Anfangsgründe der Mathematischen Wissenschaften

von

Wencesl. Johann Gustav Karsten,

der Phil. Doctor, Hofrath und Professor der Mathematik und Naturlehre auf der Universität in Halle, der Churf. Academie der Wissenschaften in München, der Holländischen Gesellschaft der Wissenschaften in Harlem, und der Königl. Dänischen Gesellschaft in Copenhagen, auch der öconomischen Gesellschaft in Leipzig Mitgliede.

Zweyter Band.

Die statischen und mechanischen Wissenschaften.

Greifswald,

gedruckt und verlegt von Anton Ferdinand Röse, 1780.

Vorrede.

Wie stark die Foderung sey, wenn man mehr als zwölf Wissenschaften, deren jede ihre eigenen Grundsätze hat, unter dem Nahmen der angewandten Mathematik in einem halben Jahr beym Besuch der auf den deutschen Universitäten gewöhnlichen halbjährigen Lehrstunden zu lernen verlangt, das ist schon von mehrern Schriftstellern, und unter andern vom Herrn Hofrath Kästner, in der seinen Anfangsgründen der angewandten Mathematik vorangesetzten Vorrede, bemerkt worden. Es bedarf also wohl bey Kennern keiner Entschuldigung, wenn ich es hiemit wage, die Anfangsgründe der angewandten Ma=

thematik zum Gebrauch academischer Vorlesungen etwas vollständiger abzuhandeln, als in Lehrbüchern möglich ist, worüber der Vortrag in der sehr kurzen Zeit eines halben Jahres geendiget werden soll. Nach meiner Erfahrung ist es der Ausbreitung gründlicher mathematischer Kenntnisse ungemein hinderlich, daß man bisher auf Universitäten noch immer in der Hauptsache bey Abfassung der Lehrbücher die Einrichtung des seiner ehemahligen Absicht ganz wohl angemessenen Wolffischen Auszuges beybehalten hat, und eben um deßwillen gezwungen ist, beym Vortrage der mechanischen Wissenschaften alles auf die Gesetze des Gleichgewichts einzuschränken. Das eigentlich mechanische wird daher ganz übergangen, nicht einmahl die Gesetze des Falles schwerer Körper werden vorgetragen; und wenn es gleich scheint, daß die Handbücher der Naturlehre solches zum Theil ersetzen sollen: so finde ich doch in denselben wenig befriedigendes, ja in einigen manches unrichtig und fehlerhaft vorgetragen. Im ganzen genommen ist alles von der gemeinnützlichen Ausübung viel zu sehr entfernt, als daß es den Liebhabern der Mathematik als eine nähere Anleitung dienen könnte, sich grade diejenigen Lehren recht geläufig zu machen, die zur nähern Kenntniß der Natur, und eben so zur richtigen Beurtheilung dessen, worauf es bey Anordnung der Maschinen ankommt, ganz unentbehrlich sind.

Ich habe den Versuch gemacht, die Gründe aller statischen und mechanischen Wissenschaften mit Inbegriff der Maschinenlehre soweit vollständig vorzutragen, und nach aller Strenge zu beweisen, als es ohne Gebrauch der Differential- und Integralrechnung, und doch dabey mit Vermeidung zu grosser Weitläuftigkeit der Beweise, geschehen konnte. Solchergestalt liefere ich zwar hiemit einen Auszug aus dem dritten, vierten, fünften und sechsten Theil meines Lehrbegriffes der gesammten Mathematik: jedoch wird man bey angestellter Vergleichung leicht wahrnehmen, daß es kein blosser Auszug sey, daß ich vielmehr alles von neuen durchgedacht habe. Nicht allein die Gründe des Gleichgewichts solcher Kräfte, die auf feste Massen wirken, sind bis auf die ersten Grundbegriffe zurück geführt worden, um alles derjenigen Evidenz, welche man sonst nur geometrischen Wahrheiten eigen zu seyn glaubt, möglichst nahe zu bringen: sondern auch die Gründe des Gleichgewichts der Kräfte, wenn sie auf flüssige Massen wirken, habe ich gesucht, auf einfachere Grundbegriffe zurück zu führen, als ich im dritten Theil meines mathematischen Lehrbegriffes sonst gewagt hatte. Die festen Körper hat man in der Statik beym Vortrage der ersten Gründe schon längst als bloß träge Körper ohne Schwere betrachtet, und in der Hydrostatik macht man gleich den Anfang mit Betrachtung solcher flüssigen Massen, die in allen Elementen schwer sind. Das ist den Regeln einer guten Lehrart schwerlich gemäß. Will man wissen, was die Wirkung der Schwere bey flüssigen Massen für einen Erfolg hat, so muß man zuforderst untersuchen, was mit flüssigen Massen vorgehen würde, wenn sie nicht schwer wären, sonst aber eine oder mehr bewegende Kräfte nach angenommenen Gesetzen auf die Masse wirkten. Nach mehrmahliger sorgfältigen Prüfung der Sache finde ich allemahl, daß die Gründe der Hydrostatik sich in den Grundsatz auflösen, worauf Herr **d'Alembert** im Traité des fluides, und Herr **Euler** in der Abhandlung de l'equilibre des fluides, (Mem. de l'Acad. des Sciences de Prusse, T. XI. Année 1755.) auch in einigen andern Abhandlungen ihre Untersuchungen über die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Massen gründen. Auch Herrn Johann Bernoullis Hydraulik löset sich in diesem Grundsatz auf. Ich glaube hier im ersten Abschnitt der Hydrostatik alles zulänglich erläutert zu haben.

Wie ich die Gründe der eigentlichen Mechanik und Maschinenlehre vorzutragen gewohnt bin, ist schon aus dem vierten, fünften und sechsten Theil meines Lehrbegriffes der Mathematik bekannt, und ich kann einigen Beyfall der Kenner hoffen, wenn ich hier gesucht habe, manches noch mehr zu erläutern, und besonders die Gründe einer gemeinnützlichen Maschinenlehre möglichst ins Licht zu setzen. Dies habe desto nothwendiger gehalten, je öfter ich noch immer in neuern Schriften, worin von Anordnung der Maschinen, und dem, was damit in Verbindung ist, gehandelt wird, bald wirkliche Irthümer, bald fehlsame Anwendungen sonst richtiger Sätze finde, die man übel verstehet, weil die Erfinder nicht allemahl die deutlichsten und angemessensten Ausdrücke gewählt haben. Eine Probe davon können Huygens Lehrsätze von der Fliehkraft abgeben, die ein vormahls berühmt gewesener Schwedischer Mathematiker und erfahrner practischer Mechanicus, Herr von Polhem fehlsam anwendet, wenn er für die Anordnung der Schwungräder Regeln geben will. Ein hieher gehöriger kurzer Aufsatz von ihm findet sich im IV. Bande der Abhandlungen der Königlich-Schwedischen Academie der Wissenschaften, auf der 148sten Seite. Herr Büsch, in seiner Mathematik zum Nutzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens,

folgt

folgt dem Herrn Polhem, und will auch die Wirkung der Wasserräder und Windflügel nach dieser fehlsamen Theorie beurtheilet wissen. Aus diesem Handbuch hat wiederum Herr N. Schmidt verschiedenes eben so unrichtiges in den Aufsatz einfliessen lassen, welcher unter dem Titel: **Das Wesentliche der Mechanik**, im 70sten, 71sten und 72sten Stück des Hannöverschen Magazins vom Jahr 1777 abgedruckt ist. Zu wünschen wäre es wohl, daß man in den mechanischen Wissenschaften endlich einmahl einen eben so bestimmten und der Sache recht genau angemessenen Redegebrauch einführte, als derjenige ist, welcher der Geometrie so viele Vorzüge giebt: und diese Absicht dürfte wohl am besten durch etwas vollständigere Lehrbücher der mechanischen Wissenschaften erreicht werden, als diejenigen sind, welche man bisher gewöhnlich beym Lehrvortrage auf Universitäten zum Grunde gelegt hat. Ich bin bemühet gewesen, diesem meinem Handbuch eine der erwehnten Absicht angemessene Vollständigkeit zu geben, die ich, wo nicht gänzlich, doch wenigstens ziemlich nahe erreicht zu haben glaube. Die Wahl der abzuhandelnden Materien muste mir bey dem grossen Reichthum der Wissenschaft natürlicher Weise oft schwer werden, weil ich die Absicht des Buchs, daß es zur Grundlage beym mündlichen Vortrage in den Lehrstunden dienen sollte, allemahl vor Augen behalten muste. Wofern also jemand hie oder da vielleicht etwas nach seinem Urtheil noch nöthig gewesenes vermissen mögte; so muß ich bitten, es mit der Beschränkung, worunter ich mich befand, zu entschuldigen. Gern hätte ich von den Gesetzen des Stosses fester Körper aneinander in der Mechanik etwas mit beygebracht: weil jedoch die Gesetze des graden und centralen Stosses in den kurzen physischen Handbüchern gewöhnlich mit vorgetragen werden, so ließ ich sie hier weg, um desto mehr Raum für andre nicht so allgemein bekannte Lehren zu gewinnen. Jetzt, da ich von dem gedruckten Buch das erste Alphabeth in Händen habe, sehe ich, daß der übrige Theil der Handschrift im Ab-

druck

druck das Maaß, worauf ich mich einzuschränken hatte, eben noch nicht überschreiten wird: deßwegen füge ich am Ende des Buchs noch einen kurzen Zusatz von den Gesetzen des Stosses bey, vornemlich auch um deßwillen, weil ich bey der mündlichen Erläuterung dieses Zusatzes Anlaß nehmen kann, zu zeigen welche Verwirrungen die Vieldeutigkeit des Worts: Kraft, vormahls in der Mechanik veranlasset hat.

Der für das Jahr 1775 gehörige Band der Nouveaux memoires de l' Academie de Berlin ist allererst auf der Ostermesse des jetzt laufenden Jahres 1778 vertheilt worden, und ich habe ihn erhalten, nachdem meine Handschrift seit einigen Monathen nicht mehr in meinen Händen gewesen war: sonst hätte ich in der Maschinenlehre sehr gern die vier Aufsätze vom Herrn Lambert genutzt, welche in diesem Bande der Berliner Memoires von der 49sten bis 101 Seite unter folgenden Titeln befindlich sind: *Experiences et Remarques* sur les moulins, que l' eau meut par en bas dans une direction horisontale,

ſontale, *Remarques* ſur les moulins et autres machines, dont les roues prennent l'eau a une certaine hauteur, *Remarques* ſur les moulins et autres machines, ou l'eau tombe en deſſus de la roue, *Remarques* ſur les moulins a vent.

Halle, im Auguſt des Jahrs 1778.

Inhalt.

Inhalt.

Die Statik der festen Körper.

Die Hydrostatik.

Die Aerostatik.

Die ersten Gründe der Mechanik fester Körper.

Die ersten Gründe der Hydraulik.

Die ersten Gründe der Maschinenlehre.

Der

Zusatz zur Mechanik fester Körper.

Die Statik der festen Körper.

Der I. Abschnitt.

Die ersten Grundlehren von der Schwere, und vom Gewicht der Körper.

1 §.

Wenn man einen Stein von mässiger Grösse, ein Stück Bley, oder sonst etwas dergleichen auf die Hand leget, so empfindet man etwas, das wir mit dem Wort **Druck** anzeigen: läßt man die Hand sinken, so folgt der drückende Körper der Hand, er bewegt sich nach einer Richtung, die wir dadurch anzeigen, daß wir sagen, er falle gegen die Erde herab. Ein Körper, der die Hand nicht drückte, wenn er darauf gelegt wäre, würde, soviel wir uns die Sache vorstellen können, der Hand, wenn man sie sinken liesse, nicht folgen, er würde an eben dem Ort bleiben, wo er vorher war, auch wenn ihn sonst nichts unterstützte. Wir haben völlig Grund, dafür zu halten, daß ein solcher Körper einen Tisch, oder was ihn sonst unterstüzt, eben so drücke, wie er die Hand drückt, wenn er darauf liegt: auch ist der Erfolg eben der, wenn man die Unterstüzung wegnimmt, allemahl fällt alsdenn der Körper gegen die Erde herab.

2 §.

Es muß einen Grund oder eine Ursache geben, warum ein solcher Körper herab fällt, und nicht an seinem Ort bleibt, warum er vielmehr nach unten fällt, und nicht aufwärts steiget, oder sich seitwärts fortbewegt. Diese Ursache bestehe, worin sie wolle, so ist wohl soviel gewiß, daß der Druck, welchen man empfindet, so lange man den Körper hält, eben der Ursache zugeschrieben werden müsse. Eben dasselbe, was den Körper gegen die Unterstützung drückt, die ihn hält, bewegt denselben, sobald die Unterstützung wegfällt. Diese drückende Ursache kann selbst ein **Druck** heissen, und alles, was man sich als einen Druck gegen eine ruhende oder in Bewegung gesetzte körperliche Masse vorstellen kann, heißt eine **bewegende Kraft**, oder schlechthin eine **Kraft**: es mag eine wirkliche Bewegung durch diesen Druck verursachet werden; oder es mag etwas anders die Bewegung hindern, wie die Hand, oder sonst eine Unterstützung, wenn ein Körper zu fallen strebt: oder es mag die Bewegung einer für sich schon nicht mehr ruhenden Masse verzögern oder auf welche Art man will ändern.

Die Kraft, welche die Körper unterwärts drückt, so lange sie unterstützt sind, und gegen die Erde zu bewegt, wenn keine Unterstützung es hindert, heißt die **Schwere**: so muß man wenigstens in Gedanken

die

die Schwere als eine bewegende Kraft, welche jeden Körper in der Natur unterwärts drückt, von dem schweren Körper selbst unterscheiden. Alle Körper, mit welchen wir Versuche anstellen können, sind schwer, das will sagen, sie werden von der Schwere unterwärts gedrückt, und fallen herab, wenn es keine Unterstützung hindert.

3 §.

Was in der Geometrie ein Körper heißt, ist eigentlich nur der Raum, den ein in der Natur würklich vorhandener Körper ausfüllen kann. Hier müssen die Bestandtheile des Körpers selbst von dem Raum, den sie ausfüllen, unterschieden werden, und eben diese Bestandtheile sind es, welche die Materie oder Masse des Körpers ausmachen. Jedes Stück Masse, das seine bestimmte Gestalt und Grösse hat, ist hier ein physischer Körper, und wer einen richtigen Sprachgebrauch beobachten will: der muß die Wörter: Masse, und Körper, nicht als gleichgül tige brauchen. Holz ist eine Masse, und der daraus verfertigte Tisch ist ein Körper. Bley, Eisen sind Massen, eine bleyerne, eine eiserne Kugel sind, Körper.

4 §.

Bey vielen Massen, wie beym Schwamm und verschiedenen Holzarten, nimmt man leicht wahr, daß nicht der ganze Raum, welchen ein Stück davon einzunehmen scheint, mit ihren Bestandtheilen durchgängig ausgefüllt sey: vielmehr sind in dergleichen Massen sehr viele kleine Zwischenräume befindlich, die vielleicht nicht ganz leer sind, jedoch aber keine solche Bestandtheile enthalten, die mit den übrigen gleichartig sind. Bey einigen sind diese Zwischenräume, mithin auch die materiellen Bestandtheile durch den ganzen Raum der Masse gleichförmig, bey andern ungleichförmig vertheilt. Uebrigens erhellet, daß die Bestandtheile der Masse desto dichter beysammen seyn müssen, je kleiner die ganze Summe aller Zwischenräume in Vergleichung mit dem Raum ist, den die Masse nach ihrer ganzen Ausdehnung einnimmt: desto grösser ist zugleich der mit materiellen Bestandtheilen angefüllte Theil des Raums, den die Masse einnimmt, in Vergleichung mit ihrer ganzen geometrischen Grösse.

5 §.

Eine gleichförmig dichte oder in allen ihren Theilen gleichartige Masse ist diejenige, durch deren Bestandtheile die Zwischenräume so gleichförmig vertheilt sind, daß gleich grosse Theile des Raums, welchen sie einnimmt, auch gleichviele Bestandtheile enthalten, die Theile des ganzen Raums mögen so groß oder so klein, wie man will, angenommen werden. Die Zwischenräume und Bestandtheile einer **ungleichförmig dichten Masse** sind dagegen durch den Raum, welchen sie einnimmt, ungleichförmig vertheilt, gleich grosse Stücke von ihr enthalten ungleich viele Bestandtheile.

6 §.

Um im Ausdruck nicht ohne Noth weitläuftig zu seyn, kann man **gleichförmig** und **ungleichförmig dichte Körper** solche nennen, die aus gleichförmig oder ungleichförmig dichter Masse bestehen. Alsdenn ist **die Menge der Masse gleichförmig dichter Körper**, die sonst von einerley Art sind, **ihrer Grösse proportional.** Ferner hat man von der Dichtigkeit einer in allen ihren Theilen gleichartigen

artigen Masse einen bestimmten Begrif, wenn man weiß, wieviele Masse entweder der ganze Raum enthalte, den ein gleichförmig dichter Körper einnimmt, oder wieviel Masse in einem Theil dieses Raums von bekannter Grösse enthalten sey. Es sey die ganze geometrische Grösse des Körpers $= V$, ein Theil desselben $= v$, die gesammte Masse des Körpers $= M$, der Theil von ihr, welcher im Raum v enthalten ist $= m$;

so ist $V : v = M : m$, mithin $m = \frac{v}{V} \cdot M$.

7 §.

Wenn v derjenige Theil der geometrischen Grösse des Körpers ist, welchen man $= 1^3$ annimmt; wenn also v ein Cubicfuß, oder ein Cubiczoll ist, mithin auch V in Cubicfussen oder Cubiczollen ausgedrückt ist;

so hat man $m = \frac{M}{V}$. Der Ausdruck: **Dichtigkeit einer gleichartigen Masse** erhält also eine ganz bestimmte Bedeutung, wenn man eine so grosse Menge von dieser Masse versteht, als ein Raum fasset, dessen Grösse man $= 1^3$ gesetzt hat. Die Dichtigkeit des Goldes, des Bleyes, des Wassers, ist demnach diesem festgesetzten Sprachgebrauch gemäß die Menge Gold, Bley, Wasser, welche den Raum eines Cubicfusses oder Cubiczolles füllt.

Wird einerley Menge M einer Masse in einem grössern oder kleinern Raum nW gleichförmig ausgebreitet, so ist nun ihre Dichtigkeit $= \frac{M}{W}$: wenn also diese $= \mu$ gesetzt wird, so hat man $m : \mu = \frac{1}{V} : \frac{1}{nW} = nW : V$, und die Dichtigkeiten von einerley Menge Masse in verschiedene Räume gleichförmig ausgebreitet, verhalten sich umgekehrt, wie diese Räume.

8 §.

Gleich grosse Körper aus einerley gleichförmig dichten Masse, ein Paar gleich grosse Stücken Bley, Silber, Eisen, u. s. f. drücken, wenn sie unterstützt sind, das was sie trägt, gleich stark. Hievon kann man sich ziemlich durchs Gefühl überzeugen, wenn man von zweyen solchen gleich grossen Stücken Eins mit jeder Hand trägt, ob man sich gleich nicht vollkommen scharf von der Gleichheit des Drucks durchs Gefühl allein versichern kann. Eine geringe Verschiedenheit des Drucks unterscheidet man vielleicht nicht: wenn aber beyde Stücke eine merklich verschiedene Grösse haben; so unterscheidet man auch leicht den stärkern Druck des grössern von dem schwächern Druck des kleinern.

9 §.

Der Druck eines schweren Körpers gegen das, was ihn unterstützt, heißt sein Gewicht; also sind Schwere und Gewicht eines Körpers wie Ursache und Wirkung verschieden. Die Schwere ist eine bewegende Kraft, welche die Körper gegen die Erde zu bewegen strebt: Druck gegen das, was diese Bewegung hindert, oder würkliche Bewegung, wenn nichts im Wege ist, sind im Grunde einerley Wirkung der Schwere, die nur auf verschiedene Art in die Sinne fällt. Man nennt auch wohl die schweren Körper selbst Gewichte, wenn man bey denselben nichts weiter, als die bestimmte Grösse des Drucks betrachtet, dem dasjenige ausgesetzt ist, was einen solchen Körper herab zu fallen hindert.

10 §.

Die Gewichte gleich grosser Körper aus einerley gleichförmig dichter Masse, sind gleich groß. (9. 8.) Aber gleich grosse Körper dieser Art bestehen aus gleichvieler Masse: also hat man Grund, den allgemeinen Satz anzunehmen: **Gleiche Massen haben gleiches Gewicht.** Freylich ist dieser allgemeine Satz hiemit noch nicht aufs schärfste bewiesen: allein es ist wenigstens verstattet, ihn bis auf weitere Prüfung als Hypothese anzunehmen.

Wenn also ungleich grosse Körper gleichviel Masse enthalten, so sind dennoch ihre Gewichte gleich groß, und das Gewicht eines Körpers hängt nicht von seiner geometrischen Grösse, sondern von der Menge der Masse ab, die durch den ganzen Raum des Körpers vertheilt ist.

11 §.

Doppelt soviel Masse, drey- vier- fünf- und überhaupt *n*mahl soviel Masse, hat doppelt, drey- vier- fünf- und überhaupt *n*mahl soviel Gewicht, als die einfache Masse. **Das Verhältniß der Gewichte zweyer Körper ist einerley mit dem Verhältniß ihrer Massen.**

Die Massen gleichförmig dichter und übrigens gleichartiger Körper verhalten sich, wie ihre geometrische Grösse; (5 §.) also ist **das Verhältniß der Gewichte gleichartiger und gleichförmig dichter Körper mit dem Verhältniß ihrer geometrischen Grösse einerley.** Zwey Cubiczoll Gold, Silber, Quecksilber, Wasser, haben doppelt soviel Gewicht, als ein Cubiczoll Gold, Silber, Quecksilber, Wasser.

12 §.

Wenn das Gewicht eines Cubiczolles Gold, Silber, Quecksilber, Wasser, bekannt ist, so giebt eine ganz leichte Rechnung das Gewicht einer jeden andern Masse Gold, Silber, Quecksilber, Wasser, wenn die Grösse dieser Masse in Cubiczollen ebenfalls bekannt ist. Es sey P das Gewicht der Masse und V ihre geometrische Grösse in Cubiczollen ausgedrückt; ferner sey G das Gewicht eines Cubiczolles von eben der Masse, so hat man nach der Regel Detri

1 Cubiczoll wiegt G, was also V Cubiczoll?

Die Antwort wird gefunden, wenn man das Gewicht *G* eines Cubiczolles mit der Grösse *V* der Masse in Cubiczollen ausgedrückt multiplicirt. Also ist $P = G \cdot V$.

Das Gewicht eines Körpers drückt man in Pfunden, Unzen, Granen aus, wie es im gemeinen Leben üblich ist, und wie dazu in der Rechenkunst die nähere Anleitung ist gegeben worden. Man findet alsdenn P unter eben dem Nahmen, unter welchem das Gewicht G gegeben ist.

An sich ist es gleichgültig, ob man V in Cubiczollen oder Cubicfussen, oder in jedem andern Cubicmaaß ausdrücken will: allemahl aber muß durch G das Gewicht der Masse verstanden werden, wenn sie die Grösse eines solchen Cubicmaasses hat, wodurch man die Grösse des Raums V ausdrückt, welchen die Masse füllt, deren Gewicht P gesucht wird. Demnach muß G das Gewicht eines Cubicfusses seyn, wenn man V in Cubicfussen ausdrücken will.

13 §.

Man muß zwar Masse und Gewicht eines Körpers gehörig unterscheiden; weil jedoch die Massen der

Körper

sich wie ihre Gewichte verhalten, (11 §.) so kann man das Gewicht eines Körpers als das Maaß seiner Masse betrachten, in eben dem Verstande, wie ein Kreisbogen als das Maaß eines Winkels betrachtet werden kann. (126 §. Geom.) Wenn soviele Masse, als diejenige, die das Gewicht eines Pfundes hat, = 1 angenommen wird, so ist die Zahl der Pfunde, welche jede grössere oder kleinere Menge körperlicher Masse wiegt, einerley mit der Zahl, welche die Menge dieser Masse in Vergleichung mit derjenigen Menge ausdrückt, die man gleich Eins gesetzt hat: 7 Pfund Masse sind 7mahl soviel Masse, als diejenge Menge, welche ein Pfund wiegt.

14 §.

Wenn man im gemeinen Leben die Redensarten braucht: Gold ist schwerer als Silber, Quecksilber ist schwerer als Wasser, so ist eigentlich die Meinung diese: jedes Stück Gold ist schwerer, als ein eben so grosses Stück Silber, jede Menge Quecksilber ist schwerer, als eine eben so grosse Menge Wasser. Wievielmahl eine dieser Massen in dem angezeigten Verstande schwerer, als die andre sey, läßt sich leicht finden, wenn das Gewicht eines Cubiczolles oder eines Cubicfusses von jeder dieser Massen bekannt ist. Sovielmahl das Gewicht eines Cubiczolles Silber im Gewicht eines Cubiczolles Gold enthalten ist, eben sovielmahl ist das Gewicht einer jeden grössern oder kleinern Masse Silber in dem Gewicht einer eben so grossen Masse Gold enthalten. Diesemnach hat man einen bestimmten Begriff von dem **Verhältniß des Gewichts einer Masse zum Gewicht einer andern Masse von eben der Grösse**, wenn das Gewicht eines Cubicfusses oder Cubiczolles jeder dieser Massen bekannt ist.

15 §.

Das eigenthümliche oder specifische Gewicht einer Masse ist das Gewicht eines Cubicfusses oder eines Cubiczolles dieser Masse, nachdem man ihre Geometrische Grösse in Cubicfussen oder Cubiczollen ausdrückt. Wenn also das eigenthümliche Gewicht einer Masse bekannt ist, so findet man durch eine leichte Rechnung das Gewicht eines jeden Körpers, der aus dieser Masse bestehet, nach der Regel des 12 §. Was daselbst G hieß, ist das eigenthümliche oder specifische Gewicht der Masse, und dies mit der geometrischen Grösse V des Körpers multiplicirt, giebt das Gewicht P desselben. Es war nemlich $P = G.V.$ (12 §.)

Wenn man weis, daß ein Cubicfuß Eisen 558 Pfund wiegt, so findet man das Gewicht einer eisernen Kugel von 6 Zoll im Durchmesser durch folgende Rechnung. Für die Kugel ist $V = \frac{1}{6}\pi 6^3$ (374 §. Geom.) und diese Zahl giebt V in Cubiczollen, also muß für V das Gewicht eines Cubiczolles Eisen genommen werden. Dies Gewicht ist $\frac{558}{1728} = \frac{279}{864} = \frac{31}{96}$ Pfund, und wenn man $\pi = \frac{355}{113}$ annimmt; (256 §. Geom.) so ist für die eiserne Kugel $P = \frac{1}{6}.\frac{355}{113}.\frac{31}{96}.6^3 = \frac{355}{113}.\frac{31}{16}.6 = \frac{355 \times 31 \times 3}{113 \times 8} = 36\frac{471}{904}$ Pfund.

16 §.

Wenn gleich der Bau einer gemeinen Wage hier noch nicht vollständig beschrieben werden kann, so ist doch dies Werkzeug im gemeinen Leben so bekannt, daß es kein Fehler wider die Methode seyn wird, wenn ich annehme, man könne das **Gewicht eines Körpers von mässiger Grösse durchs Abwägen vermittelst der Wage finden.** Die Voraussetzung soll nur dazu dienen, daß noch einige folgende Lehren, die von der Voraussetzung an sich nicht abhängen, durch Anwendungen auf einige Beyspiele desto besser ins Licht gesetzt werden können.

17 §.

Das eigenthümliche Gewicht einer Masse zu finden.

Aufl. Man wäge einen solchen Körper, dessen Inhalt man nach den Regeln der Geometrie im Cubicmaaß finden kann. Das so gefundene Gewicht dividire man mit der Zahl, welche die Grösse des Körpers im Cubicmaaß ausdrückt, so ist für sich klar, daß die Grösse eines Cubicfusses oder Cubiczolles der Masse des abgewogenen Körpers gefunden werde, nachdem man seine Grösse in Cubicfussen oder Cubiczollen in Rechnung gebracht hat. Eben das giebt auch der allgemeine Ausdruck $P = G . V$, (15 §.) denn daraus folgt $G = \frac{P}{V}$.

Eine eiserne Kugel 6 Zoll im Durchmesser wiegt $36\frac{1}{2}$ Pfund: wie groß ist das eigenthümliche Gewicht des Eisens? Man findet $V = \frac{1}{6}\pi 6^3 = 36\pi = 113{,}1$ Cubiczoll, also $G = \frac{36{,}5}{113{,}1} = 0{,}3228$ als das Gewicht eines Cubiczolles Eisen, und ein Cubicfuß wiegt $1728 . 0{,}3228 = 557{,}8$ Pfund.

18 §.

Die Menge einer gleichförmig dichten Masse, welche den Raum eines Cubiczolles oder Cubicfusses füllet, giebt einen Begriff von ihrer **Dichtigkeit**, (7 §.) und die Menge dieser Masse wird durch die Zahl der Pfunde ausgedrückt, welche ihr Gewicht angiebt, wenn diejenige Menge gleich **Eins** ist, welche

che 1 Pfund wiegt. (13 §.) Ist also m die Menge einer gleichförmig dichten Masse in dem Raum, eines Cubiczolles oder Cubicfusses, und G ihr Gewicht; ist ferner M die Menge einer Masse von eben der Art in dem Raum $= V$, und P ihr Gewicht; so ist in Zahlen ausgedrückt $m = G$ und $M = P$. Es war aber m das Maaß der Dichtigkeit der Masse, und $m = \frac{M}{V}$, (7 §.) also läßt sich die Dichtigkeit einer Masse, und ihr eigenthümliches Gewicht durch einerley Zahl ausdrücken. Die Zahl, welche das eigenthümliche Gewicht anzeigt, giebt zugleich die Menge der in dem Raum eines Cubiczolles oder Cubicfusses enthaltenen Menge derselben Masse an, und ihre Dichtigkeit verhält sich wie diese Menge, mithin auch wie das Gewicht dieser Menge.

19 §.

Das eigenthümliche Gewicht oder die Dichtigkeit der Masse, die einen Körper ausmacht, ist bekannt, und das Gewicht des ganzen Körpers; man soll seine geometrische Grösse im Cubicmaaß finden.

Aufl. Man dividire das Gewicht des ganzen Körpers durch das eigenthümliche Gewicht seiner Masse, so hat man seine geometrische Grösse in Cubiczollen oder Cubicfussen, nachdem man das Gewicht eines Cubiczolles oder Cubicfusses für das eigenthümliche Gewicht der Masse in Rechnung gebracht hat. Die Richtigkeit der Auflösung erhellet zwar schon für sich: indessen folgt aus dem allgemeinen Ausdruck $P = G \cdot V$ (12 §.) auch $V = \frac{P}{G}$.

Wenn

Wenn ein Cubicfuß Wasser 64 Pfund wiegt, wieviel Raum nehmen 1000 Pfund Wasser ein? Die Antwort ist $\frac{1000}{64} = 15,625 = 15\frac{5}{8}$ Cubicfuß.

Wäre so gefragt worden: wie hoch ist eine cylindrische Wassersäule von 1000 Pfund, wenn ihre Grundfläche 8 Zoll oder $\frac{2}{3}$ Fuß im Durchmesser hat; so findet man den Quadratinhalt der Grundfläche aus dem 254 §. Geom. $= \frac{1}{4}\pi \frac{4}{9} = \frac{1}{9}\pi = 0,3490658$ Quadratfuß. Hiemit dividirt man den körperlichen Inhalt von 15,625 Cub. Fuß, so ist die gesuchte Höhe $= \frac{15,625}{0,3490658} = 44,762$ Fuß. (377 §. Geom.)

20 §.

Man kann unter den bekannten gleichförmig dichten Massen in der Natur eine wählen, und mit ihrem specifischen Gewicht das eigenthümliche Gewicht andrer gleichförmig dichter Massen vergleichen. Im folgenden werden die Gründe vorkommen, weßwegen man am leichtesten mit dem specifischen Gewicht des Wassers die specifischen Gewichte andrer Massen vergleicht. Man hat für die meisten bekannten Massen die Zahlen gesucht, welche angeben, wieviel mahl das specifische Gewicht des Wassers im specifischen Gewicht jeder der übrigen Massen enthalten sey. Eben diese Zahlen drücken alsdenn die specifischen Gewichte der übrigen Massen aus, wenn man das specifische Gewicht des Wassers = 1 annimmt: eigentlich sind sie die Exponenten der Verhältnisse für die specifischen Gewichte der übrigen Massen gegen das specifische Gewicht des Wassers. Man verstehet leicht dem 14 §. gemäß, was die Redensart sagen wolle: das Quecksilber sey 14mahl schwerer als Wasser: nichts anders, als das Gewicht einer jeden bestimmten Menge Wasser sey in dem Gewicht einer eben so grossen Menge Queckſilber 14mahl enthalten. Eben so sind die Zahlen in nachstehender Tafel zu verstehen.

	specifisches Gewicht.
Gold, das feinste — —	19,640
— — französisches — —	18,166
— — holl. Ducaten — —	18,261
Quecksilber, deutsches — —	14,000
— — — englisches — —	13,593
Silber, feines — —	11,091
Das beste Holländische — —	10,535
— — geringeres — —	10,340
Bley, englisches — —	11,325
— — deutsches — —	11,310
Kupfer, japanisches — —	9,000
— — schwedisches — —	8,784
— — gebranntes — —	5,453
Messing, gegossener — —	8,000
— — geschlagener — —	8,349
Stahl, weicher — —	7,738
— — federharter — —	7,809
Eisen — — —	7,645
Zinn, reines — — —	7,320
— — das reinste englische —	7,295
Diamant, weisser indischer — —	3,517
— — — Brasilianischer —	3,518
— — — Ostindischer blaulichter	3,512
Agat, englischer — —	2,512
Karniol — —	3,290
Hyacinth — — —	2,631
Jaspis — — —	2,666
Kieselstein, durchsichtiger —	2,641

Kiesel-

			specifisches Gewicht.
Kieselstein, gemeiner	—	—	2,542
Marmor, schwarzer italienischer			2,704
— — — weisser	— — —		2,707
— — — ein andrer		—	2,718
Alabaster	—	—	1,872
Krystall, isländischer		—	2,720
Bergkrystall	—	—	2,650
Glas, feinstes	—	—	3,150
—— gemein grünes	—	—	2,620
Elfenbein	—	—	1,825
Tannenholz, hartes	—	—	0,550
— — — — weiches	—	—	0,498
Erlenholz —	—	—	0,800
Büchenholz	—	—	0,852
Fichtenholz	—	—	0,300
Eichenholz	—	—	0,929
Wachs, gelbes	—	—	0,955
Korckholz	—	—	= =
Regenwasser	—	—	1,000
Seewasser	—	—	1,030
Brunnenwasser	—	—	0,999
Flußwasser	—	—	1,009

21 §.

Von dieser Tafel hat man den Vortheil, daß vermittelst derselben das Gewicht eines jeden Körpers sehr leicht gefunden werden kann, wenn seine geometrische Grösse bekannt ist: nur muß ausserdem noch das Gewicht eines Cubiczolles oder Cubicfusses Regenwasser bekannt seyn. Nach den besten Versuchen, wovon unten mehr Nachricht vorkommen wird, kann man einen Rheinländischen Cubiczoll Regenwasser im holländischen Troygewicht 281 Gran schwer schätzen, 480 solcher Grane auf die Unze gerechnet, also wiegt ein Rheinländischer Cubicfuß Regenwasser 63 Pfund 3 Unz. 7 Dr. 9 Gran im holl. Troygewicht, 16 Unzen auf ein Pfund gerechnet. Wollte man nun wissen, wie viel $2\frac{1}{2}$ Hamburger Cubiczoll fein Silber im Cöllnischen Gewicht wägen, so fände man

1 Rheinl. Cub. Zoll Silber
wiegt 11,091 mahl 281 Gran Troy
also 3116,571 Gran Troy,

das sind $\frac{20}{19} \cdot 3116{,}571 = 3280{,}6$ Gran Cöllnisch. Weiter giebt die Regel Detri, und die Vergleichungstafel der Fußmaasse aus dem 252 §. der Rechenkunst folgenden Ansatz.

1 Rheinl. C. Z. — 3280,6 Gr. Cölln. — 1 Hamb. C. Z?

$1391{,}3^3$ 9261 1270^3

23^3 32806 21^3

196836
65612
295254

30381636,6 | Fac. 2497 Gran Cölln.
12167) $\times 2\frac{1}{2}$

$1248\frac{1}{2}$
4994

also $2\frac{1}{2}$ Hamb. Cub. Z. Silber wägen 6242 Gran Cöllnisch, oder 13 Unzen 2 Gran Cöllnisch.

Der II. Abschnitt.

Die ersten Grundlehren vom Gleichgewicht auf feste Körper wirkender Kräfte.

22 §.

Nicht alle Massen sind aus ihren kleinsten Bestandtheilen so zusammengesetzt, wie etwa ein Haufen Sand aus seinen einzelnen Körnern bestehet, die blos an einander liegen: es giebt solche, deren Bestandtheile mehr oder weniger fest unter einander verbunden sind; und das hat die Eintheilung der Massen in feste, weiche, biegsame und flüssige veranlasset. Ein Stück Metall, ein Stück Holz von mässiger Grösse, das etwa auf einem Tisch liegt, kann man mit dem Finger fortschieben, wenn gleich der Finger nur gegen einige wenige Bestandtheile der Masse drückt. Alle Theile des ganzen Körpers kommen in Bewegung, wenn gleich nur einige davon unmittelbar dem Druck ausgesetzt sind, und alle Theile behalten nach wie vor ihre Lage und Verbindung unter einander. Dies wird es erläutern, warum hier eine Masse so lange eine **feste Masse** heißt, als die Verbindung und Lage ihrer Bestandtheile gegen einander nicht verändert wird, wenn gleich nur auf einige dieser Bestandtheile Kräfte wirken, oder wohl gar nur **Eins** davon dem Druck einer oder mehrerer Kräfte ausgesetzt ist. Flüssige Massen werden allererst im folgenden betrachtet werden.

23 §.

Biegsame Massen sind alle diejenigen sonst festen Massen, deren Figur man verändern, verlängern, verkürzen kann, ohne daß der Zusammenhang ihrer Theile dadurch aufgehoben wird. Eine Masse von dieser Art heißt **elastisch**, wenn dieselbe einer jeden Kraft, die ihre Figur zu ändern strebt, sich nicht allein widersetzt, sondern auch ihre vorige Figur völlig oder zum Theil wieder annimmt, wenn diese Kraft wegfällt, oder der Widerstand der Masse sie überwinden kann. Die Masse heißt **vollkommen** oder **unvollkommen** elastisch, nachdem sie ihre Figur entweder völlig oder nur zum Theil wieder annimmt. Jeden gebogenen, gedehnten oder zusammengedrückten Körper, dessen Masse die eben beschriebene Eigenschaft hat, schreibt man eine Kraft zu, seine Figur wieder herzustellen, und nennt sie die **Elasticität**, die **Federkraft** oder **Schnellkraft** des Körpers. Die meisten natürlichen Körper sind elastisch, der eine mehr, der andre weniger: und ob es gleich, soviel man weiß, keine vollkommen elastische Massen in der Natur giebt, so kommt doch die Federkraft einiger auch sonst nicht unbekannter Massen, des gehärteten Stahls, des Glases, des Elffenbeins, u. a. m. der vollkommenen sehr nahe.

Vermöge der Erfahrung wird die Federkraft eines elastischen Körpers desto grösser, je mehr seine Theile gedehnt, zusammengedrückt, oder sonst in ihrer Lage gegen einander verändert werden. Demnach kann nicht jede Kraft in der Figur eines elastischen Körpers einerley Veränderung zuwege bringen: wenn nemlich die Theile so weit gedehnt oder zusammengedrückt sind, bis der elastische Körper der dehnenden oder zusam-

men-

mendrückenden Kraft einen eben so starken Druck entgegen setzt, so bleibt alles in Ruhe.

24 §.

Das Gewicht einer Masse von bestimmter Grösse ist die Summe der Gewichte aller ihrer Bestandtheile: wird die Masse durch etwas unterstützt, oder sonst gehalten, daß sie nicht fallen kann; so preßt ihr ganzes Gewicht gegen diesen Widerstand. Wenn die schwere Masse P an einem Faden AB ruhig hängt, der bey A 1 F.
an einem andern unbeweglichen Körper befestiget ist; so trägt das Theilchen A des Körpers AC nicht allein das ganze Gewicht P, sondern zugleich das Gewicht des Fadens AB. Wenn der Faden selbst kein Gewicht hätte, so trüge A allein das Gewicht P, was auch der Faden AB für eine Länge hätte. Würde das Ende A des Fadens von jemand mit der Hand gehalten, so müßte die Hand so stark aufwärts ziehen, als das Gewicht abwärts ziehet, wenn alles in Ruhe bleiben sollte.

Bey diesen Schlüssen kommt es auf die Dicke des Fadens nicht an, und man kann sich denselben als eine grade vollkommen biegsame Linie ohne Schwere vorstellen. Alsdenn wird nicht allein der höchste Punct A des Fadens, sondern jeder andre Punct D von dem ganzen Gewicht P abwärts, und zugleich von der Hand eben so stark aufwärts gezogen.

25 §.

Wenn die Hand oder sonst etwas anders den Faden nicht mehr hält, oder der Faden zerreißt, so fällt das Gewicht P augenblicklich herab. Die kleinsten Bestandtheile der schweren Masse, die man sich als schwere physische Puncte vorstellen kann, sinken insgesammt in graden Linien herab, die unter einander und mit der graden Linie AB, nach welcher vorhin der Faden gedehnt war, parallel sind. Ein Punct wie *a*, der vor dem Falle in der verlängerten Linie AB war, bleibt im Heruntersinken in derselben graden Linie: und der Weg, welchen jeder andre Punct *b* nimmt, ist eine grade mit AB parallele Linie.

Ohne Zweifel wird jedes Theilchen nach eben der Richtung von demjenigen Theil des ganzen Gewichts, der auf dasselbe wirkt, abwärts gepreßt, nach der es fällt, wenn nichts die Bewegung hemmet. Eben darum heißt sie die **Richtung der Schwere**, weil man sich vorstellen muß, daß die Kraft der Schwere nach dieser Richtung auf jedes körperliche Theilchen wirkt. Eben diese Richtung der Schwere ist auf der Erde, so weit sie uns eine ebene Fläche zu seyn scheint, senkrecht: auch ist sie auf der Fläche eines stillstehenden Wassers senkrecht.

26 §.

Jede mit der Richtung der Schwere parallele Linie heißt eine **verticale, lothrechte** oder **bleyrechte** Linie: die letzten Nahmen führt sie daher, weil ein Loth, das an einem Faden hängt, diese Linie zeigt, den ersten Nahmen aber, weil, wenn der Mensch seinen Körper grade trägt, die grade Linie vom Scheitel mitten durch den Leib zwischen beyden Füssen mit denselben parallel herab gelassen, auch mit der Richtung der Schwere parallel ist.

Jede ebene, auf welche die Richtung der Schwere senkrecht ist, heißt eine **horizontale** oder **wagrechte** Ebene, und jede grade Linie, welche von der Richtung der Schwere senkrecht geschnitten wird, heißt eine **horizontale** oder **wagrechte** Linie. Demnach ist jede wagrechte Ebene, und jede wagrechte Linie, mit

mit der Ebene der Erde, und mit der Fläche eines stillstehenden Wassers parallel.

Wenn man durch eine verticale Linie eine Ebene legt, so heißt auch diese eine verticale Ebene, und aus dem 286 §. Geom. folgt, daß eine verticale und horizontale Ebene auf einander senkrecht stehen.

27 §.

Es sey AB ein grader unbiegsamer Stab, der auf einem unbeweglichen Körper AC bey A vertical stehet, und oben auf ihm sey bey B ein Gewicht P so befestiget, daß es nicht herabfallen kann. Wenn nun der Stab selbst kein Gewicht hat, so leidet die Stelle A den ganzen Druck vom Gewicht P; und wenn statt dessen jemand mit der Hand bey A den Stab unterstützte, so müste die Hand so stark aufwärts drücken, als das Gewicht P abwärts drückt. Auch bey diesen Schlüssen kommt die Dicke des Stabes nicht in Betrachtung, und man kann sich denselben als eine grade unbiegsame Linie ohne Schwere vorstellen. Jeder Punct D dieser graden Linie würde nun von dem ganzen Gewicht P nach unten, von der Hand aber nach der grade entgegen gesetzten Richtung aufwärts gedrückt. 2 Fig.

28 §.

Ob es gleich, soviel wir wissen, in der Natur keine Körper ohne Schwere giebt, so muß man sich doch bey den ersten Untersuchungen darüber, was die Wirkung der Kräfte auf feste und flüssige Massen für einen Erfolg hat, **Massen ohne Schwere** vorstellen. Die Absicht ist nur zu untersuchen, was erfolgen würde, wenn auf Massen ohne Schwere, an diesen oder jenen angenommenen Stellen, nach diesen oder jenen Richtungen, Kräfte wirkten. Wenn also im folgenden von festen, biegsamen oder unbiegsamen Linien, von festen Ebenen, von festen Körpern die Rede seyn wird, so sind allemahl feste Linien, feste Ebenen oder Körper ohne Schwere zu verstehen, so lange bis ausdrücklich das Gegentheil angenommen wird.

29 §.

Druck oder **Zug** sind Wörter, die keine wesentlich verschiedene Wirkungen der Kräfte bezeichnen, sondern nur eine Verschiedenheit der Richtung, nach welcher sich die Wirkung einer Kraft äussert, welches durch die im 24 und 27 §. angestellten Betrachtungen erläutert wird. Zwey oder mehr Kräfte, die auf eine Masse durch drücken oder ziehen unter solchen Umständen wirken, daß keine Bewegung erfolgen kann, vielmehr alles in Ruhe bleibt, sind im **Gleichgewicht**, und die Wissenschaft von den Gesetzen, nach welchen das Gleichgewicht erfolgen muß, heißt überhaupt die **Statik**. Im besondern Verstande bezeichnet dieser Nahme die Wissenschaft von den Gesetzen, nach welchen das Gleichgewicht erfolgen muß, wenn zwey oder mehr Kräfte, soviel man will, auf eine feste Masse wirken.

30 §.

3 Fig. Wenn zweene Puncte A und B einer hinlänglich festen unbiegsamen graden Linie AB nach grade entgegengesetzten Richtungen AB, BA, oder auch A*a*, B*b*, deren Lage mit der Lage der graden Linie AB einerley ist, von gleichen Kräften gedrückt werden; so sind die Kräfte im Gleichgewicht. Wäre die grade Linie zwar feste, aber doch dabey biegsam; so würden gleiche nach den von einander weggekehrten Richtungen A*a*, B*b*, drückende oder ziehende Kräfte zwar im Gleichgewicht seyn: wenn aber die Kräfte nach den

Richtun-

Richtungen AB, BA gegen einander drückten, so könnte kein Gleichgewicht erfolgen.

Es sey CDEF eine feste unbiegsame Ebene, worin die Puncte A und B liegen. Wenn diese Puncte eben so, wie vorhin, nach grade entgegengesetzten mit der graden Linie AB zusammen fallenden Richtungen gedrückt oder gezogen werden; so entstehet wiederum ein Gleichgewicht. Wäre die Ebene biegsam, wie etwa ein Bladt Papier, aber doch hinlänglich feste; so würde nur alsdenn das Gleichgewicht bestehen können, wenn die Kräfte nach den von einander weggekehrten Richtungen A*a*, B*b*, drückten.

Stellet man sich einen festen unbiegsamen geometrischen Körper vor, unter welcher Figur man will, und nimmt an, daß A und B ein Paar Puncte dieses Körpers sind, die von zwoen gleichen Kräften nach entgegen gesetzten in der graden Linie AB liegenden Richtungen gedrückt werden, so entstehet wiederum ein Gleichgewicht.

Diese drey Sätze lassen sich kürzer in den folgenden allgemeinen Satz zusammen fassen. **Wenn an zweenen Puncten einer festen Masse gleiche und entgegengesetzte Kräfte angebracht sind, deren Richtungen mit der graden Linie durch beyde Puncte zusammen fallen; so bleiben beide im Gleichgewicht.**

Auch umgekehrt: **Kräfte, die an zweenen Puncten einer festen Masse nach entgegen gesetzten mit der graden Linie zwischen beyden Puncten zusammenfallenden Richtungen einander im Gleichgewicht erhalten, sind gleich groß.**

31 §.

Diese Sätze sind allemahl richtig, die Entfernung beyder Puncte von einander sey welche sie wolle: demnach gelten sie noch, wenn beyde Puncte in einen einzigen zusammen fallen. Alsdenn können die Richtungen jede Lage haben, wenn sie nur einander grade entgegen gesetzt sind. Das giebt folgende zwey besondre Sätze:

Wenn zwo gleiche Kräfte an einem Punct nach grade entgegengesetzten Richtungen angebracht sind; so sind sie im Gleichgewicht.

Auch umgekehrt: **Zwo Kräfte, die nach entgegen gesetzten Richtungen an einerley Punct angebracht einander im Gleichgewicht halten, sind gleich groß.**

Ungleiche Kräfte aber, die auf eben die Art, wie der 30 §. annimmt, an zweenen Puncten einer festen Masse, oder an einem einzigen Punct nach entgegen gesetzten Richtungen wirken, sind nicht im Gleichgewicht: es erfolgt vielmehr eine Bewegung nach derjenigen Richtung, nach welcher die grössere Kraft drückt oder zieht, oder **die grössere Kraft überwiegt die kleinere.**

32 §.

4 Fig. Eine Kreisrunde Scheibe BDFG, die so unterstützt ist, daß sie sich um ihren Mittelpunct zwar frey drehen sonst aber nicht weichen kann, heißt eine **Rolle**: hier wird sie anfangs so betrachtet, als wenn sie selbst kein Gewicht hätte.

Ein völlig biegsamer Faden ohne Schwere sey bey A an einem unbeweglichen Körper, einem Nagel oder Hacken befestiget; der Faden sey über eine Rolle geführt, in deren Ebene A liegt, und die so unter-

stützt

stützt ist, daß sie sich um ihren Mittelpunct zwar frey drehen, sonst aber nach keiner Seite weichen kann: wenn nun jemand mit der Hand bey E den Faden nach einer willkührlichen Richtung zieht, die jedoch in der Ebene der Rolle liegt, also den Faden in die Lage ABDE dehnt; so berühren die gradlinichten Theile AB, DE den Umfang der Rolle in B und D. Ferner verhindert der Nagel A, daß die Rolle nicht um ihren Mittelpunct umlaufen kann, und der Nagel thut eben das, was eine Hand thun würde, die bey A so stark nach der Richtung BA zöge, als die Hand bey E nach der Richtung DE zieht.

Zwo gleiche Kräfte, wenn sie die Rolle auf entgegen gesetzte Art zu drehen streben, und ihre Richtungen in der Ebene der Rolle den Umfang derselben berühren, erhalten einander im Gleichgewicht.

Zwo Kräfte, die an der Rolle so wie vorhin angebracht einander im Gleichgewicht halten, sind gleich groß.

Aber zwo ungleiche Kräfte an der Rolle eben so angebracht erhalten einander nicht im Gleichgewicht.

33 §.

Wenn bey E an dem Faden ABDE ein Gewicht P hängt, und der Faden bey A befestiget ist, so ist zwar die ursprüngliche Richtung DE, nach welcher das Gewicht den Faden zieht, vertical: allein der Punct A wird nach der Richtung AB eben so stark gezogen, als ihn das Gewicht P lothrecht herab ziehen würde, wenn es an dem Faden frey, ohne über die Rolle geführt zu seyn, herab hienge. Demnach kann man durch Rollen zuwege bringen, daß ein Gewicht nach jeder verlangten Richtung eben so stark zieht, als 5 Fig.

es nach seiner ursprünglichen lothrechten Richtung ziehen würde: und das wird ein Hülfsmittel, vermöge dessen man jede bewegende Kraft mit einem Gewicht vergleichen kann. Es werde nemlich der Punct A nach der Richtung AQ von einer Kraft V gedruckt oder gezogen, so mache man sich die Vorstellung, daß nach der entgegengesetzten Richtung AB ein Faden gespannt, über die Rolle BDFG gelegt, und an demselben ein Gewicht P befestiget sey, das mit der Kraft V im Gleichgewicht ist: alsdenn ist die Kraft V dem Gewicht P gleich. Das will sagen, die Kraft V ziehet den Punct A eben so stark nach der Richtung AQ, als das Gewicht P ihn vertical herab ziehen würde.

34 §.

6Fig. Statt der Rolle stelle man sich eine feste Ebene MN von unbestimmter Gestalt und Grösse und ohne Schwere vor, die in irgend einem ihrer Puncte C so unterstützt ist, daß sie sich um denselben zwar frey drehen, sonst aber nach keiner Seite weichen kann, die Lage dieser Ebene sey übrigens vertical, oder jede andre, welche sie wolle. Auf einen Punct F in dieser Ebene drücke eine Kraft P nach der Richtung FD, auf einen andern Punct G derselben Ebene drücke eine andre Kraft Q nach der Richtung GE, so aber, daß beyde Richtungen AD, BE in der Ebene MN liegen: so wird jede dieser Kräfte die Ebene um C zu drehen streben. Wofern alsdenn nicht allein beyde Kräfte P und Q, sondern auch überdem die Entfernungen CF, CG, gleich groß, und die Richtungslinien FD, FE, auf CF, CG, senkrecht sind; so erhalten beyde Kräfte einander im Gleichgewicht. Wenn nemlich mit dem Halbmesser CF oder CG aus C ein Kreis beschrieben wird, so ist alles in dem Zustand, wie bey der Rolle

im

im 32 §., die Gestalt und Grösse kann darin nichts ändern, weil vorausgesetzt wird, daß die Ebene zwar hinlänglich feste, aber nicht schwer sey.

35 §.

Wenn die feste Ebene noch eben so wie vorhin in *C* unterstützt ist, alsdenn aber auf zweene Puncte *A* und *B* dieser Ebene gleiche Kräfte nach solchen Richtungen *AD*, *BE*, drücken, die von *C* gleichweit entfernt sind, so erhalten beyde Kräfte einander ebenfalls im Gleichgewicht.

Beweis. Es sey CF auf AD und CG auf BE senkrecht, so ist vermöge der Voraussetzung CF = CG. Man nehme an, daß auf F nach den entgegen gesetzten Richtungen F*f*, Fφ, und auf G nach den entgegen gesetzten Richtungen G*g*, Gγ, gleiche und eben so grosse Kräfte wirken, als an A und B nach A*a* und B*b* angebracht sind: alsdenn würde aus der vereinigten Wirkung aller sechs Kräfte noch eben das erfolgen, was aus der vereinigten Wirkung der auf A und B wirkenden Kräfte allein erfolgt: denn beyde sowohl an F als auch an G angebrachte Kräfte sind im Gleichgewicht. (31 §.) Ueberdem sind A*a* und F*f*, so wie B*b* und G*g* im Gleichgewicht: (30 §.) also erfolgt aus der vereinigten Wirkung aller sechs Kräfte eben das, was erfolgen würde, wenn Fφ und Gγ allein da wären. Weil nun Fφ und Gγ einander im Gleichgewicht erhalten, (34 §.) so sind auch A*a* und B*b* im Gleichgewicht.

36 §.

In dem Fall, wenn AD, BE, parallel sind, wird FCG eine grade Linie, wie in der 7 Fig. Ist 7 Fig.
überdem die Ebene dieser Parallellinien vertical, so

kann

kann man sich in A und B ein Paar schwere Puncte vorstellen, deren Gewicht die Puncte A und B vertical unterwärts drückt, da dann FG eine Horizontallinie durch C ist. **Wenn alsdenn diese Gewichte, und überdem die Entfernungen** *CF*, *CG*, **gleich groß sind, so bleibt alles im Gleichgewicht.** Uebrigens ist es dabey gleichgültig, wo man die Stelle der beyden gleich grossen schweren Puncte in den Richtungslinien AD, BE annehmen will: deswegen kann man diese Stellen in F und G annehmen, wo die verticalen Richtungslinien die wagrechte Linie FG schneiden. Nun kann man auch FG allein als eine feste unbiegsame wagrecht liegende grade Linie betrachten, die an ihren Endpuncten mit gleichgrossen Gewichten beschwert, und in der Mitte unterstützt ist, da dann ebenfalls für sich klar ist, daß beyde Gewichte einander im Gleichgewicht erhalten.

37 §.

6 Fig. Können vielleicht zwey ungleiche Kräfte, welche die Puncte A und B nach parallelen in der Ebene ACB liegenden Richtungen drücken, im Gleichgewicht bleiben, wenn der Punct C unterstützt ist; so müssen die Entfernungen CF, CG, ebenfalls ungleich seyn: denn **daß ungleiche Kräfte in gleichen Entfernungen einander nicht erhalten können**, ist daher begreiflich, weil schon ein Theil der grössern Kraft mit der kleinern im Gleichgewicht wäre, also nichts hindern würde, daß nicht der Ueberschuß der grössern Kraft über die kleinere die Ebene um C drehete.

7 Fig. Bey den Untersuchungen darüber, unter welchen Umständen zwo dergleichen nach parallelen Richtungen AD, BE wirkende Kräfte, die eine feste Ebene, worin die Richtungen dieser Kräfte liegen, um einen

Punct

Punct C zu drehen streben, einander im Gleichgewicht erhalten, kann man sich in jeder von den Richtungslinien, wo man will, einen schweren Punct vorstellen: mithin kann man wiederum F und G für die Stellen dieser Gewichte annehmen, und solchergestalt die grade Linie FG allein betrachten, da dann alles auf die einfachsten Vorstellungen zurück geführt wird; wenn man annimmt, daß in F und G ein Paar Gewichte hängen, welche die feste unbiegsame Linie um den unterstützten Punct C zu drehen streben.

38 §.

Das was den Punct C hält, daß die Ebene nicht weichen kann, wenn beyde auf F und G nach parallelen Richtungen drückende Kräfte im Gleichgewicht sind, leidet von der vereinigten Gewalt beyder Gewichte einen Druck, welcher so groß ist, als die Summe beyder Kräfte. Sind diese ein Paar von F und G herab hängende Gewichte, so ist offenbar, daß C die Summe der Gewichte trage, man mag sich die feste grade Linie FG allein, oder die ganze Ebene durch FG und die parallelen Richtungen der Kräfte vorstellen. Wenn also auf C eine Kraft $R = P + Q$ nach einer Richtung CH drückt, die mit den vorigen parallel, ihnen aber entgegen gesetzt ist, so erhalten die drey Kräfte P, Q, R, einander im Gleichgewicht. 7 Fig.

Wenn P und Q von den Puncten F und G vertical herab hängende Gewichte sind; so könnte bey C ein Faden befestiget, oben irgendwo über eine Rolle L geführt, und an demselben das dritte Gewicht R = P + Q angebracht seyn: auf diese Art würden alle drey Gewichte einander erhalten, wofern, wie vorausgesetzt wird, zwischen P und Q ein Gleichgewicht ist.

Der

Der III. Abschnitt.

Vom Gleichgewicht der Kräfte am gradlinichten Hebel.

39 §.

Eine grade unbiegsame Linie, die man sich ohne Schwere vorstellt, und bey welcher an zweenen Puncten ein Paar Kräfte so angebracht sind, daß sie sich um einen gewissen unterstützten Punct drehen müste, wenn die Kräfte nicht im Gleichgewicht wären, heißt ein **gradlinichter mathematischer Hebel**, der unterstützte Punct sein **Ruhepunct**, und was den Hebel in diesem Punct hält, die **Unterlage** (hypomochlion).

13F. Wenn beyde Kräfte am Hebel nach übereinstimmigen Richtungen ziehen, wie die beyden Gewichte P und Q am Hebel BC in der 13 Figur, so muß der Ruhepunct A zwischen den Puncten B und C liegen, an welchen die Kräfte angebracht sind, und alsdenn heißt er gewöhnlich ein **Hebel der ersten Art**, besser: **ein doppelarmiger Hebel**, (vectis heterodromus). Die Entfernungen AB, AC, können die **Hebelsarme** heissen, und beym Hebel der ersten Art kommen diese Arme in eine entgegengesetzte Bewegung, wenn das Gleichgewicht gehoben wird; daher hat der griechische Nahme seinen Ursprung.

8. 9. Fig. Wofern dagegen die Kräfte nach entgegen gesetzten Richtungen ziehen, wie die Gewichte P und Q in der 8 Figur, woselbst der an B befestigte Faden aufwärts über eine Rolle geführt ist, woran auf der an-

dern

dern Seite P herab hängt: oder wie in der 9 Figur, woselbst der an C befestigte Faden, woran Q hängt, oben über eine Rolle geht; so kann der Ruhepunct A nicht zwischen den Puncten B und C liegen, wo die Kräfte angebracht sind, weil die Kräfte P und Q sonst nie im Gleichgewicht seyn könnten. Stellt man sich nun AB und AC auch als zwey Hebelsarme vor, so würden diese nach gehobenem Gleichgewicht in eine übereinstimmige Bewegung kommen, und es ist nun **ein Hebel der andern Art**, (vectis homodromus). Weil beyde Kräfte wirklich nur an einem Arm so angebracht sind, daß sie ihn auf entgegengesetzte Art zu drehen streben; so kann dieser Hebel auch der **einarmige** heissen.

40 §.

Bey Aufsuchung der Gesetze des Gleichgewichts für Kräfte am Hebel, deren Richtungen parallel und auf dem Hebel senkrecht sind, kann man allemahl den Hebel als horizontalliegend, und die Richtungen der Kräfte vertical annehmen, mithin die Sache so betrachten, als wäre der Hebel der ersten Art mit Gewichten beschwert, die nach ihrer natürlichen Richtung unterwärts ziehen: die Unterlage A trägt alsdenn allemahl die Summe der Gewichte P + Q. Dagegen stellt man sich beym Hebel der andern Art vor, daß eines von beyden Gewichten vermittelst eines über eine Rolle geführten Fadens vertical aufwärts ziehe. Beym Hebel der ersten Art genügt es zwar alsdenn, wenn man sich die Unterlage als etwas vorstellt, das den Hebel trägt und zu sinken verhindert; allein beym Hebel der andern Art könnte wohl das Gewicht aufwärts ziehen, was an dem Punct angebracht ist, welcher der Unterlage am nächsten liegt, wie Q in der

9 Figur:

9 Figur: alsdenn muß die Unterlage den Punct A hindern, daß er nicht steigen kann. Demnach ist es am besten, wenn man sich die Unterlage als etwas vorstellt, das den Punct A schlechthin zu weichen hindert, damit sich der Hebel zwar drehen, aber nach keiner Seite weichen kann.

Allemahl leidet die Unterlage A beym einarmigen Hebel einen Druck nach einer Richtung, die mit der Richtung desjenigen Gewichts Q übereinstimmt, welches der Unterlage am nächsten ist. Dies der Unterlage A nähere Gewicht Q ist im Zustande des Gleichgewichts grösser als das entferntere P, und **der Druck gegen die Unterlage ist der Differenz beyder Gewichte gleich.** Denn ein Gewicht R, das in A hienge, und mit den beyden Gewichten P, Q, im Gleichgewicht wäre, würde den Punct A eben so hindern, daß er nicht steigen könnte, wie es die Unterlage A hindert: alsdenn aber wäre $P+R=Q$, also $R=Q-P$. Eben so stark muß also der Druck gegen A seyn, wenn R weggenommen wird.

41 §.

10 F. **Wofern ein Paar Gewichte *P* und *Q* am Hebel der ersten Art *BAD* im Gleichgewicht sind, wenn sie in den Entfernungen *AB*, *AD*, vom Ruhepunct hängen; so kann kein Gleichgewicht bleiben, wenn man statt *P* in *B* ein Gewicht *R* aufhängt, das grösser oder kleiner als *P* ist.**

Beweis. Man nehme $AC=AB$, und hänge ausser den schon in B und D hängenden Gewichten, noch R in B, und ein viertes Gewicht $K=R$ in C auf: so ist K mit R im Gleichgewicht, (36 §.) und der Hebel ruhet, weil

weil auch P und Q im Gleichgewicht sind. Wäre überdem R mit Q im Gleichgewicht, so könnte man R und Q wegnehmen, und P müste mit K im Gleichgewicht bleiben, welches nicht seyn kann, weil R in$=$P, also auch K in$=$P angenommen ist. (37 §.)

42 §.

Gleiche Gewichte in ungleichen Entfernungen vom Ruhepunct am Hebel der ersten Art angebracht, sind nicht im Gleichgewicht, sondern das vom Ruhepunct weiter entfernte überwiegt das andre, welches dem Ruhepunct näher ist.

Beweis. Es sey der Hebel BC bey E unterstützt, und $BE > EC$, auch sey das Gewicht $P = Q$. 11F. Man halbire BC bey A, und lasse an A eine Kraft $R = P + Q = 2P$ aufwärts, zugleich aber an eben dem Punct eine Kraft $S = 2P$ unterwärts ziehen: so ist R mit P und Q im Gleichgewicht. (38 §.) Demnach wird S den Hebel um E drehen, weil nichts da ist, was sich dieser Kraft widersetzt: mithin muß A sinken, und P überwiegt Q.

Wäre nicht allein $BE > EC$, sondern auch $P > Q$, so müßte noch um so mehr P das Uebergewicht haben.

43 §.

Wenn die Gewichte *P* und Q in den Entfernungen *AB*, *AC*, am Hebel der ersten Art im Gleichgewicht sind; so kann kein Gleichgewicht bleiben, wenn das Gewicht *P* von der Stelle *B* weggerückt, und in einer Entfernung *AD* aufgehängt wird, die grösser oder kleiner als *AB* ist. 12F.

Beweis. Man lasse P und Q an ihren Stellen, nehme $A = AB$, und hänge in D und E die Gewichte R und S auf, welche beyde $= P$ angenommen sind; so ist P mit S im Gleichgewicht. Wäre überdem R mit Q im Gleichgewicht, so würde der Hebel ruhen. Es sollen aber auch P und Q im Gleichgewicht seyn: also könnte man P und Q wegnehmen, und es müßte R mit S im Gleichgewicht bleiben, welches nicht seyn kann, weil AB und AD, also auch AE und AD ungleich sind. (37 §.)

44 §.

Wird $AD > AB$ angenommen, so erhellet aus dem Beweise, daß ein Gewicht $R = P$ in D aufgehängt den Ausschlag giebt, wenn Q in C bleibt. Soll also R in D aufgehängt mit Q im Gleichgewicht seyn, so wird erfordert, daß $R < P$ sey. Nimmt man im Gegentheil $Ad < AB$ an; so würde Q den Ausschlag haben, wenn ein Gewicht $S = P$ in d gehängt würde. Soll demnach ein Gewicht S in d gehängt mit Q das Gleichgewicht halten, so muß $S > P$ seyn.

Wenn eben die Voraussetzung bleibt, daß P mit Q im Gleichgewicht ist, und ein ander Gewicht $R < P$ soll in D gehängt mit Q das Gleichgewicht halten, so muß $AD > AB$ seyn. Denn AD kann nicht $= AB$ seyn, vermöge des 41 §: auch kann nicht $AD < AB$ seyn, weil sonst $R > P$ genommen werden müßte. Soll dagegen ein Gewicht $S > P$ in d gehängt mit Q im Gleichgewicht bleiben; so muß $Ad < AB$ seyn. Denn es kann vermöge des 41 §. nicht $Ad = AB$ seyn, und wenn $Ad > AB$ genommen würde, so müßte $S < P$ seyn.

45 §.

Wenn ein Paar Gewichte in gegebenen Entfernungen vom Ruhepunct am Hebel der einen Art im Gleichgewicht sind; so sind eben die Gewichte in eben den Entfernungen auch am Hebel der andern Art im Gleichgewicht.

Beweis. Der Hebel BC sey in A so unterstützt, 13F. daß er nach keiner Seite weichen kann, und es sey AD = AC. Man nehme an, daß in B ein Gewicht P, in C ein Gewicht Q hängt, und daß überdem in D ein Gewicht R = Q lothrecht herab, zugleich aber ein andres eben so grosses Gewicht S lothrecht in die Höhe zieht. Wenn nun am Hebel der ersten Art BC die Gewichte P und Q im Gleichgewicht sind, so bleibt alles in Ruhe, weil auch R und S einander im Gleichgewicht halten. Ferner sind R und Q im Gleichgewicht, (36 §.) also auch P und S.

Umgekehrt, wenn am Hebel der andern Art BA die Gewichte P und S im Gleichgewicht sind, so bleibt alles in Ruhe, weil auch R und Q im Gleichgewicht sind. Ueberdem sind R und S im Gleichgewicht: also müssen auch P und Q im Gleichgewicht seyn.

46 §.

Wenn das eine Gewicht doppelt so groß als das andre, und die Entfernung des einfachen Gewichts vom Ruhepunct doppelt so groß ist, als die Entfernung des doppelten Gewichts; so sind beyde an jedem Hebel im Gleichgewicht.

Beweis. Wenn CA = CB ist, und an B das 14F. Gewicht P, an A das Gewicht $\Pi = P$ hängt, in C aber das Gewicht $Q = P + \Pi = 2P$ aufwärts zieht; so sind alle drey im Gleichgewicht. (38 §.) Wenn nun in A etwas angebracht wird, das diesen Punct zu weichen hindert, jedoch so, daß sich der Hebel noch um A drehen kann, so bedarf es zum Gleichgewicht des Gewichts Π nicht. Wird dasselbe weggenommen, so hindert die angebrachte Unterstützung, daß A nicht steigen kann, eben so, wie es vorhin das Gewicht Π hinderte. Demnach ist $Q = 2P$ mit P im Gleichgewicht, wenn $AB = 2AC$ ist: und weil dies Gesetz für den Hebel der andern Art gilt, so gilt es auch für den Hebel der ersten Art. (45 §.)

47 §.

Wenn überhaupt das eine Gewicht ein vielfaches des andern, und die Entfernung des grössern Gewichts vom Ruhepunct in der Entfernung des kleinern sovielmahl enthalten ist, als das kleinere Gewicht im grössern; so erhalten beyde einander im Gleichgewicht.

Beweis. Der Exponent des Verhältnisses beyder Gewichte ist vermöge der Voraussetzung eine ganze Zahl, und eben so groß ist der Exponent des Verhältnisses der Entfernungen in umgekehrter Ordnung. Man nehme an, der Satz sey für einen gewissen besondern Fall wahr, so folgt daraus, daß zwischen beyden Gewichten auch alsdenn das Gleichgewicht bleibe, wenn der Exponent dieser Verhältnisse um
15 F. Eins grösser ist. Es sey nemlich $Q = nP$, und $CB = n \cdot CA$, so ist $P + Q = (n+1)P$ und $AB = (n+1)AC$. Wenn nun in C eine Kraft $R = P + Q = (n+1)P$ aufwärts zieht, und P mit Q im Gleichgewicht ist, so bleibt alles in Ruhe, und das Gewicht Q hindert, daß A nicht steigen kann. Statt dessen sey in A ein andrer Widerstand angebracht, jedoch so,

daß der Hebel sich frey um A drehen kann, so kann man Q wegnehmen, und es bleibt noch alles im Gleichgewicht, der Exponent des Verhältnisses der Gewichte $\frac{R}{P} = n + 1$, und der Entfernungen $\frac{AB}{AC} = n + 1$ ist nun um Eins grösser als vorhin, und weil P und R an dem Hebel der andern Art in den Entfernungen AB, AC, im Gleichgewicht sind, so sind sie es in eben den Entfernungen auch am Hebel der ersten Art. (45 §.) Weil nun der angenommene Satz in dem Fall $n = 2$ wahr ist, (45 §.) so ist er noch wahr, für $n = 3$, also für $n = 4$, mithin auch für $n = 5$ u. s. f. für jede statt n angenommene ganze Zahl.

48 §.

Jede zwey Gewichte am Hebel, die sich gegen einander umgekehrt wie ihre Entfernungen vom Ruhepunct verhalten, sind im Gleichgewicht.

Beweis. Es sey AD = AE das gemeinschaftliche Maaß der beyden Entfernungen AB, AC, und 16F. $AB = mAD$, $AC = nAE$: ferner sey $P : Q = AC : AB = n : m$, also $mP = nQ$. In E hänge ein Gewicht $R = mP$, und in D ein Gewicht $S = nQ$, so ist P mit R, und Q mit S im Gleichgewicht, (47 §.) also bleibt alles in Ruhe. Aber R und S sind gleich groß, also ebenfalls im Gleichgewicht, (36 §.) demnach müssen auch P und Q einander im Gleichgewicht erhalten.

Wenn die Entfernungen AB, AC kein gemeines 17F. Maaß haben, und der Exponent des Verhältnisses $\frac{AC}{AB}$ zwischen den Gränzen $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$ enthalten ist;

ist; so ist des Verhältnisses $\frac{P}{Q}$ Exponent vermöge der Voraussetzung zwischen eben den Gränzen enthalten, weil $P : Q = AC : AB$ angenommen wird. Man nehme $AD = \frac{n}{m}AB$, und $AE = \frac{n+1}{m}AB$, so ist $AC > AD$, aber $AC < AE$, und C liegt zwischen D und E. An D hänge ein Gewicht $R = \frac{m}{n}P$ und an E ein Gewicht $S = \frac{m}{n+1}P$, so hält R oder auch statt dessen S mit P das Gleichgewicht. Es muß aber auch ein Gewicht geben, das in C aufgehängt mit P das Gleichgewicht hält: denn ein unbeweglicher Widerstand H an C so angebracht, daß C nicht steigen könnte, würde von C Druck leiden, und es muß sich ein Gewicht angeben lassen, das diesem Druck gleich ist. Wenn nun ein solches Gewicht $= K$ ist, so ist K in C aufgehängt mit P im Gleichgewicht. Alsdenn aber ist $K < R$ und zugleich $K > S$, weil $AC > AD$ und $AC < AE$ ist: (44 §.) mithin $K < \frac{m}{n}P$, und $K > \frac{m}{n+1}P$, folglich auch $P > \frac{n}{m}K$, und $P < \frac{n+1}{m}K$. Weil nun diese Sätze allemahl richtig sind, wie groß auch die Zahl m genommen wird, so ist $P : K = AC : AB$, (161 §. Geom.) mithin $P : Q = P : K$, und $Q = K$. Diesemnach ist Q einem Gewicht gleich, das in C aufgehangen mit P im Gleichgewicht ist, mithin ist Q selbst in C aufgehängt mit P im Gleichgewicht.

49 §.

Wenn das Verhältniß der Entfernungen zweyer am Hebel hängenden Gewichte vom Ruhe-

Ruhepunct nicht so groß ist, als das Verhältniß der Gewichte in umgekehrter Ordnung; so erhalten die Gewichte einander nicht im Gleichgewicht.

Beweis. Wenn P in B und Q in C hängt, so nehme man $Q : P = AB : AD$, so muß vermöge der Voraussetzung AD nicht eben so groß als AC seyn. In D hänge man ein Gewicht $R = \frac{AB}{AD} . P$ auf, so ist R mit P im Gleichgewicht, (48 §.) und $R = Q$, weil auch $Q = \frac{AB}{AD} . P$ ist: also sind Q und P nicht im Gleichgewicht. (43 §.) 18F.

50 §.

Zwey Gewichte, die am Hebel einander im Gleichgewicht erhalten, verhalten sich gegen einander umgekehrt, wie ihre Entfernungen vom Ruhepunct.

Beweis. Denn wäre das Verhältniß der Entfernungen dem Verhältniß der Gewichte in umgekehrter Ordnung ungleich, so wäre zwischen beyden kein Gleichgewicht. (49 §.)

Solche Gewichte P, Q, die am Hebel in B und C aufgehängt einander im Gleichgewicht erhalten, wenden ohne Zweifel gleiche Gewalt an, den Hebel nach entgegengesetzten Seiten um A zu drehen: und die Gewalt, womit sie den Hebel zu drehen streben, ist nur alsdenn gleich groß, wenn die Verhältnisse $P : Q = AC : AB$, einander gleich, oder welches einerley ist, wenn die Producte $P . AB$ und $Q . AC$ eines jeden Gewichts in seine Entfernung vom Ruhepunct gleich groß sind. Je grösser oder kleiner also das Product ist, welches gefunden wird, wenn man eine auf den Hebel nach senkrechter Richtung drückende Kraft mit ihrer Entfernung vom Ruhepunct multiplicirt, desto grösser oder kleiner ist die Gewalt, womit sie den Hebel zu drehen strebt.

51 §.

Das Product, welches gefunden wird, wenn man eine Kraft am Hebel mit ihrer Entfernung vom Ruhepunct multiplicirt, heißt das **Moment**, bey den practischen Schriftstellern auch die **Abwage** dieser Kraft. **Demnach sind ein Paar Kräfte am Hebel, deren Richtungslinien den Hebel senkrecht schneiden, nur alsdenn im Gleichgewicht, wenn ihre Momente gleich groß sind.** Ihre Entfernungen vom Ruhepunct sind mit der Länge der Hebelsarme einerley.

Das Gesetz des Gleichgewichts zweyer Gewichte am Hebel (48 §.) hat **Archimedes** schon bewiesen, (De aequiponderantibus Lib. I. Prop. VI. VII.) jedoch nicht so vollkommen überzeugend, als unter den neuern Schriftstellern diejenigen, welchen ich hier in der Hauptsache gefolgt bin. Dahin gehören *de la Hire* Traité de Mecanique, Paris 1695. Prop. I — IV. *Maclaurin* Account of Sir Isaac Newtons Philosophical discoveries im III. Capitel des VII. Buchs; **H. H. Kästners Programma:** vectis et compositionis virium theoria evidentius exposita, Lips. 1753. auch im II. Theil der **Mathem. Anfangsgründe** 27 — 35 §. der Statik.

52 §.

16F. Weil die Unterlage A beym Hebel der ersten Art, wenn die Gewichte P und Q an demselben einander im Gleichgewicht erhalten, eben so gedrückt wird, als

wenn

wenn an demselben unmittelbar ein Gewicht so groß als die Summe der Gewichte $P + Q$ hienge; (38 §.) so nennt man A den gemeinschaftlichen Schwerpunct, oder den Mittelpunct der Schwere beyder Gewichte. Allemahl, wenn auf zweene Puncte B und C einer graden unbiegsamen Linie BC ein Paar Kräfte P und Q nach Richtungen drücken, die auf BC senkrecht sind, so giebt es in BC einen Punct A, der, wenn er allein gehalten wird, soviel Druck leidet, als wenn darauf eine Kraft $= P + Q$ nach eben der Richtung drückte, und derselbe könnte in einem allgemeinern Sinn der Mittelpunct des Drucks heissen.

53 §.

Die Entfernung der Aufhängepuncte B und C beym gradlinichten Hebel, und die daran zu hängenden Gewichte P, Q, sind gegeben: man soll die Stelle der Unterlage A finden.

Aufl. I. Wenn beyde Gewichte nach einer Seite ziehen sollen, so muß die Stelle für die Unterlage zwischen beyden Aufhängepuncten genommen werden, und der Hebel gehört zur ersten Art. Würde nun in C ein Widerstand, in A aber eine aufwärts 12 F.
ziehende Kraft $= P + Q$ angebracht; so wäre dadurch der Hebel in den einarmigen verwandelt, und es bliebe noch alles im Gleichgewicht, da dann $CA\,(P + Q) = CB \,.\, P$ seyn muß. (51 §.) Demnach hat man $CA = \frac{CB \,.\, P}{P + Q}$, also auch $BA = \frac{Q}{P} CA$ (50 §.) $= \frac{CB \,.\, Q}{P + Q}$.

Aufl. II. Sollen die Gewichte nach entgegen gesetzten Richtungen ziehen; so muß die Unterlage ih-
8. 9. re Stelle ausserhalb der Aufhängepuncte, und zwar
Fig. am nächsten bey demjenigen haben, woran das größte Gewicht Q zieht. Es sey A die gesuchte Stelle der Unterlage, so leidet letztere im Zustande des Gleichgewichts einen Druck $= Q - P$, (40 §.) nach der Richtung des schwerern Gewichts, und wenn nach der Richtung des leichtern Gewichts in A eine Kraft $= Q - P$, in C aber ein Widerstand angebracht wird, so ist der Hebel in den doppelarmigen verwandelt, und man hat $BC \cdot P = AC \cdot (Q - P)$. Demnach ist $CA = \frac{BC \cdot P}{Q-P}$, und $BA = \frac{Q}{P} \cdot CA = \frac{BC \cdot Q}{Q-P}$.

54 §.

19 F. Die Entfernungen *AB*, *AC*, der Aufhängepuncte *B*, *C*, zweyer Gewichte *P*, *Q*, von einem bekannten Punct *A* der festen graden Linie *BC* sind gegeben: man soll die Entfernung ihres Schwerpuncts von eben dem Punct finden.

Aufl. Es sey G der Schwerpunct, so ist $BG = \frac{BC \cdot Q}{P+Q}$, (53 §.) und $BG = AG - AB$, $BC = AC - AB$, also $AG(P+Q) - AB \cdot (P+Q) = AC \cdot Q - AB \cdot Q$. Daraus folgt $AG(P+Q) - AB \cdot P = AC \cdot Q$, und man erhält $AG = \frac{AB \cdot P + AC \cdot Q}{P+Q}$.

55 §.

