124. 12ter Lehrsatz. Wenn die Quadratwurzel einer ganzen Zahl sich nicht genau durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt, so giebt es auch keinen bestimmten Bruch, welcher ganz genau diese Wurzel angäbe.

Beweis. Da das Quadrat jedes gegebenen Bruches ein Bruch ist: so kann keine ganze Zahl das genaue Quadrat eines Bruches seyn; und es ist also gewiß, daß die Quadratwurzel einer ganzen Zahl entweder selbst eine ganze Zahl seyn wird, oder sich auch nicht durch einen bestimmten Bruch genau ausdrücken läßt.

* 125. Obgleich aber zufolge dieses Satzes eine solche Wurzel sich gar nicht strenge genau angeben läßt: so kann man doch Brüche bestimmen, welche ihr sehr nahe kommen und welche so gar ihr so nahe kommen, als man nur verlangen mag.

Beyspiel. Die Quadratwurzel aus 20 ist beynahe $= 4\frac{1}{2}$, noch genauer ist sie $4\frac{47}{100}$, und noch genauer $4\frac{472}{1000}$, denn das Quadrat der letztern ist 19, 998784, welches wenig über $\frac{1}{1000}$ von 20 abweicht; und so könnte man Brüche angeben, welche diese Wurzel noch weit genauer darstellten.

* 126. Erklärung. Man nennt diejenigen Zahlen rationale Zahlen, welche sich entweder durch ganze Zahlen oder durch bestimmte Brüche ausdrücken lassen; dagegen heißen diejenigen irrational, deren streng genauer Werth sich durch einen Bruch so wenig, als durch eine ganze Zahl angeben läßt.

* 127. Erklärung. Den wahren Werth einer irrationalen Zahl kann man also nur durch

Näherung oder Annäherung bestimmen, das heißt dadurch, daß man Brüche angiebt, welche sehr wenig von dem genauen Werthe der irrationalen Zahl abweichen, und es giebt immer Mittel, diese Näherung so weit zu treiben, als man will, oder Brüche zu finden, die um etwas Geringeres, als irgend ein gegebener Bruch von dem wahren Werthe der irrationalen Zahl abweichen.

Beyspiel. Die Quadratwurzel aus 2, oder $\sqrt{2}$ ist also eine irrationale Zahl, und so auch $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ u. s. w. Man bedient sich am besten der Decimalbrüche, um diese und alle ähnlichen Wurzeln durch Annäherung zu bestimmen.

128. 35ste Aufgabe. **Die Quadratwurzel einer jeden ganzen Zahl in Decimalbrüchen so genau auszudrücken, als verlangt wird.**

Auflösung. 1. Man setze zuerst fest, bis zu was für Decimaltheilen genau man die Wurzel zu wissen verlangt, und wie viele Ziffern man daher hinter dem Comma in der Wurzel berechnen muß, und hänge dann der Zahl, deren Wurzel gesucht wird, doppelt so viele Nullen an, als die Wurzel Decimalstellen, d. i. Ziffern hinter dem Comma erhalten soll. Diese Nullen sondre man, wie Decimalbrüche, durch ein Comma von der ganzen Zahl ab.

2. Man verrichtet die Ausziehung der Wurzel völlig so, als wenn die Zahl mit den angehängten Nullen zusammen eine ganze Zahl wäre. (§. 119.)

3. Wenn man dann die Wurzel vollständig gefunden hat, so setzt man das Comma so, daß in der Wurzel halb so viele Ziffern hinter dem Comma stehen, als man in der gegebenen Zahl Ziffern oder Nullen hinter dem Comma hatte.

Beweis. Nachdem man der Zahl die gehörige Anzahl Nullen angehängt hat, kann man sie als einen gewöhnlichen Bruch schreiben, da sie dann einen Nenner erhält, welcher aus einer 1, mit eben so vielen angehängten Nullen besteht, als man der gegebenen ganzen Zahl selbst Nullen angehängt hatte, und diese Anzahl von Nullen ist, nach unserer Voraussetzung, allemal eine gerade Zahl. Man findet die Wurzel dieses Bruches, indem man die Wurzel des Zählers zum Zähler und die Wurzel des Nenners zum Nenner eines neuen Bruches macht (§. 120.). Die Wurzel des Zählers muß nach no. 2. und nach der 33sten Aufgabe gesucht werden; die Wurzel des Nenners aber ist eine 1 mit halb so vielen Nullen, als jener Nenner selbst hatte. Will man also nun die Wurzel als Decimalbruch schreiben, so kommen hinter dem Comma halb so viele Ziffern zu stehen, als man der gegebenen Zahl Nullen angehängt hatte.

Beyspiel. Die Quadratwurzel aus 10 bis auf ein Milliontheilchen genau anzugeben. Man sucht die Quadratwurzel aus $\frac{10\,000000000000}{1000000000000}$, welche $= \frac{3162278}{1000000}$ beynahe, oder beynahe $= 3,162278$ ist.

* 129. 36ste Aufgabe. Die Quadratwurzel einer jeden Zahl, welche aus einer ganzen Zahl mit angehängtem Bruche, oder auch bloß aus einem Bruche besteht, zu bestimmen.

Auflösung. 1. Man bestimme, bis zu was für Decimaltheilen genau man die Wurzel zu haben verlangt, oder wie viele Ziffern man hinter dem Comma in der Wurzel, wenn diese sich nicht genau finden läßt, berechnen will.

2. Alsdann verwandle man den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch, und zwar suche man den Decimalbruch bis auf doppelt so viele Ziffern hinter dem Comma, als man in der Wurzel zu haben verlangt. Läßt sich der Bruch mit wenigern Ziffern genau ausdrücken, so hängt man so viele Nullen an, bis diese Anzahl von Ziffern herauskömmt.

3. Man sucht nun die Quadratwurzel so, als ob die Zahl mit dem Decimalbruche zusammen eine ganze Zahl wäre, wobey man aber vor allen Dingen darauf achten muß, daß die Menge der Ziffern hinter dem Comma in der Zahl, woraus die Quadratwurzel gezogen werden soll, eine grade Zahl sey, damit eine der Abtheilungen mit dem Comma zusammen treffe. Denn im entgegengesetzten Falle hätte der zum Decimalbruche gehörige Nenner eine ungrade Anzahl von Nullen, und seine Wurzel ließe sich nicht genau angeben, welches durchaus nothwendig ist.

4. Endlich setze man das Comma in der Wurzel so, das hinter dem Comma halb so viele Ziffern sind, als man in der Zahl, woraus die Wurzel gezogen ward, hinter demselben hatte.

Die Richtigkeit dieser Auflösung erhellet aus dem Beweise der vorigen Aufgabe.

Uebungs-Exempel. Die Quadratwurzel aus folgenden Zahlen so weit zu finden, als es in ganzen Zahlen möglich ist: aus 54732198745, aus 45678901234, aus 37945780010234.

* Aus denselben Zahlen die Quadratwurzel bis auf Milliontheile genau zu finden, auch die Quadratwurzeln aus 2, aus $2\frac{1}{2}$, aus $2\frac{3}{4}$, aus 12, aus 24 eben so genau zu bestimmen.

Von der Ausziehung der Cubikwurzel.

* 130. 37ste Aufgabe. Es ist eine ganze Zahl gegeben, man soll bestimmen aus wie vielen Ziffern ihre Cubikwurzel bestehen wird.

Auflösung. Man theile die Zahl von hinten her so ab, daß in jeder Abtheilung drey Ziffern stehen, ausgenommen in der höchsten Abtheilung, in welcher eine, zwey oder drey Ziffern stehen können, je nachdem es die gesammte Anzahl der Ziffern ergiebt. So viele Abtheilungen, als man auf diese Weise erhält, eben so viele Ziffern enthält die Cubikwurzel.

Beweis. Da der Cubus von 1 selbst 1 ist, der Cubus von 10 aber 1000, so haben alle einziffrigen Zahlen einen Cubus von einer, zwey oder drey Ziffern. Da 100 zur dritten Potenz erhoben, 1000000 giebt: so besteht der Cubus jeder zweyziffrigen Zahl aus vier, fünf oder sechs Ziffern, und so schließt man ferner, daß der Cubus jeder dreyziffrigen Zahl sieben, oder acht oder neun Ziffern enthält u. s. w., und hieraus folgt umgekehrt die

Regel, welche die Auflösung angiebt. Man vergleiche §. 115.

* 131. Es wäre nun leicht, auch die höchste Ziffer der Cubikwurzel zu bestimmen, und man kann dann auf eine ähnliche Weise, wie bey der Quadratwurzel, nach und nach die übrigen Ziffern finden, indem man immer die Wurzel als aus zwey Theilen bestehend betrachtet, deren einer schon bekannt ist, der andre aber noch bestimmt werden soll.

* 132. 13ter Lehrsatz. Der Cubus jeder zweytheiligen Wurzel, das ist jeder Zahl, die man als Summe zweyer andrer betrachtet, besteht aus der Summe folgender Theile: dem Cubus des ersten Theiles, dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des ersten Theiles in den zweyten Theil; dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des zweyten Theiles in den ersten Theil, und dem Cubus des zweyten Theiles.

Beweis. Da man eine jede Summe zweyer Zahlen völlig allgemein durch $a + b$ ausdrücken kann, wo dann a den einen und b den andern Theil bezeichnet: so braucht man nur den Cubus dieser Größe zu suchen, um sich von der Wahrheit des Lehrsatzes zu überzeugen. Man erhält als Quadrat dieser Größe nach §. 95. und 106.

$$= a^2 + 2\,ab + b^2$$

und wenn man nochmals mit $\quad a + b$

multiplicirt, so

$$\begin{array}{rrrr} & a^2b & + 2\,ab^2 & + b^3 \\ a^3 & + 2\,a^2b & + ab^2 & \\ \hline \end{array}$$

wird der Cubus $= a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$

welcher also wirklich so zusammen gesetzt ist, wie der Lehrsatz angiebt.

Beyspiel. Man hat also von 35 oder $30 + 5$ den Cubus

$$= 30^3 + 3 \cdot 30^2 \cdot 5 + 3 \cdot 30 \cdot 5^2 + 5^3$$

das ist $= 27000 + 13500 + 2250 + 125$, welches 42875 beträgt.

* 133. 38ste Aufgabe. Die Cubikwurzel jeder ganzen Zahl so weit zu bestimmen, als es in ganzen Zahlen möglich ist.

Auflösung. 1. Man theile die Zahl, deren Wurzel gesucht wird, so ab, wie in der vorigen Aufgabe, und untersuche dann, welche vollständige Cubikzahl in den Ziffern der ersten Abtheilung enthalten ist. Die Wurzel dieser Cubikzahl ist die erste Ziffer der gesuchten Wurzel. Die Cubikzahlen der einziffrigen Zahlen sind folgende:

Wurzel	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Cubus	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

2. Man ziehe den Cubus der ersten Ziffer der Wurzel von dem ab, was in der höchsten Abtheilung steht, und füge an den Rest die drey Ziffern der zweyten Abtheilung.

3. Um die zweyte Ziffer der Wurzel zu finden, nehme man das Quadrat der ersten Ziffer, multiplicire dieses mit 3, und hänge dem Producte zwey Nullen an; die heraus kommende Zahl gebrauche man als Divisor, und suche, wie oft sie in der am Ende von no. 2. erhaltenen Zahl vorkömmt; den Quotienten nimmt man, fürs erste zum Versuch, als zweyte Ziffer der Wurzel an.

4. Man multiplicire diese zweyte Ziffer in das dreymal genommene Quadrat der ersten Ziffer, und hänge dem Producte zwey Nullen an; man suche ferner das dreyfache Product aus dem Quadrate der zweyten Ziffer in die erste Ziffer, und hänge dem Producte eine Null an; endlich suche man den Cubus der zweyten Ziffer. Die Summe dieser drey Zahlen subtrahire man von dem, was jetzt noch in den beyden ersten Abtheilungen steht, das ist von der in nr. 2. bestimmten Zahl, und füge an den Rest die drey Ziffern der dritten Abtheilung. Hätte es sich gefunden, daß jene Summe größer wäre, als die in den beyden höchsten Abtheilungen noch stehende Zahl: so muß man die zweyte Ziffer der Wurzel kleiner annehmeu, doch aber darauf achten, daß man die größte Zahl, bey der diese Probe noch Statt findet, zur zweyten Ziffer annehme.

5. Man nehme die gefundenen zwey Ziffern der Wurzel als e i n e Zahl zusammen, suche ihr Quadrat, nehme das Dreyfache derselben und hänge daran zwey Nullen: hiemit dividire man die jetzt noch in den drey ersten Abtheilungen stehende Zahl, nehme den Quotienten zur dritten Ziffer der Wurzel und

6. berechne folgende drey Zahlen: das dreyfache Product aus der dritten Ziffer der Wurzel in das Quadrat des ersten zweyziffrigen Theiles, welchem Producte man zwey Nullen anhängt; das dreyfache Product aus dem Quadrate der dritten Ziffer der Wurzel in den ersten zweyziffrigen Theil mit einer angehängten Null; endlich den Cubus der dritten Ziffer. Die Summe dieser drey Zahlen subtrahirt man von dem, was in den drey ersten Abtheilungen noch steht, und vermindert, wenn diese Summe zu

groß ist, die dritte Ziffer der Wurzel gehörig, wie in nr. 4.

7. An den Rest, der bey dieser Subtraction bleibt, hängt man die Ziffern der vierten Abtheilung und setzt die Rechnung nun auf ähnliche Weise fort, bis man alle Abtheilungen der gegebenen Zahl durchgegangen ist.

Beyspiel. Die Cubikwurzel aus 955671625 zu finden.

Gegebene Zahl =	955	671	625	Wurzel
Cubus der ersten Ziffer d. Wurzel =	729	—		= 985.
Rest mit den angehängten Ziffern der zweyten Abtheilung . . . =	226	671		
Dreyfaches Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel mit zwey angehängten Nullen als Divisor = 24300.				
Der Quotient ist zwar = 9, aber die zweyte Ziffer der Wurzel wird = 8, und man findet:				
$3 \cdot 9^2 \cdot 8$ mit zwey angehängten Nullen . . . = 194400.				
$3 \cdot 9 \cdot 8^2$ mit einer angehängten Null . = 17280.				
und 8^3 . . . . . = 512.				
Summe dieser drey Zahlen =	212	192	—	
Rest mit den angehängten Ziffern der dritten Abtheilung . . =	14	479	625	
Das dreyfache Quadrat des bekannten zweyziffrigen Theils der Wurzel, mit zwey angehängten Nullen als Divisor = 2881200.				
Die dritte Ziffer der Wurzel = 5, und $3 \cdot 98^2 \cdot 5$ mit zwey angehängten Nullen = 14406000.				
$3 \cdot 98 \cdot 5^2$ mit einer angehängten Null . = 73500.				
und 5^3 . . . = 125.				
Summe dieser drey Zahlen =	14	479	625	

Es bleibt also hier kein Rest, und es ist 985 die genaue Cubikwurzel.

Beweis. Man kann den Beweis hier auf sehr ähnliche Weise, wie bey der Quadratwurzel führen. Was zuerst die Bestimmung der höchsten Ziffer der Wurzel betrifft, so ist z. B. im vorigen Exempel sogleich offenbar, daß die Wurzel zwischen 900 und 1000 fällt, indem $900^3 = 729000000$, kleiner, hingegen $1000 = 1000000000$ größer, als die gegebene Zahl ist. Zieht man nun, indem man 900 als den ersten Theil der Cubikwurzel betrachtet, den Cubus dieses ersten Theiles ab: so muß der gesammte übrig bleibende Rest gleich seyn der Summe folgender drey Zahlen: dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des ersten Theils in den noch unbekannten zweyten Theil; dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des unbekannten zweyten Theiles in den ersten Theil; endlich dem Cubus des zweyten Theiles. Unter diesen drey Zahlen ist die erstere die größeste, weil der bekannte Theil beträchtlich größer, als der noch zu bestimmende zweyte Theil der Wurzel ist, und also um so mehr, das Quadrat von jenem das Quadrat von diesem übertrifft. Sollte der Rest bloß der ersten dieser drey Zahlen gleich seyn, so erhielte man den unbekannten Theil der Wurzel genau, wenn man den Rest durch das dreyfache Quadrat des bekannten Theiles dividirte; und man sieht hieraus, das also diese Division wenigstens ungefähr die erste Ziffer des unbekannten Theiles angeben wird. Man betrachtet nun für einen Augenblick den zweyten Theil der Wurzel so, als ob er bloß aus dieser Ziffer mit den gehörigen angehängten Nullen, (in unserm Exempel aus 90, weil jener Quotient 9 ist,) bestände und sucht die Summe der drey Zahlen $3 . 900^2 . 90 + 3 . 900 . 90^2 + 90^3$. Findet sich diese Summe, wie hier der Fall ist, größer als der noch vorhandene Rest: so sieht man, daß man die zweyte Ziffer der Wurzel kleiner annehmen muß, daß nämlich die Wurzel nur etwas über 980 seyn wird. Man subtrahirt also $3 . 900^2 . 80 + 3 . 900 . 80^2 + 80^3$ und nachdem dies geschehen, ist der vollständige Cubus von 980 abgezogen, welche Zahl man jetzt als ersten Theil der Wurzel ansieht, und die ganz ähnliche Rechnung zu Bestimmung der dritten Ziffer wieder anfängt.