Wenn in A ein Widerstand angebracht ist, um welchen die Linie AC sich frey drehen kann, so leidet derselbe gar keine Gewalt, wenn an G eine Kraft =

P+Q

$P + Q$ aufwärts zieht: alle drey Kräfte sind für sich schon im Gleichgewicht. Wird überdem auf der andern Seite von A irgendwo in D ein Gewicht $R = \frac{AG \cdot (P + Q)}{AD}$ gehängt, und ausser der in G aufwärts ziehenden Kraft $P + Q$ in G noch ein Gewicht $S = P + Q$ aufgehängt, so bleibt alles im Gleichgewicht, und die auf G drückenden Kräfte heben einander auf: also muß das an D hängende Gewicht R mit den in B und C hängenden ebenfalls das Gleichgewicht halten, und der Widerstand A leidet einen Druck $= P + Q + R$.

So erhellet, daß hier die Producte $AB \cdot P$, $AC \cdot Q$, in eben dem Verstande die Momente der Kräfte P, Q, für den Ruhepunct A heissen können, wie dies Wort im 51 §. ist gebraucht worden. Die Summe beyder Momente ist so groß als das Moment eines im Schwerpunct hängenden Gewichts wäre, wenn es der Summe der beyden einzelnen Gewichte gleich, angenommen würde.

56 §.

Man stelle sich vor, daß der Punct B nach und nach näher nach A rücke, mithin AB abnehme, so wird auch $AC = \frac{AB \cdot P + AC \cdot Q}{P + Q}$ kleiner, und wenn B in A fällt, so hat man AC oder $BC = \frac{AC \cdot Q}{P + Q}$ wie im 53 §. Rückt A noch weiter von C weg, so erhält AB eine Lage, die der vorigen entgegengesetzt ist, wie es die 20 Fig. vorstellt, und AB wird negativ, wenn AC als positiv in Rechnung gebracht wird, mithin ist nun $AG = \frac{AC \cdot Q - AB \cdot Q}{P + Q}$. (39 §. G.)

Je

20F. Je weiter nun B von A und zugleich von C wegrückt, desto kleiner wird AG, und AG verschwindet, das heißt, G fällt in A, oder A ist selbst der Schwerpunct beyder Gewichte, wenn $AB . P = AC . Q$ ist. (51 §.) Rückt B noch weiter von A weg, so wird $AB . P > AC . Q$, und $AC . Q - AB . P$ wird negativ, (39 §. Geom.) also auch $AG = \frac{AB . P - AC . Q}{P + Q}$, und dieser Ausdruck läßt sich auch so verändern $AG = - \frac{AC . Q - AB . P}{P + Q}$. Das will sagen, die Linie AG hat nun eine Lage, die der vorigen entgegen gesetzt ist, und G liegt nun auf der Seite von A, wo B liegt. Diesemnach sind die Momente solcher Kräfte, die eine grade unbiegsame Linie auf entgegen gesetzte Art um einen unterstützten Punct zu drehen streben, einander allemahl entgegen gesetzt, und die statische Summe beyder Momente, in dem allgemeinsten Sinn des Worts Summe, ist mit ihrer arithmetischen Differenz einerley.

57 §.

21F. Wenn eine wagrecht liegende grade Linie BF in mehr als zweenen Puncten mit Gewichten beschwert ist, oder auch auf mehr als zweene Puncte B, C, D, E, F der graden Linie BF in jeder andern Lage nach parallelen darauf senkrechten Richtungen andre mechanische Kräfte, P, Q, R, S, V, drücken; so giebt es allemahl in dieser graden Linie einen Punct G, der die Eigenschaft hat, daß alles im Gleichgewicht bleibt, wenn an demselben eine Kraft angebracht wird, die so groß als die Summe aller übrigen an BF vertheilten Kräfte, und deren Richtung den Richtungen der übrigen entgegen gesetzt ist. Er kann alsdenn für alle diese Kräfte der Mittelpunct des Drucks, und wenn es Gewichte sind, ihr gemeinschaftlicher Schwerpunct heissen.

Einen solchen Punct K giebt es nemlich für zwey Kräfte P, Q, die in B und C nach parallelen und auf BC oder BF senkrechten Richtungen drücken. Wenn alsdenn die dritte Kraft R in D hinzukommt, so kann man überdem annehmen, daß in K sowohl nach Kk als auch nach Kp eine Kraft $= P + Q$ drücke, weil beyde einander aufheben, und dies in der Wirkung der übrigen dreyen Kräfte nichts ändert. Alsdenn aber heben auch die drey Kräfte P, Q, und die nach Kk drückende Kraft $= P + Q$ einander auf: demnach wirken alle drey Kräfte zusammen eben so, als wenn ausser der Kraft R in D allein auf K eine Kraft $= P + Q$ nach der Richtung Kp drückte. Für diese beyden Kräfte giebt es einen Mittelpunct des Drucks in L, und das ist zugleich der Mittelpunct des Drucks für die drey Kräfte P, Q, R.

Man übersiehet leicht, daß diese Schlüsse von jeder Anzahl solcher an BF angebrachten Kräfte auf die nächstfolgende um Eins grössere Anzahl gelten. Ist L ein Mittelpunct des Drucks für die Kräfte P, Q, R, und es kommt noch in E die Kraft S hinzu, so kann man annehmen, daß in L sowohl nach Ll als auch nach Lλ eine Kraft $= P + Q + R$ drücke: alsdenn sind P, Q, R, mit der Kraft nach Ll im Gleichgewicht, für die Kraft nach Lλ aber und die in E hinzu gekommene Kraft giebt es wieder einen Mittelpunct des Drucks, der zugleich für die Kräfte P, Q, R, S, der Mittelpunct des Drucks ist. Diesemnach

giebt

giebt es einen solchen Punct auch für fünf, sechs und mehr solcher Kräfte, wie groß ihre Anzahl seyn mag.

Eine im Mittelpunct des Drucks mit den übrigen parallel angebrachte Kraft, die denselben, wenn er durch einen Widerstand gehalten wird, eben so drückt, als er von allen übrigen an der graden Linie vertheilten Kräften zusammen gedrückt wird, heißt die mittlere Kraft, und ihre Richtung die mittlere Richtung.

58 §.

12F. **Die Stellen B, C, D, E, F, am Hebel, woran die Gewichte P, Q, R, u. s. w. hangen, sind durch ihre Entfernungen AB, AC, u. s. w. von einem bekannten Punct A gegeben, und die Gewichte ebenfalls: man soll die Stelle des Schwerpuncts finden.**

Aufl. Man suche die Momente aller Gewichte für den Punct A, und dividire die Summe dieser Momente durch die Summe aller Gewichte; so findet man die Entfernung des Schwerpuncts von eben dem Punct A. Wenn einige dieser Momente den übrigen entgegen gesetzt sind, so bringt man sie als negative Grössen in Rechnung.

Beweis. Wofern diese Regel für eine gewisse Anzahl von Gewichten richtig ist, so gilt sie auch für die nächstfolgende um Eins grössere Anzahl. Es sey K der Schwerpunct für zwey oder mehr Gewichte, deren Summe $= \Sigma$ ist, und es komme in D das Gewicht R hinzu. Wenn alsdenn L der Gewichte R und Σ Schwerpunct ist, so hat man $AL = \frac{AK \cdot \Sigma + AD \cdot R}{\Sigma + R}$. (54 §.) Wofern demnach $AK \cdot \Sigma$ so groß ist, als die Summe der Momente

aller

aller Kräfte, welche zusammen die Summe Σ ausmachen, so ist $AK \cdot \Sigma + AD \cdot R$ die Summe eben dieser Momente und überdem noch des Moments der Kraft R; und der Schwerpunct L wird eben so gefunden, wie der Schwerpunct K gefunden wird, wenn das Gewicht R noch fehlt. Die Regel findet also eben um deswillen für drey Gewichte ihre Anwendung, weil sie für zwey Gewichte gilt: aber eben darum ist sie auch für 4, 5, 6, und mehr Gewichte wahr, so viele es auch seyn mögen.

Wenn demnach G der Schwerpunct ist für die in B, C, D, E, F, hängenden Gewichte P, Q, R, S, V; so hat man $AG = \frac{AB \cdot P + AC \cdot Q + AD \cdot R - AE \cdot S - AF \cdot V}{P + Q + R + S + V}$. Uebrigens erhellet, daß eben so der Mittelpunct des Drucks in allen Fällen gefunden werde, wenn gleich der Hebel nicht horizontal liegt, auf denselben aber mehr Kräfte nach parallelen und darauf senkrechten Richtungen wirken.

59 §.

Die grade Linie *BC* ist in wagrechter Lage in beyden Endpuncten unterstützt, und in dem gegebenen Punct *A* hängt das Gewicht Q: man soll finden wie groß der Druck sey, den jede von den beyden Unterlagen in *B* und *C* leidet. 22 F.

Aufl. Wenn in B eine Kraft V nach B*b* aufwärts zieht, die mit Q das Gleichgewicht hält, so hebt selbige den Druck gegen die Unterlage B auf: mithin ist der Druck, welchen B leidet, = V, und man hat $V = \frac{CA \cdot Q}{BC}$, (51 §.) Eben so findet man den Druck gegen C $= \frac{BA.Q}{BC}$, denn so groß muß eine in C nach Cc aufwärts ziehende Kraft seyn, die mit Q das Gleichgewicht hält.

Wenn BC mit zweyen oder noch mehr Gewichten beschwert ist, so könnte man den Druck, welchen jede von den Unterlagen B oder C leidet, für jedes Gewicht besonders suchen, und hiernächst den ganzen Druck durch die Addition finden. Statt dessen aber wird gewöhnlich kürzer vorher die Stelle des Schwerpuncts aller Gewichte, und hiernächst der Druck gesucht, den jede Unterlage leiden würde, wenn im Schwerpunct die Summe aller Gewichte hienge.

60 §.

23 F. **Wenn der Hebel *BC*, woran die Gewichte *P*, *Q* in *B*, *C*, hängen, durch einen Widerstand im Schwerpunct *A* so gehalten wird, daß er sich um denselben zwar drehen, aber nach keiner Seite weichen kann; so bleibt das Gleichgewicht, auch wenn der Hebel *BC* nicht horizontal liegt.**

Aufl. Man stelle sich eine feste aber für sich nicht schwere Ebene durch die Richtungslinien beyder Gewichte und den Hebel vor: in derselben sey DE durch A horizontal gezogen, und schneide die Richtungslinien der Gewichte in D und E. Wenn nun in D eine Kraft = P nach D*d*, und in E eine Kraft = Q nach E*e* aufwärts ziehet, so ist alles im Gleichgewicht; (31 §.) überdem ist vermöge der Voraussetzung P : Q = AC : AB, und weil die Dreyecke ABD, ACE ähnlich sind, auch AC : AB = AE : AD, mithin P : Q = AE : AD. Demnach sind die nach

Dd und Ee drückende Kräfte im Gleichgewicht, (51 §.) also auch die in B und C herabhängenden Gewichte.

Der IV. Abschnitt.

Vom Schwerpunct der festen Körper, mit einigen Anwendungen dieser Lehre.

61 §.

Wenn zwey oder mehr Puncte P, Q, R, S, einer festen Ebene DE mit Gewichten beschwert sind; so giebt es für alle diese Gewichte einen gemeinschaftlichen Schwerpunct. Denn die Gewichte P, Q, haben ihren Schwerpunct A in der graden Linie PQ: und wenn das dritte Gewicht R hinzukommt; so hat ein Gewicht P + Q in A gehängt mit dem Gewicht R einen gemeinschaftlichen Schwerpunct B in AR. Kommt das vierte Gewicht S hinzu; so hat ein Gewicht P + Q + R in B gehängt mit S einen gemeinschaftlichen Schwerpunct C in der graden Linie BS. So gilt der Schluß von jeder Anzahl der Gewichte auf die nächstfolgende um **Eins** grössere Anzahl. Eben dieser Punct kann kürzer der **Schwerpunct der Ebene** selbst heissen, besonders alsdenn, wenn man sich P, Q, R, S, u. s. f. selbst als schwere Puncte vorstellt. 24F.

Wird die Ebene durch einen Widerstand in diesem Schwerpunct so gehalten, daß sie sich zwar um denselben drehen, sonst aber nicht weichen kann, so ruhet die Ebene in jeder Lage.

62 §.

25 F. Die horizontal liegende Ebene LM sey mit soviel Gewichten P, Q, u. s. f. als man will, beschwert, G sey ihr Schwerpunct, und durch G sey in dieser Ebene eine grade Linie HK gezogen. Wenn diese in zweenen Puncten H und K gehalten wird, so ruhet die Ebene ebenfalls, und was die Puncte H, K, hält, leidet einen Druck, der dem 59 §. gemäß gefunden wird. Es sey die Summe aller Gewichte $= \Sigma$, so ist das der Druck, den G litte, wenn dieser Punct allein gehalten würde: demnach leidet H den Druck $\frac{GK \cdot \Sigma}{HK}$, und K den Druck $\frac{GH \cdot \Sigma}{HK}$. (59 §.)

63 §.

Jede grade Linie, wie HK, die in einer Ebene durch ihren Schwerpunct gezogen wird, heißt ein **Durchmesser der Schwere**: und wenn dieser Durchmesser auf jeder Seite des Schwerpuncts in einem Punct unterstützt wird, so ruhet die Ebene. Wird eins von den Gewichten, womit die Ebene beschwert ist, mit seiner Entfernung vom Durchmesser der Schwere multiplicirt; so heißt das so gefundene Product für diesen Durchmesser **das Moment** des Gewichts.

Der Schwerpunct einer Ebene liegt da, wo zwey Durchmesser der Schwere einander schneiden.

64 §.

25 F. **Wenn *P* und *Q* ein Paar schwere Puncte in der Ebene *LM* sind, wozu *HK* als ein Durchmesser der Schwere gehört; so sind die Momente der Gewichte *P* und *Q* für diesen Durchmesser gleich groß.**

Auch

Auch umgekehrt: wenn die Momente der Gewichte *P*, *Q*, in Ansehung der graden Linie *HK* gleich groß sind; so ist *HK* für diese Gewichte ein Durchmesser der Schwere, vorausgesetzt, daß von diesen Gewichten eins auf jeder Seite der Linie *HK* seine Stelle habe.

Beweis. Der Schwerpunct liegt im Durchmesser HK und in der graden Linie PQ, also in G, wo beyde einander schneiden. Wenn nun PA und QB auf HK senkrecht sind; so ist das Dreyeck APG ∽ Dr. BQG, also GP : GQ = AP : BQ. Ferner ist Q : P = GP : GQ, (50 §.) also auch Q : P = AP : BQ, mithin AP . P = BQ . Q.

Umgekehrt folgt aus der Gleichheit dieser Momente die Proportion Q : P = AP : BQ, und diese mit der andern AP : BQ = GP : GQ verglichen giebt Q : P = GP : GQ, also ist der Durchschnittspunct der graden Linie HK mit PQ der Gewichte P und Q Schwerpunct, folglich HK für sie ein Durchmesser der Schwere.

Wären die Puncte A und B des Durchmessers der Schwere unterstützt, so litten sie eben so viel Druck, als wenn auf A das Gewicht P und auf B das Gewicht Q unmittelbar drückte. Denn A leidet den Druck $\frac{BG\,(P+Q)}{AB}$, (62 §.) und es ist $\frac{BG}{AB} = \frac{GQ}{PQ} = \frac{P}{P+Q}$, also der Druck auf A = P. Ferner leidet B den Druck $\frac{AG\,.\,(P+Q)}{AB}$, und man hat $\frac{AG}{AB} = \frac{GP}{PQ} = \frac{P}{P+Q}$, also ist der Druck auf B = Q.

65 §.

Die Lage der graden Linie *ON* in der wagrechten Ebene *LM* ist gegeben, und die Ent- 25 F.

fernung der beyden in dieser Ebene befindlichen schweren Puncte von *ON*: man soll die Entfernung ihres Schwerpuncts von *ON* finden.

Aufl. Es sey G der Schwerpunct, und GC, PD, QE auf ON senkrecht. Durch G sey der Durchmesser der Schwere HK mit ON parallel gezogen, und schneide PD in A, QE in B; so hat man $AP \cdot P = BQ \cdot Q$. (64 §.) Weiter ist $AP = CG - DP$, und $BQ = EQ - CG$, also $(CG - DP)P = (EQ - CG)Q$, und daraus folgt $CG(P+Q) = DP \cdot P + EQ \cdot Q$, mithin $CG = \frac{DP \cdot P + EQ \cdot Q}{P+Q}$.

66 §.

Eine Kraft $= P+Q$, die am Schwerpunct G aufwärts zieht, erhält alles im Gleichgewicht, und man kann jede grade Linie wie ON, wenn sie in zweenen Puncten gehörig gehalten wird, als eine Axe ansehen, um welche sich die Ebene drehen müßte, wenn die Kräfte einander nicht im Gleichgewicht erhielten. Demnach können die Producte $DP \cdot P$, $EQ \cdot Q$, die Momente der Gewichte P, Q, für die Axe ON heissen, und die Summe dieser Momente ist so groß als das Moment eines im Schwerpunct befindlichen Gewichts $= P + Q$ wäre.

Wenn Q der gemeinschaftliche Schwerpunct zweyer andrer in der Ebene NOM befindlicher schwerer Puncte p, q, wäre, so wäre G der Schwerpunct dreyer in dieser Ebene befindlicher schweren Puncte. Wenn ferner p um den Abstand a, und q um den Abstand b von ON entfernt wäre; so hätte man $EQ = \frac{a \cdot p + b \cdot q}{p+q}$, und was vorhin Q war, wäre nun $= p + q$: mithin

CG

$CG = \frac{DP.P + a.p + b.q}{P + p + q}$. So erhellet, daß die Regel des vor. §, nach welcher die Entfernung des Schwerpuncts von ON gefunden wird, auch für drey Gewichte gelte. Wäre Q der Schwerpunct dreyer oder noch mehrerer Gewichte, soviel man will, und für diese Anzahl von Gewichten die Regel des vor. §. richtig; so würde eben so wie vorhin folgen, daß die Regel ebenfalls ihre Anwendung finde, wenn die Zahl der Gewichte um Eins grösser ist.

Diesemnach ist allemahl die Summe der Momente aller Gewichte für die Axe *ON* so groß, als das Moment eines einzigen im Schwerpunct befindlichen, wenn letzteres der Summe jener Gewichte zusammen genommen gleich ist. Wofern übrigens unter diesen Momenten einige den übrigen entgegen gesetzt sind, so werden sie als negative Grössen in Rechnung gebracht.

67 §.

Die Ebene *LM* ist in der Axe *ON* unterstützt, in *P* zieht eine Kraft *P* nach *Pp* aufwärts, und in *Q* eine andere *Q* nach *Qq* unterwärts, beyde senkrecht auf *LM*: man soll das Verhältniß der Kräfte für den Fall des Gleichgewichts und zugleich den Druck finden, dem die Axe *ON* ausgesetzt ist.

Aufl. Man ziehe die grade Linie PQ, welche die Axe ON in R schneidet: in R ziehe ein Gewicht R nach R*r* unterwärts, so erhalten die drey Kräfte P, Q, R, einander im Gleichgewicht, wenn $P = Q + R$, und $R = \frac{QP.P}{QR}$, $Q = \frac{RP.P}{QR}$ angenommen wird. (53 §.) Wenn nun PD und QE auf ON senkrecht sind; so hat man $\frac{RP}{QR} = \frac{DP}{EQ}$, also $Q = \frac{DP \, . \, P}{EQ}$, und $EQ \, . \, Q = DP \, . \, P$, das heißt, die Momente der Kräfte in Ansehung der Axe ON, müssen gleich groß seyn. Ferner leidet die Stelle R der Axe aufwärts einen Druck $= P - Q = R$, und eben soviel Druck würde R nach $R\varrho$ leiden, wenn in D eine Kraft $= Q + R = P$, aufwärts in E aber eine Kraft $= \frac{RD \, . \, P}{RE} = \frac{RP \, . \, P}{RQ} = Q$ unterwärts drückte. Demnach leidet die Axe ON eben soviele Gewalt, als wenn von den Kräften P, Q, jede in ihrer Richtung da angebracht wäre, wo die senkrechten Linien PD, QE, die Axe ON treffen.

68 §.

In dem Raum eines festen nach allen Seiten ausgedehnten Körpers, der für sich nicht schwer ist, stelle
24F. man sich vier und mehr schwere Puncte P, Q, R, V, u. s. f. vor; so weis man schon, daß es für drey derselben P, Q, R, allemahl einen Schwerpunct B in der Ebene dieser Puncte giebt. (61 §.) Wenn nun gleich der vierte schwere Punct V mit den vorigen nicht in einerley Ebene liegt, so kann doch die grade Linie BV gezogen werden: wenn diese irgendwo zwischen B und V durch einen Widerstand gehalten wird; so kommt die Wirkung aller vier Gewichte mit der Wirkung zweyer überein, wovon das eine $= P + Q + R$ in B, das andre V an der mit V bezeichneten Stelle hienge. Beyde haben in BV einen Schwerpunct G, und derselbe ist zugleich der Schwerpunct aller vier schweren Puncte, die nicht in einer Ebene liegen.

Käme noch der fünfte schwere Punct hinzu, dessen Stelle, wo man will, angenommen werden kann, so erhellet

hellet eben so, daß wiederum alle fünf schwere Puncte einen gemeinschaftlichen Schwerpunct haben. Der Schluß gilt von jeder Anzahl solcher schweren Puncte auf die folgende um Eins grössere Anzahl. Eben dieser Punct kann der Schwerpunct desjenigen geometrischen Körpers heissen, in dessen Raum diese schweren Puncte befindlich sind. Wird derselbe durch einen Widerstand so gehalten, daß der Körper sich um denselben zwar frey drehen, sonst aber nicht weichen kann, so ruhet der Körper in jeder Lage.

69 §.

Ein fester Körper, in dessen Raum die schweren 27 F.
Puncte P, Q, befindlich sind, sey mit einer wagrechten Ebene OS, und zugleich durch den Schwerpunct G mit einer lothrechten Ebene KI geschnitten, beyder Ebenen Durchschnitt sey KL, und GH auf KL senkrecht; so trägt H die Summe der Gewichte P + Q. Es mag nun allein H gehalten werden, oder auf jeder Seite von H sonst ein Punct in KL; so wird alles in dieser Lage in Ruhe bleiben. Man siehet wohl, daß in diesen Schlüssen sich nichts ändre, wenn gleich G ein Schwerpunct mehrerer in dem Raum des festen Körpers vertheilter schwerer Puncte wäre.

Jede Ebene durch den Schwerpunct eines Körpers heißt eine **Ebene der Schwere**. Wenn diese lothrecht ist, und in zwenen Puncten gehalten wird, die in dieser Ebene und zugleich in einer darin befindlichen Horizontallinie so liegen, daß die Verticallinie durch den Schwerpunct zwischen beyden durchgeht; so ruhet der Körper in dieser Lage.

Wird eins von den Gewichten, die man sich in den schweren Puncten vorstellt, mit seiner Entfernung von der Ebene der Schwere multiplicirt, so heißt das so gefundene Product das **Moment des Gewichts** für diese Ebene der Schwere.

Wenn zwey Ebenen der Schwere einander schneiden, so liegt der Schwerpunct in ihrer Durchschnittslinie: und wenn eine dritte Ebene der Schwere diese Durchschnittslinie der beyden vorigen schneidet, so ist der Durchschnittspunct zugleich des Körpers Schwerpunct.

70 §.

27F. **Wenn** P, Q, **ein Paar schwere Puncte sind, wozu die lothrechte Ebene** KI **als eine Ebene der Schwere gehört; so sind die Momente der Gewichte auf beyden Seiten dieser Ebene gleich groß.**

Auch umgekehrt: wenn die Momente der Gewichte P, Q, **für die zwischen beyden befindliche lothrechte Ebene** KI **gleich groß sind; so ist** KI **eine Ebene der Schwere.**

Beweis. Wenn PA und BQ auf KI senkrecht sind, so liegt PQ in der Ebene der Parallelen PA, BQ, diese wird von KI in der graden Linie AB geschnitten, und AB schneidet PQ in G. Ist nun KI eine Ebene der Schwere, so muß G der Schwerpunct seyn, weil er auch in PQ liegt, und man hat $P : Q = GQ : GP$. Weil ferner die Dreyecke APG, BQG einander ähnlich sind, so folgt daraus, wie im 64 §, $P : Q = BQ : AP$, also $AP . P = BQ . Q$.

Wenn umgekehrt die Momente gleich sind, also $P : Q = BQ : AP$ ist, so hat man auch $P : Q = GQ : GP$, und G ist der Schwerpunct, mithin KI eine Ebene der Schwere.

71 §.

Man schneide den Körper, in dessen Raum die schweren Puncte P, Q, befindlich sind, mit der horizontalen Ebene OS, welche die durch P, Q, G, vertical herabfallenden Linien in *p*, *q*, H, die Ebene KI aber in KL schneidet, so sind P, *p*, so wie Q, *q*, gleich weit von KI entfernt, jene Puncte um den Abstand PA = *pa*, diese um den Abstand BQ = *bq*. Wenn nun KI eine Ebene der Schwere ist, so ruhet alles, wofern nur KL auf jeder Seite von H in einem Punct, etwa in *a* und *b*, oder statt dessen allein in H gehalten wird. Würden nun die Gewichte P, Q, von ihren Stellen weggenommen, und statt dessen P in *p*, Q in *q* angebracht, so bliebe das Gleichgewicht nach wie vor, und H wäre der Schwerpunct der in *p*, *q*, nunmehro befindlichen Gewichte.

Man kann *p*, *q*, die auf die wagrechte Ebene OS reducirten Stellen der Gewichte P, Q, nennen, dadurch wird ihr Schwerpunct G eben so auf die Ebene OS reducirt: seine reducirte Stelle ist nemlich der Punct H, worin eine lothrechte Linie durch G die Ebene OS trift.

72 §.

Die Lage einer verticalen Ebene *ON* ist gegeben, und die Entfernungen zweyer oder mehrerer in dem Raum eines geometrischen Körpers vertheilten schweren Puncte von dieser Ebene: man soll die Entfernung des Schwerpuncts von eben der Ebene finden. 27F.

Aufl. Wenn man die Stellen aller schweren Puncte, und damit zugleich die Stelle ihres Schwerpuncts auf eine wagrechte Ebene OS reducirt, so sind die reducirten Stellen soweit als die würklichen Stellen von der Ebene ON entfernt. Für die Gewichte P, Q, und ihren Schwerpunct G hat man die reducirten Stellen p, q, H. Wenn nun PD, QE, GC, und eben so pd, qe, HR, auf ON senkrecht sind; so ist $RH = \frac{dp . P + eq . Q}{P + Q}$, (65 §.) weil H der Schwerpunct wäre, wenn P und Q in p und q ihre Stellen hätten. (71 §.) Demnach ist auch $CG = \frac{DP . P + EQ . Q}{P + Q}$.

Aus dem 66 §. ergiebt sich, daß diese Schlüsse allemahl ihre Anwendung finden, wenn gleich mehr als zwey schwere Puncte durch den Raum des Körpers vertheilt sind: allemahl ist die Summe aller Momente in Ansehung der Ebene *ON* so groß, als das Moment eines im Schwerpunct befindlichen Gewichts seyn würde, wenn es der Summe aller durch den Raum des Körpers vertheilten Gewichte gleich wäre.

Wenn einige dieser Gewichte auf der andern Seite der Ebene ON, wo F liegt, ihre Stellen hätten, so müssen sie in der Rechnung als negative Grössen betrachtet werden, weil sie alsdenn den Körper auf entgegen gesetzte Art um eine horizontale Axe, wie OM, zu drehen streben, vorausgesetzt, daß diese in zweenen Puncten gehörig unterstützt sey.

73 §.

Ein jeder Körper in der Natur ist aus einer unzähligen Menge körperlicher Theilchen zusammen gesetzt, die insgesammt schwer sind: jedes dieser Theilchen ist also würklich ein Gewicht, das man sich so vorstellen kann, als wenn es in demjenigen Punct des Körpers,

Körpers, wo es seine Stelle hat, befestiget wäre. Alle diese Gewichte haben einen gemeinschaftlichen Schwerpunct, (68 §.) und eben dieser ist zugleich der **Schwerpunct** des ganzen Körpers.

Jeder schwere feste Körper hat also einen Schwerpunct: wenn derselbe allein durch einen Widerstand so gehalten würde, daß der Körper sich zwar um denselben frey drehen, sonst aber nicht weichen könnte, so würde der Körper in jeder Lage ruhen. Das, was den Schwerpunct hält, leidet einen eben so grossen Druck, als wenn das Gewicht des ganzen Körpers, oder welches einerley ist, die Summe der Gewichte aller einzelnen Theile desselben im einzigen Schwerpunct vereiniget wäre, und die übrigen Theile gar kein Gewicht hätten.

74 §.

Wenn die Masse eines Körpers durch seinen ganzen Raum gleichförmig vertheilt ist; so haben gleich grosse Theilchen desselben auch gleiches Gewicht. Kann man nun den Körper mit einer Ebene so schneiden, daß nicht allein der ganze Körper nach seiner geometrischen Grösse, mithin zugleich seine ganze Masse dadurch halbirt wird, sondern auch alsdenn mit jedem Theilchen auf der einen Seite dieser Ebene ein eben so grosses Theilchen auf der andern Seite in gleicher Entfernung von ihr zusammen gehört; so ist das eine Ebene der Schwere. Läßt sich alsdenn die Stelle eines Puncts im Körper angeben, worin drey Ebenen der Schwere einander schneiden, so ist das des Körpers Schwerpunct. Wird also vorausgesetzt, daß von gleichförmig dichten Körpern die Rede sey, so leiten diese Schlüsse leicht auf folgende Sätze.

75 §.

Jeder Schnitt durch den Mittelpunct einer Kugel ist für sie eine Ebene der Schwere, und der Schwerpunct einer Kugel ist mit ihrem Mittelpunct einerley.

Jeder Schnitt durch die Axe eines Cylinders ist für ihn eine Ebene der Schwere, auch ist das eine mit den Grundflächen parallele Ebene, welche die Axe halbirt: demnach liegt der Schwerpunct eines Cylinders in der Mitte seiner Axe.

Auch ist jeder Schnitt durch die Axe eines Kegels eine Ebene der Schwere, und des Kegels Schwerpunct liegt in seiner Axe, aber der Grundfläche näher, als dem Mittelpunct.

Jede Diagonalfläche des Parallelepipedi ist eine Ebene der Schwere, und wenn man in jeder Grundfläche zwey Diagonallinien ziehet, so ist die grade Linie zwischen den Durchschnittspuncten dieser Diagonallinien ein Durchmesser der Schwere: denn dies ist die Durchschnittslinie zweyer Diagonalflächen. Nennt man diese Linie die Axe des Parallelepipedi, so liegt dieses Körpers Schwerpunct in der Mitte seiner Axe.

76 §.

36F. Bestehet ein fester Körper aus zweenen Theilen, wovon man die Schwerpuncte P, Q, finden kann; so wird der Schwerpunct G des ganzen Körpers leicht gefunden. Er liegt in der graden Linie PQ, und man hat $PG = \frac{PQ \,.\, Q}{P+Q}$, wenn man durch P und Q die Gewichte der Theile versteht. (53 §. 1. Aufl.)

Wenn also ausser dem Schwerpunct G des ganzen Körpers, der aus zweenen Theilen von bekanntem Gewicht

Gewicht bestehet, noch der Schwerpunct P des einen von beyden Theilen gegeben ist, so kann auch der Schwerpunct Q des andern gefunden werden. Derselbe liegt mit P und G in grader Linie: denn wäre ein Punct q, der nicht in PG liegt, dieser Schwerpunct, so müste des ganzen Körpers Schwerpunct in Pq liegen, mithin könnte G der Schwerpunct des ganzen Körpers nicht seyn. Demnach ziehe man PG, und nehme $GQ = \frac{GP \cdot P}{Q}$, (51 §.) oder auch $PQ = \frac{PG(P+Q)}{Q}$, (53 §. 2 Aufl.) so ist die Stelle des Schwerpuncts Q gefunden.

77 §.

Wenn ein grades Parallelepipedum oder ein grader Cylinder lothrecht steht, so wird jeder Punct der Grundfläche von dem Gewicht aller Theilchen gedrückt, die sich lothrecht darüber befinden. Man kann also in Gedanken die Gewichte aller Theilchen so auf die wagrechte Grundfläche reduciren, wie es den im 70 §. schon vorgekommenen Vorstellungen gemäß ist: alsdenn ist es eben soviel, als wenn die Grundfläche selbst schwer und das Gewicht derselben durch den Raum dieser Fläche gleichförmig vertheilt wäre. Der Schwerpunct dieser Ebene wäre alsdenn mit dem auf die Grundfläche reducirten Schwerpunct des Parallelepipedi, oder des Cylinders einerley. Demnach kann man sich in diesem Verstande auch schwere Ebenen vorstellen, ob es gleich in der Natur dergleichen nicht giebt: auch kann man in eben dem Verstande den geometrischen ebenen Figuren einen Schwerpunct zuschreiben.

78 §.

Wird die Axe eines graden Parallelepipedi, oder eines graden Cylinders in zweenen Puncten, wovon auf jeder Seite des Schwerpuncts einer liegt, in wagrechter Lage unterstützt, so wird jeder Punct der Axe von dem Gewicht aller Theilchen gedrückt, welche eine Ebene trift, die durch diesen Punct auf der Axe des Körpers senkrecht gesetzt wird. Alsdenn ist es eben soviel, als wenn in jedem Punct der Axe ein Gewicht hienge, so groß, als die Summe der Gewichte aller Theilchen, welche eine durch denselben Punct darauf senkrecht gesetzte Ebene trift. Der Schwerpunct aller dieser Gewichte ist mit dem Schwerpunct des Körpers selbst einerley, weil man auf solche Art die Gewichte aller Theilchen auf die wagrecht liegende Axe reducirt. Demnach kann man sich in diesem Verstande auch schwere grade Linien vorstellen, und wenn das Gewicht der graden Linie nach ihrer ganzen Länge gleichförmig vertheilt ist; so liegt der Schwerpunct in ihrer Mitte.

79 §.

Wenn das Gewicht einer schweren Ebene durch ihren ganzen Flächenraum gleichförmig vertheilt ist, und man in derselben eine grade Linie so ziehen kann, daß sie nicht allein die ganze Ebene halbirt, sondern auch mit jedem kleinen Gewicht, das man sich an der einen Seite dieser graden Linie vorstellt, auf der andern Seite in gleicher Entfernung ein eben so grosses Gewicht zusammen gehört; so ist das ein Durchmesser der Schwere.

Demnach liegt des Kreises Schwerpunct in seinem Mittelpunct, und eines Parallelogramms Schwerpunct

punct liegt da, wo beyde Diagonallinien einander schneiden.

80 §.

Den Schwerpunct eines Dreyecks *ABC* zu finden. 28F.

Aufl. Jede grade Linie, wie AD, durch die Spitze eines Winkels, welche die gegenüberstehende Seite BC in D halbirt, ist ein Durchmesser der Schwere. Wenn also auch BE die Seite AC in E halbirt, so ist beyder Durchschnittspunct G der gesuchte Schwerpunct des Dreyecks.

Man ziehe CK und DH mit BE parallel, so wird $BK = AB$, und $BH = \frac{1}{2} BK$ (174 §. Geom.) $= \frac{1}{2} AB = BF = AF$: also $AH = 3 AF$, $AB = 2 AF$, und $AH : AB = 3 : 2$. Ferner ist $AH : AB = AD : AG$, (174 §. Geom.) also $3 : 2 = AD : AG$, mithin $AG = \frac{2}{3} AD$.

81 §.

Jede gradlinichte Figur läßt sich durch Diagonallinien in Dreyecke theilen, (151 §. Geom.) und man kann den Schwerpunct eines jeden dieser Dreyecke besonders suchen. Ferner kann man die Sache so betrachten, als wenn das Gewicht eines jeden dieser Dreyecke allein im Schwerpunct desselben befindlich wäre, mithin läßt sich für alle diese Gewichte der gemeinschaftliche Schwerpunct suchen, und das ist der Schwerpunct der ganzen gradlinichten Figur. Dabey wird vorausgesetzt, daß sich die Gewichte dieser Dreyecke wie ihre Flächen verhalten, weil angenommen wird, daß das Gewicht der gradlinichten Figur durch ihre Fläche gleichförmig vertheilt sey.

82 §.

29F. Die grade Linie *PQ* zwischen den Schwerpuncten beyder Grundflächen eines dreyseitigen Prisma *AFB* ist für diesen Körper ein Durchmesser der Schwere, und der Schwerpunct *G* liegt mitten in dieser Axe: auch ist eben diese Axe mit den Seitenlinien des Prisma parallel.

Beweis. Man ziehe die beyden Durchmesser der Schwere AH, BL, in der Grundfläche ABC, die sich in ihrem Schwerpunct P schneiden; so ist die Ebene DAH, so wie LBE eine Ebene der Schwere, und dieser beyden Ebenen Durchschnittslinien DK, EM, mit der andern Grundfläche DEF sind in dieser ein Paar Durchmesser der Schwere, welche sich im Schwerpunct Q dieser Grundfläche DEF schneiden. Demnach ist PQ für das Prisma ein Durchmesser der Schwere, und der Schwerpunct G liegt in der Mitte dieser Axe, weil eine Ebene durch G mit den Grundflächen parallel gelegt, ebenfalls eine Ebene der Schwere ist. Ferner ist auch PQ mit AD parallel, weil AP und DQ gleich groß und parallel sind.

83. §.

Eines jeden Prisma Schwerpunct liegt in der Mitte der Axe zwischen den Schwerpuncten beyder Grundflächen, und diese Axe ist mit den Seitenlinien des Prisma parallel.

Beweis. Man kann das Prisma BEKG durch
30F. Diagonalflächen CF, DF, in dreyseitige theilen. Wenn nun *ad*, *be*, *cf*, dieser Prismen Axen, und P, Q, R, ihre Schwerpuncte sind, so sind die Axen mit den Seitenlinien des Prisma, also unter sich parallel,

rallel, auch sind diese Axen gleich groß, und die Schwerpuncte P, Q, R, liegen in einer mit den Grundflächen parallelen Ebene, welche diese Axen halbirt, worin also, wie auch schon für sich klar ist, der Schwerpunct des ganzen Prisma BEKG liegt. Wenn nun P, Q, R, die Gewichte der dreyseitigen Prismen bezeichnen, an deren Schwerpuncte in der Figur diese Buchstaben gesetzt sind; so verhalten sich diese Gewichte nicht allein wie die körperlichen Räume der dreyseitigen Prismen, sondern auch wie die dazu gehörigen dreyseitigen Grundflächen.

Wenn nun m, n, die Schwerpuncte der Vierecke ABCD, FGHI, sind, so hat man $am = \frac{ab \,.\, Q}{P + Q}$, $dn = \frac{de \,.\, Q}{P + Q} = \frac{ab \,.\, Q}{P + Q} = am$: Wenn ferner h desjenigen Prisma Schwerpunct ist, wozu diese vierseitigen Grundflächen gehören; so wird $Ph = \frac{PQ \,.\, Q}{P + Q}$ $= \frac{ab \,.\, Q}{P + Q} = am = dn$ gefunden, also liegt h mit m und n in grader Linie, die mit ad, folglich mit den Seitenlinien des Prisma parallel ist. Demnach ist der Satz für das vierseitige Prisma wahr, aber auch eben darum für das fünfseitige, wozu die Grundflächen ABCDE, FGHIK, gehören. Denn mn und cf sind parallel und gleich groß, also sind es auch mc, nf, hR. Wenn nun i, k, der fünfseitigen Grundflächen Schwerpuncte sind, so ist $mi = \frac{mc \,.\, R}{P + Q + R} = \frac{nf \,.\, R}{P + Q + R}$ $= nk$; und wenn g des fünfseitigen Prisma Schwerpunct ist, so hat man auch $hg = \frac{hR \,.\, R}{P + Q + R} = \frac{mc \,.\, R}{P + Q + R}$ $= mi = nk$, mithin liegen wiederum i, g, k in grader

Linie, die mit *cf*, also mit den Seitenlinien des Prisma parallel ist.

Weil diese Schlüsse sich fortsetzen lassen, das Prisma mag in so viele dreyseitige, wie man will, getheilt seyn, so erhellet, daß der Satz allgemein wahr sey.

84 §.

31 F. Der Schwerpunct einer dreyseitigen Pyramide *ABCD* liegt in der graden Linie *AF* zwischen ihrer Spitze *A* und dem Schwerpunct *F* ihrer Grundfläche *BCD*.

Beweis. Wenn BE, DK, ein Paar Durchmesser der Schwere der Grundfläche sind; so sind ABE, ADK, ein Paar Ebenen der Schwere, und beyder Durchschnittslinie AF liegt zwischen der Spitze der Pyramide und dem Schwerpunct der Grundfläche. Demnach liegt in AF der Pyramide Schwerpunct.

85 §.

Die Stelle des Schwerpuncts der dreyseitigen Pyramide zu finden.

31 F. Aufl. Man ziehe die Axe AF der Pyramide für die Grundfläche BCD. Weil nun auch ACD eine Grundfläche der Pyramide ist, die mit der Spitze B zusammen gehört; so liegt der Pyramide Schwerpunct auch in BH, wenn H des Dreyecks ACD Schwerpunct ist. Beyde Schwerpuncte F und H der Dreycke BCD, ACD liegen in der Ebene des Dreyecks ABE, den Punct E so genommen, daß CE = DE ist, also müssen AF und BH einander schneiden, und ihr Durchschnittspunct G ist der Pyramide Schwerpunct.

Man

Man betrachte das Dreyeck ABE in der 32 Fig. für sich allein, und ziehe EL, FK mit BH parallel; so ist AH : HE = AB : BL, also $BL = \frac{HE}{AH} \cdot AB = \frac{1}{2} AB$. (80 §.) Ferner ist BE : BF = BL : BK, also $BK = \frac{BF}{BE} \cdot BL = \frac{2}{3} BL$, (80 §.) folglich auch $BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AB = \frac{1}{3} AB$, und $AK = AB + BK = \frac{4}{3} AB$, oder $\frac{AB}{AK} = \frac{3}{4}$. Ueberdem hat man AK : AB = AF : AG, also $AG = \frac{AB}{AK} \cdot AF = \frac{3}{4} AF$. 32F.

86 §.

Jeder vielseitigen Pyramide und eines jeden Kegels Schwerpunct liegt ebenfalls in der Axe zwischen der Spitze und dem Schwerpunct der Grundfläche, und ist von der Spitze um einen Abstand entfernt, der $\frac{3}{4}$ der Axe beträgt.

Beweis. Die vielseitige Pyramide kann durch Diagonalflächen wie ABD in dreyseitige Pyramiden getheilt werden. Es sey also zuerst die Pyramide ABCDE vierseitig, F des Dreyecks BCD, H des Dreyecks BDE Schwerpunct; so liegen der Pyramiden ABCD, ABDE, Schwerpuncte P, Q, in AF, AH, und es ist $AP = \frac{3}{4} AF$, $AQ = \frac{3}{4} AH$. Demnach ist AF : AP = AH : AQ, und PQ mit FH, also mit der Grundfläche BCDE parallel: in PQ aber liegt der Schwerpunct G der Pyramide ABCDE. Wenn nun P, Q, die Gewichte der dreyseitigen Pyramiden ABCD, und ABDE bezeichnen, so verhalten sich P, Q, nicht allein wie die körperlichen Räume dieser Pyramiden, sondern auch wie ihre Grund- 33F.

flächen, und wenn K des Vierecks BCDE Schwerpunct ist; so hat man $FK = \frac{FH \cdot Q}{P+Q}$, $PG = \frac{PQ \cdot Q}{P+Q}$, mithin $FK : FH = PG : PQ$, also auch $FK : PG = FH : PQ$. Ferner ist $FH : PQ = AF : AP$, also $FK : PG = AF : AP$, mithin sind AFK, APG, ähnliche Dreyecke, und es ist der Winkel $PAG = FAK$, folglich fallen AG, AK, in eine grade Linie zusammen, oder G liegt in AK. Weiter ist $AF : AP = AK : AG$, und $AF : AP = 4 : 3$, (85 §.) also $AG = \frac{3}{4} AK$.

Hätte die Pyramide ABCD schon mehr als drey Seiten, und wäre F der Grundfläche Schwerpunct, überdem aber bewiesen, daß der Pyramide Schwerpunct P in AF läge, und $AP = \frac{3}{4} AF$ sey; so würde vermöge des geführten Beweises folgen, daß auch für die Pyramide ABCDE, wenn sie eine Seite mehr hat, und ihrer Grundfläche Schwerpunct in K liegt, der Schwerpunct G in AK liege, und $AG = \frac{3}{4} AK$ sey. Diesemnach gilt der Satz allgemein für jede vielseitige Pyramide.

In und um den Kegel kann man wie im 347 §. Geom. ein Paar Pyramiden verzeichnen, deren Grundflächen reguläre in und um die Kreisförmige Grundfläche beschriebene ähnliche reguläre Polygone sind. Der Schwerpunct einer jeden von diesen beyden Pyramiden liegt in des Kegels Axe und ist um $\frac{3}{4}$ dieser Axe von der Spitze entfernt; die Stelle dieses Schwerpuncts bleibt einerley, man mag den Grundflächen so viele Seiten als man will geben, und der Kegel ist unter allen in und um ihn beschriebenen Pyramiden die letzte; also liegt auch des Kegels Schwerpunct in seiner Axe um $\frac{3}{4}$ dieser Axe von der Spitze entfernt.

Einer

Einer abgekürzten Pyramide und eines abgekürzten Kegels Schwerpunct findet man aus dem bekannten Schwerpunct des ganzen Körpers und des abgeschnittenen Theils dem 76 §. gemäß.

87 §.

Den Schwerpunct einer Halbkugel zu finden. 34 F.

Aufl. Es stelle ADB die Halbkugel vor, AB den Durchmesser ihrer Grundfläche, CD den auf der Grundfläche senkrechten Halbmesser; so liegt der Schwerpunct in CD. Ferner sey AEB die andre Halbkugel, ABHF ein Cylinder und FCH ein Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe wie im 370 §. der Geometrie; so ist DE die gemeinschaftliche Axe dieses Körpers, und jeder von ihnen hat seinen Schwerpunct in dieser Axe. Es sey G des Cylinders und P des Kegels Schwerpunct, Q aber desjenigen Körpers Schwerpunct, der übrig bleibt, wenn der Kegel aus dem Cylinder ausgeschnitten wird; so findet man Q dem 76 §. gemäß. Wenn nemlich P und Q die Gewichte, oder welches hier gleichviel ist, die Körperlichen Räume des Kegels und des Körpers AFCHB bezeichnen, so ist P + Q das Gewicht, oder die Geometrische Grösse des Cylinders AFHB, und man hat $CQ = \frac{CG(P+Q) - CP \cdot P}{Q}$. Ferner ist $CG = \frac{1}{2}r$ und $CP = \frac{3}{4}r$, wenn der Kugel Halbmesser $= r$ gesetzt wird; auch hat man $P = \frac{1}{3}(P+Q)$ und $Q = \frac{2}{3}(P+Q)$, (370 §. Geom.) also $\frac{P+Q}{Q} = \frac{3}{2}$, $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$: demnach findet man $CQ = \frac{3}{4}r - \frac{3}{8}r$, oder $CQ = \frac{3}{8}r$.

Die Halbkugel ADB ist dem Körper AFCHB gleich, und die mit dem grösten Kreise, dessen Durchmesser AB vorstellt, parallelen Schnitte der Halbkugel ADB und des Körpers AFCHB sind auf beyden Seiten der Ebene AB in gleichen Entfernungen von ihr gleich groß: (370 §. Geom.) demnach gehet die Ebene des grösten Kreises AB durch beyder Körper gemeinschaftlichen Schwerpunct, und weil dieser Schwerpunct in DE liegt, so ist es C. Wenn also K der Schwerpunct der Halbkugel ADB ist, so hat man $CK = CQ = \frac{3}{8}r$, mithin $DK = \frac{5}{8}r$.

88 §.

Ob ein fester Körper auf einer Unterstützung, die ihn trägt, ruhig stehe, oder liege, das hängt von der Figur des ganzen Körpers, und von der Lage desselben ab, worin ihn die Unterstützung halten soll. Ist nur ein Punct desselben unterstützt, so muß es ein solcher seyn, der in der Verticallinie durch den Schwerpunct liegt. Wenn alsdenn der Körper unten hohl ist, wie der von aussen durch eine Cylinderfläche, von innen durch eine Kegelfläche, begränzte Körper AFCHB in der 34 Figur, so kann der unterstützte Punct C höher liegen, als der Schwerpunct G, und der Körper hängt gleichsam auf demjenigen, was ihn in C hält. In diesem Zustande des Gleichgewichts kann sich der Körper nicht um C drehen, ohne daß sein Schwerpunct Q steige. Weil das aber wider die Natur des Schwerpuncts ist, so ist der Körper gegen das Herabfallen, oder Umfallen desto mehr gesichert, je tiefer der Schwerpunct unter dem unterstützten Punct liegt, und je grösser das Gewicht des Körpers ist: vorausgesetzt, daß das, was den Kör-

per

per in C unterstützt, stark genug sey, um sein Gewicht zu tragen.

Wenn der unterstützte Punct niedriger als der Schwerpunct liegt; so verursacht die allergeringste Abweichung der graden Linie zwischen dem unterstützten Punct und dem Schwerpunct von der verticalen Stellung, daß der Körper umfallen muß, wofern nicht andre Theile des Körpers im Wege sind, die es hindern. Wenn es also gleich an sich möglich ist, daß ein grader Kegel auf seiner Spitze stehen kann, wenn seine Axe vollkommen lothrecht steht, so hätte er doch so unterstützt einen sehr unsichern Stand.

Eine Kugel kann auf einer wagrechten Ebene in jeder Lage ruhig liegen, weil die lothrechte Linie durch ihren Schwerpunct allemahl die Stelle trift, worin sie die Ebene berührt: aber auch bey der geringsten Abweichung der Ebene von der horizontalen Lage kann die Kugel darauf nie ruhig liegen, weil alsdenn die unterste Stelle ihrer Oberfläche, wohin die Verticallinie durch den Schwerpunct trift, nicht unterstützt ist.

89 §.

Wenn zwey oder mehr Puncte des Körpers, die insgesammt in grader Linie liegen, unterstützt sind, so muß die Ebene durch diese grade Linie und den Schwerpunct pertical seyn, wofern der Körper ruhig liegen soll. Liegt der Schwerpunct alsdenn höher, als die unterstützte Linie, wie wenn eine Seitenlinie eines Prisma oder einer Pyramide durch eine wagrechte Ebene unterstützt wäre; so muß der Körper bey der geringsten Abweichung der Ebene durch den Schwerpunct und die unterstützte Linie von der verticalen Stellung umfallen.

Sind mehr als zweene Puncte des Körpers unterstützt, die nicht in grader Linie liegen, sondern die Winkelpuncte einer ebenen gradlinichten Figur ausmachen, wenn man sie mit graden Linien zusammen zieht, wie wenn ein Tisch auf drey oder vier Füssen steht; so steht der Körper auf einer wagrechten Ebene ruhig, wofern die Verticallinie durch den Schwerpunct eine Stelle der wagrechten Ebene trift, die innerhalb der Gränzen jener Figur liegt: widrigenfalls muß er umfallen, weil alsdenn nichts da ist, das den Schwerpunct unterstützt. Dabey ist es gleichgültig, ob der Körper selbst eine ebene Grundfläche hat, womit er an die wagrechte Ebene anschließt, die ihn trägt oder nicht. Demnach kann ein schiefes Prisma, eine schiefe Pyramide, ein schiefer Cylinder oder Kegel, auf einer wagrechten Ebene alsdenn nicht auf seiner Grundfläche ruhig stehen bleiben, wenn die Stelle, wohin die Verticallinie durch den Schwerpunct trift, ausserhalb der Gränzen der Grundfläche dieser Körper fällt.

90 §.

77 F. Auf diesen Gründen beruhet unter andern auch die ganze Anordnung der im 16 §. schon vorläufig erwähnten **Wage**, der man sich bedient, vermittelst eines Gegengewichts zu erfahren, wie schwer ein Körper sey. Der **Wagebalcken** AB (77 Fig.) ist ein gleicharmiger Hebel, wenn man haben will, daß im Zustande des Gleichgewichts Gewicht und Gegengewicht gleich groß seyn sollen. In A und B sind die Stellen, woran die Schaalen mit ihren Schnüren oder Ketten aufgehängt werden, die ebenfalls gleich schwer seyn müssen, wenn der Schwerpunct G in der Mitte der graden Linie AB bleiben soll. Oberhalb G in einer

auf

auf AB durch G senkrechten Linie GC werden auf beyden Seiten ein Paar Zapfen angebracht, welche sich unten in eine Schärfe nach Art eines Keils endigen, die Schärfe des einen Zapfens liegt mit der Schärfe des andern in grader Linie, die auf der Ebene ABGC senkrecht ist, und die Axe abgiebt, um welche sich der Wagebalken drehen kann, wenn die Zapfen in ihren Pfannen in wagrechter Lage liegen. Bey dieser Einrichtung kann der Wagebalken so wohl für sich allein, als auch wenn die Schaalen daran hängen, und gleiche Gewichte darin liegen, nur alsdenn ruhen, wenn CG vertical, also AB horizontal ist: übrigens dient die auf dem Wagebalken senkrechte Zunge KL zur Anzeige davon, daß der Wagebalken die horizontale Lage habe, wenn sie selbst vertical ist. Wenn aber an B ein Gewicht hängt, das etwas schwerer als ein an A hängendes Gewicht P ist, so fällt der Schwerpunct in D weiter nach B hin, und man hat $GD = \frac{GB \,.\, Q - GA \,.\, P}{P + Q}$ (56 §.) $= \frac{\frac{1}{2} AB (Q - P)}{P + Q}$. Alsdenn aber kann der Wagebalken nur ruhen, wenn CD vertical ist, da dann der Wagebalken gegen die Verticallinie unter einem Winkel = CDG geneigt ist, und man hat $\tang CDG = \frac{CG}{DG}$. Gegen den Horizont ist nun der Wagebalken unter einem Winkel geneigt, der CDG zu 90° ergänzt, also ist dieses Winkels Tangente $= \cot CDG = \frac{DG}{CG} = \frac{\frac{1}{2} AB (Q - P)}{CG (P + Q)}$. Andre Erscheinungen, die der Wagebalken darstellet, wenn er aus dem Gleichgewicht gebracht ist, wohin vornemlich die hin und wieder schwankende Bewegung gehört, wodurch er sich nur nach und nach wieder ins Gleichgewicht setzt, lassen sich aus den Gesetzen des Gleichgewichts allein noch nicht vollständig erklären.

Eine **Wage** dieser Art ist **falsch**, wenn die Arme GA, GB, ungleich lang sind, und demnach die ledigen an A und B hängenden Schaalen den Wagebalken wagrecht erhalten. Ist alsdenn $GA > GB$, so ist die an B hängende Schaale schwerer als die, welche an A hängt: mithin muß sich der Fehler entdecken, wenn man die Schaalen verwechselt, denn die an A nach der Verwechselung hängende schwerere Schaale muß über die an B hängende leichtere den Ausschlag geben. Erhalten aber die schwere Schaale in B und die leichtere in A aufgehangen den Wagebalken wagrecht, so ist die in der Schaale an A liegende Waare leichter als das Gegengewicht in der an B hängenden Schaale, wenn beyde den Wagebalken wagrecht erhalten. Umgekehrt aber, wenn dieselbe Waare in der an B hängenden Schaale liegt, so ist das Gegengewicht in der an A hängenden Schaale leichter als die Waare, wenn es den Wagebalcken wagrecht erhält, und das eigentliche Gewicht der Waare ist zwischen dem schwerern und leichtern Gegengewicht die mittlere geometrische Proportionalgrösse.

Denn das Gewicht der Waare sey $= M$, das leichtere Gegengewicht $= P$, das schwerere $= Q$: so ist $GA \cdot P = GB \cdot M$, und $GA \cdot M = GB \cdot Q$, oder $GB : GA = P : M$, und $GB : GA = M : Q$; mithin $P : M = M : Q$, und man findet $M = \sqrt{P \cdot Q}$.

Der

Der V. Abschnitt.

Vom Gleichgewicht solcher Kräfte an festen Körpern, deren Richtungen nicht parallel sind.

91 §.

Es sey MN eine feste Ebene ohne Schwere, die in C so unterstützt ist, daß sie sich zwar frey um C drehen, aber nach keiner Seite weichen kann: überdem stelle man sich, wie im 34 §, ein Paar Kräfte P, Q, vor, welche die mit eben diesen Buchstaben bezeichneten Puncte nach den in eben dieser Ebene MN liegenden Richtungen Pp, Qq, drücken, mithin die Ebene MN auf entgegengesetzte Art um C zu drehen streben. Man nehme an, daß beyde Kräfte einander im Gleichgewicht erhalten, und ziehe CP, CQ; so erhellet, daß beyde Kräfte noch im Gleichgewicht bleiben würden, wenn CP, CQ, ein Paar unbiegsame in C unter dem Winkel PCQ an einander befestigte grade Linien wären, und wie die Ebene selbst ebenfalls keine Schwere hätten, vorausgesetzt, daß auch C gehörig unterstützt bleibe. Ein solcher gradlinichter Winkel, dessen Schenkel man sich als unbiegsame grade Linien ohne Schwere, und beyde in der Spitze an einander unbeweglich befestiget vorstellt, heißt ein **Winkelhebel**, oder **gebrochener Hebel**, wenn man überdem annimmt, daß an jedem Schenkel eine Kraft so angebracht ist, daß ihre Richtungen in der Ebene des Winkels liegen, und beyde den Winkel um seine Spitze zu drehen streben, die in solcher 6 F.

Absicht

Absicht durch eine schickliche Unterlage unterstützt seyn muß. Die Schenkel des Winkels zwischen seiner Spitze und den Stellen, wo die Kräfte angebracht sind, können die **Arme des Winkelhebels** heissen.

92 §.

Zwo Kräfte, deren Richtungen in einer festen Ebene liegen, welche sie um einen unterstützten Punct auf entgegengesetzte Art zu drehen streben, und eben so, zwo Kräfte an den Armen eines Winkelhebels, sind nur alsdenn im Gleichgewicht, wenn ihr Verhältniß gegen einander dem Verhältniß der Entfernungen ihrer Richtungslinien vom Ruhepunct in umgekehrter Ordnung gleich ist.

35F. **Beweis.** Auf die Richtungen Pp, Qq, der in der Ebene PCQ angebrachten Kräfte P, Q, lasse man aus dem Ruhepunct C die graden Linien CA, CB, senkrecht fallen: alsdenn sey in A nicht allein nach Aa sondern auch nach Aα eine Kraft = P, und in B sowohl nach Bb als auch nach Bβ eine Kraft = Q angebracht. Wenn nun P und Q im Gleichgewicht sind, so erhalten auch alle sechs Kräfte einander im Gleichgewicht. Ueberdem ist die Kraft Aa mit Pp und Bb mit Qq im Gleichgewicht, (30 §.) also müssen Aα und Bβ ebenfalls im Gleichgewicht seyn. Auf CA nehme man CD = CB, auf der andern Seite CE = CA, und bringe in E eine Kraft Π = P, in D eine Kraft K = Q, beyde nach Richtungen an, die auf AE senkrecht sind; so ist Π mit P, (36 §.) und K mit Q (35 §.) im Gleichgewicht. Demnach bleiben alle vier Kräfte im Gleichgewicht, und wenn P nach Aα mit Q nach Bβ angebracht im Gleichgewicht

wicht ist, so muß auch Π mit K im Gleichgewicht seyn, und letzteres kann nur unter der Bedingung richtig seyn, wenn das Verhältniß $\Pi : K = CD : CE$ ist, (50 §.) oder $P : Q = CB : CA$. Demnach sind auch die Kräfte P, Q, wo man will, in den Richtungslinien Pp, Qq, angebracht nur alsdenn im Gleichgewicht, wenn ihr Verhältniß gegen einander in umgekehrter Ordnung dem Verhältniß der Entfernungen ihrer Richtungslinien vom Ruhepunct gleich ist.

93 §.

Zwo Kräfte am Winkelhebel sind demnach alsdenn nur im Gleichgewicht, wenn die Producte gleich groß sind, die gefunden werden, wenn man jede dieser Kräfte mit der Entfernung ihrer Richtungslinie vom Ruhepunct multiplicirt: also kann man diese Producte, wie beym gradlinichten Hebel, die Momente der Kräfte für den Ruhepunct C nennen.

Die rechtwinklichten Dreyecke ACP, BCQ, sind in dem Fall ähnliche Dreyecke, wenn die Richtungen der Kräfte mit den Armen des Winkelhebels gleiche Winkel machen, so daß $CPA = CQB$ ist. Alsdenn hat man $CB : CA = CQ : CP$, folglich auch $P : Q = CQ : CP$, oder zwo Kräfte am Winkelhebel nach solchen Richtungen angebracht, die mit den Armen des Hebels gleiche Winkel machen, sind alsdenn nur im Gleichgewicht, wenn sie sich gegen einander umgekehrt, wie die Arme des Hebels verhalten.

94 §.

Aus der vereinigten Gewalt beyder Kräfte P und 35 F.
Q, die einander im Gleichgewicht erhalten, entsteht ein Druck gegen die Unterlage C. Es sey nemlich F

der

der Punct, worin ihre Richtungslinien einander schneiden, so strebt jede dieser Kräfte, die grade Linie FC und C zu drehen: wegen des Gleichgewichts aber erfolgt keine Bewegung, also wird FC gegen C gedrückt, und die Unterlage muß stark genug seyn, um diesem Druck zu widerstehen.

Eine Kraft, welche den Punct C, wenn derselbe durch einen Widerstand gehalten wird, so stark drückt, als beyde Kräfte P und Q, deren Richtungen mit C in einerley festen Ebene liegen, zusammen gegen den Punct C drücken, heißt die mittlere Kraft, und ihre Richtung die mittlere Richtung der Kräfte P und Q, welche man auch wohl die Seitenkräfte nennt, um selbige von der mittlern Kraft im Ausdruck kurz zu unterscheiden. Die mittlere Richtung geht demnach durch den Punct F, worin die Richtungen beyder Seitenkräfte P, Q, einander schneiden: und wenn G ein Punct in der Ebene dieser Seitenrichtungen ist, der die Eigenschaft hat, daß wenn derselbe unterstützt ist, die Kräfte P, Q, im Gleichgewicht bleiben; so ist FG die mittlere Richtung.

95 §.

Wenn der Winkel *AFB*, unter welchem die Richtungslinien der Seitenkräfte einander schneiden, mit einer graden Linie *FC* so getheilt wird, daß die Sinus ihrer Neigungswinkel *AFC*, *BFC*, gegen jene Richtungslinien sich gegen einander in umgekehrter Ordnung wie die Seitenkräfte *Q*, *P*, verhalten; so ist *FC* die mittlere Richtung der Kräfte *P* und *Q*.

Beweis. Aus einem in FC wo man will angenommenen Punct G ziehe man GH und GI auf die

Rich=

Richtungslinien der Seitenkräfte senkrecht; so ist GH = FG sin AFC, und GI = FG sin BFC, (257 §. G.) also GH : GI = sin AFC : sin BFC. Ferner ist vermöge der Voraussetzung Q : P = sin AFC : sin BFC, also auch Q : P = GH : GI. Wenn demnach G unterstützt ist, so bleiben P und Q im Gleichgewicht, (92 §.) folglich ist FC die mittlere Richtung der Kräfte P und Q. (94 §.)

96 §.

Wenn man aus dem Winkel *PFQ*, den die Richtungen der Seitenkräfte einschliessen, ein Parallelogramm *DFEC* so verzeichnet, daß die Seitenlinien *FD*, *FE*, die den Winkel *PFQ* einschliessen, sich gegen einander wie die nach diesen Richtungen würkenden Seitenkräfte verhalten; so ist die Diagonallinie *FC* die mittlere Richtung der Kräfte, und die mittlere Kraft selbst verhält sich zu jeder von den Seitenkräften *P* oder *Q*, wie die Diagonallinie *FC* zu der Seitenlinie *FD* oder *FE* des Parallelogramms, welche mit der Richtung der Kraft *P* oder *Q* zusammen fällt. 36F.

Beweis. Vermöge der Voraussetzung ist P : Q = FD : FE, also auch P : Q = FD : CD. Im Dreyeck FDC aber hat man FD : CD = sin FCD : sin CFD (258 §. Geom.) also auch FD : CD = sin CFE : sin CFD, mithin P : Q = sin CFE : sin CFD: folglich ist FC die mittlere Richtung der Kräfte P und Q. (95 §.)

Man verlängere FC durch F nach G, setze die mittlere Kraft sey = V, und nehme überdem an, es sey nach der Richtung FG an F oder sonst einem Punct G der mittlern Richtung eine Kraft = V angebracht;

so

so sind die drey Kräfte V, P, und Q, im Gleichgewicht. Alsdenn aber sind auch V und Q ein Paar Seitenkräfte, deren mittlere Richtung vermöge des schon geführten Beweises so gefunden wird. Man nehme FE : FG = Q : V, und verzeichne das Parallelogramm EFGH, so ist die Diagonallinie FH die mittlere Richtung der Kräfte V und Q. Demnach muß die Richtung einer dritten an F angebrachten Kraft, die mit V und Q im Gleichgewicht ist, der Richtung FH grade entgegengesetzt, oder mit der durch F verlängerten Richtung HF einerley seyn. Eine solche an F angebrachte Kraft ist P, und ihre Richtung ist FD, also liegt FD mit FH in grader Linie. Diesemnach ist ferner der Winkel GFH = CFD, (26 §. Geom.) und FHG = FDC, so wie FGH = FCD, weil GH, CD, beyde mit FE, also unter sich parallel sind; (28 §. Geom.) auch ist GH = CD, weil beyde = FE sind. Also passen die Dreyecke FGH und FCD auf einander, und es ist FG = FC, (87 §. G.)

Vermöge der Voraussetzung war Q : V = FE : FG; also ist auch Q : V = FE : FC, und aus den beyden Proportionen P : Q = FD : FE, und Q : V = FE : FC folgt P : V = FD : FC. (162 §. Geom.)

97 §.

Die drey Kräfte V, P, Q, erhalten die Ebene
36F. PCQ allemahl in Ruhe, in welcher Stelle ihrer Richtung auch jede derselben angebracht ist. So könnte P in D nach DP, Q in E nach EQ, V in C nach CF angebracht seyn, und das Gleichgewicht würde bleiben. Wenn demnach auch alle drey Kräfte unmittelbar auf F nach den Richtungen FP, FQ, FG, drücken, und ihr Verhältniß gegen einander mit dem Verhältniß der Seitenlinien und der Diagonallinie

Ver-des Parallelogramms gegen einander einerley ist, so erhalten sie einander im Gleichgewicht. Alsdenn können diese drey Linien in eben dem Verstande als Masse der nach den Richtungen FD, FE, FC wirkenden Kräfte angesehen werden, in welchen man die Kreisbogen als Masse der Winkel braucht. Jede dieser Kräfte wird sonst durch ein Gewicht ausgedrückt, welchen den Punct F eben so stark in verticaler Richtung drücken oder ziehen würde, als jene Kraft eben den Punct nach ihrer Richtung drückt oder zieht. Giebt man aber den Seitenlinien FD, FE so viele Theile des Längenmaasses, als die Zahlen anzeigen, welche die Kräfte P, Q, aus der für die Gewichte angenommenen Einheit ausdrücken, so wird die Zahl, welche die Länge der Diagonallinie ausdrückt, einerley mit derjenigen, welche ein der mittlern Kraft gleiches Gewicht angiebt. Soll nach FD eine Kraft von 3 Pfund, nach FE eine Kraft von 4 Pfund ziehen, so mache man FD = 3 Fuß, FE = 4 Fuß. Wenn alsdenn DFE = 90° ist, so wird FC = 5 Fuß, und die mittlere Kraft = 5 Pfund. Denn es ist $V = \frac{FC}{FD} \cdot P = \frac{5}{3} \cdot 3$ Pfund. So können die Seitenlinien und die Diagonallinie des Parallelogramms beydes zugleich die Richtung und Grösse der Seitenkräfte und der mittlern Kraft vorstellen, und es ist die Redensart nicht ungewöhnlich: die Kraft *FC* sey den Kräften *FD* und *FE* äquipollent, deren Sinn aus dem bisherigen nun völlig verständlich ist. Eine Kraft, deren Richtung und Grösse FC vorstellt, würde allein den Punct F eben so drücken, als derselbe von den beyden Kräften gedrückt wird, deren Richtung und Grösse die Linien FD, FE, vorstellen.

98 §.

36F. Die Grösse und Richtung einer an dem Punct F angebrachten Kraft FC ist gegeben, man soll finden, wie groß zwo andre Kräfte seyn müssen, die an eben dem Punct F nach gegebenen oder willkührlich angenommenen Seitenrichtungen angebracht, denselben zusammen nach eben der Richtung eben so stark drücken, als jene Kraft allein auf denselben drückt.

Aufl. Wenn FP, FQ, die Richtungen der gesuchten Seitenkräfte sind, so ziehe man durch C die graden Linien CE, CD, mit FP, FQ parallel, so ist CDFE das Parallelogramm der Kräfte, und FD, FE, stellen selbst die gesuchten Kräfte P, Q, so wie FC die gegebene mittlere Kraft vor. (97 §.) Alsdenn hat man im Dreyeck FCD die Proportion $\sin FDC : FC = \sin FCD : FD$, und es ist $FCD = CFE$, $FDC = 180^\circ - DFE$, also $\sin FDC = \sin DFE$, (230 §. G.) und man erhält $\sin DFE : FC = \sin CFE : FD$. Daraus findet man $FD = \frac{FC \,.\, \sin CFE}{\sin DFE}$, mithin auch $FE = \frac{FD \,.\, \sin CFD}{\sin CFE}$ (95 §.) $= \frac{FC \,.\, \sin CFD}{\sin DFE}$. Weil übrigens FD, FC, FE, sich wie P, V, Q, verhalten, so hat man $P = \frac{V \sin CFE}{\sin DFE}$, und $Q = \frac{V \sin CFD}{\sin DFE}$.

Wenn $DFE = 90^\circ$ ist, so ist $\sin DFE = 1$, und $CFD = 90^\circ - CFE$, also $\sin CFD = \cos CFE$, und man erhält $P = V \sin CFE$, $Q = V \cos CFE$.

99 §.

Die Seitenkräfte sind gegeben, und der Neigungswinkel ihrer Richtungen gegen einander:

ander: man soll die mittlere Kraft, und die Neigungswinkel der mittlern Richtung gegen die Richtungen der Seitenkräfte finden.

Aufl. Weil FD, FE und DFE gegeben sind, so hat man im Dreyeck FCD die Seiten FD, DC = FE, und den dazwischen liegenden Winkel FDC = 180° — DFE: demnach kann man den Winkel DFC und die Seite FC trigonometrisch finden. (262 §. Geom.) Es ist nemlich $\tang DFC = \frac{CD \sin CDF}{FD - CD \cos CDF}$, und CD = FE, $\sin CDF = \sin DFE$, $\cos CDF = - \cos DFE$, (230 §. Geom.) also $\tang DFC = \frac{FE \sin DFE}{FD + FE \cos DFE}$. Ferner ist $FC = \sqrt{(FD^2 - 2 FD . CD . \cos FDC + CD^2)}$, also auch $FC = \sqrt{FD^2 + 2 FD . FE \cos (DFE + FE^2)}$. Will man nun statt der Linien FD, FC, FE, die ihnen proportionalen Kräfte setzen, so hat man $\tang DFC = \frac{Q \sin DFE}{P + Q \cos DFE}$, und $V = \sqrt{(P^2 + 2P . Q \cos DFE + Q^2)}$. 36F.

100 §.

Bey Anwendung dieser Lehren braucht man gewöhnlich die Redensart, die mittlere Kraft *V* sey aus den Seitenkräften *P* und *Q* zusammen gesetzt, welches nichts anders anzeigen soll, als daß die mittlere Kraft aus der vereinigten Gewalt beyder Seitenkräfte ihren Ursprung habe. Die Meynung ist nicht diese, daß die mittlere Kraft die Summe der Seitenkräfte sey: denn es ist allemahl $V = \sqrt{(P^2 + 2P . Q . \cos DFE + Q^2)} < \sqrt{(P^2 + 2P . Q + Q^2)}$, also $V < P + Q$. Wenn umgekehrt statt der mittlern Kraft die Seitenkräfte gesucht werden, so drückt man sich darüber so aus: die mittlere Kraft werde in ihre Seitenkräfte zerlegt.

36F. Man kann jede von den Seitenkräften FD, FE, als eine mittlere ansehen, und in zwo Seitenkräfte FK, FL, FM, FN, zerlegen, wovon FK, FM, auf der mittlern Kraft senkrecht sind, FL, FN, aber in die mittlere Richtung fallen. Alsdenn hat man FK = FD sin DFL, FL = FD sin DFK = FD cos DFL, ferner FM = FE sin EFN, FN = FE cos EFN. (98 §.) Wenn aber, wie vorausgesetzt wird, FC die mittlere Richtung ist, so ist FD sin DFL = FE sin EFN, (95 §.) also FK = FM, und beyde auf FC senkrechte Kräfte heben einander auf; nach FC aber wird der Punct F von zweenen Kräften gedrückt, und ihre Summe ist = FD cos DFL + FE cos EFN.

Wenn PCQ ein Winkelhebel, und der Punct C unterstützt ist, so leidet derselbe im Zustande des Gleichgewichts beyder Kräfte P und Q eben so viel Druck, als wenn jede dieser Kräfte auf C unmittelbar drückte, und die Richtung jeder dieser Kräfte an C mit ihrer Richtung an dem dazu gehörigen Hebelsarm einerley Lage hätte. Denn nach Cc in der verlängerten Richtung FC leidet C einen Druck, welcher der mittlern Kraft V gleich ist, also nach Cπ mit Pp parallel einen Druck = P, und nach Ck mit Qq parallel einen Druck = Q.

M. s. hievon H. H. Kästners oben im 51 §. schon angeführtes Programma: vectis et compositionis virium theoria evidentius exposita. Andre Schriftsteller schliessen diese Lehren nicht so überzeugend aus Gründen, welche die Betrachtung wirklicher Bewegungen voraussetzen, und das Verfahren hatte schon den Beyfall des H. Joh. Bernoulli nicht

nicht, in der Abhandlung: Positiones variae mechanico-dynamicae, Oper. T. IV. n. 177. p. 256. H. Daniel Bernoulli macht gegen das erwähnte Verfahren ebenfalls Erinnerungen in der Abhandlung: Examen principiorum Mechanicae Commentar. Petrop. Tom. I. pag. 134, und führt daselbst einen andern an sich zwar völlig strengen Beweis, der aber weitläuftiger ist, als die hier gebrauchte Art zu schliessen.

101 §.

Ein fester Körper ohne Schwere wird in zweenen Puncten *A* und *B* so gehalten, daß er sich um die grade Linie *AB* als eine Axe frey drehen kann: eine Kraft *P* nach einer Richtung *FP*, die in einer auf der Axe *AB* senkrechten Ebene liegt, strebt den Körper um *AB* zu drehen, und eine andre Kraft *V* nach einer Richtung *DV* gleichfalls in einer auf *AB* senkrechten Ebene strebt den Körper auf entgegen gesetzte Art zu drehen; man soll das Verhältniß der Kräfte für den Fall des Gleichgewichts und zugleich den gesamten Druck finden, welchem die Axe ausgesetzt ist. 37F.

Aufl. Weil FP in einer auf AB senkrechten Ebene liegt, so sey G dieser Ebene Durchschnittspunct mit der Axe, und in dieser Ebene sey GF auf FP senkrecht. Wenn alsdenn durch den Winkel BGF die Ebene AK gelegt wird, so ist AK auf der Ebene GFP senkrecht, (286 §. Geom.) mithin auch FP auf AK senkrecht. (288 §. Geom.) Weil es nun gleichviel ist, in welchem Punct der Richtung FP die Kraft P angebracht ist, so nehme man an, sie sey an F angebracht. Weil ferner DV ebenfalls in einer auf AB senkrechten Ebene liegt, so sey E dieser Ebene Durchschnitt mit der Axe, und ED auf DV senkrecht; durch den Winkel AED lege man die Ebene AC, so ist diese auf EDV senkrecht, (286 §. Geom.) folglich auch DV auf AC senkrecht. Nun kann man AC, AK, als ein Paar feste Ebenen für sich allein als solche betrachten, die sich in AB schneiden, und wie die Arme eines Winkelhebels an einander so befestiget sind, daß sie sich nicht verrücken können. In AK ziehe man EH mit GF parallel, nehme EH = GF, und lasse an H eine Kraft $\Pi = P$ mit P nach einerley Richtung, zugleich aber eine andre Kraft $p = P$ nach grade entgegen gesetzter Richtung ziehen. Nun sind p und Π im Gleichgewicht, wenn also auch P und V im Gleichgewicht sind, so bleibt alles in Ruhe. Aber auch P und p sind im Gleichgewicht, (67 §.) also müssen V und Π im Gleichgewicht seyn. Nun ist DEH ein Winkelhebel, wie im 91 §, an dessen Armen ED, EH, die Kräfte V und P nach senkrechten Richtungen ziehen, also wird erfordert, daß $ED . V = EH . \Pi$ sey, folglich auch $ED . V = GF . P$, das heißt, auch in diesem Fall des Gleichgewichts müssen die Momente der Kräfte V und P in Ansehung der Axe AB gleich groß seyn.

Die Kräfte V und Π drücken auf E eben so, als wenn jede derselben in ihrer Richtung E nach Ev und $E\pi$ angebracht wäre: (100 §.) auch P und p drücken die Axe AB eben so, als wenn P in G nach $G\gamma$ mit FP, und p in E nach $E\varrho$ mit Hp parallel angebracht wäre. (67 §.) Weil nun $p = \Pi$ ist, so heben die Pressungen nach $E\pi$ und $E\varrho$ einander auf, und die Axe wird eben so gedrückt, als wenn jede der Kräfte V und P in ihrer Richtung an der Axe da angebracht

wäre,

wäre, wo selbige von der darauf senkrechten Ebene geschnitten wird, worin die Richtungslinie der Kraft liegt. Dieser Druck auf die Axe AB muß einerley bleiben, die Kräfte Π und p mögen an ihren Stellen bleiben, oder nicht, denn sie können zum Druck auf die Axe nichts beytragen, weil sie einander völlig aufheben.

Der VI. Abschnitt.

Vom schiefen Druck gegen eine Fläche und von der Friction als einem Hinderniß der Bewegung.

102 §.

Wenn eine wagrecht liegende ebene Fläche MN gehörig unterstützt ist, und auf derselben ein 38F.
schwerer Körper AB so liegt, daß die Verticallinie GH durch seinen Schwerpunct G innerhalb des Grundes fällt, worauf er stehet; so liegt der Körper selbst auf der Ebene völlig ruhig, und letztere trägt die ganze Last desselben. So lange der Körper solchergestalt von der Ebene getragen wird, ist es so gut, als ob er aller seiner Schwere völlig beraubt wäre. Ist das Gewicht des Körpers $= P$, und eine am Schwerpunct G angebrachte Kraft $V = P$ zieht den Körper vertical aufwärts; so thut diese eben das, was die Ebene ausrichtet. Auf eine ähnliche Art widerstehet jede feste und unbewegliche Ebene dem ganzen Druck einer Kraft, deren Richtung auf ihr senkrecht steht.

103 §.

39 F. Eine Last P, die auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene AD liegt, drückt zwar ebenfalls gegen diese Ebene, allein letztere kann nicht eben so, wie vorhin die wagrecht liegende Ebene, den ganzen Druck aufhalten: vielmehr wird die Last sich längst der schiefen Ebene fortbewegen, wofern nicht sonst etwas vorhanden ist, was diese Bewegung hemmet. Es sey G des auf der geneigten Ebene liegenden Körpers Schwerpunct, GH die Verticallinie durch G. Ferner sey CD eine wagrechte Ebene, und BD ihre Durchschnittslinie mit AD. Wenn alsdenn GK auf AD senkrecht ist, so ist die Ebene des Winkels HGK auf beyden Ebenen AD und CD zugleich senkrecht, (286 §. Geom.) folglich ist BD auf der Ebene HGK senkrecht, (289 §. Geom.) und HGK ist die Ebene des Neigungswinkels beyder Ebenen AD und CD gegen einander. (284 §. Geom.) Wenn also HGK die Ebene AD in AB, und die Ebene CD in BC schneidet, so ist ABC der Ebene AD Neigungswinkel gegen den Horizont.

Durch G ziehe man ME mit AB, also zugleich mit der Ebene AD, (281 §. G.) parallel, durch H aber HE mit GK, und HF mit GE parallel, so läßt sich der verticale Druck P nach der Richtung GH als eine mittlere Kraft betrachten, und in zwo Seitenkräfte nach GF und GE zerlegen, welche dem 98 §. gemäß leicht gefunden werden, wenn man nur bemerkt, daß der Winkel HGF = GHE = CAB sey. Wenn nemlich AC auf BC senkrecht fällt, so sind AC und GH, so wie AB und GE parallel, also ist CAB = HGE, (88 §. G.) und CBA = GHE = HGF. Man setze diesen Winkel $= \alpha$, die Kraft nach GE = V, nach GF = N, so ist $V = P \sin A$, und $N = P \cos \alpha$.

Dem

Dem ganzen Druck N widerstehet die Ebene AD, vorausgesetzt, daß GK noch innerhalb des Grundes durchgehet, womit der schwere Körper P an AD anliegt: aber es ist nichts vorhanden, was den Druck der Kraft V aufhalten kann. Demnach bleibt der schwere Körper auf der geneigten Ebene nicht ruhig liegen, wofern nicht am Schwerpunct G eine Kraft $= P \sin \alpha$ nach der Richtung GM angebracht ist, der Richtung GL der Kraft V grade entgegen, um solchergestalt das Gleichgewicht herzustellen.

Eben so läßt sich in allen Fällen jeder schiefe Druck einer Kraft gegen eine Ebene in zwo Kräfte zerlegen, wovon die eine senkrecht gegen die Ebene drückt, die andre aber nach einer mit der Ebene parallelen Richtung: da dann die Ebene nur dem senkrechten Druck widerstehet.

104 §.

Auf der geneigten Ebene *AD* liegt wie 39F.
vorhin die Last *P*, am Schwerpunct *G* ist eine Kraft *V* nach der Richtung *GN* angebracht, die in einer Ebene liegt, welche beydes zugleich vertical und auf *AD* senkrecht ist: man sucht, wie groß *V* seyn müsse, um die Last im Gleichgewicht zu erhalten, und wie groß überdem der senkrechte Druck *N* sey, welchem die Ebene *AD* im Zustande des Gleichgewichts ausgesetzt ist.

Aufl. Man ziehe HK mit GN, und KL mit GH parallel, so ist der Druck N in der Richtung GK eine mittlere Kraft, wozu die Seitenkräfte P nach GH, und V nach GL gehören; auch sind die Winkel KGH

$=\alpha$, und KGL gegeben. Wenn nemlich die Ebene der Kräfte von AD in AB geschnitten wird, so werden AB und GN einander irgendwo in O schneiden, und GOB ist alsdenn der Richtungslinie GN Neigungswinkel gegen die Ebene AD. Es sey also GOB $=\beta$, so ist KGL $= 90° - \beta$, und man erhält $P \sin\alpha = V \cos\beta$, (95 §.) $P \sin(90° - \beta + \alpha) = N \cos\beta$, (98 §.) also $V = \frac{P \sin\alpha}{\cos\beta}$, und $N = \frac{P \cos(\alpha - \beta)}{\cos\beta}$, oder auch $N = P(\cos\alpha + \sin\alpha \tan\beta)$.

105 §.

Wenn GN mit AB oder AD, wie im 103 §. parallel angenommen wird; so verschwindet β: und alsdenn ist $\cos\beta = 1$, $\tan\beta = 0$; mithin hat man, wie im 103 §. $V = P \sin\alpha$, $N = P \cos\alpha$. Dieser Druck $P \sin\alpha$, vermöge dessen der schwere Körper längst der schiefen Ebene herabzusinken strebt, und wirklich sinkt, wenn er nicht gehalten wird, heißt sein respectives Gewicht, und wird durch diesen Nahmen von dem verticalen Druck nach GH als dem absoluten Gewicht desselben unterscheiden. Wenn nun AC auf BC senkrecht ist, so wird $\sin\alpha = \frac{AC}{AB}$, $\cos\alpha = \frac{BC}{AB}$, mithin $PV = \frac{AC \,.\, P}{AB}$, $N = \frac{BC \,.\, P}{AB}$. Weil aller drey hier in Betrachtung kommender Kräfte Richtungen in der verticalen und zugleich auf der geneigten Ebene senkrechten Ebene ABC liegen, so wird gewöhnlich nur dies Dreyeck als der verticale Durchschnitt der geneigten und horizontalen Ebene in den Zeichnungen vorstellig gemacht, und man nennt AB die Länge, BC die Grundlinie, AC die Höhe der schiefen Ebene. Wenn also die erhaltende Kraft

nach

nach einer mit der schiefen Ebene parallelen Richtung zieht, so verhält sich die Last zur erhaltenden Kraft, wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Höhe.

Wird dagegen GN wagrecht, also mit BC parallel angenommen, so ist $\beta = \alpha$, und man erhält $V = P \,.\, \mathrm{tang}\,\alpha$, $N = P \sec \alpha$. Ferner ist $\frac{AC}{BC} = \mathrm{tang}\,\alpha$, $\frac{AB}{BC} = \sec\alpha$, mithin $V = \frac{AC \,.\, P}{BC}$, $N = \frac{AB \,.\, P}{BC}$. Wenn demnach die erhaltende Kraft mit der Grundlinie der schiefen Ebene parallel ziehet, so verhält sich die Last zur erhaltenden Kraft, wie die Grundlinie der schiefen Ebene zu ihrer Höhe.

106 §.

Wenn GM ein Faden wäre, den man bey M über eine Rolle geführt hätte, so würde ein daran hängendes Gewicht $V = P \sin\alpha$ die Last P auf der schiefen Ebene erhalten. Nähme man $V > P \sin\alpha$, so würde das Gewicht V herab sinken, und die Last P längst der schiefen Ebene hinauf ziehen: nähme man aber $V < P \sin\alpha$, so würde die Last auf der geneigten Ebene herab sinken, und das Gewicht V in die Höhe ziehen, vorausgesetzt, daß nicht etwa andre Ursachen die Bewegung hemmen. Sollte in jenem Fall die Last, wenn sie anfangs über B gestanden hätte, bis grade über A gehoben werden; so müßte das an der Rolle herab hängende Gewicht V um eine Tiefe sinken, die der Länge AB der schiefen Ebene gleich wäre: die Last wäre alsdenn um die lothrechte Höhe CA gestiegen. Für den Zustand des Gleichgewichts wird erfordert, daß $V : P = AC : AB$ sey, also sind Kraft und 39F.

Last im Gleichgewicht, wenn ihr Verhältniß gegen einander dem Verhältniß derjenigen Wege in umgekehrter Ordnung gleich ist, die sie in gleichen Zeiten bey gehobenen Gleichgewicht jede in ihrer Richtung zurück legen würden.

107 §.

Eben dies Gesetz des Gleichgewichts findet auch
23F. beym Hebel seine Anwendung. Wenn man Q als eine Last betrachtet, die von der Kraft P vermittelst des Hebels BC (23 Fig.) gehoben wird, indem derselbe sich aus der wagrechten Lage KL in die geneigte Lage BC drehet; so steigt die Last Q um die Höhe EC, indem die Kraft P um die Tiefe DB sinkt. Weil nun ADB und AEC ähnliche Dreyecke sind, (214 §. G.) so ist AC : AB = EC : DB, und im Zustande des Gleichgewichts hat man P : Q = AC : AB, (50 §.) also auch P : Q = EC : DB, d. i. **die Kraft zur Last umgekehrt wie der Weg der Last zum Wege der Kraft.**

Wenn B und C selbst schwere Puncte wären, so würden sie, indem der Hebel sich aus der Lage KL in die Lage BC drehet, die Kreisbogen KB, LC, beschreiben. Ob nun gleich diese Bogen sich ebenfalls wie die Halbmesser AB, AC, verhalten; so sind doch das nicht die Wege der Kraft und Last, die hier verstanden werden müssen. Was hier **Weg der Kraft** heißt, muß allemahl in derjenigen Richtung genommen werden, nach welcher die Kraft wirkt: und was hier **Weg der Last** heißt, muß in einer Richtung genommen werden, die derjenigen grade entgegen gesetzt ist, nach welcher die Last ihren Druck äussert. Wenn

während

während der Umdrehungsbewegung des Hebels um A Kraft und Last auf B und C beständig nach Richtungen würkten, die mit den Hebelsarmen rechte Winkel machten, so wären die Kreisbogen KB, LC, das, was hier Weg der Kraft, Weg der Last heißt. Diese auf die Hebelsarme in B und C auch während der Umdrehung senkrecht drückende Kräfte könnten auch wohl von andern Ursachen herrühren, ohne daß jede derselben das Gewicht eines schweren Körpers wäre, der während der Umdrehung des Hebels würklich um eine gewisse Tiefe fiele, oder um eine gewisse Höhe stiege: alsdenn sind die Wege, welche hier als **Wege der Kraft und Last** betrachtet werden, diejenigen, welche die Puncte B, C, des Hebels, jeder in der Richtung der auf diese Puncte drückenden Kraft oder Last, zugleich zurück legen. Nimmt man diese Einschränkung gehörig in acht, so findet eben das Gesetz auch alsdenn bey der schiefen Ebene seine Anwendung, wenn die Richtung der Kraft mit der Grundlinie parallel ist. Im folgenden wird dies Gesetz des Gleichgewichts noch weiter erläutert werden, weil es auch bey andern mechanischen Werkzeugen sein Anwendung findet.

108 §.

Die Oberflächen der festen Körper sind nie so vollkommen glatt, daß sich auf denselben nicht eine grosse Menge kleiner Erhöhungen und Vertiefungen finden sollte, ob man gleich den Oberflächen recht harter Körper, dergleichen Steine, Glaß, einige Metalle und Holzarten sind, durch Abschleifen und mancherley Arten von Politur eine ziemliche Glätte zuwege bringen kann. Wenn nun ein Körper an der Fläche eines andern fortgeschoben und zugleich an dieselbe gedruckt

wird;

wird; so greifen die kleiner Erhöhungen des einen in die Vertiefungen des andern, und einer kann sich an dem andern alsdenn nicht fortbewegen, ohne daß die Theile des einen, welche dem andern im Wege sind, niedergebeuget, oder gar von den übrigen abgerissen werden. Der daher rührende Widerstand, welcher die Bewegung eines Körpers hindert, wenn er an der Oberfläche eines andern fortgeführt, und zugleich gegen dieselbe gedrückt wird, heißt das **Reiben** oder die **Friction**.

109 §.

38F. Wenn ein schwerer Körper AB auf einer horizontalen Ebene MN liegt, und am Schwerpunct G desselben eine Kraft nach horizontaler Richtung GD angebracht wird, so muß selbige den Körper nach der Richtung GD in Bewegung setzen, wofern sowohl die untere Fläche des Körpers als auch die Ebene MN vollkommen glatt sind, so daß gar keine Friction die Bewegung hemmen kann. Wenn GD ein Faden ist, den man bey D über eine Rolle geführt hat; so müste jedes kleine Gewicht den Körper AB in Bewegung setzen, wenn keine Friction es hinderte: denn das Gewicht des Körpers kann die Bewegung nicht hindern, weil es ganz von der Ebene getragen wird. Allein würkliche Versuche lehren, daß in keinem Fall jedes nach Gefallen gewählte kleine Gewicht den Körper in Bewegung setze; nach der verschiedenen Beschaffenheit der Massen, woraus die Körper bestehen, wovon der eine so an dem andern fortgeschoben werden soll, wird selbst bey gleichem Druck des Körpers AB gegen die Ebene MN mehr oder weniger Gewicht am Faden erfordert, um denselben in Bewegung zu setzen.

Jedes

Jedes Hinderniß der Bewegung, also auch die Friction, kann man sich als etwas vorstellen, das gegen die bewegte Masse drückt, wie sonst eine Kraft, welche die Bewegung hemmen oder wenigstens verzögern würde. (2 §.) Demnach muß sich ein Gewicht angeben lassen, daß die Bewegung des an der Ebene fortzubewegenden Körpers eben so stark als die Friction zu hemmen strebt. Ein solches Gewicht würde der Friction gleich seyn, und so begreift man, in welchem Verstande sich die Friction mit dem Druck vergleichen lasse, der den Körper gegen die Fläche eines andern preßt.

110 §.

Je grösser oder kleiner dieser Druck ist, der den Körper gegen die reibende Fläche preßt, desto grösser oder kleiner ist auch die Friction; und man verfällt ganz natürlich auf die Vermuthung, daß vielleicht die Friction der Grösse dieses Drucks, wenn alle übrige Umstände einerley sind, proportional sey. Wofern übrigens die hervorragenden Theilchen der Flächen, die sich an einander reiben, während der Bewegung weggebrochen werden, so muß der Widerstand desto grösser oder kleiner seyn, je grösser oder kleiner diese Flächen sind: kann man also überdem voraussetzen, daß die Hacken und Spitzen auf den Flächen gleichförmig vertheilt sind, so scheint es, daß vielleicht die Friction, wenn der Druck und die übrigen Umstände einerley bleiben, der Grösse der Flächen proportional sey. Versuche müssen entscheiden, wie weit diese Vermuthungen zutreffen.

111 §.

Soll der Körper AB, dessen Gewicht P ist, (38 Fig.) auf der horizontalen Ebene MN fortgeschoben werden, so so ist der Druck gegen die reibende Fläche einerley mit dem Gewicht P des Körpers AB, und man kann auf folgende Art wenigstens ein Paar wenig verschiedene Gränzen finden, zwischen welchen die Grösse der Friction fallen muß. Man vermehre das an dem über die Rolle geführten Faden herabhängende Gewicht F so lange, bis der Körper anfängt sich zu bewegen: war nun $F = \frac{n}{m} P$, als AB noch nicht in Bewegung kam, und fieng AB an, sich zu bewegen, als man noch $\frac{1}{m} P$ zusetzte; so erhellet, daß die Friction mit einer Kraft im Gleichgewicht sey, die zwischen den Gränzen $\frac{n}{m} P$ und $\frac{n+1}{m} P$ enthalten ist, und dieser Kraft muß die Friction selbst gleich seyn.

39F. Liegt der schwere Körper G, dessen Gewicht $= P$ ist, auf der gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigten Ebene AD, so strebt das respective Gewicht desselben $= P \sin \alpha$ den Körper längst der Ebene herunter zu bewegen: dies respective Gewicht wächst mit dem Winkel α, und dieser muß jedesmahl zu einer gewissen Grösse gebracht seyn, bevor der Körper zu sinken anfängt, wenn er anders, wie hier vorausgesetzt wird, eine ebene Grundfläche hat, womit er an der geneigten Ebene anliegt. Wird nun der Erhöhungswinkel α gefunden, wenn der Körper noch ruhet, und $\alpha + \varepsilon$ wenn derselbe zu sinken anfängt, so hält die Friction das Gleichgewicht mit einer Kraft, die zwischen den Gränzen $P \sin \alpha$ und $P \sin (\alpha + \varepsilon)$ enthalten ist. Setzt man, daß der Winkel ζ grade die Grösse habe, welche erfordert wird, damit die Friction mit dem respectiven Gewicht im Gleichgewicht sey, so heißt dieser Winkel der **Ruhewinkel** und die

Friction

Friction ist $= P \sin \zeta$, die alsdenn mit dem Druck $P \cos \zeta$ gegen die reibende Fläche zusammen gehört. Wird dieser Druck $= \Pi$, die Friction $= F$ gesetzt, so ist nun $P \sin \zeta : P \cos \zeta = F : \Pi$, und $F = \frac{\sin \zeta}{\cos \zeta} \Pi = \Pi \tang \zeta$.

112 §.

Amontons in der Abhandlung: De la resistance causée dans les machines tant par les frottemens des parties, qui les composent, que par les roideur des cordes, qu'on y employe, et la maniere de calculer l'un et l'autre; (Memoires de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris, Année 1699. pag. 206 sqq.) findet bey allerley Arten von Massen die Friction der Grösse des Drucks so ziemlich genau proportional, und ohngefähr dem dritten Theil des Drucks gleich. Ferner fand er, daß die Friction von der Grösse der reibenden Flächen nicht abhänge, und eben das fand auch de la Hire bey Wiederholung der Versuche, wovon man in der Histoire de l'Acad. desselben Jahres die 104 u. f. S. nachsehen kann. **Leupold** im Theatro Mach. Gen. Cap. XVI. §. 217. und **Belidor** in der Architectura Hydraul. II. Cap. 1 B. 222 §. erzählen, daß ihre Versuche mit den Amontonschen überein kommen, vornemlich wenn sich Holz auf Holz reibt. Bey der schiefen Fläche fand Belidor den Ruhewinkel von 18° 20′, dagegen hat ihn Bilfinger allemahl zwischen 12° und 15° gefunden: wenn man das Mittel hievon nimmt, und ihn 13° 30′ setzt, so findet man $\tang \beta = 0{,}24008$, also betrüge die Friction nur den vierten Theil des Drucks. Gewöhnlich nimmt man an, es sey $F = \frac{1}{3} \Pi$, wenn sich Holz auf Holz reibt, und $F = \frac{1}{4} \Pi$, wenn Metall an an Metall bewegt wird: allein nachdem Muschenbroeck die hieher gehörigen Versuche mit weit mehr Vorsicht und Sorgfalt, als seine Vorgänger angestellet hat, ist man überzeugt worden, daß sich schwerlich allgemeine Gesetze für die Friction bestimmt angeben lassen. M. s. seine Introd. ad Phil. Nat. Cap. IX.

113 §.

Die Friction wächst nicht genau im Verhältniß des Drucks, und jede Art körperlicher Massen hat ihre ganz besondre Gesetze des Reibens, die dieser Art allein eigen sind, und sich nicht allgemein machen lassen. Nach Muschenbroeck ist die Friction beym Stahl auf Messing, wenn es mit Oehl schlüpfrig gemacht wird, etwa nur $\frac{1}{7}$ des Drucks, beym Stahl auf Stahl, Zinn und Franzosenholz $\frac{1}{4}$ des Drucks, und auf rothen Kupfer etwa $\frac{1}{5}$ desselben. Ferner war die Friction beym Tannenholz auf Tannenholz anfangs bey mässigen Druck $\frac{1}{4}$ desselben, und ward bey zunehmenden Druck noch kleiner. Beym Eichenholz auf Eichenholz war die Friction beym mässigen Druck anfangs nicht so stark als beym Tannenholz auf Tannenholz, auch ward sie bey zunehmenden Druck in Verhältniß desselben kleiner, jedoch nicht völlig so, wie beym Tannenholz auf Tannenholz.

114 §.

Zwey Körper, die aus Massen von einerley Art bestehen, reiben sich gemeiniglich stärker an einander als solche, die aus Massen von verschiedener Art bestehen: dies hat man seit langer Zeit richtig befunden. Vermuthlich rührt es daher, weil die Structur und Lage der Theile gegen einander bey zweenen Körpern von einerley Art in dem einen so wie in dem andern ist,

ist, daher dann die Spitzen des einen in die Vertiefungen des andern desto tiefer eindringen können, wenn im Gegentheil bey Körpern von verschiedener Art wegen der verschiedenen Structur die Vertiefungen und Spitzen in einander nicht so tief eingreifen. Weil durchs Glätten und Poliren nicht alle Ungleichheiten weggebracht werden können, so überdeckt man die Flächen solcher Körper, die sich an einander fortbewegen sollen, wenn dabey der Druck derselben gegen einander nicht vermieden werden kann, mit einer flüssigen und schlüpfrigen Masse, dergleichen Fett oder Oehl ist; das dient, kleine Vertiefungen auszufüllen, und verhindert zugleich die gar zu dichte Berührung der Flächen. Dabey muß man aber die Natur der Massen wohl kennen, woraus die Körper bestehen, welche sich an einander fortbewegen sollen, weil nicht jede feste Masse einerley Fettigkeiten verträgt.

Der VII. Abschnitt.

Vom Gebrauch der Rollen und Räder.

115 §.

Wenn eine cylindrische Axe KL senkrecht durch die 43F.
Mitte einer Scheibe DGHI geht, und an derselben so befestiget ist, daß wenn die Axe gehörig unterstützt ist, sie sich mit der Scheibe zugleich drehen muß; so heißt dies Hebezeug ein **Rad an der Axe**, und diese Axe wird auch die zum Rade gehörige **Welle** genannt. Gewöhnlich ist letztere an beyden Enden bey A und B mit runden Zapfen versehen, die auf ge-

hörig eingeschnittenen oder eingebohrten Zapfenlagern ruhen. Wenn alsdenn an der Welle ein Seil befestiget ist, das sich auf dieselbe aufwickeln muß, wenn das Rad mit der Welle umläuft, so läßt sich vermittelst des Rades eine an dem Seil hängende Last P herauf ziehen, wenn eine am Umfang des Rades angebrachte Kraft V dasselbe umdrehet.

Eine solche bewegende Kraft kann am Umfang des Rades auf mancherley Art angebracht werden, das Rad kann um den Umfang herum einen Einschnitt haben, wie die Rolle, so daß man ein Seil um den Umfang legen kann, woran eine Kraft ziehet. Gemeiniglich kommt es alsdenn auch in Ansehung seiner übrigen Gestalt, Welle und Polzen ausgenommen, mit der Rolle überein, nur daß es gewöhnlich viel grösser, als die Rolle ist. Die **Rolle** ist am gewöhnlichsten eine in der Mitte durchborte Scheibe, und auf eine Axe gesteckt, um welche die Scheibe umlaufen kann, ohne diese Axe, die der **Polzen** heißt, mit umzudrehen.

116 §.

Was das Rad an der Axe betrift, so ist es gar nicht nothwendig, daß selbiges die Gestalt einer Scheibe völlig behalte: denn die jedesmahlige besondre Art, wie die Kraft am Umfang desselben angebracht werden und auf das Rad wirken soll, erfodert bald diese, bald eine andre Einrichtung desselben. Die Welle, welche umgedrehet werden soll, bleibt dabey allemahl das vornehmste Stück, und hiernächst ist die jedesmahlige Absicht, daß die Richtungslinie, nach welcher die angebrachte Kraft wirkt, beständig gleich weit von der Welle entfernt bleiben soll, die Welle mag sich drehen, wie sie wolle: daher kann man alle Arten der so genannten Haspel mit hieher rechnen, wenn nemlich an der Welle nur etliche Arme, wie CD, CG, CH, CI, befestiget sind, die von Menschen fortgeschoben werden können. Die Welle liegt in diesem Fall entweder wagrecht, oder sie stehet lothrecht: im ersten Fall heißt es ein **Kreuzhaspel**, (sucula) im letzten Fall eine **Erdwinde** oder **Göpel** (ergata). Befindet sich an der Welle ein wirkliches Rad, auf dessen Umfang Zapfen oder so genannte Hörner eingesetzt sind, so heißt es ein **Radhaspel**. Auch hat die **Kurbel** DEF (50 Fig.) die Natur des Rades, wenn mit der Welle AB ein grader oder krummer Arm DE so verbunden ist, daß an EF die Hand eines Menschen angreifen, und die Welle umdrehen kann.

117 §.

Die Rollen dienen auf zweyerley Art, vermittelst herum geführter Seile Lasten zu heben, und die eine Art ist schon aus dem vorhergehenden (32. 33 §.) bekannt. Das oben über die Rolle geführte Seil ABDE ändert nur die Richtung des an demselben her- 5 F.
ab hängenden Gewichts, und wenn die nach BA ziehende Kraft grösser als das an DE herabhängende Gewicht ist, so wird die Rolle umlaufen und solchergestalt die Last gehoben werden. Uebrigens bleibt der Polzen, welcher seine Unterstützung haben muß, an seiner Stelle unbeweglich. Wenn dagegen der Polzen in einer Art von Scheere oder einem so genannten **Kloben** so steckt, daß die Rolle zwischen den beyden Backen des Klobens um den Polzen laufen kann; wenn ferner das Seil EBAD unten um die Rolle ge- 40F.
führt, und oben bey D befestiget, unten am Kloben aber ein Hacken befindlich ist, woran die Last Q

 hängt;

hängt; so wird der Kloben mit dem daran hängenden Gewicht in die Höhe gezogen, wenn eine Kraft das Seil nach BE in die Höhe zieht, und so die Rolle in Umlauf bringt. Auch kann nun das Seil BE oben wieder um eine andere Rolle, die einen unbeweglichen Polzen hat, geführt, und daran ein Gewicht P aufgehängt seyn, oder statt dessen jemand das Seil FP herab ziehen. Die Rolle mit dem beweglichen Polzen und Kloben kann nun die untere Rolle heissen, um sie von der Rolle mit dem unbeweglich befestigten Polzen als der obern zu unterscheiden.

Durch die untere Rolle erlangt man den Vortheil, daß eine Kraft P, welche nur der halben Last Q gleich ist, mit ihr das Gleichgewicht hält, wenn die Seile DA, BE, mit einander parallel herab hängen. Denn man kann den wagrechten Durchmesser AB der Rolle für sich allein als einen Hebel der zweyten Art betrachten, von dessen Mitte C die Last herab hängt; auch erhellet von selbst, daß beyde Seile AD, BE, im Zustande des Gleichgewichts gleich stark gespannt sind, mithin gleiche Theile der Last tragen. Weil übrigens Rolle, Polzen und Kloben selbst schwere Körper sind, so muß man ihr Gewicht mit zur Last rechnen.

118 §.

41. Man kann zwey oder mehr Rollen, vermittelst
42F. zweener Kloben so zusammen ordnen, wie es die 41 und 42 Fig. vorstellen. Der obere Kloben hängt vermittelst eines Hackens an einer zulänglich festen Unterstützung: überdem ist entweder der obere Kloben unten bey A, (41 Fig.) oder der untere Kloben oben bey A (42 Fig.) mit einem Hacken versehen, woran ein Seil befestiget, und wechselsweise um eine obere und

und untere Rolle geführt ist, bis es zuletzt entweder von I nach K herab hängt, wie in der 41 Figur, oder unten von I nach K, wie in der 42 Fig. hinauf geführt ist. Eine solche Zusammenordnung mehrerer obern und untern Rollen heißt ein **Flaschenzug**. Damit die Seile sich nicht an einander reiben, muß jedes folgende Paar Rollen von den beyden mittlern angerechnet im Durchmesser etwas grösser seyn, als das vorhergehende: auch sucht man alles so einzurichten, daß die Seile, wenn sie durch das unten angehängte Gewicht Q gespannt sind, nur wenig von der parallelen Lage abweichen. Das letztere erhält man am besten, wenn die Kloben wagrecht hängen, und die Rollen neben einander, nicht unter einander, laufen. M. s. **Leupold** im Theatro Machin. Gener. Cap. III. §. 63.

119 §.

Wenn alle Seile am Flaschenzuge parallel hängen, und vollkommen biegsam sind; so ist die Kraft in der Last, der sie das Gleichgewicht hält, so vielmahl enthalten, als Eins in der Zahl aller Seile, woran der untere Kloben mit der Last hängt. 41. 42F.

Beweis. Im Zustande des Gleichgewichts müssen alle Seile gleich stark gespannt seyn: mithin trägt jedes Seil, wofern sie parallel hängen, soviel von der Last, als jedes der übrigen. Demnach ist es soviel, als wenn an jedem Seil ein solcher Theil der Last hienge, der gefunden wird, wenn man die Last mit der Zahl der Seile dividirt, woran der untere Kloben hängt, und dieser Theil der Last wird von dem Gewicht P, (41 Fig.) oder der Kraft V (42 Fig.) im Gleichgewicht erhalten.

In dem Fall, welchen die 41 Fig. vorstellt, ist also $P = \frac{1}{4} Q$, in dem Fall aber, welchen die 42 Fig. vorstellt, ist $V = \frac{1}{5} Q$. In diesem letzten Fall könnte auch der obere Kloben noch eine Rolle haben, und an dem darüber hingeführten Seil ein Gewicht hängen, welches, um mit der Last das Gleichgewicht zu halten, ebenfalls $= \frac{1}{5} Q$ seyn müßte. Uebrigens siehet man wohl, daß das Gewicht des untern Klobens mit seinen Polzen und Rollen mit zur Last gerechnet werden müsse.

41 F. Wenn die Kraft grösser ist, als zum Gleichgewicht nöthig ist, und die Last Q gehoben wird, indem die Kraft P sinkt; so verkürzen sich alle Seile, woran der untere Kloben hängt, und das Seil, woran die Kraft hängt, wird länger. Steigt die Last um einen Fuß höher, so sinkt die Kraft um soviele Fusse, als Seile vorhanden sind, woran die Last hängt: denn das Seil, woran die Kraft hängt, muß um eben soviel länger werden, als sich alle Seile zusammen, woran die Last hängt, verkürzen. **Demnach verhält sich auch beym Flaschenzuge die Last zur erhaltenden Kraft umgekehrt, wie der Weg der Kraft zum Wege der Last.**

120 §.

43 F. Wenn die Welle KL eines Rades mit einer Ebene auf ihrer geometrischen Axe AB senkrecht geschnitten wird, so heißt der Halbmesser EF des Kreises, den dieser Schnitt zuwege bringt, Kürze halber der Halbmesser der Welle. Liegt nun die Richtung eines Widerstandes, der sich dem Umlauf der Welle widersetzt, in einer solchen Ebene, so daß er zugleich den Umfang der Welle berührt, so ist die Entfernung dieser Rich-

tungslinie von der Axe AB dem Halbmesser EF der Welle gleich. Wenn alsdenn ferner die Richtungslinie der Kraft V, welche das Rad zu drehen strebt, den Umfang des Rades berührt; so erhalten Kraft und Last einander im Gleichgewicht, wenn sich die **Kraft zur Last verhält, wie der Halbmesser der Welle zum Halbmesser des Rades.** (101 §.)

Dies Gesetz des Gleichgewichts bleibt allemahl, die Welle mag wagrecht liegen oder lothrecht stehen, wenn nur die Richtungen der Kraft und Last in Ebenen liegen, die auf der Axe der Welle senkrecht, und zugleich Tangenten vom Umfang der Welle und des Rades sind. Auch alsdenn, wenn dieser letzte Umstand wegfiele, aber die **Richtungen noch in Ebenen liegen, welche die Umlaufs-Axe senkrecht schneiden, sind Kraft und Last im Gleichgewicht, wenn ihre Momente gleich groß sind.**

Eben das Gesetz findet bey allen Arten der Haspel seine Anwendung, wenn die Kraft gegen einen Arm des Haspels senkrecht drückt, und ihre Richtung eben so, wie die Richtung der Last in einer auf der Umlaufs-Axe senkrechten Ebene liegt.

Man kann sich ein Seil um den Umfang des Rades, wie um eine Rolle vorstellen, woran ein Gewicht V als die Kraft herab hängt, die beym gehobenen Gleichgewicht die Last P vermittelst des Seils herauf zieht, welches sich um die Welle wickelt. Wenn nun Rad und Welle einmahl umgelaufen sind, so ist die Kraft um eine Tiefe gefallen, die der Peripherie des Rades gleich ist, und die Last um eine Höhe gehoben, die so groß ist, als die Peripherie der Welle.

Weil nun diese Peripherien sich wie die Halbmesser verhalten, (195 §. Geom.) so erhellet, daß auch beym Rade an der Axe die Last sich zur erhaltenden Kraft verhalte, wie der Weg der Last zum Wege der Kraft. Wenn gleich Rad und Welle keinen ganzen Umlauf machten; so würden doch die Bogen von den Peripherien des Rades und der Welle einander ähnlich seyn, von welchen sich beym Rade der Theil des Seils abwickelt, welchem der Weg der Kraft gleich ist, und bey der Welle derjenige Theil des Seils, welcher so groß ist, als der in eben der Zeit zurück gelegte Weg der Last: diese Bogen aber verhalten sich ebenfalls wie ihre Halbmesser. (199 §. Geom.)

121 §.

Ein Rad, wenn es sich drehet, kann ein andres zugleich mit umdrehen, wenn jenes auf seinem Umfange Erhöhungen hat, die in Vertiefungen auf des andern Umfang eingreifen, da dann diese Erhöhungen Zähne oder auch Kämme heissen. Das Rad heißt ein Sternrad, wenn die Zähne in der Ebene des Rades nach den Richtungen des Halbmessers liegen; ein Kronrad oder Kammrad aber, wenn sie auf des Rades Ebene senkrecht stehen. Wenn von zweyen Rädern, davon eins in das andre eingreift, das eine in Vergleichung des andern nur klein ist, so wird es ein Getriebe genannt: die Gestalt desselben kann von der gewöhnlichen Gestalt des Rades verschieden seyn, weil es nur dienen soll, daß die mit demselben verbundene Welle von den Zähnen oder Kämmen des anliegenden Rades in Umlauf gebracht werden könne. Wenn das Getriebe aus zwoen parallelen selen Scheiben bestehet, die vermittelst mehrerer an ihrem Umfang eingesetzter mit der Axe der Welle parallel liegender Stäbe zusammengefügt sind, so heißt es ein Trilling, und die Stäbe dienen statt der Zähne. Die Triebstöcke des eigentlich so genannten Getriebes sind am Umfang der Welle eingelegt: zuweilen sind in der Welle Vertiefungen eingeschnitten, und alsdenn heißt es ein Kumpf.

Räder, welche durch eine um ihre Peripherie geführte Schnur, die in solcher Absicht eine Vertiefung haben muß, einander in Bewegung setzen, heissen Seilräder. Beyde Enden der Schnur müssen gehörig zusammen gefüget seyn, und sie heißt alsdenn eine Schnur ohne Ende.

122 §.

Am Umfang des Rades *ABC* zieht die Kraft *P* nach der Richtung der Tangente *BP*, 44 F.
und das Getriebe *DHI* an der Welle desselben greift in die Zähne des zweyten Rades *EFG*, an dessen Welle *LMN* die Last Q nach der Richtung der Tangente herab zieht: man sucht das Verhältniß zwischen Kraft und Last, wenn beyde einander im Gleichgewicht erhalten.

Auflös. Es sey a des Rades ABC, und α des Getriebes DHI Halbmesser: wenn nun am Triebstecken D eine Last K wie vom Umfang einer Welle herab hienge; so würde im Fall des Gleichgewichts erfodert, daß diese Last $K = \frac{a}{\alpha} . P$ sey. (120 §.) Statt dessen könnte in E ein Widerstand seyn, der den Triebstock D hielte, daß er nicht steigen könnte, und wenn das ein Zahn des hineingreifengreifenden Rades EFG ist, so leidet dieser Zahn einen Druck $K = \frac{a}{\alpha} P$ nach der Richtung der Tangente EK. Des Rades EFG Halbmesser sey b, und der Welle LMN Halbmesser $= \beta$; so ist am Umfang der Welle die Last Q = mit der Kraft K im Gleichgewicht, wenn $Q = \frac{b}{\beta} . K$ genommen wird: (120 §.) also wird erfodert, daß $Q = \frac{b}{\beta} . \frac{a}{\alpha} . P$ sey, und es verhält sich die Last zur Kraft, wie das Product der Halbmesser beyder Räder zum Product der Halbmesser des Getriebes und der Welle, woran die Last hängt.

Wenn LMN ein Getriebe wäre, und der Triebstock R durch einen Widerstand gehalten würde, nachdem die Last Q weggenommen worden, so würde der Widerstand einen Druck = Q leiden. Dieser Widerstand könnte der Zahn S eines dritten Rades seyn, und mit dem Druck Q gegen S wäre an der Welle des dritten Rades eine Last $R = \frac{c}{\gamma} Q$ im Gleichgewicht, wenn der Halbmesser des dritten Rades $= c$, der Welle $= \gamma$ gesetzt wird. Für drey Räder also, wenn die Kraft P am Umfang des ersten, die Last R an der Welle des letzten Rades nach der Richtung der Tangente zieht, hat man $R = \frac{a}{\alpha} . \frac{b}{\beta} . \frac{c}{\gamma} . P$. Man kann eben so von drey Rädern auf das vierte, und von jeder Anzahl Räder, für welche dies Gesetz wahr ist, auf eine noch um Eins grössere Anzahl schliessen. Demnach verhält sich allemahl die Last am Umfang der letzten Welle zur Kraft am Umfang des ersten Rades, wie das Product

duct der Halbmesser aller Räder zum Product der Halbmesser aller Getriebe, die Welle, woran die Last hängt, statt des letzten Getriebes verstanden.

123 §.

Die Zahl der Zähne oder Kämme eines Rades ist gegeben und die Zahl der Stecken des Getriebes, worin das Rad eingreift: man soll finden, wievielmahl das Getriebe binnen der Zeit umläuft, da das Rad einen Umlauf macht. 44F.

Aufl. Weil jeder Zahn einen Triebstock, oder auch umgekehrt jeder Triebstock einen Zahn fortschiebt, wenn das Rad vom Getriebe in Umlauf gebracht wird, so ist das Getriebe einmahl herum, wenn soviel Zähne am Getriebe vorbey gegangen sind, als das Getriebe Stecken hat. Sovielmahl also die Zahl der Triebstecken in der Zahl der Zähne enthalten ist, soviel Umläufe des Getriebes erfolgen gegen einen Umlauf des Rades, und man findet die gesuchte Zahl der Umläufe des Getriebes, wenn man die Zahl der Zähne durch die Zahl der Triebstecken dividirt.

Die Zahl der Stecken des Getriebes DHI sey $m$mahl in der Zahl der Zähne des Rades EFG enthalten; so läuft das Getriebe DHI mit seiner Welle und dem Rade ABC in der Zeit $m$mahl um, da das Rad EFG mit der Welle LMN einen Umlauf macht. Der Welle LMN Peripherie sey $= p$, des Rades ABC Peripherie $= L$; so steigt die Last Q um eine Höhe $= p$, wenn die Kraft P um eine Tiefe $= mL$ sinkt, und es ist $p = 2\pi\beta$, $L = 2\pi a$, also $p : mL = \beta : ma$. Ferner ist $m = \frac{\text{Per. EFG}}{\text{Per. DHI}} = \frac{b}{\alpha}$, also $p : mL = \beta : \frac{b}{\alpha} . a = \alpha . \beta : a . b$, und eben so verhält sich P : Q. (122 §.)

(122 §.) Demnach ist wiederum die Kraft zur Last, wie der Weg der Last zum Wege der erhaltenden Kraft.

Setzt man den Umfang der zum Rade FST gehörigen Welle, woran die Last R hängt $= \Pi$, so ist Π der Weg der Last, wenn das Rad FST einmahl umläuft. Zugleich läuft das Rad EFG sovielmahl um, als die Zahl $\frac{\text{Periph. FST}}{\text{Periph. LMN}} = n$ anzeigt, also binnen eben der Zeit das Rad ABC sovielmahl, als Eins in der Zahl $n.m$ enthalten ist, und man hat $n = \frac{c}{\beta}$. Demnach ist in eben dieser Zeit der Weg der Kraft $= n.m.\mathrm{L}$, und man hat $\Pi : nm\mathrm{L} = \gamma : \frac{c}{\beta} . \frac{b}{\alpha} . a$ $= \alpha.\beta.\gamma : a.b.c = \mathrm{P} : \mathrm{R}$. Also ist das eben vorgetragene Gesetz des Gleichgewichts auch für drey Räder wahr, und weil man eben so von jeder Anzahl Räder auf die um Eins grössere Anzahl schliessen kann, so ist es allemahl wahr.

124 §.

Alle Rollen, die mit Gewichten beschwert sind, werden gegen ihre Polzen, und die Zapfen von den Wellen der Räder gegen die Zapfenlager gedrückt: also entstehet da, wo die inwendige Fläche der durch die Rolle gebohrten Oefnung sich am Polzen, und wo der Zapfen einer Welle sich am Zapfenlager reibt, der Widerstand der Friction, welchen die angebrachte Kraft noch ausser dem Widerstande der Last überwinden muß, bevor eine Bewegung erfolgen kann. Nimmt man an, daß diese Friction $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{3}$ des Drucks betrage, dem Polzen und Zapfen ausgesetzt sind,

sind, so kann man diese Friction leicht mit in Rechnung bringen, wenn vorher der Druck gefunden ist, welchem Polzen oder Zapfen ausgesetzt sind.

Der Polzen einer jeden Rolle, im Flaschenzuge sowohl, als auch wenn sie für sich allein gebraucht wird, ist einem Druck ausgesetzt, welcher so groß ist, als die Summe der doppelten Kraft und des Gewichts der Rolle: und um den Druck auf jeden von den beyden Zapfen der Welle eines Rades zu finden, muß man folgendes erwägen. Ein Theil dieses Drucks rührt vom Gewicht des Rades und der Welle her, und um diesen zu finden, betrachtet man die Sache so, als wenn das ganze Gewicht von Rad und Welle im Schwerpunct des aus beyden zusammengesetzten Körpers vereiniget wäre; so kann man nach Anleitung des 59 §. den Theil des Gewichts finden, der auf jeden Zapfen drückt. Ferner leidet die Axe AB 43 F.
noch in E einen Druck = P mit FP, und in C einen Druck = V mit DV parallel, (101 §.) also kann man auch dem 59 §. gemäß finden; wieviel Druck die Zapfen A und B wegen des Gewichts P, und überdem wegen der Kraft V leiden. Nachdem alle auf jeden Zapfen für sich drückende Kräfte so gefunden sind, kann man diejenigen, deren Richtungslinien nicht zusammen fallen, nach Anleitung des 99 §. auf eine bringen.

Wenn nun r den Halbmesser des Polzens, oder der Zapfens, und R den Halbmesser der Rolle oder des Rades, F die Friction am Polzen oder Zapfen, und V die Kraft am Umfang der Rolle oder des Rades bezeichnet, die mit F im Gleichgewicht ist, so hat man $V = \frac{r}{R} \cdot F$.

125 §.

Sucht man V durch einen Versuch zu finden, so hat man daraus $F = \frac{R}{r} . V$. Eigentlich wird man nur ein Paar Gränzen finden, zwischen welchen die Kraft V, welche mit der Friction das Gleichgewicht hält, enthalten ist, wie im 111 §, und wenn diese Gränzen $V + v$ sind, so ist F zwischen Gränzen $\frac{R}{r} . V$ und $\frac{R}{r} . (V + v)$ enthalten. Diesen Gründen gemäß hat Muschenbroeck das Reiben der Metalle untersucht, wovon schon im 112 und 113 §. vorläufig ist Nachricht gegeben ist. Sein so-
47F. genanntes Tribometer war eine 4 Zoll dicke hölzerne Welle AB, durch deren Mitte eine Axe EF aus gehärtetem Stahl gieng, deren beyde Enden die Zapfen E und F der Welle ausmachten: um aber die Versuche sowohl mit dickern, als auch mit dünnern Zapfen anzustellen, war der vorderste Theil E dieser Zapfen $\frac{1}{4}$ Zoll, der hintere C $\frac{1}{2}$ Zoll dick. Die Welle ward mit ihren Zapfen auf ein dazu eingerichtetes Gerüste gelegt, und man konnte sich dazu verschiedener Zapfenlager bedienen, die theils aus Franzosenholz, theils aus verschiedenen Metallarten verfertiget, alle aber wie die Zapfen selbst, wohl polirt waren. Um die Welle selbst war ein Seil geschlagen, woran zwey gleiche Gewichte P, Q, gehängt wurden, um den Druck gegen die Zapfenlager nach Gefallen zu vergrössern: an einer Seite der Welle aber hieng an einer subtilen Schnur eine Schaale, um darin die Gewichte R zu legen, welche die Schaale drehen sollten.

126 §.

Wenn bey Rollen und Rädern Seile gebraucht werden, so entsteht aus der Härte und Uebiegsamkeit der Seile, die bisher als vollkommen biegsam sind betrachtet worden, noch ein andres Hinderniß der Bewegung, und die Stärke des daher rührenden Widerstandes hängt von folgenden Umständen ab: 1) von der Kraft, womit die Seile gespannt sind; 2) von ihrer Dicke; 3) von ihrer Krümmung. H. Amontons hat diese Sache ebenfalls durch Versuche ins Licht zu setzen gesucht, die er in den Memoires de l'Acad. de Paris A. 1699, in der oben (112 §.) schon angeführten Abhandlung erzählt, und Nollet in den Leçons de Physique, T. III. Lect. IX. gleichfalls beschreibt. Die Resultate der Amontonschen Versuche sind folgende. Der von der Unbiegsamkeit der Seile abhängende Widerstand nimmt zu 1) im Verhältniß der Kräfte, welche die Seile spannen, 2) im Verhältniß der Dicke der Seile, 3) im umgekehrten Verhältniß der Durchmesser der Rollen, Wellen oder Räder, um welche sie gekrümmt sind. Herrn Nollets Versuche scheinen wegen des letzten Puncts von den Amontonschen etwas abzuweichen: soviel bleibt indessen richtig, daß der Widerstand desto grösser wird, je kleiner die Durchmesser der Rollen oder Räder sind, um welche sich die Seile biegen sollen. Weil nun auch bey einerley Druck die Friction am Polzen grösserer Rollen von einer kleinern Kraft an ihrem Umfang überwunden wird, so sind aus einem doppelten Grunde grössere Rollen den kleinern beym Gebrauch vorzuziehen.

Der VIII. Abschnitt.

Vom Keil und der Schraube.

127 §.

46F. Der **Keil** ist ein grades dreyseitiges Prisma DFGI, woran zwo Seitenflächen DG, EG, einen sehr spitzen Winkel mit einander einschliessen, um vermittelst desselben durch Schläge oder einen starken Druck auf die dritte Seite EH, welche der **Rücken** des Keils heißt, die Theile eines andern Körpers von einander zu treiben. Wenn die Grundflächen DEF, GHI des Prisma, also auch alle damit parallele Schnitte gleichschenklichte Dreyecke sind; so heißt auch der Keil **gleichschenklicht**, und von diesem gleichschenklichten Keil soll hier nur kurz gehandelt werden, weil umständlichere Untersuchungen nicht für die ersten Anfangsgründe gehören.

128 §.

45F. Das Dreyeck ABC sey ein Schnitt durch den Schwerpunct des Keils mit den Grundflächen parallel, und es sey AC = BC; so ist AB die **Breite** des **Rückens**, AC und BC stellen die **Breite** einer jeden der Seitenflächen vor, die den scharfen Winkel ACB einschliessen, und man nennt hier kürze halber AC oder BC die **Seitenlinie**, so wie DC die **Länge** des **Keils**. Ferner sey EHIF ein fester Körper, der in zwey bey G noch zusammenhängende Stücke gespalten ist, und eine Kraft P strebe den Keil nach der Richtung DC in den Spalt zu treiben. Nimmt man hiebey an, daß DC vertical, also AB horizontal sey, so kann man

man sich P als ein Gewicht vorstellen, welches den Keil nach der Richtung DC fortzuschieben strebt. Wenn nun gleich die innern Seitenflächen EG, FG, des Spalts, und die Seiten AC, BC, des Keils einander in mehrern Puncten berühren, mithin der Gegendruck über mehrere Puncte der Seiten des Keils vertheilt ist, so kann man sich doch eine mittlere **Richtung dieses Widerstandes** gegen jede von den Seiten des Keils vorstellen. Man nehme an, daß diese mittlern Richtungen in der Ebene des Dreyecks ABC liegen, daß E und F ihre Durchschnittspuncte mit AC und BC sind, und daß EF mit AB parallel, also $EC = CF$ sey. Wenn alsdenn EV auf AC, und FT auf BC senkrecht gezogen werden, so schneiden beyde einander in einerley Punct K der Linie DC, weil die Dreyecke ECK und FCK eine gleiche Seite und gleiche anliegende Winkel erhalten. Dies alles vorausgesetzt, kann man die Kraft P nach der Richtung DC als eine mittlere ansehen, und nach den Richtungen KE, KF, in zwo Seitenkräfte zerlegen, die beyde gleich groß werden, weil CKE, CKF, gleich grosse Winkel sind. (95 §.) Jede dieser Seitenkräfte sey $= p$, so ist $p = \frac{P \sin CKF}{\sin EKF}$, (98 §.) und wenn der halbe Winkel des Keils $ACD = \frac{1}{2} ACB = \alpha$ gesetzt wird, so hat man $CKF = 90° - \alpha$, $EKF = 180° - 2\alpha$: also erhält man $p = \frac{P \cos \alpha}{\sin 2\alpha}$, oder $p = \frac{P}{2 \sin \alpha}$. (234 §. Geom.)

129 §.

Die Kraft p nach KE drückt E nach EV, so wie 45F.
die Kraft p nach KF den Punct F nach FT drückt: aber wegen der Festigkeit der schon zum Theil gespal-

tenen Masse, deren Theile noch bey G zusammen hängen, widerstehen die Puncte E und F jenen Pressungen: dennoch kommt bey den fernern Untersuchungen über die Art, wie der Keil wirkt, alles darauf an, wie man sich diesen Widerstand vorstellen will. Wofern man annehmen kann, daß dieser Widerstand gegen E so groß, als gegen F, und überdem die Richtung desselben gegen die Seiten des Keils senkrecht sey; so ergiebt sich leicht das Verhältniß zwischen Kraft und Widerstand für den Fall des Gleichgewichts. Es sey nemlich dieser Widerstand bey E = R, und bey F eben so groß, so wird für den Zustand des Gleichgewichts erfordert, daß $p = R$ sey, weil die Richtungen dieser Kräfte der Voraussetzung gemäß einander grade entgegen gesetzt sind. Demnach erhält man $\frac{P}{2 \sin \alpha} = R$, und $P = 2 R \sin \alpha$. Es ist aber $\sin \alpha = \frac{AD}{AC}$, wenn also $2R = Q$ gesetzt wird, so erhält man $P = \frac{AD}{AC} \cdot Q$, und daraus folgt Borelli Regel: (De motu animalium L. I. Cap. XXII. Prop. 195.) es müsse sich im Fall des Gleichgewichts verhalten die **Kraft** zum **Widerstande, wie der halbe Rücken des Keils zur Seitenlinie, oder wie der Rücken des Keils zur Summe beyder Seitenlinien.**

130 §.

Weil man nicht schlechthin annehmen kann, daß die Richtung des Widerstandes allemahl auf den Seiten des Keils senkrecht sey; so sey E*r* diese Richtung, wobey vorausgesetzt wird, daß die Richtung F*s* des Widerstandes in F gegen BC eben die Lage habe, damit

mit Er und Fs einander in einerley Punct M der Linie DC schneiden. Nun entsteht aus den Kräften nach EV und EM eine mittlere nach jeder so angenommenen Richtung EN, daß sie durch einen Punct N der Verticallinie DC läuft: auf der andern Seite entsteht aus den Kräften nach FT und FM eine mittlere nach FN, die der mittlern nach EN gleich, und deren Richtung gegen DC unter dem Winkel DNF = DNE geneigt ist. Weil nun vorausgesetzt wird, daß alles in der Verticallinie DC hinlänglich unterstützt sey, so bleibt alles in Ruhe, wenn die Kräfte p nach EV, und der Widerstand nach EM im Gleichgewicht sind. Wenn nun der Widerstand nach EM $= \varrho$ gesetzt wird, so erfordert das Gleichgewicht, es müsse $p \sin NEV = \varrho \sin NEM$ seyn, (95 §.) also $p = \frac{\varrho \sin NEM}{\sin NEV}$: es war aber $p = \frac{P}{2 \sin \alpha}$, (128 §.) also erhält man $P = \frac{2\varrho \sin \alpha \sin NEM}{\sin NEV}$.

131 §.

Es ist gleichviel, wo man N in DC annehmen will, also kann man setzen, der Punct N rücke unendlich weit hinaus. Das heißt, die mittlern Richtungen durch E und F vertical annehmen, welches um deswillen verstattet ist, weil alsdenn die mittlere Richtung der auf E und F vertical herab drückenden Kräfte noch mit DC zusammen fällt. Es sey also EW vertical, so erhellet, wenn EN mit EW zusammen fällt, daß NEV = WEV = CKE $= 90° - \alpha$ werde, und NEM = WEM, mithin ist nun $P = \frac{2\varrho \sin \alpha \sin WEM}{\cos \alpha}$, oder $P = 2\varrho \tan \alpha \sin WEM$. 45F.

Könnte man weiter in einem besondern Fall beym Ge-

 brauch

brauch des Keils voraussetzen, daß die Richtung des Widerstandes bey E und F mit AB parallel sey; so hätte man WEM = WEL = 90°, mithin wäre alsdenn $P = q \tang \alpha$, wenn $2\varrho = q$ gesetzt wird, also $P = \frac{AD}{DC} \cdot q$. Das hiesse: **Die Kraft verhält sich zum gesamten Widerstand, wie der halbe Rücken des Keils zur Länge, oder wie der ganze Rücken zur doppelten Länge,** und das ist *Mersenni* Regel (Oper. Physico-Math. T. I. Paris 1644. Phaenom. Mech. Prop. XII.) Diese Regel widerspricht des Borelli Regel (129 §.) nicht: jede für sich könnte vielleicht in besondern Fällen ihre Anwendung finden.

132 §.

45 F. Wenn man sich die innern Seitenflächen EG, FG, des Spalts als ebene Flächen vorstellt, so ist es wohl am natürlichsten, daß man die Richtung des Widerstandes auf EG und FG senkrecht annehme. Denn würde der Keil von dem Widerstande zurück getrieben, so würden E und F in Kreisbogen gegen einander rücken, wovon GE und GF die Halbmesser sind. Wie sich nun in solchem Fall GE und GF um G drehen, so kann man für den Zustand des Gleichgewichts G als den unterstützten Punct betrachten, und EG, FG, für die mittlern Richtungen der auf E und F drückenden Kräfte annehmen, daß also bey dieser Voraussetzung EN und FN mit EG und FG zusammen fallen. Demnach sey Ev auf GE senkrecht und $DGE = \beta$, so ist $GEC = \alpha - \beta$, $GEV = 90° - (\alpha - \beta)$, $GEv = 90°$. Was nun im 130 §. NEM war, ist jetzt GEv, weil EN mit GE und EM mit Ev zusammen fällt, also

also wird $\sin NFM = 1$. Was eben daselbst NEV war, ist jetzt GEV, also wird $\sin NEV = \cos(\alpha - \beta)$, und man erhält $P = \frac{2\varrho \sin\alpha}{\cos(\alpha - \beta)}$. Daraus folgen die Regeln der Herrn *de la Hire* im Traité de Mecanique pag. 274 sq. und *s' Gravesande* Elem. Phys. Lib. I. Cap. XIV. Schol. 1. wovon man Hn. Bärmanns Diss. de cuneo Witteb. 1751. mit mehrern nachsehen kann.

133 §.

Zweene Puncte *A* und *B* einer Ebene *ABCD* 49 F. werden durch einen Widerstand gehalten, und an einem Punct *K* dieser Ebene ist eine Kraft *P* nach einer Richtung *KP* angebracht, die in dieser Ebene mit *AB* parallel liegt: man soll die Grösse und Richtung des Drucks auf die unterstützten Puncte finden.

Aufl. Weil die Lage der graden Linie AB gleichgültig ist, so betrachte man sie in verticaler Lage, damit P als ein vertical herab hängendes Gewicht angesehen werden könne. Aus A und B ziehe man AD und BC auf AB senkrecht, welche die Richtungslinie KP der Kraft P in C und D ebenfalls senkrecht schneiden. Wenn nun allein A so unterstützt wäre, daß sich die Ebene noch drehen könnte, so würde sie nicht in Ruhe bleiben: würde aber in C eine Kraft V in der verlängerten Richtung BC von der Grösse angebracht, daß aus beyden Kräften V und P eine mittlere in der Richtung AC nach CE entstünde, so wäre das Gleichgewicht hergestellt, wofern A nach keiner Seite weichen kann. Hiezu wird erfodert, daß $V \sin ECV = P \sin ECP$ sey, (95 §.) also $V = \frac{P \sin ECP}{\sin ECV}$. Es ist

 aber

aber sin ECP $= \frac{AD}{AC}$, und sin ECV $= \frac{AB}{AC}$; demnach findet man $V = \frac{AD}{AB} \cdot P$. Nun leidet A einen Druck nach AE $= \sqrt{(V^2 + P^2)}$, und derselbe zerlegt sich wieder in die Seitenpressungen nach AB $= P$, und nach AD $= V$. Ein Widerstand in B angebracht würde eben so das Gleichgewicht erhalten, alsdenn aber in der Richtung BC den Druck $V = \frac{AD}{AB} \cdot P$, so wie A nach der mit KP parallelen Richtung AB den Druck P, in der Richtung AD aber einen Druck $= \frac{AD}{AB} \cdot P$ leiden.

So drückt eine Thüre die Hacken, welche ihre Angel tragen, wenn diese Hacken sich in einer Verticallinie über einander befinden, weil die Thür eben so wirkt, als wenn ihr ganzes Gewicht vom Schwerpunct herab hienge. Wenn die Entfernung der Hacken von einander $= a$, der Abstand des Schwerpuncts von der Verticallinie durch die Hacken $= b$, das Gewicht der Thüre $=$ P ist; so tragen die Hacken in verticaler Richtung die ganze Last: überdem drückt eine Kraft $= \frac{b}{a} \cdot P$ den untern Hacken gegen die Wand, und eine eben so grosse Kraft strebt den obern Hacken aus der Wand heraus zu ziehen.

134 §.

48F. Es sey ABCD ein grader Cylinder, und GH ein Schnitt mit der Grundfläche in der Entfernung AG parallel: auf der Oberfläche dieses Cylinders sey eine krumme Linie AMNG nach dem Gesetz verzeichnet, daß wenn durch einen Punct M derselben eine grade Linie mit der Axe EF des Cylinders parallel geht und

den

den Umfang der Grundfläche in P trift, allemahl das Verhältniß AP : PM dem Verhältniß des Umfangs der Grundfläche zur Höhe AG gleich sey. Diese Linie heist eine Schraubenlinie, und AG ist eines Schraubenganges Höhe. Der Cylinder selbst wird die Spindel und der Umfang seiner Grundfläche oder eines jeden auf der Axe senkrechten Schnitts der Umfang der Spindel genannt.

Wenn PT in der Ebene der Grundfläche liegt, und die Grundfläche AB in P berührt; so berührt die Ebene PTM die Cylinderfläche in der graden Linie PM, und sie ist auf dem Halbmesser EP der Grundfläche senkrecht. (276 §. Geom.) Man nehme PT dem Bogen PA, und PV dem Bogen PBLA gleich, so ist TV dem Umfang der Spindel APBLA gleich. Man ziehe ferner TM und setze VX auf TV senkrecht, so ist $VX = \frac{TV}{TP} . PM = \frac{APBLA}{AP} . P$, also $VX = AG$. Es sey *m* ein Punct im Schraubengange so nahe bey M wie man will, und *mp* mit MP parallel, so ist eine grade Linie durch P und *p* eine Secante des Kreises AB, und eben so die grade Linie durch M und *m* eine Secante des Schraubenganges. Nimmt man alsdenn an, daß *m* näher nach M, mithin zugleich *p* näher nach P rücke, so nähert sich die Lage der Secante P*p* des Kreises AB der Lage der Tangente PT, die Lage der Secante des Schraubenganges aber der graden Linie TX. Wenn *m* mit M, also zugleich *p* mit P zusammen fällt, so fällt P*p* mit der Tangente TV zusammen, M*m* aber mit TX; und wenn *m* und *p* durch M und P nach A rücken, so werden M*m* und P*p* aufs neue Secanten des Schraubenganges und des Kreises AB. Daraus erhellet, daß die Lage der Schraubenlinie in M mit der Lage der graden Linie TX überein komme, also ist TX eine Tangente des Schraubenganges.

135 §.

48 F. Weil die Ebene des Dreyecks TVX auf der Grundfläche AB der Spindel senkrecht steht, so ist VTX der Neigungswinkel der Tangente des Schraubenganges gegen die Grundfläche. Wird dieser Winkel $= \alpha$ gesetzt, so hat man $\tang \alpha = \frac{VX}{TV}$. Man setze den Umfang der Spindel APBLA $= p$, die Höhe AG des Schraubenganges $= a$, so ist $VX = a$, $TV = p$, und man hat $\tang \alpha = \frac{a}{p}$. Wenn nun eine grade Linie MR in der Ebene TVX auf der Tangente des Schraubenganges TX senkrecht gesetzt ist, so ist sie zugleich auf dem Schraubengange in *M* senkrecht, und der Winkel SMR, den diese Normallinie MR mit der graden Linie PQ einschließt, welche durch M mit der Axe EF der Spindel parallel läuft, ist dem Neigungswinkel der Tangente des Schraubenganges gegen die Grundfläche gleich. Denn es ist $SMR + SMX = 90° = PTM + PMT$, und $SMX = PMT$, also $SMR = PMT$, oder $SMR = \alpha$. Ob nun gleich durch den Punct M auch andre grade Linien, die nicht in der Ebene PMT liegen, auf TX senkrecht seyn können; so wird doch hier, wenn von einer graden Linie die Rede ist, die in einem Punct M des Schraubenganges auf demselben senkrecht ist, nur diejenige verstanden werden, welche mit der Tangente durch *M* und der durch *M* mit der Axe der Spindel parallelen Linie *MP* in einerley

Ebene

Ebene liegt, mithin in derjenigen Ebene, welche die Axe der Spindel in der graden Linien MP berührt.

136 §.

Eine Kraft R ist an einem Punct M des Schraubenganges nach der darauf senkrechten Richtung MR angebracht; die äussersten Puncte E und F der Axe der Spindel werden so gehalten, daß sie sich um diese Axe frey drehen kann; in einem andern Punct A der Spindel ist eine Kraft V nach einer solchen Richtung $A\alpha$ angebracht, welche den durch A geführten Umfang der Spindel berührt: man frägt, wie groß V seyn muß, um mit R das Gleichgewicht zu halten, wenn V und R die Spindel auf entgegen gesetzte Art zu drehen streben. 48 F.

Aufl. Durch M sey MS mit der Axe EF parallel, und MZ in der Ebene RMS auf MS senkrecht gezogen: wenn alsdenn in der Ebene der Parallelen MP und EF auch MK auf MP senkrecht gesetzt wird, so ist die Ebene KMZ auf MP senkrecht, (276 §. G.) mithin ist sie auch auf EF senkrecht. (278 §. G.) Die Kraft R nach der Richtung MR zerlegt sich in zwo Seitenkräfte, die eine nach $MS = R \cos RMS$, die andre nach $MZ = R \sin RMS$, und RMS ist dem Neigungswinkel der Tangente durch M gegen die Grundfläche gleich. (135 §.) Wenn also dieser Winkel $= \alpha$ gesetzt wird, so ist die Kraft nach MS $= R \cos \alpha$, nach $MZ = R \sin \alpha$. Die erste drückt die Axe EF nach der mit MS parallelen Richtung, und zugleich leiden die Puncte E und F jeder für sich einen Druck $= \frac{KM}{EF} \cdot R \cos \alpha$ nach den Richtungen EP und Ff auf EF senkrecht. (133 §.) Diese Kraft nach MS wird also der Voraussetzung gemäß durch das, was die Puncte E und F hält, völlig im Gleichgewicht erhalten. Die Richtungen der Kräfte V nach $A\alpha$ und $R \sin\alpha$ nach MZ liegen in Ebenen, die auf der Axe EF senkrecht sind, also erhalten sie einander im Gleichgewicht, wenn ihre Momente gleich sind. (101 §.) Weil nun ihre Richtungslinien von der Axe gleichweit entfernt sind, so wird zum Gleichgewicht erfordert, daß $V = R \sin\alpha$ sey. Aus jeder von diesen beyden Kräften entsteht alsdenn noch auf E und K ein Druck, der diesen Kräften gleich, und mit dieser Kräfte Richtungen parallel ist.

Würden die Puncte E und F zwar so gehalten, daß sie nicht nach den auf EF senkrechten Richtungen weichen könnten, aber ohne daß etwas den Druck nach der Richtung EF aufhielte; so müste um das Gleichgewicht zu erhalten, gegen E in der Richtung EF ein Druck $P = R \cos\alpha$ angebracht werden, und man findet das Verhältniß $P : V = \cos\alpha : \sin\alpha = 1 : \tan\alpha$. Wenn demnach, wie im 135 §., p den Umfang der Spindel, und a die Höhe des Schraubenganges bezeichnet; so ist $P : V = 1 : \frac{a}{p} = p : a$.

137 §.

Wenn um den Cylinder, oder die so genannte Spindel, eine Erhöhung so geführt ist, wie es die Gestalt der Schraubenlinie erfordert; so hat man eine eigentlich so genannte Schraube, und man könnte diese um die Spindel geführte Erhöhung das Schraubengewinde nennen, um es von der Schraubenlinie zu unterscheiden. Hat ein andrer Körper eine cylin-

cylindrische Oefnung von einer solchen Dicke, daß die Spindel genau darin passen würde, und ist auf der innern Fläche dieser Oefnung eine Vertiefung gleichfalls in der Gestalt des Schraubenganges so eingeschnitten, daß jener erhabene um die Spindel geführte Schraubengang darin passet; so heißt dieser hohle Cylinder mit seinem inwendigen Schraubengewinde die **Mutterschraube.**

138 §.

Wenn Schraube und Mutterschraube in einander greifen, und eine Kraft *V* bey *A* in einer auf der Axe *EF* senkrechten Ebene, deren Richtung den Umfang der Spindel berührt, die Spindel um ihre Axe zu drehen strebt: wenn ferner ein Widerstand *P* die Axe nach ihrer Richtung drückt, der sich gegen die Kraft *V*, wie der Umfang der Spindel zur Höhe des Schraubenganges verhält; so ist alles im Gleichgewicht, wofern die Mutterschraube nicht weichen kann. 48F.

Beweis. Eine Kraft Y = V in einem willkührlichen Punct M des Schraubenganges gleichfalls in einer auf EF senkrechten Ebene in der Richtung MZ so angebracht, daß sie den Umfang der Spindel berührt, und ihr Moment dem Moment der Kraft V entgegen gesetzt ist, würde mit V im Gleichgewicht seyn, wenn nur ein Paar Puncte der Axe wie E und F gehalten werden, daß sie nicht seitwärts weichen können: aber der Druck P, den man sich als ein Gewicht vorstellen kann, wenn EF vertical stehet, würde die Axe nach der Richtung FE treiben. Eine neue Kraft X = P an M in der Richtung MS mit EF parallel

rallel angebracht, würde diesen Druck aufhalten, aber überdem verursachen, daß E und F nach Richtungen, die auf EF senkrecht sind, gedruckt würden. Weil nun die Richtungen dieser Pressungen sowohl, als auch der vorigen, die von den Kräften V und X an der Axe entstehen, auf der innern Fläche der Mutterschraube senkrecht sind, so werden sie von ihr völlig aufgehalten. Aus beyden Kräften X nach MS und Y nach MZ entsteht eine mittlere R nach einer Richtung MR in der Ebene, die den Umfang der Spindel in MS berührt, wenn $R = \sqrt{(V^2 + P^2)}$ angenommen wird: und weil der Voraussetzung gemäß $P = \frac{p}{a} V$ ist, so hat man $R = V \sqrt{\left(1 + \frac{p^2}{a^2}\right)}$. Ferner sey TX eine Tangente durch M, ihr Neigungswinkel gegen die Grundfläche der Spindel $= \alpha$, und die Figur sey übrigens, wie im 136 §. gezeichnet; so liegt TX in der Ebene ZMS, und man hat $\frac{p}{a} = \cot \alpha$, (135 §.) also $R = V \operatorname{cosec} \alpha$. Ueberdem ist $Y = R \sin RMS$, oder $R = \frac{Y}{\sin RMS} = Y \operatorname{cosec} RMS$; also $V \operatorname{cosec} \alpha = Y \operatorname{cosec} RMS$, und weil $V = Y$ genommen ist, so erhält man $RMS = \alpha$. Weiter ist $SMX = 90^\circ - \alpha$, also $RMX = RMS + SMX = 90^\circ$, mithin ist MR auf dem Schraubengange in M senkrecht: demnach erhält, statt der Kräfte nach MS und MZ, auch die Kraft R nach MR mit V und P das Gleichgewicht.

Anstatt der einen an M angebrachten Kraft $Y = V$ könnten mehrere dergleichen Kräfte an eben sovielen Puncten des Schraubenganges angebracht seyn: wenn nur

nur die Richtungen aller dieser Kräfte in Ebenen liegen, die auf EF senkrecht sind, und wenn überdem ihre Summe der Kraft V gleich ist, so bleiben sie mit V im Gleichgewicht, vorausgesetzt, daß ihrer aller Momente dem Moment der Kraft V entgegen gesetzt sind. Wenn alsdenn an eben den Puncten auch Kräfte mit EF parallel angebracht sind, die sich wie die vorigen der Kraft V entgegen gesetzten verhalten, so sind diese mit P im Gleichgewicht, wenn ihre Summe $= P$ ist. Aus jedem Paar so zusammengehöriger an einerley Punct angebrachter Kräfte, wovon eine $= \frac{1}{m} V$, die andere $= \frac{1}{m} X$ wäre, entstünde alsdenn nach der auf den Schraubengange senkrechten Richtung eine Kraft $= \frac{1}{m} R$, und aller Summe wäre $= R$.

Wenn also entweder ein Punct, oder auch mehrere Puncte des Schraubenganges durch einen unbeweglichen Widerstand gehalten werden, daß sie nach der darauf senkrechten Richtung $M\mu$ nicht weichen können; so ist alles im Gleichgewicht, und der Widerstand thut eben das, was die auf den Schraubengang senkrechten Kräfte thun würden, deren Summe $= R$ ist. Statt dieses Widerstandes aber dient das vertiefte Gewinde der Mutterschraube, wenn alles gehörig in einander paßt, weil $M\mu$ darauf ebenfalls senkrecht ist, und weil vorausgesetzt wird, daß die Mutterschraube nicht weichen könne.

139 §.

Bey der angenommenen Voraussetzung, daß Schraube und Mutterschraube genau in einander passen, vertheilt sich der auf den Schraubengang senkrechte Druck auf denselben gleichförmig, soweit die Spindel in die Mutterschraube eingreift. Wenn dagegen

gegen nur einige Theile allein sich an einander klemmen, ohne daß die übrigen einander zugleich eben so genau berühren; so leiden jene allein den Druck und müssen abspringen, wenn sie nicht genugsame Stärke
48F. haben. Würde ein einziger Punct M allein gepreßt, so müßte er den ganzen Druck R nach der senkrechten Richtung $M\mu$, also einen Druck = P nach der Richtung MP leiden. Wenn man sich nun das Dreyeck TVX wie im 134 §. vorstellet; so kann man TX als eine geneigte Ebene betrachten, wenn TV horizontal wäre, auf der die Last P nach MP gegen die Grundlinie TV senkrecht drückt: alsdenn müßte eine mit der Grundlinie parallele Kraft $V = \frac{VX}{TV} . P = \frac{a}{p} . P$ seyn, wenn sie mit P das Gleichgewicht halten sollte, und eben das ist bey der Schraube das Verhältniß zwischen der erhaltenden Kraft und der Last. Daher kommt es, daß von verschiedenen Schriftstellern die Sache so vorstellig gemacht wird, die Schraube sey eine schiefe Ebene um einen Cylinder gewunden; und diese Vorstellung hat wohl nur daher ihren Ursprung, weil man eine schiefe Ebene mit Kraft und Last gewöhnlich nur im Durchschnitt wie ein rechtwinklichtes Dreyeck zeichnet, dessen Hypothenuse die schiefe Ebene vorstellet. Das Dreyeck TVX liesse sich wohl um den Cylinder ABCD so umwinden, daß die Grundlinie TV um den Umfang der Grundfläche APBLA gelegt würde, und die Fläche TVX sich nach der Cylinderfläche krümmen müßte: solchergestalt würde aus TX die Schraubenlinie werden. Wollte man sich aber TX selbst als eine Ebene vorstellen, die so um den Cylinder gewunden werden sollte, daß aus ihr das eigentliche Schraubengewinde würde, so könnte das mit der Natur einer

Ebene

Ebene nicht wohl bestehen, wie Hr. Hofr. Kästner erinnert. (Anfangsgr. 2 Th. 111 §. Stat.)

140 §.

Indem die Spindel einmahl um ihre Axe läuft, muß der Punct A einen Weg so groß als der Umfang der Spindel durchlaufen, zugleich aber rückt die Spindel nach der Richtung EF um die Höhe eines Schraubenganges fort, und schiebt die Last P um einen Weg von eben der Grösse vor sich her. Wenn nun während des Umlaufs die Kraft in A allemahl nach einer auf dem Halbmesser EA senkrechten Richtung in einer Ebene würkt, so ist p der Weg der Kraft, wenn a der Weg der Last ist, in dem Sinn, wie es im 107 §. ist erklärt worden: demnach gilt auch bey der Schraube das Gesetz, **vermöge dessen Kraft und Last sich gegen einander umgekehrt wie die Wege verhalten, die sie in gleichen Zeiten nach gehobenen Gleichgewicht zurück legen würden.**

141 §.

Man hat auch die Seitenflächen AC, BC, des Keils als schiefe Ebenen so betrachtet, als wenn der Widerstand bey E oder F eine Last wäre, die gegen DC senkrecht drückte, die Kraft P aber die Ebene in der Richtung DC unter der Last fortzuschieben, und sie solchergestalt zu heben strebte. Eine Kraft V nach der Richtung EZ mit DC parallel hält ein Gewicht R nach EL, wenn man sich EL vertical und DC horizontal vorstellt, im Gleichgewicht, wenn $V = \frac{R \,.\, AD}{DC}$ ist, und CD von einem wagrechten festen Boden gehalten wird. Wenn aber das ganze Dreyeck ADC von der Kraft V mit DC parallel an dem festen Boden fortgeschoben wird, so widerstehet das Ge- 45F.

wicht R in E nach EZ mit eben so grosser Gewalt. Mit der andern Hälfte BDC des Keils ist es eben so bewandt: wenn in E ein Widerstand R senkrecht gegen CD drückt, so wird in D nach der Richtung DC noch eine Kraft $V = \frac{R \cdot AD}{DC}$ zum Gleichgewicht erfordert, und die Grundlinie jeder Hälfte des Keils ist nun für die andre das, was der feste Boden für die bewegliche schiefe Ebene wäre, und in D nach DC wird am Keil eine Kraft $2V = P = \frac{2R \cdot AD}{DC}$ erfordert, um das Gleichgewicht zu erhalten, welches *Mersenni* Regel im 131 §. war.

Eben dieser Vorstellung gemäß kann man LC als den Weg betrachten, den die einem jeden Widerstande bey E oder F entgegen gesetzte Hälfte der Kraft P zurücklegt, indem die Last bey E oder F um den Weg LE fortgeschoben wird, und in diesem Verstande wäre das Gesetz auch für den Keil richtig, vermöge dessen **Kraft und Last sich umgekehrt, wie ihre in gleichen Zeiten zurück gelegten Wege verhalten.** Wollte man den Widerstand gegen die Seiten des Keils senkrecht annehmen, so wäre KE der Weg der Last, wenn KC der Weg der Kraft ist, und jenes Gesetz würde alsdenn auch mit **Borelli** Regel im 129 §. übereinkommen.

Das eben erwähnte Gesetz gilt für den Hebel, das Rad an der Axe, die geneigte Ebene, auch für den Flaschenzug und die Schraube eigentlich nur alsdenn, wenn zwey Kräfte im Gleichgewicht sind, wovon man sich vorstellt, daß beyde nach gehobenen Gleichgewicht in Bewegung kommen; am Keil aber wirken drey

drey Kräfte gegen einander, die diesen Vorstellungen gemäß alle drey in Bewegung kommen, wenn das Gleichgewicht gehoben wird. Daher könnte jenes Gesetz beym Keil zu Fehlschlüssen verleiten, wenn nicht jeder Theil der Kraft, der mit dem Widerstande bey E oder F für sich das Gleichgewicht hält, besonders betrachtet würde. Auch haben wirklich einige Schriftsteller EF für den Weg der Last angenommen, wenn LC den Weg der Kraft vorstellt, und so das Verhältniß der Kraft zur Last = AB : DC herausgebracht, welches nicht bestehen kann: es müßte denn seyn, daß durch die Last derjenige Widerstand allein verstanden würde, der für sich gegen E oder F drückt.

142 §.

Hebel und Rolle, das Rad an der Axe, der Keil und die Schraube heissen einfache Maschinen, weil es die gewöhnlichsten Theile sind, woraus man grössere Maschinen zusammen setzt, wohin schon der Flaschenzug und das Räderwerk gehören. Bey allen findet das Gesetz seine Anwendung, vermöge dessen zwo **Kräfte**, davon man eine als die Last betrachtet, welche durch die andre als die Kraft bewegt werden soll, einander im **Gleichgewicht erhalten, wenn sie sich in umgekehrter Ordnung wie die Wege verhalten, die sie in gleicher Zeit zurück legen würden.** Es ist von *des Cartes* zuerst in der Maschinenlehre gebraucht worden, und es heißt von ihm das **Cartesianische Grundgesetz der Statik.** Die Richtigkeit desselben ist bisher für alle einfache Maschinen bewiesen worden, und wie es auch bey zusammengesetzten Maschinen seine Anwendung finde, davon geben der Flaschenzug (119 §.) und das

Räderwerk (123 §.) schon eine Probe. Unten in der Maschinenlehre wird gewiesen werden, wie man sich von der allgemeinen Richtigkeit desselben auch bey zusammengesetzten Maschinen überzeugen könne.

143 §.

48F. Wenn an der Schraube ein Arm EO auf der Axe senkrecht angebracht ist, und in O nach der Richtung OW in einer auf der Axe senkrechten Ebene eine Kraft W unter dem rechten Winkel EOW gegen den Arm drückt; so findet man leicht das Verhältniß der Kraft W zur Last P für den Zustand des Gleichgewichts. Es sey EO $= b$, und der Spindel Halbmesser $= r$; an A sey nach Aα wie im 138 §. eine Kraft $V = \frac{a}{p}P$, und zugleich nach entgegengesetzter Richtung Aβ eine eben so grosse Kraft angebracht; so ist V nach Aα mit P im Gleichgewicht. (138 §.) Ferner sind W und V in der Richtung Aβ im Gleichgewicht, wenn $W = \frac{r}{b}V$ angenommen wird, da dann alle vier Kräfte einander im Gleichgewicht erhalten. Weil ferner beyde Kräfte an A im Gleichgewicht sind, so erhalten auch $W = \frac{r}{b}V = \frac{r \,.\, a}{b \,.\, p}P$ einander im Gleichgewicht. Es ist aber $p = 2\pi r$, also findet man für den Zustand des Gleichgewichts $W = \frac{a}{2\pi b} \,.\, P$, und $2\pi b$ ist der Umfang des Kreises, den O beschreibt, wenn die Spindel einmahl umläuft.

Weil $2\pi b$ der Weg der Kraft ist, der mit a als dem Wege der Last zusammen gehört, so ist das wiederum Cartesens Grundgesetz der Statik.

144 §.

Wird die Schraubenspindel in den Puncten E und F so gehalten, daß zwar der Umlauf frey bleibt, aber keine Bewegung in der Richtung EF erfolgen kann; so würde gar keine Bewegung entstehen können, wenn auch die Mutterschraube gehalten würde. Wofern dagegen die Mutterschraube gar nicht weiter gehalten würde, als in wie weit sie mit der hineingreifenden Spindel zusammenhängt; so würde sie mit der Spindel umlaufen ohne sich darauf zu verschieben. Hat man aber die Einrichtung so gemacht, daß die Umlaufsbewegung der Mutterschraube gehindert wird, ohne die Bewegung nach der Richtung der Axe EF zu hemmen; so wird von dem senkrechten Druck auf den Schraubengang $M\mu$, der sich in zwo andre mit TV parallel und darauf senkrecht zerlegt, nur der erste aufgehalten, der senkrechte nach MP aber strebt die Mutterschraube nach FE fortzuschieben, und ein in der Richtung EF entgegen gesetzter Druck $= \frac{2\pi r}{a} \cdot V$ oder $= \frac{2\pi b}{a} \cdot W$ hält alsdenn mit V in A oder W in O gehörig angebracht das Gleichgewicht. 48 F.

145 §.

Eine Schraube ohne Ende wird aus einer Schraubenspindel AB und einem Sternrade HI so zusammengefüget, daß die Schraubengewinde zwischen die Zähne des Sternrades, deren Figur darnach eingerichtet seyn muß, eingreifen, einen Zahn des Rades nach dem andern fortschieben, und so das Rad in Umlauf bringen können, wenn die Spindel umläuft. Letztere ist alsdenn, wie die Welle eines Rades mit 50 F.

einem Paar gehörig unterstützter Zapfen C, D, versehen, und um sie in Umlauf zu bringen, kann die Kurbel DEF dienen: die Lage ihrer Axe CD muß mit der Tangente des Rades, da wo die Schraubengänge eingreifen, parallel seyn.

Der Kurbel Halbmesser DE sey $= r$, die Weite der Schraubengänge $= a$, und eine Kraft V an der Kurbel strebe vermittelst derselben die Spindel umzudrehen: wenn alsdenn der Zahn G den anliegenden Schraubengang nach der Richtung CD mit einer Gewalt $Q = \frac{2\pi r}{a} . V$ drückt, so sind Q und V im Gleichgewicht. Wenn ferner e der Welle KL, und f des Rades HI Halbmesser ist, von der Welle aber die Last P herab hängt, so drückt der Zahn G in der Richtung CD mit einer Gewalt $= \frac{e}{f} . P$; also wird für den Zustand des Gleichgewichts erfodert, daß $\frac{e}{f} . P = \frac{2\pi r}{a} , V$ sey, also $P = \frac{2\pi rf}{a . e} . V$, und es ist $P : V = \frac{2\pi f}{a} . r : e$.

Die Zwischenweite a der Schraubengänge, von der Mitte eines Gewindes bis zur Mitte des folgenden muß so groß seyn, als die Entfernung der Mitte zweener zunächst auf einander folgender Zähne des Rades, und $2\pi f$ ist der Umfang des Rades HI; also ist $\frac{2\pi f}{a}$ die Zahl der Zähne des Rades. Bey jedem Umlauf der Spindel wird ein Zahn fortgeschoben, also ist $\frac{2\pi f}{a}$ zugleich die Zahl der Umläufe der Spindel, die auf einen Umlauf des Rades HI, mithin auch der Welle

Welle KL kommen. Bey jedem Umlauf der Welle KL legt die Last P einen Weg $= 2\pi e$ zurück, und die Kraft V einen Weg $= \frac{2\pi f}{a} \cdot 2\pi r$: also verhält sich der Weg der Last zum Wege der Kraft, wie $2\pi e : \frac{2\pi f}{a} \cdot 2\pi r = e : \frac{2\pi f}{a} \cdot r$, und eben so verhält sich die Kraft zur Last dem Cartesischen Grundgesetz gemäß.