Ich habe hier die Rechnung so dargestellt, wie sie eigentlich mit Beybehaltung aller vorkommenden Nullen vollständig geführt werden müßte, und die Richtigkeit dieser Rechnung wird aus diesem Beweise erhellen. In der Auflösung selbst habe ich diese Regeln so abgefaßt, wie man, zu Abkürzung der Arbeit, gewöhnlich zu rechnen pflegt; man wird die Gründe für diese Regeln aus dem Beweise leicht finden, z. B. die Gründe, warum man in nr. 3. 4. 5. 6. zuweilen zwey, zuweilen eine Null anhängt. Diese Nullen finden sich nämlich bey vollständig geführter Rechnung von selbst, wie auch folgendes ausführlich berechnete Beyspiel zeigt.

B e y s p i e l. Die Cubikwurzel aus 2000000 zu finden.

Gegebene Zahl =	2	000	000	Wurzel
Cubus des ersten Theils =	1	000	000	= 100
				+ 20
Rest =	1	000	000	+ 6
Dreyfaches Quadrat des ersten Theils als Divisor = 30000.				
Zweyter Theil der Wurzel = 20.				
Dreyfaches Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten . . . . . = 600000				
Dreyfaches Product aus dem Quadrate des zweyten Theils in den ersten . . = 120000				
Cubus des zweyten Theils = 8000				
Summe =		728	000	
Rest =		272	000	
Dreyfaches Quadrat des bekannten zweyziffrigen Theils als Divisor = 43200.				
Dritte Ziffer der Wurzel = 6.				
Dreyfaches Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweyten $= 3 \cdot 120^2 \cdot 6$ . . = 259200				
Dreyfaches Product aus dem Quadrate d. zweyten Theils in den ersten $= 3 \cdot 120 \cdot 6^2 = 12960$				
Cubus des zweyten Theils = 216				
Summe =		272	376	

Da diese letztere Summe größer ist, als der noch übrige Rest, so folgt, daß die Wurzel eigentlich etwas kleiner als 126 ist.

Anmerk. Die Gründe für diese Regeln lassen sich auch geometrisch zeigen, wie in der Geometrie erklärt werden wird.

* 134. 39ste Aufgabe. Die Cubikwurzel eines Bruches zu finden.

Auflösung. Man suche die Cubikwurzel des Zählers und des Nenners jede besonders und mache die erstere zum Zähler, die letztere zum Nenner eines Bruches. Dieser Bruch ist die gesuchte Wurzel.

Beweis. Der Cubus eines gegebenen Bruches hat zum Zähler den Cubus des Zählers und zum Nenner den Cubus des Nenners des gegebenen Bruches; es ist nämlich der Cubus von $\frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$ und daher auch umgekehrt die Cubikwurzel aus $\frac{a}{b}$ oder $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

Beyspiel. Es ist $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$.

* 135. 14ter Lehrsatz. Der Cubus eines jeden wirklichen Bruches ist selbst ein Bruch.

Beweis. Wenn der Bruch ein wahrer Bruch, nämlich nicht einer ganzen Zahl gleich ist, also nicht der Zähler ein genaues Vielfaches des Nenners: so kann man ihn allemal, ohne seinen Werth zu ändern, so ausdrücken, daß Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben (§. 46.). Da nun der Cubus eines Bruches weder im Zähler noch im Nenner andere Factoren erhält, als die Wurzel hatte, sondern bloß im Zähler die Factoren des Zählers der Wurzel, und im Nenner die Factoren des Nenners der Wurzel dreymal wiederhohlt vorkommen: so ist offenbar, daß auch der Cubus sich nicht auf kleinere Zahlen bringen läßt, wenn dies bey der Wurzel nicht der Fall war, und daß der Cubus gewiß keine ganze Zahl seyn kann, wenn die Wurzel ein wahrer Bruch ist.

* 136. 15ter Lehrsatz. **Wenn die Cubikwurzel einer ganzen Zahl sich nicht genau durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt: so giebt es auch keinen bestimmten Bruch, der diese Wurzel ganz genau angäbe.**

Beweis. Da der Cubus eines jeden Bruches, der selbst nicht einer ganzen Zahl gleich ist, nothwendig ein Bruch ist: so kann keine ganze Zahl der genaue Cubus eines bestimmten Bruches seyn. Die Cubikwurzel jeder ganzen Zahl ist also entweder ebenfalls eine ganze Zahl, oder sie ist eine irrationale Zahl, welche sich durch keinen bestimmten Bruch, sondern nur näherungsweise durch eine Reihe von immer kleinern Brüchen, und dadurch so genau, als man verlangt, angeben läßt.

* 137. 40ste Aufgabe. **Die Cubikwurzel jeder ganzen Zahl, auch jedes Bruches, oder einer ganzen Zahl, welcher ein Bruch angehängt ist, durch Decimalbrüche so genau, als nur verlangt wird, zu bestimmen.**

Auflösung. 1. Man bestimme, bis zu was für Decimaltheilen genau man die Wurzel zu wissen verlangt, und wie viele Ziffern hinter dem Comma man demnach in der Wurzel berechnen muß; und gebe nun der Zahl, deren Wurzel gesucht wird, dreymal so viele Ziffern hinter dem Comma, als die Wurzel hinter dem Comma erhalten soll. Dieses geschieht, indem man die Brüche in Decimalbrüche verwandelt und diese bis auf so viele Ziffern, als eben angegeben ist, berechnet, oder wenn sich nicht so viele Ziffern ergeben, die nöthige Zahl von Nullen anhängt.

2. Man theile nun die Zahl eben so wie eine ganze Zahl von drey zu drey Ziffern ab, gebe aber ins besondere Achtung, daß einer dieser Theilungspuncte mit dem Comma zusammen treffe, welches auch von selbst geschieht, wenn man die Anzahl der Ziffern hinter dem Comma nach der Regel nr. 1. bestimmt, und jeder der Abtheilungen drey Ziffern giebt.

3. Die Ausziehung der Wurzel verrichtet man so, als ob die Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen wird, eine ganze Zahl wäre; setzt dann aber das Comma so, daß hinter demselben nur ein Drittheil von der Anzahl von Ziffern bleiben, die man in der gegebenen Zahl hinter dem Comma hatte.

Beweis. Betrachtet man die Zahl mit dem angehängten Decimalbruche, aus welcher die Wurzel gesucht wird, so, wie sie mit ihrem Decimal-Nenner geschrieben werden muß, wenn man sich des Comma's nicht bedienen will: so bedarf die Richtigkeit dieser Regeln kaum eines Beweises. Man übersieht aber, daß es durchaus nöthig ist, daß die Anzahl der Ziffern hinter dem Comma in der gegebenen Zahl oder die Anzahl der Nullen im Nenner eine durch 3 theilbare Zahl sey, weil nur dann die Wurzel des Nenners sich leicht und genau finden läßt. Hat nun der Decimal-Nenner in der gegebenen Zahl eine solche Anzahl von Nullen: so hat seine Cubikwurzel nur den dritten Theil dieser Nullen, und es erhellet der Grund der Regel für die Bestimmung der Stelle des Comma's in der Wurzel.

Beyspiel. Die Cubikwurzel aus 10 bis auf Milliontheilchen genau zu bestimmen. Desgleichen die Wurzeln aus 12, 13, 25, 100.

Siebenter Abschnitt.

Von den Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

138. Erklärung. Das Wort Verhältniß zeigt eine Vergleichung zwischen zwey gleichartigen Größen an, und zwar eine Vergleichung, welche angiebt, ob sie einander gleich sind, oder wie sie von der Gleichheit abweichen.

139. Erklärung. Die Vergleichung, wie zwey Größen von der Gleichheit abweichen, läßt sich auf zweyerley Weise anstellen; denn man kann erstlich

fragen: um wie viel ist die eine größer, als die andre? oder man kann zweytens fragen: wie viel mal so groß ist die eine, als die andere? Man unterscheidet daher das arithmetische Verhältniß zweyer Größen, welches durch die Beantwortung der erstern Frage bestimmt wird, und das geometrische Verhältniß derselben, welches man kennen lernt, wenn man die zweyte Frage beantwortet.

140. Erklärung. Zwey Größen haben zu einander eben dasjenige Verhältniß, welches zwey andre Größen zu einander haben, wenn bey jenen die Beantwortung der einen oder der andern der im vorigen §. erwähnten Fragen eben so ausfällt, als bey diesen.

Zwey arithmetische Verhältnisse sind also einander gleich, wenn die erste Größe die zweyte um eben so viel übertrifft, als die dritte die vierte. Hingegen sind zwey geometrische Verhältnisse einander gleich, wenn die erste Größe in der zweyten so oft enthalten ist, als die dritte in der vierten.

Beyspiel. Das arithmetische Verhältniß der Zahlen 5, 3 ist also eben dasselbe, wie das arithmetische Verhältniß der Zahlen 9, 7.

141. Erklärung. Vier Größen sind in Proportion, wenn die erste sich eben so zur

zweyten verhält, wie die dritte zur vierten, oder wenn diese beyden Verhältnisse einander gleich sind. Man nennt die Proportion eine arithmetische, wenn die gleichen Verhältnisse arithmetische sind; hingegen eine geometrische Proportion, wenn die gleichen Verhältnisse geometrische Verhältnisse sind.

142. Erklärung. Die Glieder der Proportion sind die vier Größen, welche in Proportion oder einander proportional sind. In jeder Proportion heissen das erste und vierte Glied die äussern, das zweyte und dritte Glied die mittlern Glieder. Auch betrachtet man in jedem Verhältnisse ein Glied als das vorhergehende und eines als das nachfolgende; in der Proportion sind also das erste und dritte die vorgehenden, das zweyte und vierte die nachfolgenden Glieder.

Von den arithmetischen Verhältnissen.

143. Willkührlicher Satz. Da die arithmetische Proportion auf der Gleichheit der Differenzen zwischen den ersten und den beyden letzten Gliedern der Proportion beruht: so drückt man, daß die Zahlen 5, 3, 13, 11 in arithmetischer Proportion sind, durch folgende Bezeichnung aus

$$5 - 3 = 13 - 11.$$

144. **16ter Lehrsatz.** In einer arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden mittlern Glieder der Summe der beyden äussern Glieder gleich.

Beweis. Da das zweyte Glied gegen das erste eben so viel kleiner ist, als das dritte Glied das vierte übertrifft, so ist offenbar die Summe des ersten und vierten so groß, als die Summe des zweyten und dritten; denn wenn man z. B. die Proportion $17 - 11 = 29 - 23$ hat, so ist das erste Glied um 6 größer als das zweyte und das vierte gerade eben so viel kleiner als das dritte, daher $17 = 11 + 6$ und $29 = 23 + 6$, also so wohl die Summe der äußern, als der mittlern Gliedern $= 11 + 6 + 23$.

* Der Beweis läßt sich mit Hülfe der Buchstaben-Rechnung auch so führen, daß man die arithmetische Proportion $a - b = c - d$ als Gleichung betrachtet. Addirt man dann zu beyden gleichen Größen $b + d$, so erhält man

$$a - b + b + d = c - d + b + d,$$

das ist $a + d = c + b$, und dieses ist unser Lehrsatz in Buchstaben ausgedrückt.

154. **41ste Aufgabe.** Aus drey gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion das eine unbekannte Glied zu finden.

Auflösung. Man kann die Proportion immer so ausdrücken, daß das gesuchte Glied entweder das erste oder das vierte wird. Hat man sie so gestellt, so addire man die beyden mittlern Glieder und subtrahire das eine bekannte äussere Glied, dann ist der Rest das gesuchte unbekannte Glied.

Beyspiel. Man soll eine Zahl suchen, welche von 7 um eben so viel verschieden ist, als 19 von 13. Bezeichnet man die unbekannte Zahl mit x, so soll
$7 - x = 19 - 13$, oder welches einerley ist
$19 - 13 = 7 - x$, seyn, und man findet
$x = 13 + 7 - 19 = 1$, als die gesuchte Zahl.
Also ist $7 - 1 = 19 - 13$, oder in der arithmetischen Proportion, deren drey erste Glieder 19, 13, 7 sind, ist 1 das vierte.

146. Erklärung. Man nennet eine stetige arithmetische Proportion diejenige, deren beyde mittlere Glieder einander gleich sind. Alsdann heißt die Zahl, welche in beyden mittlern Gliedern vorkömmt, die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den Zahlen, welche das erste und vierte Glied der Proportion ausmachen.

Beyspiel. Die Proportion $75 - 66 = 66 - 57$ ist also eine stetige arithmetische Proportion, und 66 ist die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen 57 und 75.

147. 42ste Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Man addire die beyden gegebenen Zahlen. Die Hälfte dieser Summe ist die gesuchte mittlere Proportionalzahl.

Beyspiel. Zwischen 75 und 64 ist ist also $69\frac{1}{2}$ die mittlere arithmetische Proportionalzahl; denn es ist $\frac{75 + 64}{2} = 69\frac{1}{2}$, und $75 - 69\frac{1}{2} = 69\frac{1}{2} - 64$.

* 148. Unter den Zahlen, die in arithmetischer Proportion sind, könnten auch negative vorkommen. Denn wenn man z. B. zu 72, 50 und 18 die vierte arithmetische Proportionalzahl sucht, so giebt $72 - 50 = 18 - x$, für die letztere $- 4$.

Sollte man zu $+ 15$, $- 12$ und $- 19$ die vierte Proportionalzahl suchen, so ist der Unterschied von $+ 15$ und $- 12 = 27$, und man findet daher das vierte Glied der arithmetischen Proportion $= - 46$, denn $- 12$ von $+ 15$ abgezogen, läßt $+ 27$, und $- 46$ von $- 19$ abgezogen, läßt ebenfalls $+ 27$ zum Reste, (nach §. 87.). Man würde diese Proportion eigentlich so schreiben müssen:

$$15 - (- 12) = - 19 - (- 46)$$

oder auch, wenn man die abzuziehenden Größen mit umgekehrtem Zeichen addirt:

$$15 + 12 = - 19 + 46.$$

149. Erklärung. Man nennet diese mittlere Proportionalzahl auch das arithmetische

Mittel zwischen zwey andern Zahlen, und daher versteht man unter dem arithmetischen Mittel zwischen mehrern Zahlen die Summe aller dieser Zahlen dividirt mit der Menge der Zahlen.

Beyspiel Wenn an einem Orte in einem Jahre 751, im andern 697, im dritten 755, im vierten 725 Menschen gestorben sind, so sagt man: im Mittel, oder ein Jahr ins andere gerechnet, sind jedes Jahr gestorben 732 Menschen, weil $\frac{751 + 697 + 755 + 725}{4} = \frac{2928}{4} = 732$.

Von der arithmetischen Progression.

* 150. Erklärung. Wenn man eine Reihe von Zahlen hat, die so beschaffen sind, daß die erste zur zweyten eben das arithmetische Verhältniß hat, wie die zweyte zur dritten und wie die dritte zur vierten, die vierte zur fünften u. s. w., oder überhaupt, wie eine jede zu der nächst folgenden: so heißt diese Reihe von Zahlen eine arithmetische Progression, und jede dieser Zahlen heißt ein Glied der Progression

Beyspiel. Die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 u. s. w. bilden eine arithmetische Progression; denn man hat $17 - 15 = 15 - 13 = 13 - 11 = 11 - 9$ u. s. w.

* 151 In einer arithmetischen Progression ist also jedes Glied die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den beyden nächsten Gliedern. Da-

her kann man von jeder arithmetischen Progression so viele Glieder bestimmen, als man will, sobald nur zwey gegeben sind.

Beyspiel. Will man die arithmetische Progression bestimmen, worin 75 und 63 als zwey einander nächste Glieder vorkommen, so setzt man $75 - 63 = 63 - x$, und findet die Reihe: 75, 63, 51, 39, 27, 15 u. s. w. Oder, wenn man setzt $x - 75 = 75 - 63$, so findet man andere Glieder derselben Reihe, nämlich 63, 75, 87, 99, 111 u. s. w.

* 152. Wenn man mehrere, immer kleinere Glieder einer Progression berechnet, so kömmt man endlich an negative Glieder, und würde z. B. in der vorigen Progression noch folgende Glieder finden: 39, 27, 15, 3, -9, -21, -33, -45 u. s. w. Man könnte also unzählige Glieder einer Progression angeben.

* 153. Erklärung. Man nennt eine Progression eine steigende, wenn die folgenden Glieder immer größer sind, als die vorhergehenden; hingegen eine fallende, wenn die folgenden Glieder immer kleiner sind, als die vorhergehenden.

Beyspiel. Es ist also 1, 4, 7, 10, 13, 16 u. s. w. eine steigende Progression; hingegen ist 34, 31, 28, 25, 22, 19, 16, 13 u. s. w. eine fallende Progression.

* 154. 43ste Aufgabe. Wenn zwey nächste Glieder der arithmetischen Progression gegeben sind, jedes andre Glied zu bestimmen, wenn nur die Anzahl der Glieder, welche zwischen dem gesuchten und gegebenen Gliedern liegen, bekannt ist.

Auflösung. Wenn man die beyden gegebenen Glieder als die ersten der Progression betrachtet: so ist der Unterschied zwischen dem ersten und dritten Gliede zweymal so groß, als zwischen dem ersten und zweyten Gliede; der Unterschied zwischen dem ersten und vierten ist dreymal so groß; der Unterschied zwischen dem ersten und zehnten ist neunmal so groß u. s. w. Hieraus ergiebt sich folgende Regel, um irgend ein Glied der Progression zu bestimmen, welches ich kurz das n^{te} Glied nennen will. Man suche den Unterschied der beyden gegebenen Glieder und multiplicire diesen mit $n - 1$, das heißt mit einer um eins kleinern Zahl, als diejenige ist, welche angiebt, das wievielte Glied das gesuchte ist. Das Product addire man zum ersten Gliede, wenn man eine steigende Progression sucht, und subtrahire es hingegen von demselben, wenn man eine fallende Progression verlangt.

Beyspiel. In der Progression, deren erste Glieder 915 und 870 sind, das dreyzehnte Glied der fallenden Progression zu finden. Man hat $915 - 870 = 45$, und $n = 13$; also $(n - 1) \cdot 45 = 12 \cdot 45 = 540$, folglich $915 - 540 = 375$, als das gesuchte dreyzehnte Glied. Das fünf und zwanzigste Glied würde man $= -165$ finden; dagegen aber das dreyzehnte Glied der steigenden Reihe, deren erste Glieder 870, 915 sind, $= 1410$.

* 155. 44ste Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Zahlen eine bestimmte Anzahl von Gliedern einer arithmetischen Progression oder von mittlern arithmetischen Proportionalzahlen zu finden.

Auflösung. Man suche den Unterschied der beyden gegebenen Zahlen; dividire diesen mit eins mehr, als die Anzahl der zwischen zu fügenden Glieder beträgt: so giebt dieser Quotient, selbst zu der kleinsten der gegebenen Zahlen addirt, das erste gesuchte Zwischenglied; addirt man zu diesem Gliede denselben Quotienten abermals, so findet man das zweyte Zwischenglied, und so jedes nächst folgende.

Beyspiel. Zwischen 7 und 112 fünf mittlere arithmetische Proportionalzahlen einzuschalten. Der Unterschied der gegebenen Zahlen ist 105, und dieser mit 6 dividirt, giebt $17\frac{1}{2}$, man findet daher die Progression 7, $24\frac{1}{2}$, 42, $59\frac{1}{2}$, 77, $94\frac{1}{2}$, 112.

* 156. 45ste Aufgabe. In einer gegebenen arithmetischen Progression die Summe einer jeden bestimmten Anzahl von Gliedern anzugeben.

Auflösung. Man addire das erste und letzte Glied desjenigen Theiles der Progression, dessen Summe man sucht; diese Summe multiplicire man mit der Anzahl der Glieder, und halbire das Product. Die herauskommende Zahl ist die Summe aller gegebenen Glieder der Progression.

Beyspiel. Da die natürlichen Zahlen eine arithmetische Progression bilden, so findet man die Summe der ersten tausend Zahlen, wenn man 1 und 1000, als die äußersten Glieder addirt, die Summe mit 1000, als der Anzahl der Glieder multiplicirt, und das Product mit 2 dividirt. Die Summe der ersten tausend natürlichen Zahlen ist also = 500500.

Beweis. Wenn man alle zu addirende Glieder der Reihe nach der Ordnung hinschreibt, und darunter dieselbe Glieder in umgekehrter Ordnung, so nämlich, daß das letzte unter dem ersten, das vor-letzte unter dem zweyten steht, so ist die Summe jeder zwey über einander stehender Glieder gleich, z. B. in den hier folgenden Reihen = 42.

7. 11. 15. 19. 23. 27. 31. 35.
35. 31. 27. 23. 19. 15. 11. 7.

Hier erhält man also die doppelte Summe der oben stehenden Reihe, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der ganzen Anzahl der Glieder multiplicirt; und es erhellt die Richtigkeit der Auflösung. Daß aber die Summe jeder zwey über einander stehender Glieder gleich werde, erhellt daraus, weil immer $11 - 7 = 35 - 31$ ist.

Uebungs-Exempel. Die arithmetische Progression zu bestimmen, deren erste Glieder 2 und 3,7; oder deren erste Glieder 15 und $21\frac{3}{4}$ sind.

Das dreyßigste Glied eben jener steigenden Progression zu finden.

Zwischen 15 und 25 dreyßig mittlere arithmetische Proportionalzahlen zu bestimmen.

Die Summen folgender Progressionen zu bestimmen: 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35; und der Progression, deren erstes Glied 16, das letzte $\frac{5}{2}$ ist, wenn zwischen diesen Zahlen zwölf Glieder eingeschaltet werden, oder wenn zwanzig eingeschaltet werden.

Von den geometrischen Verhältnissen.

157. Erklärung. Da das geometrische Verhältniß zweyer Zahlen zu einander dadurch bestimmt wird, daß man angiebt, wie viel mal die eine in der andern enthalten sey: so hat man der Zahl,

welche dieses angiebt, den eigenen Namen: Exponent des Verhältnisses, gegeben.

Es haben also (§. 140.) zwey Größen dasselbe geometrische Verhältniß zu einander, welches zwey andre Größen zu einander haben, wenn der Exponent beyder Verhältnisse gleich ist.

Beyspiel. Der Exponent des Verhältnisses 5 zu 20 ist $= 4$; der Exponent des Verhältnisses 20 zu 5 ist $= \frac{1}{4}$. Die Verhältnisse 7 zu 9 und 21 zu 27 haben beyde zum Exponenten $\frac{9}{7}$, und diese beyden Verhältnisse sind also einander gleich.

Anmerk. Man muß bemerken, daß der Begriff vom Exponenten des Verhältnisses wohl zu unterscheiden ist von dem Exponenten einer Potenz.

158. Willkührlicher Satz. Man bezeichnet die geometrische Proportion oder die Gleichheit zweyer geometrischer Verhältnisse, daß z. B. 5 sich zu 20 eben so verhält, wie 1 zu 4, oder daß diese vier Zahlen in der angegebenen Ordnung in geometrischer Proportion sind, auf folgende Weise

$$5 : 20 = 1 : 4,$$

und es behalten hier die Zeichen der Division und der Gleichheit ihre gewöhnliche Bedeutung, denn es ist $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

159. 17ter Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion ist das Product der

beyden mittlern Glieder gleich dem Producte der beyden äußern Glieder.

Beweis. Man kann immer das zweyte Glied betrachten, als ein Product aus dem ersten Gliede in den Exponenten, und das vierte Glied, als ein Product aus demselben Exponenten in das dritte Glied. Multiplicirt man also das erste Glied in das vierte, so hat man ein Product aus dem ersten Gliede in das dritte und den Exponenten; und indem man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt, erhält man ein Product aus dem dritten Gliede in das erste und den Exponenten. Diese beyden Producte sind also gleich, weil sie aus denselben in einander multiplicirten Zahlen bestehen.

Beyspiel. Es ist $5:7 = 25:35$, und also auch $5 \cdot 35 = 7 \cdot 25$.

Der Beweis läßt sich auch so führen: Wenn $5:7 = 25:35$, so ist $\frac{5}{7} = \frac{25}{35}$; und wenn man beyde Glieder dieser Gleichung mit 7 und mit 35 multiplicirt, so erhält man $\frac{5 \cdot 7 \cdot 35}{7} = \frac{25 \cdot 7 \cdot 35}{35}$, oder $5 \cdot 35 = 25 \cdot 7$, wie der Lehrsatz angiebt.

160. 46ste Aufgabe. Zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Die Aufgabe verlangt, eine Zahl zu finden, die sich za der, der Ordnung nach gegebenen, dritten Zahl eben so verhält, wie die zweyte zur ersten. Man multiplicire die zweyte und dritte in einander und dividire das Product durch die erste, so ist der Quotient die gesuchte vierte Proportionalzahl. Der Beweis erhellet aus dem vorigen Lehrsatze.

Beyspiel. Zu den drey Zahlen 5, 7 und $10\frac{3}{4}$ die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden. Man hat $\frac{7 \cdot 10\frac{3}{4}}{5} = 15\frac{1}{20}$, welches die gesuchte Zahl ist.

161. Erklärung. Eine geometrische Proportion heißt eine stetige, wenn ihre beyden mittleren Glieder einander gleich sind, und die in beyden mittlern Gliedern stehende Zahl ist die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen den beyden Zahlen, welche die äußern Glieder der Proportion ausmachen.

Beyspiel. Die Proportion $12 : 36 = 36 : 108$ ist eine stetige geometrische Proportion; 35 ist die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 12 und 108, und endlich ist 108 die dritte geometrische Proportionalzahl zu 12 und 36.

162. 47ste Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Man multiplicire die beyden gegebenen Zahlen in einander, und ziehe aus dem Producte die Quadratwurzel. Diese Quadratwurzel ist die gesuchte mittlere Proportionalzahl. Die Richtigkeit dieser Auflösung erhellet daraus, weil das Product der beyden äußern Glieder gleich seyn muß dem Quadrate der mittlern Proportionalzahl (§. 159.).

Beyspiel. Die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 6 und 216 zu finden. Man erhält $6 \cdot 216 = 1296$, und $\sqrt[2]{1296} = 36$; also ist 36 die gesuchte Zahl, und $6 : 36 = 36 : 216$.

Uebungs-Exempel. Die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 10 und 100 zu finden.

Die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 100 und 200 zu finden.

163. 18ter Lehrsatz. Wenn man zwey Zahlen in einander multiplicirt: so verhält sich die Einheit zum einen Factor, wie der andre Factor zum Producte.

Denn das Product enthält den zweyten Factor eben so oft, als der erste Factor die Einheit enthält.

Beyspiel. Da $7 \cdot 8 = 56$, so ist $1 : 7 = 8 : 56$.

164. 19ter Lehrsatz. Wenn man zwey Zahlen durch einander dividirt: so ver-

hält sich der Divisor zum Dividendo, wie die Einheit zum Quotienten.

Denn der Divisor ist so oft im Dividendo enthalten, als der Quotient anzeigt, das ist, als der Quotient die Einheit enthält.

Beyspiel. Da 129 dividirt mit 43 zum Quotienten 3 giebt, so ist auch $43 : 129 = 1 : 3$.

* 165. Man kann diese Lehrsätze auch auf negative Größen anwenden. Da nämlich $+ 7$ mit $- 9$ multiplicirt $= - 63$ ist, so hat man auch $1 : 7 = - 9 : - 63$. Und da $- 5$ mit $- 8$ multiplicirt $= + 40$ ist, so ist

$$1 : - 5 = - 8 : + 40.$$

Um das letztere Verhältniß richtig zu verstehen, muß man sich an das erinnern, was bey der Multiplication entgegengesetzter Größen (§. 88.) erwähnt ist. Eigentlich nämlich hat das positive 1 zur negativen 5 gar kein Verhältniß, denn der Begriff des Verhältnisses setzt Gleichartigkeit der verglichenen Größen voraus; aber man kann auch hier sagen: so wie die Zahl $- 5$ nicht die Eins selbst, sondern ihr Gegentheil fünfmal enthält, so enthält auch $+ 40$ die Zahl $- 8$ nicht selbst, sondern ihr Gegentheil, und zwar dieses ebenfalls fünfmal.

Bey der Division findet eben diese Anwendung statt.

166. 20ster Lehrsatz. Wenn sich eine Zahl zu einer zweyten eben so verhält,

wie eine dritte zur vierten: so verhält sich auch die erste zur dritten, wie die zweyte zur vierten.

Beweis. Da das Verhältniß der ersten zur zweyten eben dasselbe ist, wie das Verhältniß der dritten zur vierten: so haben diese beyden Verhältnisse einerley Exponenten, das heißt, das zweyte Glied ist ein eben solches Vielfaches des ersten, als das vierte ein Vielfaches des dritten ist. Nun verhält sich aber eine Zahl zu einer andern allemal eben so, wie sich die gleich vielfachen dieser beyden Zahlen zu einander verhalten.

Man kann den Beweis auch aus der Lehre von den Gleichungen herleiten. Ist nämlich $7 : 8 = 42 : 48$, so ist $\frac{7}{8} = \frac{42}{48}$, und wenn man hier beyde Größen mit 8 multiplicirt und mit 42 dividirt, so ergiebt sich, wenn man diese Rechnungs-Operationen bloß durch Zeichen andeutet, zuerst die Gleichung $7 = \frac{8 \cdot 42}{48}$, und dann $\frac{7}{42} = \frac{8}{48}$, woraus die Proportion $7 : 42 = 8 : 48$ unmittelbar folgt.

Anmerk. Ich werde bey den folgenden Lehrsätzen, der Kürze wegen, den Beweis immer an einem Beyspiele durchführen, indeß wird man auch dann die völlige Allgemeinheit der Sätze gleichwohl übersehen.

167. 21ster Lehrsatz. Wenn vier Größen in Proportion sind, daß sich nämlich die erste zur zweyten verhält, wie die dritte zur vierten: so verhält sich auch die Summe der ersten und dritten zur Summe der zweyten und vierten, wie die erste Größe zur zweyten.

Beweis. Da die Proportion $19:20 = 38:40$ richtig ist, so findet nach dem vorigen Lehrsatze auch folgende Statt $19:38 = 20:40$, und man hat daher die gleichen Exponenten $\frac{38}{19} = \frac{40}{20}$. Addirt man zu jeder dieser gleichen Größen 1, so hat man $\frac{38}{19} + 1 = \frac{40}{20} + 1$, oder $\frac{38+19}{19} = \frac{40+20}{20}$, und deshalb die Proportion

$$19 + 38 : 19 = 40 + 20 : 20,$$

oder (§. 166.) $19 + 38 : 20 + 40 = 19 : 20$.

Dieses ist gerade die Proportion, die nach dem Lehrsatze Statt finden sollte.

168. 22ster Lehrsatz. In jeder Proportion hat der Unterschied des ersten und dritten Gliedes zum Unterschiede des zweyten und vierten Gliedes eben das Verhältniß, wie das erste Glied zum zweyten.

Beweis. Wenn $15:90 = 7:42$, so ist (§. 166.) auch $15:7 = 90:42$ also $\frac{15}{7} = \frac{90}{42}$ und

$\frac{15}{7} - \frac{7}{7} = \frac{90}{42} - \frac{42}{42}$, das ist $\frac{15 - 7}{7} = \frac{90 - 42}{42}$,
und $15 - 7 : 7 = 90 - 42 : 42$, oder (§. 166.)

$$15 - 7 : 90 - 42 = 7 : 42 = 15 : 90.$$

169. Eine leichte Folgerung aus diesen beyden Lehrsätzen ist nun auch folgende: **Wenn vier Größen in Proportion sind, so verhält sich die Summe der ersten und dritten zur Summe der zweyten und vierten, wie die Differenz der ersten und dritten zur Differenz der zweyten und vierten.** Denn wenn man hat $7 : 19 = 20 : 54\frac{2}{7}$ so ergeben die beyden letzten Lehrsätze

$$7 + 20 : 19 + 54\tfrac{2}{7} = 7 : 19, \text{ und}$$
$$20 - 7 : 54\tfrac{2}{7} - 19 = 7 : 19,$$

woraus unmittelbar folgt

$$7 + 20 : 19 + 54\tfrac{2}{7} = 20 - 7 : 54\tfrac{2}{7} - 19.$$

170. **23ster Lehrsatz.** Wenn vier Größen nach der Reihe in Proportion sind, daß sich nämlich die erste zur zweyten, wie die dritte zur vierten verhält: so verhält sich auch die Summe der ersten und zweyten zur zweyten, wie die Summe der dritten und vierten zur vierten; und ferner verhält sich die Summe der ersten und zweyten zur ersten,

wie die Summe der dritten und vierten zur dritten Größe.

Beweis. Der Beweis ließe sich ganz so, wie in §. 167. führen; man übersieht die Wahrheit des Lehrsatzes aber auch in folgender Darstellung. Da in der Proportion $7 : 5 = 28 : 20$, das zweyte Glied im ersten $\frac{7}{5}$ mal enthalten ist, so ist das zweyte in der Summe beyder einmal und $\frac{7}{5}$ mal, das ist $\frac{12}{5}$ mal enthalten; und eben so ist das vierte Glied in dem dritten $\frac{7}{5}$ mal und das vierte in der Summe des dritten und vierten einmal und $\frac{7}{5}$ mal, oder $\frac{12}{5}$ mal enthalten, also ist $7 + 5 : 5 = 28 + 20 : 20$.

Der Beweis für die zweyte Hälfte des Lehrsatzes läßt sich eben so führen, da man aus der Proportion $7 : 5 = 28 : 20$, auch hat $5 : 7 = 20 : 28$, und folglich $5 + 7 : 7 = 20 + 28 : 28$.

171. 24ster Lehrsatz. Wenn vier Zahlen in Proportion sind, so verhält sich auch der Unterschied der ersten und zweyten zur zweyten, wie der Unterschied der dritten und vierten zur vierten Zahl, und auch der Unterschied der ersten und zweyten zur ersten, wie der Unterschied der dritten und vierten zur dritten Zahl.

Beweis. In der Proportion $30 : 12 = 20 : 8$, hat man $\frac{30}{12} = \frac{20}{8}$, und offenbar auch $\frac{30 - 12}{12} = \frac{20 - 8}{8}$ oder $\frac{30}{12} - 1 = \frac{20}{8} - 1$.

Der Lehrsatz läßt sich auch unmittelbar aus dem vorigen herleiten. Wenn nämlich aus dem Verhältnisse $18 : 12 = 12 : 8$ nothwendig folgt $18 + 12 : 12 = 12 + 8 : 8$; so folgt auch umgekehrt aus der letztern Proportion, oder aus $30 : 12 = 20 : 8$, die Proportion $30 - 12 : 12 = 20 - 8 : 8$.