Die Hydrostatik.

Der I. Abschnitt.

Allgemeine Grundlehren vom Gleichgewicht der Kräfte an flüssigen Massen.

1 §.

Wenn eine Masse so beschaffen ist, daß sich in derselben gar keine Theile angeben lassen, die mit einer merklichen Kraft zusammen hängen; so ist es eine **flüssige Masse**. Eine vollkommen flüssige Masse würde diejenige seyn, deren kleinste Theilchen gar nicht zusammen hängen. Dergleichen Massen giebt es zwar nicht in der Natur, weil die Wassertropfen davon einen Beweis abgeben, daß die Theilchen des Wassers, und andrer ähnlicher flüssiger Massen, allerdings einen geringen Zusammenhang unter einander haben: allein dieser geringe Zusammenhang wird hier nicht in Betrachtung gezogen werden.

2 §.

Alle bekannte körperliche Massen, auch die flüssigen sind schwer, und jedes Theilchen einer solchen Masse sinkt, wenn es nicht gehalten wird: es giebt also in der Natur keine flüssige Massen, deren Theilchen von aller Wirkung bewegender Kräfte frey wären, so wenig es dergleichen unter den festen Massen giebt. Um aber die Gesetze des Gleichgewicht für flüssige Massen eben so aus ihren ersten Gründen auf-

aufzusuchen, wie die Statik sie für feste Massen entwickelt hat, muß man sich anfangs flüssige Massen ohne Schwere vorstellen, eben so, wie die festen Massen anfangs so sind betrachtet worden, als wenn sie von aller Schwere frey wären. Alle Theilchen einer schweren flüssigen Masse sind der Würkung mechanischer Kräfte schon ausgesetzt: wenn man also wissen will, was die Wirkung der Schwere für einen Erfolg hat, so muß man sich zuerst vorstellen, was mit flüssigen Massen vorgehen würde, wenn sie nicht schwer wären, sonst aber eine oder mehr bewegende Kräfte nach angenommenen Gesetzen auf die Masse wirkten.

3 §.

Es sey also ACBD ein Wasserkörper von willkühr- 51 F.
licher Gestalt und Grösse, aber ohne Schwere; kein Theilchen desselben sey dem Druck der Schwere oder sonst einer Kraft ausgesetzt: so wird niemand zweifeln, daß nicht alle Theilchen in völliger Ruhe bey einander bleiben würden, ohne ihre Lage gegen einander auch nur im geringsten zu ändern. Wäre nun ACBD ein fester Körper, wie etwa ein Stück Eiß, und könnte man nun an zwey von den kleinsten Theilchen desselben A und B gleich grosse Kräfte nach entgegen gesetzten übrigens aber in eine grade Linie zusammen fallenden Richtungen Aa und Bb, oder Aα und Bβ anbringen; so würden diese im Gleichgewicht bleiben. (30 §. Stat.) Dagegen kann keinesweges ein Gleichgewicht erfolgen, sobald die Masse flüssig ist; die Theilchen A und B werden nach den Richtungen der Kräfte Aa, Bb, oder Aα, Bβ, in Bewegung kommen, und nicht allein die grade vorwärts liegenden, sondern auch wohl einige der seitwärts liegenden Theilchen mit in Bewegung

bringen: jede flüssige Masse ist so beschaffen, daß ihre Theilchen sich an und neben einander von einer ungemein geringen Kraft bewegen lassen.

4 §.

51F. Soll indessen das Theilchen A nach A*a*, und B nach B*b* würklich in Bewegung kommen, wenn die Kräfte an A und B diese Theilchen gegen einander zu treiben streben; so müssen die seitwärts der gräden Linie AB liegenden Theilchen ausweichen, weil körperliche Massen, in so weit sie körperlich sind, nicht in einander hinein dringen können. Würde demnach dies Ausweichen der zwischen A und B liegenden Theilchen verhindert, so wäre es doch möglich, daß die auf A und B drückenden gleich grossen Kräfte einander im Gleichgewicht erhielten, nicht anders, als wenn AB ein fester unbiegsamer Stab wäre. Man stelle sich also die grade Linie AB als die geometrische Axe eines cylindrischen oder prismatischen Wasserkörpers vor, der von einer festen cylindrischen oder prismatischen Fläche eingeschlossen ist. Die Grundflächen des Wasserkörpers nehme man auf der Axe AB senkrecht an, ohne jedoch vorauszusetzen, daß diese Grundflächen feste Flächen sind; so hat man die Vorstellung von einer Röhre voll Wasser, die aber an beyden Enden offen ist. Schweres Wasser würde aus dieser Röhre heraus fliessen, allein eine flüssige Masse ohne Schwere würde darin ruhig bleiben, was auch die Röhre für eine Lage hätte.

Wenn nun gegen alle Puncte der Grundflächen des Wasserkörpers gleiche Kräfte nach solchen Richtungen drücken, die auf den Grundflächen senkrecht sind, so ist es eben soviel, als wenn diese Kräfte gegen eine feste Masse drückten, weil die Theilchen der flüssigen Masse nicht seitwärts weichen, auch wegen ihrer Undurchdringlichkeit nicht selbst in einander hineindringen können. Es wird also nur darauf ankommen, ob vielleicht die flüssige Masse elastisch sey, und eben um deswillen sich in einen engern Raum zusammendrücken lasse. **Nimmt man an, die Masse lasse sich nicht zusammen drücken; so ist offenbar, daß die gegen** *A* **drückenden Kräfte mit den gegen** *B* **drückenden im Gleichgewicht bleiben.**

5 §.

Flüssige Massen, die sich durch einen äussern Druck nicht in einen engern Raum zusammen pressen lassen, sollen hier **unelastische** heissen. Wasser ist vielleicht wenigstens in seinen kleinsten Theilchen elastisch: ob es sich durch einen äussern Druck in einen engern Raum zusammen pressen lasse? war bisher noch nicht völlig entschieden: nun aber scheint es vermöge ganz neuer Versuche, die zu Braunschweig sind angestellt worden, ausgemacht zu seyn, daß das Wasser sich allerdings zusammen drücken lasse. Man sehe davon das 153 Stück der Göttingischen Anzeigen von gelehrten Sachen vom Jahr 1777. Soviel ist indessen gewiß, daß der Raum den eine Masse Wasser einnimmt, auch bey sehr starken Druck sich nur wenig ändre: wenn aber auch die Aenderung noch beträchtlicher wäre, als sie beym Wasser in der Natur wirklich befunden wird, so würde das doch eben keine Aenderung des Redegebrauchs in den mechanischen Wissenschaften nothwendig machen. Das Wort **Wasser** bezeichnet hier jede unelastische flüssige Masse, und durch den Nahmen der **Hydrostatik**, ob er

gleich

gleich von dem Wort: **Wasser**, hergenommen ist, verstehet man die Wissenschaft von den Gesetzen, nach welchen mechanische Kräfte auf unelastische flüssige Massen wirken müssen, wenn sie einander im Gleichgewicht erhalten sollen. Diese Gesetze des Gleichgewichts finden alsdenn wenigstens so lange auch bey dem in der Natur wirklich vorhandenen Wasser ihre Anwendung, als die Aenderung des Raums, den es einnimmt, unbeträchtlich bleibt, wenn es dem Druck mechanischer Kräfte ausgesetzt ist.

6 §.

52 F. Es stelle nun ABCD eine verticalstehende cylindrische oder prismatische Röhre mit einem wagrechten ebenen Boden BC vor, in derselben befinde sich Wasser von BC bis an EF, und die höchste Fläche EF sey mit BC parallel. (Man muß hier noch nicht daran denken, daß natürlich schweres Wasser sich von selbst an der höchsten Fläche in wagrechten Stand setzen würde: das ist schon eine Wirkung der Schwere, die im folgenden wird betrachtet werden.) Auf die ebene Fläche EF des Wasserkörpers drücke ein Gewicht P, das über die ganze Fläche gleichförmig vertheilt ist, so daß auf jedes Stück *mn* dieser Fläche ein Theil des ganzen Gewichts drückt, der sich gegen das ganze P wie *mn* zu EF verhält; so ist das eben soviel, als wenn auf alle Puncte der Fläche EF gleiche Kräfte drückten. Man kann sich P als einen schweren Cylinder oder als ein schweres Prisma vorstellen, das an der innern Fläche der Röhre allenthalben genau, jedoch ohne Friction anschließt, und dessen Masse überall eine gleichförmige Dichtigkeit hat. Wäre in BC kein fester Boden, so müste dem Druck P gegen EF ein eben so

grosser

grosser Druck senkrecht gegen BC, der auch eben so gleichförmig über BC vertheilt wäre, entgegen gesetzt seyn, um das Gleichgewicht zu erhalten: also leistet der feste Boden das, was jener entgegen gesetzte Druck leisten würde. Aber eben daraus folgt, daß der feste Boden eben so gedrückt wird, als wenn das Gewicht P unmittelbar darauf läge. Der Druck P pflanzt sich vermittelst des Wassers gegen den Boden so fort, daß jeder Theil pq desselben einem Druck $= \frac{pq}{BC} \cdot P$ ausgesetzt ist.

Die Lage der Röhre ist nur um deßwillen anfangs vertical angenommen worden, damit solches die ersten Vorstellungen von der Sache erleichtere. Die Röhre kann jede Lage haben, wie es die 53 Figur vorstellt. 53F.
Man kann sich nun einen festen am innern der Röhre allenthalben genau anschliessenden, vermittelst der Stange OP in der Röhre ohne Friction beweglichen Stempel vorstellen, der eben so stark gegen EF gedrückt wird, als wenn ein Gewicht P wie vorhin dagegen drückte. Alles bleibt alsdenn wie vorhin, der feste Boden leistet das, was ein Stempel leisten würde, der auf BC mit eben der Gewalt entgegen drückte: also leidet noch BC den ganzen Druck P, und jeder Theil pq des Bodens den Druck $\frac{pq}{BC} \cdot P$.

7 §.

Mit diesen Sätzen würde es noch seine Richtigkeit haben, wenn auch EBCF eine feste Masse wäre, die an der innern Fläche der Röhre zwar allenthalben genau anschlösse, übrigens aber nach der Länge der Röhre darin ganz frey ohne Friction beweglich wäre Die flüssige Masse aber unterscheidet sich eben darin

von

von der festen, daß ihre Bestandtheilchen nach allen Seiten, mithin auch gegen die feste Seitenfläche, welche den Wasserkörper als eine Röhre umgiebt, auszuweichen streben: (4 §.) also wird die flüssige Masse, wenn sie dem Druck P gegen die Fläche EF ausgesetzt ist, auch allenthalben gegen die feste Seitenfläche der Röhre drücken. So wie sich der Druck P gegen die Grundfläche BC fortflanzt, nach eben den Gesetzen pflanzt er sich nach allen Seiten auch gegen die feste Seitenfläche fort, welche die Röhre umgiebt. Wenn die Röhre prismatisch, und GH ein ebenes Stück der Seitenfläche ist, so leidet GH einen senkrechten Druck $= \frac{GH}{EF} . P$: denn es ist offenbar, daß das Wasser durch GH ausspritzen würde, wenn man das Stück GH aus der festen Seitenfläche wegnähme, und ein über GH gleichförmig vertheilter Druck $\frac{GH}{EF} . P$, würde das Gleichgewicht herstellen. Auf einer festen Cylinderfläche könnte man kein ebenes Stück von einiger Grösse annehmen: indessen leidet doch jedes kleine Theilchen e^2 derselben, das von einer ebenen Fläche nicht merklich verschieden ist, einen Druck $= \frac{e^2}{EF} . P$. Ferner, wenn sich eine feste Fläche RS innerhalb der Wassermasse befände, so würde dieselbe auf jeder Seite einem senkrechten Druck $= \frac{RS}{EF} . P$ ausgesetzet seyn.

8 §.

52F. Es sey G das eigenthümliche Gewicht der schweren Masse, deren Gewicht P gegen EF drückt, und die Höhe EK $= a$, so ist $P = G . EF . a$, (15 §.) also der Druck gegen jedes Stück pq der festen Grund-

fläche

fläche = G . pq . a, und gegen jedes Stück GH der festen Seitenfläche = G . GH . a: auch ist der senkrechte Druck gegen jede feste Ebene RS innerhalb der Wassermasse = G . RS . a. Dies leitet auf eine sehr bequeme Art, den Druck in Rechnung zu bringen, welchem eine Wassermasse in allen ihren innern Bestandtheilen ausgesetzt ist, wenn gegen einen Theil ihrer äussern Gränze ein Druck preßt, und der übrige Theil in einer festen Fläche, wie in einem Gefäß eingeschlossen ist. Der Stempel EFKL kann in jeder Lage der Röhre ABCD gegen die Fläche EF eben so stark drücken, als das Gewicht P, wenn die Röhre vertical stünde, dagegen drücken würde, und überhaupt läßt sich, wie schon bekannt ist, jeder Druck durch ein Gewicht angeben, daß in verticaler Richtung eben so stark drücken würde. Anstatt des Gewichts selbst kann auch nur die Grösse eines Körpers von einer gleichartigen Masse und bekannter Dichtigkeit oder eigenen Schwere angegeben werden, dessen Gewicht eben so groß ist: daraus ist das Gewicht selbst leicht gefunden. Weil nun hier gewöhnlich von dem Druck gegen eine ebene Fläche die Rede seyn wird, der über diese Fläche gleichförmig vertheilt ist; so kann man sich über der Fläche als einer Grundfläche eine schwere cylindrische oder prismatische grade Säule aus einer gleichartigen Masse vorstellen, welche die Fläche, wenn sie wagrecht wäre, eben so stark drücken würde, und zugleich so, daß dieser Druck über der Fläche gleichförmig vertheilt wäre. Wenn alsdenn ausser dem eigenthümlichen Gewicht der zu diesem Zweck gewählten Masse nur die Höhe dieser Säule gegeben ist; so ist allemahl ihre Grösse zugleich mit gegeben, folglich auch ihr Gewicht.

9 §.

9 §.

Es hat bey den folgenden Anwendungen dieser Lehren seine Bequemlichkeit, wenn man den Druck gegen eine ebene Fläche, vorausgesetzt daß er darüber gleichförmig vertheilt sey, durch das Gewicht einer Wassersäule ausdrückt, welche die Fläche, wenn sie wagrecht wäre, eben so drücken würde, und die Höhe dieser Wassersäule heißt alsdenn die **dem Druck zugehörige Höhe.** Wenn alsdenn das eigenthümliche Gewicht des Wassers = 1 gesetzt wird, weil man ohnehin gewohnt ist, das specifische Gewicht andrer gleichartiger Massen damit zu vergleichen, so läßt **sich der Druck gegen jede Fläche durch ein Product des Quadratinhalts dieser Fläche in die dem Druck zugehörige Höhe ausdrücken,** da dann die Höhe in einem Längenmaaß gegeben seyn muß, das mit dem Quadratmaaß einerley Nahmen hat, worin die Grösse der Grundfläche angegeben ist. Man reducirt hiernächst, wenn es nöthig ist, die solchergestalt in Quadratfüssen oder Quadratzollen gefundene Zahl leicht auf Pfunde, oder einen andern Nahmen, wodurch man sonst Gewichte auszudrücken gewohnt ist, wenn man sie mit dem Gewicht eines Cubicfusses oder Cubiczolles Wasser multiplicirt.

10 §.

58F. **Wenn gegen die gradlinichte Figur** *ABCD* **nach der darauf senkrechten Richtung** *AE* **ein Druck preßt, der über diese Fläche gleichförmig vertheilt ist; so entsteht daher nach jeder andern Richtung** *AF* **ein Druck, der sich gegen den senkrechten Druck verhält, wie der senkrechte Schnitt eines Prisma auf der**

Grund-

Grundfläche *ABCD*, dessen Seitenlinien mit *AF* parallel sind, zur Fläche *ABCD*.

Beweis. Durch B, C, und D ziehe man BG, CH, DI, mit AF parallel, und lege durch A eine Ebene auf AF senkrecht, die also auch BG, CH, DI, in G, H, und I senkrecht schneidet: so ist ABCD der senkrechte Schnitt eines Prisma auf der Grundfläche ABCD, wozu AF, BG, CH, DI, als Seitenlinien gehören. Weil nun AE auf ABCD und AF auf AGHI senkrecht ist, so ist die Ebene FAE nicht allein auf ABCD, sondern zugleich auf AGHI senkrecht: (286 §. Geom.) folglich ist die Ebene EAF auf der Durchschnittslinie der Ebenen ABCD und AGHI, die durch A gehen muß, senkrecht, (289 §. Geom.) und eben deßwegen ist EAF die Ebene des Winkels, unter welchem ABCD und AGHI gegen einander geneigt sind. (284 §. Geom.) Es schneide also EAF die Ebene ABCD in AL und AGHI in AK, so ist KAL der eben erwehnte Neigungswinkel, und man hat $AGHI = ABCD \,.\, \cos KAL$. (305 §. Geom.) Ferner ist $EAF + EAK = R = EAK + KAL$, also $EAF = KAL$. Der senkrechte Druck gegen ABCD sey $= P$, so zerlegt sich derselbe in die Seitenkräfte nach $AK = P \sin EAF$ und nach $AF = P \cos EAF = P \cos KAL$. Wird dieser zuletzt genannte Druck $= V$ gesetzt, so hat man $\frac{V}{P} = \cos KAL$, und vorhin war $\frac{AGHI}{ABCD} = \cos KAL$, also ist $V : P = AGHI : ABCD$.

Wird die dem Druck P zugehörige Höhe $= a$, und das specifische Gewicht des Wassers $= 1$ gesetzt, so so ist $P = a \cdot ABCD$, (9 §.) also $V = \frac{AGHI}{ABCD} \cdot P = a \cdot AGHI$. Wenn also der senkrechte Druck gegen eine ebene gradlinichte Figur durch das Gewicht einer Wassersäule ausgedrückt wird, die ihre Grundfläche eben so stark preßt; so entsteht daraus nach jeder andern gegebenen Richtung ein Druck so groß, als das Gewicht einer Wassersäule von eben der Höhe, deren Grundfläche so groß ist als der senkrechte Schnitt eines Prisma auf jener gradlinichten Figur als einer Grundfläche, dessen Seitenlinien mit der gegebenen Richtung parallel sind.

11 §.

54F. In einer festen Fläche *ABCD* ist Wasser wie in einem Gefäß eingeschlossen, und die ganze Masse ist durch parallele Ebenen *EF*, *ab*, *cd*, *ef*, in Schichten getheilt; gegen jede von diesen Ebenen, die man als Grundflächen der Wasserschichten betrachten kann, drückt eine Kraft nach einer darauf senkrechten Richtung, und der Druck ist über jeder dieser Ebenen gleichförmig vertheilt: man soll den gesammten Druck finden, welchem *EF* ausgesetzt ist, vorausgesetzt, daß das Wasser selbst nicht schwer ist, und die Wasserschichten insgesamt gegen *EF* zugedrückt werden.

Aufl. Wenn gegen *ef*, *cd*, *ab*, EF, nach der Ordnung die Kräfte P, Q, R, S, drücken, so entsteht aus dem Druck P gegen *ef* ein Druck $\frac{cd}{ef} P$ gegen *cd*: (6. 7 §.) und weil *cd* für sich dem Druck Q ausgesetzt ist, so leidet *cd* zusammen einen Druck $= \frac{cd}{ef} P + Q$.

Aus

Aus diesem Druck gegen *cd* entsteht eben so gegen *ab* ein Druck $= \frac{ab}{ef} . P + \frac{ab}{cd} Q$, und hiezu kommt der Druck R, welchem *ab* für sich ausgesetzt ist. Der gesamte Druck $\frac{ab}{ef} . P + \frac{ab}{cd} Q + R$ pflanzt sich ferner gegen EF so fort, daß daher gegen EF ein Druck $= \frac{EF}{ef} . P + \frac{EF}{cd} Q + \frac{EF}{ab} R$ entsteht, und so ist EF zusammen dem Druck $\frac{EF}{ef} P + \frac{EF}{cd} . Q + \frac{EF}{ab} . R + S = EF . \left(\frac{P}{ef} + \frac{Q}{cd} + \frac{R}{ab} + \frac{S}{EF}\right)$ ausgesetzt.

Diese Schlüsse lassen sich fortsetzen, der Schichten zwischen parallelen Ebenen mögen soviele seyn, als man will. Weil nun $\frac{P}{ef}, \frac{Q}{cd}, \frac{R}{ab}, \frac{S}{EF}$, die den Pressungen P, Q, R, S, zugehörigen Höhen sind, (9 §.) so erhellet, daß die Höhe des Drucks, welchem jede von diesen Ebenen ausgesetzt ist, so groß sey, als die Summe der Höhen aller Pressungen, welche sich nach den Gesetzen des Gleichgewichts dagegen fortpflanzen, wenn noch die Höhe des Drucks hinzu gesetzt wird, dem die Ebene schon für sich ausgesetzt ist.

Wenn das Stück BCD der festen Fläche fehlte, und BD ein ebener mit EF paralleler Boden wäre, so litte dieser Boden einen Druck $= BD \left(\frac{P}{ef} + \frac{Q}{cd} + \frac{R}{ab} + \frac{S}{EF}\right)$: auch würde ein Druck gegen BD mit allen vorigen gegen *ef*, *cd*, *ab*, EF, im Gleichgewicht seyn, wenn seine Richtung den Richtungen jener Pressungen grade entgegen gesetzt, und die ihm zugehörige Höhe der Summe der Höhen jener Pressungen gleich wäre.

Der II. Abschnitt.

Vom Gleichgewicht des schweren Wassers in Gefässen und Röhren.

12 §.

52F. Wenn schweres Wasser in einem graden prismatischen oder cylindrischen festen Gefäß, ABCD dessen Grundflächen wagrecht sind, von allen Seiten eingeschlossen ist, und alle Bestandtheilchen des Wassers völlig in Ruhe sind; so ist jeder wagrechte Schnitt EF des Wassers einem Druck ausgesetzt, der so groß ist, als das Gewicht des darüber stehenden Wassers AEFD: auch ist dieser Druck über der Ebene des Schnitts EF gleichförmig vertheilt. Denn alle Bestandtheilchen des Wassers drücken vermöge ihres Gewichts nach lothrechten Richtungen herab, und es ist für sich klar, daß EF einerley Druck leide, es mag über EF eine flüssige Masse von gleichartiger Dichtigkeit stehen, oder eine feste Masse, die mit der flüssigen einerley specifisches Gewicht hat, und an den Seiten des Gefässes allenthalben genau anschließt, aber doch in demselben ohne Friction frey beweglich ist.

Aber auch nur dieser Druck, gegen die wagrechte Fläche EF ist in beyden Fällen einerley, man mag sich AEFD als eine feste oder flüssige schwere Masse vorstellen: denn ausser dem Druck gegen EF strebt auch die flüssige Masse sich nach allen Seiten auszubreiten, und um deswillen ist zugleich jede angenommene Stelle der Seitenfläche des Gefässes einem darauf senkrechten Druck ausgesetzt. Wenn alles

les unterhalb EF im Gefäß befindliche Wasser keine Schwere hätte; so wäre der Druck gegen die Seiten des Gefässes zwischen BC und EF darüber gleichförmig vertheilt, und die diesem Druck zugehörige Höhe wäre = AE. Wenn dagegen alles im Gefäß befindliche Wasser schwer ist; so wächst die Höhe des Drucks gegen die Seiten des Gefässes so wie die Höhe des über der gepreßten Stelle stehenden Wassers. Es sey nemlich *ef* ein wagrechter Schnitt, der nur um ein sehr weniges tiefer als EF liegt, so ist A*e* die Höhe des Drucks gegen alle Puncte im Umfang der Durchschnittsfigur *ef*, und über das Stück der das Wasser umgebenden festen Fläche, welches zwischen EF und *ef* liegt, ist der Druck nicht mehr gleichförmig vertheilt.

Die obere wagrechte Grundfläche AD des Gefässes leidet gar keinen Druck, und das Gefäß könnte auch oben offen seyn, ohne daß dadurch im Zustande des Gleichgewichts der schweren Wassertheilchen untereinander das geringste geändert würde.

13 §.

Wenn schweres Wasser in einer festen unbiegsamen Fläche *ABCD* wie in einem Gefäß von allen Seiten eingeschlossen ist, und alle Bestandtheilchen desselben völlig in Ruhe sind; so ist jeder wagrechte Schnitt *EF* des Wassers einem Druck ausgesezt; dessen Höhe so groß ist, als die Entfernung der Ebene *EF* von einer andern wagrechten Ebene, welche das Gefäß oberhalb des Schnitts *EF* berührt. 54F.

Beweis. Wenn EF den von der festen Fläche ABCD eingeschlossenen Wasserkörper schneidet, GH aber denselben bey A berührt, und beyde Ebenen wagrecht angenommen werden; so kann man die Entfernung AK beyder Ebenen bey L, M, N, in soviele gleiche Theile als man will theilen, und durch die Theilungspuncte die Ebenen *ab*, *cd*, *ef*, ebenfalls wagrecht legen: dadurch wird der zwischen EF und GH befindliche Theil der ganzen Masse des Wassers in eben soviele über einander liegende Schichten getheilt. Wäre nun das Gewicht der untern Schichte E*abf* über der Ebene EF, das Gewicht der folgenden Schichte *acdb* über *cd*, und eben so das Gewicht einer jeden von den übrigen Schichten über ihrer untern wagrechten Grundfläche gleichförmig vertheilt; so würde daher ein Druck Π gegen EF entstehen, der nach den Regeln des 10 §. gefunden werden kann. Man bezeichne die Gewichte der Schichten, so wie sie von EF nach GH zu auf einander folgen, mit den Buchstaben P, Q, R, S, so ist der angenommenen Voraussetzung gemäß $\Pi = P + \frac{EF}{ab} Q + \frac{EF}{cd} R + \frac{EF}{ef} S.$ (10 §.) Wird ferner das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= 1$ gesetzt, so ist P = der körperlichen Grösse der Schichte E*ab*F, und eben so Q = der Schichte *acdb*, R = *cefd*, S = *e*A*f*. Stellet man sich überdem über den Grundflächen EF, *ab*, *cd*, *ef*, die graden Säulen E*gh*F, *aklb*, *cmnd*, *eopf* in gleicher Höhe mit jenem Schichten vor, so könnte wohl jede Säule der Schichte gleich seyn, die über eben der Grundfläche steht, wie wenn der Wasserkörper in einem schiefen Prisma oder Cylinder mit wagrechten Grundflächen eingeschlossen wäre: in allen Fällen aber hat man $\Pi = Eabf + \frac{EF}{ab} \cdot acdb + \frac{EF}{cd} \cdot cefd + \frac{EF}{ef} \cdot eAf$, und eben der Ausdruck

druck ist $= EF \left(\frac{Eabf}{Ef.Eg} . Eg + \frac{acdb}{ab.ak} . ak + \frac{cefd}{cd.cm} . cm + \frac{eAF}{ef.eo} . eo \right)$.

Je kleiner man die Höhen der Schichten annimmt, desto mehr nähern sich die Brüche $\frac{Eabf}{Ef.fg}$, $\frac{acdb}{ab.ak}$, $\frac{cefd}{cd.cm}$, $\frac{eAF}{ef.eo}$, dem Werth $= 1$, und was in dem besondern Fall, den die Figur vorstellt, Eg, ak, cm, eo sind, das ist in allen Fällen $\frac{1}{n} AK$, wenn die Zahl der Schichten $= n$ gesetzt wird. Demnach wird zuletzt, wenn die Zahl n über alle Gränzen wächst, der Druck $\Pi = EF . n . \frac{1}{n} AK = EF . AK$, und das ist der gesuchte Druck gegen EF, wovon man sich auf folgende Art in aller Schärfe überzeugen kann.

Man suche auch, wie groß der Druck gegen EF seyn müßte, wenn das ganze Gewicht einer jeden Schichte auf ihrer obern Grundfläche gleichförmig vertheilt wäre, so daß der Druck $P = EabF$ gegen ab, $Q = acdb$ gegen cd, $R = cefd$ gegen ef, und $S = eAf$ gegen $A\alpha$ preßte. Aus diesen Pressungen würde gegen EF ein Druck $\Pi^{x} = \frac{EF}{ab} . EabF + \frac{EF}{cd} . acdb + \frac{EF}{ef} . cefd + \frac{EF}{A\alpha} . eAf$ entstehen, (10 §.) und eben dieser Druck wäre $= EF . \left(\frac{EabF}{ab.aq} . aq + \frac{acdc}{cd.cs} . cs + \frac{cefd}{ef.eu} . eu + \frac{eAf}{A\alpha . \alpha\beta} . \alpha\beta \right)$, da dann die Nenner den körperlichen Inhalt der graden Säulen $qabr$, $scdt$, $uefw$, $NA\alpha\beta$, ausdrücken. Bey abnehmenden Höhen der Wasserschichten nähern sich die Brüche $\frac{EabF}{ab \,.\, aq}$, $\frac{acdb}{cd \,.\, ds}$, u. s. f. wiederum dem Werth $= 1$, und es wird zuletzt auch $\Pi^1 = EF \,.\, AK$.

Wenn nun, wie es die Figur vorstellt, die Querschnitte des Gefässes von A nach K zu wachsen, so ist dieser Druck $\Pi^1 > \Pi$, so lange n eine bestimmte Zahl ist, die sich angeben läßt, und der eigentlich gesuchte Druck gegen EF muß grösser als Π und kleiner als Π^1 seyn. Es sey nemlich xy ein Schnitt der Wassermasse zwischen ab und EF, und das Gewicht aller an diesem Schnitt unmittelbar gränzenden Wassertheilchen $= p$; so entsteht daher schon ein fortgepflanzter Druck $\frac{EF}{xy} \,.\, p$, der grösser als p ist, mithin muß der von dem gemeinschaftlichen Druck aller zwischen EF und ab befindlichen schweren Wassertheilchen gegen EF fortgepflanzte Druck grösser als die Summe ihrer Gewichte seyn, welches letztere die Rechnung annimmt, vermittelst welcher Π gefunden ist. Eben die Bewandniß hat es mit den übrigen Schichten, also ist der eigentlich gesuchte Druck $> \Pi$. Wie nun eben der Druck $\frac{EF}{xy} \,.\, p < \frac{EF}{ab} \,.\, p$ ist, so kann der gesammte gegen EF fortgepflanzte Druck nicht völlig $= \frac{EF}{ab} \,.\, P$ seyn, wie die Rechnung annimmt, vermittelst welcher Π^1 gefunden ist: also ist der gesuchte Druck gegen EF $< \Pi^1$, so lange n eine bestimmte Zahl ist, wie groß übrigens n angenommen wird. Es giebt aber keinen Werth, der allemahl zwischen den Gränzen Π und Π^1 enthalten ist, ohne nur den Werth EF . AK: demnach ist der gesuchte Druck eben so groß, als wenn über EF eine grade Wassersäule in der Höhe AK stünde, oder die dem Druck zugehörige Höhe ist = AK.

In dem Fall, wenn die Querschnitte des Gefässes bey zunehmender Tiefe AK kleiner werden, ändert sich in diesen Schlüssen nur der Umstand, das $\Pi^1 < \Pi$ würde gefunden werden, wenn $EF < ab$, $ab < cd$, u. s. f. wäre. Damit es nicht nöthig sey, beyde Fälle zu unterscheiden, kann man durch Π ein für allemahl den Druck verstehen, der sich gegen EF fortpflanzen würde, wenn das Gewicht einer jeden Schichte in ihrer grössern Grundfläche beysammen wäre, durch Π^1 denjenigen Druck, welchen EF litte, wenn das Gewicht einer jeden Schichte über der kleinern Grundfläche gleichförmig vertheilt wäre.

Wofern die wagrechten Schnitte des Gefässes bey wachsender Tiefe abwechselnd ab- und wieder zunehmen, wie es die 55 Figur vorstellt; so vertheilt sich das Gefäß an allen Stellen, wo die Schnitte HI, LM, NO, unter den zunächst vorhergehenden und folgenden am kleinsten oder größten werden, von selbst in solche Theile, wovon man jeden für sich als ein Gefäß von der vorhin betrachteten Art ansehen kann. Alsdenn ist der Druck auf $HI = HI \cdot AB$, also auf $LM = LM \cdot (AB + BC) = LM \cdot AC$, ferner der Druck auf $NO = NO(AC + CD) = NO \cdot AD$, mithin der Druck auf $PQ = PQ(AD + DR) = PQ \cdot AR$, und so ferner.

14 §.

Schweres Wasser in einem oben offenen Gefäß kann nur alsdenn völlig ruhig, und alle schwere Bestandtheilchen desselben können nur alsdenn im Gleichgewicht seyn, wenn die höchste Fläche desselben eben und wagrecht ist.

Beweis. Wenn die höchste Fläche des schweren Wassers nicht beydes zugleich eben und wagrecht, und dennoch alles im Gleichgewicht wäre, so litte jede Stelle dieser Fläche von innen nach aussen einen darauf senkrechten Druck, dessen Höhe so groß wäre, als die Tiefe dieser Stelle unter der wagrechten Ebene, welche die Wasserfläche in ihrer höchsten Stelle berührte. Demnach würde die Wassermasse zerfliessen, und das Gleichgewicht könnte nicht bestehen.

15 §.

56F. Wenn *ABHF* und *GHDE* aufwärts gebogene Schenkel einer hohlen Röhre, oder sonst zwey Gefässe von willkührlicher Gestalt und beyde unter sich so verbunden sind, daß das in dem einen befindliche Wasser frey in das andre hinein treten kann; so kann schweres Wasser nur alsdenn in beyden Schenkeln ruhig stehen bleiben, wenn die höchsten Wasserflächen *AF*, *GE*, in einerley wagrechten Ebene liegen.

Beweis. Unter allen wagrechten Ebenen, wie KN, die beyde Gefässe zugleich schneiden, und die Verbindung beyder Gefässe unter einander aufheben würden, wenn die Durchschnittsfiguren OP, MN, feste Ebenen wären, muß es eine, wie BD geben, die so niedrig liegt, daß die zunächst unter ihr folgende die Verbindung beyder Gefässe unter einander nicht mehr hindern würde. Was unter dieser niedrigsten Ebene liegt, die noch beyde Gefässe trennen würde, mag eine Gestalt haben welche es wolle, so kann man es doch allemahl als die Verbindungsröhre beyder Gefässe ansehen, und so werde ich hier den Raum

BCD Kürze halber nennen. Wäre nun BD eine feste Ebene, so würde sie im Zustande des Gleichgewichts von dem unter ihr in der Verbindungsröhre BCD befindlichen Wasser gar keinen Druck leiden, wohl aber von demjenigen Wasser, was in jedem Gefäß drüber stehet. Es stehe also in dem einen Schenkel ABHF das Wasser in der Höhe $= a$, in dem andern GHDE aber in der Höhe $= b$ über BD, so leidet BH einen Druck $=$ BH . a. Man nehme an, der Theil BH der festen Ebene BD, welcher ABHF als ein Boden schließt, werde weggenommen; so pflanzt sich der Druck BH . a durch die Wassermasse BCD nach allen Seiten fort, und der feste Boden HD leidet aufwärts einen Druck $=$ HD . a. (7. 8. §.) Von oben preßt dagegen ein Druck HD . b: soll demnach alles ruhig bleiben, wenn auch der feste Boden HD weggenommen wird, so muß der Druck von unten gegen HD, d. i. HD . $a =$ HD . b seyn, und das giebt $a = b$. Sind also AF und GE die höchsten Wasserflächen, die für sich schon im Zustande des Gleichgewichts wagrecht seyn müssen; (14 §.) so liegen sie im Zustande des Gleichgewichts gleich hoch über der wagrechten Ebene BD, mithin liegen sie in einerley Ebene, die mit BD parallel ist. (299 §. Geom.)

16 §.

Wenn MN ein fester wagrechter Deckel wäre, und das Wasser in dem andern Schenkel bis an AF stünde; so wäre MN von unten nach oben einem Druck ausgesetzt, dessen Höhe so groß ist, als die Tiefe AK der Ebene MN unter der höchsten Wasserfläche AF. Wenn nemlich der Schenkel BAFH von der Ebene MN in OP und die lothrechte Linie AL von ihr in K geschnit- 56F.

geschnitten wird; so ist das in dem Raum OPCHMN befindliche Wasser für sich im Gleichgewicht, und überdem pflanzt sich der Druck gegen OP, dessen Höhe AK ist, durch die ganze Wassermasse OPCHMN so fort, daß auch MN einen Druck leidet, dem die Höhe AK gehört.

57F. Daraus folgt, daß eine geringe Menge Wasser einen sehr starken Druck zuwege bringen könne. Es sey nemlich AB eine grade und etwas hohe lothrecht stehende aber enge Röhre, die mit einer andern CD zusammenhängt, welche in Vergleichung mit jener nur niedrig, aber viel weiter ist, und letztere sey mit dem wagrecht liegenden Deckel DF verschlossen. Wenn nun alles bis an A mit Wasser gefüllet, und AE die Höhe der Wasserfläche A, über der Ebene DF ist, so ist der Druck gegen den Deckel dem Gewicht einer Wassersäule gleich, die DF zur Grundfläche und AE zur Höhe hat. Sovielmahl alsdenn der Querschnitt GE der engen Röhre in der Fläche DF enthalten ist, sovielmahl übertrift der Druck gegen DF das Gewicht der Wassersäule AE.

17 §.

62F. Weil der ebene wagrechte Boden CD eines mit schweren Wasser gefüllten Gefässes ACDB soviel Druck leidet, als wenn eine grade Wassersäule darauf stünde, so hoch, als die höchste Wasserfläche AB über dem Boden erhaben ist; so könnte es scheinen, als wenn ein wagrechter Tisch, worauf ein solches Gefäß steht, eben soviel Druck litte: mithin nach Verschiedenheit der Figur des Gefässes bald einen Druck der kleiner wäre, bald einen grössern Druck, als das Gewicht der ganzen im Gefäß enthaltenen Masse Wasser, wenn das

das Gewicht des Gefässes selbst nicht mit gerechnet wird. Allein man muß bedenken, daß die übrige Seitenfläche des Gefässes, die das Wasser umgiebt, von demselben ebenfalls, und zwar jede Stelle nach einer darauf senkrechten Richtung gedrückt werde, und daß aus diesen Pressungen ein Druck nach unten noch ausser demjenigen entstehe, den der ebene wagrechte Boden CD leidet.

18 §.

Aus allen senkrechten Pressungen des in einem Gefäß eingeschlossenen schweren Wassers gegen den Boden und die Seitenfläche, die es von allen Seiten umgiebt, entsteht ein verticaler Druck nach unten, der dem ganzen Gewicht des Wassers gleich ist: und wenn gleich jedes kleine Stück der festen Seitenfläche des Gefässes auch nach horizontaler Richtung gedrückt wird; so heben doch alle horizontale Pressungen einander auf, und das Gefäß im ganzen leidet in horizontaler Richtung gar keinen Druck.

Beweis. Es sey AMNCDLB ein verticaler Schnitt des Gefässes, und die Ebene *qpsrwu* sey gleichfalls vertical, und mit der vorigen in einer sehr kleinen Entfernung parallel. Durch einen Punct M im Umfang des verticalen Schnitts AMNCDLB sey die dritte verticale Ebene *p*MN auf die vorigen beyden senkrecht gesetzt, und die vierte *qmns* mit der letztern in einer sehr kleinen Entfernung parallel: so giebt sich auf der Seitenfläche des Gefässes eine vierseitige Figur *m*M*pq*, deren Fläche sich noch nicht merklich krümmt, und um deßwillen für ein ebenes Parallelogramm angenommen werden kann; die vier vertica- 62F.

len

len Ebenen aber schliessen eine prismatische Wassersäule $qMNs$ ein zwischen den sehr kleinen Grundflächen $mMpq$, und $nNrs$, die von den Seitenlinien des Prisma schief geschnitten werden. Nun leidet $Mmqp$ einen senkrechten Druck $= Mmqp \cdot AM$, (13 §.) und daraus entsteht ein Druck aufwärts in verticaler Richtung $MA = e^2 \cdot AM$, wenn der wagrechte Schnitt der Säule $MqsN = e^2$ gesetzt wird. (10 §.) Aus eben den Gründen leidet $Nnsr$ nach unten in der Richtung NV einen Druck $= e^2 \cdot AN$.

Weil nun der Druck nach MA diesem letztern nach NV grade entgegen gesetzt ist, so leidet das Gefäß von der Wassersäule $qMNs$ nach unten einen verticalen Druck $= e^2 (AN - AM) = e^2 \cdot MN$, und derselbe ist dem Gewicht der Säule gleich. Aber die ganze flüssige Masse im Gefäß läßt sich solchergestalt in soviele viereckte prismatische Säulen eintheilen, als man will, und die vorgetragenen Schlüsse haben desto mehr Schärfe, je grösser die Zahl der so zuwege gebrachten Säulen ist. Die letzte Summe aller Säulen ist der flüssigen Masse, und die letzte Summe aller verticalen Pressungen nach NV ist dem Gewicht dieser Masse gleich.

Durch M und m ziehe man in der Ebene AMCDB die graden Linien ML und ml wagrecht, und eben so durch p und q die wagrechten Linien pu, qw, in der Ebene $pqsrwu$; so giebt sich eine wagrecht liegende prismatische Wassersäule, wovon die Grundflächen $Mmqp$, $Luwl$, sehr kleine Stücke der Seitenfläche des Gefässes sind. Man setze den senkrechten Querschnitt dieser Säule $= f^2$, so leidet $Mmqp$ in horizontaler Richtung $M\mu$ einen Druck $= f^2 \cdot AM$, und $Luwl$ in grader entgegen gesetzter horizontaler Richtung

tung $L\lambda$ einen Druck $= f^2 . AM$, mithin heben beyde Pressungen einander auf. So liegen in jeder horizontalen Richtung zwey Elemente der Seitenfläche des Gefässes einander gegen über, die nach entgegen gesetzten Richtungen gleichviel Druck leiden: mithin heben alle horizontale Pressungen einander auf.

Uebrigens erhellet, daß die mittlere Richtung aller verticalen Pressungen durch den Schwerpunct des ganzen Wasserkörpers durchgehe, der mit dem Mittelpunct der Grösse des Raums einerley ist, welchen die Wassermasse ausfüllt.

19 §.

Das Gefäß *ABCD* hat eine vertical stehende ebene Seitenfläche *BCTN* zwischen zwoen Verticallinien *BC*, *NT*: man soll finden wie groß der gesamte Druck des Wassers gegen ein Stück dieser Seitenfläche sey, das zwischen der höchsten Wasserfläche *EF* und einer andern wagrechten Ebene *AB* in gegebener Tiefe unter *EF* enthalten ist. 59F.

Aufl. Man theile BF bey G, H, I, in gleiche Theile, und ziehe GK, HL, IM mit BN parallel: so wird das Stück FN der Seitenfläche in eben soviele Rechtecke getheilt, und man übersiehet leicht die Richtigkeit folgender Sätze. Es ist

der Druck gegen $FK < GK . GF . GF$

— — — $GL < HL . HG . HF$

— — — $HM < IM . IH . IF$

— — — $IN < BN . BI . BF$;

ferner ist $GK = HL = IM = BN$, und

$GF = HG = IH = BI$, also

$HF = 2GF$, $IF = 3GF$, und in allen Fällen $BF = nGF$, wenn man BF in n gleiche Theile getheilt

hat:

hat: demnach ist die Summe aller Pressungen gegen $FN < BN \cdot GF^2 (1 + 2 + \ldots + n)$. Ueberdem ist $GF = \frac{1}{n} BF$, und die Summe der arithmetischen Progression $1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{1}{2} n (1 + n)$ (152 §. Rech.) $= \frac{1}{2} (nn + n)$: wenn also die Summe der Pressungen gegen $FN = S$ gesetzt wird, so ist $S < \frac{1}{2} \cdot \frac{nn + n}{nn} \cdot BN \cdot BF^2$, oder $S < \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{n}) BN \cdot BF^2$.

Es ist aber auch

der Druck gegen $FK > O$

— — — $GL > HL \cdot HG \cdot GF$

— — — $HM > IM \cdot IH \cdot HF$

— — — $IN > BN \cdot BI \cdot IF$,

folglich $S > BN \cdot GF^2 (1 + 2 + \ldots + (n - 1))$. Wird also $1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \frac{1}{2} (n - 1) n$, (152 §. Rech.) und $GF = \frac{1}{n} BF$ gesetzt, so findet man $S > \frac{1}{2} \cdot \frac{nn - n}{nn} \cdot BN \cdot BF^2$ oder $S > \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{n}) BN \cdot BF^2$. Zwischen diesen beyden Gränzen ist der gesuchte Druck allemahl enthalten, wie groß auch n angenommen wird, und zwischen eben diesen Gränzen ist keine andre Grösse als $\frac{1}{2} BN \cdot BF^2$ enthalten: also ist der gesuchte Druck $S = \frac{1}{2} BN \cdot BF^2$.

Weil $BN \cdot BF$ die Fläche des Rechtecks FN ist, so hat man auch $S = \frac{1}{2} FN \cdot BF$: also ist der Druck dem Gewicht einer Wassersäule gleich, welche die Seitenfläche des Gefässes, so weit sie in der gegebenen Tiefe BF unter Wasser steht, zur Grundfläche hat, und deren Höhe halb so groß ist, als die Höhe des dagegen drückenden Wassers.

Wenn die Ebene $CBNT$ zwischen den auf BN senkrechten Parallellinien gegen die Horizontalfläche AB unter dem Winkel α geneigt wäre, und man setzt als-

alsdenn die lothrechte Höhe des dagegen drückenden Wassers $= a$, so wird $a = BF \sin\alpha$, und man muß in den vorhin gebrauchten Formuln statt der den Pressungen zugehörigen Höhen, die vorhin mit GF, HG, IH, BI, einerley waren, nun die lothrechten Höhen $GF \sin\alpha$, $HG \sin\alpha$, u. s. f. setzen. In wie weit aber GF, HG, IH, BI, als Seitenlinien der Rechtecke FK, GL, HM, IN, in Rechnung kommen, bleiben sie in den Formeln unverändert: also wird in diesem Fall der senkrechte Druck dagegen $= \frac{1}{2} BN . BF . BF \sin\alpha$ gefunden. Das ist wiederum das Gewicht einer Wassersäule, die das Rechteck FN zur Grundfläche hat, und deren Höhe so groß ist, als die halbe lothrechte Höhe des dagegen drückenden Wassers. Der Druck gegen FHLV allein ist demnach $= \frac{1}{2} HL . HF . HF \sin\alpha$: und er war gegen FBNV $= \frac{1}{2} BN . BF . BF \sin\alpha$: wenn also jener Druck von diesem abgezogen wird, so findet man den Druck gegen BHLN $= \frac{1}{2} BN (BF^2 - HF^2) \sin\alpha$, weil HL und BN gleich sind.

20 §.

Weil die Richtungen aller Pressungen gegen das Rechteck FN insgesammt unter einander parallel sind, 59 F.
so muß es in eben dem Verstande eine mittlere Richtung dieses Drucks geben, in welchem es eine mittlere Richtung der Gewichte aller Bestandtheilchen eines festen schweren Körpers giebt. Es muß nemlich einen Punct P in FN geben, den man allein unterstützen kann, wenn alle Pressungen gegen FN einander im Gleichgewicht erhalten sollen, und durch diesen Punct geht die mittlere Richtung des Drucks mit den Richtungen aller Pressungen parallel.

Man halbire BN bey R, und ziehe QR mit BF parallel, so halbirt QR das Rechteck FN, und die mittlere Richtung muß durch einen Punct in QR gehen, weil die Summe der Momente aller Pressungen in Ansehung der Axe QR auf beyden Seiten gleich groß ist. Man setze ferner RS auf FN senkrecht, mache $RS = QR = BF$, und ziehe QS, so ist der Druck $S = \frac{1}{2} BN \,.\, BF^2$ der Fläche des Dreyecks QRS proportional. Es sey nemlich P ein Punct zwischen Q und R, und Pp mit RS parallel, so wird $Pp = QP$, der Druck zwischen FV und einer Horizontallinie durch P sey s, so ist $s = \frac{1}{2} BN \,.\, PQ^2$, mithin $S : s = \frac{1}{2} BF^2 : \frac{1}{2} PQ^2 =$ Dr. QRS : Dr. QPp. Wäre QRS ein schweres Dreyeck, das an der Seitenlinie QR, die man in wagrechter Lage unterstützt hätte, lothrecht herab hienge, so litte QR von der Schwere einen Druck, der von Q nach R eben so zunähme, und dann gienge die mittlere Richtung des Gewichts durch P, wenn $QP = \frac{2}{3} QR$ genommen würde: also muß auch die mittlere Richtung des Wasserdrucks durch P gehen, wenn $QP = \frac{2}{3} QR$ genommen wird.

Es sey der Druck, welchem das Rechteck FHLV allein ausgesetzt ist, $= \Pi$, und die mittlere Richtung desselben gehe durch π; so ist $Q\pi = \frac{2}{3} FH$, so wie $QP = \frac{2}{3} FB$. Wenn ferner der ganze Druck des Wassers gegen $FBNV = P$, so wie der Druck gegen das Rechteck $BHLN = p$ gesetzt wird, und dessen mittlere Richtung durch ω gehet; so wird erfodert, daß $Q\pi \,.\, \Pi + Q\omega \,.\, p = QP \,.\, P$ sey, also $Q\omega = \frac{QP \,.\, P - Q\pi \,.\, \Pi}{p}$.
In diesem Ausdruck setze man die Werthe $P = \frac{1}{2} BN \,.\, BF^2 \sin\alpha$, $\Pi = \frac{1}{2} BN \,.\, HF^2 \sin\alpha$, $p = \frac{1}{2} BN\,(BF^2 - HF^2) \sin\alpha$, (19 §.) ferner $QP = \frac{2}{3} BF$, $Q\pi = \frac{2}{3} HF$, so erhält man $Q\omega = \frac{\frac{2}{3}(BF^3 - HF^3)}{BF^2 - HF^2}$.

21 §.

Der körperliche Raum zwischen zwoen concentrischen Kugelflächen *ABMN*, *DEP*, von ungleichen Halbmessern ist kleiner als ein Cylinder auf einer Grundfläche, so groß als die grössere Kugelfläche, und grösser als ein Cylinder auf einer Grundfläche, so groß als die kleinere Kugelfläche, wenn beydemahl die Höhe des Cylinders der Differenz *AD* der Halbmesser gleich genommen wird. 61F.

Beweis. Man setze CA $= r$, CD $= \varrho$, so ist die grössere Kugel $= \frac{4}{3}\pi r^3$, die kleinere $= \frac{4}{3}\pi\varrho^3$, (374 §. G.) also der Raum zwischen beyden Kugelflächen $= \frac{4}{3}\pi(r^3 - \varrho^3)$, den ich $=$ V setze. Ferner findet man $r^3 - \varrho^3 = (r^2 + r\varrho + \varrho^2)(r - \varrho)$, wenn also $r - \varrho =$ AD $= \delta$ gesetzt wird, so hat man $\varrho = r - \delta$, also $r\varrho = r^2 - r\delta$, und $\varrho^2 = r^2 - 2r\delta + \delta^2$, mithin $r^3 - \varrho^3 = (3r^2 - 3r\delta + \delta^2)\delta$, und $V' = 4\pi(r^2 - r\delta + \frac{1}{3}\delta^2)\delta$, oder $V = 4\pi(r^2 - (r - \frac{1}{3}\delta)\delta)\delta$. Demnach ist $V < 4\pi r^2 . \delta$, welches der Inhalt eines Cylinders wäre über der Grundfläche $4\pi r^2$ in der Höhe $\delta =$ AD, und $4\pi r^2$ ist der Inhalt der Kugelfläche ABMN. (394 §. Geom.) Schreibt man $\varrho + \delta$ statt r, so wird $r^2 = \varrho^2 + 2\varrho\delta + \delta^2$, $r\varrho = \varrho^2 + \varrho\delta$, also $r^3 - \varrho^3 = 3\varrho^2 + 3\varrho\delta + \delta^2$, und $V = 4\pi(\varrho^2 + \varrho\delta + \frac{1}{3}\delta^2)\delta$, also $V > 4\pi\varrho^2 . \delta$, welches der Inhalt eines Cylinders ist, dessen Grundfläche so groß wäre als die Kugelfläche DEP, und die Höhe AD.

22 §.

Zwischen zwoen concentrischen Kugelflächen *ABMN*, *KLS*, befindet sich Wasser, dessen physische Elemente insgesammt gegen den Mittelpunct der Kugelflächen schwer, und über- 61F.

dem völlig in Ruhe sind: man soll finden, wie groß der Druck sey, womit diese schwere Masse die kleinere oder untere Kugelfläche *KLS* preßt.

Aufl. Die Höhe AK zwischen beyden Kugelflächen sey bey D, F, H, in gleiche Theile getheilt, und durch jeden Theilungspunct aus dem Mittelpunct C eine Kugelfläche beschrieben, mithin der ganze Raum zwischen den Kugelflächen in kleinere Schichten von gleichen Höhen getheilt, so erhellet auf ähnliche Art, wie in dem Fall der parallelen Richtungen der Schwere, (12 §.) daß jede dieser Kugelflächen, wie KLS einem Druck ausgesetzt sey, dessen Höhe so groß ist, als die Tiefe AK dieser Fläche unter der äussersten oder höchsten Fläche ABMN. Wenn nemlich, um die Ausdrücke abzukürzen, die Kugelflächen als Grundflächen der dazwischen liegenden Schichten betrachtet werden, so erhellet, daß jeder über der grössern Grundfläche gleichförmig vertheilte und überall darauf senkrechte Druck sich gegen die kleinere so fortpflanze, daß die Höhe des Drucks gegen die kleinere der Höhe des Drucks gegen die grössere gleich bleibt. Man bezeichne den Inhalt der Kugelflächen ABMN, DEP, FGQ, HIR, KLS, nach der Ordnung mit a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, und setze, daß über selbige die Pressungen p, q, r, s, v, gleichförmig vertheilt sind; so ist der Druck

$$\text{gegen DEP} = q + \frac{b^2}{a^2}p,$$

$$\text{-- -- FGQ} = r + \frac{c^2}{b^2}q + \frac{c^2}{a^2}p,$$

$$\text{-- -- HIR} = s + \frac{d^2}{c^2}r + \frac{d^2}{b^2}q + \frac{d^2}{a^2}p,$$

$$\text{-- -- KLS} = v + \frac{e^2}{d^2}s + \frac{e^2}{c^2}r + \frac{e^2}{b^2}q + \frac{e^2}{a^2}p,$$

also

also eben der Ausdruck

$$\text{gegen KLS} = e^2\left(\frac{v}{e^2} + \frac{s}{d^2} + \frac{r}{c^2} + \frac{q}{b^2} + \frac{p}{a^2}\right),$$

mithin die Höhe dieses Drucks so groß, als die Summe der Höhen aller Pressungen p, q, r, s, v.

Nimmt man nun an, daß das ganze Gewicht aller gegen den Mittelpunct schweren Elemente einer jeden Schichte über ihrer obern Grundfläche gleichförmig vertheilt sey, und sucht den daher gegen KLS entstehenden Druck, so ist derselbe kleiner als der gesuchte. Weil ferner jede Schichte kleiner ist als ein grader Cylinder über ihrer grössern Grundfläche in der Höhe AD $= \frac{1}{n}$ AK, so wird die Summe der Höhen des Drucks gegen KLS kleiner als AK gefunden. Nimmt man dagegen an, das Gewicht aller schweren Elemente jeder Schichte sey über ihrer untern Grundfläche gleichförmig vertheilt; so ist der so gefundene Druck gegen KLS grösser als der gesuchte Druck: und weil jede Schichte grösser ist, als ein grader Cylinder über ihrer untern Grundfläche in der Höhe AD $= \frac{1}{n}$ AK, so wird nun die Summe der Höhen des Drucks gegen KLS grösser als AK gefunden. Weil nun diese Sätze allemahl richtig sind, wie klein auch die Höhen der Schichten angenommen werden, so muß AK die Höhe des gesuchten Drucks gegen KLS seyn.

23 §.

Eine kugelförmige Masse Wasser, wenn alle ihre Elemente gegen den Mittelpunct schwer sind, kann sich selbst im Gleichgewicht erhalten, und es bedarf dessen nicht, daß sie in einer festen Kugelfläche als in einem Gefäß eingeschlossen sey, um das Zerfliessen zu verhindern: aber auch alsdann nur bleibt eine solche Masse im Gleichgewicht, ohne daß ein Gefäß sie zusammen hält, wenn ihre äussere Gränze eine Kugelfläche ist. Wenn durch eine Stelle der Oberfläche eine Kugelfläche aus dem Mittelpunct beschrieben wird, worin die Richtungen der Schwere zusammen laufen, und alsdann die Masse von dieser Kugelfläche noch geschnitten wird, so daß ein Theil der Masse über dieser Kugelfläche liegt; so entsteht vom Gewicht desselben ein Druck, der sich durch die ganze Masse nach allen Seiten, mithin auch gegen die angenommene Stelle der Oberfläche fortpflanzt, die dadurch von innen nach aussen gepreßt wird, mithin kann das Gleichgewicht nicht bestehen.

61 F. 24 §.

Wenn man sich ein Pyramiden- oder Kegelförmiges Stück ACB der gegen den Mittelpunct C schweren Wasserkugel ABMN allein vorstellt; so ist begreiflich, daß selbiges in einer festen Pyramiden- oder Kegelförmigen Fläche eingeschlossen seyn müsse, wofern es nicht zerfliessen soll: nur oben an AB bedarf es dessen nicht, daß dieser Raum auch durch ein Stück von einer Kugelfläche geschlossen sey. Denn die feste Fläche hindert das Zerfliessen eben so, wie es die seitwärts befindliche Wassermasse hindert, wenn ACB mit der übrigen ganzen Kugel ABMN zusammen einen Körper ausmachte. Ja die Gestalt der Seitenfläche des Gefässes, welche die Wassermasse umgiebt, und das Zerfliessen verhindert, ist an sich ganz gleichgültig: das gegen einen und denselben Mittelpunct schwere Wasser wird in demselben ruhig stehen bleiben, wenn es einmahl in Ruhe ist, jedoch nur unter der Bedingung, wofern die höchste Fläche desselben ein Stück einer zu eben dem Mittelpunct gehörigen Kugelfläche ist, worin die Richtungen der Schwere aller Elemente des Wassers zusammen laufen.

Die 60ste Figur stellet ein solches Gefäß AHKLB vor, dessen feste Seitenfläche wie man will gebogen seyn kann. Wenn das Gefäß oben offen, und die höchste Fläche AB ein Stück einer zum Mittelpunct C gehörigen Kugelfläche ist, worin die Richtungen der Schwere des Wassers zusammenlaufen, so leidet jeder Schnitt DE, FG, HI, der Wassermasse mit einer zum Mittelpunct C gehörigen Kugelfläche einen Druck, dem die Höhe AM, AN, oder AO zugehört. Die höchste Fläche AB leidet gar keinen Druck, also bleibt der Zustand des Gleichgewichts, wenn ihn nicht andre Ursachen stören. Wäre dagegen AB kein Stück einer zum Mittelpunct C gehörigen Kugelfläche: so könnte man durch jede Stelle auf dieser Fläche eine zum Mittelpunct C gehörige Kugelfläche führen, und wenn diese die Wassermasse noch schnitte, so würde das oberhalb dieser Kugelfläche befindliche Wasser noch gegen das untere Drücken, der Druck würde sich nach allen Seiten, also auch nach der angenommenen Stelle ausbreiten, mithin das Gleichgewicht stören.

Der III. Abschnitt.

Vom Gleichgewicht flüssiger Massen mit hineingetauchten festen Körpern.

25 §.

Wenn ein fester Körper *DEF* in eine ruhig stehende flüssige Masse *ACB* ganz eingetaucht ist; so wird derselbe von der flüssigen Masse nach verticaler Richtung aufwärts gepreßt, die mittlere Richtung aller verticalen Pressungen geht durch den Mittelpunct der Grösse des Raums, den der feste Körper im Wasser einnimmt, und der gesammte Druck, welcher ihn aufwärts treibt, ist so groß als das Gewicht einer solchen Menge der flüssigen Masse, die mit dem festen Körper einerley Raum ausfüllen würde.

Beweis. Man stelle sich anfangs die den festen Körper DEF umgebende Oberfläche ganz allein als eine feste Fläche ohne Schwere vor. Wäre der innere Raum dieser Fläche ganz mit der flüssigen Masse angefüllt, so wäre die Summe aller Pressungen gegen die innere Seite dieser festen Fläche ein verticaler Druck nach unten so groß, als das Gewicht der eingeschlossenen flüssigen Masse, und die mittlere Richtung aller verticalen Pressungen würde durch den Schwerpunct des in der festen Fläche eingeschlossenen Wasserkörpers gehen, der mit dem Mittelpunct der Grösse desselben überein kommt. (18 §.) Wenn nun statt dessen der feste Körper soweit in die flüssige Masse eingetaucht ist, daß er die wagrechte Wasserfläche AB nur noch berührt, ohne von ihr weiter geschnitten zu werden, so leidet seine Fläche in allen Stellen einen Druck von aussen nach innen, der in jeder Stelle darauf senkrecht und eben so groß ist als jener Druck auf dieselbe Stelle in dem Fall war, wenn die flüssige Masse den Raum innerhalb der Fläche ausfüllte: der ganze Unterscheid besteht darin, daß in dem Fall des ins Wasser eingetauchten Körpers die Richtungen aller Pressungen denjenigen grade entgegengesetzt sind, nach welchen die nemlichen Stellen würden gepreßt werden, wenn der innere Raum der

Fläche

Fläche mit der flüssigen Masse angefüllt wäre. Demnach ist das Resultat aller Pressungen gegen den eingetauchten Körper ein Druck so groß, als das Gewicht einer Menge Wasser, die mit dem festen Körper einerley Raum ausfüllen würde, der Druck ist aufwärts gerichtet, seine Richtungslinie ist vertical, und geht durch den Mittelpunct der Grösse des eingetauchten Körpers.

Mit dem allem geht keine Aenderung vor, wenn gleich der feste Körper so tief man will im Wasser untergetaucht ist. Denn der verticale aufwärts gerichtete Druck ist der Ueberschuß der Summe aller verticalen Pressungen, die den Körper aufwärts drücken, über diejenigen verticalen Pressungen die ihn unterwärts drucken, wie es im 18 §. war, mit dem einzigen Unterscheid der entgegen gesetzten Lage der Richtungen des Drucks. Wenn nun das Wasser bis an GH steht, und die wagrechte Fläche AB den festen Körper an seiner höchsten Stelle berührt; so erhellet, daß nun die Höhe aller senkrechten Pressungen gegen jede Stelle der Fläche des festen Körpers um die Höhe AG grösser sey, als sie in dem Fall war, wenn das Wasser nur bis an AB reichte. Demnach ist auch die Höhe einer jeden sowohl von den aufwärts als auch von den unterwärts gerichteten verticalen Pressungen nun um die Höhe AG grösser: mithin ist der Ueberschuß der Summe der aufwärts gerichteten Pressungen über die nach unten gerichteten noch eben so groß, als vorhin, und es ist allemahl der gesamte Druck, welcher den festen Körper in die Höhe zu treiben strebt, dem Gewicht einer eben so grossen Menge Wasser gleich.

Uebrigens entsteht zwar aus dem senkrechten Druck gegen jede Stelle des festen Körpers auch ein horizontaler Druck: allein es erhellet aus demjenigen, was schon im 18 §. von den horizontalen Pressungen gegen die innere Seitenfläche eines mit Wasser gefüllten Gefässes bewiesen ist, daß auch diese horizontalen Pressungen gegen die äussere Seitenfläche eines ins Wasser eingetauchten festen Körpers einander insgesamt aufheben.

26 §.

Wofern der feste Körper DEF aus einer Masse von gleichförmiger Dichtigkeit bestehet, so liegt sein Schwerpunct zugleich im Mittelpunct seiner Grösse. Demnach geht in diesem Fall die mittlere Richtung des Wasserdrucks gegen den ins Wasser ganz eingetauchten Körper durch des letztern Schwerpunct, und beyde einander entgegen drückende Kräfte sind nur alsdenn im Gleichgewicht, wenn das Gewicht des festen Körpers dem Gewicht einer eben so grossen Menge Wasser gleich ist; das heißt mit andern Worten, wenn die Masse, woraus der feste Körper bestehet, mit dem Wasser einerley specifisches Gewicht hat. Ist nemlich P das Gewicht des festen gleichförmig dichten Körpers, und p das Gewicht einer eben so grossen Menge Wasser, so ist $P : p$ das Verhältniß der specifischen Gewichte der Masse des festen Körpers und des Wassers gegen einander. Der ganz ins Wasser eingetauchte feste Körper leidet in allen Fällen einen verticalen Druck nach unten $= P - p$, und derselbe verschwindet, wenn $p = P$ ist. In dem Fall $P > p$ bleibt der feste ganz ins Wasser getauchte Körper nicht in Ruhe, er muß vielmehr zu Boden sinken, so wie in dem Fall $P < p$ der Wasserdruck denselben vertical in die

die Höhe treibt. Gleichförmig dichte feste Körper deren Masse specifisch schwerer als Wasser ist, sinken demnach, wenn sie ganz ins Wasser eingetaucht sind, zu Boden, solche aber deren Masse specifisch leichter als Wasser ist; steigen im Wasser in die Höhe.

27 §.

Gesetzt aber die Masse des festen Körpers DEF hätte auch nicht durchgängig einerley Dichtigkeit, so könnte doch der Schwerpunct desselben in der Verticallinie durch den Mittelpunct seiner Grösse liegen: alsdenn wäre wiederum das Gewicht des festen Körpers mit dem Wasserdruck im Gleichgewicht, wenn jenes Gewicht eben so groß wäre, als das Gewicht einer Menge Wasser, die mit dem festen Körper einerley Raum ausfüllen würde. Unter dieser Bedingung also kann der feste Körper in jeder Stelle, die er unter dem Wasser einnimmt ruhen, wenn er ganz ins Wasser eingetaucht ist. Wäre dagegen sein Gewicht grösser, als das Gewicht einer eben so grossen Menge Wasser, so würde er im Wasser zu Boden fallen: so wie er im Wasser in die Höhe steigen muß, wenn sein Gewicht kleiner ist als das Gewicht einer eben so grossen Menge Wasser.

28 §.

Wenn ein fester Körper aus Theilen von ungleichen specifischen Gewicht zusammen gesetzt ist, so kann man zwar nicht dem ganzen Körper einerley Dichtigkeit zuschreiben, weil seine Masse alsdenn durch den Raum, welchen er einnimmt, ungleichförmig vertheilt ist: es läßt sich aber gar wohl angeben, wie groß das eigenthümliche Gewicht eines gleichförmig dichten Körpers seyn müste, der bey gleicher Grösse

mit

mit jenem ungleichförmig dichten Körper auch ein gleiches Gewicht hätte. Des ungleichförmig dichten Körpers Gewicht sey = P, seine Grösse = V; eines andern gleichförmig dichten Körpers Gewicht sey ebenfalls = P, seine Grösse = V, und sein specifisches Gewicht = g: so ist $P = g \cdot V$, und es wird erfordert, daß $g = \frac{P}{V}$ sey. Wenn die Masse des ungleichförmig dichten Körpers durch seinen ganzen Raum V gleichförmig vertheilt wäre, so wäre das specifische Gewicht seiner Masse ebenfalls = $\frac{P}{V}$. Unter den Theilen, woraus der Körper zusammen gesetzt ist, wird es einige geben deren specifisches Gewicht grösser, und andre deren specifisches Gewicht kleiner, als $\frac{P}{V}$ ist: deswegen kann $\frac{P}{V}$ das mittlere specifische Gewicht, oder die mittlere Dichtigkeit des Körpers heissen. Diese mittlere Dichtigkeit eines ungleichförmig dichten Körpers ist demnach das Gewicht, welches ein Cubicfuß oder ein Cubiczoll der Masse des Körpers hätte, wenn sie durch seinen ganzen Raum gleichförmig vertheilt wäre.

29 §.

Wird diese mittlere specifische Schwere eines festen Körpers verstanden, wenn derselbe aus Theilen von ungleichförmiger Dichtigkeit bestehet; so können die im 26 §. bewiesenen Sätze allgemein gelten, der ins Wasser ganz eingetauchte feste Körper mag aus einer Masse von gleichförmiger Dichtigkeit bestehen oder nicht. Wenn im letzten Fall sein mittleres specifisches Gewicht eben so groß ist, als das specifische Gewicht des Wassers; so bleibt er im Wasser allent-

halben

halben ruhig hängen. Wenn dagegen sein mittleres specifisches Gewicht grösser oder kleiner, als das specifische Gewicht des Wassers ist; so sinkt er im ersten Fall im Wasser zu Boden, und steigt im letzten Fall im Wasser in die Höhe. Hieher gehören demnach auch alle die Fälle, wenn der innere Raum, welchen die äussere Fläche des Körpers umgiebt, nicht ganz mit der Materie des Körpers ausgefüllt ist, und ausser den natürlichen Zwischenräumchen vielleicht leere Höhlungen von beträchtlicher Grösse im innern der Masse des Körpers befindlich sind, in welche das Wasser nicht hineindringen kann. Dergleichen Körper werden hier als solche angesehen, die specifisch leichter als Wasser sind, wenn ihr ganzes Gewicht, kleiner ist, als das Gewicht einer Menge Wasser, die den ganzen Raum des Körpers füllen würde, die Höhlungen mitgerechnet, welche das Wasser nicht mit ausfüllen kann. Hohle Metallene Kugeln, ledige und dabey verschlossene gläserne Flaschen, können in diesem Verstande specifisch leichter als Wasser seyn, wenn gleich die Metalle und Glas an sich specifisch schwerer sind, als Wasser.

30 §.

Wird nun, wie vorhin im 28 §. das Gewicht des festen Körpers $= P$, das Gewicht einer eben so grossen Menge Wasser $= p$ gesetzt, und $P > p$ angenommen; so kann der feste Körper an einem Faden, dessen Gewicht hier nicht in Betrachtung kommt, ruhig hängen, wenn eine Kraft $= P - p$ den Faden vertical aufwärts ziehet. Hienge der Faden an dem einen Arm eines Wagebalkens, so würde am andern Arm ein Gegengewicht $= P - p$ mit dem ganz ins Wasser herabgelassenen sonst aber frey hängenden fe-

sten

sten Körper im Gleichgewicht seyn. Demnach ist es eben soviel, als wenn der feste Körper einen Theil seines Gewichts im Wasser verlohren hätte, soviel nemlich, als eine eben so grosse Menge Wasser wiegt, und daraus erklärt sich die in der Hydrostatik gewöhnliche Redensart: ein fester Körper verliere im Wasser soviel von seinem Gewicht, als eine eben so grosse Menge Wasser wiegt.

31 §.

64F. Auch alsdenn, wenn nur ein Theil *DEF* eines festen Körpers *DEFG* in stillstehendes Wasser eingetaucht ist, wird der feste Körper vom Wasser in verticaler Richtung aufwärts gepreßt, die mittlere Richtung aller verticalen Pressungen gegen die äussere Fläche des eingetauchten Theils geht durch den Mittelpunct der Grösse des Raums, den der eingetauchte Theil im Wasser einnimmt, und der gesammte Druck, welcher den Körper aufwärts treibt, ist so groß als das Gewicht einer Menge Wasser, die mit dem eingetauchten Theil einerley Raum ausfüllen würde.

Beweis. Weil angenommen wird, daß nur ein Theil des Körpers in stillstehendes Wasser eingetaucht sey, so wird zugleich angenommen, daß die höchste Fläche AB des Wassers eben und wagrecht sey. Was sich also unter dieser Wasserfläche befindet, das ist der eingetauchte Theil des festen Körpers, und es erhellet von selbst, daß der Wasserdruck gegen die äussere Fläche des eingetauchten Theils unverändert bleibe, wenn gleich der über der Wasserfläche hervorragende Theil weggenommen würde, der eingetauchte Theil DEF

DEF aber an seiner Stelle bleibe. Demnach kann DEF für sich allein als ein fester Körper betrachtet werden, der so weit ins Wasser getaucht ist, daß er die Wasserfläche nur noch berührt, ohne von ihr geschnitten zu werden: mithin folgt aus dem 25 §, daß die mittlere Richtung aller verticalen Pressungen gegen die äussere Fläche des eingetauchten Theils durch den Mittelpunct der Grösse des Raums gehe, den er im Wasser einnimmt, und daß der gesammte Druck, welcher den festen Körper aufwärts treibt, so groß sey, als das Gewicht einer Menge Wasser, die mit dem eingetauchten Theil einerley Raum ausfüllen würde.

32 §.

Wenn die Verticallinie durch den Mittelpunct der Grösse des Raums, den der eingetauchte Theil im Wasser einnimmt, durch des ganzen Körpers Schwerpunct gehet, so erhält der Wasserdruck den zum Theil ins Wasser eingetauchten festen schweren Körper im Gleichgewicht, wenn das Gewicht des ganzen festen Körpers so groß ist, als das Gewicht einer Menge Wasser, die mit dem eingetauchten Theil einerley Raum füllen würde. Man setze das Gewicht des ganzen festen Körpers $= P$, das Gewicht einer Menge Wasser, die mit dem eingetauchten Theil einerley Raum füllen würde, $= p$, so entsteht aus der gemeinschaftlichen Wirkung des Gewichts P, und des verticalen Wasserdrucks, ein Druck $= P - p$ am Schwerpunct des Körpers in verticaler Richtung nach unten, und dieser verschwindet, wenn $p = P$ ist. Von einem festen Körper, der solchergestalt vom Wasser getragen wird, sagt man, er schwimme über dem Wasser.

33 §.

33 §.

Nicht allein gleichförmig dichte Körper, die specifisch leichter als Wasser sind, schwimmen über dem Wasser; es kann auch ein solcher fester Körper, dessen Masse an sich specifisch schwerer als Wasser ist, vom Wasser getragen werden, wenn wegen innerer hohlen Räume, in welche das Wasser nicht hineindringen kann, das mittlere specifische Gewicht des festen Körpers kleiner als das specifische Gewicht des Wassers ist. Eben darum können hohle metallene Kugeln, leere und verschlossene gläserne Flaschen auf dem Wasser schwimmen, die wenn sie mit Wasser angefüllt sind, darin zu Boden sinken. Aus derselben Ursache schwimmen hohle und oben offene Gefässe, wie metallene Kessel, über dem Wasser, selbst alsdenn wenn durch andre hinein gelegte schwere Sachen der verticale Druck des Gefässes nach unten vergrössert wird. So lange das Wasser nicht hineindringen kann, kommt es allein auf die Grösse des Raums an, den der eingetauchte unter der höchsten Wasserfläche befindliche Theil im Wasser so einnimmt, daß er zugleich das Eindringen des Wassers in denselben hindert. Je mehr schwere Sachen hinein gelegt werden, desto tiefer sinkt das Gefäß, aber zugleich wird der Gegendruck des Wassers grösser in eben dem Verhältniß, in welchem der Raum unter der höchsten Wasserfläche zunimmt, aus welchem das Wasser dadurch verdrängt wird. Das gänzliche untersinken kann nicht erfolgen, bevor das Gefäß und die hinein gelegten Sachen zusammen so schwer sind, als die Menge Wasser welche das Gefäß von seiner Stelle verdrängen muß, bevor das ausser dem Gefäß befindliche

liche Wasser oben überlaufen, oder sonst irgendwo durch eine Oefnung in das Gefäß eindringen kann.

34 §.

Das Gewicht P eines auf dem Wasser schwimmenden festen Körpers ist gegeben, und das specifische Gewicht γ des Wassers: man soll die geometrische Grösse des eingetauchten Theils im Cubicmaaß finden.

Aufl. Die gesuchte Grösse des eingetauchten Theils sey $= v$, so ist das Gewicht einer eben so grossen Menge Wasser $= \gamma . v$, und diese muß im Zustande des Gleichgewichts $=$ P seyn. Aus der Gleichung $\gamma . v =$ P aber findet man $v = \frac{P}{\gamma}$ im Cubicmaaß. Nachdem nemlich für γ das Gewicht eines Cubicfusses oder Cubiczolles Wasser angenommen wird, nachdem findet man v in Cubicfussen, oder Cubiczollen.

Wird ein grades Prisma, oder ein grader Cylinder in der Lage vom Wasser getragen, daß die Grundflächen mit der höchsten Wasserfläche parallel sind; so findet man aus der körperlichen Grösse des eingetauchten Theils auch die lothrechte Tiefe der niedrigsten Grundfläche unter dem Wasser, als die geometrische Höhe des eingetauchten Theils. Derselbe ist selbst ein grades Prisma, oder ein grader Cylinder, weil der Voraussetzung gemäß der Schnitt des Körpers mit der Wasserfläche den Grundflächen parallel ist. Setzt man den Quadratinhalt einer dieser Grundflächen $= a^2$, so ist die erwehnte lothrechte Tiefe $= \frac{v}{a^2}$, also $= \frac{P}{\gamma . a^2}$.

35 §.

Gleichschwere feste Körper, die von einerley flüssigen Masse getragen werden, senken sich soweit, bis die eingetauchten Theile einerley körperliche Grösse haben: denn für sie ist P und γ einerley, also findet man einerley Werth von v. Wenn es grade Prismen oder Cylinder auf gleichen Grundflächen, und diese Grundflächen mit der höchsten Wasserfläche parallel sind; so senken sie sich auf gleiche lothrechte Tiefe hinein: bey ungleichen Grundflächen aber verhalten sich diese lothrechten Tiefen umgekehrt, wie die Grundflächen.

Eines festen auf dem Wasser schwimmenden Körpers Gewicht sey P, seine Grösse V, sein eigenthümliches Gewicht G, sein eingetauchter Theil $= v$; eines andern festen Körpers Gewicht sey Q, seine Grösse W, sein eigenthümliches Gewicht g, sein eingetauchter Theil $= w$; so ist $v = \frac{P}{\gamma} = \frac{G.V}{\gamma}$, und $w = \frac{Q}{\gamma} = \frac{g.W}{\gamma}$. Weil nun γ für beyde einerley ist, wenn beyde auf einerley flüssigen Masse schwimmen, so verhalten sich die eingetauchten Theile $v : w$, wie die Gewichte P : Q. Wenn überdem beyde feste Körper gleich groß sind; so ist P : Q $=$ G : g, also verhalten sich die eingetauchten Theile gleich grosser schwimmender Körper, wie ihre eigenthümlichen Gewichte, oder wie ihre Dichtigkeiten. Eben so verhalten sich die lothrechten Tiefen der eingetauchten Theile, wenn beyde Körper grade Prismen oder Cylinder auf gleichen Grundflächen, und diese mit der Wasserfläche parallel sind.

36 §.

36 §.

Wenn δ und Δ die Dichtigkeiten zweyer flüssiger Massen von verschiedener Art bezeichnen, und auf der ersten ein fester Körper schwimmt, dessen Gewicht $= P$, der eingetauchte Theil $= v$ ist, auf der andern aber ein fester Körper, dessen Gewicht $= Q$ ist, und der eingetauchte Theil $= w$; so hat man $v = \frac{P}{\delta}$, und $w = \frac{Q}{\Delta}$. Wären demnach beyde Körper gleich schwer, so hätte man $v : w = \frac{1}{\delta} : \frac{1}{\Delta}$, oder $v : w = \Delta : \delta$. Gleich schwerer fester Körper eingetauchte Theile also, die auf flüssigen Massen von ungleicher Dichtigkeit schwimmen, verhalten sich gegen einander umgekehrt, wie die Dichtigkeiten dieser flüssigen Massen.

37 §.

Weil zum Gleichgewicht des auf dem Wasser schwimmenden Körpers mit dem entgegen gesetzten Wasserdruck erfordert wird, daß der Mittelpunct der Grösse des eingetauchten Theils mit dem Schwerpunct des ganzen Körpers in einerley Verticallinie liege; so kann ein fester Körper in mehr als einer Lage vom Wasser getragen werden, wenn es auf mehr als eine Art möglich ist, einen Körper mit einer Ebene so zu schneiden, daß die grade Linie zwischen dem Mittelpunct der Grösse des abgeschnittenen Theils und dem Schwerpunct des ganzen Körpers auf der Ebene des Schnitts senkrecht steht. Es sey g des ganzen Körpers DEFG Schwerpunct, und γ der Mittelpunct 64F.
der Grösse des abgeschnittenen Theils, so muß die

grade Linie $g\gamma$ auf der Wasserfläche BA senkrecht seyn. Wäre DEFG eine Kugel, so würde dieser Bedingung in jeder Lage der Kugel ein Genüge geschehen. Ein grader Cylinder, der specifisch leichter als Wasser ist, wenn seine Axe wagrecht liegt, kann auf dem Wasser ruhig liegen bleiben, man mag ihm durch Umdrehung um diese Axe eine Lage, welche man will geben, wenn die Axe selbst nur wagrecht bleibt. Eben der Cylinder könnte auch auf dem Wasser ruhig bleiben, wenn seine Axe vertical stünde. Wenn indessen die Länge der Axe den Durchmesser der Grundfläche sehr vielmahl übertrift, und überdem wegen geringer specifischen Schwere des Cylinders der eingetauchte Theil in Vergleichung mit dem ganzen Cylinder nicht sehr groß ist; so wird der Cylinder bey der allergeringsten Neigung der Axe umfallen, und sich von selbst wieder in die horizontale Lage versetzen.