172. Alle vorigen Lehrsätze, wo aus einer einzigen Proportion mehrere verschiedene Proportionen hergeleitet werden, lassen sich so übersehn. Wenn vier Größen A, B, C, D in Proportion sind, so nämlich daß $A : B = C : D$,

so ist auch $B : A = D : C$.

$A : C = B : D$. (§. 166.)

$A + C : B + D = A : B$. (§. 167.)

$A - C : B - D = A : B$. (§. 168.)

$A + C : B + D = A - C : B - D$. (§. 169.)

$A + B : B = C + D : D$. (§. 170.)

$A + B : A = C + D : C$. (§. 170.)

$A - B : B = C - D : D$. (§. 171.)

$A - B : A = C - D : C$. (§. 171.)

173. 25ster Lehrsatz. Wenn zwischen sechs verschiedenen Größen folgende zwey Proportionen Statt finden, daß die erste sich zur zweyten verhält, wie die dritte zur vierten, und die zweyte sich zur fünften verhält, wie die vierte zur sechsten: so verhält sich auch die erste zur fünften, wie die dritte zur sechsten.

Beweis. Aus den gegebenen Proportionen $1:7 = 9:63$ und $7:25 = 63:225$, folgt nach §. 166. unmittelbar

$$1:9 = 7:63 \text{ und } 7:63 = 25:225,$$

da nun die beyden Verhältnisse $1:9$ und $25:225$ beyde dem Verhältnisse $7:63$ gleich sind; so sind sie auch unter sich gleich, also

$$1:9 = 25:225 \text{ oder } 1:25 = 9:225,$$

und dieses ist die Proportion, welche der Lehrsatz als richtig angiebt.

174. 26ster Lehrsatz. Wenn mehrere Größen vorhanden sind, von denen die erste eben das Verhältniß zur zweyten hat, wie die dritte zu vierten; und eben das Verhältniß, wie die fünfte zur sechsten, wie die siebente zur achten u. s. w.: so verhält sich auch

die Summe aller vorangehenden Glieder zur Summe aller nachfolgenden Glieder, wie das erste Glied zum zweyten.

Beweis. Wenn folgende gleiche Verhältnisse Statt finden $5:7 = 4:5\frac{3}{5} = 10:14 = 7:9\frac{4}{5}$, so haben wir gesehen (§. 167.), daß auch
$5+4:7+5\frac{3}{5} = 5:7$, also auch
$5+4:7+5\frac{3}{5} = 10:14$, und daraus wiederum
$5+4+10:7+5\frac{3}{5}+14 = 10:14 = 7:9\frac{4}{5}$, also endlich
$5+4+10+7:7+5\frac{3}{5}+14+9\frac{4}{5} = 7:9\frac{4}{5} = 5:7$

175. 27ster Lehrsatz. Wenn zwischen sechs Größen folgende zwey Proportionen Statt finden, daß sich die erste zur zweyten verhält, wie die dritte zur vierten und zugleich auch die zweyte zur fünften, wie die sechste zur dritten: so verhält sich auch die erste zur fünften, wie die sechste zur vierten.

Beweis. Die beyden, als gegeben angenommenen Proportionen sind von der Art, wie die folgenden: $11:13 = 77:91$ nnd $13:143 = 7:77$. Sie ergeben $\frac{11}{13} = \frac{77}{91}$ und $\frac{13}{143} = \frac{7}{77}$. Multiplicirt man hier die beyden vor dem Gleichheitszeichen stehenden Größen in einander, und auch die hinter demselben stehenden Größen in einander, so erhält man gleiche Producte, und zwar $\frac{11}{13} \cdot \frac{13}{143} = \frac{77}{91} \cdot \frac{7}{77}$, woraus (§. 31.) folgt $\frac{11}{143} = \frac{7}{91}$, und folglich

$$11 : 143 = 7 : 91.$$

176. **28ster Lehrsatz.** Wenn man mehrere Proportionen hat, und man sucht das Product aller ersten Glieder dieser Proportionen, das Product aller zweyten Glieder, das Product aller dritten Glieder und das Product aller vierten Glieder: so sind auch diese vier Producte in Proportion.

Beweis. Hat man die Proportionen $1 : 19 = 7 : 133$, $5 : 21 = 30 : 126$ und $3 : 8 = \frac{3}{2} : 4$: so folgt daraus $\frac{1}{19} = \frac{7}{133}$; ferner $\frac{5}{21} = \frac{30}{126}$ und $\frac{3}{8} = \frac{\frac{3}{2}}{4}$, und indem man die Producte dieser gleichen Größen sucht, $\frac{1 \cdot 5 \cdot 3}{19 \cdot 21 \cdot 8} = \frac{7 \cdot 30 \cdot \frac{3}{2}}{133 \cdot 126 \cdot 4}$, woraus dann die Proportion folgt, welche der Lehrsatz angiebt.

177. **29ster Lehrsatz.** Wenn zwey gegebene Proportionen so beschaffen sind, daß das erste Glied der einen zum ersten Gliede der andern sich eben so verhält, wie das dritte

Glied jener zum dritten Gliede dieser: so verhält sich auch das zweyte Glied der ersten Proportion zum zweyten Gliede der andern, wie das vierte Glied jener zum vierten Gliede dieser.

Beweis. Sind die Proportionen $11:13 = 77:91$ und $22:7 = 154:49$, so beschaffen, daß die ersten Glieder eben das Verhältniß zu einander haben, wie die dritten Glieder: so hat man $\frac{11}{13} = \frac{77}{91}$, und $\frac{22}{7} = \frac{154}{49}$ und auch $\frac{11}{22} = \frac{77}{154}$.

Hieraus folgt, indem man die gleichen Größen $\frac{11}{13} = \frac{77}{91}$ mit den gleichen Größen $\frac{11}{22} = \frac{77}{154}$ dividirt, $\frac{22}{13} = \frac{154}{91}$, und indem man hiemit die gleichen Größen $\frac{22}{7} = \frac{154}{49}$ dividirt, folgt ferner $\frac{13}{7} = \frac{91}{49}$ und $13:7 = 91:49$, welches die im Lehrsatze angegebene Proportion ist.

* 178. Bemerkung. Obgleich die Beweise für alle diese Lehrsätze nur so geführt sind, daß man den Exponenten des Verhältnisses als eine rationale Zahl betrachtete, — in welchem Falle man auch die Verhältnisse rationale Verhältnisse nennt, — so sind doch diese Sätze auch richtig bey irrationalen Verhältnissen, das ist bey solchen, deren Exponent eine irrationale Zahl ist.

Da man den Exponenten eines irrationalen Verhältnisses durch keine bestimmte Zahl genau angeben kann, sondern sich begnügen muß, Gränzen zu bestimmen, zwischen denen die wahre Größe des Exponenten enthalten ist: so erkennet man die Gleichheit mehrerer irrationaler Verhältnisse daran, wenn der Exponent des einen Verhältnisses immer zwischen eben den Gränzen liegt, wie der Exponent des andern Verhältnisses, und dieses allemal, man mag die Gränzen, zwischen welchen der irrationale Exponent enthalten ist, noch so nahe an einander rücken oder diesen bis auf noch so kleine Theile genau bestimmen.

Beyspiele solcher irrationalen Verhältnisse sind folgende: $7 : \sqrt[3]{5}$ und $9 : \sqrt[2]{6}$ und andere. Indeß sind nicht alle Verhältnisse irrational, deren einzelne Glieder irrational sind; denn z. B. das Verhältniß $\sqrt[2]{3} : \sqrt[2]{27}$ hat den rationalen Exponenten $= 3$, weil $\sqrt[2]{27} = 3 \cdot \sqrt[2]{3}$ ist, indem $27 = 3^2 \cdot 3 = 9 \cdot 3$.

Die Anwendung der vorigen Sätze auf irrationale Verhältnisse bedarf keiner weitern Erläuterung.

Anwendung der Lehren von den geometrischen Verhältnissen.

179. Erklärung. Wenn zwey Größen so von einander abhängen, daß die eine in gleichem Maße wie die andre wächst, so nämlich, daß beyde zugleich das Doppelte, das Dreyfache u. s. w. desjeni-

gen Werthes erreichen, den man einmal für beyde als zusammengehörig gefunden hat: so sagt man, diese Größen stehen in ordentlichem oder directem Verhältnisse.

Beyspiele. Die Menge der Waare, die man erhält, steht in directem Verhältnisse mit der Anzahl von Pfunden, Ellen u. s. w., wenn nämlich diese unter sich gleich groß sind.

Der Preis einer Quantität gleicher Waare ist im ordentlichen Verhältnisse dieser Quantität selbst.

Die Zinsen, welche man von einem Capitale zieht, verhalten sich in einerley Zeit und bey einerley Zinsfuße, wie die Größe des Capitals; hingegen bey gleichen Capitalien und einerley Zinsfuße verhalten sich die Zinsen, die man erhält, direct, wie die verflossene Zeit.

Der Weg, den ein mit immer gleicher Schnelligkeit bewegter Körper zurücklegt, steht in directem Verhältnisse der Zeit. Die Wege, welche von zwey verschiedenen Körpern in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, wenn beyde sich zwar mit verschiedener, aber doch immer gleicher Geschwindigkeit bewegen, verhalten sich direct, wie diese Geschwindigkeiten.

180. Erklärung. Die Rechnungs-Regel, durch welche man in einer Proportion zwischen Größen, die in directem Verhältnisse stehn, die eine unbekannte Zahl aus den drey gegebenen findet, heißt die Regel de Tri, (Regel von dreyen).

181. Erstes Exempel. Wenn 75 Pfunde einer gewissen Waare zu 97 Rthlr. 15 Sgr. gekauft werden: wie viel kosten dann 107 Pfunde 10 Loth dieser Waare?

Man hat offenbar das Verhältniß: 75 Pf. zu 107 Pf. 10 Loth, wie 97 Rthlr. 15 Ggr. zu dem gesuchten Werthe der letztern Quantität Waare. Da man nach der Regel des 160 §. die zweyte und dritte Zahl in einander multipliciren und dann mit der ersten dividiren soll, um die vierte zu finden: so scheint es, daß man hier zwey benannte Zahlen in einander multiplicire, welches doch nicht angeht. Man muß aber bedenken, daß das Verhältniß von 75 Pfund zu $107\frac{10}{32}$ Pfund eben das ist, wie von 75 zu $107\frac{10}{32}$, so daß man hier die beyden ersten Glieder der Proportion als unbenannte Zahlen betrachten kann, da dann die Bedenklichkeit wegen der Multiplication wegfällt. Die Ausführung der Rechnung hat dann weiter keine Schwierigkeit.

Anmerk. Es ist gewöhnlich, Exempel von dieser Art so anzusetzen:

75 Pf. — 97 Rthlr. 15 Ggr. — 107 Pf. 10 Loth —
und dann die beyden letzten Glieder in einander zu multipliciren und mit dem ersten zu dividiren.

Man findet auch dann das richtige Resultat, aber es ist besser, sich bestimmt an die Verhältnisse zu erinnern, theils um die Gründe der Rechnung besser zu übersehn, theils um nicht in Gefahr zu kommen, einmal die umgekehrten Verhältnisse, von denen ich bald reden werde, mit den directen zu verwechseln.

182. Zweytes Exempel. Ein Capital von 12570 Rthlr. wird zu $4\frac{1}{2}$ pro Cent Zinsen ausgegeben, das heißt, daß 100 Rthlr. jährlich $4\frac{1}{2}$ Rthlr. Zinsen tragen: wie viel bringt dieses Capital jährlich an Zinsen auf?

183. Drittes Exempel. Die Erde durchläuft in ihrer Bahn um die Sonne in $365\frac{1}{4}$ Tagen 126530400 Meilen, wie viel durchläuft sie in einer Secunde oder in $\frac{1}{86400}$ eines Tages?

Man kann den Bruch $\frac{1}{86400}$ auf Decimalbrüche $=$ 0, 000011574 bringen, und dann setzen 365, 25 : 0, 000011574 $=$ 126530400 : der gesuchten Zahl.

184. Viertes Exempel. In eben der Zeit, in welcher die Erde 1000000 Meilen durchläuft, macht der Planet Mercur in seiner Bahn 1606700 Meilen, wie viele Meilen durchläuft der letztere in 1 Secunde, wenn man dabey die Rechnung des vorigen Exempels zum Grunde legt?

185. Erklärung. Zwey Größen stehen in umgekehrtem Verhältnisse, wenn sie so mit einander verbunden sind, daß die eine immer eben so vielmal größer wird, als die andre sich verkleinert, so daß jene ihren doppelten, dreyfachen u. s. w. Werth erreicht, gerade dann, wenn die andre zur Hälfte, zum Drittel u. s. w. herabgekommen ist.

B e y s p i e l e. Eine gleiche Arbeit wird in desto kürzerer Zeit ausgerichtet, je mehrere Arbeiter man dabey anstellt, und die verwandte Zeit verhält sich umgekehrt, wie die gebrauchte Anzahl von Arbeitern.

Einerley Länge enthält eine desto größere Anzahl von Fußen, je kleiner das Maß ist, welches man einen Fuß nennt; und die Größe des Maßes steht also in umgekehrtem Verhältnisse der Zahl, welche angiebt, wie oft das Maß in einer gegebenen Länge enthalten ist.

Bey gleichem Gewichte verschiedener Körper ist ihre Größe, oder der Raum, den sie einnehmen, in umgekehrdem Verhältnisse ihrer Dichtigkeiten; denn der doppelt so dichte Körper braucht, um eben so viel zu wiegen, nur halb so groß zu seyn, als der in Vergleichung mit diesem halb so dichte Körper.

Wenn zwey Körper einerley Weg mit ungleichen, aber doch unveränderlichen Geschwindigkeiten durchlaufen: so verhalten sich ihre Geschwindigkeiten umgekehrt, wie die Zeiten, in welchen jene gleichen Wege von ihnen durchlaufen werden.

186. Man pflegt die Regeln, wornach die hieher gehörigen Aufgaben berechnet werden, die u m g e k e h r t e R e g e l d e T r i zu nennen. Die Rechnung wird zwar eben so geführt, wie aus der allgemeinen Lehre von den Verhältnissen bekannt ist, aber man muß bey dem Ansatze oder der Stellung der Glieder des Verhältnisses darauf achten, ob die Verhältnisse direct oder umgekehrt sind.

187. Erstes Exempel. Wenn eine gewisse Arbeit von 100 Arbeitern in 15 Tagen vollendet werden kann, wie viele Arbeiter sind nöthig, um sie in 2 Tagen zu vollenden?

Da man hier nicht sagen kann, die erste Anzahl von Tagen verhält sich zu der zweyten, wie die mit jenen zusammen gehörige Zahl von Arbeitern zu der gesuchten Zahl, sondern vielmehr: die erste Anzahl von Tagen verhält sich zur zweyten, wie die gesuchte Anzahl von Arbeitern zur gegebenen: so setzt man am besten:

15 : 2 = die unbekannte Zahl : 100,

oder auch 2 : 15 = 100 : der unbekannten Zahl.

188. Zweytes Exempel. Wenn ein Capital von 6575 Rthlr. in 6 Jahren $1972\frac{1}{2}$ Rthlr. Zinsen trägt, wie groß wird das Capital seyn, welches in $20\frac{3}{4}$ Jahren eben so viele Zinsen bringt?

189. Drittes Exempel. Wenn man den Werth des Silbers zum Werthe des Goldes, wie 1 zu $14\frac{2}{3}$ bey gleichen Gewichten setzt, und annimmt, daß der Werth von 1 Pfund Sterling $152\frac{1}{2}$ As feines Gold betrage; wie viel beträgt es an Silber?

190. Erklärung. Wenn eine Größe von mehrern Größen so abhängt, daß jene erste ihren doppelten, dreyfachen u. s. w. Werth erlangt, wenn irgend eine der letztern doppelt so groß, dreymal so groß u. s. w. genommen wird: so ist jene erstere

Größe in **zusammengesetztem directem** Verhältnisse aller letztern Größen.

Beyspiele. Der Preis einer Quantität Waare verhält sich erstlich, wie die Menge der Waare, und zweytens, wie ihr innerer Werth; das Verhältniß jenes Preises ist also aus den beyden letztern Verhältnissen zusammen gesetzt.

Die Zinsen von Capitalien verhalten sich wie die Größe der Capitalien, wie die Zeit, während welcher sie in Zinsen stehen, und wie der Zinsfuß, worunter man die Bestimmung versteht, wie viele Zinsen man von einer bestimmten Summe Capital, z. B. von 100 bezahlt.

Der Weg, den ein bewegter Körper mit immer gleicher Geschwindigkeit durchläuft, ist in zusammengesetztem Verhältnisse dieser Geschwindigkeit und der Zeit, die er anwendet, um diesen Weg zurückzulegen.

191. Unter den verschiedenen Größen, von welchen eine andre Größe abhängt, können auch solche vorkommen, durch deren Verkleinerung diese Größe in eben dem Maße wächst, wie jene abnehmen; dann ist das zusammengesetzte Verhältniß in Rücksicht dieser ein **umgekehrtes** Verhältniß.

Beyspiele. Die Zeit, in welcher man eine bestimmte Summe Zinsen von Capitalien erlangt, verhält sich umgekehrt, wie die Größe der Capitalien, und umgekehrt wie die Anzahl von Procenten, die man als Zinsen zieht.