38 §.

Mit dieser Sache hat es eine ähnliche Bewandniß, wie mit dem im 89 §. der Statik betrachteten mehr oder weniger sichern Ruhestande eines festen Körpers, wenn sein Schwerpunct unterstützt ist. Hier vertritt die mittlere Kraft, welche aus allen verticalen Pressungen des Wassers gegen die äussere Fläche des festen Körpers entspringt, die Stelle der Unterstützung: nur unterscheidet sich dieser Fall von dem dort betrachteten dadurch, daß hier keine feste Grundfläche ist, die den Körper trägt, und gegen das Schwanken sichert, wenn nur die Verticallinie durch den Schwerpunct innerhalb der Gränzen dieser Grundfläche durchgehet. Sobald die Verticallinie durch g nicht mehr durch γ geht, sobald ist das Gleichgewicht

gehoben,

gehoben, der feste Körper schwankt, und verfällt entweder von selbst wieder in die vorige, oder in eine andre Lage, die das Gleichgewicht herstellet. Was von beyden Fällen erfolgen werde, und in welcher Lage der feste Körper gegen das Umschlagen am meisten gesichert sey, darüber lassen sich hier noch keine Untersuchungen anstellen, weil dies schon mit von Bewegungsgesetzen abhängt, wovon bisher noch nicht hat gehandelt werden können.

Der IV. Abschnitt.

Von den Hydrostatischen Proben des eigenthümlichen Gewichts, sowohl fester als auch flüssiger Massen.

39 §.

Wenn ein fester Körper, der specifisch schwerer als Wasser ist, eine solche Figur hat, daß man seinen cubischen Inhalt nach den Regeln der Geometrie leicht ausrechnen kann; so dient derselbe, auf eine sehr leichte Art das Gewicht einer eben so grossen Menge Wasser zu finden, wenn man anders mit einer scharfen und sonst bequem dazu eingerichteten Wage versehen ist. Man hänge nemlich zuerst den festen Körper in freyer Luft, vermittelst eines zarten Fadens an dem einen Arm eines Wagebalkens da auf, wo sonst die Schale vermittelst der Schnüre hängt, und in die am andern Arm des Wagebalkens aufgehängte Schale lege man soviele Gewichte, bis sie mit dem festen Körper ins Gleichgewicht kommen, und rechne dazu das Gewicht der Schale mit den Schnüren, so hat man das Gewicht des festen Körpers = P. Hiernächst lasse man denselben so aufgehangenen festen Körper in ein Gefäß mit Wasser herab hängen, so wird er darin nicht herab sinken, bevor man aus der gegen über hängenden Schale wieder einige Gewichte heraus genommen hat. Nachdem nun der Körper ganz unter die höchste Wasserfläche herab gesunken ist, übrigens aber völlig frey im Wasser hängt, vermindere oder vermehre man die in der Schale liegenden Gewichte so lange bis sie aufs neue mit dem im Wasser hängenden Körper im Gleichgewicht sind. Die Summe der nun in der Schale liegenden Gewichte mit der Schale und Schnüren zusammen sey = Π, so ist dies die vertical aufwärts ziehende Kraft, welche den frey im Wasser hängenden Körper erhalten würde, daß er nicht sänke, und man hat $P - p = \Pi$, wenn p das Gewicht bezeichnet, was der feste Körper im Wasser verlohren hat. Weil nun vermöge des Versuchs P und Π bekannt sind, so hat man auch $p = P - \Pi$, und eben soviel wiegt eine Menge Wasser, die mit dem festen Körper einerley Cubicinhalt hat.

Zur Summe der Gewichte, welche mit dem festen Körper, sowohl wenn er in freyer Luft, als auch wenn er im Wasser hängt, das Gleichgewicht halten, gehört zwar jedesmahl auch das Gewicht der Schale mit den Schnüren, worin jene Gewichte liegen. Weil man aber nur die Differenz beyder Summen sucht, so ist es nicht nöthig, das Gewicht der Schale mit den Schnüren besonders zu suchen, weil die Subtraction es wieder aufhebt. Sonst hat man auch besonders dazu eingerichtete Wagen, wovon eine Schale unten mit einem kleinen Hacken versehen ist, um den festen Körper vermittelst des Fadens daran aufzuhängen, da dann, weil beyde Schalen einander für sich im Gleichgewicht erhalten, jedesmahl das eigentliche Gewicht des festen Körpers sowohl in freyer Luft, als auch im Wasser, der Summe der Gegengewichte in der andern Schale gleich ist.

Aus dem so gefundenen Gewicht einer Menge Wasser, die mit dem festen Körper einerley Cubicinhalt hat, findet man ferner das specifische Gewicht des Wassers in dem Sinn des 15 §. Stat. Wenn nemlich V den Cubicinhalt des festen Körpers, und p das im Wasser verlohrne Gewicht, γ das specifische Gewicht des Wassers bezeichnet; so ist $\gamma = \frac{p}{V}$.

Ein Würfel, dessen Seitenlinie $1\frac{1}{2}$ Rheinl. Zoll lang ist, verliert im Regenwasser gewöhnlich 948 Gran holländisch Troy Gewicht bey temperirter Wärme des Wassers. Der Inhalt eines solchen Würfels beträgt $\frac{27}{8}$ Cubiczoll Rheinl. Maaß, also wiegt ein Cubiczoll Regenwasser $948 : \frac{27}{8} = \frac{948 \times 8}{27} = 281$ Gran Holl. Troy Gewicht: so hat es auch **Muschenbroeck** befunden. (Introd. ad Phil. Natur. Cap. XXVII. §. 1449.) Demnach wiegt ein Rheinländischer Cubicfuß Wasser 63 Pfund $3\frac{3}{8}$ Unzen Holl. Troy, und 66 Pfund $8\frac{23}{38}$ Unzen Cöllnisch. Das Pariser Längenmaaß ist $\frac{144000}{139113} = 1,035003$ des Rheinländischen, also das Pariser Cubicmaaß 1,108727 des Rheinländischen, mithin wiegt ein Pariser Cubicfuß Wasser 70 Pfund $1\frac{1}{4}$ Unze Troy. Die Unze Holl. Troy wiegt 579,2 Pariser Grains, wovon die Pariser Unze 576 Grains wiegt: also sind 180 Pfund

Holl. Troy = 181 Pfund Pariser Markgewicht, und man findet das Gewicht eines Cubicfusses Wasser in Pariser Maaß und Gewicht von 70 Pfund $7\frac{23}{48}$ Unzen.

40 §.

Auf eben die Art liesse sich das Gewicht eines Cubicfusses oder Cubiczolles jeder andern flüssigen Masse ebenfalls finden, nur wäre dabey zu bedenken, daß es scharfe flüssige Massen giebt, die feste Massen, vornemlich Metalle, angreifen. Glas hat den Vorzug, daß es davon, wenigstens in der kurzen Zeit nicht angegriffen wird, die man zu dem Versuch nöthig hat: deßwegen ist ein massives Stück Glas, wenn man es nur an einem Faden aufhängen kann, am bequemsten, um das specifische Gewicht einer jeden andern flüssigen Masse mit dem specifischen Gewicht des Wassers zu vergleichen, wobey es gleichgültig ist, was das Stück Glaß für eine Figur hat. Man wäge demnach ein für allemahl das Stück Glaß zuerst in freyer Luft, hiernächst im Regenwasser, so findet man wieviel das Stück Glaß im Regenwasser am Gewicht verliert, und das ist zugleich das Gewicht einer Menge Wasser, die mit dem Stück Glas einerley Cubischen Inhalt hat. Um nun zu finden wievielmahl eine andre flüssige Masse, z. E. Sohle oder Saltzwasser, specifisch schwerer oder leichter als Wasser ist, suche man eben so, wieviel das Stück Glaß in der Sohle, oder was es sonst für eine flüssige Masse seyn mag, am Gewicht verliert; so weiß man wieviel eine Menge von dieser flüssigen Masse wiegt, die mit dem Stück Glaß mithin auch mit jener eben so grossen Menge Wasser einerley Cubischen Inhalt hat.

Nun

Nun dividire man das Gewicht, was das Stück Glas in der erwählten flüssigen Masse verliert, mit dem Gewicht, was eben das Stück Glaß im Wasser verliert, so zeigt der Quotient, wieviel mahl die so untersuchte flüssige Masse schwerer oder leichter als Regenwasser ist.

Wird die so gefundene Zahl mit dem Gewicht eines Cubicfusses oder Cubiczolles Regenwasser multiplicirt; so giebt das Product das Gewicht eines Cubicfusses oder Cubiczolles der untersuchten flüssigen Masse.

Wenn das Stück Glaß im Wasser 639 Troysche Aß, in Milch 20 Aß mehr, also 659 Aß am Gewicht verliert; so findet man nach der gegebenen Regel die Zahl $\frac{659}{639} = 1,0313$, und sovielmahl ist Milch schwerer als Wasser. Wenn ferner eben das Stück Glaß im rectificirten Weingeist 86 Aß weniger als im Wasser, also 553 Aß am Gewicht verliert; so findet man den Weingeist $\frac{553}{639}$ mahl oder 0,8653 mahl so schwer als Wasser.

41. §.

Wenn ein fester Körper so schwer ist, daß er im Wasser untersinkt; so vergleicht man leicht auf ähnliche Art das specifische Gewicht seiner Masse mit dem specifischen Gewicht des Wassers.

Man wäge zuvor den festen Körper in freyer Luft, und bemerke sein ganzes Gewicht. Man lasse ihn ferner ganz ins Wasser hängen, und bemerke, wieviel er von seinem Gewicht im Wasser verliert. Darauf dividire man das ganze Gewicht des Körpers mit demjenigen

Gewicht, was er im Wasser verlohren hat, so giebt der Quotient an, wievielmahl die Masse des festen Körpers schwerer als Wasser sey.

Hat ein Stück Gold 137 Gran schwer im Wasser $7\frac{1}{4}$ Gran verlohren, so ist dies Gold $\frac{137}{7\frac{1}{4}} = \frac{548}{29}$ $= 18{,}896$ mahl schwerer als Wasser: und wenn ein Stück Silber 248 Gran schwer im Wasser 24 Gran verliert, so ist es $\frac{248}{24} = \frac{31}{3} = 10{,}333$ mahl schwerer als Wasser.

42 §.

Einen festen Körper, der specifisch leichter als Wasser ist, kann man im Wasser nicht für sich allein abwägen, weil er darin nicht untersinkt: er kann aber mit einem specifisch schweren so verbunden werden, daß beyde zusammen einen Körper ausmachen, dessen mittleres specifisches Gewicht grösser, als das specifische Gewicht des Wassers ist. Nun sey des schwerern Körpers Gewicht $= Q$ und er allein verliere im Wasser das Gewicht q, so ist sein Gewicht im Wasser $Q - q = K$. Des leichtern Körpers Gewicht sey $= P$ und das Gewicht einer eben so grossen Menge Wasser $= p$, so strebt er im Wasser mit der Gewalt $p - P = \Pi$ in die Höhe zu steigen. (26 §.) Demnach hat der aus beyden zusammen gesetzte Körper im Wasser das Gewicht $K - \Pi$, oder das Gewicht des aus beyden zusammengesetzten Körpers im Wasser ist kleiner, als das Gewicht des schweren allein im Wasser, und die Differenz zwischen beyden ist $\Pi = p - P$. Diese kann nun vermittelst des Versuchs gefunden werden, und daraus findet man weiter $p = P + \Pi$, mit-

mithin auch $\frac{P}{p} = \frac{P}{P + \Pi}$, als die Zahl, welche das specifische Gewicht der leichtern Masse in Vergleichung mit dem specifischen Gewicht des Wassers angiebt.

Die zu diesem Gebrauch besonders eingerichteten Wagen sind gewöhnlich mit einem gläsernen Eimer versehen, das man mit einem metallenen Netz verschliessen kann, welches den hinein gelegten leichtern Körper hindert, daß er nicht in die Höhe steige, wenn man das Eimer mit demselben unter Wasser bringt. Anfangs bringt man das leere mit dem Netz verschlossene Eimer nachdem es vermittelst eines Fadens am einen Arm des Wagebalkens ist aufgehangen und ganz ins Wasser eingetaucht worden, mit Gegengewichten in der Schale am andern Arm ins Gleichgewicht. Nun zieht man das Eimer aus dem Wasser heraus um den leichtern Körper hinein zu legen. Ist dies geschehen, und wird das Eimer mit dem Netz verschlossen eben so wieder am Wagebalken aufgehängt und ins Wasser hineingetaucht; so wird es nicht unter dem Wasser bleiben, sondern in die Höhe kommen, wofern die vorigen Gegengewichte in der am andern Arm hängenden Schale gelassen werden: denn diese werden nun den Ausschlag geben. Um das Gleichgewicht herzustellen, muß man einen Theil dieser Gegengewichte davon wegnehmen, oder wofern das Eimer ebenfalls unten an einer dazu eingerichteten Schale hängt, so kann man auch in diese Schale soviele Gewichte hinein legen, als nöthig sind, um mit den vorigen in der andern Schale das Gleichgewicht herzustellen. Die Summe der in dem einen oder dem andern Fall nöthigen Gewichte ist alsdenn die Kraft Π, welche den leichtern Körper im Wasser zu erhalten erfor-

erfordert wird, und woraus man ferner $p = P + \Pi$ findet.

Ein Stück Tannenholtz hat gewogen in freyer Luft 116 Aß ist im Wasser erhalten von 88 Aß, also war es $\frac{116}{204}$ mahl = 0,5686 mahl schwerer als Wasser.

43 §.

Will man das eigenthümliche Gewicht der Salze und andrer Massen, die von Wasser aufgelöset werden, erforschen, so muß man sie in Terpentinöhl, oder im subtilsten Weingeist, oder sonst einer andern flüssigen Masse abwägen, welche diese Massen nicht auflöset. Auf solche Art findet man das eigenthümliche Gewicht der Salze, in Vergleichung mit den eigenthümlichen Gewicht der flüssigen Masse, worin man sie abgewogen hat: und wenn der letztern eigenthümliches Gewicht in Vergleichung mit dem Wasser bekannt ist, so folgt daraus zugleich die Vergleichung des eigenthümlichen Gewichts der Salze und des Wassers. Nach **Muschenbroecks** Versuch (Introd. ad Philos. Natur. T. II. §. 1398) haben 100 Gran Steinsalz im rectificirten Weingeist 40,41 Gran verlohren, also ist Steinsalz $\frac{10000}{4041}$ mahl schwerer als Weingeist. Ist nun ferner Weingeist 0,866 mahl schwerer als Wasser, so folgt, es sey das Steinsalz $\frac{8660}{4041}$ mahl oder 2,143 mahl schwerer als Wasser.

44 §.

Nunmehro läßt sich vollständig übersehen, wie die Zahlen in der Vergleichungstafel der eigenthümlichen Gewichte, welche oben im 20 §. der Statik mitgetheilt ist, durch hydrostatische Versuche haben gefunden werden können: nur ist wegen des Quecksilbers noch

noch zu bemerken, daß die Methode des 40 §. dabey nicht angebracht werden kann, wofern man nicht ein Stück Gold nehmen wollte, weil keine andre bekannte feste Masse im Quecksilber untersinkt, es müste denn ein Stück von der Platina del Pinto seyn. Es wird aber das Gold vom Quecksilber angegriffen, und man kann auch eben so gut das Quecksilber selbst im Wasser wägen, weil es sich mit dem Wasser nicht vermischt: das gläserne Eimer kann dabey seine Dienste leisten, wenn man nur den Verlust, welchen das Eimer selbst im Wasser leidet, dabey in Rechnung ziehet. Das Gewicht des Eimers sey Q, und es verliere im Wasser das Gewicht q, so wird es im Wasser von einem Gewicht $K = Q - q$ im Gleichgewicht erhalten. Ferner sey das Gewicht des Quecksilbers P der Verlust im Wasser p, so ist des Quecksilbers Gewicht im Wasser $\Pi = P - p$, mithin des Eimers mit dem hineingeschütteten Quecksilber Gewicht im Wasser $= K + \Pi$. Wenn also anfangs das ledige im Wasser hängende Eimer durch Gegengewichte ins Gleichgewicht gesetzt ist; so darf man nur anmerken, wieviel zum Gegengewicht hinzu kommen muß, wenn das Eimer mit dem Quecksilber im Wasser hängt; um Π, mithin auch $p = P - \Pi$, und daraus ferner $\frac{P}{p} = \frac{P}{P - \Pi}$ als die Zahl zu finden, welche das Verhältniß vom eigenthümlichen Gewicht des Quecksilbers gegen das Wasser angiebt. Man siehet übrigens leicht, daß man auch feste Körper eben so vermittelst des Eimers im Wasser abwägen, und so das eigenthümliche Gewicht ihrer Masse suchen könne.

Der

Der V. Abschnitt.

Vom eigenthümlichen Gewicht vermischter Massen.

45 §.

Wenn man Metalle von verschiedener Art zusammen schmelzt, Wasser und Wein unter einander mischt, oder Salze im Wasser auflöset, so entstehen daraus vermischte Massen, deren eigenthümliches Gewicht aus dem eigenthümlichen Gewicht der reinen Massen durch Rechnung leicht würde gefunden werden, wenn man voraussetzen könnte, daß der Raum, den sie nach der Vermischung einnehmen, so groß sey, als die Summe der Räume, die sie einzeln vor der Vermischung einnahmen. Wenn nemlich P und Q die Gewichte, V und W die Räume zweener Körper vor der Vermischung sind, so ist das Gewicht der vermischten Masse $P + Q$, und wofern diese nun den Raum $V + W$ einnimmt, so ist das Gewicht eines Cubicfusses oder Cubiczolles der vermischten Masse $= \frac{P + Q}{V + W}$. Wenn ferner P das Gewicht p und Q das Gewicht q im Wasser verliert, so ist vermöge eben der Voraussetzung $\frac{P + Q}{p + q}$ das eigenthümliche Gewicht der vermischten Masse in Vergleichung mit dem eigenthümlichen Gewicht des Wassers. Allein jene Voraussetzung ist der Natur nicht völlig gemäß, wovon man folgende Schriftsteller nachsehen kann. Kästners Anfangsgr. der angew. Math.

Hydrost. §. 54 S. 100 101. *Zeiher* Mistionum metallicarum examen hydrostaticum Witteb. 1764. Gött. Anz. von gelehrten Sachen vom Jahr 1769. 25 St. 238 S. C. E. *Gellert* de densitate mixtorum ex metallis et semimetallis factorum in Comment. Petrop. T. XIII. p. 382. *Musschenbroeck* Introd. ad Philos. Nat. T. II. §. 1404 sqq. pag. 528 sqq. *Kästner* de mixtorum examine hydrostatico in Comment. Nov. Gött. pag. 102.

46 §.

Das eigenthümliche Gewicht zwoer Massen ist gegeben, und man soll eine Masse von einem gegebenen mittlern specifischen Gewicht durch beyder Vermischung zuwege bringen: die Frage ist, in welchem Verhältniß, dem Raum oder Gewicht nach, die reinen Massen genommen werden müssen, vorausgesetzt, daß beyde nach der Vermischung soviel Raum zusammen einnehmen, als sie einzeln vor der Vermischung einnahmen.

Aufl. Wer in der Rechenkunst geübt ist, sieht leicht, daß das Verhältniß der Räume vermittelst der Alligationsregel gefunden werden könne, (249 §. Rech.) und in völliger Allgemeinheit läßt sich die Sache so übersehen. Wenn g und γ die eigenthümlichen Gewichte der schwerern und leichtern von den reinen Massen, V und W ihre körperlichen Räume, ferner μ das eigenthümliche Gewicht der vermischten Masse, bezeichnen; so ist der angenommenen Voraussetzung gemäß $V + W$ die körperliche Grösse der vermischten Masse, und $g.V$, $\gamma.W$, sind die Gewichte der reinen Massen. Nach den Bedingungen der

der Aufgabe aber soll $\frac{g \cdot V + \gamma \cdot W}{V + W} = \mu$ seyn, mithin $gV + \gamma W = \mu V + \mu W$, und daraus folgt ferner $(g - \mu) V = (\mu - \gamma) W$, also $V : W = \mu - \gamma : g - \mu$, welches die Auflösung nach der Alligationsregel ist.

Wenn P und Q die Gewichte der schwerern und leichtern Masse bezeichnen, welche die Räume V und W füllen, so ist $P = g \cdot V$, und $Q = \gamma \cdot W$, also $\frac{P}{Q} = \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\mu - \gamma}{g - \mu}$. Will man also das Verhältniß der Gewichte der reinen Massen haben, welche in die Vermischung gehören, so muß man die Zahlen welche das Verhältniß der Räume ausdrücken, noch mit den eigenthümlichen Gewichten der Massen multipliciren.

47 §.

Wenn man weis, wieviel ein Pfund einer schwerern und einer leichtern Masse am Gewicht im Wasser verliert, und durch die Vermischung eine Masse zuwege gebracht werden soll, wovon ein Pfund mehr als die schwerere und weniger als die leichtere im Wasser verlieren würde; so ist dies nur ein besondrer Fall von der Aufgabe des vorigen §. Denn aus dem Gewicht, was ein Stück von einer Masse von bekanntem Gewicht im Wasser verliert, hot man ihr eigenthümliches Gewicht. (39 §.) Wenn also 1 Pf. der schwerern das Gewicht p, 1 Pf. der leichtern das Gewicht q, und 1 Pf. der vermischten Masse das Gewicht m im Wasser verlieren soll, so hat man $g = \frac{1}{p}$, $\gamma = \frac{1}{q}$, $\mu = \frac{1}{m}$: demnach läßt sich die Auflösung des vor. §. anwenden. Will man alsdenn die im Wasser verlohrnen Gewichte statt g, γ, und μ in Rechnung bringen,

bringen, so hat man $\frac{g}{\gamma} = \frac{q}{p}$, $\mu - \gamma = \frac{q-m}{mq}$, $g - \mu = \frac{m-p}{mp}$, also $\frac{\mu - \gamma}{g - \mu} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q-m}{m-p}$, mithin $\frac{P}{Q} = \frac{q-m}{m-p}$. Ferner ist $\frac{V}{W} = \frac{P:g}{Q:\gamma} = \frac{\gamma \cdot P}{g \cdot Q} = \frac{p \cdot P}{q \cdot Q}$, also auch $\frac{V}{W} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q-m}{m-p}$.

Die Formul $\frac{P}{Q} = \frac{q-m}{m-p}$ ergiebt, daß nun das Verhältniß der Gewichte der reinen Massen nach der Alligationsregel gefunden werde, welches unabhängig von der vorigen Auflösung auch so erhellet. Man schliesse 1 Pf. verliert p Pf. — P Pf.?

Antw. $p \cdot P$.

1 Pf. verliert q Pf. — Q Pf.?

Antw. $q \cdot Q$.

Die vermischte Masse wiegt $P + Q$ Pfunde, und verliert $m \cdot (P + Q)$, also wird der Voraussetzung gemäß erfodert, daß $pP + qQ = mP + mQ$ sey, und daraus folgt $(q - m)Q = (m - p)P$, mithin $\frac{P}{Q} = \frac{q-m}{m-p}$ wie vorhin. Ob nun gleich angenommen ist, daß p, q, m, die Gewichte bezeichnen, welche ein Pfund der schweren, der leichtern Masse, und der Masse von mittlerer Schwere im Wasser verlieren; so kann man doch statt eben dieser Buchstaben auch drey andre Zahlen setzen, welche die Gewichte angeben, die drey Stücke von jeder Art dieser Massen im Wasser verlieren würden, wenn es nur drey Stücke von gleichem Gewicht sind: denn diese verlohrnen

Gewichte verhalten sich eben so gegen einander, wie in dem Fall, wenn jedes Stück dieser dreyen Massen nur ein Pfund wiegt, und die Auflösung hängt nur von dem Verhältniß der Gewichte p, q, m, gegen einander ab.

48. §.

Die bisher untersuchte Aufgabe dient zugleich, wenn das eigenthümliche Gewicht einer vermischten Masse bekannt ist, mit dem eigenthümlichen Gewicht zweyer andern Massen, aus welchen die vermischte Masse entstanden ist, nicht allein zu entdecken, in welchem Verhältniß dem Raum oder dem Gewicht nach die Mischung gemacht ist, sondern auch, wenn es verlangt wird, aus der Grösse oder dem Gewicht der vermischten Masse die Grösse oder das Gewicht der zusammen vermischten Theile nach der Vermischungsregel zu finden. Doch wird die Auflösung desto mehr oder weniger fehlerhaft, je mehr oder weniger die Voraussetzung von der Wahrheit abweicht, daß der Raum nach der Vermischung so groß bleibe, als die Summe der Räume vor der Vermischung war. Eine solche vom König Hiero in Sicilien dem **Archimedes** vorgelegte Aufgabe soll letztern veranlasset haben, auf die ersten Gründe der oben im dritten Abschnitt vorgetragenen Lehren vom Gleichgewicht schwerer flüssiger Massen mit hineingetauchten festen Körpern zu verfallen, wovon er zwey Bücher unter dem Titel: de iis, quae vehuntur in humido, geschrieben hat.

49. §.

Der König Hiero hatte eine goldene Krone verfertigen lassen, und kam auf den Verdacht, daß der Goldarbeiter dabey einen Betrug gespielet, und das

Gold

Gold durch einen Zusatz von Silber verfälscht habe. Archimedes sollte prüfen, ob dieser Verdacht gegründet sey, jedoch ohne das Werk der Kunst selbst zu verderben, welches sonst den Beyfall des Königs hatte, und das gab dem Archimedes Anlaß auf die Hydrostatische Probe zu verfallen, die jedoch wegen der schon mehrmahls bemerkten Fehlsamkeit der Voraussetzung, worauf sie sich gründet, nicht vollkommen zuverlässig ist. Nach der alten Erzählung ist die Krone 20 Pfund schwer gewesen, und hat im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfund oder 9600 Gran von ihrem Gewicht verlohren. Wenn aber fein Gold 19,64mahl schwerer als Wasser ist, so müssen 20 Pfund Gold im Wasser $\frac{20}{19,64}$ Pfund oder 7821 Gran am Gewicht verlieren, mithin ist die Krone specifisch leichter als fein Gold gewesen. Wird nun vorausgesetzt, daß der Zusatz Silber gewesen sey; so giebt folgende Rechnung, wiewohl nicht vollkommen genau, wieviel Gold und wieviel Silber die Masse enthalten habe.

Wenn Silber 11,091mahl schwerer als Wasser ist, so würden 20 Pfund Silber im Wasser 13849 Gran am Gewicht verlieren: also giebt die Alligationsregel

	verlieren Grane	auf
20 Pf. fein Gold	7821	4249 Gran fein Gold
20 Pf. schlecht Gold	9600	sind also
20 Pf. Silber	13849	1779 Gr. Silber Zusatz
	Summe	6028 Gr. schlecht Gold.

Ferner setzt man nach der Vermischungsregel

6028 Gr. schl. Gold — 4249 Gr. f. G. — 20 Pfund?

Antw. 14,1 Pfund fein Gold,
also 5,9 Pfund Silber.

50 §.

Unter dem Nahmen von Hydrostatischen Senkwagen, die von dem besondern Gebrauch, wozu sie bestimmt sind, Soolwagen, Bierwagen, Weinwagen, u. s. f. heissen, verstehet man solche Werkzeuge, welche das specifische Gewicht flüssiger Massen zu untersuchen dienen, übrigens aber eben nicht die sonst gewöhnliche Einrichtung einer
65F. Wage haben. Die einfachsten sind nichts anders als eine Röhre, die unten mit einer hohlen Kugel zusammen hängt, worin soviele Gewichte liegen, als nöthig sind, damit das Werkzeug in der einen oder der andern Art von flüssigen Massen sich bis auf eine gewisse Tiefe senke. Das specifische Gewicht dieser so genannten Wage, welches hier wegen der innern Höhlung vom mittlern specifischen Gewicht (28 §.) zu verstehen ist, muß nicht völlig so groß seyn, als das specifische Gewicht der leichtesten unter den flüssigen Massen, zu deren Prüfung sie dienen soll, damit sie darin nicht ganz untersinke. Je grösser alsdenn das specifische Gewicht einer andern flüssigen Masse ist, desto kleiner ist die Tiefe, um welche sich die Wage hinein senkt; sie muß sich also in der schwersten flüssigen Masse noch so tief einsenken, daß die Kugel ganz unter Wasser kommt, weil man an der Röhre Merkmahle anbringt, welche anzeigen, wie tief sich die Wage in jeder Art der flüssigen Massen einsenken muß, wenn sie rein und unvermischt sind. Die Abtheilungen der Röhre werden alsdenn durch Versuche gefunden, und wenn sie auch zur Prüfung solcher Flüssigkeiten dienen soll, welche Metall angreifen würden, so werden Röhre und Kugel aus Glas gemacht. Statt einer Kugel unten an der Röhre wird das

Werk-

Werkzeug um deßwillen noch besser mit zwoen Kugeln einer grössern und einer kleinern gleich unter der vorigen versehen, so wie es die 65 Figur vorstellet, damit die Gewichte in der untern Kugel ihren Platz erhalten können, und der Schwerpunct der Wage in eine desto tiefere Stelle unter der Wasserfläche falle. Bey dieser Einrichtung wird die Röhre von den in der untern kleinern Kugel befindlichen Gewichten desto richtiger in lothrechter Lage erhalten.

51 §.

Wenn man das Queckfilber und die Spießglasbutter ausnimmt, so ist unter den bisher bekannten flüssigen Massen das Vitriolöhl am schwersten, und der ätherische Weingeist am leichtesten: jenes Vitriolöhl ist 1,700 bis 1,877mahl, und der ätherische Geist 0,732mahl schwerer als Regenwasser. Demnach müste eine Hydrostatische Senkwage von der eben beschriebenen Einrichtung mit einer ziemlich langen Röhre versehen seyn, wenn an derselben Abtheilungen angebracht werden sollten, welche nach allen dazwischen fallenden Stuffen das eigenthümliche Gewicht der Flüssigkeiten bis auf Tausendtheilchen vom Gewicht einer eben so grossen Menge Regenwasser anzeigen sollten. Damit wäre aber mehr als eine Unbequemlichkeit verbunden. Um deßwillen ist es besser, wenn man mehrere dergleichen Wagen zur Hand hat, wovon der Gebrauch einer jeden für solche Flüssigkeiten eingeschränkt ist, deren eigenthümliches Gewicht zwischen einem Paar Gränzen fällt, deren Verhältniß gegen einander ohngefähr 1 : 1,2, oder auch nur 1 : 1,1 beträgt, da dann sechs bis zehn solcher Wagen für alle bisher bekannte flüssige Massen genügen können.

Eine solche Einrichtung geben die Herren **Brander** und **Höschel** in Augsburg ihren neuen Hydrostatischen Senkwagen, wovon der im Jahr 1777 bekannt gemachten **Beschreibung des neuen Spiegelquadranten nach Hadleys Theorie** eine besondre Nachricht beygefüget ist. Ich werde hier die Gründe vortragen, worauf ihre Einrichtung beruhet, die vor den meisten ältern ihre wesentlichen Vorzüge hat: von andern ältern Einrichtungen solcher Senkwagen findet man in **Leupolds** Theatro Statico II. §. sqq. mehr Nachricht.

52 §.

Die Eintheilungen an der Röhre einer Senkwage zu finden, wenn sie die Dichtigkeit der flüssigen Massen, worin sie versekt wird, in Vergleichung mit der Dichtigkeit des Regenwassers anzeigen soll.

65F. Aufl. Man senke die Wage in eine flüssige Masse, deren Dichtigkeit $= D$ vorher entweder vermittelst des im 39 und 40 §. beschriebenen Verfahrens gefunden, oder sonst bekannt ist, und bemerke alsdenn die Stelle bey A, woselbst die Röhre von der höchsten Fläche der flüssigen Masse geschnitten wird. Das ganze Gewicht der Senkwage sey $= P$, so ist das Gewicht einer Menge Wasser, welche den körperlichen Raum AB füllen würde, $= \frac{1}{D}P$. Wenn nun einer andern flüssigen Masse Dichtigkeit $= \Delta$, und $\Delta > D$ ist, so wird die Wage darin nur bis C sinken: aus der bekannten Dichtigkeit Δ giebt sich alsdenn das Gewicht einer Menge Wasser, die den Raum BC füllen würde, $= \frac{1}{\Delta}P$. Weil nun die

Räume

Räume AB, BC, sich wie die Gewichte gleichartiger Massen verhalten, die diese Räume ausfüllen; so ist $AB : BC = \frac{1}{D} : \frac{1}{\Delta}$, und $BC = \frac{D}{\Delta} AB$, also $AC = AB - BC = \left(1 - \frac{D}{\Delta}\right) AB$, oder $AC = \frac{\Delta - D}{\Delta} . AB$.

Wiederum sey die Dichtigkeit einer dritten flüssigen Masse $= \delta$, die Wage senke sich darin bis M, und es sey $AM = n . AC$; so ist $\frac{\delta}{D} = \frac{AB}{BM}$, und $BM = AB - AM = AB - n . AC$, oder $BM = \left(1 - \frac{n(\Delta - D)}{\Delta}\right) AB = \frac{\Delta - n(\Delta - D)}{\Delta} . AB$, also $\frac{\delta}{D} = \frac{\Delta}{\Delta - n(\Delta - D)}$. Daraus folgt $\Delta\delta - n(\Delta - D)\delta = D\Delta$, und man erhält $n = \frac{\Delta(\delta - D)}{(\Delta - D)\delta}$; also kann $AM = n . AC$ für jeden angenommenen Werth δ gefunden, und die Röhre darnach eingetheilt werden, da dann bey jeder so gefundenen Stelle die dazu gehörige Zahl δ gesetzt wird.

Die Zahl $n = \frac{\Delta}{\Delta - D} . \left(1 - \frac{D}{\delta}\right)$ wächst mit δ, und nimmt mit δ zugleich ab, sie verschwindet, wenn $\delta = D$ gesetzt wird, und wird so wie $AM = n . AC$ negativ, wenn $\delta < D$ angenommen wird. Das heißt, man muß nun AM oberhalb A nehmen, wie der Natur der Sache gemäß ist, weil die Wage tiefer als bis A sinken muß, wenn $\delta < D$ ist.

Wäre $\Delta < D$, so hätte man schon C oberhalb A gefunden, und man hat auch $n = \frac{\Delta\,(D - \delta)}{(D - \Delta)\,\delta}$. So lange nun $\delta < D$ ist, bleibt $AM = n \,.\, AC$ positiv, und AM liegt oberhalb A: wenn dagegen $\delta > D$ genommen wird, so ändert sich die Lage von AM und M fällt unterhalb A.

Wenn die Wage im Regenwasser bis A sinkt, so ist $D = 1$, und $n = \frac{\Delta\,(\delta - 1)}{(\Delta - 1)\,\delta}$, wenn C unter A liegt, also $\Delta > 1$ ist: nach dieser Formul kann einerley Wage oberhalb und unterhalb A für flüssige Massen, die schwerer und leichter als Regenwasser sind, eingetheilt werden. Für die letztern ist $n = \frac{\Delta(1 - \delta)}{(\Delta - 1)\delta}$ und $AM = n \,.\, AC$ wird oberhalb A genommen.

53 §.

Das Brandersche Sortiment bestehet aus sechs Senkwagen, und eine davon dient für solche flüssige Massen, deren Dichtigkeit der Dichtigkeit des Regenwassers sehr nahe kommt, und zwischen den Gränzen 0,983 und 1,018 eingeschränkt ist. Zwey andre sind für Massen, die leichter als Regenwasser sind; die erste fängt mit der Dichtigkeit 1 an, und dient, bis die Dichtigkeit $= 0{,}928\frac{4}{7}$ wird. Mit der letztern Dichtigkeit fängt die andre an, und dient, bis die Dichtigkeit $= 857\frac{1}{7}$ wird. Wiederum zwey andre Wagen sind für Massen, deren Dichtigkeit grösser als des Regenwassers Dichtigkeit ist: die erste fängt mit der Dichtigkeit 1 an, und dient, bis die Dichtigkeit $= 1{,}071\frac{3}{7}$ wird, und mit dieser fängt die andre

dre an, deren Eintheilung bis zur Dichtigkeit 1,143 fortgeht. Auf Verlangen wird das Sortiment mit einer oder mehrern Wagen vermehrt, die für noch schwerere Flüssigkeiten dienen. Ausser den beschriebenen fünf Wagen wird dem Sortiment noch eine sechste beygefügt, welche für Salzwasser oder so genannte Soole besonders eingerichtet ist, und ausser der Scale der Dichtigkeiten noch eine andre hat, die zugleich anzeigt, wieviel Salz in einem Wiener Cubicschuh solcher Soole enthalten ist, worüber das folgende noch mehr Erläuterung geben wird.

54 §.

Wofern ein Paar flüssige Massen von verschiede- 65 F.
ner Art mit einander vermischt einen Raum einnehmen, der so groß ist, als die Summe ihrer Räume vor der Vermischung; so läßt sich aus dem eigenthümlichen Gewicht der vermischten Masse, wenn die eigenthümlichen Gewichte der reinen Massen, ebenfalls bekannt sind, finden, wieviel von jeder Art, sowohl dem Raum, als dem Gewicht nach zu der Vermischung genommen sey. Gesetzt also die Senkwage sinke in der schwerern Masse bis C in der leichtern bis A, in der vermischten bis M, so hat man AM $= \frac{\Delta(\delta - D)}{(\Delta - D)\delta} \cdot AC$, also $CM = AC - AM = \left(1 - \frac{\Delta(\delta - D)}{(\Delta - D)\delta}\right) \cdot AC = \frac{D(\Delta - \delta)}{(\Delta - D)\delta} \cdot AC$ folglich $\frac{AM}{CM} = \frac{\Delta(\delta - D)}{D(\Delta - \delta)}$. Wenn aber P und Q die Gewichte des schwerern und leichtern Theils der Masse

bezeichnen, so ist $\frac{P}{Q} = \frac{\Delta}{D} \cdot \frac{S-D}{\Delta-\delta}$, (46 §.) also $\frac{P}{Q} = \frac{AM}{CM}$. Wäre also die Senkwage in gleiche Theile getheilt, so würde das Verhältniß der Zahl der Theile von A bis M zur Zahl der Theile von C bis M das Verhältniß der in die Vermischung gebrachten Massen dem Gewicht nach angeben. Wenn überdem die Räume des schwerern und leichtern Theils V und W sind, so ist $\frac{P}{Q} = \frac{\Delta \cdot V}{D \cdot W}$, also $\frac{V}{W} = \frac{D \cdot P}{\Delta \cdot Q}$ $= \frac{D \cdot AM}{\Delta \cdot CM}$.

55 §.

Wenn man Salz in Wasser auflöset, so dringt vermöge der Erfahrung ein beträchtlicher Theil der Salztheilchen in die Zwischenräume des Wassers, und nur der übrige Theil vermehrt den Raum, welchen das süsse Wasser vorher einnahm, ehe das Salz war zugeschüttet worden. H. Lambert füllte eine kleine Phiole mit einem sehr engen Halse mit süssem Wasser an, und fand durch Abwägen das Gewicht dieser Wassermenge von 1128,3 Gran. Hierauf schüttete er in die leere Phiole 300 Gran Salz, goß wieder süsses Wasser darauf, welches das Salz auflösete, und weil während der Auflösung das Wasser sich senkte, so goß er so lange Wasser hinzu, bis er eine Salzsolution erhielt, die bey eben dem Raum von 1128,3 Gran süssen Wassers 300 Gran Salz enthielt, und er fand ihr Gewicht 1316,3 Gran, also ihr Uebergewicht über eben soviel Wasser 188 Gran. Nun ist Kochsalz 2,148 mahl schwerer als Wasser, also füllen 300 Gran Salz soviel Raum, als $\frac{300000}{2148}$ $= 139,7$

= 139,7 Gran Wasser. Wenn also kein Salz in die Zwischenräume des Wasser dränge, so hätte das Gewicht der Salzsolution, welche eben die Phiole füllte, welche 1128,3 Gran süsses Wasser faßt = 1128,3 − 140 + 300, d. i. 1288,3 Gran betragen müssen, welches aber vermöge des Versuchs 1316,3 Gran waren: also haben sich 28 Gran in die Zwischenräume des Wassers begeben. Wenn x das Gewicht des zugeschütteten Salzes, und y das Uebergewicht der Salzsolution über eine gleichgrosse Menge Wasser, deren Gewicht p ist; so wäre das Gewicht der Solution $p + x - \frac{1}{g} x$, also $y = \frac{g-1}{g} x$, wenn kein Salz die Zwischenräume des Wassers durchdränge: aber das würkliche Uebergewicht ist grösser. Bey einerley Raum der Salzsolution, der so groß war, daß ihn 1128,3 Gran süsses Wasser fülleten, fand Herr Lambert folgende zusammen gehörige Werthe von x und y.

$$x = 100 \quad y = 67,$$
$$x = 200 \quad y = 131,$$
$$x = 300 \quad y = 188,$$
$$x = 380 \quad y = 231,$$

und diese Versuche dienten ihm, folgende Gleichung zwischen x und y festzusetzen

$$y = 0{,}6963 \,.\, x - \tfrac{1}{4258} \,.\, x^2,$$

alles in der Voraussetzung, daß die Salzsolution soviel Raum fülle, als 1128,3 Gran süsses Wasser. Wenn also $p = 1128{,}3$ Gran angenommen, und das Gewicht einer Salzsolution, die eben soviel Raum füllt, als 1128,3 Gran süsses Wasser, $= P$ gesetzt wird, so ist $P = p + 0{,}6963 \,.\, x - \frac{1}{4258} \,.\, x^2$.

Die

Die Dichtigkeit dieser Solution in Vergleichung mit der Dichtigkeit des süssen Wassers ist $= \frac{P}{p}$, und man findet $\frac{P}{p} = 1 + 0,6963 \cdot \frac{x}{p} - \frac{p}{4289} \cdot \frac{x^2}{p^2}$. Wenn also γ das Gewicht eines Cubicfusses Wasser ist, und von einer völlig gleichartigen Solution eine andre Menge den Raum V füllt, so ist ihr Gewicht $= \frac{P}{p} \cdot \gamma V$, und γV ist das Gewicht einer eben so grossen Menge Wasser. Man setze $\gamma V = \Pi$, und $\frac{P}{p} \cdot \gamma V = \frac{P}{p} \cdot \Pi = Z$, so findet man

$$Z = \Pi + 0,6963 \cdot \frac{\Pi \cdot x}{p} - \frac{p}{4298 \cdot \Pi} \cdot \frac{\Pi^2 \cdot x^2}{p^2},$$

als das Gewicht einer Salzsolution von eben der vorigen Art, die soviel Raum einnimmt, als eine Menge Wasser deren Gewicht $= \Pi$ ist. Das Gewicht des darin enthaltenen Salzes ist $= \frac{\Pi \cdot x}{p}$, und das specifische Gewicht der Solution ist $\frac{Z}{\Pi} = 1 + 0,6963 \cdot \frac{x}{p} - \frac{p}{4298} \cdot \frac{x^2}{p^2} = \frac{P}{p}$ wie vorhin. Noch setze man $\frac{\Pi \cdot x}{p} = X$, so erhält man

$$Z = \Pi + 0,6963 \cdot X - \frac{p}{4298 \cdot \Pi} \cdot X^2$$

für das Gewicht einer Salzsolution, die einen eben so grossen Raum füllt, als eine Masse Wasser, deren Gewicht $= \Pi$ ist, wenn das Gewicht des darin aufgelöseten Salzes $= X$ ist. Weil nun $p = 1128,3$ war,

war, so wird $\frac{p}{4298} = 0{,}2625$, und $Z = \Pi + 0{,}6963 . X - \frac{0{,}2625}{\Pi} . X^2$.

M. s. hievon Experiences sur le poids du sel et la gravité specifique des saumures faites et analysées par M. *Lambert* in der Histoire de l'Acad. de Prusse pour l'Année 1762. Tom. 18. pag. 27 sqq. Die Abhandlung ist auch ins Deutsche übersetzt und Herrn Branders Beschreibung einer neuen Hydrostatischen Wage Augsb. 1777 in der Uebersetzung beygefügt.

56 §.

Wenn man $\Pi = 1000$ Gran setzt, und nach der Ordnung X = 10 Gran = 20 Gran u. s. f. so läßt sich die folgende vom H. Lambert a. a. O. im 47 §. mitgetheilte Tafel nach dieser Formul berechnen.

X	Z	X	Z
0	1000	180	1117
10	1007	190	1123
20	1014	200	1129
30	1021	210	1135
40	1027	220	1141
50	1034	230	1146
60	1041	240	1152
70	1047	250	1158
80	1054	260	1163
90	1060	270	1169
100	1067	280	1175
110	1073	290	1180
120	1080	300	1185
130	1086	310	1191
140	1093	320	1196
150	1099	336,8	1201
160	1105		1204,7
170	1111		

Dividirt

Dividirt man alle Zahlen in der Columne Z mit 1000, so sind die Quotienten einerley mit den Zahlen, welche das specifische Gewicht der Soole in Vergleichung mit dem specifischen Gewicht des Wassers ausdrücken. Ferner hat man $\frac{Z}{X} = \frac{\Pi}{X} + 0{,}6963 - \frac{0{,}2625}{\Pi} \cdot X$, und für einerley Salzsolution sind die Verhältnisse $\frac{X}{Z}, \frac{Z}{\Pi}, \frac{X}{\Pi}$ einerley, was man auch für ein Gewicht durch Π verstehen will. Wenn also eine andre Menge Soole von eben der Art das Gewicht Q hat, und S das Gewicht des darin befindlichen Salzes bezeichnet, so hat man $\frac{S}{Q} = \frac{X}{Z}$, mithin $S = \frac{X}{Z} \cdot Q$. Wenn ferner eine Masse Wasser, deren Gewicht K ist, mit der Masse der Soole, die das Gewicht Q hat, einerley Raum füllt; so ist $\frac{Q}{Z} = \frac{K}{\Pi}$, also auch $S = \frac{K}{\Pi} \cdot X = \frac{X}{\Pi} \cdot K$. Für die Zahlen in der obenstehenden Tafel ist $\Pi = 1000$, wenn also die Zahl X aus dieser Tafel genommen wird, so hat man $S = \frac{1}{1000} X \cdot K$: mithin läßt sich aus dem bekannten specifischen Gewicht einer Soole vermittelst dieser Tafel sehr leicht das Gewicht des Salzes finden, was in einem Cubicfuß, einer Kanne, oder jedem andern gewählten mit dieser Soole gefüllten Körpermaaß enthalten ist.

Man sucht in der Columne Z, die Zahl auf, welche das specifische Gewicht der Soole angiebt, die daneben stehende Zahl X dividirt man mit 1000 und multiplicirt den Quotienten mit dem Gewicht eines Cubicfusses, oder einer Kanne, süssen Wassers.

Wäre

Wäre das specifische Gewicht der Soole, $= 1,175$ so fände man in der Tafel $X = 280$, also das Gewicht des in einem Rheinländischen Cubicschuh enthaltenen Salzes $= 0,28 \cdot 63,2433 = 17,71$ Pfund Holl. Troy Gewicht.

57 §.

In soviel Wasser das mit dem darin befindlichen Salz den Raum von 1128,3 Gran süssen Wassers einnahm, hat H. Lambert nur höchstens 380 Gran Salz auflösen können. In einer solchen Menge dieser Solution, die einen Raum von 1000 Gran süssen Wassers füllte, waren also 336,8 Gran Salz enthalten, das Gewicht der Solution war 1359,3, also ihr specifisches Gewicht $\frac{1359,3}{1128,3} = 1,2047$; ein Rheinländischer Cubicfuß einer solchen vollständigen oder gesättigten Salzsolution enthält 21,3 Pfund Salz im Troy Gewicht, und ein Cubicfuß dieser Soole wiegt 76,2 Pfund. Wer diese Versuche nachahmen wollte, der müste noch auf den Grad der Wärme dabey acht haben, dem die Solution ausgesetzt wird: deswegen ist ein Thermometer dabey nöthig von dessen Einrichtung und Gebrauch die Aerometrie Nachricht geben wird. Uebrigens läßt sich nun vollständig beurtheilen, wie eine hydrostatische Senkwage zu dem Gebrauch eingerichtet seyn müsse, um die verschiedene Güte der Salzsoolen damit zu untersuchen, da sie dann eben von diesem Gebrauch den Nahmen einer Soolwage erhält. Wenn sie sich in Regenwasser nahe bis ans oberste Ende der Röhre eintaucht, und die Röhre übrigens nach Vorschrift des 52 §. für flüssige Massen eingetheilt ist, die schwerer als Regenwasser sind, aber nicht mehr, als 1,2047 mahl schwerer so dient diese Senkwage als Soolwage. Die Zahlen aus der Columne Z in der Tafel des vor. §. können in der Formul des 52 §. statt δ gesetzt und so die Eintheilung der Röhre gesucht werden; auch kann man als eine besondre Scale entweder die Zahlen der Columne X aus der Tafel des vor. §. oder statt dieser Zahlen andre beyfügen, welche anzeigen, wie viel Salz dem Gewicht nach in einem Cubicschuh oder einem andern gewählten mit dieser Soole gefüllten Körpermaaß enthalten sey. Eine so eingetheilte Soolwage befindet sich mit bey dem Branderschen Sortiment hydrostatischer Senkwagen, wovon im 53 §. Nachricht gegeben ist.

Der VI. Abschnitt.

Vom Gleichgewicht ungleichartiger flüssiger Massen in Gefässen und Röhren.

58 §.

63 F. Wenn das Gefäß GCH bis an AB mit Wasser oder einer jeden andern flüssigen Masse angefüllet und alles in Ruhe, mithin die höchste Fläche AB eben und wagrecht ist; so wird das Gleichgewicht nicht gestört, wenn gleich gegen die Fläche AB ein gleichförmig darüber vertheilter Druck preßt. Denn wenn dieser Druck dem Gewicht einer Säule der flüssigen Masse über der Grundfläche AB in der Höhe AG gleich ist, so kann der Erfolg kein andrer seyn, als er seyn würde, wenn das Gefäß mit eben der flüssigen Masse bis an GH angefüllet und alles in Ruhe wäre. Nun würde über AB derselbe Druck gleichförmig vertheilt

theilt seyn, und das Gleichgewicht nicht dadurch gestört werden.

Demnach könnte über AB auch bis an GH eine von der im untern Raum ACB befindlichen verschiedene flüssige Masse stehen, wenn nur beyde von solcher Beschaffenheit sind, daß sie sich nicht leicht mit einander vermischen. Das Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn es einmahl da ist, und beyde Massen in völliger Ruhe sind. Es sey das eigenthümliche Gewicht der flüssigen Masse im untern Raum $= g$, im obern Raum $= \gamma$, so leidet AB im Zustande des Gleichgewichts einen gleichförmig darüber vertheilten Druck $= \gamma \cdot AB \cdot AG$, und dieser hat keine andre Würkung als ein Druck gegen AB hätte, wenn eine flüssige Masse von eben der Art wie die untere in der Höhe $= \frac{\gamma\, AG}{g}$ darüber stünde.

59 §.

Diese Schlüsse beweisen, daß es für den Zustand des Gleichgewichts gleichgültig sey, die flüssige Masse in dem obern Raum AGHB mag specifisch schwerer oder specifisch leichter seyn, als die flüssige Masse im untern Raum ACB, wenn nur die Massen sich nicht mit einander vermischen. Allein man kann auf die obere Fläche AB des untern Flüssigen eine andre flüssige Masse nie so aufschütten, daß sie sich in einem Augenblick über diese Fläche wagrecht ausbreite. Der daraus entspringende Druck über AB kann also nicht gleich anfangs gleichförmig vertheilt seyn, deßwegen kann kein Gleichgewicht bleiben. Alsdenn aber wird jedes Theilchen der schwerern Masse, sobald es in die leichtere Masse eingetaucht ist, mit einer Gewalt aufwårts gepreßt, die dem Gewicht von soviel Flůssigem der leichtern Art gleich ist, als mit jenem schwerern Theilchen einerley Raum fůllen wůrde. Deswegen muß jedes Theilchen der schwerern Masse in der leichtern zu Boden sinken, die schwerere flůssige Masse wird solchergestalt nach und nach sich in den untern Raum begeben, und kein Gleichgewicht erfolgen, bevor die schwerere Masse den untern Raum ausfůllt.

60 §.

66F. **Im Gefåß *ACDB* befinden sich mehrere ungleichartige flůssige Massen ůber einander im Gleichgewicht zwischen den wagrechten Flåchen *AB*, *EF*, *GH*, *KL*, und dem Boden des Gefåsses *CD*, das eigenthůmliche Gewicht einer jeden ist gegeben, man soll den Druck gegen den Boden des Gefåsses finden.**

Aufl. Wenn α, β, γ, δ, die Dichtigkeiten dieser flůssigen Massen nach der Ordnung von AB bis CD bezeichnen, und a, b, c, d, ihre lothrechten Hőhen sind; so leidet EF den Druck $\alpha \,.\, \mathrm{EF} \,.\, a$, und dieser Druck pflanzt sich gegen GH so fort, daß daher gegen GH ein Druck $= \alpha \,.\, \mathrm{GH} \,.\, a$ entsteht, (8 §.) mithin leidet GH zusammen einen Druck $= \beta \,.\, \mathrm{GH} \,.\, b + \alpha \,.\, \mathrm{GH} \,.\, a = \mathrm{GH}\,(\beta \,.\, b + \alpha \,.\, a)$. Der Druck pflanzt sich wiederum gegen KL so fort, daß daher ein Druck $= \mathrm{KL}\,(\beta \,.\, b + \alpha \,.\, a)$ entsteht, also leidet KL zusammen den Druck $\mathrm{KL}\,(\gamma \,.\, c + \beta \,.\, b + \alpha \,.\, a)$, und eben die Schlůsse beweisen, daß KL den Druck $\mathrm{CD}\,(\delta \,.\, d + \gamma \,.\, c + \beta \,.\, b + \alpha \,.\, a)$ leide. Dieser Druck gegen den Boden ist demnach allemahl eben so groß, als er in dem Fall seyn wůrde, wenn das Gefåß ein grader Cylinder oder ein grades Prisma ůber

eben

eben dem Boden wäre, und wenn alsdenn die flüssigen Massen darin in eben der Ordnung Räume von einerley Höhen mit den vorigen ausfüllten.

Eben daraus findet man leicht den Druck gegen jede Stelle der festen Seitenfläche des Gefässes. Ein kleines Stückchen der Seitenfläche des Gefässes bey L leidet einen Druck, dessen Höhe so groß ist, als die Höhe des Drucks, dem der wagrechte Querschnitt KL des Gefässes durch diese Stelle L ausgesetzt ist. Wenn g das specifische Gewicht des Wassers ist, so wäre der Druck einer Wassersäule gegen KL in der Höhe $= x$ dem Druck gleich, dem KL ausgesetzt ist, wenn $g \cdot KL \cdot x = KL(\gamma \cdot c + \beta \cdot b + \alpha \cdot a)$, also $x = (\gamma \cdot c + \beta b + \alpha \cdot a) : g$ angenommen würde. Ist nun e^2 der Flächeninhalt von einem sehr kleinen Theilchen der Seitenfläche des Gefässes bey L, so leidet L einen Druck $g \cdot e^2 \cdot x = e^2 (\gamma \cdot c + \beta \cdot b + \alpha \cdot a)$.

61 §.

Aus allen senkrechten Pressungen gegen den Boden und die Seitenfläche des Gefässes worin mehrere ungleichartige flüssige Massen über einander im Gleichgewicht stehen, entsteht ein verticaler Druck nach unten, der so groß ist, als die Summe der Gewichte aller dieser Massen zusammen genommen: in horizontaler Richtung aber leidet das Gefäß gar keinen Druck. 67F.

Beweis. Die ganze im Gefäß enthaltene flüssige Masse sey wie im 18 §. vermittelst verticaler Ebenen in verticale Säulen zerschnitten, deren wagrechte Querschnitte sehr klein sind, und MmsS stelle eine von diesen Säulen vor; so leidet Mm einen Druck nach der senkrechten Richtung MP, dessen Höhe dem 60 §. gemäß befunden wird. Wenn nemlich α, β, γ, δ, nach der Ordnung von AB bis CD die Dichtigkeiten der im Gefäß befindlichen flüssigen Massen bezeichnen; so ist die Höhe des Drucks gegen $Mm = \alpha . BF + \beta . HF + \gamma . NH$, und daraus entsteht der aufwärts gerichtete verticale Druck nach $MQ = Rm . (\alpha . BF + \beta . HF + \gamma . NH.)$. (10 §.) Die untere Grundfläche Ss der Säule mag nun entweder schon ein Theil des wagrecht liegenden Bodens seyn, oder noch ein Stück der Seitenfläche des Gefässes; so leidet dieselbe einen unterwärts gerichteten verticalen Druck $= Rm (\alpha . BF + \beta . HF + \gamma . NH + \delta . DL)$, mithin entsteht aus beyden zusammen der verticale Druck nach unten $= Rm (\gamma . (LH - NH) + \delta . DL) = Rm (\gamma . LN + \delta . DL)$, und dieser ist dem Gewicht der Säule gleich. Demnach ist der gesamte Druck nach unten, welchem das Gefäß ausgesetzt ist so groß, als die Summe der Gewichte aller Säulen, folglich so groß, als das Gewicht der gesamten im Gefäß enthaltenen flüssigen Masse. Daß übrigens die horizontalen Pressungen einander insgesamt aufheben erhellet eben so, wie im 18 §. in dem Fall, wenn im Gefäß nicht mehr als einerley gleichartige flüssige Masse befindlich ist.

62 §.

68F. Im untern Raum *DCE* des Gefässes *ACB* befindet sich eine flüssige Masse von schwererer Art als über ihr in dem Raum *ADEB*; ein fester Körper dessen Masse schwerer als die obere und leichter als die untere flüssige Masse ist, wird in das Gefäß eingesenkt: man soll die

die Grösse desjenigen Theils finden, der sich in die untere schwerere Masse eintaucht.

Aufl. Wenn g und γ die Dichtigkeiten des leichtern und schwerern flüssigen und μ die Dichtigkeit der Masse des festen Körpers bezeichnen, wenn ferner die geometrische Grösse des in die schwerere Masse eingetauchten Theils $= x$, des übrigen Theils $= y$, und die Grösse des ganzen Körpers $=$ V gesetzt wird; so ist $V = x + y$. Das Gewicht einer eben so grossen Masse des leichtern flüssigen als der darin befindliche Theil des festen Körpers ist $= \gamma . y$, und das Gewicht einer eben so grossen Masse des schwerern flüssigen, als der darin befindliche Theil des festen Körpers ist $= g . x$, das Gewicht des festen Körpers selbst $= \mu . v = \mu (x + y)$. Man stelle sich den festen Körper FGH eben so in verticale Säulen HK, deren wagrechte Querschnitte sehr klein sind, vermittelst verticaler Ebenen zerschnitten vor, wie die flüssige Masse im Gefäß ACDB (62 Fig.) im 18 §. so erhellet, daß jede dieser Säulen einem zwiefachen verticalen Druck ausgesetzt sey, oben bey K nach unten, und unten bey H nach oben. Die Höhe des senkrechten Drucks gegen H ist $= g . EL + \gamma . EB$, und die Höhe des senkrechten Drucks gegen K ist $= \gamma . BM$. Wenn nun ε^2 den wagrechten Querschnitt der Säule HK bezeichnet, so entsteht aus den senkrechten Pressungen gegen H ein verticaler Druck aufwärts $= \varepsilon^2 (g . EL + \gamma . EB)$, und gegen K ein verticaler Druck unterwärts $= \varepsilon^2 (\gamma . BM)$, (61 §.) also leidet die Säule einen Druck aufwärts $= \varepsilon^2 (g . EL + \gamma . (EB - BM))$. Die Summe aller dieser Pressungen ist der Druck, womit die flüssigen Massen den festen Körper zu heben streben. Aber die Summe aller Pressungen

$\varepsilon^2 . g . EL$ ist das Gewicht einer solchen Menge der schwerern flüssigen Masse, die den Raum NGHO $= x$ füllen würde, also ist sie $= g . x$. Ferner ist die Summe aller Pressungen $\varepsilon^2 . \gamma$ (EB — BM) das Gewicht einer solchen Menge der leichtern flüssigen Masse, die den Raum NFKO $= y$ füllen würde, also ist sie $= \gamma . y$. Mithin ist der Druck, womit die flüssigen Massen den festen Körper zu heben streben, $= gx + \gamma y$, und derselbe muß im Zustande des Gleichgewichts dem Gewicht des festen Körpers gleich seyn. Demnach erhält man $gx + \gamma y = \mu x + \mu y$, und daraus folgt $(g - \mu) x = (\mu - \gamma) y$, mithin ist das Verhältniß der Theile $\frac{x}{y} = \frac{\mu - \gamma}{g - \mu}$. Daraus folgt $y + x : x = g - \gamma : \mu - \gamma$, also $x = \frac{\mu - \gamma}{g - \gamma} . (x + y) = \frac{\mu - \gamma}{g - \gamma}$. V.

Wenn die leichtere flüssige Masse fehlt, so ist $\gamma = 0$, also $x = \frac{\mu}{g}$. V, wie im 34 §. Ferner ist in eben dem Fall $\frac{x}{y} = \frac{\mu}{g - \mu}$: und weil $\frac{\mu}{g - \mu} > \frac{\mu - \gamma}{g - \mu}$ ist, so ist in dem Fall, wenn die leichtere flüssige Masse fehlt, x in Vergleichung mit y grösser, als in dem Fall, wenn über der untern Masse die leichtere flüssige Masse steht.

63 §.

69F. Wenn in der gebogenen Röhre *ADF* ein Paar flüssige Massen, die sich nicht mit einander vermischen, die eine in dem Raum von *A* bis *D*, die andre in dem Raum von *D* bis *F* be-

F befindlich, und nicht allein ihre obern Flächen *AB*, *EF*, sondern auch bey *CD* diejenigen, womit sie an einander gränzen, eben und wagrecht sind; so können beyde einander nur alsdenn im Gleichgewicht erhalten, wenn die lothrechten Höhen *AG*, *FH* ihrer äussern Flächen über der gemeinschaftlichen Gränze *CD* sich gegen einander umgekehrt, wie ihre Dichtigkeiten verhalten.

Beweis. Wenn in dem Raum von A bis D die schwerere befindlich und ihre Dichtigkeit g, im Raum von D bis F aber die leichtere enthalten, und ihre Dichtigkeit $= \gamma$ ist; so preßt die schwerere gegen CD mit einer Gewalt $g \,.\, CD \,.\, AG$, und die leichtere ebenfalls gegen CD mit einer Gewalt $= \gamma \,.\, CD \,.\, FH$. Demnach kann nur alsdenn das Gleichgewicht bestehen, wenn beyde Pressungen gleich sind, mithin, wenn $g \,.\, AG = \gamma \,.\, FH$ ist, und das giebt $AG : FH = \gamma : g$.

Könnte man also die Höhen AG, FH genau messen, so würde dies ein Mittel seyn, das Verhältniß der specifischen Gewichte solcher flüssiger Massen gegen einander zu finden, die sich nicht mit einander vermischen. Ueberhaupt erhellet aus dem Beweise, wenn über gleichen Grundflächen ein Paar Säulen ungleichartiger flüssiger Massen stehen, welche ihre Grundflächen gleich stark drücken, daß die Höhen dieser Säulen den Dichtigkeiten dieser Massen umgekehrt proportional seyn müssen.

64 §.

Das Gleichgewicht einer Kugelförmigen flüssigen Masse KLS, wovon alle Elemente gegen den Mittelpunct C schwer sind, wird nicht gestört, wenn gleich gegen die äussere Fläche ein gleichförmig darüber vertheil- 61 F.

theilter senkrechter Druck preßt: der Erfolg kann kein andrer seyn, als er in dem Fall seyn würde, wenn über der kugelförmigen Masse noch eine andre Schichte einer flüssigen Masse von eben der Art gleichförmig und so vertheilt wäre, daß die grössere Kugelfläche HIR mit der vorigen kleinern einerley Mittelpunct hätte. Diese zweyte Schichte zwischen KLS und HIR könnte auch eine dichtere oder dünnere Masse als die vorige enthalten, wenn nur beyde Massen so beschaffen sind, daß sie sich unter einander nicht vermischen. Wenn jedoch die schwerere Masse die höhere, oder vom Mittelpunct weiter entferntere Schichte einnimmt, und der Zustand des Gleichgewichts nicht aufs vollkommenste da ist; so kann das Gleichgewicht sich nicht anders als dadurch völlig herstellen, daß die schwerere Masse in der leichtern nach und nach gegen den Mittelpunct herab sinkt, und den niedrigern Raum einnimmt.

Eben so können mehrere Schichten zwischen concentrischen Kugelflächen im Gleichgewicht bleiben, wenn alle Elemente der Massen, die diese Schichten ausmachen, gegen den gemeinschaftlichen Mittelpunct dieser Kugelflächen schwer sind. Alsdenn ist die Höhe des Drucks gegen jede von diesen Kugelflächen die Summe der Höhen des Drucks, womit jede von den einzelnen höher liegenden Schichten für sich allein ihre Grundfläche pressen würde: die Höhe des einer jeden Schichte zugehörigen Drucks aber wird gefunden, wenn man die geometrische Höhe der Schichte mit der Dichtigkeit der darin enthaltenen flüssigen Masse multiplicirt.

In einem Gefäß AHKLIB, wie es die 60ste Figur vorstellt, von völlig willkührlicher Gestalt können

nen demnach ebenfalls mehrere dergleichen Schichten ungleichartiger flüssiger Massen über einander im Gleichgewicht seyn, wenn alle gegen einen gemeinschaftlichen Mittelpunct schwer sind: nur muß alsdenn die Gränze, welche jede Schichte von der nächst höhern trennt, so wie die höchste Fläche der obersten Schichte, ein Stück von einer Kugelfläche seyn, und alle diese Kugelflächen müssen einerley Mittelpunct haben, denjenigen nemlich, worin die Richtungen der Schwere aller Elemente dieser Massen zusammen laufen. Wenn alsdenn α, β, γ, δ, die Dichtigkeiten der Schichten sind, so wie sie von AB nach KL auf einander folgen, so ist die Höhe des Drucks gegen $KL = \alpha . AM + \beta . MN + \gamma . NO + \delta . OP$.

Die Aerostatik.

Der I. Abschnitt.

Allgemeine Gesetze des Gleichgewichts der Kräfte, die auf elastische flüssige Massen wirken.

1 §.

51F. Wenn ACBD eine unelastische flüssige Masse von willkührlicher Gestalt und Grösse vorstellt, und wenn kein Theilchen von ihr dem Druck der Schwere oder sonst einer Kraft ausgesetzt ist; so bleiben alle Theilchen dieser Masse in völliger Ruhe bey einander, ohne ihre Lage gegen einander im geringsten zu ändern. (3 §. Hydrostat.) Dies erfolgt, die Masse mag in einer festen Fläche von allen Seiten eingeschlossen, oder sich selbst allein überlassen seyn. Nimmt man dagegen an, daß die flüssige Masse elastisch sey, und ein Bestreben äussere, sich nach allen Seiten auszubreiten, so ist das eben soviel, als ob man annimmt, zwischen jeden zweyen an einander gränzenden Theilchen sey eine Kraft befindlich, welche diese Theilchen von einander zu entfernen strebt, mithin kann die Masse für sich allein nicht in allen ihren Theilen ruhig bleiben. Entweder andre Kräfte, die jenen entgegen gesetzt sind, oder sonst andre Arten des Widerstandes müssen das Gleichgewicht herstellen.

2 §.

Statt eines solchen Widerstandes dient eine feste Fläche, welche die Masse von allen Seiten einschließt. Wie nun diese Fläche an jeder Stelle C oder D der Ausbreitung der flüssigen Masse widerstehet, so leidet selbige an jeder Stelle einen Druck, dessen Richtung auf ihr senkrecht ist. Nimmt man an, daß die Dichtigkeit der Masse gleichförmig, und zwischen jeden zweyen Theilchen die Kraft, welche sie von einander zu treiben strebt, von gleicher Grösse sey, so leiden gleiche Theilchen der festen Fläche, welche die Masse einschließt, gleichen Druck. Stellt man sich bey C oder D ein so kleines Theilchen Cc, Dd, der festen Fläche vor, dessen Krümmung so wenig merklich ist, daß man es für eine ebene Fläche annehmen kann, so läßt sich allemahl ein Gewicht angeben, das, wenn es über dieser kleinen Fläche gleichförmig vertheilt wäre, eben so stark dagegen drücken würde. Es sey dies Gewicht $= P$, und a sey die Höhe einer lothrechten Wassersäule über einer Grundfläche von eben der Grösse wie Cc oder Dd; so ist $P = Cc \cdot a$, oder $P = Dd \cdot a$, das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= 1$ gesetzt, und a ist die dem Druck P zugehörige Höhe. (9 §. Hydrostat.) Weil aber dieser Druck gegen Dd nur alsdenn eben so groß, als gegen Cc ist, wenn die Flächen Cc und Dd gleich groß sind; so erhellet, daß Dd einen 2mahl, 3mahl, und überhaupt einen n mahl so grossen Druck als Cc leide, wenn Dd 2mahl, 3mahl, oder überhaupt n mahl grösser als Cc ist. Wird also der Druck gegen $Cc = P$, und der Druck gegen $Dd = \Pi$ gesetzt, so ist $P : \Pi = Cc : Dd$, also $\Pi = \frac{Dd . P}{Cc}$. War nun die

Höhe

Höhe des Drucks gegen $Cc = a$, also $P = Cc \cdot a$, so wird $\Pi = Dd \cdot a$, mithin ist die Höhe des Drucks gegen alle Stellen der festen Fläche einerley, welche die elastische flüssige Masse von allen Seiten umgiebt.

3 §.

51F. Wenn Cc eine kleine Oefnung in der festen Fläche wäre, so würde die flüssige Masse augenblicklich anfangen aus dieser Oefnung auszuströmen, sobald diese Oefnung nicht mehr geschlossen wäre. Ob nun gleich solchergestalt die Menge der Masse in dem eingeschlossenen Raum abnähme, so würde doch der ganze Raum mit der in jedem Augenblick noch darin zurückgebliebenen Masse beständig angefüllt bleiben. Der Verminderung der Menge ungeachtet würde doch die Masse sich bey jedem Abgang in den ganzen vorigen von der festen Fläche eingeschlossenen Raum gleichförmig ausbreiten, so lange der zurückbleibende Rest noch elastisch bliebe. Ein kleines Stück einer festen Fläche, das in der Oefnung Cc genau wie ein Deckel paßte, aber mit der übrigen festen Fläche nicht zusammen hienge, würde von der elastischen Masse weggestoßen werden, wenn es nicht durch eine senkrecht dagegen angebrachte Kraft gehalten würde. Es sey diese Kraft $= P$, und sie sey grade so groß als nöthig ist, um mit dem Gegendruck der elastischen Masse das Gleichgewicht zu halten, so ist P dem Gegendruck der elastischen Masse gleich, mithin kann eben dieser Druck P für **das Maaß der Elasticität** der Masse angenommen werden: man kann sagen, die Elasticität der Masse sey einem Druck P gleich, der eine ebene Fläche, darüber er gleichförmig vertheilt ist, eben so stark pressen würde, als eben diese

Fläche

Fläche von der dagegen drückenden elastischen Masse gepreßt wird. Die Grösse dieses Drucks ist bekannt, wenn die Höhe einer graden und schweren Wassersäule bekannt ist, die, wenn sie über eben der Fläche lothrecht stünde, vermöge ihres Gewichts diese Fläche eben so stark drücken würde. Für eine andre Masse, die mehr oder weniger elastisch wäre, würde die Höhe des Drucks in eben dem Verhältniß grösser oder kleiner seyn: denn das Verhältniß der Elasticitäten ist ohne Zweifel einerley mit dem Verhältniß des Drucks, womit die flüssigen Massen gegen gleiche Stücke der sie umgebenden festen Fläche pressen, also mit dem Verhältniß der diesen Pressungen zugehörigen Höhen.

4 §.

Diesemnach hat man von der Grösse der Federkraft einer elastischen flüssigen Masse einen ganz bestimmten Begrif, wenn man weis, wie groß ihr Druck gegen eine ebene Fläche sey, deren Quadratinhalt man 1^2 gesetzt hat. Ist die dem Druck zugehörige Höhe $= a$, und das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= 1$, so ist das Gewicht einer Wassersäule, welche die ebene Fläche $= 1^2$ eben so stark drücken würde, $= a$. Wäre die feste Fläche, welche die elastische Masse von allen Seiten umgiebt, aus ebenen Flächen zusammen gesetzt, so wäre gegen jedes Stück einer von den ebenen Seitenflächen, welches bey Ausmessung ihres Quadratinhalts $= 1^2$ gesetzt ist, der Druck $= a$. Im folgenden werden also die Redensarten gleichgültig seyn, ob man sagt: die der Elasticität zugehörige Höhe sey $= a$, oder ob man die Elasticität selbst einer Linie a gleich setzt. Im letzten Fall kann man allemahl das Gewicht einer Wasser-

säule

säule verstehen, deren Höhe $= a$, und deren Grundfläche $= 1$ ist.

5 §.

51F. Weil vorausgesetzt wird, daß die in der festen Fläche eingeschlossene Masse ABCD flüssig sey, so behält sie bey ihrer Federkraft doch die übrigen Eigenschaften flüssiger Massen, die daher ihren Ursprung haben, weil die kleinsten Theilchen mit einer sehr wenig merklichen Kraft zusammen hängen, mithin an und neben einander sehr leicht beweglich sind. Wenn also an zwey von den kleinsten Theilchen A und B gleich grosse Kräfte nach entgegen gesetzten, übrigens aber in einer graden Linie zusammen fallenden, Richtungen Aa, Bb, oder auch Aα, Bβ, angebracht sind, so können diese Kräfte einander nicht eben so, als wenn die Masse fest wäre, im Gleichgewicht erhalten: vielmehr werden die Theilchen A und B nach den Richtungen der Kräfte Aa, Bb, oder Aα, Bβ in Bewegung kommen. (3 §. Hydrostat.) Ob nun gleich die in der Richtung Aa oder Aα im Wege liegende Masse wegen ihrer Elasticität entgegen drückt, so hindert solches doch nicht, daß nicht jede an dem Theilchen A angebrachte Kraft, dasselbe in Bewegung setzen könnte, wenn anders die im Wege liegenden Theilchen nur ausweichen können; denn so stark die nach a zu befindliche Masse wegen ihrer Federkraft nach aA entgegen drückt, eben so stark druckt die auf der andern Seite nach α zu befindliche Masse nach αA mit der Richtung der Kraft Aa übereinstimmig, und beyde Kräfte, welchen das Theilchen A wegen der Elasticität der ganzen Masse für sich schon ausgesetzt ist, sind im Gleichgewicht. Die Pressungen, welchen es wegen der Elasticität der Masse von allen

Seiten ausgesetzt ist, heben einander insgesammt auf; also ist es eben soviel, als wenn das Theilchen an sich gar keinem Druck ausgesetzt wäre.

6 §.

Wenn die Kräfte, welche an den Theilchen A und B angebracht sind, selbige gegen einander nach den Richtungen A*a* und B*b* zu treiben streben; so könnte unter der Bedingung wohl ein Gleichgewicht erfolgen, wenn die dazwischen liegenden Theilchen sonst gehindert würden, daß sie nicht ausweichen könnten. Um dies zuwege zu bringen, kann man sich wie im 4 §. der Hydrostatik die Vorstellung machen, daß die zwischen A und B befindlichen Theilchen der flüssigen Masse in einer festen cylindrischen oder prismatischen Röhre eingeschlossen sind. Nicht schweres Wasser würde in einer solchen Röhre, auch wenn sie an beyden Enden offen wäre, ruhig bleiben, was auch die Röhre für eine Lage hätte: aber eine nicht schwere elastische flüssige Masse würde sich darin nach der Länge der Röhre an beyden Seiten ausbreiten, wenn dies nicht durch ein Paar feste Grundflächen, welche die Röhre an beyden Enden schliessen, verhindert würde. Statt dessen könnte auch ein äusserer Druck gegen jede Grundfläche der eingeschlossenen cylindrischen oder prismatischen Masse, wenn man diese Grundflächen auf der Axe des Cylinders oder den Seitenlinien des Prisma senkrecht annimmt, eben so stark entgegen pressen, als die elastische Masse längst dieser Richtung sich auszubreiten strebt: um das Gleichgewicht zu erhalten würde erfordert, daß die Höhe des Drucks auf beyden Seiten der Elasticität der flüssigen Masse gleich wäre. 51 F.

7 §.

Im folgenden kann das Wort **Luft** jede elastische flüssige Masse bezeichnen, wenn es gleich in der Natur vielleicht auch andre flüssige Massen giebt, die von derjenigen verschieden sind, welche eigentlich Luft heißt: und die Wissenschaft von den Gesetzen, nach welchen mechanische Kräfte auf elastische flüssige Massen wirken müssen, wenn sie einander im Gleichgewicht erhalten sollen, kann in einem ähnlichen Verstande die **Aerostatik** heissen, in welchem eben das Wort **Hydrostatik** ist gebraucht worden. **H. v. Wolff** hat ihr zuerst die Form einer Wissenschaft gegeben, und sie unter dem Nahmen der **Aerometrie** abgehandelt.

8 §.

Die im 6. 7. und 8 §. der Hydrostatik vorgetragenen Lehren finden auch alsdenn insgesamt ihre Anwendung, wenn in der Röhre ABCD mit dem festen
52. 53 F. Boden BC statt des Wassers elastische Luft befindlich ist; nur tritt der Unterschied dabey ein, daß der Raum BEFC, welchen das Wasser füllt, unveränderlich bleibt, der Druck P mag grösser oder kleiner angenommen werden, wogegen die Grösse des Raums, den die elastische Luft füllt, von der Grösse des Drucks P abhängt, der gegen die Fläche EF preßt. Ein stärkerer Druck preßt die elastische Masse in einen engern Raum, und bey einem schwächern Druck breitet sich die Masse in einen grössern Raum aus, mithin hängt die Dichtigkeit der elastischen flüssigen Masse von der Grösse des Drucks ab, der mit der Grösse ihrer Federkraft im Gleichgewicht ist: beym stärkern Druck ist diese Dichtigkeit grösser, und beym schwächern Druck ist sie geringer.

Giebt

Giebt es in der Natur elastische flüssige Massen, so könnten auch wohl andre Ursachen bey unveränderter Dichtigkeit ihre Federkraft verstärken. Wenn indessen für jetzt die Aenderungen der Federkraft, welche von andern Ursachen herrühren könnten, noch beyseit gesetzt werden, so behält es seine Richtigkeit, daß dichtere Luft mehr elastisch, und dünnere Luft weniger elastisch sey. Einerley Menge Luft in einen engern Raum gebracht widersteht der fernern Zusammenpressung mehr, als eben die Menge Luft, so lange sie in einen grössern Raum ausgebreitet ist. Mehr Luft in einerley Raum gebracht äussert demnach ebenfalls mehr Elasticität, als eine geringere in eben dem Raum ausgebreitete Menge Luft.

9 §.

Wenn nun, wie im 11 §. der Hydrostatik ange- 54F.
nommen ward, die in der festen Fläche ABCD eingeschlossene, und durch parallele Ebenen in Schichten eingetheilte flüssige Masse elastisch ist, alsdenn aber gegen jede dieser Ebenen ein senkrechter gleichförmig darüber vertheilter Druck preßt; so können im Zustande des Gleichgewichts die Schichten nicht einerley Dichtigkeit haben, wenn gleich die übrigen a. a. O. bewiesenen Gesetze wiederum ihre Anwendung finden, sobald sich alles ins Gleichgewicht gesetzt hat. Nimmt man an, daß gegen *ef*, *cd*, *ab*, EF, nach der Ordnung die Kräfte P, Q, R, S, drücken; so würde, wenn die Masse unelastisch wäre, die untere Fläche dem Druck $EF\left(\frac{P}{ef}+\frac{Q}{cd}+\frac{R}{ab}+\frac{S}{EF}\right)$ ausgesetzet seyn. (11 §. Hydrost.) Was die noch oberhalb *ef* in dem Raum $eA\alpha f$ befindliche Masse betrift, wenn diese, wie der daselbst zum Grunde liegenden Vor-

aussetzung gemäß ist, nicht schwer ist, auch sonst gar keine Kräfte vorhanden sind, die auf ihre Bestandtheilchen wirken; so würde sie in dem Raum, den sie einnimmt, ohne alle Aenderung ihrer Figur und der Lage ihrer Theile ruhig bleiben, wenn gleich der Theil $eA\alpha f$ der festen Fläche des Gefässes fehlte. Wofern aber die gesammte eingeschlossene Masse, also auch diejenige noch elastisch ist, die den Raum $eA\alpha f$ füllt, so kann der Theil $eA\alpha f$ der festen Fläche nicht fehlen, wenn die oberhalb ef befindliche Masse in diesem Raum erhalten werden soll, weil sie auch noch ein Bestreben äussert, sich nach allen Seiten auszubreiten. Setzt man die ihrer Elasticität zugehörige Höhe $= \pi$, so ist ef ausser dem Druck P noch dem Druck $ef \cdot \pi$ ausgesetzt, der sich nach den Gesetzen des Gleichgewichts mit dem Druck P gegen EF fortgepflanzt, und nun ist EF dem Druck $EF\left(\pi + \frac{P}{ef} + \frac{Q}{cd} + \frac{R}{ab} + \frac{S}{EF}\right)$ ausgesetzt.