Wenn mehrere Körper sich mit ungleichen aber doch unveränderlichen Geschwindigkeiten durch bestimmte Räume bewegen: so verhält sich die Zeit, welche sie dazu anwenden, direct wie diese Räume, aber umgekehrt, wie die Geschwindigkeiten.

Die Zeit, welche von mehrern Arbeitern zu irgend einer Arbeit verwandt wird, ist in directem Verhältnisse der Quantität der Arbeit, und in umgekehrtem Verhältnisse der Anzahl der Arbeiter.

Der Raum, den verschiedenartige Körper einnehmen, ist in directem Verhältnisse der Gewichte, und in umgekehrtem Verhältnisse der Dichtigkeiten.

192. 30ster Lehrsatz. Wenn das Verhältniß zweyer Größen, welche ich die erste und zweyte nennen will, zusammen gesetzt ist aus mehrern Verhältnissen, nämlich aus dem Verhältnisse einer dritten Größe zur vierten, einer fünften zur sechsten u. s. w., so verhält sich auch die erste zur zweyten, wie das Product aus allen vorangehenden Gliedern der letztern Verhältnisse zu dem Producte aus allen nachfolgenden Gliedern eben derselben Verhältnisse.

Beweis. Wenn das Verhältniß der ersten zur zweyten Größe aus mehrern einfachen Verhältnissen zusammen gesetzt ist: so muß der Exponent des zusammen gesetzten Verhältnisses so beschaffen seyn, daß er, wenn man irgend eines der einfachen

Verhältnisse ändert, in eben dem Maaße abnimmt oder wächst, wie der Exponent dieses geänderten Verhältnisses abnimmt oder wächst. Dieses findet aber nur Statt, wenn der Exponent des zusammen gesetzten Verhältnisses das Product aus allen Exponenten der einfachen Verhältnisse ist, und das eben ist es, was der Lehrsatz behauptet.

Beyspiel. Wenn von 100 Rthlr. Capital in 12 Monaten $5\frac{1}{4}$ Rthlr. Zinsen gegeben werden, wie viel Zinsen trägt ein Capital von 12705 Rthlr. in 15 Monaten? — Hier ist das Verhältniß der Zinsen, nämlich das Verhältniß von $5\frac{1}{4}$ zu der gesuchten Zahl, zusammen gesetzt aus dem Verhältnisse der Capitalien und dem Verhältnisse der Zeiten, oder aus $100 : 12705$ und $12 : 15$. Nach dem Lehrsatze ist also $100 . 12 : 15 . 12705 = 5\frac{1}{4}$: der gesuchten Zahl.

Man hätte offenbar diese Aufgabe in zwey zerlegen können, indem man zuerst gefragt hätte: 100 Rthlr. geben $5\frac{1}{4}$ Rthlr. Zinsen, was geben in gleicher Zeit 12705 Rthlr. an Zinsen? diese Zinsen-Summe würde man finden $= \frac{12705 \cdot 5\frac{1}{4}}{100}$ Rthlr.; und man würde dann zweytens fragen: das Capital giebt in 12 Monaten $\frac{12705 \cdot 5\frac{1}{4}}{100}$ Rthlr. Zinsen, wie viel trägt dasselbe Capital in 15 Monaten? das Resultat würde dann gewesen seyn, $\frac{12705 \cdot 15 \cdot 5\frac{1}{4}}{100 \cdot 12}$ Rthlr. Zinsen, welches auch aus der Regel des Lehrsatzes folgt, indem $100 . 12 : 15 . 12705 = 5\frac{1}{4} : \frac{15 \cdot 12705 \cdot 5\frac{1}{4}}{100 \cdot 12}$.

Anmerk. Man nennt diese Rechnungs-Regel für die zusammengesetzten Verhältnisse die Regula Multiplex, auch wohl, wenn das Verhältniß nur aus zweyen zusammen gesetzt ist, die Regula de Quinque.

193. Erstes Exempel. Zu wie viel Procenten jährlich muß man ein Capital von 15600 Rthlr. auf Zinsen geben, um davon in 6 Jahren und 6 Monaten 5070 Rthlr. Zinsen zu ziehn?

Das Verhältniß der Zinsen, nämlich 5070 zur gesuchten Zahl ist zusammen gesetzt aus den Verhältnissen

$$15600 : 100;$$
$$\text{und} \quad 6\tfrac{1}{2} : 1.$$

194. Zweytes Exempel. Wenn 15 Arbeiter in 7 Tagen eine Erdmasse von 200 Fuß lang, 16 Fuß breit und 4 Fuß tief ausarbeiten können, wie viel Zeit gebrauchen 25 Arbeiter, um eine Erdmasse von 500 Fuß lang, 12 Fuß breit und 6 Fuß tief unter sonst gleichen Bedingungen auszuarbeiten?

Diese Zeiten verhalten sich direct, wie die Längen, wie die Breiten und wie die Tiefen, aber umgekehrt wie die Anzahl der Arbeiter. Man hat also:

$$7\ \text{Tage} : \text{der gesuchten Zahl} = \left\{\begin{array}{r@{\;:\;}l} 200 & 500 \\ 16 & 12 \\ 4 & 6 \\ 25 & 15 \end{array}\right.$$

oder 7 : der gesuchten Zahl = 320000 : 540000.

195. Drittes Exempel. Der Planet Mercur durchläuft 1589, 4 Meilen während die Erde 1000 Meilen in ihrer Bahn zurücklegt; nun beträgt die ganze Bahn des Mercur 48979900 Meilen, und die ganze Bahn der Erde 126530400 Meilen. Wie viele Tage gebraucht der Mercur um seine Bahn zu durchlaufen, wenn die Erde ihre ganze Bahn in $365\frac{1}{4}$ Tagen vollendet?

196. Man pflegt auch die Ketten-Regel, als zu dieser Lehre von zusammengesetzten Verhältnissen gehörig zu betrachten, obgleich man sie besser unter die Lehre von den Gleichungen bringt. Man löset durch sie Aufgaben, wie folgende, auf: Wie viel Crusaden beträgt eine Summe von 1500 holländischen Ducaten, wenn 1 Crusado, 44 Grote flämisch; 1 holländischer Ducate, 7 Mk. 5 ßl. Hamburger Courant; $120\frac{1}{2}$ Mk. Hamburger Courant, 100 Mk. Hamburger Banco und 1 Mk. Hamburger Banco, 24 Grote flämisch betragen? — Man kann nämlich so ansetzen:

1 Crusado : 1 Gr. fläm. = 44 : 1;
1 Gr. fläm. : 1 Mk. Banco = 1 : 24;
1 Mk. Banco : 1 Mk. Cour. = $120\frac{1}{2}$: 100;
1 Mk. Cour. : 1 Ducaten = 1 : $7\frac{5}{16}$;
1 Ducaten : 1500 Duc. = 1 : 1500,

woraus man ableitet:

1 Crus. : 1500 Duc. = $44 . 120\frac{1}{2} : 24 . 100 . 7\frac{5}{16} . 1500$.

Leichter übersieht man aber die Gründe der Rechnung so, wie diese oben §. 75. geführt ist.

197. In den Rechnungen, welche auf der Lehre von Verhältnissen beruhen, gehört unter andern ferner die Gesellschafts-Rechnung und die Vermischungs-Rechnung, wovon die folgenden Aufgaben einen Begriff geben.

Erstes Exempel. Drey Kaufleute treten zu einer Handels-Unternehmung zusammen, der erste giebt dazu 1000 Rthlr., der zweyte 1200 Rthlr. der dritte 2500 Rthlr. her. Der am Ende heraus kommende Gewinn von 925 Rthlr. soll unter sie nach Verhältniß des ausgelegten Geldes getheilt werden.

Da mit dem gesammten ausgelegten Gelde, nämlich mit 4700 Rthlr., eine Summe von 925 Rthlr. gewonnen worden: so findet man offenbar den Gewinn, der dem erstern zukömmt, aus dem Verhältnisse:

4700 Rthl. Auslage : 100 Rthl. Auslage = 925 Rthl. Gewinn zu dem Gewinne der ersten Person,

und eben so für die beyden andern.

198. Zweytes Exempel. Man hat zwey Sorten Waaren von einerley Art, aber von ungleicher Güte, die eine kann zu 20 Ggr. 6 Pf. die andre zu 16 Ggr. das Pfund verkauft werden; wie muß man diese Waare vermischen, um 100 Pfunde

zu erhalten, die man das Pfund zu 18 Ggr. verkaufen kann?

Man nehme hier die Unterschiede der beyden gegebenen Preise von dem Mittelpreise, also $20\frac{1}{2} - 18 = 2\frac{1}{2}$ Ggr. und $18 - 16 = 2$ Ggr., und setze das Verhältniß der von der bessern Sorte zu nehmenden Quantität zu der ganzen Quantität von 100 Pfund, wie die Summe beyder Unterschiede zu dem letztern Unterschiede, das ist, wie $4\frac{1}{2}$ zu 2. So erhält man für die Quantität der bessern Waare $\frac{4 \cdot 100}{9} = 44\frac{4}{9}$ Pfund, und für die Quantität der schlechtern Waare, nach eben der Regel,

$$\frac{5 \cdot 100}{9} = 55\frac{5}{9} \text{ Pfund.}$$ Und wirklich kosten

$44\frac{4}{9}$ Pfund zu 16 Ggr. — $888\frac{8}{9}$ Ggr.
und $55\frac{5}{9}$ Pfund zu $20\frac{1}{2}$ Ggr. — $911\frac{1}{9}$ Ggr.
also diese 100 Pfunde zusammen 1800 Ggr.

* Man kann diese Aufgabe und alle ähnlichen leichter mit Hülfe der Buchstaben-Rechnung auflösen. Setzt man nämlich die von der schlechtern Sorte zu nehmende Anzahl Pfunde $= x$, die von der bessern Sorte $= y$, so muß

$$16x + 20\tfrac{1}{2}y = 1800$$
und $x + y = 100$ seyn.

Die erstere Gleichung giebt

$$x = \frac{1800}{16} - \frac{20\frac{1}{2}}{16}y,$$

die letztere $x = 100 - y$; beyde Werthe von x müssen gleich seyn, das ist

$$\frac{1800}{16} - \frac{20\frac{1}{2}}{16}y = 100 - y,$$

oder $112\frac{1}{2} - 1\frac{9}{32}y = 100 - y$,

folglich $12\frac{1}{2} = \frac{9}{32}y$,

und $y = 44\frac{4}{9}$.

* 199. Drittes Exempel. Es soll die Mischung aus drey verschiedenen Sorten bestehn, deren eine 14 Ggr., die andre 16 Ggr., die dritte 20 Ggr. das Pfund kostet, und man will davon 100 Pfund zu 18 Ggr. zusammen bringen.

In diesem Falle hat man zwar, indem man die drey gesuchten Quantitäten x, y, z setzt, die zwey Gleichungen

$$x + y + z = 100$$

$$\text{und } 14x + 16y + 20z = 1800,$$

aber damit ist die Aufgabe nicht völlig bestimmt, sondern es giebt mehrere Auflösungen, die alle der Forderung Genüge thun. Nimmt man z. B. $x = 0$, oder soll die Mischung nur aus zwey Sorten bestehen, so erhält man $y = 50$, und $z = 50$. Will man von der schlechtesten Sorte 10 Pfund zur Mischung setzen, so ist $x = 10$, also $y + z = 90$, und $10 . 14 + 16y + 20z = 1800$, woraus $y = 35$, und $z = 55$ folgt. Und so erhielte man unzählige Auflösungen, je nachdem man für x andere Werthe in ganzen Zahlen oder Brüchen ansetzte.

* 200. Ich füge hier noch einige Aufgaben an, die theils auf den Lehren von Verhältnissen, theils auf dem beruhen, was vorhin von den Gleichungen gelehrt worden ist.

Erstes Exempel. Eine gewisse Summe Geldes soll so unter drey Personen getheilt werden, daß die drey Antheile des ersten, zweyten und dritten sich zu einander verhalten, wie 5, 7 und 8; und außerdem ist bestimmt, daß der dritte 75 Rthlr. mehr erhalten soll, als der erste: wie groß ist die zu theilende Summe und wie viel erhält jeder?

Nennt man die Theile x, y, z, so soll $x : y = 5 : 7$, und $x : z = 5 : 8$ seyn, also $y = \frac{7}{5}x$ und $z = \frac{8}{5}x$, überdas aber ist $z = x + 75$, woraus $\frac{8}{5}x = x + 75$ folgt, und dann alles fernere leicht gefunden wird.

* 201. Zweytes Exempel. Eine Person reiset von einem Orte ab und macht in 10 Stunden 7 Meilen; 5 Stunden nachher reiset ein andrer ihm nach und dieser legt in 12 Stunden 9 Meilen zurück, nach wie viel Stunden und in welcher Entfernung wird er den zuerst Abgereisten antreffen?

Nennt man die Entfernung von dem Orte der Abreise, wo beyde zusammen treffen, $= x$, so gebraucht der letztere, um diese Entfernung zu erreichen, die Zeit $\frac{12 \cdot x}{9}$, der erstere aber $\frac{10 \cdot x}{7}$ Stunden. Da nun jene Zeit 5 Stunden weniger beträgt, als diese, so ist $5 + \frac{12 \cdot x}{9} = \frac{10 \cdot x}{7}$.

* 202. Drittes Exempel. Aus zwey Orten, die 50 Meilen von einander entfernt sind, reisen zwey Personen einander entgegen. Der eine reiset 12 Stunden später ab, als der andre, und macht 6 Meilen in 10 Stunden, statt daß der andre 7 Meilen in 11 Stunden macht. Wo werden sie einander treffen?

* 203. Viertes Exempel. Der Planet Mars befindet sich in Opposition mit der Sonne, wenn er so steht, daß die Erde mit ihm und der Sonne in gerader Linie ist und sich zwischen beyden befindet. Wenn nun dieses in einem gewissen Augenblicke Statt findet, so soll man bestimmen, wann es sich wieder ereignen wird, wenn man weiß, daß der Mars sich in 687 Tagen um die Sonne bewegt und die Erde in $365\frac{1}{4}$ Tagen.

Um sich die Sache klar vorzustellen, betrachte man eine Uhr mit zwey Zeigern, und denke sich unter dem Minutenzeiger die Erde, unter dem Stundenzeiger den Mars. Stehen diese Anfangs gerade über einander, z. B. beyde auf 12, so läuft der eine, die Erde sogleich vor dem Mars voraus, und es ist nicht möglich, daß sie eher wieder zusammen kommen, als bis die Erde einen ganzen Umlauf und noch etwas mehr vollendet hat. Es sey x der Theil, den die Erde über einen ganzen Umlauf vollendet, daß also x ein Bruch ist, der sich zu 1 verhält, wie dieser Theil des Umfangs zum ganzen Umkreise. Die Erde durchläuft den ganzen Umkreis in $365\frac{1}{4}$ Tagen, also das hinzukommende Stück in $x \cdot 365\frac{1}{4}$ Tagen; der Mars durchläuft eben dieses Stück in $x \cdot 687$ Tagen, und da die Zeit, in welcher der Mars dieses Stück durchläuft, eben so groß ist, als die Zeit, in welcher die Erde einen ganzen Umkreis und dann noch dieses Stück zurücklegt; so hat man

$$365\tfrac{1}{4} + x \cdot 365\tfrac{1}{4} = x \cdot 687$$

$$\text{und} \quad 365\tfrac{1}{4} = 321\tfrac{3}{4} \cdot x$$

$$\text{oder} \quad 1461 = 1287 \cdot x$$

$$x = \tfrac{487}{429} = 1\tfrac{58}{429}.$$

Die Erde macht also 2 ganze Umläufe und noch $\frac{58}{429}$ oder beynahe $\frac{1}{7}$ eines Umlaufes, ehe sie den Mars wieder erreicht, und es vergehen also bis zur nächsten Opposition $2\frac{58}{429} \cdot 365\frac{1}{4}$ Tage, oder etwa 780 Tage.

Aufgaben zur Uebung. Die Länge der Bahn des Mars verhält sich zur Länge der Erdbahn, wie 1524 zu 1, diese Bahn durchläuft er in 687 Tagen, die Erde die ihrige in $365\frac{1}{4}$ Tagen: wie verhält sich die Geschwindigkeit des Mars zur Geschwindigkeit der Erde?

Es sollen 500 Pfund Waare aus drey Sorten gemischt werden, deren eine 1 Rthlr., die andere 22 Ggr., die dritte 1 Rthlr. 3 Ggr. kostet, und man will die Mischung zu 1 Rthlr. 2 Ggr. verkaufen: wie viel von jeder Sorte muß man nehmen, wenn man von der wohlfeilsten Sorte 10 Pfund, oder 30 Pfund, oder 50 Pfund, oder 100 Pfund nimmt?

Vier Personen sollen eine gewisse Summe Geldes so theilen, daß die Antheile des ersten, zweyten, dritten und vierten sich zu einander verhalten, wie 1 zu 3, zu 5, zu 7, und die Summe dessen, was der erste und vierte erhält, soll zusammen 1000 Rthlr. betragen: wie groß ist die zu theilende Summe und wie viel bekommt jeder?

Wie viel Tage vergehn von einer Opposition des Jupiter zur andern, wenn der Jupiter zu seinem Umlaufe um die Sonne 11 Jahre 315 Tage gebraucht, die Erde aber zu dem ihrigen $365\frac{1}{4}$ Tage.

Von den geometrischen Progressionen.

* 204. Erklärung. Wenn eine Reihe von Zahlen so beschaffen ist, daß jede drey zunächst auf einander folgende Zahlen in stetiger geometrischer Proportion sind: so heißt diese Zahl-Reihe eine geometrische Progression, und die einzelnen Zahlen sind die Glieder dieser Progression.

Beyspiel. Die Reihe $1 . 5 . 25 . 125 . 625$ u. s. w. ist eine geometrische Progression, weil das erste Glied sich zum zweyten verhält, wie das zweyte zum dritten, das dritte zum vierten u. s. w. Eben so ist $2 . 3 . 4\frac{1}{2} . 6\frac{3}{4} . 10\frac{1}{8} . 15\frac{3}{16}$ u. s. w., und auch $2 . \frac{1}{2} . \frac{1}{8} . \frac{1}{32} . \frac{1}{128}$ u. s. w. eine geometrische Progression.

* 205. Erklärung. Eine Progression ist steigend, wenn jedes folgende Glied größer, fallend aber, wenn jedes folgende Glied kleiner ist, als das vorhergehende.

* 206. Erklärung. Der Exponent einer geometrischen Progression ist die Zahl,

welche angiebt, wie oft jedes vorhergehende Glied im nächstfolgenden enthalten ist. Er ist größer, als eins, wenn die Reihe steigend, und kleiner als eins, wenn die Reihe fallend ist.

Beyspiel. Der Exponent der Reihe 1 . 5 . 25 . 125 u. s. w. ist = 5; der Exponent der Reihe 2 . 3 . $4\frac{1}{2}$ $6\frac{3}{4}$ u. s. w. ist = $1\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$; und der Exponent der Reihe 2 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{32}$ u. s. w. ist = $\frac{1}{4}$.

* 207. 48ste Aufgabe. Wenn zwey, einander nächste Glieder einer geometrischen Progression gegeben sind, so viele der übrigen Glieder, als man will, zu finden.

Auflösung. Man dividire das letzte der beyden gegebenen Glieder durch das erste, so hat man den Exponenten der Progression; mit diesem multiplicire man das zweyte gegebene Glied, um das dritte zu erhalten; multiplicire das dritte abermals mit dem Exponenten, um das vierte zu bekommen u. s. w. Will man Glieder haben, die vor den gegebenen vorangehen, so dividire man das erste gegebene Glied mit dem Exponenten, um das erste vorhergehende Glied zu haben, und dividire so jedes Glied mit dem Exponenten, um das nächst vorhergehende zu erhalten.

Beyspiel. Die Reihe zu finden, deren zwey nächste Glieder 2 . 5 sind. Ihr Exponent ist $2\frac{1}{2}$, und man erhält die folgenden Glieder der Reihe

2 . 5 . $12\frac{1}{2}$. $31\frac{1}{4}$. $78\frac{1}{8}$ u. s. w.

und die vorhergehenden Glieder in umgekehrter Ordnung

5 . 2 . $\frac{4}{5}$. $\frac{8}{25}$. $\frac{16}{125}$. $\frac{32}{625}$ u. s. w.

* 208. 49ste Aufgabe. Wenn das erste Glied einer geometrischen Progression und

ihr Exponent gegeben ist, jedes der folgenden Glieder zu bestimmen, ohne daß man nöthig hat, das zweyte, dritte und überhaupt alle dazwischen liegende Glieder bis an das gesuchte Glied, zu bestimmen.

Auflösung. Wenn bestimmt ist, das wievielte Glied der Reihe man sucht: so nehme man die um eins niedrigere Potenz des Exponenten, z. B. die neunte Potenz, wenn das zehnte Glied gesucht wird, und multiplicire damit das erste Glied. Das Product ist das gesuchte Glied.

Beweis. Da das zweyte Glied ein Product ist aus dem ersten Gliede und aus dem Exponenten; das dritte Glied ein Product aus dem zweyten Gliede und dem Exponenten u. s. w., so ist auch das dritte Glied ein Product aus dem ersten Gliede in das Quadrat des Exponenten, das vierte Glied ein Product aus dem ersten Gliede in die dritte Potenz des Exponenten, und so ferner das zehnte Glied ein Product aus dem ersten Gliede in die neunte Potenz des Exponenten, und so jedes andre.

Beyspiel. Das zwölfte Glied der Progression zu finden, deren erstes Glied 1750, und deren Exponent 2 ist. Die elfte Potenz von zwey ist $= 2048$, also das zwölfte Glied $= 1750 . 2048 = 3584000$. Wollte man das zwölfte Glied der fallenden Reihe haben, deren Exponent $\frac{1}{2}$ und erstes Glied 1750 ist, so fände man es $= \frac{1750}{2048}$.

* 209. 50ste Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Zahlen eine bestimmte Anzahl von Zahlen so zu bestimmen, daß sie eine

geometrische Progression bilden, wenn man voraussetzt, daß man im Stande sey, aus einer Zahl jede verlangte Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Man dividire die größere gegebene Zahl durch die kleinere und ziehe aus dem Quotienten die Quadratwurzel, wenn nur eine Zahl zwischen den beyden gegebenen gesucht wird; die Cubikwurzel, wenn man zwey Glieder einschalten will; die vierte Wurzel, wenn drey Glieder verlangt werden u. s. w., also die nte Wurzel, wenn die Anzahl der einzuschaltenden Glieder $= n - 1$ ist. Diese Wurzel ist der Exponent der Progression, deren einzelne Glieder man nun nach der vorigen Aufgabe bestimmt.

Beweis. Jede geometrische Progression läßt sich ganz allgemein durch Buchstaben so ausdrücken: $a . ab . ab^2 . ab^3 . ab^4 . ab^5 . ab^6$ u. s. w., denn hier verhält sich jedes Glied zum folgenden wie $a : ab$ oder $= 1 : b$. Der Exponent dieser Progression ist $= b$. Will man also hier zwischen dem ersten Gliede und dem sechsten vier Glieder einschalten: so sucht man nach der Auflösung die fünfte Wurzel aus $\frac{a . b^5}{a}$ das ist aus b^5, welche b, als der Exponent der Reihe ist. — Man kann die Sache noch vollständiger so übersehn. Wenn zwischen zwey Zahlen c und d sieben Zahlen eingeschaltet werden sollen, so sucht man nach den Regeln der Auflösung die achte Wurzel aus $\frac{d}{c}$, und diese ist der Exponent $= \sqrt[8]{\frac{d}{c}}$, oder $= \frac{d^{\frac{1}{8}}}{c^{\frac{1}{8}}}$. Die Progression wird also

$$c \,.\, \frac{c \,.\, d^{\frac{1}{8}}}{c^{\frac{1}{8}}} \,.\, \frac{c \,.\, d^{\frac{2}{8}}}{c^{\frac{2}{8}}} \,.\, \frac{c \,.\, d^{\frac{3}{8}}}{c^{\frac{3}{8}}} \,.\, \frac{c \,.\, d^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}} \,.\, \frac{c \,.\, d^{\frac{5}{8}}}{c^{\frac{5}{8}}}$$

$\frac{c \,.\, d^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{3}{4}}} \,.\, \frac{c \,.\, d^{\frac{7}{8}}}{c^{\frac{7}{8}}} \,.\, \frac{c \,.\, d^{\frac{8}{8}}}{c}$, wo das letzte Glied $= d$, und sieben Zahlen eingeschaltet sind. Auf diese Weise bestimmt man also zwischen zwey gegebenen Zahlen **mehrere mittlere geometrische Proportionalzahlen.**

Beyspiel. Zwischen 10 und 1000 zwey mittlere geometrische Proportionalzahlen zu bestimmen. Der Exponent wird $\sqrt[3]{100} = 4,6416$, und die Progression

10 . 46, 416 . 215, 444 . 1000.

*** 210. 51ste Aufgabe. Es ist eine gewisse Anzahl von Gliedern einer geometrischen Progression gegeben, man sucht die Summe aller dieser Glieder.**

Auflösung. Man multiplicire das letzte gegebene Glied der Progression mit dem Exponenten und ziehe von dem Producte das erste Glied ab; ferner subtrahire man Eins vom Exponenten und dividire jene Differenz mit dieser. Der Quotient ist die gesuchte Summe.

Beyspiele. Die Summe der Reihe 1 . 3 . 9 . 27 . 81 . 243 . 729 zu finden. Der Exponent ist 3; und $3 \cdot 729 = 2187$, ferner $2187 - 1 = 2186$, und der um Eins verminderte Exponent $= 2$, also die Summe $= \frac{2186}{2} = 1093$.

Der Reihe $2 . \frac{1}{2} . \frac{1}{8} . \frac{1}{32} . \frac{1}{128}$ Exponent ist $\frac{1}{4}$, also soll nach der Auflösung die Summe $= \frac{\frac{1}{4} . \frac{1}{128} - 2}{\frac{1}{4} - 1}$ seyn. das ist $= \frac{-1\frac{511}{512}}{-\frac{3}{4}} = + \frac{1023}{384} = 2\frac{255}{384} = 2\frac{85}{128}$.

Beweis. Man kann die Richtigkeit dieses Verfahrens am besten an dem allgemeinen Ausdrucke für eine geometrische Reihe übersehen. Setzt man nämlich die Summe der Reihe $a . ab . ab^2 . ab^3 . ab^4 . ab^5 . ab^6 . ab^7$ vorläufig nur $= S$, wo S also eine unbekannte Zahl ist, also
$a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + ab^6 + ab^7 = S$,
so ist auch, wenn man mit b multiplicirt
$ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + ab^6 + ab^7 + ab^8 = bS$,
Subtrahirt man nun die erstere Gleichung von der letztern, so ist, weil die meisten Glieder sich aufheben, $ab^8 - a = bS - S$, also, indem man mit $b - 1$ dividirt, $\frac{ab^8 - a}{b - 1} = S$, gleich der Summe aller gegebenen Glieder der Progression; und dieses ist eben der Ausdruck, den wir in der Auflösung mit Worten angegeben haben.

*211. Bey einer fallenden Reihe ist die Summe eigentlich $= \frac{a - ab^8}{1 - b}$, weil hier $b < 1$ ist.

Wenn b ein ziemlich kleiner Bruch ist, und man eine ansehnliche Reihe von Gliedern summiren will: so wird b^n ein immer weniger bedeutender Bruch, je größer n oder je größer die Anzahl der Glieder ist. Läßt man also in einem solchen Falle ab^n als etwas sehr unbedeutendes weg, so ist ziemlich genau $\frac{a}{1 - b}$ die Summe einer solchen fallenden Progression, und diese Summe ist desto genauer, je mehrere der immer kleiner werdenden Glieder man zusammen nimmt.

Beyspiele. Die Summe der Reihe $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{256} \cdot \frac{1}{512}$ ist nach der 51sten Aufgabe $= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{511}{512}$. Hätte man noch die zwey folgenden Glieder der Reihe, $\frac{1}{1024} \cdot \frac{1}{2048}$ zur Summe hinzugefügt; so wäre diese Summe $\frac{2047}{2048}$, welches viel weniger von 1 verschieden ist, als die vorige Summe $\frac{511}{512}$. Je mehrere Glieder man mit zu der Summe nimmt, desto näher kommt sie an 1, kann aber dennoch nie größer als 1 werden.

Man sagt daher, daß Eins die Gränze ist, welche von der Summe dieser Reihe nie überschritten, aber immer näher erreicht wird, je mehrere Glieder man addirt.

Nimmt man von der Reihe $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{81}$ u. s. w. sehr viele der immer kleinern Glieder zusammen, so ist $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$ beynahe die Summe dieser Reihe, oder eigentlich die Gränze, welcher diese Summe sich immer mehr nähert, je weiter man die Reihe fortsetzt. Man pflegt auch wohl zu sagen, die Summe der Glieder dieser Reihe betrüge wirklich $\frac{1}{2}$, wenn man eine unendliche Anzahl Glieder zusammen nähme. Der Sinn dieses Ausdruckes ist aber eigentlich nur, daß bey immer weiterer Fortsetzung der Reihe, die Summe immer näher und näher an diese Gränze kommt.

* 212. Diese Lehren finden ihre Anwendung bey der Berechnung der Zinsen, wo man immer die Zinsen wieder zum Capitale schlägt; ferner bey Berechnung der Leibrenten und der Beyträge zu Wittwen-Cassen u. s. w.

Erstes Exempel. Wenn man 100 Rthlr. Capital zu 4 pro Cent jährlicher Zinsen belegt, und am Ende jedes Jahres die erworbenen Zinsen zum Capitale schlägt, so daß diese nun selbst auch Zinsen tragen: wie viel Capital hat man dann am Ende des zehnten Jahrs?

Im ersten Jahre erhält man 4 Rthlr. Zinsen, hat also am Ende des ersten Jahrs 104 Rthlr. Capital. Diese tragen im zweyten Jahre an Zinsen $\frac{4 \cdot 104}{100}$ Rthlr., und da man diese zum Capitale legt, so ist das Capital am Ende des zweyten Jahrs

$$= 104 + \frac{4 \cdot 104}{100} = \frac{104 \cdot 100 + 4 \cdot 104}{100} = \frac{104^2}{100} \text{ Rthlr.}$$

Damit erwirbt man im dritten Jahre $\frac{4 \cdot 104^2}{100^2}$ Rthlr. an Zinsen, und hat dann in allem $\frac{104^2}{100} + \frac{4 \cdot 104^2}{100^2}$, oder $\frac{104^2 \cdot 100 + 104^2 \cdot 4}{100^2} = \frac{104^3}{100^2}$ Rthlr. Und wenn man so fortschließt: so findet man das Capital am Ende des zehnten Jahrs $= \frac{104^{10}}{100^9}$ Rthlr, und die so am Ende der verschiednen Jahre vorhandnen Capitale bilden eine geometrische Progression, deren erstes Glied 100, und deren Exponent $\frac{104}{100}$ ist.

Wäre das Capital 500 Rthlr. gewesen, so würde das erste Glied der Reihe 500 seyn, der Exponent aber derselbe bleiben, wenn nur das Capital zu 4 pro Cent belegt bleibt.

* 213. Zweytes Exempel. Jemand ist nach 5 Jahren ein Capital von 800 Rthlr. zu be-

zahlen schuldig; er kommt aber mit seinem Creditor überein, daß er schon jetzt dies Capital bezahlen will, jedoch mit einem solchen Abzuge oder Interusurio, daß das jetzt zu entrichtende Capital, wenn es zu 4 pro Cent belegt, Zinsen auf Zinsen trüge, am Ende des fünften Jahres 800 Rthlr. betrage. Wie viel muß er jetzt bezahlen?

Wenn jemand über ein Jahr 104 Rthlr. zu bezahlen hat, so könnte er jetzt diese Schuld mit 100 Rthlr. tilgen, weil der Creditor die übrigen 4 Rthlr. als Zinsen während des Jahres ziehen kann; eine Schuld von 800 Rthlr. kann also ein Jahr voraus mit $\frac{100}{104} \cdot 800$ Rthlr, zwey Jahr voraus mit $\frac{100^2}{104^2} \cdot 800$ Rthlr. u. s. w. getilgt werden.

*214. Drittes Exempel. Jemand belegt ein Capital von 10000 Rthlr. zu 4 vom Hundert, verbraucht aber jährlich mehr als die Zinsen, nämlich 600 Rthlr., so daß er sein Capital von Jahr zu Jahr verkleinert: wie viel Jahre werden hingehn, bis das Capital ganz aufgezehrt ist?

Am Ende des ersten Jahres würde, wenn nichts abginge, Capital und Zinsen $\frac{104}{100} \cdot 10000$ Rthlr. betragen, nach Abzug der 600 Rthlr. hat man aber nur

$\frac{104}{100} \cdot 10000 - 600$. Dieses Capital trägt im zweyten Jahre wieder Zinsen, und würde in diesem Jahre anwachsen zu $\frac{104^2}{100^2} \cdot 10000 - \frac{104}{100} \cdot 600$, wenn nicht abermals die 600 abgingen. Nach Abzug dieser hat man also am Ende des zweyten Jahrs

$\frac{104^2}{100^2} \cdot 10000 - \frac{104}{100} \cdot 600 - 600$; am Ende des dritten Jahrs

$$\frac{104^3}{100^3} \cdot 10000 - \frac{104^2}{100^2} \cdot 600 - \frac{104}{100} \cdot 600 - 600,$$

u. s. w., und man müßte durch Summirung der letzten Reihe finden, wenn das Capital erschöpft ist. Am Ende des dritten Jahrs hat man nämlich

$$\frac{104^3}{100^3} \cdot 10000 - 500 \cdot \left\{\frac{\frac{104^3}{100^3} - 1}{\frac{104}{100} - 1}\right\},$$ also am Ende

des nten Jahrs

$$\frac{104^n}{100^n} \cdot 10000 - 500 \cdot \left\{\frac{\frac{104^n}{100^n} - 1}{\frac{104}{100} - 1}\right\}.$$

Alle diese Exempel lassen sich aber leichter und theils auch vollständiger durch die Logarithmen auflösen, weil die Bestimmung hoher Potenzen von $\frac{104}{100}$ auf die gewöhnliche Weise sehr beschwerlich, durch Logarithmen aber leicht ist.