10 §.

Schwerlich wird man geneigt seyn, anzunehmen, daß einerley Menge Luft in jeden noch so kleinen Raum zusammengepreßt werden könne: so wie man umgekehrt nicht geneigt seyn wird, dafür zu halten, daß eben die Menge Luft, wenn gar kein äusserer Widerstand sie zusammen hält, sich in einen Raum ohne alle Gränzen ausbreiten werde. Giebt es also in der Natur würklich elastische flüssige Massen, und ist vielleicht diejenige, welche wir gewöhnlich Luft nennen, von einer solchen Beschaffenheit; so wird es ein Paar Gränzen geben, zwischen welchen die Dichtigkeit einer jeden gegebenen Menge dieser Luft nur enthalten seyn kann.

kann. Ist diese Luftmasse in einen so kleinen Raum gebracht, daß ihre Elemente einander nicht näher gebracht werden können, so hat sie nun den grösten Grad der Dichtigkeit, welchen die Luft anzunehmen fähig ist, und eine so dichte Luft widerstehet alsdenn einem jeden noch grössern Druck, ohne weitere Verminderung des Raums, den sie einnimmt. Umgekehrt giebt es eine gewisse vielleicht sehr kleine Dichtigkeit der Luft, womit ihre Federkraft aufhört, eine merkliche Würkung zu äussern, da es dann keines äussern Widerstandes bedarf um zu verhindern, daß sich diese so sehr verdünnte Luft nicht noch weiter in einen grössern Raum ausbreite.

Der II. Abschnitt.

Die Gesetze des Gleichgewichts der schweren elastischen Luft.

11 §.

In dem graden cylindrischen oder prismatischen lothrecht stehenden Gefäß ACDB, dessen Grundflächen AB, CD, wagrecht sind, befinde sich schwere elastische Luft, wovon alle physische Elemente völlig in Ruhe sind; so ist jeder wagrechte Schnitt MN einem Druck ausgesetzt, und derselbe ist über der Fläche des Schnitts gleichförmig vertheilt. Wäre die flüssige Masse nicht elastisch, so wäre der ganze über MN vertheilte Druck so groß als das Gewicht der darüber stehenden Luft von MN bis an die höchste Fläche AB: weil aber diese Luft elastisch angenommen wird, so muß man unterscheiden, ob die in der höchsten Gegend an AB befindliche 70F.

Luft auch noch elastisch, oder vielleicht schon so weit verdünnt sey, daß sie keine Federkraft weiter äussert. Man nehme an, die ganze über CD stehende Luftsäule sey durch wagrechte einander sehr nahe liegende Flächen in Schichten von sehr kleinen Höhen getheilt; der Druck gegen MN sey $= p$, das Gewicht der Schichte MmnN $= q$, so ist der Druck gegen $mn = \frac{mn}{\mathrm{MN}} \cdot p + q = p + q$, weil alle Querschnitte gleich groß angenommen werden. Demnach ist die in der Schichte $m\mu\nu n$ enthaltene Luft schon einem grössern Druck ausgesetzt, als die in der Sichte MmnN befindliche Luft; und weil jene mit dem grössern Druck das Gleichgewicht hält, so ist ihre Federkraft, mithin auch die Dichtigkeit der Schichte $m\mu\nu n$ grösser, als die Dichtigkeit der Schichte MmnN, vorausgesetzt, daß diese Dichtigkeit noch insgesamt zwischen der grösten und kleinsten Dichtigkeit enthalten sind, der die Luft fähig ist. Diese Schlüsse behalten allemahl ihre Richtigkeit, wie klein auch die Höhe der Schichten angenommen wird, mithin ist selbst die Dichtigkeit einer jeden Luftschichte gegen ihre untere Grundfläche zu grösser, und gegen ihre obere Grundfläche zu kleiner, so lange die Höhe der Schichte noch eine bestimmte Grösse hat: das heißt, die Dichtigkeit der Luftsäule wächst nach dem Gesetz der Stetigkeit, wenn die Tiefe AM der angenommenen Stelle unter der höchsten Gränze AB grösser angenommen wird, und eben diese Dichtigkeit nimmt mit AM nach dem Gesetz der Stetigkeit ab. Wenn nun die Dichtigkeit der Luftsäule in der höchsten Gegend an AB noch nicht die kleinste ist, womit die Federkraft der Luft gänzlich aufhört; so strebt die daselbst befindliche Luft noch sich nach allen Seiten aus-

zubrei-

zubreiten. Die höchste Luftschichte A$a$$b$B, deren Höhe A$a$ man so klein annehmen kann, daß ihre Dichtigkeit überall sehr nahe, wenigstens einerley ist, preßt gegen AB und ab, und wenn die Höhe dieses Drucks $= \pi$ ist, so entsteht daher auch gegen CD ein Druck $= \mathrm{CD}\,.\,\pi$. Dazu kommt das Gewicht der ganzen Luftsäule, und wenn dasselbe $=$ P gesetzt wird, so ist der Druck gegen CD $= \mathrm{CD}\,.\,\pi + \mathrm{P} = \mathrm{CD}\left(\pi + \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{CD}}\right)$.

12 §.

Man stelle sich die Röhre CABD von unbestimm- 70 F.
ter Höhe, und die feste Fläche AB beweglich, dabey aber nur als eine geometrische Fläche ohne Schwere vor; so erhellet, daß so lange kein Gleichgewicht bestehen könne, so lange die unmittelbar an AB gränzende Luft noch elastisch bleibt. Die Luft wird vielmehr die feste Fläche AB höher hinauf treiben, alle Luftschichten werden sich in einen grössern Raum ausbreiten und an Dichtigkeit abnehmen, bis endlich die Dichtigkeit der höchsten Luftschichte so klein wird, daß ihre Federkraft verschwindet. Nun bedarf es dessen weiter nicht, daß das höchste Ende der Röhre AB mit einem festen Deckel verschlossen sey, die gesammte in der Röhre befindliche Luftmasse ist nun für sich im Gleichgewicht, und der Druck gegen den Boden ist dem Gewicht der Luftsäule gleich.

13 §.

Wenn eine schwere und elastische Luftmasse in einer festen unbiegsamen Fläche ABCD, von welcher Figur man will, wie in einem Gefäß eingeschlossen ist, und alle Elemente derselben völlig in Ruhe sind, so hängt die Dichtigkeit einer jeden Schichte dieser

Masse zwischen zwoen einander sehr nahe liegenden
54F. wagrechten Ebenen *ab*, EF, ebenfalls von der Tiefe AL dieser Schichte unter der wagrechten Ebene GH ab, welche das Gefäß oberhalb dieser Schichte berührt. Wenn gegen *cd* ein Druck $= p$ preßt, so entsteht daher gegen *ab* ein Druck $= \frac{ab}{cd} p$ und hiezu kommt noch ein Druck, der von dem Gewicht der Luftschichte *acdb* abhängt. Demnach ist die Schichte E*ab*F schon einem grössern Druck als die Schichte *cabd* ausgesetzt: und weil jene mit dem grössern Druck das Gleichgewicht hält, so ist der Schichte *a*EF*b* Federkraft, mithin auch ihre Dichtigkeit grösser, als die Dichtigkeit und Federkraft der Schichte *acdb*. Es wird nemlich vorausgesetzt, daß die Dichtigkeiten aller Schichten noch zwischen der grösten und kleinsten Dichtigkeit enthalten sind, der die Luft fähig ist. Weil diese Schlüsse allemahl richtig sind, wie klein auch die Höhe der Schichten angenommen wird; so wächst wiederum die Dichtigkeit der Schichten mit AL nach dem Gesetz der Stetigkeit.

Die der Elasticität der höchsten Schichte zugehörige Höhe sey $= \pi$, und man nehme an, daß α, β, γ, δ, u. s. w. die Dichtigkeiten der Schichten von K nach A nach der Ordnung bezeichnen, deren Höhe man so klein annehmen kann, daß die Dichtigkeit jeder Schichte wenigstens sehr nahe gleichförmig ist. Wäre nun überdem das Gewicht einer jeden Schichte über ihrer untern Grundfläche gleichförmig vertheilt, und der Druck gegen EF $= \Pi$, so fände man vermittelst ähnlicher Schlüsse wie im 13 §. der Hydrostatik $\Pi =$

$$EF \left(\pi + \frac{Eabf}{Ef \,.\, Eg} \,.\, \alpha \,.\, Eg + \frac{acdb}{ab \,.\, ak} \,.\, \beta \,.\, ak + \frac{cefd}{cd \,.\, cm} \,.\, \gamma\right.$$

$\cdot\gamma . cm + \frac{eAF}{ef . eo} . \delta . eo.$) Je kleiner die Höhen der Schichten angenommen werden, desto mehr nähern sich die Brüche $\frac{Eabf}{Ef . Eg}$, $\frac{acdb}{ab . ak}$, u. s. f. dem Werth $= 1$, und weil eigentlich Π die Gränze dieser Summe ist, die gefunden wird, wenn man annimmt, daß diese Höhen verschwinden, so erhält man $\Pi = EF(\pi + \alpha . Eg + \beta . ak + \gamma . cm + \delta . eo) = EF(\pi + \alpha . KL + \beta . LM + \gamma . MN + \delta . NA)$. Demnach ist die Höhe des Drucks die letzte Summe der Producte aller Höhen der einzelnen Schichten jede in die Dichtigkeit der Schichte multiplicirt, wenn noch die der Elasticität der höchsten Schichte zugehörige Höhe dazu addirt wird. Eben diese Höhe ist zugleich das Maaß der Elasticität der Luft in der Tiefe AK unter der höchsten Gränze des Gefässes.

14 §.

Diesemnach kann im Zustande des Gleichgewichts die eingeschlossene Luftmasse, wenn es nur darauf ankommt, die Wirkung des Drucks auf das Gefäß zu finden, wie jede andre in einem solchen Gefäß eingeschlossene auch unelastische Masse betrachtet werden, die aus einer unzähligen Menge über einander liegender Schichten von unendlich kleinen Höhen bestehet, wovon jede ihre eigene Dichtigkeit hat: alsdenn wird der Druck gegen den Boden, oder jeden wagrechten Schnitt des Gefässes, auch die Höhe des Drucks gegen jedes kleine Stück der Seitenfläche wie im 60 §. Hydrost. gefunden: nur muß zur Summe der Producte aller Höhen in die Dichtigkeit der dazu gehörigen Schichte jedesmahl noch die der Elasticität der höchsten Luftschichte zugehörige Höhe addirt werden. Der

Druck auf den Boden des Gefässes, wenn es einen ebenen wagrecht liegenden Boden hat, ist allemahl so groß, als er seyn würde, wenn darüber eine grade Luftsäule in einer solchen Höhe stünde, die der ganzen Höhe des Gefässes gleich, übrigens aber die Dichtigkeit und Federkraft der in dieser Säule enthaltenen Luft in jeder Höhe über dem Boden mit der Dichtigkeit und Federkraft der Luft im Gefäß einerley wäre.

Aus allen senkrechten Pressungen der eingeschlossenen Luft gegen die feste Fläche des Gefässes entsteht übrigens ein verticaler Druck nach unten, der dem Gewicht der eingeschlossenen Luft gleich ist. Dies folgt nun schon aus aus dem 61 §. der Hydrostatik, wenn man nur noch bemerkt, daß zur Höhe des
67F. Drucks, welchem jedes Element M*m* der Seitenfläche des Gefässes eben so, wie das lothrecht unter demselben liegende Element S*s*, ausgesetzt ist, noch die Höhe π hinzu komme, welche der Elasticität der höchsten Luftschichte zugehört. Aus beyden einander entgegen gesetzten lothrechten Pressungen gegen M*m* und S*s* entsteht allemahl ein verticaler Druck nach unten, der dem Gewicht der Säule M*ms*S gleich ist.

15 §.

61F. Wenn alle Elemente einer elastischen Luft gegen einerley Mittelpunct schwer sind, und diese Luftmasse zwischen zwoen zu eben dem Mittelpunct gehörigen Kugelflächen ABM, KLS, eingeschlossen ist; so ist über der kleinern oder untern Kugelfläche KLS das Gewicht der ganzen Luftmasse gleichförmig vertheilt. Theilt man diese ganze Luftmasse durch concentrische Kugelflächen in Schichten ein, deren Höhen sehr klein und gleich groß sind, so erhellet, daß über jeder folgenden Schichte gegen den Mittelpunct zu schon mehr

Druck vertheilt sey, als über der nächstvorhergehenden: also hat jede folgende Schichte mehr Elasticität, mithin auch mehr Dichtigkeit als die nächstvorhergehende, und dies allemahl, die Höhe der Schichten mag so klein genommen werden, als man will. Diesemnach wächst die Dichtigkeit dieser Luftschichten mit ihrer Tiefe AK unter der höchsten Gränze nach dem Gesetz der Stetigkeit. Hat nun die höchste Schichte zwischen ABM und DEP noch einige Elasticität; wozu die Höhe $= \pi$ gehört, so erhellet, daß die Höhe des Drucks gegen KLS wie im 64 §. der Hydrostatik gefunden werde, wenn man alle Höhen des Drucks, womit jede von den einzelnen Schichten für sich allein bloß wegen ihres Gewichts ihre Grundfläche pressen würde, summirt, und die der Elasticität der höchsten Schichte zugehörige Höhe noch hinzu setzt. Man kann die Höhe der Schichten sich so klein vorstellen, daß die Dichtigkeit einer jeden Luftschichte sehr nahe gleichförmig ist: eigentlich aber ist die gesuchte Höhe des Drucks die letzte Summe aller Höhen der einzelnen Pressungen, die gefunden wird, wenn man annimmt, daß die Höhen dieser Schichten verschwinden.

16 §.

Wenn man sich nun noch die Vorstellung macht, 61 F.
daß der Halbmesser CA der höchsten Kugelfläche ABM, also mit ihm die Kugelfläche selbst wachse; so wird die eingeschlossene Luft, so lange die höchste Schichte noch einige Elasticität behält, sich in den wachsenden Kugelförmigen Raum mit ausbreiten, bis endlich die Elasticität der höchsten Luftschichte unmerklich wird, und π verschwindet. Alsdenn bedarf es der äussersten festen Kugelfläche ABM nicht weiter, um die

Luftmasse beysammen zu erhalten, vielmehr ist nun alles für sich im Gleichgewicht. Die Höhe des Drucks gegen die untere Kugelfläche KLS oder gegen jede andre, deren Tiefe unter der höchsten ABM gegeben ist, wird also noch nach der Regel des vor. §. gefunden in der Voraussetzung, daß $\pi = 0$ sey. Man nehme an, AK sey die ganze Höhe der Luftmasse über KLS, ferner $\frac{1}{m}$AK, die Höhe einer jeden Schichte, und δ bezeichne unbestimmt die Dichtigkeit dieser Luftschichte in der Voraussetzung, daß δ für jede dieser Schichten einen bestimmten Werth erhalte, der von ihrer Tiefe AF, AH, u. s. f. unter der höchsten Gränze der Luftmasse abhängt: so kann die Höhe des Drucks gegen KLS $\int \delta \cdot \frac{1}{m}$AK gesetzt werden, wenn man durch diesen Ausdruck die Summe aller Producte versteht, die gefunden werden, wenn man statt δ nach der Ordnung alle bestimmte Werthe setzt, die mit den Tiefen $\frac{1}{m}$AK, $\frac{2}{m}$AK, $\frac{3}{m}$ AK, u. s. w. bis $\frac{m}{m}$AK oder AK zusammen gehören. In dem allgemeinen Ausdruck der auf solche Art gefunden wird, muß hiernächst m unendlich groß gesetzt werden, damit die Höhen der Schichten verschwinden, und solchergestalt die letzte dieser Summen gefunden werde. Eben der allgemeine Ausdruck giebt zugleich die Höhe des Drucks, dem jede andre Schichte FGQ ausgesetzt ist, wenn man nur soweit summirt, bis $\frac{n}{m}$AK = AF wird. Ein paar leichte Beyspiele davon, wie solche Summen gefunden werden können, sind im 13 und 19 §. der Hydrostatik vorgekommen: die allgemeinen Lehren hievon, und die Regeln, wie solche Summen gefunden werden können, gehören zur höhern mathematischen Erfindungskunst, und werden in der Integralrechnung vorgetragen.

Stellet man sich endlich noch ein Gefäß AHKLIB 60 F.
von willkührlicher Gestalt vor, und nimmt man an, daß im innern Raum desselben eine Luftmasse befindlich sey, wovon alle Elemente gegen einerley Mittelpunct C schwer sind; so erhellet aus den bisherigen Schlüssen, daß die Dichtigkeit dieser Luftmasse in grössern Entfernungen vom Mittelpunct C abnehme, und daß der allgemeine Ausdruck $\pi + \int \delta \cdot \frac{1}{m} AP$ die Höhe des Drucks gegen KL bezeichnen könne, wenn man soweit summirt, bis $\frac{n}{m} AP = AP$ wird. Die ganze eingeschlossene Luftmasse muß man sich in Schichten eingetheilt vorstellen zwischen wagrechten Flächen, welches nun Stücke solcher Kugelflächen sind; die zum Mittelpunct C gehören, und jener allgemeine Ausdruck giebt den Druck, welchem jede andre Schichte zwischen FG und HI ausgesetzt ist, wenn man so weit summirt, bis $\frac{n}{m} AP = AN$ wird.

17 §.

Es giebt würklich in der Natur eine elastische flüssige Masse, die wir Luft nennen, die wir zwar nicht völlig so, wie andre körperliche Massen, vermittelst des Gesichts warnehmen, von deren Daseyn uns aber das Gefühl überzeugt; so wie auch andre Würkungen dieser Masse auf mancherley Art wahrgenommen werden können. Wir sind überall, wo wir uns auch befinden mögen, mit dieser Luft umgeben, mit jedem Athenzuge ziehen wir Luft in die Brust, und stossen sie gleich nachher zur Nase wieder heraus. Der Hauch, welchen wir alsdenn mit der Hand fühlen können, und der noch stärkere Hauch, wenn wir mit einiger Anstrengung nach einem Athenzuge etwas mit

dem

dem Munde wegblasen, ja noch mehr das, was wir Winde und Stürme nennen, macht uns das Daseyn der Luft nicht bloß durchs Gefühl, sondern auch vermittelst des Gehörs, ja selbst vermittelst des Gesichts kennbar, wenn Winde und Stürme nicht etwa nur Staub erregen und andre ganz leichte Körperchen in Bewegung setzen, sondern oft noch weit heftiger toben. Die Würkungen davon sind zu bekannt, als daß es nöthig wäre, sie weitläuftig hier anzuführen.

18 §.

Ohne zu athmen können weder Menschen noch Thiere leben, deßwegen beweiset dieser einzige Umstand schon, daß an allen Orten auf der Erde, auf den höchsten Bergen, die je von Menschen erstiegen sind, und wo Thiere ihren Auffenhalt haben können, eben so, wie in den niedrigsten Thälern, Luft befindlich sey. Sie ist die flüssige Masse, worin die über unserm Haupt umher fliegende Vögel auf ähnliche Art so wie die Fische im Wasser umher schwimmen: sie trägt die mit Donner und Regen, Hagel und Schnee schwangern Wolken, und die Winde, nichts anders als Luftströme, führen sie über unsre Häupter hinweg. Ist nun die Erde eine Kugel, so muß selbige gleichsam wie der Kern mit einer Schale überall mit Luft umgeben seyn, und die gesamte die Erde umgebende Luftmasse heißt die Atmosphäre oder der Dunstkreis, weil sie zugleich der Aufenthalt aller Dünste ist, die aus derselben in Gestalt des Regens, des Schnees und Hagels, des Nebels und Thaues, gegen die Erde wieder herabfallen.

19 §.

Eine trockne Lammsblase kann man auf eine sehr bekannte Art durch hineinblasen mit Luft füllen. Hat

man

man nachher das offene Ende fest zugebunden, so kann man zwar von aussen mit der Hand in die Blase Gruben drücken: allein sobald der Druck nachläßt, springt der eingedruckte Theil zurück, die Grube verschwindet, und die aufgeschwollene Blase nimmt ihre Rundung wieder an. Der Erfolg ist anders, wenn man die Blase vorher nicht verschlossen hat: wird alsdenn die Blase zusammen gedruckt, so fährt nicht allein ein Theil der darin befindlichen Luft zur Oefnung heraus, sondern die Blase behält auch, wenn der Druck nachläßt, die Figur, welche man ihr durchs Zusammendrücken gegeben hatte. Die so augenscheinliche Elasticität der verschlossenen Blase muß also eine Eigenschaft der darin eingeschlossenen Luft seyn. Wofern nun überdem die Luft gegen den Mittelpunct der Erde schwer ist, so wird es begreiflich, wie dieselbe die ganze Erde umgeben könne, ohne wegen ihrer Elasticität sich auszubreiten, und solchergestalt sich von der Erde zu entfernen. Wofern die zunächst an der Erdfläche befindliche Luft schon für sich, ohne weitere Zusammenpressung, ein beständiges Bestreben äussert, sich nach allen Seiten auszubreiten, so muß eine Ursache in der Natur vorhanden seyn, welche diese Ausbreitung hindert. Nimmt man an; daß die Luft, wie alle andre Massen in der Natur schwer sey; so wird begreiflich, daß eben darum die untere Luft, wenn sie gleich sich selbst überlassen sich weiter ausbreiten würde, vom Gewicht der obern Luft daran gehindert werde. Wenn also nun KLS die Erdkugel vorstellt, 61F.
die von allen Seiten mit einer Luftmasse umgeben ist, welche sich bis an die höchste Gränze ABM erstreckt; so finden die Sätze des 15 und 16 §. ihre Anwendung. Wer annimmt, daß die Luft, welche die Atmosphäre

mosphäre ausmacht, beydes elastisch und schwer sey, der nimmt hiemit zugleich an, daß ihre Dichtigkeit und Federkraft in höhern Gegenden geringer als in niedrigen sey. Ob nun diese, so wie alle übrigen Folgen, die aus dieser Voraussetzung fliessen, in der Natur würklich ihre Anwendung finden, das müssen richtig angestellte Erfahrungen entscheiden.

20 §.

Könnte man aus einem Gefäß, worin allemahl Luft befindlich seyn wird, die Luft wegbringen, und hiernächst durch Verschliessung desselben der Luft den Rückweg versperren, so würde ein leichter Versuch entscheiden, ob die Luft schwer sey oder nicht. Das leere Gefäß müste man nur an einer Wage aufhängen, und mit den nöthigen Gegengewichten ins Gleichgewicht setzen. Würde nun das Gefäß wieder geöfnet, und der Luft der Zugang verstattet, so müste das mit Luft angefüllte Gefäß den Ausschlag geben, und zur Wiederherstellung des Gleichgewichts würde nun soviel Zusatz zum Gegengewicht nöthig seyn, als dem Gewicht der im Gefäß befindlichen Luft gleich wäre. (14 §.) Ein andrer Versuch, der es entscheiden müste, ob die Luft auch schon im natürlichen Zustande, ohne daß man sie vorher mehr zusammen gedruckt hat, ein Bestreben äussert, sich nach allen Seiten auszubreiten, liesse sich so anstellen. Eine trockene und schlaffe Lammsblase, in deren Falten nur wenig Luft befindlich ist, müste man feste zubinden, und nun in ein durchsichtiges Gefäß legen, damit man wahrnehmen könnte, was mit der Blase vorgienge, wenn man die Luft, welche im Gefäß die Blase umgiebt, heraus schafte. Wofern die in der Blase noch eingeschlosseschlossene Luft elastisch ist, so muß sie die Blase ausdehnen, sobald die übrige im Gefäß befindliche Luft heraus geschaffet wird. Beyde Versuche erfordern also, daß man einen luftleeren Raum zu wege bringen, oder wenigstens einen Theil der in einem Gefäß befindlichen Luft herausschaffen könne. Das bewerkstelliget man vermittelst einer besonders dazu eingerichteten Maschine, die den Nahmen der Luftpumpe führt: ihr Erfinder war um die Mitte des vorigen Jahrhunderts der Magdeburgische Bürgermeister und Churbrandenburgische Rath Otto v. Guerike, der seine ersten Versuche damit im Jahr 1653 zu Regensburg anstellte, woselbst er damahls als Abgesandter war. Dem damahligen Prof. der Math. zu Würzburg Caspar Schott hatte er eine Beschreibung seiner Versuche mitgetheilt, dieser aber seiner Arti Mechanicae Hydraulico-Pneumaticae 1657 beygefügt, und daraus hatte sie Robert Boyle kennen gelernt, der bald hernach diese Erfindung in Engelland mit einigen Veränderungen weiter bekannt machte.

Der III. Abschnitt.

Kurze Beschreibung der Luftpumpe und einiger damit anzustellenden Versuche.

21 §.

Bey einer jeden Luftpumpe, die übrige Einrichtung mag so verschieden seyn, wie sie will, kommt die Hauptsache auf folgende Theile und ihre geschickte Verbindung unter einander an. Zwey Gefässe müssen

sen vermittelst einer Röhre so zusammen hängen, daß die Luft aus dem einen in das andre treten kann: das eine muß so eingerichtet seyn, daß der innere Raum desselben, welcher mit dem andern vermittelst der Röhre zusammen hängt, nach Gefallen grösser oder kleiner gemacht werden kann, ohne daß die äussere Luft einen Eingang findet. Ist nun die Luft elastisch, so wird sie sich in den erweiterten Raum dieses Gefässes ausbreiten, wenn gleich vorher in dem kleinen Raum noch Luft befindlich war: dadurch aber vermindert sich die Dichtigkeit, mithin auch die Federkraft der so verdünnten Luft, die Federkraft der in dem andern Gefäß und der Röhre befindlichen Luft ist stärker, also wird das Gleichgewicht gehoben, und ein Theil der in dem andern Gefäß befindlichen Luft dringt in das erste so lange hinein, bis das Gleichgewicht hergestellt ist.

71 F. Wenn ein starker metallener Cylinder ABCD soviel möglich grade durchbort ist, so daß auch die innere Höhlung die Gestalt eines graden Cylinders, und mit dem vorigen einerley Axe hat; wenn ferner ein Stempel EF in dem hohlen Cylinder genau passet, und derselbe mit der Stange FG so verbunden ist, daß er mit Hülfe der Stange in dem Cylinder vor- und rückwärts geschoben werden kann; so dient derselbe statt des einen Gefässes um die aus dem andern heraustretende Luft aufzunehmen. Es sey nemlich der Boden des Cylinders bey M durchbort, und derselbe vermittelst der Röhre MNO mit einem andern verschlossenen Gefäß KL, welches jede willkührliche Gestalt haben kann, in Verbindung gebracht; der Stempel schliesse anfangs am Boden AB des Cylinders soviel möglich genau an, damit keine oder doch nur sehr

wenige

wenige Luft zwischen beyden versteckt seyn könne; wird nun der Stempel nach CD zurückgezogen, so entsteht zwischen dem Boden des Cylinders und dem Stempel ein luftleerer Raum, oder die etwa noch dazwischen befindlich gewesene Luft breitet sich doch in einen weit grössern Raum aus, ihre Federkraft wird schwächer, und verstattet einem Theil der Luft aus dem bey O mit der Röhre verbundenen Gefäß den Eingang. Solchergestalt ist nun in KL Luft von geringerer Dichtigkeit als vorher enthalten, und wenn dies Gefäß aus Glas bestehet, so kann man wahrnehmen, was in der verdünnten Luft vorgehet.

22 §.

Wofern die so verdünnte Luft noch elastisch bleibt, so würde ein wiederhohlter Stempelzug von neuen aus dem Gefäß KL einen Theil der darin befindlichen Luft wegnehmen, wenn man nur alles so einrichten könnte, daß die beym ersten Stempelzuge hinein getretene Luft aus dem Cylinder weg in die ausserhalb beyder Gefässe umher befindliche freye Luft weichen müste, wenn der Stempel EF gegen den Boden AB zurück geschoben wird. Dies läßt sich auf zweyerley Art zuwege bringen, da, wo der Boden des Cylinders mit der Röhre zusammen hängt, wird ein Wirbel H oder Hahn mit einem conischen Zapfen angebracht; der die Oefnung im Boden des Cylinders schließt. Dieser Zapfen hat zwey auf verschiedene Art gebohrte von einander abgesonderte Oefnungen, und man kann ihn das einmahl so stellen, daß der Weg zwischen dem Cylinder und der Röhre durch den Hahnen offen, und gegen den Zugang der äussern Luft alles verschlossen ist, das andre mahl durch Umdrehung um die Axe des Zapfens aber so, daß ein Weg ans dem Cylinder durch diesen Hahnen in die freye Luft geöfnet wird. Indem nun der Stempel vom Boden des Cylinders weggezogen wird, muß der Wirbel die erste Stellung haben, vor dem Rückzuge des Stempels aber bringt man ihn in die andre Stellung: so geht nun beym Rückzuge die vorher in den Stempel hinein getretene Luft wieder heraus in die freye Luft. Diese Züge und Rückzüge können, so oft man will, wiederholt werden, da dann jeder Zug etwas Luft aus dem Gefäß KL wegnehmen muß, so lange die darin zurückgebliebene Luft noch elastisch bleibt.

Statt des Hahnen dienen auch, eben die Absicht zu erreichen, ein Paar Klappen oder sogenannte Ventile, die so eingerichtet sind, daß ein Druck von der einen Seite die Klappe öffnet, ein Druck von der andern Seite aber sie nur desto fester verschliesset. Ein Ventil dieser Art muß im Boden des Cylinders vor der daselbst befindlichen Oefnung liegen, welches die im Gefäß KL und der Röhre befindliche Luft vermöge ihrer Elasticität bey jedem Stempelzuge aufstößt, da dann ein Theil davon hindurch in den Cylinder tritt. Das andre Ventil liegt vor einer im Stempel befindlichen Oefnung, die äussere Luft drückt es bey jedem Stempelzuge zu, beym Rückzuge aber, wenn der Stempel wieder gegen den Boden des Cylinders getrieben wird, öfnet es die darin befindliche Luft, und fährt hindurch in die äussere Luft, indem ihr das Ventil im Boden den Rückweg verschließt. Statt des Ventils im Stempel könnte auch eines seitwärts am Cylinder nahe beym Boden angebracht seyn, welches die äussere Luft bey dem Stempelzuge zudrückt, die im Cylinder befindliche Luft aber beym Rückzuge öfnet.

23 §.

Soweit von der Einrichtung des Cylinders mit dem Hahnen oder den Ventilen: nun kommt es noch auf die Einrichtung des Gefässes KL und die Verbindung desselben mit der Röhre an. Guerike brauchte dazu einen gläsernen Recipienten mit einem engen Halse, und einer daran befindlichen metallenen Einfassung mit einer Schraube, um den Hals des Recipienten vermittelst derselben an das Ende der Röhre O anzuschrauben. Auch war der Hals mit einem besondern Hahn versehen, um der Luft den Rückweg zu versperren, wenn man den ausgeleerten Recipienten von der Pumpe wegnehmen will, um andre Versuche damit zu machen. Eines solchen Recipienten bedient man sich auch noch gewöhnlich, um den ersten im 20 §. beschriebenen Versuch anzustellen. 71 F.

Boyle behielt den Recipienten mit dem engen Halse bey, aber **Dyonisius Papinus** brachte bey seiner Luftpumpe, die er zuerst in den Nouvelles Experiences du vuide, Paris 1675 bekannt machte, noch eine Anordnung an, die man wegen ihrer Bequemlichkeit bey allen neuern Luftpumpen beybehalten hat. Am obern Ende O der aufwärts gebogenen Röhre wird ein metallener recht eben abgeschliffener Teller festgeschroben, so daß das Ende der Röhre durch die Mitte des Tellers hindurch gehet: auf den Teller legt man alsdenn ein Stück nasses Leder, in dessen Mitte ein Loch geschnitten ist, um die Oefnung O frey zu lassen, und oben darüber setzt man eine gläserne Klocke. Der untere Rand der Klocke muß eben abgeschliffen seyn, damit sie an den Teller gut anschließt, und den völligen Schluß bringt man durch das nasse Leder zuwege, wenn man beym Anfang des Ausleerens die Klocke etwas an den Teller andruckt: sobald nur einige Züge mit gutem Erfolg geschehen sind, druckt die äussere Luft von selbst die Klocke an den Teller fest genug an. Unter die Klocke kann man nun allerley Sachen legen, um zu beobachten, was in der verdünnten Luft damit vorgeht. Bey solchen Versuchen, wo man die Nässe des Bodens vermeiden muß, bedient man sich statt des Leders einer Kütte.

24 §.

Der Stempel muß am Innern des Cylinders allenthalben genau anschliessen, und doch ohne zu grosse Schwierigkeit hin und her beweglich bleiben. Anfangs machte man den Stempel aus mehrern über einander gelegten ledernen Scheiben, die vermittelst zweyer metallenen etwas kleinern Scheiben zusammen geschroben wurden: jetzt nimmt man statt der ledernen Scheiben am liebsten ein cylindrisches Stück Korkholz, und um dasselbe wird in Fett oder Oel getränktes Leder gelegt, das starke Reiben zu vermindern. Um endlich noch die Bewegung zu erleichtern brauchte **Boyle** schon eine gezähnte Stange am Stempel, und machte die Einrichtung wie bey der Fuhrmannswinde, so, daß ein Getriebe in die Stange greift, dessen Welle vermittelst einer Kurbel oder Kreutzhaspel gedrehet werden kann. **Guerikens** verbesserte Luftpumpe hatte eine etwas andre mechanische Einrichtung, bey der ersten ward die Stempelstange unmittelbar mit den Händen angegriffen und so vor- und rückwärts geschoben, weshalb am Ende der Stange ein Querstück angebracht war.

25 §.

Wenn die Klocke stark genug ist, daß man sie vermittelst einer dazu dienlichen Anordnung mit Schrau-

Schrauben am Teller befestigen kann; oder wenn statt dessen bey O sonst ein hinlänglich starkes Gefäß festgeschroben wird, das die Gewalt einer sehr elastischen Luft ohne zu Zerspringen ertragen kann: so dient die Luftpumpe auch mehr Luft hinein zu bringen, als im natürlichen Zustande der Luft von selbst hinein dringt, mithin in dem Gefäß die Luft zu **verdichten**. Ist der Cylinder mit dem Hahnen versehen, so muß nun beym Herausziehen des Stempels der Hahn so stehen, daß der Weg durch ihn nach der freyen Luft offen ist: die äussere Luft tritt alsdenn in den Cylinder hinein. Bevor man den Stempel wieder gegen den Boden treibt, muß der Hahn so gedrehet werden, daß der Weg aus dem Cylinder in das Gefäß oder die Klocke geöfnet wird: so treibt beym Rückzuge der Stempel die vorher in den Cylinder hineingetretene Luft in den Raum des Gefässes oder der Klocke hinein. Weil die Federkraft der Luft durch diese Verdichtung sehr vermehrt wird, so erfordert dies Vorsicht und richtige Kenntniß dessen, wieviele Gewalt sowohl das Gefäß selbst, als auch die Maschine, ohne Schaden zu nehmen ertragen können. Wenn die Pumpe Ventile hat, und sie soll zum Verdichten dienen, so müssen die Ventile nicht die im 22 §. beschriebene, sondern die umgekehrte Lage haben, oder wenn die Ventile ihre Lage behalten sollen, so müssen zwey Verbindungsröhren mit dem Teller und der Klocke angebracht seyn, davon die eine mit dem Boden, die andre mit dem Obertheil des Cylinders zusammenhängt: überdem muß ein eigener Hahn angebracht seyn, der bald der einen, bald der andern Röhre Verbindung mit der Klocke hemmt, und dagegen die Verbindung der andern mit der äussern Luft herstellt, nachdem man entweder die

Luft verdünnen oder verdichten will. Pumpen, die bloß als Druckpumpen zum Verdichten dienen sollen, brauchen nur ein Ventil im Boden des Cylinders, und statt des andern kann eine blosse Oefnung oberwärts an der Seite im Cylinder dienen.

26 §.

Von den mancherley Einrichtungen, die man sonst der Luftpumpe, zu diesem oder jenem Zweck geben kann, mit näherer Beschreibung des Stempels der Hähne oder Ventile, u. s. w. auch von der zu allen damit anzustellenden Versuchen dienlichen Geräthschaft, findet man bey solchen Schriftstellern, welche die Naturlehre vollständig abhandeln, umständlichere Nachrichten. Guerikens erste Luftpumpen waren statt des Hahns mit Ventilen versehen, und dienten nur die Luft zu verdünnen, nicht aber sie zu verdichten, wiewohl man schon vor Guerikens Erfindung Druckpumpen hatte, auch die Würkungen der verdichteten Luft kannte. Boylens Luftpumpe hatte statt der Ventile einen Hahn, und der Cylinder war an seinem Fußgestelle in verticaler Stellung befestiget. Weil nun Guerikens erste Luftpumpe ein gegen den Horizont schief liegender Cylinder war, so mag dies vielleicht veranlasset haben, daß man nach der Zeit Luftpumpen mit stehenden Cylindern englische, und solche die einen liegenden Cylinder haben, deutsche genannt hat, obgleich Guerike ebenfalls bald nach Bekanntmachung seiner ersten Versuche Luftpumpen mit einem stehenden Cylinder brauchte, die keine Nachahmung der Boylischen waren, und sonst eine ganz andre Einrichtung hatten. Luftpumpen mit liegenden Cylindern, die in der Hauptsache so wie die bisher

bisher beschriebene beschaffen und mit dem Hahn statt der Ventile versehen sind, heissen auch Holländische, oder Sengwerdische, weil sie von den Professor Sengwerd in Leiden am Ende des vorigen Jahrhunderts diese Einrichtung erhalten haben, wiewohl man in Holland auch schon um eben die Zeit Luftpumpen mit stehenden Cylindern brauchte. Bald nachher ward die Sengwerdsche Luftpumpe in Deutschland fast allgemein bekannt und beliebt, der bekannte und verdiente Mechanicus Leupold in Leipzig verfertigte sie häufig für die deutschen Mathematiker und Naturforscher, und Herr von Wolff, der sie in den Nützlichen Versuchen 1 Th. IV. Cap. 105 u. f. S. auch in den Elementis Matheseos Vniuersae T. II. Aerom. Cap. II. §. 40 p. 362 sq. beschreibt, hat alle seine Versuche mit einer Sengwerdschen von Leupold verfertigten Luftpumpe angestellt. Unter andern sind auch Luftpumpen angegeben worden, die zwey Cylinder haben, wovon die Stempel in der Bewegung so abwechseln, daß der eine binnen der Zeit die Luft in seinen Cylinder hinein zieht, da sie der andre aus dem seinigen wegschaft: die Absicht hiebey war, die Arbeit möglichst zu verkürzen. Hauksbee, Leupold, Gravesand, und Nollet haben für dergleichen doppelte Luftpumpen bequeme Einrichtungen vorgeschlagen und auch in Ausübung gebracht. Sie dienen gewöhnlich nur die Luft zu verdünnen, und nicht sie zusammen zu pressen. Beyde Absichten hat Smeaton bey der einfachen Luftpumpe mit einem stehenden Cylinder sehr geschickt vereiniget. Seine Luftpumpe ist wie die erste Guerikische, Hauksbeesche, und doppelte Leupoldsche mit Ventilen versehen, damit man bey der Arbeit der Mühe überhoben seyn

könne, den Hahn jedesmahl in die rechte Stellung zu drehen. Nollet bey seiner doppelten Pumpe und Gravesand haben diesen Hahn beybehalten, jedoch mit der Verbesserung, daß einerley Mechanismus, welcher die Kolben zu bewegen dient, auch jedesmahl den Hahn in die rechte Stellung bringt. Hr. Brander in Augsburg verfertiget jezt für die Liebhaber der Naturlehre eine überaus bequeme von ihm so genannte Cabinet-Antlia, wovon auch im Jahr 1774 eine Beschreibung zu Augsburg im Druck herausgekom-
75 F. men ist. Es ist AB ein verticalstehender Cylinder, und unten am Fuß desselben befindet sich der Haupthahn CD. Grade über dem Cylinder liegt das Getriebe E, dessen Zähne in die Stempelstange greifen, und an der Axe desselben hängt ein Schwengel HK herab, der unten einen kleinen wagrechten Zapfen L mit einer daran steckenden Rolle hat. Die Welle des Getriebes macht bey jedem Stempelzuge etwas mehr, als eine Umwendung, und führt den Schwengel HK mit herum; dieser aber fasset beym Umfang eines Zuges und Rückzuges vermittelst des Zapfens L, woran die Rolle steckt, den Schweif D des Hahns und versetzt ihn in die rechte Stellung, bevor noch der Stempel mit in Bewegung kommt. Die Einrichtung ist so, wie bey der doppelten Nolletschen, und derjenigen ähnlich, die auch Gravesand schon vorher, um den Hahn jedesmahl zu drehen, angebracht hatte. Wer grössere Werke nicht zur Hand hat, der findet in Johann von Musschenbröcks Beschreibung der doppelten und einfachen Luftpumpe nebst einer Sammlung von verschiedenen nützlichen und lehrreichen Versuchen, aus dem französischen übersetzt und mit Zusätzen ver-

vermehrt von M. Joh. Christoph Thenn, Augsburg 1765 sehr gute hieher gehörige Nachrichten. Des Herrn Lowiz Sammlung der Versuche, wodurch sich die Eigenschaften der Luft begreiflich machen lassen, Nürnberg 1754 ist selten mehr zu haben.

27 §.

Der cubische Inhalt vom innern Raum des Cylinders, der Klocke und der Verbindungsröhre ist gegeben, man soll finden, in welchem Verhältniß die Dichtigkeit der Luft schon vermindert sey, nachdem dies Auspumpen einigemahl ist wiederhohlt worden: vorausgesetzt, daß sich die Luft jedesmahl gleichförmig durch den Raum der Klocke der Röhre oder des Cylinders verbreite.

Aufl. Es sey der innere Raum der Klocke und Röhre bis an den Haupthahn oder das Ventil im Boden des Cylinders $= V$, der innere Raum des Cylinders bis an den zurückgezogenen Stempel $= W$, die natürliche Dichtigkeit der Luft $= \Delta$, und α, β, γ, bezeichne ihre Dichtigkeit unter der Klocke, nach dem 1sten, 2ten, 3ten Auspumpen, so ist $\alpha = \frac{V}{V+W} . \Delta$; $\beta = \frac{V}{V+W} . \alpha = \frac{V^2}{(V+W)^2} . \Delta$; $\gamma = \frac{V}{V+W} . \beta = \frac{V^3}{(V+W)^3} . \Delta$. Demnach nimmt die Dichtigkeit der Luft unter der Klocke in geometrischer Progression ab, wovon $\frac{V}{V+W}$ der Exponent ist: und wenn überhaupt δ ihre Dichtigkeit nach n mahligen Auspumpen bezeichnet, so ist $\delta = \frac{V^n}{(V+W)^n} \cdot \Delta$, mithin $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{(V+W)^n}{V^n}$.

Nimmt man auf beyden Seiten die Logarithmen, so erhält man $l\Delta - l\delta = n(l(V+W) - lV)$, also $n = \frac{l(\Delta:\delta)}{l((V+W):V)}$: sovielmahl muß das Auspumpen wiederholt werden, um die Dichtigkeit der Luft in dem gegebenen Verhältniß zu vermindern.

Wenn man umgekehrt die Luft in einem Gefäß verdichtet, so wächst die hineingepreßte Luftmasse in arithmethischer Progression. Denn sie ist anfangs im Gefäß $= \Delta . V$, und wird nach n mahligem Einpressen $= \Delta . V + n . \Delta . W = (V + nW) . \Delta$. Wenn also nun δ die Dichtigkeit der zusammengepreßten Luft bezeichnet, so ist $\Delta : \delta = V : V + nW$, oder $\delta = \frac{V + nW}{V} . \Delta$.

28 §.

Wenn man den zweyten im 20 §. angegebenen Versuch anstellet, wenn man unter die Klocke eine festgebundene Blase legt, worin nur wenig Luft ist; so fängt diese Blase gleich mit dem ersten Zuge an, sich auszubreiten, und dehnt sich mit jedem folgenden Zuge immer mehr aus, bis sie endlich nach einer gewissen Anzahl wiederholter Auspumpungen völlig rund wird. Sobald man aber der äussern Luft einen Weg in den Raum unter der Klocke wieder öfnet, sobald fällt auch die Blase desto mehr wieder in Falten zusammen, je mehr Luft man hinein läßt. Demnach leidet es keinen Zweifel, daß die Luft nicht im natürlichen Zustande, ohne daß ein weiteres Zusamenpressen

sen vorher nöthig wäre, ein beständiges Bestreben äussern sollte, sich nach allen Seiten auszubreiten. Weil nun überdem auch das Gewicht eines mit dem engen Halse und Schließhahnen versehenen vorher auf der Luftpumpe soviel möglich von Luft ausgeleerten Recipienten sogleich zunimmt, wenn man Luft wieder hinein läßt, so daß er nun an einer Wage das Uebergewicht bekommt, wenn er vorher, ehe die Luft hinein gelassen ward, mit Gegengewichten ins Gleichgewicht gebracht war; so leidet es auch keinen Zweifel, daß die Luft nicht, wie alle andre Massen in der Natur schwer seyn sollte. Demnach muß der Zustand des Gleichgewichts der Atmosphäre, welche die Erde umgiebt, den Gesetzen des Gleichgewichts solcher elastischen flüssigen Massen, die gegen einen gemeinschaftlichen Mittelpunct schwer sind, völlig gemäß seyn.

Man kann den cubischen Inhalt vom innern Raum des Recipienten aus dem Gewicht des Wassers finden, welches den Raum dieses Recipienten füllet. (19 §. Stat.) also kann vermittelst einer hinlänglich scharfen Wage auch das Gewicht der Luft, welches eben den Raum füllet, und daraus das Gewicht eines Cubicfusses Luft gefunden werden. Auch giebt schon die Vergleichung des Gewichts der Luft mit dem Gewicht des Wassers, welches eben den Recipienten füllet, das specifische Gewicht, oder die Dichtigkeit der Luft in Vergleichung mit der Dichtigkeit des Wassers, Gewöhnlich findet man die Luft nahe an der Erdfläche bey mittelmässiger Wärme ohngefähr 800 bis 850mahl leichter als Wasser, bald etwas mehr, bald weniger, weil die Dichtigkeit der Luft durch die verschiedene Wärme und andre Ursachen gar sehr geändert wird. Bey einem völlig genauen Versuch müste der Grad der Wärme der Luft, deren Gewicht so geprüft wird, jedesmahl mit bemerkt werden, wozu das weiter folgende Anleitung geben wird. Man sehe von **Wolffens Nützliche Versuche** I. Th. V. Cap. 86 §. *Musschenbroek* Introd. ad Phil. Nat. T. II. §. 2059 *s' Gravesande* Phys. Elem. Math. Lib. IV. Cap. V. §. 2164. Nach Gravesand wägen 283 Rheinl. Cub. Zoll Luft etwa 100 Gran Troygewicht, also ein Cubicfuß Luft 610,6 Gran Troy.

Der IV. Abschnitt.

Vom Barometer und dessen Gebrauch.

29 §.

Wenn man die Höhe, welche der Elasticität der
Luft in der untern Gegend nahe an der Erdflä-
che zugehört, $= \pi$ setzt, und diese Höhe in Fussen
ausdrückt; so heißt das, annehmen, der Druck der
elastischen Luft gegen die Fläche eines Quadratfusses
sey so groß, als das Gewicht einer Wassersäule, de-
ren Grundfläche einem Quadratfuß gleich, und deren
72 F. Höhe $= \pi$ ist. Es sey AB eine cylindrische bey A
und B offene lothrecht stehende Röhre, die unten in
einem Gefäß CD mit Wasser steht. In dieser Röhre
stecke ein überall genau anschliessender Stempel KL,
wie im Cylinder einer Luftpumpe, der Stempel befin-
de sich anfangs ganz unten bey B, und werde nach
und nach in die Höhe gezogen: so muß schon nach
den Gesetzen der Hydrostatik das Wasser dem Stem-
pel soweit folgen, bis es in der Röhre so hoch gestie-
gen

gen ist, als es draussen im Gefäß stehet. Weil überdem die Luft auf die Wasserfläche EF eben so drückt, als wenn noch über EF eine Wassersäule in einer Höhe $= \pi$ stünde; so muß das Wasser in der Röhre dem hinauf rückenden Stempel soweit folgen, bis es in der Röhre die Höhe $= \pi$ über der Wasserfläche EF erreicht hat, aber auch nicht weiter, wenn gleich der Stempel noch höher rückte. Wäre statt des Wassers eine andre flüssige Masse im Gefäß, und ihre Dichtigkeit $= \delta$, so würde sie dem Stempel ebenfalls so lange folgen, bis sie die Höhe $\frac{1}{\delta}\pi$ erreicht hätte. (63 §. Hydrost.) Demnach würde die Höhe, auf welche das Quecksilber in einer solchen Röhre stiege, vierzehnmahl kleiner seyn, als die Höhe, die das Wasser erreichte.

30 §.

Man fülle eine gläserne Röhre, die an dem einen Ende verschlossen und über 28 Pariser Zoll lang ist, mit Quecksilber, kehre sie um, verschliesse aber das offene Ende, indem man sie umkehrt, mit dem Finger, setze darauf das offene Ende in ein Gefäß mit Quecksilber, und halte nun die Röhre grade aufrecht: so wird das Quecksilber in der Röhre ohngefähr 28 Zoll hoch stehen bleiben und nicht weiter herab sinken. Daß dieser Erfolg von der Federkraft der Luft, welche gegen die Fläche des Quecksilbers im Gefäß preßt, als seiner Ursache herrühre, leidet nun weiter keinen Zweifel. Was im vor. §. $\frac{1}{\delta}\pi$ war, ist vermöge des Versuchs $= 28$ Pariser Zoll $= 2\frac{1}{3}$ Par. Fuß, also $\pi = 2\frac{1}{3} . 14 = 32\frac{2}{3}$ Par. Fuß: die Federkraft der Luft ist

demnach

demnach so groß, daß sie einer Queckſilberſäule von 28 Zoll, oder einer Waſſerſäule von $32\frac{2}{3}$ Fuß das Gleichtgewicht halten kann. Iſt eine mehr denn 32 Fuß hohe Röhre unten mit einem Hahn verſehen, so kann man ſie von oben aus einem der obern Stockwerke eines Gebäudes füllen, wenn ſie unten in einem Gefäß mit Waſſer ſteht. Wird hiernächſt die Röhre oben verſchloſſen, und unten der Hahn geöfnet, so lehrt der Erfolg, daß das Waſſer wirklich etwa 32 Fuß hoch ſtehen bleibe. H. H. Käſtner hat dieſen Verſuch zu Leipzig bey dem ſeel. H. Prof. Hauſen geſehen: mehrere ſtarke meſſingene Röhren waren an einander geſchroben, bis ſie die gehörige Länge erreichten, zwiſchen dieſen Stücken war um die Schrauben naſſes Leder gelegt, das Eindringen der Luft abzuhalten, das oberſte Stück war eine gläſerne wie eine Klocke gebildete Röhre, um dadurch die höchſte Stelle, wo die Waſſerfläche ſtehen blieb, zu bemerken. (Käſtners Anfangsgr. der angew. Math. Aerom. 31 §. 112 S.) Eben den Verſuch hat Otto von Guerike ſchon angeſtellet, wovon man die Erzählung nebſt der Veranlaſſung zu dieſem Verſuch in den Experim. Novis Magdeb. Lib. III. Cap. XIX, XX. pag. 96 ſqq. antrift.

31 §.

Dieſe letzte Erfahrung, daß das Waſſer in einer 32 Fuß hohen Röhre hängen bleibt, iſt älter als diejenige, daß das Queckſilber 28 Zoll hoch ſtehen bleibt, ob man gleich leicht ſchlieſſen konnte, daß das eine, wie das andre erfolgen müſſe, ſobald nur von dem einen die wahre Urſache entdeckt war. Ein Gärtner zu Florenz wollte das Waſſer vermittelſt einer gemeinen Waſſerpumpe, worin es dem Stempel nach den

im

im vor. §. angeführten Gesetzen folgen muß, höher als 18 Bauellen hoch heben, welche $30\frac{3}{8}$ Pariser Fuß betragen: als dieses nicht angieng, befragte er deßwegen den damals zu Florenz berühmten Galiläus a Galiläis, der aber von der eigentlichen Ursache noch nicht völlig richtige Begriffe hatte. Man sehe Galilaei Discorsi et dimostrazioni Matemat. intorno à due nuove scienze attenenti alla Mecanica et i movimenti locali, Leid. 1638. Dial. I. pag. 17. Ein berühmter Schüler dieses Galiläi aber, Evangelista Torricellius fand, daß der Druck der Luft die Ursache sey, und stellte im Jahr 1643 den Versuch mit der Röhre voll Quecksilber an, die eben deswegen von ihm den Nahmen der Torricellianischen Röhre erhalten hat. Wenn sie länger als 28 Zoll ist, so bleibt über dem Quecksilber ein leerer Raum, der die Torricellianische Leere heißt: und wenn die Röhre mit hinlänglicher Vorsicht gefüllt wird, so ist dieser luftleere Raum reiner als der Guerikische, den man durch die Luftpumpe zuwege bringt.

Die Torricellianische Röhre hat auch den Nahmen Barometer erhalten, ob sie gleich nicht so unmittelbar das Gewicht der Luft, als vielmehr ihre Federkraft angiebt. Indessen ist im Zustande des Gleichgewichts der Atmosphäre der vom Gewicht der höhern Luftschichten herrührende Druck gegen jede wagrechte ebene Fläche eben so groß, als er seyn würde, wenn über derselben Grundfläche eine lothrechte Luftsäule stünde, so hoch als die Atmosphäre selbst ist, und wenn diese Luftsäule in jeder Höhe über ihrer Grundfläche mit der Atmosphäre in eben der Höhe über der Erdfläche einerley Dichtigkeit hätte. (16 §.) Eben so groß ist der Druck der unten vom Gewicht

der

der obern zusammengepreßten elastischen Luft gegen eine eben so grosse Fläche: also kann der nun schon eingeführte Nahme **Barometer** ganz wohl beybehalten werden.

31 §.

Vermittelst der Luftpumpe kann man sich augenscheinlich überzeugen, daß keine andre Ursache, als der Druck der Luft das Quecksilber in der Torricellianischen Röhre erhalte. Unter einen etwas hohen Recipienten, der unten wie sonst eine gläserne Klocke gebildet wird, damit er an den Teller gehörig anschliesse, setzt man ein Gefäß mit Quecksilber und in dasselbe die gefüllte Röhre, die zu dieser Absicht eben nicht völlig 28 Zoll hoch seyn darf, wenn man keinen so hohen Recipienten hat. Sobald man nun die Luft wegpumpt, fällt das Quecksilber in der Röhre, und dies desto tiefer, je länger man mit dem Auspumpen fortfährt: läßt man aber wieder Luft unter den Recipienten, so steigt das Quecksilber wieder zu seiner vorigen Höhe. Dies macht die Torricellianische Röhre bey jedem etwas genauen Versuch mit der Luftpumpe fast unentbehrlich, wenn man wissen will, wieweit die Federkraft der Luft unter der Klocke schon vermindert sey.

71 F. Wenn mit der Verbindungsröhre MN zwischen dem Teller PQ und Cylinder ABCD eine andere Röhre TVW zusammen hängt, und diese eben so, wie die vorige mit einem Teller *pq* versehen ist, der kleiner als der vorige seyn kann; so bringt man auf diesem Teller die Torricellianische Röhre *rs* unter den hohen Recipienten YZ, der mit Wachs oder Kütte auf dem Teller befestiget wird; so dient sie bey jedem Versuch als **Elasticitätszeiger** auch für die unter dem Recipienten KL befindliche Luft.

Eben

Eben diesen Elasticitätszeiger kann man auch auf folgende Art mit der Luftpumpe verbinden. Es sey PQ der Teller, und NO die mitten hindurch gehende bey O offene Röhre: in diese sey unten bey R eine gläserne über 28 Zoll lange Röhre RS gesteckt, und bey R alles gegen das Eindringen der äussern Luft verwahret. Das unten bey S offene Ende der Röhre stehe in einem Gefäß mit Queckfilber und NM sey die Verbindungsröhre zwischen dem Teller und Cylinder. So lange nun über dem Teller die Luft im natürlichen Zustande bleibt, so lange steht das Queckfilber in der Röhre nicht höher, als im Gefäß: wenn aber die Klocke über dem Teller steht, und durch die Würkung der Pumpe die Luft darunter verdünnt wird, so steigt das Queckfilber in der Röhre desto höher hinauf, je weiter das Verdünnen der Luft getrieben wird.

In der 75 Figur siehet man bey der Branderschen Cabinet-Antlia eine ähnliche Einrichtung, wie die zuerst beschriebene für das Barometer. Es ist MNO die Verbindungsröhre zwischen dem Cylinder AB und dem grössern Teller PQ, worauf die Klocke gesetzt wird. Mit dieser Röhre ist eine andre TV in Verbindung, und *pq* ist der kleinere Teller für den hohen Recipienten und das Barometer. Vermittelst der Schraubenzwinge Z kann die ganze Maschine auf einem jeden feststehenden Tisch zum Gebrauch befestiget werden. Der Hahn W dient die Verbindung zwischen dem Cylinder und der Klocke zu sperren und wieder zu öfnen, auch beym Ausziehen des darin steckenden Stöpsels wieder Luft unter die Klocke zu lassen. Ebenn so kann man vermittelst des Hahnen Y die Verbindung zwischen der Klocke und dem Barometer sperren und nach Gefallen wieder öfnen.

32 §.

Läßt man die gefüllte Torricellianische Röhre in dem Gefäß mit Quecksilber eine zeitlang unverrückt stehen, so lehrt die Erfahrung, daß das Quecksilber in derselben nicht beständig in gleicher Höhe stehen bleibe. Die jedesmahlige Höhe desselben läßt sich am bequemsten beobachten; wenn Röhre und Gefäß an einer in Zolle und Linien eingetheilten Tafel befestiget sind, die man an einem Nagel oder Haken aufhängen und solchergestalt die Röhre in die verticale Stellung bringen kann. Die Glasmasse, woraus die hiezu
73F. dienlichen Röhren verfertiget sind, läßt sich an einem durch starkes Hineinblasen verstärkten Lampenfeuer wie Siegellack schmelzen, man kann alsdenn das untere offene Ende der Röhre aufwärts von B nach F biegen, aus Glase ein Behältniß FG, wie eine kleine Flasche, für das aus der Röhre tretende Quecksilber daranschmelzen, und solchergestalt des von der Röhre selbst verschiedenen Gefässes entbehren. Die Abtheilungen auf der Tafel müssen an der Oberfläche des Quecksilbers im Gefäß anfangen, weil man eigentlich die Höhe der Quecksilbersäule wissen will, die mit der Federkraft der Luft im Gleichgewicht ist. Wenn aber die Barometerröhre an der Tafel unbeweglich befestiget ist, so bleibt die höchste Fläche des Quecksilbers im Gefäß eben um deßwillen ebenfalls nicht immer genau an einerley Stelle, weil es in der Röhre nicht immer gleich hoch stehen bleibt. Fällt es in der Röhre, so tritt etwas Quecksilber aus der Röhre in das Gefäß, und um deßwillen steigt es in dem letztern höher. Wenn dagegen das Quecksilber in der Röhre höher steigt, so tritt ein Theil des Quecksilbers aus dem Behältniß in die Röhre, mithin senkt sich die Oberfläche

desselben

desselben im Gefäß. Um alle die jedesmahlige Barometerhöhe genau zu beobachten, könnte man die Röhre an der Tafel so befestigen, daß sie sich an derselben ihrer Länge nach verschieben, und vermittelst einer Schraube höher oder niedriger rücken liesse, um die Oberfläche des Quecksilbers im Behältniß an den Anfang der Abtheilungen zu bringen.

33 §.

Wenn man an einem und eben demselben Ort viele Jahre nach einander Beobachtungen über die Barometerhöhe angestellet hat, und das arithmetische Mittel zwischen der grösten und kleinsten beobachteten Höhe nimmt; so hat man für diesen Ort die mittlere **Barometerhöhe.** Man kann auch nach Vorschrift andrer das arithmetische Mittel zwischen der in jedem Jahr beobachteten grösten und kleinsten Höhe nehmen, hierauf alle diese mittlern Höhen zusammen addiren, und die Summe durch die Anzahl der Jahre dividiren; so bekommt man ebenfalls eine mittlere Höhe. Giebt man ferner auf die Abwechselungen der Witterung zugleich mit acht, indem man die Veränderungen in der Barometerhöhe beobachtet; so veranlasset das bald die Muthmassung, daß das Steigen und Fallen des Quecksilbers im Barometer mit den Abwechselungen der Witterung zusammen hänge. Gewöhnlich fällt trocken Wetter ein, wenn das Barometer über die mittlere Barometerhöhe steigt, und nasses stürmisches Wetter, wenn es unter die mittlere Höhe fällt: allein mit Sicherheit läßt sich nicht erwarten, daß der Erfolg allemahl so seyn werde, weil vermöge der Erfahrung diese Regel oft Ausnahmen leidet.

In unsern Gegenden, (zu Bützow und in der Nähe umher) ist die größte Barometerhöhe 28 Zoll

8 Linien, die kleinste 26 Zoll 10 Linien Pariser Maaß, die mittlere Höhe 27 Zoll 9 Linien: also beträgt die ganze Aenderung in der Barometerhöhe noch nicht völlig zwey Zoll. Wenn demnach die Querschnitte des untern Gefässes FG in Vergleichung mit den Querschnitten der Röhre BA ziemlich groß sind, so ist die Aenderung der Höhe des Quecksilbers im Gefäß sehr klein, wenn gleich das Quecksilber in der Röhre von der kleinsten bis zur größten Höhe steigt, oder von dieser bis zu jener herab fällt. Sind diese Querschnitte Kreise, und ist das untere Gefäß im Durchmesser zehnmahl weiter als die Röhre; so kann das Quecksilber im Gefäß nur um $\frac{2}{100}$ oder $\frac{1}{50}$ Zoll fallen oder steigen, wenn es in der Röhre um zwey Zoll steigt oder fällt. Die ganze Aenderung beträgt demnach höchstens $\frac{1}{4}$ Linie, und wenn man nicht die größte Schärfe sucht, so kann man diesen kleinen Fehler aus der Acht lassen, auch wenn man will, ihn dadurch noch mehr vermindern, daß man das Gefäß in Vergleichung mit der Röhre noch weiter macht. Soll das Barometer nur als Wettersager dienen, so hat ein Fehler in der beobachteten Höhe, der weniger als $\frac{1}{4}$ Linie beträgt, wenig zu bedeuten. Allein es lassen sich aus den beobachteten Barometerhöhen andre Schlüsse folgern, wobey zu wünschen wäre, daß man es bis zur größten Schärfe bringen könnte.

34 §.

72F. Wenn alles übrige einerley ist, was sonst vielleicht die Federkraft der Luft ändern kann; so muß sie in höhern Gegenden desto mehr abnehmen, je weiter die angenommene Stelle vom Mittelpunct der Erde entfernt ist; (28 §.) wenn man also einen Berg hinan steigt, und ein Barometer mitnimmt, dessen

Höhe

Höhe man am Fuß des Berges genau bemerkt hat; so muß die Quecksilbersäule, welche dem Druck der Luft das Gleichgewicht hält, desto mehr an Höhe abnehmen, je höher man den Berg hinauf kommt. Die Herrn Pascal und Perrier haben bald nach dem die Torricellianische Röhre bekannt geworden war, hierüber die ersten Versuche angestellet, und den Erfolg mit ihrer Erwartung völlig übereinstimmig befunden. Wäre also das Gesetz bekannt, nach welchem die Federkraft der Luft in grössern Höhen über der Erdfläche abnimmt; so könnte man aus der auf einem Berge beobachteten Barometerhöhe die Höhe des Orts der Beobachtung über der Erdfläche finden.

35 §.

Dichtere Luft hat eine grössere Federkraft als eine solche Luft deren Dichtigkeit kleiner ist: daß aber Dichtigkeit und Federkraft der Luft allemahl in einerley Verhältniß wachsen, und abnehmen, daran würde man aus den im 10 §. schon angeführten Gründen mit Recht zweifeln, wenn man auch noch nicht aus angestellten Versuchen wüste, daß die Federkraft der Luft bey starken zusammenpressungen in einem Verhältniß wächst, das grösser ist, als das Verhältniß der Dichtigkeiten. Indessen haben die Versuche gelehrt, daß **Dichtigkeit und Federkraft der Luft einander wenigstens sehr nahe proportional bleiben**, sowohl wenn die Luft in dem Zustande, worin sie sich nahe an der Erdfläche befindet, etwas mehr zusammengepreßt wird, als auch wenn sie sich in einen grössern Raum ausbreitet, und ihre Dichtigkeit kleiner wird. Es sey AB eine gehörig gefüllte Barometer- 72 F.
röhre, die Quecksilbersäule stehe bis H, so daß GH die dermahlige Barometerhöhe ist: oben bey L sey

die Röhre nur so verschlossen, daß man sie daselbst nach Gefallen öfnen kann, und LH sey die Torricellianische Leere. Man nehme die Röhre aus dem Gefäß CD heraus und verschliesse, indem das untere Ende noch in dem Quecksilber eingetaucht ist, die untere Oefnung B mit dem Finger, damit die ganze Säule BH nach dem Ausheben noch in der Röhre bleibe, ferner öfne man die Röhre oben bey L, damit die Luft den Raum LH ausfülle, verschliesse hiernächst die Röhre von neuen bey L, und setze sie wieder in das Gefäß CD mit Quecksilber. Nun wird sich die Luft in LH ausbreiten, und die Quecksilbersäule herabsinken bis sich alles wieder ins Gleichgewicht gesetzt hat. Wenn alsdenn das Quecksilber bis M herabgesunken ist, und nun die Federkraft der verdünnten im Raum LM eingeschlossenen Luft $= \pi$, die Federkraft der natürlichen Luft $= \Pi$ gesetzt wird; so ist wegen des Gleichgewichts $\Pi = GM + \pi$, also $\pi = \Pi - GM$. Es ist aber $\Pi = GH$, also $\pi = GH - GM$. Ferner sey die Dichtigkeit der natürlichen Luft $= \Delta$, der verdünnten im Raum LM eingeschlossenen Luft $= \delta$; so ist $\Delta : \delta = LM : LH$. Die Linien GH, GM, LM, LH, kann man bey jedem Versuch messen, und man findet allemahl das Verhältniß $LM : LH = GH : GH - GM$, also $\Delta : \delta = \Pi : \pi$.

Herr Mariotte hat im Discours de la Nature de l'air 1676 und nachher im Traité du mouvement des eaux, II. Partie, II. Discours, pag. 165. Paris 1686, dies Gesetz, nach welchem Dichtigkeit und Federkraft der Luft von einander wenigstens so lange abhängen, als die Verdünnung oder Verdichtung nicht gewisse Gränzen überschreitet, auf die eben erzählte Art durch Versuche bestättiget. Es heißt daher

daher gewöhnlich das Mariottische Gesetz der Dichtigkeiten der Luft, obgleich auch Boyle schon vorher auf eben dies Gesetz vorfallen war, und es durch Versuche bestättiget hatte. Herr Bouguer hat den Versuch auch in solchen Höhen angestellt, wo die Luft viel dünner, als an der Oberfläche der Erde ist, auf Bergen in Höhen von 2400 Toisen, wo das Barometer nur 15 Zoll hoch stand, und der Erfolg ist allemahl derselbe gewesen. M. s. die Memoires de l'Acad. de Paris A. 1753. *Bouguer* Figure de la Terre Introd. Relation Abregée du voyage au Perou pag. XXXIX.

36 §.

Ausser der Dichtigkeit einer Luftmasse hängt ihre Federkraft noch davon ab, ob sie mehr oder weniger warm ist. Eine fest zugebundene Lammsblase, worin nur wenig Luft ist, schwillt auf, wenn man sie einem Kohlfeuer nähert, und auf allen Seiten nach und nach erwärmt. Sie zerspringt, wenn man sie, ohne sie zu verbrennen, stark erhizt und Luft genug darin vorhanden ist. Demnach hat einerley Luftmasse bey gleicher Dichtigkeit in einerley Raum mehr Federkraft, wenn sie mehr erwärmt, und weniger Federkraft, wenn sie weniger erwärmt ist. Was also bisher vom Zustande des Gleichgewichts der atmosphärischen Luft bewiesen ist, gilt nur so lange, als die ganze Luftmasse durchgängig gleich warm ist: auch ist nur die Federkraft gleich warmer Luftmassen ihrer Dichtigkeit proportional.

37 §.

Das Gesetz zu finden, nach welchem die Federkraft der Luft bey einerley Wärme in verschiedenen Höhen über der Erdfläche abnimmt.

70F. Aufl. Es sey CD ein Stück der Erdfläche, CA die lothrechte Höhe der Atmosphäre, diese sey bey E, F, G, H, u. s. f. in sehr kleine gleiche Theile getheilt, und durch die Theilungspuncte stelle man sich soviele wagrechte Flächen vor, welche die über CD stehende Luftsäule in Schichten von gleichen aber sehr kleinen Höhen eintheilen. Die dem Druck gegen CD zugehörige Höhe sey $= a$, so ist a die Barometerhöhe unmittelbar an der Erdfläche. Wenn nun p, p', p'', p''', u. s. f. die Barometerhöhe in E, F, G, H, u. s. f. und $\Delta, \alpha, \beta, \gamma$, die Dichtigkeiten der Luft in den Schichten Ce, Ef, Fg, Gh, u. s. f. bezeichnen; die Höhen der Schichten aber so klein angenommen sind, daß sich die Dichtigkeit der Luft, von C bis E, von E bis F, u. s. w. nicht merklich ändert: so hat man $p : p' = \Delta : \alpha$, (35 §.) also auch $p : p' = \Delta \,.\, CE : \alpha \,.\, EF$. Es ist aber $\Delta \,.\, CE = a - p$ und $\alpha \,.\, EF = p - p'$, (13 §.) also $a - p : p - p' = p : p'$, und daraus folgt $a : p = p : p'$, (168 §. Rech.) das heißt: die Barometerhöhen in C, E, F, sind in geometrischer Progression.

Aus eben dem Grunde sind auch die Barometerhöhen in E, F, G, in geometrischer Progression. Denn es ist wiederum $p' : p'' = \alpha : \beta$, (35 §.) also $p' : p'' = \alpha \,.\, EF : \beta \,.\, FG$. Ferner ist $\alpha \,.\, EF = p - p$ und $\beta \,.\, FG = p' - p''$, also $p - p' : p' - p'' = p' : p''$, und das giebt $p : p' = p' : p''$.

Allemahl, wenn A, B, C, drey nach einander folgende abnehmende Grössen sind, und das Verhältniß ihrer Differenzen $A - B : B - C$ ist $= B : C$, so ist $A : B = B : C$. (168 §. Rech.) Aber für jede drey nach einander folgende Stellen, wie F, G, H, haben die Barometerhöhen p', p'', p''', wieder eben

diese

diese Eigenschaft: es ist $p'' : p''' = \beta : \gamma = \beta . GF : \gamma . GH$, und $\beta . GF, = p' - p''$, $\gamma . GH = p'' - p'''$, also $p' : p'' = p'' : p'''$. Demnach sind die Barometerhöhen insgesammt in geometrischer Progression, wenn die Höhen der Schichten gleich groß angenommen werden.

Es sey die Zahl der Schichten von C bis H $= m$, von C bis M $= n$, und in H sey die Barometerhöhe $= q$, in M aber $= p$, weil nun der Buchstab p in der vorigen Bedeutung nicht mehr gebraucht wird; so ist das Verhältniß $\frac{a}{p} = \frac{n}{m}$ (des Verhältnisses $\frac{a}{q}$), mithin die Zahl $\frac{n}{m} = \frac{CM}{CH} = \log . \frac{a}{p}$, wenn des Verhältnisses $\frac{a}{q}$ Logarithme $= 1$ gesetzt wird. Dies angenommen ist $l . \frac{a}{p} : l . \frac{a}{q} = \frac{n}{m} : 1 = CM : CH$; und wenn in einer andern Stelle G die Barometerhöhe $= \pi$ ist, so hat man $l \frac{a}{q} : l \frac{a}{\pi} = CH : CG$, also $l \frac{a}{p} : l \frac{a}{\pi} = CM : CG$. Demnach verhalten sich die Höhen der Stationen wie die Logarithmen der Verhältnisse, in welchen die Barometerhöhen abnehmen.

38 §.

Man hat in zweyen ungleich hoch über der Erdfläche erhabenen Stationen G und M die Barometerhöhen π und p beobachtet, und es soll daraus die Höhe GM der obern Station über der untern gefunden werden: vorausgesetzt, daß die Atmosphäre zur Zeit der Beobachtung völlig im Gleichgewicht gewesen, auch wenigstens zwischen beyden Stationen durchgängig gleich warm gewesen sey. 70F.

Aufl. 1.) Wenn die Buchstaben $a, \pi, p, q,$ in eben der Bedeutung, wie im vor. §. gebraucht werden; so hat man $CM = \frac{CH \,.\, l(a:p)}{l(a:q)}$, und $CG = \frac{CH \,.\, l(a:\pi)}{l(a:q)}$; mithin $GM = CM - CG = \frac{CH}{l(a:q)} \,.\, \left(l\frac{a}{p} - l\frac{a}{\pi}\right)$, also $GM = \frac{CH}{l(a:q)}\, l\frac{\pi}{p}$. Nach Anleitung dieser Formul kann GM gefunden werden, wenn die Höhe $\frac{CH}{l(a:q)}$ ein für allemahl bekannt ist. Nimmt man die unterste Station in C an, so ist daselbst $\pi = a$, und man hat $CM = \frac{CH}{l(a:q)} \,.\, l\frac{a}{p}$, wie erfordert wird. Diesemnach kann die unveränderliche Höhe $\frac{CH}{l(a:q)}$ gefunden werden, wenn man die Barometerhöhen π und p an zweyen verschiedenen Stationen G und M, deren Höhe über einander bekannt ist, beobachtet und die gefundenen Zahlen in die Gleichung $\frac{GM}{l(\pi:p)} = \frac{CH}{l(a:q)}$ statt π, p, und GM setzt.

2.) Es sey k die Höhe einer gleichförmig dichten Luftsäule, die wenn ihre Dichtigkeit überall $= \Delta$ wäre, gegen CD eben so stark drücken würde, als die natürliche Atmosphärische Luftsäule dagegen preßt; so ist die dem Druck gegen CD zugehörige Höhe $= \Delta \,.\, k$, und k wäre die Höhe der Atmosphäre, wenn man sie so weit zusammen drücken könnte, daß ihre Dichtigkeit durchgängig eben so groß wäre, als die Dichtigkeit der Luft zunächst an der Erdfläche. Ferner ist der Druck gegen $Ee = \Delta \,.\, k - \Delta \,.\, CE$: das Verhält-

niß

niß dieser Pressungen ist $\frac{\Delta . k}{\Delta . k - \Delta . CE} = 1 + \frac{CE}{k - CE}$, und je kleiner CE angenommen wird, desto mehr nähert sich dieser Ausdruck dem Werth $= 1 + \frac{CE}{k}$. Es ist aber $\frac{CE}{CH} = \frac{l(k:k - CE)}{l(a:q)}$, wenn also CH $=$ CE genommen wird, so ist $l(a:q) = l(k:k - CE)$, und man erhält $\frac{CM}{CE} = \frac{l(a:p)}{l(k:k - CE)}$, oder $l\frac{a}{p} = \frac{CM}{CE} . l\frac{k}{k - CE}$, oder auch $l\frac{a}{p} = \frac{CM}{CE} l\left(1 + \frac{CE}{k}\right)$. Weil nun die Zahl $1 + \frac{CE}{k}$ die Einheit sehr wenig übertrift, so ist $l\left(1 + \frac{CE}{k}\right)$ eine sehr kleine Zahl, und man kann $l\left(1 + \frac{CE}{k}\right) = \frac{m . CE}{k}$ annehmen, so erhält man $l\frac{a}{p} = \frac{m . CM}{k}$.

3.) Wofern die untere Luft 800mahl leichter als Wasser ist, so hat man $k = 32\frac{2}{3} . 800 = 26133$ Paris. Fuß oder 4355 Toisen, wenn das Barometer 28 Zohl hoch steht. Die Höhe CE muß so klein angenommen werden, daß die Aenderung in der Dichtigkeit der Luft von C bis E nicht merklich ist: man nehme also $\frac{CE}{k} = 0,0000001$, so ist CE $=$ 0,0026133 Fuß klein genug, um jener Voraussetzung ein Genüge zu leisten. Aus vollständigen Logarithmentafeln wird alsdenn log. tab. 1,0000001, 0,0000000434294 gefunden, und man erhält $m . \frac{CE}{k} = 0,0000000434294$, also $m =$

0,4342944, mithin wird $l\frac{a}{p} = \frac{0,4342944 . CM}{k}$ gefunden. Gesetzt jene Bestimmung für k wäre auch nicht völlig richtig, so ändert das doch die Zahl m nicht, wenn gleich k etwas grösser oder kleiner angenommen wird. Muſschenbroek setzt für die Dichtigkeit der Luft in Vergleichung mit Dichtigkeit des Wassers die Gränzen $\frac{1}{800}$ und $\frac{1}{1000}$ fest. Wenn nun gleich k aus der letzten Zahl bestimmt, und $k =$ 32666 Pariser Fuß angenommen würde, so hätte man C E = 0,0032666 Fuß, wenn $\frac{CE}{k} =$ 0,0000001 bleibt, und diese Höhe ist immer noch klein genug für die Voraussetzung, daß sich die Dichtigkeit der Luft von C bis E nicht merklich ändre.

4.) Wenn nun in G die Barometerhöhe $= \pi$, also $l\frac{a}{p} = \frac{m . CG}{k}$ ist, so hat man auch $l\frac{a}{p} - l\frac{a}{\pi} = \frac{m}{k} . (CM - CG)$, also $l\frac{\pi}{p} = \frac{m . GM}{k}$. Man kann also aus den in G und M beobachteten Barometerhöhen π und p und der bekannten Höhe GM der einen Station über der andern auch die Höhe $k = \frac{m . GM}{l(\pi : p)}$ finden.

5.) Statt der Höhe k einer gleichförmig dichten Luftsäule von einerley Dichtigkeit mit der untern Luft kann man auch die Barometerhöhe a, welche mit ihr im Gleichgewicht ist, in Rechnung bringen. Man nehme an, des Quecksilbers Dichtigkeit sey Dmahl grösser, als die Dichtigkeit der untern Luft, so ist $k =$ D . a, und man hat $l\frac{\pi}{p} = \frac{m . GM}{D . a}$, also auch $l\frac{a}{p} = \frac{m . CM}{D . a}$.

39 §.

Ich habe das berühmte Problem von Ausmessung der Berge durch die gegebene Auflösung, soviel ohne Gebrauch der höhern Mathematischen Analysis möglich war, zu erläutern gesucht, um wenigstens einigermassen begreiflich zu machen, wie die Naturforscher, und unter denen auch solche, welche die höhere Analysin gebraucht haben, aus ihren Beobachtungen schliessen, um eine Zahl zu finden, die nachher bey den Rechnungen aus andern Barometerbeobachtungen unverändert dieselbe bleibt. Anstatt eine grosse Menge von Schriftstellern über diesen Gegenstand hier anzuführen, kann ich jetzt auf die beyden neuesten hieher gehörigen Schriften verweisen, worin man sowohl das historische als auch alles übrige antrift, was sich über diesen Gegenstand merkwürdiges sagen läßt. Die erste und weitläuftigste ist das nun durch die deutsche Uebersetzung allgemein bekannt gewordene Werk des H. *de Luc:* Recherches sur les modifications de l'Atmosphére etc. Genf 1772, zwey Theile in 4. Eine Uebersetzung davon in 2 Octavbänden hat Herr Magister Gehler in Leipzig verfertiget, wovon der erste Theil zu Leipzig 1776 im Druck erschienen ist. Die andre ist eine Abhandlung von Höhenmessungen durch das Barometer, die Hr. Hofrath Kästner seiner im Jahr 1775 herausgegebenen Markscheidekunst beygefügt hat.

40 §.

Die Gleichung $l\frac{a}{p} = \frac{m \,.\, CM}{D \,.\, a}$ (38 §. n. 5.) giebt 70F. $CM = \frac{D \,.\, a}{m} l\frac{a}{p}$: nach Herrn Hofr. Kästners Anzeige am a. O. 33 – 35 §. setzt H. Halley die Zahl

$D = 10800$, wenn $a = 30$ Englische Zoll ist, oder $2\frac{1}{2}$ Fuß, also wird $CM = \frac{27000}{m} l \frac{a}{p} = \frac{l(a:p)}{0{,}000016085}$ $= 62169{,}7 \cdot l\frac{a}{p}$ in Englischen Fussen. Herr Bouguer giebt in der Voyage au Perou an der Stelle, welche hier am Ende des 35 §. schon ist angeführt worden, eine Regel ohne Beweis, und das hat Hrn. Hofr. Kästner zu einer umständlichen Untersuchung über die Gründe und Voraussetzungen veranlasset, aus welchen H. Bouguer seine Regel könnte geschlossen haben. H. Bouguer selbst trägt die Gründe seiner Regel vor in der zweyten Ausgabe seines Traité d'Optique sur la gradation de la lumiere, Paris 1760 pag. 318 sqq. freylich in einem Werk, wo man sie eben nicht vermuthen kann. Die Formul $l\frac{\pi}{p} = \frac{m.GM}{k}$ (35 §. n. 4) liegt zum Grunde, und H. Bouguer bestimmt die Höhe k aus seinen auf den Gebürgen in Peru angestellten Beobachtungen. Das in der Voyage au Perou S. XXXIX gegebene Exempel zur Erläuterung der Regel ist eigentlich eine von den Beobachtungen, die er gebraucht hat, die Höhe k vermittelst der Formul $k = \frac{m \cdot GM}{l(\pi : p)}$ zu finden. Es war

zu Carabourou $\pi = 254{,}75$ Lin.
auf dem Pichincha $p = 191$ Lin.
also $l\pi = 2{,}4061142$
$lp = 2{,}2810334$

und $l(\pi:p) = 0{,}12508.08$

die Station auf dem Pichincha war 1209 Toisen höher, als die zu Carabourou, also war $GM = 1209$ Toisen. Diese Zahl mit $m = 0{,}4343$ multiplicirt giebt

525,0687,

525,0687, und das Product mit $l(\pi : p) = 0,1251$ dividirt giebt $k = 4197$ Toisen. Im Traité d'Optique a. a. O. sagt H. Bouguer, er könne die Richtigkeit seiner Regel mit mehr den 40 oder 50 Exempeln bestättigen. Das müssen also insgesammt solche Beobachtungen seyn, wobey GM geometrisch gemessen ist. Sie werden also wohl insgesammt für k eine Zahl geben, die jener sehr nahe kommt; vielleicht ist 4197 Toisen aus allen eine Mittelzahl.

41 §.

Wenn nun in der Gleichung $GM = \frac{k}{m} l \frac{\pi}{p}$ 70F. (35 §. n. 4) die Höhe $k = 4197$ Toisen, und $m = 0,4343$ gesetzt wird, so ist $GM = \frac{4197 \cdot 10000\, l(\pi : p)}{4343}$. Weiter ist $4343 = 4197 + 146$, oder $4197 = 4343 - 146$ beynahe $= 4343 (1 - \frac{1}{30})$, und das giebt $GM = (1 - \frac{1}{30}) \cdot 10000\, l \cdot (\pi : p)$. Herr Bouguer erinnert, daß die Rechnungen aus dieser Regel in der untersten Luftgegend der gemässigten Zone bis auf eine Höhe von 700 bis 800 Toisen nicht so richtige Resultate als in grössern Höhen geben, und das aus dem Grunde, weil der Zustand der Atmospäre in der untern Luftgegend sehr veränderlich, in höhern Gegenden aber mehr beständig sey. Wenn in den niedrigsten Gegenden des gemässigten Erdgürtels der Unterscheid der grösten und kleinsten Barometerhöhe 2 Zoll beträgt, so ist eben diese Differenz in der heissen Zone nur 3 Linien am Ufer des Meeres, zu Quito nur 1 Linie. (Voyage au Perou a. a. O.) In Höhen die grösser als 700 bis 900 Toisen sind, beträgt der Unterscheid höchstens $1\frac{1}{2}$ Linien: (Traité d'Optique p. 319) in solchen Höhen also ist die Atmosphäre bey-

nahe

nahe im unveränderlichen Gleichgewicht, wie die Rechnung voraussetzt. In niedrigen Gegenden, besonders der gemässigten Zone, ist dagegen die Luft fast nie im Gleichgewicht, darum will H. **Bouguer**, man soll nach seiner Formul nicht suchen, wie hoch eine Station, wo die Barometerhöhe ist beobachtet worden, über der Meeresfläche erhaben ist, man soll vielmehr suchen, wie tief sie unter dem steinigten Gipfel des Pichincha liege, dessen Höhe von 2434 Toisen vermittelst geometrischer Messungen ist gefunden worden. Der Barometerstand von 191 Linien daselbst kann als unveränderlich angenommen werden. Diese Vorschrift hat also nichts sonderbares, das befremden könnte, auch ist der Grund davon schon in der Abhandlung Sur les dilatations de l'air dans l'Atmosphere, Memoires de l'Acad. des Sciences A. 1753 angegeben. Ein Exempel, wie die Rechnung geführt werden muß, ist das folgende.

Auf dem Gipfel des Pico auf Teneriffa ist die Höhe des Barometers 209 Pariser Linien beobachtet worden, also setzt man

$$
\begin{array}{rl}
l\,209 = & 2{,}3201463 \\
l\,191 = & 2{,}2810334 \\
\hline
 & 391{,}129 \\
 & -\ 13 \\
\hline
 & 378 \text{ Toisen} \\
\text{Höhe des Pichincha} & 2434 \\
\hline
\text{Höhe d. Pic. auf Ten.} & 2056 \text{ Toisen.}
\end{array}
$$

42 §.

Herr de **Lüc** giebt eine Regel, bey deren Anwendung man schon Mittel kennen muß, bestimmte Grade der Wärme der Luft anzugeben: deßwegen kann ich

ich sie allererst im folgenden Abschnitt vortragen. Hier bemerke ich nur noch, daß die Höhenmessungen mit dem Barometer, wenn man gleich eine völlig scharf zutreffende Regel hätte, dennoch fehlerhaft ausfallen würden, wenn man sich auf die beobachteten Barometerhöhen selbst nicht als völlig richtige verlassen könnte. Um deßwillen hat H. de Lüc sich viele Mühe gegeben, das Barometer selbst zu verbessern, wovon man in seiner schon angeführten Schrift 2te Abth. I. Cap. umständliche Nachrichten antrift. Er führt verschiedene Gründe an, weswegen die wahre Höhe der Quecksilbersäule, welche mit dem Druck der Luft das Gleichgewicht hält, schwerlich scharf genug zu bestimmen ist, wenn das Barometer mit dem Gefäß verbunden ist, dessen Querschnitte beträchtlich grösser, als die Querschnitte der Röhre sind. Er glaubt, wenn alle übrige Vorschrift bey Reinigung des Quecksilbers, bey Ausfüllung der Röhre und s. w. beobachtet werde, so sey es am besten, daß man zum Barometer eine durchgängig gleichweite gebogene Röhre 73F.
ABC wähle, damit das Quecksilber in dem auswärts gebogenen kürzern Schenkel BC allemahl so hoch steige, als es im längern Schenkel AB gefallen ist. Bey dieser Einrichtung muß jeder Schenkel seine eigene Scale haben, und beyde Scalen an einer und eben derselben Horizontallinie DE anfangen. Die Zahlen am längern Schenkel werden alsdenn aufwärts, am kürzern Schenkel aber unterwärts gezählt, und man muß die Zahlen, woran beyde Oberflächen des Quecksilbers stehen, zusammen addiren, um die Entfernung beyder Oberflächen von einander, als die eigentliche Barometerhöhe zu erhalten. Uebrigens muß eine gute Barometerröhre wenigstens zwey bis drey Linien

weit seyn, weil das Quecksilber in engern Röhren nicht so frey steigen und fallen kann.

43 §.

Ein Pariser Cubicfuß Wasser wiegt $70\frac{1}{2}$ Pfund (39 §. Hydrost.) also ein Cubicfuß Quecksilber in eben dem Maaß und Gewicht 987 Pfund. Wenn demnach das Barometer 28 Pariser Zoll hoch steht, so beträgt der Druck der Luft auf die Fläche eines Pariser Quadratfusses 2303 Pfund, auf die Fläche eines Quadratzolles 16 Pfund, und auf eine Kreisfläche von 1 Zoll im Durchmesser $\frac{11}{14} . 16 = 12\frac{4}{7}$ Pfund. Wegen dieses starken Drucks haften die Klocken so fest an den Teller der Luftpumpe, wenn die Luft heraus gezogen ist, daß man selbige nicht, ohne sie zu zerbrechen, davon würde trennen können. Die Gewalt, womit eine solche Klocke gegen den Teller gepreßt wird, findet man leicht aus den angegebenen Zahlen, wenn man nur bemerkt, daß aus dem Druck gegen alle Elemente der Wölbung der Klocke ein Druck senkrecht gegen den Teller entsteht, der so groß ist als der Druck der Luft gegen eine ebene Fläche wäre, die der Grundfläche der Klocke gleich ist. Die Richtigkeit dieses Satzes schließt man leicht aus dem 10 §. der Hydrostatik. Hat die Klocke 6 Zoll im Durchmesser, so wird sie mit einer Gewalt von $36 \times 12 = 432$ Pfund gegen den Teller gepreßt, wenn die innere Luft so weit verdünnt ist, daß ihre Federkraft nicht merklich mehr wirken kann. Ein paar hohle metallene Halbkugeln von gleichen Halbmessern, deren Grundflächen man so an einander setzen kann, daß beyde Ränder gut an einander schliessen, wenn man überdem noch das Eindringen der Luft durch einen da-

zwischen

zwischen gelegten Ring aus nassen Leder abhält, dienen, die Würkung dieses starken Drucks der Luft sinnlich zu zeigen. Wenn eine davon mit einer kurzen Röhre und Hahn versehen ist, die an der Röhre der Luftpumpe festgeschroben werden kann; so haften sie, nachdem die Luft darin soviel möglich verdünnt, und hiernächst der Hahn geschlossen worden, desto fester an einander, je grösser ihr Halbmesser ist. Sie heissen von dem Erfinder der Luftpumpe, der mit ihnen die ersten Versuche anstellte, die Guerikischen Halbkugeln.

Der V. Abschnitt.

Vom Thermometer und dessen Gebrauch.

44 §.

Ein Werkzeug, welches ungleiche Grade der Wärme richtig mit einander zu vergleichen diente, würde mit Recht den Nahmen eines Wärmemessers oder Thermometers führen: es ist aber auch gewöhnlich ein Werkzeug schon so zu nennen, wenn es nur dazu dient, Aenderungen in der Wärme bemerklich zu machen, und uns zu versichern, ein Grad der Wärme, dem das Werkzeug jetzt ausgesetzt ist, sey eben derjenige, dem es ein andermahl ausgesetzt war. Feste und flüssige Massen werden durch die Wärme ausgedehnt, und nehmen bey geringerer Wärme einen kleinern Raum ein. Wäre also bey einer gewissen Masse in der Natur das Gesetz mit Sicherheit bekannt, nach welchem der Raum, den eine bestimmte Menge dieser Masse einnimmt, von der Wärme abhängt, der sie ausgesetzt ist, und könnte man einen Körper aus dieser Masse so verfertigen, daß sich die Aenderung seiner Grösse scharf genug ohne grosse Schwierigkeit messen liesse; so würde derselbe das beste Thermometer abgeben. Bey festen Massen ist die Aenderung des Raums, den sie einnehmen, wenn sie mehr oder weniger erwärmt werden, sehr wenig merklich, indessen hat man metallene Thermometer, die so eingerichtet sind, daß die Aenderung in der Länge einer metallenen Stange durch ein Räderwerk empfindlicher gemacht wird: und wenn sie dienen sollen, sehr grosse Grade der Hitze anzuzeigen, welche die gewöhnlichen bald weiter zu beschreibenden Thermometer nicht ohne Schaden zu nehmen aushalten können, so werden sie auch **Pyrometer** genannt. Den flüßigen Massen hat man beym gemeinen Gebrauch der Thermometer den Vorzug gegeben, theils weil sie von mäßigern Graden der Wärme stärker ausgedehnt werden, theils weil man auch dadurch die Vergrösserung ihres Raums bemerklicher machen kann, daß man sie in enge Röhren einschließt.

45 §.

74 F. Wenn man eine enge gläserne Röhre AB, die unten mit einer Kugel BD, oder statt dessen mit einem cylindrischen Behältniß in Verbindung ist, bis an eine gewisse Stelle F der Röhre mit einer flüßigen Masse füllt, und hierauf die Kugel erwärmet, so steigt die flüßige Masse in der Röhre höher: wird dagegen die Kugel kälter, so fällt die flüßige Masse in der Kugel tiefer herunter. Befestiget man demnach die Kugel auf einer hölzernen, oder metallenen Tafel, so kann man die Stellen bemerken, wie hoch die flüßige Masse in der Röhre bey einer gewissen Wärme der

Kugel

Kugel gestanden hat, und das auf solche Art eingerichtete Werkzeug kann ein Thermometer abgeben. Unter mehrern Arten solcher flüssigen Massen, die man an sich, das Thermometer damit zu füllen wählen könnte, hat doch die eine vor der andern wegen besonderer Ursachen den Vorzug: Quecksilber und Weingeist, sind bisher noch dazu am dienlichsten befunden worden.

46 §.

Cornelius Drebbel aus Alcmar in Nordholland wird gemeiniglich für den Erfinder des Thermometers gehalten, obgleich auch Robert Fludd von einigen als der Erfinder angeführt wird. Das Drebbelsche Thermometer war ebenfalls eine gläserne Röhre mit einer Kugel verbunden, aber die Luft selbst war die flüssige Masse, welche durch ihre mehre oder mindere Ausdehnung die grössere oder geringere Wärme anzeigte. Man erwärmt die noch ledige Kugel mit der Röhre soviel, daß ein Theil der darin befindlichen Luft welche durch die Wärme ausgedehnt wird, heraus tritt, und steckt das offene Ende der so erwärmten Röhre in ein Gefäß mit Wasser, so tritt etwas Wasser in die Röhre, wenn beydes Kugel und Röhre wieder abkühlen. Theils um zu verhüten, daß das Wasser bey starker Kälte nicht zu Eis friere, theils um demselben eine Farbe zugeben, damit es in der engen Röhre desto besser zu erkennen sey, vermischte man es mit Scheidewasser, worin etwas Messing aufgelöset, und dadurch grün gefärbt war. Man suchte alles so einzurichten, daß bey temperirter Luft das Wasser etwa bis an die Mitte der Röhre stand; darauf ward die Röhre mit dem offenen Ende unten in ein kleines mit eben dem Liquor angefülltes Gefäß gesetzet, oder statt dessen die Röhre unten umgebogen und ein kleines Behältniß für den Liquor dran geschmolzen, daß also die Kugel mit Luft am obern Ende befindlich war. Wenn nun die äussere Luft wärmer und dadurch eine Ausdehnung der eingeschlossenen Luft zuwege gebracht ward, so muste der Liquor in der Röhre sinken und im umgekehrten Fall steigen. Weil aber der Druck der äussern Luft auf die Fläche des Liquors im Gefäß bey einerley Wärme bald stärker bald schwächer ist; so hält sich derselbe bey einerley Wärme nicht auf einerley Höhe. Auch wird der Liquor selbst von der Wärme ausgedehnt und von der Kälte verdichtet. Deßwegen hat man dies Drebbelsche Luftthermometer zum gemeinen Gebrauch nicht beybehalten, ob man gleich Luftthermometer verfertigen kann, die dem Fehler des Drebbelschen nicht unterworfen sind. M. s. H. v. Segners Programma de aequandis thermometris aereis Goett. 1739.

47 §.

Dem Drebbelschen Thermometer folgte das Florentinische, welches daher den Nahmen hat, weil die Academie del Cimento zu Florenz dergleichen Thermometer zum Zweck der Witterungs- auch andrer Beobachtungen verfertigen ließ. Die Beschreibung davon stehet in den Tentamin. Academiae del Cimento pag. 2 sqq. der Musschenbroekschen Uebersetzung. Die äussere Gestalt desselben ist die im 45 §. schon beschriebene, und Kugel und Röhre sind mit Weingeist gefüllt. Der Raum zwischen der Kugel und einer am obern Ende der Röhre bemerkten Stelle, wird nach der a. a. O. gegebenen Vorschrift in 100 bey kleinern Thermometern dieser Art nur in 50 gleiche

Theile

Theile getheilt, die man hier Grade nennt: nun soll der Künstler alles so zu proportioniren suchen, daß das in 100 Grad getheilte Werkzeug bey der natürlichen Kälte des Schnees und Eises nicht weniger als 20 Grade, mitten im Sommer aber den Sonnenstrahlen ausgesetzt, nicht über 80 Grade zeige. Das in 100 Grade getheilte zeigt nach der eben daselbst weiter folgenden Erzählung bey der strengsten Winterkälte 16 oder 17 Grad, das in 50 getheilte 11 oder 12, zuweilen obgleich selten 6 oder 8; ferner mitten im Sommer den Sonnenstrahlen ausgesetzt, übersteigt jenes nicht 80, dieses aber erhebt sich entweder gar nicht oder wenig über den 40sten Grad. Ausser diesen beyden brauchte die Academie auch ein grösseres in 300 Grade getheiltes Thermometer, man hatte aber keine sichere Regeln, dergleichen Thermometer mit einander in Uebereinstimmung zu bringen.

48 §.

Herr de Lüc (Untersuch. über die Atmosphäre 2 Abth. 2 Cap. §. 428 a) erzählt, er habe die erste Spur dem Thermometer feste Puncte zu geben in einem Vorschlage des Renaldini (Naturalis Philosophia Patav. 1694. Tom. III. pag. 276) gefunden, weil derselbe schon anräth, an dem Thermometer die Stellen zu bemerken, bey welchen es im Eise und siedenden Wasser stehe, und den Zwischenraum in eine bestimmte Anzahl Theile zu theilen. Bald nachher im Jahr 1701 machte Herr If. Newton (Philosophical Transactions n. 270) sein Thermometer bekannt, welches mit Leinöhl gefüllt war. Die Temperatur des schmelzenden Schnees diente ihm zum Grunde, da wo das Leinöhl hängen bleibt, wenn die

Kugel im ballenden Schnee steht, setzt er die o, und da wo es steht, wenn das Thermometer die Wärme des menschlichen Körpers angenommen hat die Zahl 12, wo es im siedenden Wasser steht, die Zahl 34. Um eben die Zeit war H. Amontons mit Verbesserung der Thermometer und insbesondre des Luft-Thermometers beschäftiget, und weil er bey Eintheilung seiner Scale den Grad der Hitze des siedenden Wassers zum Grunde gelegt hatte; so schreibt man ihm gewöhnlich die erste Bemerkung dessen zu, daß der Grad der Hitze des siedenden Wassers ein beständiger sey, so wie Herrn Newton die Bestimmung der Temperatur des thauenden Eises oder ballenden Schnees als einer beständigen Temperatur.

49 §.

Seit dem Jahr 1709 sind diejenigen Thermometer vornemlich berühmt geworden, die H. Fahrenheit, ein geschickter Künstler aus Danzig gebürtig, verfertigte, und anfangs mit Weingeist, nachher aber wie H. Halley schon im Jahr 1680 vorgeschlagen hatte, mit Quecksilber füllte. Er fand, wenn er Schnee und Salmiaksalz zu gleichen Theilen vermischte, und die Kugel in dies Gemische setzte, daß das Quecksilber in einerley Thermometer allemahl bis auf einerley Stelle fiel, und eben so tief war es bey der grösten Winterkälte im Jahr 1709 zu Danzig gefallen: das letzte hat ihn vermuthlich bewogen, an dieser Stelle die o zu setzen. Ferner setzte er an der Stelle die Zahl 212, wo das Quecksilber im siedenden Wasser stehen bleibt, und wenn dieser Zwischenraum in 212 gleiche Theile getheilt ist, so zeigt das Thermometer 32 Grade für die Temperatur des ballenden Schnees. Ist es der freien Luft ausgesetzt, so zeigt es beym Frostwetter allemahl weniger als 32 Grade, und wenn Thauwetter einfällt, so steigt es über den 32sten Grad. Es ist sicherer bey Verfertigung des Thermometers den so genannten **natürlichen Frostpunct** zu suchen, den das Thermometer im ballenden Schnee zeigt, und den Zwischenraum zwischen diesem und dem Siedepunct in 180 gleiche Theile zu theilen, die alsdenn nach unten gegen die Kugel zu aufgetragen werden können, weil wegen der verschiedenen Güte des Salmiaksalzes der **künstliche Frostpunct** etwas veränderlich ist.

50 §.

Beym höhern Barometerstande nimmt das siedende Wasser etwas mehr Hitze an, als beym niedrigen Barometerstande: deßwegen muß man bey Quecksilber-Thermometern, die vollkommen mit einander übereinstimmen sollen, entweder nur zu solchen Zeiten den Siedepunct suchen, wenn das Barometer in einerley bestimmten Höhe steht, oder man müste ein Mittel haben, aus der bey einer andern Barometerhöhe gefundenen Stelle des Siedepuncts, die Stelle zu finden, die er bey jener ein für allemahl bestimmten Barometerhöhe erhalten hätte. Man nehme mit Herrn de Lüc (a. a. O. 2 Abtheil. 2 Cap. §. 451 d.) die Barometerhöhe von 27 Pariser Zoll für diejenige zum Grunde, nach welcher der Siedepunct eines guten Thermometers regulirt seyn muß, und nenne den Abstand des natürlichen Frostpuncts vom Siedepunct, der bey der Barometerhöhe von 27 Zollen bestimmt wird, den **Fundamental-Abstand**. Die Zahl der Linien, um welche die Barometerhöhe zur Zeit, da man den Siedepunct sucht, von 27 Linien verschieden ist, sey $= n$, der beobachtete Abstand des derzeitigen Siedepuncts vom natürlichen Frostpunct $= d$. Wenn nun die Barometerhöhe $= 324 + n$ Linien ist, so giebt die Formul $\frac{n}{1134+n} . d$ an, um wieviel der gesuchte Siedepunct niedriger als der beobachtete liegt: wenn dagegen die Barometerhöhe $324 - n$ Linien ist, so zeigt die Formul $\frac{n}{1134-n} . d$ an, um wieviel der gesuchte Siedepunct höher liegt, als der beobachtete.

Der natürliche Frostpunct muß eigentlich im fallenden Schnee oder zerstossenen thauenden Eise gesucht werden, so hat es auch *de Bergen* in Comment. de Thermometris mensurae constantis Norib. 1757 u. a. m. vorgeschrieben, welches H. de Lüc ebenfalls erfodert.

51 §.

Wenn das Fahrenheitsche Thermometer nach diesen Vorschriften verfertiget ist, so zeigt es 32 Grad bey angehenden Frost- oder Thauwetter, nachdem es beym fallen oder Steigen diese Gränze erreicht. Die Luft ist leidlich temperirt, wenn es 48 Grad zeigt, beym 60sten Grad fängt die Sommerwärme an, und es ist auch im Winter die Temperatur von 60 bis 66 Grad für die eingeheizten Zimmer der Gesundheit am zuträglichsten. Eben diese Wärme erfordern die Orangenbäume im Winter, und man muß es auch in Krankenzimmern nicht über 66 Grad steigen lassen. Bey einer Wärme von 72 Graden brüten die Seidenwürmer aus, und in den hiesigen Gegenden erreicht es bey der grösten Sommerhitze nicht leicht einen

nen höhern als den 84sten oder 86sten Grad. Die natürliche Wärme des Bluts gesunder Menschen und Thiere beträgt 96 Grad, zur Ausbrütung der Hühner-Eyer wird eine Wärme von 100 Graden erfordert, und eine grössere Wärme müssen auch warme Bäder nicht haben, ob man gleich im Wasser, wenn es bis zu 124 Grad erhitzt ist, noch ohne Verletzung die Hand halten kann. Bey einer Wärme von 140 Graden schmeltzt Wachs, und eine Hitze von 180 Graden bringt rectificirten Weingeist zum kochen.

52 §.

Im Jahr 1730 machte H. von Reaumur sein Thermometer in den Memoires de l'Acad. de Paris bekannt, das mit Weingeist gefüllt ist: den Weingeist schwächte H. v. Reaumur mit einem Theil Wasser, gegen fünf Theile Weingeist damit er einen höhern Grad der Hitze ausgesetzt werden könne, weil der reine Weingeist, wenn er Pulver zündet, bey einer solchen Hitze schon zu kochen anfängt, die nach dem Fahrenheitschen Thermometer 180 Grad beträgt. Er sucht den höchsten Punct seiner Scale dadurch, daß er das Thermometer der Hitze des siedenden Wassers aussetzt, und der Frostpunct soll nach seiner Absicht an der Stelle bemerkt werden, welche das Thermometer zeigt, wenn es der zum Gefrieren des Wassers hinreichenden Kälte ausgesetzt ist. Er findet, daß die Grösse des Raums, den sein geschwächter Weingeist bey der zuletzt erwehnten Temperatur einnimmt, zur Grösse des Raums, den er einnimmt, wenn er im Begriff stehet, zu kochen, sich wie 1000 zu 1080 verhalte, und um deßwillen theilt er den Zwischenraum zwischen seinem so gefundenen Frost-

und

und Siedepunct in 80 gleiche Theile. Man hat nach der Zeit unter dem Nahmen Reaumûrischer auch Queckſilber-Thermometer mit einer ſolchen Scale verfertiget, die zwiſchen dem natûrlichen Froſtpunct und dem Punct des ſiedenden Waſſers 80 gleiche Theile haben, und es iſt nun faſt allgemein durch den Gebrauch eingeführt, daß man ſolche Thermometer auch Reaumûriſche nennt: allein wenn auch beyde der Froſt- und Siedepunct am ächten Reaumuriſchen Thermometer völlig ſo wie am Queckſilberthermometer wären, ſo würden beyde doch ſchon um deswillen nicht durchgängig übereinſtimmen können, weil Queckſilber, und der nach Reaumurs Vorſchrift geſchwächte Weingeiſt, nicht nach einerley Geſetz von der zunehmenden Wärme ausgedehnt werden. Ueberdem hat nun H. de Lüc in den mehrmahls angeführten Unterſuchungen über die Atmoſphäre aus mühſam angeſtellten Vergleichungen bewieſen, daß Hr. Reaumur nicht genau eben denſelben Froſtpunct und noch viel weniger, eben denſelben Siedepunct an ſein Thermometer gebracht habe, nach welchen das Fahrenheitſche Thermometer regulirt wird.

53 §.

Seit dem Jahr 1733 iſt das Thermometer des H. de l'Isle bekannt: (M. ſ. die Memoires pour ſervir a l'hiſtoire et au progres de l'Aſtronomie et de la Geographie etc. par M. de l'Isle a St. Petersb. 1738. p. 267) es iſt ein Queckſilberthermometer wie das Fahrenheitiſche, es wird der Hitze des ſiedenden Waſſers ausgeſetzt, und an der Stelle, die das Queckſilber im ſiedenden Waſſer zeigt, wird die 0 geſetzt. Ferner bey einer andern Temperatur ſoll nach

des

des Erfinders Absicht der Thermometer jedesmahl zeigen, um wieviele Zehntausendtheilchen seiner Masse das mit dem siedenden Wasser gleich stark erhitzte Quecksilber von einer Wärme verdichtet werde, die geringer als die Hitze des siedenden Wassers ist: darum werden an diesem Thermometer die Grade vom Siedepunct nach unten gegen den Frostpunct, und vom Frostpunct weiter gegen die Kugel zu gezählt. Wieviele Grade also das Delislische Thermometer zeigen müsse, wenn es der Kälte des thauenden Eises, oder ballenden Schnees ausgesetzt ist, das hängt von der richtigen Bestimmung des Verhältnisses zwischen den Räumen ab, die einerley Masse Quecksilber in der Hitze des siedenden Wassers und der Kälte des thauenden Eises einnimmt. Gemeiniglich nimmt man an, dies Verhältniß sey 10000 : 10000 – 150, daß also beym natürlichen Frostpunct die Zahl 150 stehen muß: nach andrer Bestimmung muß es die Zahl 153 oder 154 seyn. Weil die drey Scalen, die **Fahrenheitische, Reaumürsche** und **Delislische**, bey Witterungsbeobachtungen am meisten gebraucht werden, so gereicht es zu mehrerer Bequemlichkeit, wenn man sie auf der Tafel des Thermometers alle drey neben einander verzeichnet, wie es die 74ste Figur vorstellet, ob man gleich sonst auch durch eine sehr leichte Rechnung die Grade der einen Scale in Grade der andern Scale verwandeln kann. Die gemeinen Regeln, wie man Grade des einen Thermometers in Grade des andern verwandeln soll, gelten nur für das sogenannte Reaumürische, wenn es ein Quecksilber-Thermometer ist, und zwischen dem Frost- und Siedepunct 80 Grade hat. Mehr Nachrichten von Vergleichung der Quecksilber- und Wein-

geist-

geist-Thermometer unter einander findet man beym Hn. de Lüc, und in Hn. Strohmeyers Anleitung übereinstimmende Thermometer zu verfertigen. Gött. 1775.

54 §.

Weil die Wärme das Quecksilber ausdehnt, so ist bey grösserer Wärme die Barometerhöhe grösser, und bey weniger Wärme kleiner, wenn gleich die Federkraft der gegen das Quecksilber pressenden Luft einerley bleibt. Eine bey der Temperatur des thauenden Eises 27 Zoll lange Quecksilbersäule wird um 6 Linien länger, wenn sie bis zur Hitze des siedenden Wassers erwärmt wird. (de Luc a. a. O. 364. 369. §.) Wird also ein Quecksilberthermometer, das die Temperatur des thauenden Eises zeigt, wenn das Barometer 27 Zoll hoch steht, so weit erwärmt, daß es um den sechsten Theil des Fundamentalstandes steigt, so steigt bey unverändertem Druck der Atmosphäre das Barometer um eine Linie. In einer höhern Luftgegend, wo zu eben der Zeit das Borometer bey der Kälte des thauenden Eises $13\frac{1}{2}$ Zoll hoch steht, würde die Aenderung der Barometerhöhe nur halb soviel, als $\frac{1}{2}$ Linie betragen, wenn das Thermometer um den sechsten Theil des Fundamentalabstandes stiege. Ueberhaupt kann man annehmen, bey gleicher Aenderung der Wärme sey das Verhältniß der Aenderungen in der Länge von zwo Quecksilbersäulen einerley mit dem Verhältniß ihrer Längen.

55 §.

Man theile den Funbamental-Abstand am Quecksilber-Thermometer in 96 gleiche Theile, so steigt bey unverändertem Druck der Atmosphäre das Barometer

rometer um $\frac{1}{16}$ Linie, wenn das Thermometer um $\frac{1}{96}$ des Fundamental-Abstandes steigt. Man nehme die Dichtigkeit des Quecksilbers für den Grad der Wärme als bekannt an, den das Thermometer angiebt, wenn es um $\frac{1}{8}$ des Fundamentalabstandes höher als der Frostpunct steht. An dieser Stelle des Thermometers setze man 0, so hat man bis zum Siedepunct 84, und bis zum Frostpunct 12 Grade unter 0, die man als negativ in der Rechnung annehmen kann. Nach der Erfahrung des H. de Lüc gehören also zusammen:

Grade des Thermometers.	Höhe des Barometers.
-12	$27''$
0	$27'' + 12 . \frac{1}{16}'''$
$+m$	$27'' + (12+m) . \frac{1}{16}'''$

man kann aber auch ohne merklichen Fehler annehmen, daß statt dessen zusammen gehören

mit Graden des Thermometers	die Höhen des Barometers	
-12	$27'' - 12 . \frac{1}{16}'''$	
0	$27''$	$a'' - x . \frac{1}{16}'''$,
$+m$	$27'' + m . \frac{1}{16}'''$	a''

Denn eine Quecksilbersäule von $27'' - 12 . \frac{1}{16}'''$ oder $26\frac{15}{16}''$ verlängert sich beym Wachsthum der Wärme bis zum 84sten Grad um $\frac{26\frac{15}{16}}{27} . 6$ Linien oder um 5,9962 Linien.

Wenn nun bey m Grad Wärme die beobachtete Barometerhöhe in Zollen ausgedrückt $= a$ ist, und man will wissen, wie hoch das Barometer bey 0 Grad Wärme stehen würde, so sey die gesuchte Höhe $=$ a Zoll $- x . \frac{1}{16}'''$, und man erhält

$$27'' + m . \tfrac{1}{16}''' : a = m . \tfrac{1}{16}''' : x . \tfrac{1}{16}'''.$$

also

$$\text{also } x = \frac{a''}{27'' + m\frac{1}{16}'''} \cdot m,$$

$$\text{oder } x = \frac{a''}{27'' + m\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{12}''} \cdot m = \frac{\frac{1}{27} \cdot a''}{1 + \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{12} m} \cdot m.$$

Weil nun m nie grösser als 84 seyn kann, so ist $\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{12} m$ nie grösser als $\frac{1}{27} \cdot \frac{7}{16}$ oder ohngefehr $\frac{1}{62}$: mithin bleibt für jeden Werth m sehr nahe $x = \frac{a''}{27''} \cdot m$, und die reducirte Barometerhöhe ist $a'' - \frac{a''}{27} \cdot m \cdot \frac{1}{16}'''$.

56 §.

Wenn die Barometerhöhe in der untern Station 29″ in der obern 28″ 11‴ beträgt, und zwischen beyden Stationen eine Wärme von $16\frac{3}{4}$ Graden des Quecksilberthermometers mit der Reaumürschen Scale herrscht; so ist nach den Erfahrungen des H. de Luc die Höhe der einen Station über der andern 12,497
70F. Toisen. Man setze also im 38 §. n. 2. die Höhe $GM = 12{,}497$ $\pi = 29'' = 348'''$, $p = 347'''$, so erhält man $\frac{CH}{l(a:q)} = \frac{12{,}497}{l(348:347)}$. Es ist aber

$$l\,348 = 2{,}5415792$$
$$l\,347 = 2{,}5403295$$
$$l(348:347) = 0{,}0012497,$$

also findet man $\frac{CH}{l(a:q)} = \frac{124970000}{12497} = 10000$, und daher ferner $GM = 10000 \cdot l(\pi:p)$.

Bey geringerer Wärme als der von $16\frac{3}{4}$ Grad des Quecksilberthermometers mit der Reaumürschen Scale ist jede von den Luftschichten, mit deren äussern Gränzen einerley Barometerhöhe zusammen gehört, niedriger

niedriger, als jene Rechnung voraussetzt, bey grösserer Wärme aber höher, und H. de Lüc schließt aus seinen Erfahrungen: man müsse für jeden Grad des Quecksilber-Thermometers mit der Reaumürischen Scale $\frac{1}{215}$ der nach jener Regel gefundenen Höhe bey geringerer Wärme als der von $16\frac{3}{4}$ Grad abziehen, bey grösserer Wärme aber zusetzen. Die beobachteten Barometerhöhen, werden nach der Regel des 55 §. zuförderst reducirt, und die reducirten Höhen in Rechnung gebracht; und wenn die Wärme in der obern und untern Station nicht einerley ist, so wird bey Berechnung der Verbesserung aus beyden Zahlen, welche das Quecksilberthermometer mit der Reaumürschen Scale oben und unten anzeigt, ein arithmetisches Mittel genommen.

Auf dem St. Petri Thurm zu Genf ward die Barometerhöhe von 321,18 Linien unten am Fuß desselben von 323,87 Linien bey einer Wärme von $8\frac{1}{2}$ Grad oder $(16\frac{3}{4} - 8\frac{1}{4})$ Grad beobachtet, also giebt die Rechnung

$$l\,323{,}87 = 2{,}5103707$$
$$l\,321{,}18 = 2{,}5067485$$

die unverbesserte Höhe $= 36{,}222$ Toisen.

Diese mit $\frac{8\frac{1}{4}}{215} = \frac{33}{860}$ multiplicirt giebt 1,3899 Toisen, also ist die verbesserte Höhe 34,8321 Toisen, 208,9926 Fuß. H. de la Lande hat dies Exempel in der Connoissance des mouvemens celestes A. 1765, pag. 215. 216; er findet bey einer nicht völlig so scharfen Rechnung 210 Fuß, und setzt hinzu, diese Höhe sey nur um 5 Zoll von der wirklich gemessenen verschieden.

Der VI. Abschnitt.

Vom Manometer und Hygrometer.

57 §.

Ein Manometer heißt ein Werkzeug, welches dazu dient, die Veränderungen in der Dichtigkeit der Luft anzuzeigen. Otto v. Guericke hat ein solches Werkzeug angegeben, und solches an Caspar Schotten im Jahr 1661 mitgetheilt, der es in seiner Technica curiosa Lib. I. Cap. 21. pag. 45 bekannt machte, woselbst auch pag. 47-58 Guerikens zwey Briefe abgedruckt sind. Man läßt eine hohle
77F. Kugel M aus dünn geschlagenen Kupferblech verfertigen, die wenigstens 1 Fuß im Durchmesser hat. Um mit Sicherheit das Gewicht von soviel Luft, als den Raum der Kugel füllet, für den Zustand derselben zu erfahren, worin sie sich zur Zeit der Verfertigung des Manometers befindet, kann man zuerst die noch mit Luft gefüllte Kugel wägen, hiernächst die Luft auspumpen, in welcher Absicht sie mit einem Hahn oder Ventil versehen seyn muß, darauf aber die von Luft ausgeleerte Kugel von neuen wegen. Hahn oder Ventil werden nachher fest verküttet oder zugeschmolzen, weil man dem blossen Verschliessen mit dem Hahn in die Länge nicht trauen darf. Wenn man gleich Luft wieder in die Kugel lassen wollte, welches an sich den Gebrauch des Instruments nicht hindern würde, so müste doch die innere Luft mit der äussern keine Gemeinschaft haben. Die so gegen den Zugang der äussern Luft verwahrte Kugel M hängt man an dem einen Arm eines schnellen Wagebalkens AB auf, und bringt

sie mit einem Gegengewicht N ins Gleichgewicht. Wird nun die Luft dünner als sie vorher war, so giebt die Kugel den Ausschlag, im Gegentheil aber das Gegengewicht, wenn die Luft dichter wird. (30 §. Hydrost.) Das Gegengewicht muß so klein seyn, als sich thun läßt.

58 §.

Um zu erfahren, wieviel die Vermehrung oder Verminderung der Dichtigkeit der Luft jedesmal betrage, müste man durch zugelegte Gewichte das Gleichgewicht der Wage wieder herstellen: allein man kann sich dieser Mühe durch folgende Einrichtung überheben. Oben an der Scheere, worin die Zunge des Wagebalkens spielt, wird ein Kreisbogen angebracht, dessen Mittelpunct in den Bewegungspunct des Wagebalkens fällt, so daß die Zunge selbst einen beweglichen Halbmesser desselben abgiebt. Wenn nun dieser Bogen in seine Grade und Minuten gehörig abgetheilt wäre, so daß der Anfang der Abtheilungen zu beyden Seiten in die Verticallinie fiele; so würde die Spitze der Zunge jedesmahl die Grösse des Winkels zeigen, um welche die Zunge von der Verticallinie abweicht, und man könnte aus diesem Winkel das Uebergewicht durch Rechnung finden, (90 §. Stat.) wenn die Abmessungen der Wage genau bekannt wären. Sicherer aber findet man durch Versuche, wie groß der Winkel sey, um welchen die Zunge von der Verticallinie abweicht, wenn man ein kleines Gewicht auf der einen oder der andern Seite zulegt. Solcher Gewichte kann man nach und nach mehrere zulegen, und jedesmahl bemerken, wie weit die Zunge abweicht, bis der gröste Ausschlag erfolgt, der vermuthlich statt finden kann. Uebrigens muß nicht allein die Barometerhöhe sondern auch der Grad der Wärme für den Zustand der Luft angemerkt werden, worin sie sich damahls befand, als das Manometer regulirt ward.

59 §.

Guerike und Boyle hatten die Eigenschaften dieses Manometers von den Eigenschaften des Barometers noch nicht hinlänglich unterschieden, wie denn auch Boyle es ein statisches Barometer nennt: Varignon aber hatte die Absicht, ein eigentliches Manometer anzugeben, wovon man in den Memoires de l'Acad. Royale des Sciences A. 1705 und in den Actis Eruditorum Lipſ. A. 1707 p. 306. 307 die Beschreibung antrift. Allein Varignons so genanntes Manometer ist das nicht, was es nach seiner Absicht seyn sollte. Es hat alle Aehnlichkeit mit dem Drebbelschen Thermometer, nur ist statt der Drebbelschen Kugel die Luft hier in einem gläsernen Cylindrischen Gefäß eingeschlossen, und statt der graden Drebbelschen Röhre befindet sich daran eine krummgebogene Röhre, die an dem äussersten aufwärts gebogenen Ende mit einem andern Gefäß zusammen hängt, worin, so wie in einem Theil der Röhre ein Liquor wie im Drebbelschen Thermometer befindlich ist. Nun breitet sich die Luft bald in einen grössern bald in einen geringern Raum aus, und wenn man diesen Raum messen, und mit demjenigen vergleichen kann, den die Luft zu der Zeit einnahm, als das Instrument verfertiget ward, so läßt sich freilich dadurch die jedesmahlige Dichtigkeit der eingeschlossenen Luft finden. Aber diese ist nicht allemahl mit der Dichtigkeit der äussern Luft einerley, wenigstens darf man das nicht mit Sicherheit voraussetzen: darum leistet das Instrument seiner Absicht kein Genüge.

60 §.

Die Dichtigkeit der Luft nahe an der Erdfläche wird vornemlich von dreyerley Ursachen geändert: 1.) vom Gewicht der darauf drückenden höhern Luft, 2.) von der Wärme oder Kälte, 3.) von den aus der Erde aufsteigenden Dünsten, die sich mit der Luft vermischen. Die meisten Dünste gehören in die Classe der wässerichten, sie sind nichts anders als aufgelöstes Wasser, und fallen in Gestalt des Thaues, Regens, Schnees, u. s. f. wieder herunter. Schon lange ist man darauf bedacht gewesen, ein Werkzeug ausfindig zu machen, vermittelst desselben man erfahren könnte, wieviel feuchte Dünste mit einer bestimmten Menge Luft zu gewisser Zeit vermischt sind: man hat es unter dem Nahmen eines Hygrometers auf mancherley Art verfertiget, und ob man gleich Hygrometer zuwege gebracht hat, die wenigstens eine zeitlang ohne zu sehr wandelbar zu werden, eine mehrere oder mindere Feuchtigkeit der Luft, welcher sie ausgesetzt sind, anzeigen, so sind sie doch noch immer von der gesuchten Vollkommenheit sehr entfernt geblieben. Nur vor wenigen Jahren hat H. Lambert diejenige Art der Hygrometer zu grösserer Vollkommenheit gebracht, woran die Hauptsache ein Stück von einer Darmsaite ist, die von der Feuchtigkeit aufschwillet und sich zugleich aufdrehet, umgekehrt aber wieder zusammen läuft, wenn sie trockner wird. Man hängt das obere Ende an einem kleinen Gestelle auf, beschwert das untere mit einem nur so schweren Gewicht, als nöthig ist, die Seite grade zu ziehen, und bringt unten einen Zeiger an, der sich mit der Seite vor und rückwärts umdrehet, nachdem sich die Feuchtigkeit der Luft ändert. Ueberdem bringt man eine wagrecht liegende Scheibe so an, daß entweder die Saite selbst durch eine in ihrem Mittelpunct befindliche so grosse Oefnung hindurch gehet, als nöthig ist, damit die Saite sich frey aufdrehen und wieder zusammen laufen kann, oder so, daß die lothrecht herab hängende Saite auf den Mittelpunct der Scheibe zutrift. Wenn nun der Umfang der Scheibe wie sonst gewöhnlich ein Kreis in 360 Grade getheilt ist, so dient diese Eintheilung, die Grösse des Winkels anzugeben, um welchen sich der Zeiger jedesmahl gedrehet hat, wenn die Luft feuchter oder trockener geworden ist, als sie vorher war.

61 §.

Man hieng sonst die Saite in einem kleinen Gehäuse mit zwoen neben einander befindlichen Oefnungen auf, befestigte am untern Ende eine leichte hölzerne Scheibe in ihrem Mittelpunct, die sich also mit der Saite zugleich drehen muste, an den beyden äussersten Enden eines ihrer Durchmesser stellte man ein Paar aus Schmelzarbeit verfertigte menschliche Figuren, die eine mit einem Regenschirm versehen an der Stelle, die bey feuchter Luft aus der einen Oefnung beym Aufdrehen der Saite zum Vorschein kam, die andre ohne Schirm, welche die bey trockener Luft zusammen laufende Saite aus der andern Oefnung heraus führte. Dabey aber hatte man keine sichere Regeln, wie Länge und Dicke der Saite sich gegen einander verhalten musten, wenn zwey verschiedene Hygrometer dieser Art mit einander übereinstimmen sollten: auch wuste man nicht, wie lang die Saite bey gegebener Dicke seyn müsse, damit sie von der grösten Feuchtigkeit bis zur grösten Trockenheit der Luft nur einen, oder doch eine gegebene Zahl von Umläufen

läufen mache. Herr Lambert hat darüber sehr mühsame Versuche angestellt, und sein Verfahren mit den Resultaten der Versuche in zwoen besondern Abhandlungen: Essai d'Hygrometrie ou sur la mesure de l'humidité, und: Suite de l'Essai d'Hygrometrie, beschrieben. M. s. die Histoire de l'Acad. Royale des Sciences de Prusse Tom. 25. A. 1769. p. 68 sqq. und Nouveaux Memoires pour l'Année 1772, pag. 65 sqq. Beyde Abhandlungen hat man auch in einer zu Augsburg in den Jahren 1774 und 1775 herausgekommenen deutschen Uebersetzung, unter dem Titel: Herrn Professor Lamberts Hygrometrie, oder Abhandlung von den Hygrometern, und: Fortsetzung der Hygrometrie u. s. w.

62 §.

Die Zahl der Umdrehungen, welche eine mit dem Zeiger am Hygrometer versehene Saite macht, wenn der Zustand der Luft sich von der größten Trockenheit bis zur größten Feuchtigkeit ändert, und überhaupt der Winkel, durch welchen sich der Zeiger bey einerley Veränderung der Feuchtigkeit drehet, hängt beydes von der Länge und Dicke der Saite ab. Wenn man voraussetzt, daß die Saiten auf einerley Art gemacht und von gleicher Güte sind, so kann man folgende zwey Regeln bey Verfertigung der Hygrometer zum Grunde setzen, von deren Uebereinstimmung mit der Erfahrung H. Lambert sich durch Versuche versichert hat.

Bey gleicher Dicke der Saiten zweyer Hygrometer verhalten sich die Winkel, um welche sich die Zeiger bey einerley Veränderung der Feuchtigkeit drehen, wie die Längen der Saiten: bey gleicher Dicke der

Saiten aber umgekehrt wie die Dicke oder Durchmesser der Saiten. Bey ungleicher Länge und Dicke der Saiten verhalten sich also diese Winkel wie die Längen mit den dazu gehörigen Durchmessern dividirt.

63 §.

Die Feuchtigkeit der Luft hat schon einen merklichen Einfluß auf ein Stück von einer Darmsaite, wenn es nur einen oder wenige Zolle lang ist: daher kann das Hygrometer sehr einfach seyn, wie diejenigen, welche H. Lambert bey seinen Versuchen gebraucht hat, und doch alle Dienste leisten, die man davon erwartet. Eine kleine Scheibe aus Pappe oder leichtem dünnen Holz, die auf drey Füssen ruhet, welche von Eisendrath gemacht sind, dient dem Werkzeug zum Fußgestelle. Ein andrer Eisendrat, der wie eine Schraube gewunden ist, wird über der Mitte jener Scheibe in verticaler Stellung befestiget, damit er oben eine andre Scheibe aus Pappe oder Kartenpapier tragen kann, die in ihre Grade getheilt ist, und in der Mitte grade über der Mitte der untern Scheibe eine Oefnung hat. Durch dies Loch und den innern Raum des schraubenförmigen Drats stecke man eine Darmsaite hindurch, befestige sie da, wo sie die Mitte der untern Scheibe trift, mit Siegellack, lasse sie oben nur soweit über der obern Scheibe hervorragen, daß auf ihrem obern Ende ein kleiner Zeiger aus leichtem Holz mit Siegellack befestiget werden kann: so ist das Hygrometer fertig.

Wenn man den Graden der eingetheilten Scheibe die Zahlen in der Ordnung, wie an einer Uhrscheibe die Stunden- und Minutenzahlen, beyfügt; so drehet sich der Zeiger bey zunehmender Feuchtigkeit rückwärts,

wärts, und zeigt weniger Grade bey feuchter als trockner Luft: weil nun das Werkzeug ein Feuchtigkeitsmesser seyn soll; so ists wohl natürlicher, die Zahl der Grade in einer solchen Ordnung beyzufügen, die der vorhin erwähnten entgegen gesetzt ist, damit mehr Grade des Hygrometers auch mehr Grade der Feuchtigkeit anzeigen. In dieser Ordnung hat auch Herr **Lambert** den Graden seiner ersten Hygrometer die Zahlen beygefügt. (Hygrometrie 28 §.) Nachher aber ist er davon wieder abgegangen, und hat bey andern Hygrometern die Zahlen in der Ordnung wie an einer Uhrscheibe beygefügt, da dann mehr Grade des Hygrometers eben soviel weniger Grade der Feuchtigkeit anzeigen. (Fortsetzung der Hygrometrie 4 S. der Uebers.) Ich hätte lieber die erste Einrichtung beybehalten, indessen macht auch Herr **Brander** in Augsburg bey seinen Hygrometern, die er nach Herrn Lamberts Grundsätzen verfertiget, die Einrichtung eben so. Das Titelkupfer zu der oben angeführten Uebersetzung der Hygrometrie ist eine Abbildung des Lambert-Branderschen Hygrometers, wovon sonst keine weitere Beschreibung gegeben wird. Die Grade sind daran in der Ordnung, wie an einer Uhrscheibe gezählt, welches um deßwillen wenigstens einigen Lesern hat Anstoß verursachen müssen, weil es nicht mit der 12ten Lambertschen Figur in den beygefügten Lambertschen Kupfertafeln übereinstimmt, auch die ins deutsche übersetzte Fortsetzung der Hygrometrie allererst im Jahr 1775 nachgefolgt ist.

64 §.

In ein gläsernes cylindrisches Gefäß, wovon der innere Raum 39 Cubiczoll 588 Cub. Lin. Pariser Maaß faßte, setzte H. Lambert ein Hygrometer, wovon die Seite $33\frac{1}{2}$ Pariser Linien lang, die Dicke aber $\frac{38}{100}$ Paris. Linie war. In eben das Gefäß ward eine gläserne Phiole voll Wasser gesetzt, die einem Thermometerglase ganz ähnlich war; die Kugel davon hatte $14\frac{1}{2}$ Linien, die $37\frac{1}{2}$ Linien lange Röhre aber 3 Linien im Durchmesser, und an der Röhre war eine in Linien getheilte Scale angebracht. Darauf ward das gläserne Gefäß mit einer Glasscheibe bedeckt, und die Fuge ringsherum mit Wachs verschlossen, damit alle Gemeinschaft mit der äusserlichen Luft dadurch verhindert würde. Nun wartete H. Lambert soviele Tage nach einander ab, bis 6 Linien Wasser aus der Phiole ausgedünstet waren, und sich mit der eingeschlossenen Luft vermischt hatten: während der Zeit hatte der Zeiger des Hygrometers 610 Grade durchlaufen. An einer Saite von eben der Dicke und 12,6 Linien Länge hätte demnach der Zeiger nur $\frac{12{,}6}{33\frac{1}{2}}.610$, oder 229 Grad durchlaufen. (62 §.) Nun findet man den Inhalt eines Cylinders von 6 Linien Höhe und 3 Linien im Durchmesser $= \frac{1}{4}\pi . 9 . 6 = 42{,}41$ Cub. Linien, und 1 Paris. Cub. Zoll oder 1728 Cubiclinien Wasser wägen 311,55 Gran: (39 §. Hydrost.) mithin ist das Gewicht von 42,41 Cubiclinien $= \frac{311{,}55}{1728} . 42{,}41 = 7{,}646$ Gran. Die eingeschlossene Luft füllte einen Raum von 39 Cub. Zoll 588 Cub. Lin. weniger den Raum, den die Phiole mit Wasser einnahm, dessen Inhalt, nachdem 6 Linien Wasser ausgedunstet waren, 1 Cub. Zoll 56 Cubiclinien betrug: also füllte die feuchte Luft einen Raum von $38\frac{133}{432}$ Cub. Zoll, und ihr Gewicht war um 7,646 Gran vermehrt. Setzt man nun an

38,3078 C. Z. : 1728 C. Z. = 7,646 Gran zur vierten Zahl, so findet man, daß ein Cubicfuß Luft in eben dem Verhältniß um 344 Gran wäre schwerer geworden.

Aus dem Versuch und der darauf gegründeten Rechnung folgt also: Wenn die Saite des Hygrometers $\frac{38}{100}$ einer Linie dick, und 12,6 Linien lang ist; so durchläuft der Zeiger 229 Grade, indem das Gewicht eines Cubicfusses Luft um 344 Gran zunimmt. Indem also der Zeiger um 2 Grad fortrückt, wächst die Feuchtigkeit der Luft in einem Cubicfuß Luft um 3 Gran.

65 §.

Das auf dem Titelkupfer zur vorhin angeführten Uebersetzung von Herrn Lamberts Hygrometrie abgebildete Branderische Hygrometer soll 3 Gran mehr oder weniger Feuchtigkeit in einem Cubicschuh Luft anzeigen, nachdem der Zeiger 2 Grad mehr nach der feuchten oder trockenen Seite rückt. Die Länge der hiezu dienlichen Saite bey einer gegebenen Dicke liesse sich also aus den bisher vorgetragenen Gründen durch Rechnung finden. H. Lambert hat ein der freyen Luft ausgesetztes Hygrometer eine Zeitlang beobachtet, wovon die Saite $\frac{38}{100}$ Linie dick und 12 Linien lang war: dies stand am 28 May 1769, als die Luft so trocken war, daß die Dinte nicht nur auf dem Papier, sondern auch in der Feder plötzlich vertrocknete, auf dem 270sten Grad der Scheibe. Zur andern Zeit, als die Feuchtigkeit der Luft sich sehr merklich an die Mauern, die Leinwand und das Papier anhängte, zeigte es 0 Grad, und unter diesem Grad hat es Herr Lambert nie gesehen. Den Gründen des vor. §. gemäß würden 219 Grade dieses Hygrometers eine

Ver-

Vermehrung von 344 Gran Feuchtigkeit in einem Cubicfuß Luft anzeigen, also 270° eine Vermehrung von 422 Gran. Wenn nun die leichteste Luft 1000 mahl leichter als Wasser ist. (*Musschenbroek* Introd. ad Phil. Natur. T. II. §. 2059.), und ein Pariser Cubicfuß Wasser 538200 Gran wiegt; (39 §. Hydrost.) so wiegt ein Cubicfuß der leichtesten Luft 538 Gran, also nach H. Lamberts Erfahrung ein Cubicfuß der feuchtesten Luft 538 + 422 oder 960 Gran, und diese Luft wäre $\frac{53820}{96}$mahl oder 560mahl leichter als Wasser. Das weicht von Musschenbroeks Bestimmung a. a. O. nicht sehr ab, der die Zahl 606 angiebt.

H. Brander verfertiget jezt Hygrometer, wovon der Zeiger vom Zustande der grösten Feuchtigkeit der Luft bis zu ihrem trockensten Zustande mehr als einen Umlauf macht. Ihre Einrichtung ist so, wie die am Ende des 60 §. schon beschriebene. Die ganze Scheibe ist in 90 gleiche Theile getheilt, und wenn der Zeiger um 2 solche Theile fortrückt, so zeigt das ebenfalls 3 Gran Vermehrung oder Verminderung der Feuchtigkeit in einem Cubicschuh Luft an. Der Winkel um welchen sich der Zeiger bey einerley Aenderung der Feuchtigkeit drehet, ist 4mahl grösser, als am vorhin beschriebenen Hygrometer. An einem kleinen Brett, wie man es zur Scale eines Thermometers braucht, befindet sich oben ein kleiner hervorragender Arm, woran die Saite herab hängt, wenn man das ganze wie sonst ein Thermometer an der Wand aufhängt. Unten an der Saite hängt, ein kleiner messingener Cylinder mit dem Zeiger, der von der Saite gedrehet wird; an dem kleinen Cylinder ist ein Faden befestiget, der hinten am Bret über eine kleine messingene Rolle geführt ist, und an dem Faden hängt ein kleines

kleines Gewicht, welches dazu dient, die Umläufe zu zählen, die der Zeiger gemacht hat. Der Faden wickelt sich auf den Cylinder auf, und zieht das hinten am Brett herab hängende Gewicht in die Höhe, wenn der Zeiger gegen die trockene Seite rückt: im umgekehrten Fall wickelt sich der Faden vom Cylinder ab und das Gewicht sinkt. Hinten am Bret sind vier wagrechte Linien als Merkmahle der Tiefen gezogen, wieweit das Gewicht nach dem ersten, zweyten, dritten und vierten Umlauf des Zeigers gegen die feuchte Seite herab gesunken, oder in umgekehrter Ordnung wieder gestiegen ist.

66 §.

Um ein solches Hygrometer recht nützlich zu machen, müste man es zu einer Zeit reguliren, wenn die Luft vermuthlich ihren grösten Grad der Trockenheit hat; zugleich müste man zu eben der Zeit die Dichtigkeit dieser Luft vermittelst eines schon regulirten Guerikischen Manometers, auch für eben den Zustand der Luft die dermahlige Wärme nach einem richtigen Thermometer, und überdem die dermahlige Barometerhöhe anmerken. Jeder andre Zustand der Luft wäre alsdenn bekannt, wenn man für ihn die Barometerhöhe, den Grad der Wärme nach dem Thermometer, ihre Dichtigkeit nach dem Manometer, und ihre Feuchtigkeit nach dem Hygrometer wüste. Liebhaber solcher Untersuchungen, die den Zustand der Luft angehen, vornemlich auch in Ansehung der Witterungslehre, finden eine hieher gehörige sehr angenehme Abhandlung von H. Lambert über die Barometerhöhen und ihre Veränderungen in den Abhandlungen der Churf. Bayersch. Academie der Wissenschaften III. B. 2 Th. 135 – 142 S.

Die

Die ersten Gründe der Mechanik fester Körper.

Der I. Abschnitt.

Die Gesetze der gleichförmigen Bewegung.

1 §.

Ein fester Körper kann sich auf mancherley Art bewegen, er kann, indem seine ganze Masse von einer Stelle zur andern fortrückt, sich zugleich um sich selbst drehen, wie eine Kugel beym Kegelschieben: will man also ganz vollständig über die Bewegung des festen Körpers urtheilen, so muß man eigentlich die Bewegung aller seiner Puncte kennen. Am wenigsten Schwierigkeit hat die Untersuchung über die Bewegung eines festen Körpers, wenn sich alle Puncte desselben in graden und parallelen Linien bewegen, weil alsdenn die Bewegung des ganzen Körpers bekannt ist, wenn man die Bewegung eines einzigen seiner Puncte kennet. Der Weg, welchen ein Punct während seiner Bewegung nimmt, ist eine Linie die entweder grade oder krumm seyn kann, und während der Bewegung verfliesset allemahl eine gewisse Zeit. Wtnn nun der Punct auf eine solche Art fortrückt, daß er in gleichen Theilen der Zeit gleiche Theile seines Weges zurück leget, so heißt die Bewegung des Puncts gleichförmig.

2 §.

Je grösser der Weg ist, den ein Punct mit gleichförmiger Bewegung in einer gewissen bestimmten Zeit zurück legt, desto grösser ist die Geschwindigkeit seiner Bewegung, und man hat von dieser Geschwindigkeit einen bestimmten Begriff, wenn man die Grösse des Weges kennt, welchen der Punct in einer solchen Zeit zurück legt, die man bey Ausmessung der Zeit überhaupt durch Eins ausdrückt. Gewöhnlich ist es am bequemsten, daß man die Zeit in Secunden ausdrücke; mithin durch die Geschwindigkeit der Bewegung die Grösse des Weges verstehe, den der Punct in einer Zeitsecunde zurück legt, vorausgesetzt, daß seine Bewegung gleichförmig sey. Wenn nun überhaupt s den Weg bezeichnet, den der Punct in einer gewissen bekannten Zeit t zurück leget, und seine Geschwindigkeit $= c$ gesetzt wird, so hat man $c = \frac{s}{t}$, und c ist der Weg, welchen der Punct in einer Secunde zurück legt, wenn man t in Secunden ausdrückt: denn es ist vermöge der Voraussetzung $t : 1$ Sec $= s : c$, also $c = \frac{s}{t}$. Wollte man t in Minuten oder in Stunden ausdrücken, so wäre $c = \frac{s}{t}$ der in einer Minute, oder in einer Stunde gleichförmig zurück gelegte Weg: welches ebenfalls einen bestimmten Begriff von der Geschwindigkeit giebt.

Diesemnach ist auch $s = c \cdot t$, und $t = \frac{s}{c}$. Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung, der zurückgelegte Weg und die verflossene Zeit hängen demnach so von einander ab, daß wenn von diesen dreyen

Grössen zwey gegeben sind, die dritte daraus leicht gefunden werden kann.

3 §.

Um aber vollständig von der Bewegung zu urtheilen, muß man noch die Beschaffenheit des Weges kennen, worin der Punct fortgehet, ob es nemlich eine grade oder eine krumme Linie sey. Geht der Punct in grader Linie fort, so heißt die Lage dieser graden Linie die Richtung der Bewegung, und diese bleibt einerley, wenn der Punct beständig in derselben graden Linie bleibt. Wofern aber der Punct in einer krummen Linie fortgeht; so ändert sich beständig seine Richtung; sie kommt in jedem Punct seines Weges mit der Lage derjenigen graden Linie überein, worin er von nun an fortgehen würde, wenn sein Weg von diesem Augenblick an sich nicht weiter krümmte, und eben diese grade Linie ist mit derjenigen einerley, welche den krummen Weg des Puncts in der Stelle berührt, wo sich derselbe in diesem Augenblick befindet.

Die Bewegung des Puncts, wenn gleich sein Weg eine krumme Linie ist, kann demnach gleichförmig seyn: alsdenn beurtheilet man, wie bey der gradlinichten Bewegung, die Geschwindigkeit womit der Punct in seinem krummen Wege fortrückt, aus der Grösse des Weges, den er in einer Secunde, oder in jedem andern willkührlich gewählten Zeitmaaß zurück legt. Uebrigens liegt der Weg des Puncts wenn es eine krumme Linie ist, entweder ganz in einerley Ebene, wie wenn der Punct im Kreise umliefe: oder es liegen nicht alle Puncte dieses krummlinichten Weges in einerley Ebene, wie wenn der Punct sich in einem Schraubengange bewegte. Hier werden nur einige Fälle der ersten Art erwogen werden können, wenn

der

der Punct zwar in einer krummen Linie fortgehet, aber doch beständig in einerley Ebene bleibt.

4 §.

Wenn alle Puncte eines festen Körpers mit gleichen Geschwindigkeiten in parallelen Richtungen fortgehen, so kann man die Geschwindigkeit eines jeden dieser Puncte zugleich als die Geschwindigkeit des ganzen Körpers betrachten. Daß der Schwerpunct des Körpers einige merkwürdige Eigenschaften vor allen übrigen Puncten der Masse des Körpers voraus habe, ist schon aus der Statik bekannt: deßwegen kann man in dem eben erwehnten Fall die Bewegung des Schwerpuncts allein betrachten, und von der Bewegung des Körpers im ganzen so reden, als wenn die ganze Masse desselben im Schwerpunct vereiniget wäre, so lange es nicht darauf ankommt, daß die Gestalt und Grösse des Körpers selbst in Betrachtung gezogen werden muß.

5 §.

Jede Masse, sie sey fest oder flüssig, ist an sich gegen Ruhe und Bewegung gleichgültig. Wir kennen zwar keine Masse in der Natur, die nicht schwer wäre, und ein Bestreben zu äussern schiene, wenn man sie nicht hält, gegen die Erde herab zu fallen. Es mag aber mit dieser Schwere der Körper übrigens eine Bewandniß haben, welche es wolle, so muß man sich doch in den Mechanischen Wissenschaften an die Vorstellung gewöhnen, daß die Schwere eine Kraft sey, die sich wenigstens in Gedanken von den übrigen Eigenschaften des Körpers trennen läßt. Man muß zuforderst untersuchen, was erfolgen würde, wenn eine Masse nicht schwer wäre, bevor man untersuchen kann, was eigentlich von der Schwere abhängt.

Wenn ein Körper nicht schwer wäre, so würde er auch nicht sich selbst überlassen gegen die Erde herab fallen: wäre er in Ruhe, so würde er an derselben Stelle, wo er sich einmahl befindet, ohne daß es einer Unterstützung bedürfte, unaufhörlich in Ruhe bleiben, es sey denn, daß sonst eine Ursache hinzu käme, die ihn in Bewegung setzte. Wäre dagegen eine körperliche nicht schwere Masse in Bewegung, und würde diese Bewegung so wenig durch irgend eine andre Ursache, als durch die Schwere geändert; so würde diese Masse unaufhörlich in derselben Bewegung bleiben, sie würde in einerley Richtung, also in einerley graden Linie, mit einerley Geschwindigkeit ohne alle Aenderung fortrücken.

Daß dergleichen in der Natur nie erfolgt, und am wenigsten solche Körper, wie wir sie an der Erde kennen, in beständig gleichförmiger Bewegung mit unveränderter Richtung bleiben, rührt aus andern Ursachen und in sehr vielen Fällen hauptsächlich von der Schwere her, welche sie beständig gegen die Erde nieder drückt. Daher kommt es, daß ein Stein, welchen man nach einer gegen den Horizont geneigten Richtung aus der Hand wirft, im Bogen anfangs steigt, und nachher wieder zur Erde herab fällt, nicht aber seine Bewegung in einerley Richtung mit unveränderter Geschwindigkeit fortsetzt.

6 §.

Daß es mit diesen Voraussetzungen seine völlige Richtigkeit habe, läßt sich zwar nicht gleich anfangs nach aller Strenge beweisen: sie werden aber dadurch in den mechanischen Wissenschaften zur völligen Gewißheit gebracht, weil man beweisen kann, daß alle Folgen, welche aus denselben richtig fliessen, mit demjenigen, was die Erfahrung lehrt, vollkommen

über

übereinstimmen. Uebrigens versteht man durch Trägheit körperlicher Massen eben diese Eigenschaft, vermöge welcher jede Masse, wenn sie einmahl in Ruhe ist, so lange in Ruhe bleibt, und wenn sie einmahl in Bewegung ist, ihre Bewegung so lange in grader Linie mit einerley Geschwindigkeit fortsetzet, bis sonst eine Ursache hinzu kommt, welche den Zustand der Ruhe oder der Bewegung dieser Masse ändert.

Uebrigens sind diese Lehren nicht allein auf feste Massen eingeschränkt: was hier Trägheit heißt, ist eine Eigenschaft einer jeden auch flüssigen Masse. Weil die Theilchen einer flüssigen Masse mit einer sehr geringen Kraft zusammenhängen, und sehr leicht an und neben einander beweglich sind; so findet bey einer flüssigen Masse von gegebener Gestalt und Grösse eine noch weit grössere Mannigfaltigkeit statt, wenn man vollständig über die Bewegung aller ihrer körperlichen Theilchen urtheilen will. Indessen kann man jedes Element der flüssigen Masse für sich allein eben so als ein Element einer festen Masse betrachten, und dann läßt sich das, was Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung heißt, ohne weitere Aenderung anwenden, wenn von der Bewegung eines Elements der flüssigen Masse allein die Rede ist. Ja in dem Fall, wenn alle Elemente einer flüssigen Masse sich in parallelen Richtungen mit einerley Geschwindigkeit bewegen, so erhellet, daß alle ihre Theilchen während der Bewegung ihrer Lage gegen einander eben so unverändert behalten, als wenn sie wie die Elemente einer festen Masse unter einander zusammen verbunden wären.

7 §.

Der allgemeine Ausdruck $s = c \cdot t$ (2 §.) bestimmt zwar aus der bekannten Geschwindigkeit c und der verflossenen Zeit t die Grösse des in der Zeit t zurück gelegten Weges s, wenn ein Punct in einem graden oder krummen Wege sich gleichförmig fortbewegt: indessen würde man doch die Stelle, wo der bewegte Punct in seiner Bahn nach jeder verflossenen Zeit t sich befindet, nicht angeben können, wenn man die Stelle nicht wüßte, wo er sich im Anfang der Zeit t befand.

78F. Weiß man, daß sich der Punct P in der graden Linie AB befindet, so ist seine Stelle bestimmt, wenn seine Entfernung AP von einem bekannten Punct A in dieser Linie gegeben ist, und wenn man überdem weiß, auf welcher Seite von A diese Entfernung AP liegt. Beyde in Ansehung des Puncts A einander entgegen gesetzte Lagen kann man durch die Zeichen (+) und (—) unterscheiden. (39 §. Geom.) Man nehme an, der Punct M sey anfangs in B gewesen, und in der Zeit t mit der Geschwindigkeit c von B nach M gerückt, so ist $BM = c.t$, und seine Entfernung AM von A ist nun $= AB + BM = AB + c.t$. So wird eigentlich der Ort des Puncts M für jede Zeit t durch die Gleichung $AM = AB + c.t$ bestimmt. Nun kann man auch die Zeit t rückwärts zählen und die Stelle finden, wo M so und soviele Zeitsecunden vor dem Augenblick gewesen ist, da M in B anlangte. Für $t = 0$ ist nemlich $AM = AB$, oder B in M. Nimmt man t negativ an, das heißt, zählt man die Zeitsecunden rückwärts vom Augenblick, da M in B kam, so wird $AM = AB - c.t$ kleiner als AB, das heißt, M befand sich anfangs zwischen A und B. Für $t = -\frac{AB}{c}$ wird $AM = 0$, und M fällt in A. Zählt man die Zeit noch weiter rückwärts, so wird AM negativ, das heißt, M befand sich soviele Zeit vorher auf der

andern

andern Seite von A, wo C liegt. Eben in dieser Aenderung der Stelle des Puncts M in Ansehung des Puncts A bestehet die Bewegung des Puncts M, die man als eine wahre Bewegung betrachtet, wenn A ein fester Punct ist, der seine Stelle selbst nicht ändert.

Wenn der Punct A selbst in derselben graden Linie AB sich gleichförmig fortbewegte, so würde man demnach auf ähnliche Art die Bewegung des Puncts M als eine solche betrachten können, die auf die Bewegung des Puncts A eine Beziehung hätte: denn während der Bewegung würden ebenfalls beyde Puncte A und M sich einander mehr nähern oder sich mehr von einander entfernen. Es sey nun C ein fester Punct und im Anfang der Zeit t sey A in E gewesen M aber in B; der Punct A rücke mit der Geschwindigkeit c, so wie M mit der Geschwindigkeit C gegen D gleichförmig fort: so ist $EA = c \cdot t$, $BM = C \cdot t$, und man hat für jede gegebene Zeit t die Entfernungen der Puncte A und M von C, nemlich

$$CM = CB + C \cdot t,$$
$$CA = CE + c \cdot t,$$
also $$AM = EB + (C - c)\,t.$$

Das giebt $AM = EB$ für $t = 0$, und diese Entfernung muß gegeben seyn. Für jede folgende Zeit t kommt das Stück $(C - c)\,t$ hinzu, als der Weg, um welchen sich M von A während dieser Zeit weiter entfernt hat, und wenn $AF = EB$ gemacht wird, so ist $FM = (C - c)\,t$. In dieser Aenderung der Stelle des Puncts M in Ansehung des selbst in Bewegung befindlichen Puncts A bestehet die relative Bewegung des Puncts M gegen A, und weil $C - c =$

$\frac{FM}{t}$ der Weg ist, um welchen sich M von A in jeder Secunde weiter entfernt, so kann $C - c$ die relative Geschwindigkeit des Puncts M gegen A heissen.

Wäre beyden Puncten A und M zugleich im Anfang der Zeit t, als A in E und M in B war, eine Geschwindigkeit $= c$ der Richtung der Bewegung entgegen mitgetheilt worden; so wäre A in E in Ruhe geblieben, und M wäre mit der Geschwindigkeit $C - c$ in der Zeit t von B nach μ um den Weg $B\mu = FM$ fortgerückt. Die Entfernung dieses Puncts M von dem festen Punct E wäre $= EB + (C - c)\,t$ für jede verflossene Zeit t, und diese wahre Bewegung des Puncts M mit der Geschwindigkeit $C - c$ würde nun mit seiner vorhin betrachteten relativen Bewegung in Ansehung des Puncts A völlig überein kommen.

Wäre $c = C$, so bliebe M gegen A in relativer Ruhe, denn die Entfernung des Puncts M von A bliebe beständig $= EB$. Wenn aber $c > C$ wäre, so würde $AM = EB + (C - c).t = EB - (c - C)\,t$ abnehmen, wenn t wächst, M würde gegen A zu rücken, und die Richtung der relativen Bewegung des Puncts M gegen A würde eine der vorigen entgegen gesetzte Lage haben.

Diese kurze Betrachtung der relativen Bewegung eines Puncts gegen den andern, wenn beyde in einerley graden Linie sich gleichförmig fortbewegen, dienet vorläufig zu übersehen, daß es in der Mechanik zuerst darauf ankomme, die Lehren von der wahren Bewegung zu entwickeln, und daß aus der bekannten wahren Bewegung zweener Puncte hiernächst auch ihre relative Bewegung gefunden werden könne. Deßwegen

wegen wird im folgenden allemahl von der wahren Bewegung die Rede seyn, so lange nicht ausdrücklich das Gegentheil angezeigt wird.

8 §.

Es sey nun die grade Linie AM der Weg, wel- 79 F.
chen der Punct M in der Zeit t von A bis M zurück leget, und AF sey der in der ersten Secunde zurück gelegte Weg: so ist AF seine Geschwindigkeit, und der in jeder folgenden Secunde zurück gelegte Weg ist eben so groß, wofern die Bewegung gleichförmig ist. Wenn nun die grade Linie AM in der Ebene des Winkels BAC liegt, und dessen Schenkel in dieser Ebene eine bekannte Lage haben; so ist die Richtung, nach welcher sich M bewegt, bekannt, wenn die Grösse des Winkels BAM oder CAM gegeben ist. Man ziehe MD und ME mit AC und AB parallel; so erhellet, daß der Punct M, indem er sich von A nach M in der graden Linie AM bewegt, in der mit AB parallelen Richtung den Weg EM, und zugleich in der mit AC parallelen Richtung den Weg DM zurück lege. Ist BAC ein rechter Winkel, so sind dies senkrechte Entfernungen der Stelle M von AB und AC: in andern Fällen können sie schiefe oder unter dem Winkel BAC gegen AB und AC geneigte Entfernungen heissen.

Der Voraussetzung gemäß ist AM in der Zeit t zurück gelegt, und in der folgenden Secunde legt M abermahl den Weg MN = AF = c zurück. Wird nun NP mit AC, NQ mit AB parallel gezogen, so erhellet, daß M in eben der folgenden Secunde nach den mit AB und AC parallelen Richtungen um die Wege $MP = QN = \frac{MN \,.\, \sin NMQ}{\sin BAC}$, und $MQ =$

$PN = \frac{MN \,.\, \sin NMP}{\sin BAC}$ fortrücke. Diesemnach läßt sich die Bewegung des Puncts M in der graden Linie AM so ansehen, als wäre sie aus zwoen Bewegungen in den mit AB und AC parallelen Richtungen zusammen gesetzt. Ist jene Bewegung nach AM gleichförmig, so sind es die beyden Bewegungen nach den Richtungen AB und AC ebenfalls. Wenn nemlich $AM = c \,.\, t = AF \,.\, t$ ist, so hat man $AD = EM = \frac{c \,.\, t \,.\, \sin MAE}{\sin BAC}$, und $AE = DM = \frac{c \,.\, t \,.\, \sin MAD}{\sin BAC}$, also sind AD und AE der Zeit proportional, wenn es AM ist.

Diesen Bewegungen nach AB und AC schreibt man in eben dem Verstande eine gewisse Geschwindigkeit zu, wie der Bewegung nach AM: man betrachtet die Geschwindigkeit nach AM als die mittlere, und die Geschwindigkeiten nach AB und AC als die Seitengeschwindigkeiten. Diese sind $\frac{AD}{t} = \frac{c \,.\, \sin MAE}{\sin BAC} = MP$, und $\frac{AE}{t} = \frac{c \,.\, \sin MAD}{\sin BAC} = MQ$, wenn die mittlere Geschwindigkeit $AF = MN = c$ ist. Auch umgekehrt: wenn die Seitengeschwindigkeiten MP, MQ, und ihr Neigungswinkel PMQ bekannt sind; so findet man die mittlere Geschwindigkeit $MN = \sqrt{(MP^2 - 2MP \,.\, MQ \,.\, \cos(180^\circ - PMQ) + MQ^2)}$. Solchergestalt hat diese Zerlegung und Zusammensetzung der Geschwindigkeiten alle Aehnlichkeit mit der Zerlegung und Zusammensetzung der mechanischen Kräfte im 100 §. der Statik.

9 §.

80 F. Ein Punct *A* bewegt sich gleichförmig in der graden Linie *AB* mit der Geschwindigkeit *BC*

$BC = c$, trift aber in B auf ein Hinderniß welches ihn nöthiget, von nun an in der Richtung BD seine Bewegung fortzusetzen: man soll die Geschwindigkeit finden, womit er in der Richtung BD fortgehen wird.

Aufl. Es sey BE auf BD senkrecht, und CD, CE, mit BE, BD parallel, so wie der Winkel CBD $= \alpha$: so zerlegt sich die Geschwindigkeit BC $= c$ in die Seitengeschwindigkeiten BD $= c \cdot \cos\alpha$, und BE $= c \cdot \sin\alpha$. Mit der letzten Geschwindigkeit seine Bewegung fortzusetzen, wird der Punct gehindert, der andern nach BD aber ist vermöge der Voraussetzung nichts im Wege: also ist die gesuchte Geschwindigkeit nach BD $= c \cdot \cos\alpha = c - c \cdot \sin v \cdot \alpha$.

Es sey ABCDE eine gebrochene Linie, wovon die gradlinichten Theile nach der Ordnung um die Winkel FBC $= \alpha$, GCD $= \beta$, HDE $= \gamma$, u. s. w. gegen einander geneigt sind. Von A nach B bewege sich ein Punct gleichförmig mit der Geschwindigkeit c, werde aber in den Winkelpuncten B, C, D, jedesmahl gehindert, daß er seiner gradlinichten Richtung nicht folgen, und seine Bewegung nicht anders als in der gebrochenen Linie fortsetzen kann: so verliert dieser Punct bey jeder Brechung seines Weges einen Theil seiner Geschwindigkeit. Nach der ersten Brechung in B hat er noch die Geschwindigkeit $C - c \sin v\, \alpha = c'$, nach der zweyten Brechung in C ist seine Geschwindigkeit $c' - c' \cdot \sin v \cdot \beta = c''$, und nach der dritten Brechung ist sie $= c'' - c'' \cdot \sin v \cdot \gamma$, u. s. w. Nach der letzten Brechung ist also die Geschwindigkeit $c \sin v\alpha + c' \sin v\beta + c'' \sin v\gamma + \ldots$ verlohren gegangen. Weil nun c', c'', c''', u. s. w. alle kleiner als c sind, so ist der gesammte Verlust der Geschwindigkeit kleiner 81 F.

als $c . (\sin v\,\alpha + \sin v\,\beta + \sin v\,\gamma + \ldots .)$, und wenn alle Winkel α, β, γ, u. s. w. gleich groß sind, so ist er kleiner als $c . n \sin v . \alpha$.

10 §.

82F. Wenn ein Punct in der graden Linie αA mit der Geschwindigkeit c sich gleichförmig fortbewegt, und bey A genöthiget ist, seine Bewegung in einem Kreisbogen ADG fortzusetzen, den die grade Linie αA in A berührt; so verliert der Punct während der Bewegung im Kreisbogen nichts von seiner Geschwindigkeit, sondern er setzt auch in diesem krummen Wege seine Bewegung gleichförmig fort.

Beweis. Es sey ADG ein Kreisbogen, und in demselben sey eine regulär gebrochene Linie ABCDEFG beschrieben; so sind die auswendigen Winkel bey B, C, D, u. s. f. alle gleich groß. Jeder von diesen Winkeln sey α, und man verstehe hier durch α den mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen den Schenkeln des Winkels beschriebenen Kreisbogen: (254 §. Geom.) so ist $2 \sin v\,\alpha = (\text{chord}\,\alpha)^2$ (237 §. Geom. n. 3.) oder $\sin v\,\alpha = \frac{1}{2}(\text{chord}\,\alpha)^2$. Aber $\text{chord}\,\alpha < \alpha$, folglich $\sin v\,\alpha < \frac{1}{2}\alpha^2$, und $n \sin v\,\alpha < \frac{1}{2} n\alpha^2$, oder $n \sin v\,\alpha < \dfrac{n^2\alpha^2}{2n}$. Wenn nun ein Punct nach dieser gebrochenen Linie, und zwar durch AB mit der Geschwindigkeit c fortgeht, so hat derselbe, nachdem er in FG angekommen ist, einen Theil seiner Geschwindigkeit $= c . n \sin v\,\alpha$ verlohren, und es ist $n \sin v\,\alpha < \dfrac{(n\alpha)^2}{2n}$, also der gesammte Verlust der Geschwindigkeit kleiner als $\dfrac{(n\alpha)^2}{2n} . c$.