Achter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

* 215. Erklärung. Wenn man eine mit 1 anfangende geometrische Progression mit der Reihe der natürlichen Zahlen so verbindet, daß man das erste Glied jener Progression mit 0, das zweyte mit

1, das dritte mit 2, das vierte mit 3 u. s. w. bezeichnet, so wie in nachstehenden Zeilen:

Arithm. Progr.	0.	1.	2.	3.	4.	5	u. s. w.
Geom. Progr.	1.	4.	16.	64.	256.	1024	u. s. w.

so nennet man jede Zahl der arithmetischen Progression den Logarithmen der unter ihr stehenden Zahl der geometrischen Progression.

Anmerk. Diese Erklärung ist zwar die gewöhnliche, da aber in einer geometrischen Progression, deren erstes Glied 1 ist, alle Glieder Potenzen des Exponenten sind: so ist die folgende Erklärung ebenfalls richtig, und führt sehr leicht zu allen Folgerungen, deren man in dieser Lehre bedarf.

* 216. Erklärung. Wenn man von einer bestimmten Zahl, die immer dieselbe bleibt, mehrere verschiedene Potenzen nimmt: so heissen die Exponenten dieser Potenzen die Logarithmen der Zahlen, welchen jene Potenzen gleich sind.

Beyspiel. Ist 4 jene bestimmte Zahl, deren Potenzen gesucht werden, so ist 1 der Logarithme von 4; ferner 2 der Logarithme des Quadrats von 4 oder von 16, und so 5 der Logarithme der fünften Potenz von 4, das ist der Logarithme von 1024, u. s. w.

* 217. Erklärung. Die ganze Reihe dieser Logarithmen, zusammengestellt mit den zugehörigen Zahlen, nennt man ein logarithmisches System, und die Zahl, deren Potenzen genommen werden, oder deren Logarithme = 1 ist, heißt die Grundzahl dieses Logarithmen-Systems.

* 218. Da eine jede Zahl als Grundzahl des Systems angenommen werden kann, so ließen sich unzählige logarithmische Systeme angeben, zum Beyspiel

Logarithmen . . 0. 1. 2. 3. 4. 5 u. s. w.
zugehörige Zahlen 1. 5. 25. 125. 625. 3125;
aber wir werden nur dasjenige Logarithmen-System betrachten, dessen Grundzahl = 10 ist, weil dieses sich zu den gewöhnlichen Rechnungen am besten gebrauchen läßt. Dieses System heißt das Briggische Logarithmen-System (von Henry Brigg, der es zuerst berechnete). Es gehören in demselben mit den Logarithmen, die ganze Zahlen sind, folgende Zahlen zusammen:

Logar.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Zahlen	1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.	1000000.

* 219. Bemerkung. Nach dem, was im sechsten Abschnitte von den Potenzen vorgekommen ist, welche Brüche und negative Zahlen zu Exponenten haben, läßt sich leicht übersehn, daß es zu einem vollständigen Logarithmen-Systeme nicht genug ist, diejenigen Zahlen mit ihren Logarithmen zusammen zu stellen, deren Logarithmen ganze Zahlen sind, sondern daß auch die Brüche und negativen Zahlen als Logarithmen darin vorkommen müssen. So wie sich nämlich keine ganze oder gebrochne Zahl denken läßt, die nicht der Exponent der Potenz seyn könnte zu welcher die Grundzahl des Systems erhoben werden soll; eben so giebt es auch keine Zahl, die nicht ein Logarithme irgend einer andern Zahl wäre.

Umgekehrt hat also auch eine jede ganze oder gebrochne Zahl in einem bestimmten System ihren Logarithmen, und man verlangt von einem vollständig berechneten Logarithmen-Systeme, daß es zu einer jeden gegebenen Zahl den zugehörigen Logarithmen, und zu jedem gegebenen Logarithmen die zugehörige

Zahl, wenigstens durch Näherung, angebe, (vergl. §. 172.)

* 220. **Bemerkung.** In dem Briggischen Logarithmen-Systeme, dessen Grundzahl $= 10$ ist, gehören bloß für die Zahlen, welche ganze Potenzen von 10 sind, rationale Logarithmen mit rationalen Zahlen zusammen, hingegen gehören zu allen übrigen rationalen Zahlen irrationale Logarithmen, und zu allen übrigen rationalen Logarithmen irrationale Zahlen, denn es gehört z. B. zum Logarithmus $= \frac{1}{2}$, die Zahl $= \sqrt{10}$, zum Logarithmus $= \frac{1}{3}$, die Zahl $= \sqrt[3]{10}$, zum Logarithmus $= \frac{3}{4}$, die Zahl $= \sqrt[4]{10^3} = \sqrt[4]{1000}$, u. s. w.

Um also die Zahl, welche zu irgend einem rationalen Logarithmen gehört, zu bestimmen, wird nichts anders erfordert, als daß man 10 zu irgend einer Potenz erhebe, oder irgend eine Wurzel aus 10 oder aus einer Potenz von 10 ziehe, und so schwierig dieses auch in der Ausübung seyn mag, so ist doch diese Arbeit uns dem Begriffe nach nicht fremd. Anders aber verhält es sich, wenn man zu einer gegebenen Zahl den zugehörigen Logarithmen finden soll, denn dieses heißt, man soll angeben, zu welcher Potenz die Grundzahl 10 erhoben werden muß, damit man die gegebene Zahl, z. B. 3 erhalte. Diese Aufgabe läßt sich nicht so unmittelbar, sondern nur durch Näherung und gleichsam durch Versuche auflösen, indem man Potenzen von 10 sucht, die eine nicht viel von 3 verschiedene Zahl geben. Der Exponent der Potenz von 10, welche genau = 3 ist, wird eine irrationale Zahl, und läßt sich also überhaupt nicht vollkommen genau angeben.

Das Briggische Logarithmen-System ist wirklich so vollständig berechnet, daß man für jede ganze Zahl, die kleiner als 100000 ist, den Logarithmen sehr genau angegeben findet, und wir werden bald sehen, daß sich aus diesen berechneten Logarithmen nicht bloß der Logarithme jedes Bruches leicht und mit hinlänglicher Genauigkeit finden läßt, sondern auch der Logarithme einer Zahl, die größer als 100000 ist, ziemlich richtig angegeben werden kann.

* 221. Die Berechnung der Logarithmen, die wir in den Logarithmen-Tafeln schon zum Gebrauch fertig berechnet finden, ist sehr mühsam, indeß giebt die höhere Mathematik Mittel an die Hand, um etwas leichter dieselben zu finden, als es mit Hülfe der bisher vorgetragenen Lehren möglich ist. Um aber doch einen Begriff von der Berechnung der Logarithmen zu geben, will ich zeigen: wie man den Logarithmen von 3 im Briggischen System durch Näherung findet.

Da die Quadratwurzel aus $10 = 3,162277660169$ beynahe ist, so erhellt fürs erste, daß der Logarithme $= \frac{1}{2}$ zu der irrationalen Zahl $= 3,162277660169$ gehört, welche nur wenig größer als 3 ist, daher zur Zahl 3 ein Logarithme gehören muß, der etwas kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Sucht man nun auch die Cubicwurzel aus 10, so findet man die Zahl, deren Logarithme $= \frac{1}{3}$ ist, nämlich $\sqrt[3]{10} = 2,154434690032$. und da diese kleiner als 3 ist, so ist auch der Logarithme von 3 größer als $\frac{1}{3}$.

Um den Logarithmen von 3 näher zu bestimmen, kann man die mittlere Proportionalzahl zwischen $\sqrt[3]{10}$ und $\sqrt[2]{10}$ suchen. Da man diese findet, indem man aus dem Producte beyder die Quadratwurzel zieht, so ist sie $= \sqrt{10^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}}$, (nach §. 108) $= \sqrt{10^{\frac{5}{6}}} = 10^{\frac{5}{12}}$. Der Logarithme dieser mittlern Proportionalzahl ist also $= \frac{5}{12}$, und die mittlere Proportionalzahl selbst findet man $= 2, 610157215683$. Sucht man abermals zwischen dieser letztern Zahl und der Quadratwurzel aus 10, das ist zwischen $10^{\frac{5}{12}}$ und $10^{\frac{1}{2}}$, die mittlere Proportionalzahl, so ist diese gleich der Quadratwurzel aus dem Producte $10^{\frac{5}{12}}$. $10^{\frac{1}{2}}$, oder aus $10^{\frac{5}{12}+\frac{1}{2}}$, oder sie ist $= \sqrt{10^{\frac{11}{12}}}$, das ist $= 10^{\frac{11}{24}}$. Ihr Logarithme ist also genau $= \frac{11}{24}$, und sie selbst findet man aus den vorhin berechneten Zahlen $= 2, 87298483336$. Dieser letztern Zahl gehört also der Logarithme $= \frac{11}{24}$, und es muß folglich zu der Zahl $= 3$ ein etwas größerer Logarithme gehören.

Man hat also jetzt $\frac{11}{24}$ und $\frac{1}{2}$ als die Gränzen, zwischen denen der Logarithme von 3 gewiß enthalten ist, und man muß nun suchen, immer mehr die Gränzen, zwischen denen er fällt, näher zu bestimmen. Sucht man nämlich abermals zwischen $10^{\frac{11}{24}}$ und $10^{\frac{1}{2}}$, oder zwischen 2, 87298483336 und 3, 162277660169 die mittlere Proportionalzahl, so ist sie gleich der Quadratwurzel aus dem Producte

$10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{11}{24}} = \sqrt{10^{\frac{23}{24}}} = 10^{\frac{23}{48}}$. Der Logarithme dieser mittlern Proportionalzahl ist also $= \frac{23}{48}$, und sie selbst ist sehr nahe $= 3,01416253$. Da diese Zahl größer als 3 ist, so ist der Logarithme von 3 kleiner als $\frac{23}{48}$, aber größer als $\frac{11}{24}$, und weil zu dem Logarithmus $= \frac{11}{24}$, die Zahl $= 2,872985$ beynahe, und zum Logar. $= \frac{23}{48}$, die Zahl $= 3,01416$ beynahe gehört, und letztere die Zahl 3 sehr wenig übertrifft, so folgt, daß der Logarithmus von 3, nur wenig kleiner als $\frac{23}{48}$ oder als $0,47917$ seyn kann. Man könnte auf ganz ähnliche Weise die Annäherung noch weiter fortsetzen, wobey man aber, weil kleine Fehler oft durch die so lange fortgesetzte Rechnung bedeutenden Einfluß bekommen, suchen muß, die Rechnung mit äußerster Sorgfalt und Genauigkeit zu führen. Hier mag das bisherige, um die Methode und wenigstens die Möglichkeit einer solchen Berechnung zu zeigen, genügen.

Man braucht indeß nicht alle Logarithmen auf diesem höchst mühsamen Wege zu suchen, sondern kann aus einigen berechneten Logarithmen sehr viele andre herleiten, indem es leicht ist, den Logarithmen des Products zu finden, wenn man die Logarithmen der Factoren kennt.

* 222. 52ste Aufgabe. Wenn die Logarithmen zweyer oder mehrerer Zahlen gegeben sind, den Logarithmen des Productes zu finden.

Auflösung. Man addirt die gegebenen Logarithmen, so ist die Summe der Logarithme des Productes.

Beweis. Man muß sich hier beständig daran erinnern, daß hier eine jede Zahl als eine Potenz der Grundzahl, also im Briggischen System, als eine Potenz von 10, betrachtet wird, und daß der Logarithme angiebt, die wievielte Potenz es sey, oder daß der Logarithme der Exponent der Potenz ist. Der Beweis ist also völlig, wie in §. 108. Es ist nämlich im Briggischen Systeme ganz allgemein der Logarithme von $10^n = n$, oder wie man zu schreiben pflegt, log. $10^n = n$. Log. $10^m = m$ und folglich log. $10^{m+n} = m + n$, aber 10^{m+n} ist das Product aus 10^m und 10^n.

Beyspiel. Wenn gegeben ist, daß der Logarithme von 3, oder log. 3 = 0,4771213 und log. 4 = 0,6020600, so findet man log. 12 = 0,4771213 + 0,6020600 = 1,0791813, welches auch mit den in den Tafeln berechneten Logarithmen bis auf die letzte Ziffer übereinstimmt. Ueber diese letzte Ziffer, welche eigentlich eine 2 seyn muß, bleibt man immer etwas zweifelhaft, weil die gegebenen Logarithmen, als irrationale Zahlen, nicht vollkommen genau angegeben werden können, und der kleine Fehler, der wegen der weggelassenen kleinern Decimalbrüche statt findet, in der Summe mehrerer Logarithmen leicht einen etwas erheblichern Fehler bewirken kann, der indeß für den gewöhnlichen Gebrauch immer unbedeutend ist.

* 223. 53ste Aufgabe. Aus den gegebenen Logarithmen zweyer Zahlen, den Logarithmen des Quotienten zu finden, der aus der Division der beyden Zahlen durch einander entsteht.

Auflösung. Von dem Logarithmen des Dividendus subtrahire man den Logarithmen des Divisors, der Rest ist der Logarithme des Quotienten.

Der Beweis ist wie in §. 109.

* 224. 54ste Aufgabe. Wenn der Logarithme irgend einer Zahl gegeben ist, die Logarithmen der Potenzen oder Wurzeln derselben Zahl zu bestimmen.

Auflösung. Da auch die Wurzeln als Potenzen betrachtet werden können, deren Exponent ein Bruch ist, so gilt folgende Regel allgemein. Man multiplicire den Logarithmen der gegebenen Zahl mit dem Exponenten der Potenz, deren Logarithme bestimmt werden soll, so ist das Product der gesuchte Logarithme.

Der Beweis ist völlig wie §. 112. und 114.

Beyspiel. Wir finden oben §. 212. den Werth eines zu Zinsen auf Zinsen belegten Capitals von 100 Rthlr., nach 10 Jahren $= \frac{104^{10}}{100^9}$ Rthlr. oder $= \frac{104^{10}}{100^{10}} \cdot 100$ Rthlr., das ist gleich der zehnten Potenz von $\frac{104}{100}$, multiplicirt mit 100. Nun ist der Logarithme von $\frac{104}{100}$, $\log. \frac{104}{100} = 0,0170333$, also der Logarithme der zehnten Potenz jenes Bruchs, $\log. \frac{104^{10}}{100^{10}} = 0,170333$. Dieser Logarithme gehört nach Angabe der Logarithmen-Tafeln zu der Zahl 1,48024, also ist $\frac{104^{10}}{100^9} = 1,48024$ wenigstens ziemlich genau, und der Werth des Capitals von 100 Rthlr. ist also nach 10 Jahren $= 148,024$ Rthlr. $= 148$ Rthlr. $\frac{1}{2}$ Ggr.

Diese Aufgabe wird also durch die Logarithmen sehr leicht aufgelöst, statt daß das Aufsuchen der 10ten Potenz nach den gewöhnlichen Regeln viel beschwerlicher gewesen wäre. In einigen Fällen würde die Berechnung nach den sonst bekannten Regeln fast unmöglich seyn, z. B. wenn man den Werth eben des Capitals nach 10 Jahren und 7 Monaten, das ist nach $10\frac{7}{12}$ Jahren wissen wollte. Hier müßte man nämlich den Bruch $\frac{104}{100}$ zu einer Potenz erheben, deren Exponent $10\frac{7}{12}$ ist, und man müßte also die zwölfte Wurzel aus der 127sten Potenz von $\frac{104}{100}$ ziehen. Dagegen findet man den Logarithmen dieser Potenz sehr leicht, denn er ist $= 10\frac{7}{12} \cdot \log. \frac{104}{100}$, also $= 0,180269$, und dieser Logarithme gehört zu der Zahl 1,5145, daher der Werth jenes Capitals nach 10 Jahren 7 Monaten ist $= 151,45$ Rthlr. $= 151$ Rthlr. $10\frac{4}{5}$ Sgr.

Von der Einrichtung der Logarithmen-Tafeln und dem Gebrauche der Logarithmen.

* 225. Erklärung. Aus dem bisherigen erhellet, daß jede Zahl, die größer als 1 ist, einen positiven Logarithmen hat, den man als aus einer ganzen Zahl und angehängten Decimalbrüchen zusammen gesetzt betrachten kann. Die ganze Zahl nun, welche in dem Logarithmen vorkommt, heißt die Kennziffer, und der Logarithme besteht also aus der Kennziffer und einem angehängten Decimalbruche.

Beyspiel. Der Logarithme von 150 ist $= 2,1760913$, und hier ist 2 die Kennziffer.

* 226. 31ster Lehrsatz. Im Briggischen Logarithmen-Systeme ist die Kennziffer jedes Logarithmen, der einer ganzen Zahl zu-

gehört, um eins kleiner, als die Anzahl von Ziffern dieser ganzen Zahl.

Beweis. Alle ganze Zahlen, die zwischen 1 und 10 liegen, oder aus einer Ziffer bestehen, sind zu betrachten als Potenzen von 10, deren Exponenten zwar größer als 0, aber kleiner als 1 sind. Die Logarithmen dieser Zahlen haben daher 0 zur Kennziffer, indem sie bloß aus Brüchen bestehn und keine Ganze enthalten.

Alle zweyziffrige Zahlen haben einen Logarithmen der zur Kennziffer 1 hat; denn da 10 die erste und 100 die zweyte Potenz der Grundzahl ist, so ist jede zwischen beyde fallende Zahl eine Potenz von 10, deren Exponent 1 mit einem angehängten Bruche ist, und eben so groß ist also ihr Logarithme in diesem Systeme. Eben so erhellt, daß alle dreyziffrige Zahlen einen Logarithmen haben, dessen Kennziffer 2 ist; daß die Logarithmen aller vierziffrigen Zahlen 3 zur Kennziffer haben, u. s. w.

* 227. Es ist nun aber leicht zu übersehn, daß dieses auch noch gilt für alle ganze Zahlen, denen Brüche angehängt sind, dieses mögen nun gewöhnliche oder Decimalbrüche seyn, denn z. B. der Logarithmus von $11\frac{7}{8}$ ist gewiß größer als der Logarithme von 11, und kleiner als der Logarithme von 12; seine Kennziffer ist also dieselbe, wie die Kennziffer des Logarithmen von 11, und er unterscheidet sich von diesem bloß durch den der Kennziffer angehängten Decimalbruch.

Dieser Lehrsatz setzt uns also in Stand, die Kennziffer eines jeden Logarithmen zu bestimmen, welche zu einer Zahl gehört, die größer als 1 ist.

Für diejenigen Brüche, die kleiner als 1 sind, werden wir nachher etwas Näheres in Hinsicht der Logarithmen bestimmen.

* 228. 32ster Lehrsatz. Wenn der Briggische Logarithme irgend einer Zahl gegeben ist, und man multiplicirt oder dividirt diese Zahl mit irgend einer ganzen Potenz von 10; so ist der Logarithme des Products oder des Quotienten bloß durch seine Kennziffer von dem Logarithmen jener ersten Zahl verschieden.

Beyspiel. Der Lehrsatz behauptet, wenn z. B. log. 2621 = 3, 4184670: so sey der Logarithmus von 26210, 262100 u. s. w., und auch von 2, 621, von 26,21, von 262,1 u. s. w. von jenem Logarithmen bloß dadurch unterschieden, daß die letztern eine andere Kennziffer haben.

Beweis. Da nach §. 222. der Logarithme des Products gefunden wird, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt: so erhellt die Richtigkeit des Lehrsatzes von selbst, weil die Logarithmen der ganzen Potenzen von 10, ganze Zahlen sind. Man erhält also, um bey dem eben angegebenen Beyspiel zu bleiben: log. 262100 = log. 2621 + log. 100 also = 3, 4184670 + 2, 00 = 5, 4184670. Und auf ganz ähnliche Weise nach §. 223. log. 2, 621 = log. $\frac{2621}{1000}$ = 3, 4184670 — 3. = 0, 4184670. Dieses läßt sich auf alle ähnliche Fälle anwenden, und sogar auf diejenigen Fälle, wo die Zahl aus bloßen Decimalbrüchen besteht, wie z. B. 0, 02621.

* 229. Den Logarithmus eines Decimalbruches, der kleiner als 1 ist, findet man schon nach der

Regel des §. 223. leicht, indem man z. B. für den Logarithmen von 0, 002621 setzt, log. 0, 002621

$$= \frac{\log. 2621}{\log. 1000000} = \log. 2621 - \log. 1000000$$

$= 3, 4184670 - 6$, oder $= 0, 4184670 - 3$, wo man dann den Logarithmen $= + 0, 4184670 - 3$ beybehalten, oder auch $= - 2, 5815330$, welches beydes einerley ist, setzen kann, je nachdem das eine oder das andere den Umständen nach bequem ist.

Behält man die Form $0, 4184670 - 3$ bey, so kann man $- 3$ als negative Kennziffer betrachten und die Regel merken, daß diese negative Kennziffer $= 1$ ist, wenn der Decimalbruch Zehntel enthält, daß nach dem Comma keine Null folgt, wie in 0, 2621; daß ferner diese Kennziffer $= - 2$ ist; wenn in der Stelle der Zehntel eine Null steht, in der Stelle der Hunderttheile aber eine andre Ziffer vorkommt, wie 0, 02621; daß sie $= - 3$ ist, wenn die erste Ziffer des Decimalbruchs Tausendtheile bedeutet, wie in 0, 002621, und so weiter.

230. Die Logarithmen-Tafeln, die man bey allen Rechnungen mit Logarithmen zur Hand haben muß, enthalten nun die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100000, oder die kleinern Tafeln wenigstens von 1 bis 10000. Wenn man also den Logarithmen für eine dieser Zahlen gebraucht, so hat man nichts zu thun, als denselben aus den Tafeln abzuschreiben. Es können aber Fälle vorkommen, da man den Logarithmen einer Zahl wissen will, die selbst nicht in den Tafeln vorkommt, z. B. den Logarithmen einer Zahl, die aus einer ganzen Zahl und angehängten Brüchen besteht, und für diese Fälle muß man insonderheit die Regeln, wie ma sich helfen kann, bemerken.

Anmerk. Unter den Logarithmen-Tafeln gehören zu den brauchbarsten Schulze's Sammlung logarithmischer, trigonometrischer u. a. Tafeln. — Vega's logarithmische, trigonometrische u. a. Tafeln. — Tables portatives des logarithmes, par Callet; und andere.

* 231. 55ste Aufgabe. Den Logarithmen einer Zahl zu bestimmen, die in den Logarithmen-Tafeln nicht selbst vorkommt.

Auflösung. Es können mehrere Fälle vorkommen, wo man die Zahl, deren Logarithme gesucht wird, nicht unmittelbar in den Tafeln findet.

Erster Fall. Wenn die Zahl, deren Logarithme gesucht wird, größer ist, als die in den Tafeln vorkommenden Zahlen.

Ich will die Regeln für diesen Fall sogleich auf ein Beyspiel anwenden, nämlich den Logarithmen von 567889 zu finden. Offenbar ist dieser Logarithme größer als der von 567880, und kleiner als der Logarithme von 567890. In den Tafeln findet man

$$\log. 56789 = 4,7542642$$
$$\log. 56788 = 4,7542566$$

also ist nach §. 228. $\log. 567890 = 5,7542642,$

$$\log. 567880 = 5,7542566,$$

und der Unterschied beyder ist $= 0,0000076,$ da nun der Unterschied von 567889 und 567890 nur ein Zehntel ist von dem Unterschiede zwischen 567880 und 567890: so nimmt man an, das genau genug auch der Unterschied der Logarithmen jener beyden Zahlen nur ein Zehntel von dem Unterschiede der Logarithmen der letztern beyden Zahlen ist, oder der gesuchte Logarithme etwa um 0,0000008 kleiner, als der Logarithme von 567890.

Zweyter Fall. Wenn die Zahl aus einer ganzen Zahl und einem angehängten gewöhnlichen Bruche besteht, zum Beyspiel $47809\frac{5}{27}$.

Man bringe die ganze Zahl mit dem Bruche auf einerley Nenner, indem man $47809\frac{5}{27} = \frac{1290848}{27}$ setzt. Alsdann ist log. 1290848 — log. 27 der gesuchte Logarithme.

Wenn die Zahl beträchtlich groß ist, so kann man auch auf folgende Art verfahren: Man sucht den Logarithmen der beyden nächsten ganzen Zahlen, also bey dem vorigen Beyspiele die Logarithmen von 47809 und 47810, sucht ihren Unterschied, und legt zum Logarithmus der kleinern Zahl einen solchen Theil jenes Unterschiedes, wie der Bruch angiebt, hinzu. Die Tafeln geben

log. 47810 = 4, 6795187.
log. 47809 = 4, 6795097.

Unterschied = 0, 0000090.

$\frac{5}{27}$ des Unterschiedes = 0, 0000017,
dies addirt zu log. 47809 = 4, 6795097

giebt log. $47809\frac{5}{27}$ = 4, 6795114.

Diese letztere Regel ist indeß nicht mit Sicherheit anzuwenden, wenn die ganze Zahl klein ist; denn log. $2\frac{1}{2}$ liegt bey weitem nicht in der Mitte zwischen log. 2 und log. 3. Ganz genau ist es zwar auch bey größern Zahlen nicht wahr, daß z. B. log. $57980\frac{1}{2}$ zwischen log. 57980 und 57981 in die Mitte fällt, aber hier ist der Fehler klein genug, um übersehn zu werden.

Dritter Fall. Wenn die Zahl Decimalbrüche enthält.

Die Zahl mag aus einer ganzen Zahl mit angehängten Decimalbrüchen oder bloß aus Decimalbrüchen bestehn: so kann man immer den Logarithmen so suchen, als ob gar kein Comma da wäre, oder als ob alle Ziffern zusammen eine ganze Zahl ausmachten. Die Kennziffer aber muß man nach dem, was §. 226. und 229. erwähnt ist, bestimmen.

Will man den Logarithmen von 37,54 suchen, so ist log. 3754 = 3,5744943, aber weil 37,54 $= \frac{3754}{100}$, so muß man den Logarithmus von 100 abziehn, und hat also log. 37,54 = 1,5744943. Den Fall, da die Zahl ein bloßer Decimalbruch ist, haben wir §. 229. betrachtet.

* 232. 56ste Aufgabe. Zu einem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl mit Hülfe der Tafeln zu finden.

Auflösung. Wenn der Logarithme ganz genau in den Tafeln vorkommt, so findet man ohne Schwierigkeit die zugehörige Zahl, welche dann daneben steht. Dieser Fall ist aber der seltnere, denn gewöhnlich findet man, daß der gegebene Logarithme zwischen zwey in der Tafel stehende Logarithmen fällt. Z. B. der Logarithme 4,8162907 fällt zwischen die beyden in den Tafeln stehenden Logarithmen 4,8162877 und 4,8162943. Da nun die beyden letztern Logarithmen zu 65507 und 65508 gehören, so fällt die Zahl, zu welcher der gegebene

Logarithme gehört, zwischen 65507 und 65508. Der Unterschied der beyden letztern Logarithmen ist = 0,0000066, und der gegebene Logarithme ist um 0,0000030 größer, als der Logarithme von 65507, man kann daher verhältnißmäßig $65507\frac{3}{66}$ oder 65507,455, als die zum gegebenen Logarithmen gehörige Zahl annehmen.

Hätte der gegebene Logarithme auch eine andere Kennziffer gehabt, so würde man gleichwohl die Zahl nach dieser Methode richtig bestimmen, nur daß man das Comma so setzen muß, daß vor dem Comma eine Ziffer mehr sey, als die Kennziffer angiebt. Zum Logorithmen 1,8162907 gehört also die Zahl 65,507455. und zum Logarithmen 7,8162907 die Zahl 65507455.

* 233. Der Gebrauch, den man von den Logarithmen macht, besteht nun hauptsächlich darin, daß man sich durch Hülfe derselben das Multipliciren, das Dividiren, die Erhebung zu Potenzen und die Ausziehung der Wurzeln sehr erleichtert.

Kehrt man nämlich die Aufgaben §. 222., 223., 224. um, so erhält man folgende Regeln:

Soll man das Product aus mehrern Zahlen bestimmen, so suche man in den Tafeln die Logarithmen dieser Zahlen und addire sie; die Summe suche man unter den Logarithmen auf, so ist die daneben stehende Zahl das gesuchte Product.

Beyspiel. Das Product der Zahlen 75, 84, 976, 7,32 zu finden. Man hat

$$\begin{aligned} \log.\ 75,84 &= 1,8798983 \\ \log.\ 976 &= 2,9894498 \\ \log.\ 7,32 &= 0,8645111 \\ \hline \log.\ \text{des Products} &= 5,7338592. \end{aligned}$$

Diesen Logarithmen findet man in den Tafeln nicht genau, man hat aber log. 54182 = 4,7338550,
log. 54183 = 4,7338630.

Es ist also auch log. 541820 = 5,7338550
log. 541830 = 5,7338630.

Unterschied = 0,0000080.

Dagegen ist zwischen log. 541820 = 5,7338550
und dem log. des Productes = 5,7338592
der Unterschied = 0,0000042;
also gehört der letztere Logarithme, weil $80 : 42 = 10 : \frac{42}{8}$ zu $541820 + \frac{42}{8}$, das ist zu 541825 ohngefähr, welches also das gesuchte Product ist.

Um den Quotienten zu finden, welcher aus der Division zweyer Zahlen durch einander entsteht, subtrahire man den Logarithmen des Divisors vom Logarithmen des Dividendus; den Rest suche man unter den Logarithmen in den Tafeln auf, so ist die daneben stehende Zahl der Quotient.

Beyspiel. Die Zahl 789,543 durch 75,474 zu dividiren. Es ist log. 789,543 = 2,8973757
log. 75,474 = 1,8777974

log. des Quotienten = 1,0195783;

also $\frac{789,543}{74,474} = 10,4611.$

Um irgend eine Potenz oder Wurzel einer Zahl zu finden, suche man den Logarithmen dieser Zahl, multiplicire ihn mit dem Exponenten der Potenz, und suche das Product als Logarithmen in der Tafel auf: so ist die nebenstehende Zahl die gesuchte Potenz.

Beyspiele. Die 50ste Potenz von $\frac{104}{100}$ zu finden. Da log. $\frac{104}{100} = 0,0170333$, so ist das Funfzigfache $\frac{104^{50}}{100^{50}} = 0,8516650$. Die Tafeln geben

$4,8516619$, als Logarithmen von 71066

also $4,8516650$, als Logarithmen von 71066,5

es ist also für die Kennziffer 0, die zum Logarithmen gehörige Zahl $= \frac{104^{50}}{100^{50}} = 7,10665$; und wenn man dieses mit §. 212. und 224. vergleicht, so folgt, daß 100 Rthlr. zu Zinsen auf Zinsen von 4 Procenten belegt, nach 50 Jahren, 710 Rthlr. 16 Ggr. hervorbringen.

Die 15te Wurzel aus 16 oder $16^{\frac{1}{15}}$ zu bestimmen.

$$\begin{array}{l} \text{log. } 16 = 1,2041200 \\ \text{dividirt mit } 15. \\ \hline \text{log. } 16^{\frac{1}{15}} = 0,0802747. \end{array}$$

Da nun log. $1,2030 = 0,0802656$,
und beynahe log. $1,203025 = 0,0802747$,
so ist $\sqrt[15]{16} = 1,203025$.

* 234. **Beyspiele von der Anwendung der Logarithmen.**

Erstes Exempel. Zu 57986, 9487 und 432805 die vierte Proportionalzahl zu finden.

Zweytes Exempel. Jemand hat einige Stücke Waare, zusammen von 1219 Ellen, für 725 Rthlr. gekauft, wie theuer kann er die Elle wieder verkaufen, wenn er 20 Procent profitiren will?

* 235. Drittes Exempel Die Aufgabe §. 214. durch die Logarithmen genau aufzulösen.

Wir fanden dort, daß am Ende des nten Jahrs der noch übrige Rest des Capitales sey

$$= \frac{104^n}{100^n} \cdot 10000 - \frac{500 \cdot \left(\frac{104^n}{100^n} - 1\right)}{\frac{104}{100} - 1}$$

oder wenn man alles auf einen Nenner bringt, und statt $\frac{104}{100} - 1 = 0,04$ setzt:

$$\frac{\frac{104^n}{100^n} \cdot 10000 \cdot 0,04 - 500 \cdot \frac{104^n}{100^n} + 500}{0,04};$$

das ist $\frac{104^n}{100^n} \cdot \left(10000 - \frac{500}{0,04}\right) + \frac{500}{0,04}$.

Wenn also nach n Jahren das Capital ganz aufgezehrt ist, so muß diese Summe = 0 seyn,

also $\frac{104^n}{100^n} = \frac{500}{500 - 0,04 \cdot 10000} = \frac{500}{500 - 400}$,

folglich $n \cdot \log \frac{104}{100} = \log. \frac{500}{100} = \log. 5$,

$$\text{und } n = \frac{\log. 5}{\log. \frac{104}{100}} = \frac{0,6989700}{0,0170333} = 41,018.$$

Da nun n eine Anzahl von Jahren bedeutet, so ist am Ende des 41sten Jahrs das Capital beynahe völlig erschöpft.

* 236. Viertes Exempel. Jemand wünscht ein Capital von 4000 Rthlr. auf Zeitrenten so zu belegen, daß er 10 Jahre lang ansehnliche Procente zieht, dann aber das Capital als aufgezehrt betrachtet: wie viele Procente kann er erhalten, wenn derjenige, welcher das Capital annimmt, das Geld zu 4 Procent und zu Zins auf Zinsen benutzen kann.

Wenn die Person, welche das Capital ausgiebt, jährlich m Procente Zinsen erhält, also jährlich 40 m Rthlr., so sind die sämmtlichen empfangenen Zinsgelder am Ende des 10ten Jahrs so viel werth, als die Summe einer geometrischen Progression, deren erstes Glied 40 . m und deren Exponent $\frac{104}{100}$ ist, und diese Reihe hat 10 Glieder, wenn man annimmt, daß die Zinsen immer mit Anfange des Jahrs bezahlt werden. Die Summe dieser Reihe soll nun eben so viel betragen, als die 4000 Rthlr. mit Zinsen auf Zinsen nach 10 Jahren werth sind, das ist $= \frac{104^{10}}{100^{10}} \cdot 4000$. Hieraus läßt sich m bestimmen.

* 237. Fünftes Exempel. Ein Ehepaar setzt in eine Wittwen-Casse jährlich 45 Rthlr., und zwar immer zu Anfange des Jahres ein; nachdem dieses 20 Jahre geschehen ist, stirbt der Mann, und die Wittwe erhält nun zu Anfange jedes Jahrs aus der Wittwen-Casse 150 Rthlr. Die Wittwe überlebt den Mann 10 Jahre: wie viel Vortheil oder Schaden hat dann am Ende dieser Zeit die Wittwen-