Wenn

Wenn AB und GF verlängert einander in L schneiden, so ist der Winkel ALM $= n\alpha$, wie man leicht aus dem 56 §. Geom. herleitet, wenn BC, CD, DE u. s. f. nach H, I, H, verlängert werden: mithin ist der gesammte Verlust der Geschwindigkeit kleiner als $\frac{ALM^2}{2n} \cdot c$. Je mehr Seiten die gebrochene Linie hat, wenn der Kreisbogen ADG derselbe bleibt, desto grösser wird n, und desto mehr nähert sich die gebrochene Linie dem Kreisbogen, desto kleiner wird also der Verlust der Geschwindigkeit, weil $\frac{ALM^2}{2n} \cdot c$ desto kleiner wird. Sind überdem AT und Gt ein Paar Tangenten an den äussersten Endpuncten des Kreisbogens, so nähert sich die Lage der Linien AB und GF der Lage dieser Tangenten gleichfalls desto mehr, je grösser man n annimmt. Der Kreisbogen ADG ist unter allen diesen gebrochenen Linien die letzte der Linien αL, gL, letzte Lage ist mit der Lage der Tangenten αT, γt, einerley, und der Winkel ALM wird zuletzt $=$ ATt, mithin zuletzt $\frac{ALM^2}{2n} \cdot c = 0$, wenn $n = \infty$ wird. Diesemnach verliert der Punct nichts von seiner Geschwindigkeit, sondern er setzt seine Bewegung im Kreisbogen gleichförmig fort.

11 §.

Wenn gleich ADG kein Kreisbogen, sondern eine andre Linie wäre, die sich durchgängig nach dem Gesetz der Stetigkeit krümmt; so würden die Schlüsse des vor. §. sich mit gehöriger Veränderung noch anwenden lassen. Die krumme Linie ADG sey bey B, C, D, E, F, in n gleiche Theile getheilt, wozu die Sehnen AB, BC, CD, u. s. f. gehören, so sind nun 82F.

die

die äussern Winkel CBL, DCK, u. s. f. nicht alle gleich groß: indessen stehen sie doch alle gegen einander in einem bestimmten endlichen Verhältnisse, und ihre Summe ist dem Winkel ALM gleich, wie groß auch n angenommen wird. Wenn nun α, β, γ, δ, u. s. f. diese Winkel nach der Reihe bezeichnen, und ein Punct wie vorhin sich auf dieser gebrochenen Linie von A durch B u. s. w. nach G bewegt; so ist der gesammte Verlust der Geschwindigkeit kleiner als $c(\sin v\,\alpha + \sin v\,\beta + \sin v\,\gamma + \ldots .)$ Es sey ϕ der größte und ψ der kleinste unter diesen Winkeln, so ist $n\phi >$ ALM und $n\psi <$ ALM, und dies allemahl, wie groß auch n genommen wird: folglich bleibt $n\psi$ sowohl, als auch $n\phi$ allemahl eine endliche Grösse. Denn es ist vermöge der Voraussetzung das Verhältniß $\phi : \psi = n\phi : n\psi$ allemahl endlich, und es können beyde Grössen $n\phi$ und $n\psi$ weder zugleich verschwinden, noch zugleich unendlich groß werden, weil sonst ALM nicht zwischen diesen Gränzen enthalten seyn könnte. Nun ist auch $n \sin v\,\phi > (\sin v\,\alpha + \sin v\,\beta + \sin v\,\gamma + \ldots .)$ also der Verlust der Geschwindigkeit kleiner, als $c \,.\, n \sin v\,\phi$, und daraus folgt, wie im vor. §. es sey dieser Verlust der Geschwindigkeit $< \frac{(n\phi)^2}{2n} \,.\, c$. Aber die krumme Linie ADG ist unter allen den gebrochenen Linien, die man erhält, wenn n ohne Aufhören wächst, die letzte; und wenn $n = \infty$ wird, so ist ALM = ATt. Mithin bleibt auch noch alsdenn $n\phi$ eine endliche Grösse, und es wird $\frac{(n\phi)^2}{2n} \,.\, c = 0$, wenn man annimmt, daß die krumme Linie selbst der Weg sey, worin der Punct seine Bewegung fortzusetzen genöthiget ist: das heißt

heißt die Bewegung des Puncts in der krummen Linie bleibt gleichförmig.

12 §.

Wenn nun gleich diese Schlüsse beweisen, daß ein körperlicher Punct, oder ein materielles Element, sich in einer krummen Linie gleichförmig bewegen könne, so wird dasselbe wegen seiner Trägheit doch nie anders als in grader Linie gleichförmig fortgehen: es muß etwas vorhanden seyn, daß diesen Punct hindert in der graden Linie zu bleiben. Ein besonderer Fall davon ist der, wenn der Punct sich im Kreise bewegt, und man kann sich auf folgende Art vorstellen, wie es möglich sey, demselben eine solche Bewegung mitzutheilen. Ein zarter Faden CM, woran ein klei- 84 F.
ner Körper M befestiget ist, sey auf einer glatten horizontalen Tafel mit dem andern Ende an einem Stift C so befestiget, daß der Faden, wenn er grade ausgespannt ist, sich um den Stift, ohne sich aufzuwickeln, wie ein beweglicher Halbmesser eines Kreises drehen könne. So lange man nun dem am Ende des grade ausgespannten Fadens befestigten kleinen Körper, der auf der wagrechten Tafel ruhig liegt, keinen Stoß giebt, so lange wird derselbe ruhig liegen bleiben, und es ist eben soviel, als wenn derselbe bloß träge, nicht schwer wäre, weil die wagrechte Tafel sein Gewicht trägt. Giebt man aber diesem kleinen Körper M einen Stoß in horizontaler Richtung MT senkrecht auf der Länge CM des Fadens; so wird derselbe anfangen, im Kreise umzulaufen, und weil auch während der Umlaufsbewegung die Tafel das ganze Gewicht des Körpers trägt, so kann dasselbe die Umlaufsbewegung auf keine Art ändern. Wäre demnach beydes die Tafel und des körpers Fläche, womit

mit er an der Tafel anliegt, vollkommen glatt, und wäre sonst gar kein Hinderniß der Bewegung vorhanden; so würde diese Umlaufsbewegung beständig gleichförmig bleiben.

13 §.

84F. Hier ist nun der Faden das, was den Körper hindert, in der graden Linie MT als der Richtung des ersten Stosses zu bleiben, worin er sonst vermöge seiner Trägheit die Bewegung fortsetzen würde. Eben darum muß der Faden Festigkeit genug haben, er muß den Körper halten, der sonst in jedem Augenblick der Umlaufsbewegung, wenn der Faden ihn von nun an nicht mehr hielte, in der Richtung bleiben würde, die er zuletzt hatte, und die Lage dieser Richtung würde mit der Tangente des Kreises an der Stelle, wo sich der kleine Körper zuletzt befand, überein kommen. Der Erfolg davon ist, daß der Faden während der Umlaufsbewegung nach seiner Länge gedehnt wird, auf eine ganz ähnliche Art, als wenn an demselben lothrecht ein Gewicht herab hienge, und in diesem Sinn ist es richtig, wenn man sich vorstellt, aus der Umlaufsbewegung entstehe eine Kraft, vermöge welcher der umlaufende Körper ein Bestreben äussert, sich vom Mittelpunct C zu entfernen. Eigentlich entsteht diese Kraft nicht aus der Umlaufsbewegung, vielmehr ist das Hinderniß, welches der Faden der Bewegung des Körpers in gradlinichter Richtung entgegen setzt, eine mechanische Kraft, welches man sich hier als einen Zug gegen den Mittelpunct vorstellet: denn der Faden thut eben das, was eine Kraft thun würde, die den Körper während seines Umlaufs beständig nach einer gegen den Mittelpunct liegenden drückte, wenn dieser Druck so groß wäre, als ein Gewicht, das

wenn

wenn es am Faden lothrecht herab hienge, ihn eben so stark dehnte, als er während des Umlaufs gedehnt ist.

14 §.

Das was dem Druck eines Gewichts und überhaupt einer mechanischen Kraft widerstehet, kann man sich als einen Gegendruck, oder entgegengesetzen Zug vorstellen, der dem Druck oder Zug gleich ist, wenn letzterer vollkommen aufgehalten wird. Wenn eine horizontale Tafel ein darauf liegendes Gewicht trägt, so kann man freylich nicht in eben dem Verstande sagen, die Tafel drücke in die Höhe entgegen, in welchen man sagen kann, das Gewicht drücke gegen die Tafel nach unten: indessen ist doch der Erfolg eben so, als wenn die Hand das Gewicht trägt, und durch Anstrengung der Muskeln würklich entgegen drückt. Vom Wagen, woran die Pferde vermittelst der Seile ziehen, kann man nicht in eben dem Verstande sagen er ziehe die Seile nach einer der Richtung des Zuges der Pferde entgegen gesetzten Richtung: indessen ist der Erfolg eben so, als wenn andre Pferde die Seile nach entgegen gesetzter Richtung zögen. Die wagrechte Tafel widerstehet nur dem Druck des Gewichts, der Wagen widerstehet dem Zuge der Pferde; in wieweit indeß der Erfolg eben so ist, als wenn der Widerstand würklich ein entgegen gesetzter Druck oder Zug wäre, in soweit kann der Widerstand ebenfalls als ein Gegendruck oder Gegenzug, mithin, als eine mechanische Kraft betrachtet werden.

Indem der träge Körper M im Kreise umläuft, 84F.
kann man nicht eigentlich sagen, daß derselbe den Faden nach der Richtung des Halbmessers von C nach M ziehe. Weil jedoch der Faden eben das thut, was

ein

ein Druck thun würde, der den Körper in jedem Punct, wo er sich auch in seiner Bahn befinden mag, nach der Richtung MC preßte, und weil der Körper M wegen seiner Trägheit diesem Druck widerstehet; so kann man sich die Sache auch so vorstellen, als wenn der Körper M den Faden nach der Richtung CM zöge. Es muß sich ein Gewicht angeben lassen, das wenn es an dem Faden lothrecht herab hienge, ihn eben so stark spannen würde, als er während des Umlaufs um deßwillen gespannt ist, weil er den umlaufenden Körper nicht im Kreise erhalten kann, ohne daß dieser wegen seiner Trägheit widerstünde. Dieser Widerstand, der also in einem ganz richtigen Sinn als eine Kraft betrachtet werden kann, welche den Faden nach der Richtung CM zieht oder dehnt, heißt die aus dem Umlauf entstehende Fliehkraft. (vis centrifuga) Wäre kein Faden da, der den Körper hielte, so könnte derselbe nicht im Kreise mit gleichförmiger Bewegung umlaufen, wofern nicht beständig eine der Fliehkraft gleiche Kraft ihn gegen den Mittelpunct zu treiben strebte, deren Richtung also auf der Richtung der Bewegung beständig senkrecht seyn müste.

Der

Der II. Abschnitt.

Die Gesetze des freyen Falles natürlich schwerer Körper.

15 §.

Jedes Theilchen einer schweren Masse sinkt in gerader Linie gegen die Erde herab, wenn nichts vorhanden ist, das diese Bewegung hindert: damit es in Bewegung komme, bedarf es keines Stosses oder sonst einer äussern Ursache, vielmehr erfolgt die Bewegung, so bald man es nicht mehr hält. Wie nun jede Bewegung mit einer gewissen Geschwindigkeit erfolgt, so hat auch jeder schwere herabfallende Punct eine gewisse Geschwindigkeit. Im ersten Augenblick, womit die Bewegung anfieng, hatte er noch keine Geschwindigkeit, er war anfangs in Ruhe, allererst nach Verlauf einer gewissen Zeit hat er eine gewisse Geschwindigkeit erlangt: also muß wenigstens im Anfang der Bewegung die Geschwindigkeit eines jeden herabfallenden schweren Puncts zunehmen. **Eben dies allmählige Zunehmen der Geschwindigkeit ist ein Effect der Schwere** als einer bewegenden Kraft, denn wenn die Masse bloß träge, nicht schwer wäre, so bliebe sie in Ruhe, wenn sonst keine Ursache vorhanden wäre, welche sie in Bewegung setzte. Wenn nach Verlauf einer gewissen Zeit seit dem Anfang der Bewegung die Schwere aufhörte zu würken; so würde die Masse von diesem Augenblick an mit der nun schon erlangten Geschwindigkeit die Bewegung gleichförmig fortsetzen, die Masse würde zwar in einerley

Verticallinie zu fallen fortfahren, so lange die Bewegung durch nichts gehindert würde, allein die Geschwindigkeit würde nicht weiter zunehmen. Weil man nun keinen Grund hat, anzunehmen, daß die Würkung der Schwere während des Falles einmahl aufhöre, so leidet es wohl keinen Zweifel, daß jeder schwere Punct mit einer beschleunigten Bewegung herab falle, deren Geschwindigkeit nach und nach immer grösser wird.

16 §.

Es sey also c die in der Zeit t dem schweren Punct von der Schwere mitgetheilte Geschwindigkeit, so muß c von t so abhängen, daß c mit t zugleich wächst. Ob nun die Geschwindigkeit c in doppelter, dreyfacher und überhaupt in $n$mahl soviel Zeit, auch doppelt, dreymahl und überhaupt $n$mahl grösser werde, als in der einfachen Zeit; oder ob die Geschwindigkeit c von der Zeit t nach einem andern Gesetz abhänge? das kann nicht anders, als aus richtigen Erfahrungen entschieden werden. Es sey diejenige Geschwindigkeit $= k$, die der schwere Punct nach Verlauf der ersten Zeitsecunde erlangt hat, und diejenige Geschwindigkeit $= c$, welche eben der schwere Punct nach Verlauf einer jeden andern Zeit t erlangt hat; wofern nun c mit t allemahl in einerley Verhältniß wächst, so hat man 1 Sec : $t = k : c$, mithin $c = k : t$, wenn t in Secunden ausgedrückt wird. Sollte vieleicht diese Voraussetzung der Natur gemäß seyn, so kann man sagen, daß die Schwere den herabfallenden schweren Punct gleichförmig beschleunige.

17 §.

Der schwere Punct M ist in der Zeit t von A bis M mit gleichförmig beschleunigter Bewegung herabgefallen, und die Geschwindigkeit k ist gegeben, welche er nach Verlauf der ersten Zeitsecunde erlangt hatte: man soll die Höhe des Falles AM finden. 85 F.

Aufl. Wenn m eine sehr grosse ganze Zahl ist, so ist $\frac{t}{m}$ ein sehr kleines Theilchen der während der Bewegung verflossenen Zeit t. Man nehme an, daß AP, PQ, QR die Theile der ganzen Höhe AM sind, welche der schwere Punct im ersten, zweyten, dritten u. s. f. in jedem folgenden eben so grossen Zeittheilchen $\frac{t}{m}$ zurück legt: wenn alsdenn überhaupt c die jedesmahl in P, Q, R, u. s. f. schon erlangte Geschwindigkeit bezeichnet, so findet man

nach Verlauf der Zeit	die erlangte Geschwindigkeit c
$\frac{t}{m}$	in $P = k \cdot \frac{t}{m}$
$\frac{2t}{m}$	in $Q = k \cdot \frac{2t}{m}$
$\frac{3t}{m}$	in $R = k \cdot \frac{3t}{m}$

Hätte nun der schwere Punct die am Ende eines jeden Zeittheilchens erlangte Geschwindigkeit schon im Anfang desselben gehabt, und hätte er alsdenn in jedem Zeittheilchen den damit zusammengehörigen Theil seines Weges mit unveränderter Geschwindigkeit durchlaufen, so fände man jeden Theil des durchgelaufenen Weges durch die Multiplication der Geschwindigkeit mit dem verflossenen Zeittheilchen $\frac{t}{m}$ (2 §.), und es wäre

$$AP = k \cdot \frac{t}{m} \cdot \frac{t}{m} = k \cdot \frac{t^2}{m^2},$$

$$PQ = k \cdot \frac{2t}{m} \cdot \frac{t}{m} = k \cdot \frac{2t^2}{m^2},$$

$$QR = k \cdot \frac{3t}{m} \cdot \frac{t}{m} = k \cdot \frac{3t^2}{m^2}, \text{ u. s. f.}$$

Weil nun m solcher Zeittheile während der Bewegung verfliessen, so wäre nach dieser Voraussetzung $AM = \frac{k \cdot t^2}{m^2}(1+2+3+\ldots+m) = \frac{1}{2}m(m+1)\frac{kt^2}{m^2}$ (152 §. Rechenk.), oder $AM = \frac{1}{2}k(t^2 + \frac{1}{m} \cdot t^2)$. Allein die Theile des durchlaufenen Weges AP, PQ, QR, u. s. f. sind kleiner, als sie vermöge dieser Rechnung gefunden werden, weil die Geschwindigkeiten allererst am Ende eines jeden Zeittheilchens so groß sind, als die Rechnung sie annimmt, mithin ist $AM < \frac{1}{2}k(t^2 + \frac{1}{m}t^2)$.

Man ändre die Voraussetzung so, daß man annimmt, jeder Theil AP, PQ, QR, u. s. f. des Weges werde mit derjenigen Geschwindigkeit durchlaufen, die der schwere Punct im Anfang des damit zusammen gehörigen Zeittheilchens hatte, so hätte man

$$AP = 0,$$

$$PQ = k \cdot \frac{t^2}{m^2},$$

$$QR = k \cdot \frac{2t^2}{m^2}, \text{ u. s. f.}$$

also

also $AM = \frac{kt^2}{m^2}(0 + 1 + 2 + 3 + \ldots (m-1)$
$= \frac{1}{2}m(m-1)\frac{kt^2}{m^2}$, oder $AM = \frac{1}{2}k(t^2 - \frac{1}{m}.t^2)$.

Es ist offenbar, daß die Theile des durchlaufenen Weges grösser sind, als sie vermittelst dieser letzten Rechnung gefunden werden: mithin ist $AM > \frac{1}{2}k(t^2 - \frac{1}{m}t^2)$. Demnach ist $AM = \frac{1}{2}ktt$, denn es giebt sonst keine Grösse, die allemahl zwischen den gefundenen Gränzen enthalten wäre, wenn auch m so groß, als man will, genommen würde.

18 §.

Wenn man $m = \infty$ setzt, so ist $\frac{1}{m} = 0$, und $\frac{1}{m}t$ ein unendlich kleines Zeittheilchen. Ein solches Zeittheilchen ist nun freylich gar kein Zeittheilchen mehr: indessen wird es eine Verkürzung der Rechnung, die mit dem gefundenen einerley Resultat giebt, wenn man sich die ungleichförmige Bewegung so vorstellt, als wenn sie in unendlich kleinen Zeittheilen gleichförmig wäre, und in jedem unendlich kleinen Zeittheilchen ein unendlich kleiner Theil des Weges mit der unveränderten Geschwindigkeit zurückgelegt würde, welche der bewegte Punct im Anfang dieses Zeittheilchens hatte. In jedem noch so kleinen Zeittheilchen wächst die Geschwindigkeit nach dem Gesetz der Stetigkeit, und in jedem folgenden Punct des Weges ist die Geschwindigkeit schon grösser, als sie in dem vorherigen Punct war. Man kann aber so rechnen, als wenn die Geschwindigkeit während des ganzen Zeittheilchens so groß bliebe, als sie im Anfang desselben war, und nun am Ende des Zeittheilchens der Zusatz plötzlich hinzukäme, der während des Zeittheilchens allmählig hinzu gekommen ist. Wird alsdenn am Ende der Rechnung jedes Zeittheilchen, mithin jeder während eines solchen Zeittheilchens zurück gelegte Theil des Weges unendlich klein gesetzt; so muß die Rechnung eben das geben, was man fände, wenn man zwo Gränzen suchte, zwischen welchen das eigentlich gesuchte allemahl enthalten seyn muß, so lange die bey der Rechnung zum Grunde gelegten Zeittheilchen nicht verschwinden.

19 §.

Bey eben der Voraussetzung, daß der schwere Punct mit gleichförmig beschleunigter Bewegung falle, für jede gegebene Zeit t die Höhe des Falles und die am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit zu finden, wenn die Höhe bekannt ist, wovon der schwere Punct während der ersten Zeitsecunde herab fällt.

85 F. Aufl. Es sey AC die Höhe des Falles während der ersten Secunde, so muß in der gefundenen Gleichung $AM = \frac{1}{2}kt^2$, (17 §.) die Höhe $AM = AC$ seyn, wenn $t = 1$ Sec. ist: mithin erhält man $AC = \frac{1}{2}k$, oder $k = 2AC$. Setzt man ferner diesen Werth statt k in die Gleichung des vor. §. so hat man $AM = AC.t^2$. Man setze künftig ein für allemahl die mit der Zeit t zusammengehörige Höhe des Falles $= s$, die Höhe des Falles nach Verlauf der ersten Secunde $= g$, so ist $AM = s$, $AC = g$, und man hat $s = gtt$.

Bey der angenommenen Voraussetzung ist überdem $c = k.t$, (16 §.) und $k = 2AC = 2g$, also hat man auch $c = 2gt$, als die am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit.

20 §.

Die Höhe $AM = s$ ist gegeben, wovon ein schwerer Punct herab gefallen ist, man soll die verflossene Zeit, und die zuletzt erlangte Geschwindigkeit finden.

Auch umgekehrt: wenn die einem herabfallenden Punct von der Schwere mitgetheilte Geschwindigkeit gegeben ist, die verflossene Zeit und die Höhe des Falles zu finden.

Aufl. 1.) Aus der Gleichung $s = gt^2$ findet man $t = \sqrt{\frac{s}{g}}$. Ferner ist $c = 2gt$, und wenn man statt t den Werth $\sqrt{\frac{s}{g}}$ setzt, so wird $c = 2\sqrt{gs}$ gefunden.

Eben die Gleichung läßt sich so ausdrücken: $c = \frac{2s\sqrt{g}}{\sqrt{s}} = 2s : \sqrt{\frac{s}{g}}$, und es war $\sqrt{\frac{s}{g}} = t$, mithin ist auch $c = \frac{2s}{t}$.

2.) Die zweyte im 19 §. gefundene Gleichung $c = 2gt$ giebt $t = \frac{c}{2g}$, und aus der Gleichung $c = 2\sqrt{gs}$ (n. 1.) erhält man $c^2 = 4gs$, also $s = \frac{c^2}{4g}$.

Wird diese Gleichung so ausgedrückt: $s = \frac{1}{2}c \cdot \frac{c}{2g}$, und dabey bemerkt, daß $\frac{c}{2g} = t$ war; (n. 2.) so hat man auch $s = \frac{1}{2}ct$, welches eben so gut aus der vorhin (n. 1.) gefundenen Gleichung $c = \frac{2s}{t}$ folgt.

Wenn in dem Augenblick, da der schwere Punct in M mit der Geschwindigkeit c anlangt, alle Wirkung der Schwere aufhörte; so würde derselbe in der nun folgenden eben so grossen Zeit t, als während des Falles verflossen ist, mit der unveränderten Geschwindigkeit c vermöge seiner Trägheit einen Weg $MB = c \cdot t$ (2 §.) zurück legen. Weil nun $s = \frac{1}{2}ct$ war; (n. 2) so wird $MB = 2s$ gefunden. Demnach erlangt der schwere Punct durch den Fall von der Höhe s in der Zeit t eine Geschwindigkeit, womit derselbe, **wenn sie unverändert** bliebe, in eben so vieler Zeit, als während des Falles verflossen ist, einen doppelt so grossen Weg, als die Höhe des Falles war, zurück legen würde.

Der ganze mit der von der Ruhe an gleichförmig beschleunigten Bewegung in der Zeit t zurück gelegte Weg $AM = s$ ist demnach nur halb so groß, als er seyn würde, wenn die Bewegung gleich mit der Geschwindigkeit c angefangen hätte, und während der Zeit t gleichförmig geblieben wäre. Denn alsdenn wäre dieser Weg $= c \cdot t$. (2. §.)

21 §.

Wofern zwey oder mehr gleichgroße körperliche Elemente, die in einerley Augenblick zu sinken anfangen, von der Schwere auf einerley Art gleichförmig und so beschleuniget werden, daß sie in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten erlangen; so fallen diese Elemente, in gleichen Zeiten gleich tief. Denn es ist für jedes dieser Elemente $s = \frac{1}{2}ct$, mithin s für alle einerley, wenn bey gleicher Zeit des Falles t auch c einerley ist. Dabey ist es gleichgültig, ob diese Puncte im Anfang der Bewegung von einander getrennt, oder unmittelbar bey einander sind: sie werden im letzten Fall auch während der Bewegung bey einander bleiben,

ben, keiner von allen wird den übrigen voreilen oder zurück bleiben. Wenn also diese Puncte oder Elemente wie Theile eines festen Körpers mit einander zusammen hängen, so fällt die doppelte, die dreyfache und überhaupt die *n*fache Masse nach eben den Gesetzen wie die einfache, weil jeder Theil für sich während einer jeden Zeit des Falles mit jedem von den übrigen einerley Geschwindigkeit erlangt: keiner von diesen Theilen würde den übrigen voreilen oder zurück bleiben, auch wenn sie unter einander nicht zusammen hiengen, und eben deßwegen würde auch keiner in seiner Bewegung von den übrigen vermöge des Zusammenhanges damit verbundenen weder mehr beschleuniget noch verzögert werden.

22 §.

Die von dem Fall schwerer Puncte im 17 bis 19 §. bewiesenen Lehren gelten demnach auch von Körpern, die eine bestimmte Gestalt und Grösse haben, wofern die Schwere gleichgrosse körperliche Elemente dieser Massen gleichförmig und so beschleuniget, daß sie denselben in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeit mittheilt. Hat es mit diesen Voraussetzungen seine Richtigkeit, so müssen alle Elemente einer jeden körperlichen Masse, sie sey fest oder flüssig, und ihre Gestalt und Grösse sey, welche sie wolle, nach einerley Gesetzen, und die ganze Masse selbst nach eben den Gesetzen fallen. Jeder Punct eines schweren Körpers fällt alsdenn eben so, wie sein Schwerpunct fällt: deswegen kann man bey Anwendung dieser Lehren auf Körper von bestimmter Gestalt und Grösse allein die Bewegung des Schwerpuncts betrachten, nicht anders, als wenn in demselben allein ein schweres körperliches Element befindlich wäre. Hat man gefunden, von welcher Höhe der Schwerpunct in gegebener Zeit herab fällt, und welche Geschwindigkeit er durch den Fall erlangt, so hat man eben das für alle übrige Puncte des Körpers gefunden, weil sie insgesammt in verticalen unter einander parallelen Linien in gleichen Zeiten gleich tief herab fallen und gleiche Geschwindigkeiten erlangen.

23 §.

Läßt man ein Stück Bley und eine Pflaumfeder, oder sonst einen kleinen Körper, dessen Dichtigkeit viel geringer als die Dichtigkeit des Metalles ist, in freyer Luft zugleich fallen; so bleibt der dünnere Körper zurück, und der dichtere fällt in kürzerer Zeit zu Boden. Diese Verschiedenheit des Erfolgs aber von dem, was den bisher angenommenen Voraussetzungen gemäß sonst zu erwarten wäre, könnte wohl daher rühren, weil der Widerstand der Luft die Bewegung des dünnern Körpers mehr als die Bewegung des dichtern verzögert. Könnte man zwey dergleichen Körper von sehr ungleicher Dichtigkeit im luftleeren Raum, oder wenigstens in sehr verdünnter Luft fallen lassen, so müßte der Erfolg völlig entscheiden, ob die im 20 §. angenommene Voraussetzung mit der Natur übereinstimme oder nicht. Um Versuche dieser Art in verdünnter Luft anstellen zu können, giebt man einem etwas hohen gläsernen Recipienten, wie man sonst auf den Teller einer Luftpumpe setzt, die Einrichtung, daß man oben im innern Raum desselben ein Stück Bley oder Gold mit einer Pflaumfeder zwischen einer daselbst angebrachten Zange befestigen, vermittelst eines oben durch den Kopf des Recipienten durchgesteckten

Drats

Drats aber, nachdem die Luft unter dem Recipienten hinlänglich ist verdünnt worden, die Zange nach Gefallen öfnen kann, damit nun beyde Körper zugleich anfangen herab zu fallen. Hebt man auf diese Art den Widerstand der Luft, so fällt der dichtere Körper mit dem dünnern zugleich zu Boden, aus welcher Masse übrigens diese Körper bestehen.

Noch leichter und bequemer wird der Versuch angestellt, wenn man eine 2 bis 3 Fuß lange gläserne und 1 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll weite an dem einen Ende verschlossene Röhre an dem offenen Ende in Metall einfassen, und mit einem Hahnen versehen läßt, der noch eine Schraube unter sich hat, womit man den ganzen so eingerichteten Cylinder an der Verbindungsröhre zwischen der Luftpumpe und dem Teller anschrauben kann. Hat man nun in den Cylinder einen Ducaten und eine Pflaumfeder, oder sonst ein Paar Körper von sehr verschiedener Dichtigkeit, hineingelegt, und nach gehöriger Vorbereitung die Luft im Cylinder möglichst verdünnt, so kann man ihn nach Verschliessung des Hahnen von der Luftpumpe abnehmen, und denselben so oft als man will, umkehren. Solchergestalt läßt sich der Versuch mit mehrerem Vergnügen kurz nach einander wiederholen.

24 §.

Vermöge des Erfolgs, den Versuche dieser Art haben, ist man also berechtiget, anzunehmen, daß die Schwere gleichen körperlichen Theilchen in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten mittheile: ob auch übrigens die Beschleunigung der Schwere so gleichförmig sey, daß die erlangten Geschwindigkeiten der Zeit proportional bleiben, das kann ebenfalls nicht anders, als aus richtig angestellten Erfahrungen entschieden

werden.

werden. Den dabey eintretenden Schwierigkeiten hat man auf mancherley Art auszuweichen gesucht, und das weiter folgende wird die Sache weiter ins Licht setzen. Vorläufig muß man bemerken, daß vermöge der Gleichung $s = gtt$ (18 §.) die durchlaufenen Wege dem Quadrat der Zeit proportional sind, wofern die angenommene gleichförmige Beschleunigung der Schwere wirklich der Natur gemäß ist. Jeder schwere Körper muß also in 2, 3, 4, 5 Secunden 4mahl, 9mahl, 16mahl, 25mahl tiefer fallen, als in der ersten Secunde, wofern die Schwere gleichförmig beschleuniget. Der berühmte Joh. Baptista Ricciolus hat mit seinem gewöhnlichen Gehülfen Grimaldo oft Versuche darüber angestellet, er hat aus Kreide verfertigte Kugeln am Gewicht $\frac{1}{2}$ Pfund schwer von verschiedenen Thürmen und aus den Fenstern andrer hoher Gebäude herabfallen lassen, und nach seinen Beobachtungen war

in der Zeit von			die Höhe des Falles		
	50	Tertien	10	Römische	Fuß
1 Secund.	40	—	40	—	—
2 —	30	—	90	—	—
3 —	20	—	160	—	—
4 —	10	—	250	—	—

Ein andermahl war

in der Zeit von	die Höhe des Falles
1 Secunde	15 Fuß
2 Secunden	60 —
3 —	135 —
4 —	240 —

(M. s. Riccioli Almag. Nov. Lib. II. Cap. XXI. pag. 89. 90.) Das trift so genau mit dem erwarteten Erfolg zusammen, daß man fast vermuthen muß, Ricciolus

ciolus habe kleine Abweichungen, die vom Widerstande der Luft und andern nicht wohl ganz vermeidlichen Fehlern der Beobachtung herrühren, weggelassen. Nach des *Dechales* Versuchen (M. s. dessen Mund. Mathem. Stat. L. II. Prop. II.) wäre die Höhe des Falles in einer halben Secunde $4\frac{1}{4}$ Fuß, in einer ganzen Secunde $16\frac{1}{2}$ Fuß, in $1\frac{1}{2}$ Secunden 36 Fuß, in 2 Secunden 60 Fuß, in $2\frac{1}{2}$ Secunden 90 Fuß und in 3 Secunden 123 Fuß. Obgleich diese Zahlen nicht so gut als die vorigen mit dem Gesetz übereinstimmen, vermöge dessen die Höhen sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten müßten; so kann es doch wegen des Widerstandes der Luft, der bey zunehmender Geschwindigkeit immer grösser wird, kaum anders erwartet werden, als daß die wirklich beobachteten Höhen den berechneten desto weniger nahe kommen, je mehr Zeit seit dem Anfang der Bewegung verflossen ist. *Galilaeus a Galilaeis*, der eigentlich die Richtigkeit der Voraussetzung, daß die nahe an der Erde befindliche Massen von der Schwere gleichförmig beschleuniget werden, zuerst in seinen Dialogis de motu bewiesen hat, stellte die Versuche auf eine etwas andre Art an, wovon die Nachricht weiter unten folgen wird.

25 §.

Wenn die Geschwindigkeit c der Bewegung eines Körpers gegeben ist, so kann allemahl auch eine solche Höhe s angegeben werden, wovon ein schwerer Köper frey herab fallen muß, damit die von der Beschleunigung der Schwere ihm mitgetheilte Geschwindigkeit jener gegebenen gleich werde. Vermöge der im 20 §. schon aufgelöseten Aufgabe findet man diese Höhe $s = \frac{cc}{4g}$, und man kann sie kurz die mit der Geschwindigkeit c zusammengehörige Höhe des Falles nennen. Umgekehrt heißt alsdenn c die mit der Höhe des Falles cs zusammen gehörige Geschwindigkeit, und es ist gleichgültig, ob die Geschwindigkeit c der Bewegung eines Körpers selbst, oder statt derselben die mit ihr zusammengehörige Höhe des Falles s gegeben ist, weil durch diese Höhe s allemahl auch die Geschwindigkeit $c = 2\sqrt{gs}$ bestimmt wird.

26. §.

Um von den bisherigen Lehren bey der ausübenden Mechanik Gebrauch zu machen, muß die lothrechte Höhe g soviel möglich richtig bekannt seyn, wovon ein schwerer Körper in der ersten Secunde frey herab fällt, wenn weder die Luft, noch sonst etwas seine Bewegung verzögert. Wenn man nur einmahl die Zeit genau beobachten könnte, die während des Falles von einer bekannten genau abgemessenen Höhe verfließt; so hätte man s und t in der Gleichung $s = gtt$, und man könnte $g = \frac{s}{t^2}$ finden. Allein der Versuch müste im luftleeren Raum angestellet werden, deßwegen ist es nicht wohl möglich, die Einrichtung so zu machen, daß die Höhe des Falles groß genug sey, um die Zeit des Falles scharf genug bemerken zu können. Nach dem Riccioli wäre $g = 15$ Röm. Fuß, und nach dem Dechales $16\frac{1}{4}$ Fuß. Nach der Zeit aber hat man Mittel gefunden, aus andern Beobachtungen, die nicht so mühsam anzustellen sind, diese Höhe richtig genug durch Rechnung zu finden, und man kann hier vorläufig bemerken, daß diese Höhe g $15\frac{5}{8}$ oder 15,625 Rheinl. Fuß betrage. Wenn also ein schwerer Körper 1000 Rheinl. Fuß hoch frey herab fiele, so würde er eine Geschwindigkeit von $2\sqrt{15625}$, oder

250 Rheinl. Fussen erlangen. Ueberhaupt aber ist $c = 2\sqrt{15,625 . s}$, und die Zahl 15625 ist eine vollkomene Quadratzahl, ihre Wurzel 125: wenn also die Höhe s in Tausendtheilen oder 10theiligen Scrupeln eines Rheinl. Fusses ausgedrückt wird, so hat man $c = 2\sqrt{15625 . s} = 250\sqrt{s}$ in eben solchen Rheinl. Scrupeln.

Wenn $s = g$ ist, so hat man $c = 2g = 31\frac{1}{4}$ Rheinl. Fuß, und das ist die Geschwindigkeit, welche die Schwere einer jeden frey herabfallenden Masse in der ersten Secunde mittheilt.

27 §.

Wenn der schwere Punct in der Zeit T von A bis M fällt, so ist in M seine Geschwindigkeit $= 2g\mathrm{T}$, und wenn er in der nun folgenden Zeit t weiter von M bis N fällt, so ist in N seine Geschwindigkeit $= 2g\,(\mathrm{T} + t) = 2g\,\mathrm{T} + 2gt$. Wäre er in M noch in Ruhe gewesen, so hätte er durch den Fall von M, bis N ebenfalls die Geschwindigkeit $2gt$ erlangt: also wird die Geschwindigkeit, welche er in M schon hat, um eben so viel in der Zeit t vermehrt, als die Schwere ihm mitgetheilt hätte, wenn er auch im Anfang der Zeit t noch in Ruhe gewesen wäre. Diesemnach wirkt die Schwere in einen Körper, der schon in Bewegung ist, bey jeder schon erlangten Geschwindigkeit noch eben so, wie sie seit dem ersten Anfang der Bewegung auf ihn wirkte, sie vermehrt in jedem folgenden Zeittheilchen die schon erlangte Geschwindigkeit um eben so viel, als sie selbige im nächstvorhergehenden und jedem andern eben so grossen Zeittheilchen vermehrt hatte: in jeder folgenden Secunde beträgt diese Vermehrung $31\frac{1}{4}$ Rheinl. Fuß. Wenn eine andre von der Schwere verschiedene bewegende Kraft V einer Masse nach einerley gradlinichten Richtung in gleichen Zeittheilchen ebenfalls gleiche Vermehrun- 85F.

mehrun-

mehrungen der Geschwindigkeit mittheilte, so würde sie ihre Masse eben so wie die Schwere gleichförmig beschleunigen; übrigens könnten wohl die in jedem folgenden Zeittheilchen hinzukommenden Vermehrungen der Geschwindigkeit grösser oder kleiner seyn, als diejenigen welche die Schwere verursachen würde. Eine Kraft welche die Geschwindigkeit der von ihr bewegten Masse in jeder Secunde um mehr oder weniger als $31\frac{1}{4}$ Rheinl. Fuß vermehre, würde im ersten Fall stärker, im andern Fall weniger als die Schwere beschleunigen. Jede Kraft, wenn sie eine Masse gleichförmig beschleuniget, heißt eine **beständige Kraft**, und von der Art ist die Schwere: eine Kraft aber die in gleichen Zeittheilchen der bewegten Masse bald mehr bald weniger Vermehrung der Geschwindigkeit zusetzt, kann eine **veränderliche Kraft** heissen.

28. §.

85F. Ein schwerer Punct der in dem Augenblick, wenn er bey M vertical herab zu fallen anfängt, schon eine gewisse Geschwindigkeit $= h$ hätte, die ihm durch einen Stoß nach der Richtung MB oder sonst auf andre Art mitgetheilt seyn könnte, behält diese Geschwindigkeit während der Bewegung, und sie wird während der Zeit t noch um den Zusatz $2gt$ vermehrt; nach Verlauf der Zeit t ist die Geschwindigkeit $= h + 2gt$ Wäre dagegen anfangs ein schwerer Punct in B befindlich, und würde demselben zwar in lothrechter Richtung aber aufwärts nach BM eine Geschwindigkeit $= h$ mitgetheilt, so würde wegen der Trägheit seine Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit t noch $= h$ seyn. Allein während der Zeit t hat auch die Schwere nach entgegen gesetzter Richtung gewirkt, so daß er nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit $2gt$ in

entge-

entgegen gesetzter Richtung hätte, und mit beyden Geschwindigkeiten zugleich kann sich der Punct nicht bewegen. Was demnach sonst Zusätze zur Geschwindigkeit sind, wenn die Richtung der Schwere mit der Richtung der Bewegung übereinstimmig ist, das müssen nun Verminderungen der Geschwindigkeit seyn, wenn die Richtung der Schwere der Richtung der Bewegung, worin die Masse sonst vermöge der Trägheit unverändert bleiben würde, entgegen gesetzt ist: demnach ist nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit noch $= h - 2gt$. Die anfängliche Geschwindigkeit h nimmt in gleichen Zeittheilen um gleiche Differenzen ab, und der schwere Punct steigt mit gleichförmig verminderter Bewegung.

Wenn $2gt = h$ wird, so verschwindet die Geschwindigkeit der aufwärts gerichteten Bewegung, mithin kommt der Punct völlig zur Ruhe, wenn die Zeit $t = \frac{h}{2g}$ verflossen ist. Weil aber die Schwere nicht aufhört, ihre Würkung zu äussern, so dauert diese Ruhe nur einen Augenblick: die Richtung der Bewegung verwandelt sich in die entgegengesetzte, der Punct fällt wieder herab, die Schwere beschleuniget während des Falles seine Bewegung, und nach Verlauf der Zeit $t = \frac{h}{2g}$ hat sie ihm die Geschwindigkeit $2g \cdot t = h$ wieder mitgetheilt.

29 §.

Der schwere Punct, welcher von M bis N 85 F. in der Verticallinie MB in der Zeit t herabgefallen ist, hatte im Anfang der Bewegung schon die vermittelst eines Stosses oder sonst auf andre Art ihm mitgetheilte Geschwindigkeit h nach der mit der Schwere übereinstimmigen Richtung MB: man soll die Höhe des Falles MN finden.

Aufl. Weil die Schwere auf den schon in Bewegung befindlichen Punct eben so, als in den noch ruhenden wirkt, so muß der Punct von M bis N eben so fallen, als wenn er seine Geschwindigkeit in M durch einen Fall von einer in derselben Verticallinie höher liegenden Stelle A durch den Raum AM erlangt hätte. Man setze $AM = S$, $MN = s$, also $AN = S + s$. Hätte nun der Punct in M seine Geschwindigkeit h durch den Fall von der Höhe $AM = S$ erlangt, so wäre $S = \frac{hh}{4g}$ (25 §.) Ferner wird die in N erlangte Geschwindigkeit $= h + 2gt$, (28 §.) also $AN = S + s = \frac{(h + 2gt)^2}{4g} = \frac{h^2}{4g} + ht + gtt$, und das giebt $s = MN = ht + gtt$.

Wenn $MD = ht$ genommen wird, so ist das der Weg, den der Punct allein wegen der Trägheit zurück gelegt hätte, die Bewegung durch den übrigen Theil des Weges DN aber rührt von der Beschleunigung der Schwere her.

30 §.

Der schwere Punct hat seine Bewegung in M mit der Geschwindigkeit $h = 2\sqrt{gs}$ angefangen und ist von der Höhe $MN = s$ herab gefallen: man soll die verflossene Zeit und die in N erlangte Geschwindigkeit finden.

Aufl. Es ist $s = ht + gtt$, also $tt + \frac{h}{g}t = \frac{s}{g}$. Man addire auf beyden Seiten $\frac{h^2}{4g^2}$, und nehme die Quadratwurzel, so findet man $t + \frac{h}{2g} =$ $\sqrt{\left(\frac{h^2}{4g^2} + \frac{s}{g}\right)}$, also $t = \frac{\sqrt{(h^2 + 4gs)} - h}{2g}$.

Man setze $2\sqrt{gS}$ statt h, so ist $t = \frac{\sqrt{g(S+s)} - \sqrt{gS}}{g}$

oder $t = \frac{\sqrt{(S+s)} - \sqrt{S}}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{AN} - \sqrt{AM}}{\sqrt{g}}$.

Die in N erlangte Geschwindigkeit sey c, so ist $c = h + 2gt = 2\sqrt{g} \,.\, AM + 2\sqrt{g} \,.\, AN - 2\sqrt{g} \,.\, AM$, oder $c = 2\sqrt{g} \,.\, AN$.

Hat der Punct die ganze Höhe MB zurück gelegt, so ist $t = \frac{\sqrt{AB} - \sqrt{AM}}{\sqrt{g}}$, und $c = 2\sqrt{g} \,.\, AB$.

31 §.

Der schwere Punct wird in B nach verti- 85 F.
caler Richtung BA durch einen Stoß oder auf andre Art in Bewegung gesetzt, so daß er mit der Geschwindigkeit h zu steigen anfängt: man soll die Höhe BM finden, um welche er nach Verlauf der Zeit t gestiegen ist.

Aufl. Man nehme an, daß m eine sehr grosse Zahl, also $\frac{t}{m}$ ein sehr kleines Zeittheilchen sey,

so ist am Ende der Zeit	die Geschwindigkeit
$\frac{t}{m}$	$h - 2g \cdot \frac{t}{m}$
$\frac{2t}{m}$	$h - 2g \cdot \frac{2t}{m}$
$\frac{3t}{m}$	$h - 2g \cdot \frac{3t}{m}$
⋮	
$\frac{nt}{m}$	$h - 2g \cdot \frac{nt}{m}$.

Wenn nun der steigende Punct während eines jeden Zeittheilchens die Geschwindigkeit, welche er im Anfang desselben hatte, unverändert behielte, und die Aenderungen der Geschwindigkeit am Ende eines jeden Zeittheilchens plötzlich vorgiengen; so wären die zurück gelegten Wege im ersten, zweyten, dritten, und den folgenden Zeittheilchen nach der Ordnung

Zeitth.		Zeitth.	
1	$h \cdot \frac{t}{m}$	4	$h \cdot \frac{t}{m} - 2g \cdot \frac{3t^2}{m^2}$
2	$h \cdot \frac{t}{m} - 2g \cdot \frac{t^2}{m^2}$	5	$h \cdot \frac{t}{m} - 2g \cdot \frac{4t^2}{m^2}$
		⋮	⋮
3	$h \cdot \frac{t}{m} - 2g \cdot \frac{2t^2}{m^2}$	n	$h \cdot \frac{t}{m} - 2g \cdot \frac{(n-1)t^2}{m^2}$

mithin nach Verlauf der Zeit $\frac{nt}{m}$ der ganze zurück gelegte Weg

$= h.$

$= h \cdot \frac{nt}{m} - \frac{2gt^2}{m^2}(1+2+3+\ldots(n-1)) = h \cdot \frac{nt}{m}$ $-(n-1)n \cdot \frac{gt^2}{m^2}$. Man setze $n = m$, so findet man für die Zeit den zurück gelegten Weg $= ht - \frac{m^2-m}{m^2} \cdot gt^2 = ht - (1 - \frac{1}{m})gt^2$, und dieser Ausdruck giebt den gesuchten Weg grösser, als der Sache gemäß ist, weil die in den Zeittheilen $\frac{t}{m}$ zurück gelegten Theile des Weges nicht völlig so groß sind, als die dafür angenommenen Theile dieser Summe. Aus dem 18 §. aber weiß man schon, daß die letzte dieser Summen, in der Voraussetzung, daß m unendlich groß, und $\frac{t}{m}$ unendlich klein werde, den gesuchten Weg richtig geben müsse, demnach ist $BM = ht - gtt$.

Weil der schwere Punct nur so lange steigen kann, bis $t = \frac{h}{2g}$ wird, (28 §.) so findet man die ganze Höhe BA, welche derselbe erreichen kann, wenn $t = \frac{h}{2g}$ gesetzt wird, und das giebt $BA = \frac{hh}{2g} - \frac{hh}{4g}$, oder $BA = \frac{hh}{4g}$. Eben diese Höhe gehört zu der anfänglichen Geschwindigkeit h, (25 §.) mithin steigt der schwere Punct so hoch, als er gefallen seyn müßte, wenn er die Geschwindigkeit durch den Fall erlangen sollte, womit er zu steigen anfängt.

Während des Falles von A bis B verfließt die Zeit $t = \sqrt{\frac{AB}{g}} = \sqrt{\frac{h^2}{4g^2}}$, (20 §.) also die Zeit $t = \frac{h}{2g}$, und eben so viel Zeit braucht der schwere Punct von B bis A zu steigen, mithin ist die Zeit des Steigens und Fallens von eben der Höhe zusammen $= \frac{h}{g}$.

32 §.

85F. Der schwere Punct hat in B seine Bewegung mit der Geschwindigkeit $h = 2\sqrt{g} \cdot BA$ angefangen, und ist bis M gestiegen: die Höhe $BM = s$ ist gegeben, und man soll die verflossene Zeit, auch die in M noch übrige Geschwindigkeit finden.

Aufl. Es ist $s = ht - gtt$, also $gtt - ht = -s$, und $tt - \frac{h}{g}t = -\frac{s}{g}$. Man addire auf beyden Seiten $\frac{h^2}{4g^2}$, und nehme die Quadratwurzel, so erhält man $\frac{h}{2g} - t = \sqrt{\left(\frac{h^2}{4g^2} - \frac{s}{g}\right)}$, und man findet $t = \frac{h - \sqrt{(h^2 - 4gs)}}{2g}$. Man setze $2\sqrt{g} \cdot BA$ statt h, und $s = BM$, so ist

$$t = \frac{2\sqrt{g} \cdot BA - \sqrt{4g \cdot (BA - BM)}}{2g}$$

oder $t = \frac{\sqrt{BA} - \sqrt{AM}}{\sqrt{g}}$.

Ferner

Ferner ist in M die Geschwindigkeit $c = h - 2gt$, also $c = 2\sqrt{g.BA} - 2\sqrt{g.BA} + 2\sqrt{g.AM}$, oder $c = 2\sqrt{g.AM}$.

Vergleicht man diese Auflösung mit der im 30 §. gegebenen, so erhellet, wenn die in M noch übrige Geschwindigkeit $2\sqrt{g.AM}$ in die entgegen gesetzte verwandelt würde, und nun der Punct von M nach B herab fiele, daß eben soviele Zeit verfliessen würde, als der Punct gebraucht hat von B nach M zu steigen, und daß er in B die erste Geschwindigkeit $2\sqrt{g.AB}$ würde wieder erlangt haben.

33 §.

Einen schweren Punct, dessen Masse $= M$ 83 F.
ist, wodurch man hier den Schwerpunct eines jeden festen Körpers verstehen kann, wird nach der Richtung AT, die gegen den Horizont unter einem gegebenen Winkel α geneigt ist, die Geschwindigkeit $= h$ mitgetheilt: man soll den Ort M dieses Puncts nach verflossener Zeit t finden.

Aufl. Es sey AR vertical, und A die Stelle, wo der Punct seine Bewegung anfängt. Ferner sey AH eine Horizontallinie in der verticalen Ebene RAT so ist HAT der gegebene Winkel α. Vermöge der Trägheit würde der Punct mit der Geschwindigkeit h in der graden Linie AT gleichförmig fortgehen, wenn nicht die Schwere ihn beständig gegen den Horizont in verticaler Richtung zu bewegen strebte, und sich der steigenden Bewegung widersetzte. Man nehme $AB = h$, und ziehe BC vertical, BD horizontal, so zerlegt sich die Geschwindigkeit h in die horizontale $AC = h \cos\alpha$ und die verticale $AD = h \sin\alpha$. Jene horizontale Geschwindigkeit bleibt unverändert, weil die Schwere ihr gar nicht entgegen ist, die verticale Geschwindigkeit $h \sin\alpha$ aber wird von der Schwere nach und nach vermindert, und die steigende Bewegung wird eben so verzögert, als wenn sonst ein schwerer Punct lothrecht in die Höhe steigt. Beyde Bewegungen die horizontale und verticale sind einander gar nicht hinderlich und können zugleich ihren ungehinderten Fortgang haben, wenn sonst keine Ursachen vorhanden sind, welche die Bewegung ändern. Demnach hat der Punct M nach Verlauf der Zeit t in horizontaler Richtung den Weg $ht \cos\alpha$, in verticaler Richtung aber den Weg $ht \sin\alpha - gtt$, zurückgelegt, (2. 31 §.) und wenn AP $= ht \cos\alpha$, AR $= ht \sin\alpha - gtt$ genommen, aus diesen Seitenlinien aber das Rechteck RAPM verzeichnet wird, so ist M der gesuchte Ort des Puncts nach Verlauf der Zeit t.

34 §.

83F. Man setze AP $= x$, PM $=$ AR $= y$, so hat man $x = ht \cos\alpha$, also $t = \frac{x}{h \cos\alpha}$, und $y = ht \sin\alpha - gtt$. In diese letzte Gleichung setze man den Werth $t = \frac{x}{h \cos\alpha}$, so ist $y = x \tang\alpha - \frac{gx^2}{h^2 \cos\alpha^2}$, und man kann für jeden willkührlich angenommenen Werth $x =$ AP den damit zusammen gehörigen Werth $y =$ PM finden. Alle so gefundene Puncte M liegen alsdenn in der Bahn des Puncts M, und weil man soviele und einander so nahe liegende Puncte M als man will, vermittelst der Gleichung $y = x \tang\alpha - \frac{gx^2}{h^2 \cos\alpha^2}$ finden kann; so läßt sich hiernächst die Bahn durch alle diese Puncte zeichnen. Es ist keine

grade

grade Linie, weil sonst y sich wie x verhalten müßte, und daß es eine krumme Linie seyn müsse, die ihre hohle Seite dem Horizont zukehrt, und ganz in der verticalen Ebene DAB liegt, erhellet aus der Natur der Sache, weil die Schwere die Richtung der Bewegung alle Augenblick, und zwar beständig in einerley verticalen Ebene DAB gegen den Horizont zu ändert.

35 §.

Der schwere Punct steigt anfangs im Bogen AM, erreicht aber nur eine bestimmte lothrechte Höhe EG als die gröste, und sinkt hiernächst im Bogen GH wieder gegen den Horizont herab. Denn die gefundene Gleichung läßt sich so ausdrücken $y = \frac{g}{h^2} \cdot \left(\frac{h^2 \sin\alpha}{g} - \frac{x}{\cos\alpha}\right)\frac{x}{\cos\alpha}$, und die Summe der beyden letzten Factoren ist unveränderlich $= \frac{h^2 \sin\alpha}{g}$, wenn gleich x und y Aenderungen leiden: also ist y am grösten, wenn beyde Factoren gleich groß sind. Man setze $\frac{h^2 \sin\alpha}{g} - \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{x}{\cos\alpha}$, so giebt das $\frac{2x}{\cos\alpha} = \frac{h^2 \sin\alpha}{g}$, mithin $x = \frac{h^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2g}$, oder $x = \frac{h^2 \sin 2\alpha}{4g}$. Man nehme AE $= \frac{h^2 \sin 2\alpha}{g}$, und setze diesen Werth statt x in die Gleichung $y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{h^2 \cos\alpha^2}$, so findet man $y = \text{EG} = \frac{h^2 \sin\alpha^2}{2g} - \frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g} = \frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g}$, als die gröste Höhe, die der Punct erreicht. Seine lothrechte Geschwindigkeit war $h \sin\alpha$, und zu dieser gehört die Höhe $\frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g}$, wie erfordert wird.

36 §.

Setzt man $x = \frac{h^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2g}$ in die Gleichung $t = \frac{x}{h \cos\alpha}$, so wird $t = \frac{h \sin\alpha}{2g}$ gefunden, als die Zeit, welche der Punct in dem steigenden Bogen zubringt, wie ebenfalls dem 28 §. gemäß ist. Eben soviele Zeit braucht der Punct von der Höhe GE wieder bis in die Horizontallinie AH herab zu fallen, während eben der Zeit geht dieser Punct in horizontaler Richtung einen Weg $h \cos\alpha \,.\, \frac{h \sin\alpha}{2g} = \frac{h^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2g}$ von E nach H fort, und daraus erhellet schon das EH = AE seyn müsse, wenn der Punct bey H wieder in der Horizontallinie AE anlangt. Eben das giebt die Gleichung $y = x \tang\alpha - \frac{gx^2}{h^2 \cos\alpha^2}$, wenn man $y = 0$ setzt. Dieser Ausdruck ist einmahl $= 0$, wenn $x = 0$ ist, also im Anfang der Bewegung, und überdem auch, wenn $\tang\alpha = \frac{gx}{h^2 \cos\alpha^2}$, also $x = \frac{h^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = 2$AE gesetzt wird. Demnach ist die ganze horizontale Weite AH $= \frac{h^2 \sin 2\alpha}{2g}$.

Wenn

Wenn der Punct in der Horizontallinie AE den 83F.
Boden noch nicht erreichte, sondern ungehindert noch tiefer fallen könnte, so würde er den Weg HN nehmen, den man aus der Gleichung $y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{h^2 \cos \alpha^2}$ ebenfalls verzeichnen kann, wenn man für x Werthe nimmt, die grösser als $\frac{h^2 \sin 2\alpha}{2g}$ sind: man findet alsdenn für y negative Werthe, weil die Linien PM nun die entgegengesetzte Lage LN in Ansehung der Horizontallinie AH annehmen.

37 §.

In jedem Punct M seiner Bahn behält der Punct seine Horizontale Geschwindigkeit $h \cos \alpha = Mc$, und nach Verlauf der Zeit t ist die verticale Geschwindigkeit $Md = h \sin \alpha - 2gt$, also die aus beyden zusammengesetzte $Mb = \sqrt{(hh - 4ght \sin \alpha + 4ggtt)}$. Die Richtungslinie schneidet den Horizont unter einem Winkel cMb, dessen Tangente $= \frac{h \sin \alpha - 2gt}{h \cos \alpha}$ ist. Diese Tangente verschwindet, wenn $t = \frac{h \sin \alpha}{2g}$ ist, also ist in G die Richtung horizontal: eben die Tangente des Neigungswinkels der Richtungslinie gegen den Horizont wird negativ, und der Winkel nimmt die entgegen gesetzte Lage an, wenn $t > \frac{h \sin \alpha}{2g}$ wird. Nach Verlauf der Zeit $t = \frac{h \sin \alpha}{g}$ ist die verticale Geschwindigkeit $= h$ wie im Anfang der Bewegung und des Neigungswinkels gegen den Horizont Tangente

$= -$

$= -\text{tang}\,\alpha$; mithin ist der Neigungswinkel bey H so groß, als er im Anfang der Bewegung bey A war, nur mit entgegengesetzter Lage.

Ueberhaupt sind beyde Bogen AG und GH, worin der Punct steigt und fällt, einander gleich und ähnlich. Man setze nemlich $EP = z$, also $AP = AE - EP$ $= \frac{h^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2g} - z$, man setze ferner diesen Werth statt x in die Gleichung $y = x \,\text{tang}\,\alpha - \frac{g x^2}{h^2 \cos\alpha^2}$, so findet man $x \,\text{tang}\,\alpha = \frac{h^2 \sin\alpha^2}{2g} - z\,tg\,\alpha$, $\frac{g x^2}{h^2 \cos\alpha^2}$ $= \frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g} - z\,tg\,\alpha + \frac{g \,.\, zz}{h^2 \cos\alpha^2}$, also $y = \frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g}$ $- \frac{g\,.\,zz}{h^2 \cos\alpha^2}$. Diese Gleichung giebt $y = \frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g}$ wenn z oder $EP = 0$ ist, wie erfodert wird, für gleiche und entgegen gesetzte Abscissen EP aber einerley Werth für y: woraus die Gleichheit und Aehnlichkeit der Bogen AG und GH folgt.

38 §.

Weil $EQ = PM = y$ wird, wenn man MQ wagrecht ziehet, so kann auch $EQ = y$ für die Abscisse genommen werden, alsdenn ist $QM = z$ die Ordinate, und man kann die zuletzt gefundene Gleichung so ausdrücken $\frac{gzz}{h^2 \cos\alpha^2} = \frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g} - y$, oder $zz = \frac{h^4 \sin\alpha^2 \cos\alpha^2}{4g^2} - \frac{h^2 \cos\alpha^2}{g} \,.\, y$. Man setze

GQ

$GQ = w$, also $EQ = y = EG - GQ = \frac{h^2 \sin\alpha^2}{4g}$
$- w$, so findet man $\frac{h^2 \cos\alpha^2}{g} . y = \frac{h^4 \sin\alpha^2 \cos\alpha^2}{4g^2}$
$- \frac{h^2 \cos\alpha^2}{g} . w$, und das giebt $zz = \frac{h^2 \cos\alpha^2}{g} . w$.
Aus dieser Gleichung läßt sich die Bahn des Puncts ebenfalls verzeichnen; zu jeder Abscisse $GQ = w$ gehören nun zwey gleich grosse einander entgegengesetzte Semiordinaten QM, Qm, und das Quadrat der Semiordinate z ist dem Rechteck der Abscisse w in die beständige Linie $\frac{h^2 \cos\alpha^2}{g}$ gleich, die so groß ist, als die vierfache Höhe, welche der erstern horizontalen Geschwindigkeit zugehört.

Eine Linie, welche diese Eigenschaft hat, heist in der höhern Geometrie die **Parabel**, der Punct G ihr **Scheitel**, die Abscissenlinie GE, welche alle darauf senkrechte Sehnen halbirt, ihre **Zwergaxe**, die beständige Linie $\frac{zz}{w}$, welche allemahl zur Abscisse und dazu gehörigen Semiordinate die dritte Proportionallinie ist, der **Parameter** der Parabel. In der höhern Geometrie wird bewiesen, daß die Durchschnittslinie allemahl diese Natur habe, wenn man einen Kegel so schneidet, daß die Ebene des Schnitts mit einer Seitenlinie des Kegels parallel ist.

39 §.

Wenn die erste Richtung des Wurfs horizontal ist, 76F. so ist $\alpha = 0$, und man hat im 33 §. $y = - \frac{gxx}{h^2}$.

Das

Das Zeichen (—) zeigt an, daß nun alle PM unter der Horizontallinie liegen, weil nun das für diesen besondern Fall ein für allemahl bekannt und der Natur der Sache gemäß ist, so kann man das Zeichen (—) weglassen, und für diesen besondern Fall $y = \frac{gxx}{h^2}$ setzen, da dann in der 76 Figur $x = AP$, $y = PM$ ist. Wenn man AQ lothrecht, und MQ wagrecht ziehet, so ist auch $AQ = y$, $QM = x$, und $xx = \frac{h^2}{g} . y$, oder $QM^2 = \frac{h^2}{g} . AQ$. Also ist auch in diesem Fall die Bahn des schweren Puncts eine Parabel, und ihr Parameter $\frac{h^2}{g}$ ist der vierfachen Höhe gleich, welche der ersten Geschwindigkeit zugehört, der Punct A ist ihr Scheitel, AQ ihre Zwergaxe, und die erste Richtungslinie AH berührt diese Parabel im Scheitel. Der Punct bewegt sich nun allein in dem fallenden Bogen wie GH in der 83 Figur war.

40 §.

Alle diese Lehren finden ihre Anwendung, wenn allen Elementen eines schweren Körpers zugleich nach einerley gegen den Horizont geneigten Richtung einerley Geschwindigkeit durch einen Wurf, einen Stoß, oder was es auch sonst für eine Ursache seyn mag, mitgetheilet wird. Ist diese Geschwindigkeit $= h$ in der unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Richtung, so hat jedes Element anfangs in horizontaler und verticaler Richtung die Geschwindigkeiten $h \cos \alpha$ und $h \sin \alpha$. Ueberdem ist die Verzögerung der Schwere, so wie im fallenden Bogen ihre Beschleuschleunigung, für alle Elemente einerley, jeder Punct bewegt sich so, wie jeder andre Punct des Körpers, und wie sich der Schwerpunct allein bewegen würde, wenn in ihm die ganze Masse des Körpers vereiniget wäre. In jedem Augenblick sind die Geschwindigkeiten aller Puncte gleich groß, und ihre Richtungen parallel. Weil jedoch die Rechnung vorausgesetzt, daß sich der Körper übrigens völlig frey bewege, so kann nicht alles mit dieser Rechnung vollkommen übereinstimmen, wenn schwere Körper in freyer Luft lothrecht in die Höhe, oder auch nach einer geneigten Richtung fortgeworfen werden, weil selbige der Bewegung desto mehr widerstehet, je grösser die Fläche der Masse ist, welche der Wirkung der Luft ausgesetzt ist, und je grösser die Geschwindigkeit ist, womit die Masse sich in der Luft fortbewegt. Bomben und Kanonenkugeln, welchen der erste Stoß durch die Gewalt des Pulvers mitgetheilt wird, bewegen sich sehr schnell durch die Luft, und eben darum ist der Widerstand der Luft bey ihnen sehr beträchtlich. Man hat indessen die bisher vorgetragene Theorie seit des Galiläus Zeiten so lange gebraucht, als man den Widerstand der Luft noch nicht so weit kannte, daß man die Wirkung desselben mit in Rechnung ziehen konnte. Zwar findet man die Schußweiten bey angestellten Proben sehr viel kleiner, als sie nach der Theorie gefunden werden, wenn der Widerstand der Luft beyseit gesetzt wird, indessen glaubte man doch gefunden zu haben, daß bey einerley Pulverladung, wenn sonst alles übrige einerley, und nur die Erhöhungswinkel verschieden wären, die horizontalen Schußweiten sich so ziemlich richtig wie der Sinus des doppel-

doppelten Erhöhungswinkels verhielten, welches der Theorie, die $AH = \frac{h^2 \sin 2\alpha}{2g}$ giebt, gemäß ist.

41 §.

83F. Wenn $\alpha = 15°$ genommen wird, so ist $\sin 2\alpha = \sin 30° = \frac{1}{2}$, und $AH = \frac{h^2}{4g}$, also die horizontale Schußweite so groß, als die der ersten Geschwindigkeit zugehörige Höhe. Dieserwegen wählte man gewöhnlich den Erhöhungswinkel von 15° für den Probeschuß, um AH für diesen Winkel, und eine gegebene Pulverladung aus der Erfahrung zu finden, und suchte die Schußweiten für andre Erhöhungswinkel und dieselbe Pulverladung durch Rechnung vermittelst einer Regel Detri. Ward bey der Probe $AH = k$ gefunden, so schloß man für einen andern Winkel α sey $\sin 30° : \sin 2\alpha = k :$ ges. Schußweite $= \frac{k \sin 2\alpha}{\sin 30°}$.

Die Weite des horizontalen oder so genannten Kernschusses hängt von der Höhe der Batterie, wo die Kanone oder der Mörser steht, über der Horizontalfläche der Stelle ab, wo die Bombe oder Kugel niederfällt. Für $AP = QM = x$, und $PM = AQ = y$ ist $y = \frac{gxx}{h^2}$, also $AQ = \frac{g \cdot QM^2}{h^2}$, mithin $QM = h\sqrt{\frac{AQ}{g}}$, und die Schußweiten verhalten sich, wenn alles übrige einerley ist, wie die Quadratwurzeln aus den Erhöhungen AQ.

42 §.

42 §.

Wenn kleine und dabey sehr dichte Körper sich in der Luft bewegen, und die anfänglich ihnen mitgetheilte Geschwindigkeit nicht groß ist, so ist ihr Weg ziemlich nahe eine Parabel, und die Rechnung aus den bisher erklärten Formuln trift mit dem wirklichen Erfolg ziemlich nahe zusammen. Alsdenn kann man nicht allein aus der schon bekannten anfänglichen Geschwindigkeit ziemlich richtig die Weite des Wurfs, sondern auch umgekehrt aus der gemessenen Weite des Wurfs die anfängliche Geschwindigkeit durch Rechnung finden, wenn der anfängliche Neigungswinkel gegeben ist. Weil nemlich $AH = \frac{h^2 \sin 2\alpha}{2g}$ war, so ist umgekehrt $h = \sqrt{\frac{2g \cdot AH}{\sin 2\alpha}}$. Für den horizontalen Wurf war $QM = h\sqrt{\frac{AQ}{g}}$, also ist umgekehrt 76F.
$h = QM \cdot \sqrt{\frac{g}{AQ}}$, da dann in beyden Fällen statt des ersten Neigungswinkels die Erhöhung $AQ = PM$ gegeben seyn muß.

Der III. Abschnitt.

Allgemeine Vergleichung der gleichförmig beschleunigenden Kräfte mit der Schwere.

43 §.

Wenn die Masse M von einer beständigen Kraft V in einerley gradlinichten Richtung sonst nach eben den Gesetzen, wie von der Schwere beschleuniget würde, nur mit dem Unterschiede, daß die Vermehrung der Geschwindigkeit in gleichen Zeittheilen mehr oder weniger betrüge, als die von der Schwere in eben so grossen Zeittheilen bewirkte Geschwindigkeit; so würden alle bisherige Lehren ihre Anwendung finden, nur würde das, was in den bisherigen Formuln g hieß, für eine solche Kraft grösser oder kleiner als für die Schwere seyn. Man nehme an, diese Kraft V theile der bewegten Masse in der ersten Secunde die Geschwindigkeit k mit, so wäre nach Verlauf der Zeit t der Masse Geschwindigkeit $C = K . t$, (16 §.) und der in der Zeit t zurück gelegte Weg $S = \frac{1}{2}Ktt$. (17 §.) Wird nun der in der ersten Secunde zurück gelegte Weg $= G$ gesetzt, so hat man $G = \frac{1}{2}K$, und $K = 2G$, mithin $C = 2G . t$, und $S = G . tt$, da dann diese Formuln für die Schwere gelten, wenn $G = g = 15\frac{5}{8}$ Rheinl. Fuß gesetzt wird.

Wie nun die Schwere, wenn die Bewegung, worinn sie eine Masse sonst setzen würde, durch einen Widerstand gehindert wird, diese Masse gegen den Widerstand drückt; so erhellet, daß jede Kraft, die sonst eine Masse in Bewegung setzen würde, wenn kein Widerstand die Bewegung hemmte, diese Masse ebenfalls gegen den Widerstand drücken müsse. Das, was die Masse bewegt, ist an sich einerley mit dem, was sie gegen den Widerstand preßt, der die Bewegung aufhält: und wenn eine schwere Masse sinkt, so wirkt die Schwere in jedem Punct ihres Weges eben so auf die Masse, wie sie alsdenn thut, wenn die Masse auf einer wagrechten Tafel ruhig liegt. Beyde Wirkungen sind nur wegen der äussern Umstände verschieden, unter welchen sich die Masse befindet, und sie fallen deswegen auf verschiedene Art in die Sinne. Mit

einer

einer jeden andern Kraft hat es eben die Bewandniß, wenn gleich die Richtung, nach welcher sich ihre Wirkung äussert, von der Richtung der Schwere verschieden ist: wird die Bewegung der Masse durch ein ihrer Richtung grade entgegen gesetztes Hinderniß aufgehalten, so entsteht das, was in den mechanischen Wissenschaften **Druck** heißt, und von der Grösse dieses Drucks hat man einen bestimmten Begriff, wenn man ein Gewicht angeben kann, das, wenn es unterstützt ist, in lothrechter Richtung eben so stark drückt.

44 §.

Die von einer bewegenden Kraft bewirkte Beschleunigung der bewegten Masse, wenn die Bewegung durch kein Hinderniß aufgehalten wird, ist ohne Zweifel desto grösser, je grösser die Geschwindigkeit ist, die sie der Masse in bestimmter Zeit mittheilt. Wenn k und K die Geschwindigkeiten sind, welche einer Masse M von der Schwere, oder eben der Masse von einer andern Kraft V würden mitgetheilt werden; so ist die von der Kraft V gewirkte Beschleunignng der Masse M 2mahl, 3mahl, und überhaupt $n$mahl grösser als die von der Schwere gewirkte Beschleunigung eben der Masse wäre, wenn K 2mahl, 3mahl und überhaupt $n$mahl grösser als k ist. Setzt man voraus, daß die Kraft V wie die Schwere gleichförmig beschleunige, so wächst die Geschwindigkeit der bewegten Masse in jeder folgenden Secunde um den Zusatz $K = nk$, wenn die Geschwindigkeit der schweren Masse in jeder Secunde um den Zusatz k wächst. Demnach kann man festsetzen: **die Beschleunigungen gleichförmig wirkender Kräfte verhalten sich wie die Geschwindigkeiten, welche sie den bewegten Massen in gleichen Zeiten mittheilen.**

Eben diese Geschwindigkeiten verhalten sich, wie die Wege, welche die Massen, wenn sie ihre Bewegung von der Ruhe anfangen, in der ersten Zeitsecunde zurück legen. Denn es ist $c = kt = 2gt$, und $C = Kt = 2Gt$, also $C : c = G : g$, wenn t einerley ist; also giebt jener Satz die Folge: die Beschleunigungen gleichförmig wirkender Kräfte verhalten sich wie die Wege, welche die von ihnen bewegten Massen während der ersten Zeitsecunde von der Ruhe an zurücklegen. Deswegen kann dieser in der ersten Secunde von der bewegten Masse zurück gelegte Weg die von der bewegenden Kraft bewirkte Beschleunigung der Masse heissen: er ist das Maaß der Beschleunigung, weil er derselben proportional ist, in einem ähnlichen Verstande, wie ein Kreisbogen das Maaß eines Winkels ist.

In diesem Sinn also ist $g = 15\frac{5}{8}$ Rheinl. Fuß die Beschleunigung der Schwere, und wenn für eine andre Kraft $G = n \cdot g$ ist, so ist ihre Beschleunigung $n$mahl grösser, als die Beschleunigung der Schwere.

45 §.

Der Weg, welchen eine Masse, die von einer bewegenden Kraft gleichförmig beschleuniget wird, in bekannter Zeit t zurück legt, ist gegeben: man soll die von der Kraft bewirkte Beschleunigung der Masse finden.

Aufl. Es sey G der in der ersten Zeitsecunde, und S der in der Zeit t zurück gelegte Weg, so ist $S = G.tt$, und man findet die Beschleunigung $G = \frac{S}{tt}$, wenn man den zurück gelegten Weg mit dem Quadrat der verflossenen Zeit dividirt.

Wenn umgekehrt die Beschleunigung G einer bewegenden Kraft V gegeben ist, und man soll den Weg S finden, den die beschleunigte Masse in gegebener Zeit t zurück legt, so hat man $S = G.tt$.

46 §.

Eine Kraft V strebt die Masse A nach der Richtung Aa zu bewegen, und eine andre Kraft W strebt dieselbe Masse zugleich nach der grade entgegen gesetzten Richtung $A\alpha$ zu bewegen: ich sage, wenn die Beschleunigungen beyder Kräfte gleich sind, so bleibt die Masse in Ruhe. Denn beyde Kräfte würden der Masse A in gleichen Zeiten gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeiten mittheilen, also kann A nie in Bewegung kommen. Beyde Kräfte erhalten also einander im Gleichgewicht und drücken gegen einander gleich stark. (31 §. Stat.) Wofern also zwo Kräfte gleiche Massen, die durch einen Widerstand aufgehalten werden, gleich stark beschleunigen würden, so pressen sie diese Massen gegen den Widerstand gleich stark. Denn der Widerstand thut eben dasselbe, was jede dieser Kräfte thun würde, wenn sie der andern entgegengesetzt wäre, und diese Kräfte würden gegen einander gleich stark drücken. 86 F.

47 §.

Gleiche materielle Puncte werden von der Schwere gleich stark beschleuniget, (24 §.) also drückt die Schwere gleiche körperliche Puncte gegen einen Widerstand gleich stark: das heißt, die Gewichte gleicher Puncte sind gleich groß. Demnach hat die doppelte Masse ein doppeltes Gewicht, und überhaupt sind die Gewichte ungleicher Massen eben diesen Massen proportional. Diese Gründe geben also dem im 11 §. der Statik schon angenommenen Satz seine völlige Gewißheit. Der Satz kann übrigens allgemein so ausgedrückt werden: **Wenn die Bewegung ungleicher Massen durch einen Widerstand aufgehalten wird, und auf gleiche Theilchen dieser Massen solche Kräfte wirken, welche sie insgesammt gleich stark beschleunigen würden, so verhalten sich die Pressungen gegen den Widerstand, wie die Massen.**

48 §.

86F. **Wenn die Beschleunigungen der an der Masse nach den entgegengesetzten Richtungen** *Aa*, *Aα*, **angebrachten Kräfte** *V*, *W*, **nicht gleich groß sind, so kann die Masse** *A* **nicht in Ruhe bleiben.** Würde V für sich allein der Masse A in einer Secunde, oder in jeder andern Zeit, mehr Geschwindigkeit mittheilen, als W dieser Masse in eben der Zeit mittheilen würde; so vermindert W die von V bewirkte Geschwindigkeit, und die Masse A erlangt in jeder angenommenen Zeit eine Geschwindigkeit, die so groß ist, als der Ueberschuß der grössern Geschwindigkeit über die kleinere.

Bey dieser Voraussetzung wird die Masse A von den Kräften V und W ungleich stark gedrückt, denn widrigenfalls wären V und W im Gleichgewicht. **Wenn also zwo Kräfte gleiche Massen, deren Bewegung durch einen Widerstand gehemmet wird, ungleich stark beschleunigen würden, so pressen sie die Massen gegen den Widerstand mit ungleicher Stärke.**

49 §.

Von zwoen Kräften *V* **und** *W*, **die eine Masse** *A* **nach entgegengesetzten Richtungen gleich**

gleich stark drücken, also einander im Gleichgewicht erhalten, würde jede für sich allein die Masse eben so stark als die andre beschleunigen: denn widrigenfalls wären sie nicht im Gleichgewicht. (48 §.)

Auch zwo Kräfte, die gleiche Massen gegen einen Widerstand gleich stark drücken, beschleunigen nach gehobenem Widerstande diese Massen gleich stark. Wenn aber zwo Kräfte gleiche Massen gegen einen Widerstand ungleich stark drücken, so wird nach gehobenem Widerstande die eine Masse vom stärkern Druck mehr als die andre Masse vom schwächern Druck beschleuniget.

50 §.

Wenn an allen Elementen einer Masse solche Kräfte angebracht sind, daß gleiche Elemente dieser Masse gleichem Druck ausgesetzt sind, wenn ein Widerstand die Bewegung hemmet; so wird nach gehobenem Widerstande die ganze Masse, und jeder Theil von ihr so beschleuniget, wie jedes Element von ihr für sich allein würde beschleuniget werden. Ungleiche Massen, wenn gleiche Elemente von ihnen einem gleich starken Druck ausgesetzt sind, wenn mithin die Pressungen, welchen die Massen im ganzen ausgesetzt sind, sich wie die Massen verhalten, erlangen, wenn sie nach gehobenem Widerstande in Bewegung kommen, in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten. Eben darum legen sie auch in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück, weil in der Gleichung $S = \frac{1}{2} K . tt$, oder $S = G . tt$ (43 §.) K oder G für beyde einerley ist. Eine Pflaumfeder und ein Mühlstein würden von der Höhe eines Thurms in gleichen Zeiten herab fallen, und wenn beyde ihre Bewegung zugleich anfiengen, auch beyde zugleich den Boden erreichen, wenn die Luft nicht im Wege wäre, und die Bewegung der Feder weit mehr als die Bewegung des Mühlsteins verzögerte.

51 §.

86F. **Wenn die Beschleunigung einer Masse *B* von der bewegenden Kraft *V* doppelt so groß ist, als die von dem natürlichen Gewicht *P* der eben so grossen Masse *A* herrührende Beschleunigung dieser Masse *A*; so ist der Druck, womit die Kraft *V* die Masse *B* gegen einen Widerstand preßt, doppelt so groß, als das Gewicht *P* der Masse *A*.**

Beweis. Es sey DE eine ebene wagrechte Tafel, worauf die Masse A liegt, deren Gewicht $= P$ ist. Würde die Tafel plötzlich weggenommen, so würde A in der ersten Secunde um die Tiefe $Aa = g$ sinken, und in a die Geschwindigkeit $k = 2g$ erlangt haben. Ferner sey B eine andre Masse ohne Schwere, die der Masse A gleich ist, und eine Kraft V drücke diese Masse ebenfalls senkrecht gegen den Widerstand FG. Wenn alsdenn V die Masse B nach gehobenem Widerstande gleichförmig beschleuniget, B aber am Ende der ersten Secunde in b kommt; so ist vermöge der Voraussetzung $Bb = G = 2g = 2 . Aa$, und die in b erlangte Geschwindigkeit $K = 2k$. Nach welcher Richtung die Kraft V wirkt, ist gleichgültig. An B sey ein Druck $= P$ nach entgegen gesetzter Richtung $B\beta$ angebracht, welcher der Masse B in der ersten Secunde die Geschwindigkeit k in dieser Richtung mittheilen würde, so wird dadurch der Erfolg zuwege gebracht, daß B

zwar

zwar noch in der Richtung Bb fortrückt, aber nach Verlauf der ersten Secunde in dieser Richtung nur die Geschwindigkeit K — k = k erlangt. (48 §.) Ueberdem leidet B einen Druck = V — P, und es ist soviel, als wenn B das Gewicht V — P hätte. Weil nun dieser Druck V — P der Masse B nach gehobenem Widerstande in der ersten Secunde die Geschwindigkeit k, und P der eben so grossen Masse A in eben der Zeit eben die Geschwindigkeit mittheilt, so ist V — P = P, mithin V = 2P.

52 §.

Wenn überhaupt die von der Kraft *V* bewürkte Beschleunigung der Masse *B* ein vielfaches der Beschleunigung einer eben so grossen Masse *A* ist, die von ihrem Gewicht *P* herrührt; so ist der Druck *V* ein ähnliches vielfaches vom Gewicht *P*.

Beweis. Man nehme an, der Satz sey für einen besondern Fall wahr, es sey V = nP, wenn K = nk ist; einandermahl aber sey K = (n + 1) k. An B sey wiederum ein Druck = P in der Richtung Bβ angebracht, so hat das den Erfolg, daß B in der Richtung Bb während der ersten Secunde die Geschwindigkeit K — k = nk erlangt. Ueberdem leidet B den Druck V — P, und weil dieser der Masse B während der ersten Secunde die Geschwindigkeit nk, P aber der eben so grossen Masse in eben der Zeit die Geschwindigkeit k mittheilen würde; so ist vermöge der Voraussetzung V — P = nP, also auch V = (n + 1) P. Weil nun der Satz wahr ist für n = 2 (51 §.) so ist er auch wahr für n = 3, mithin für n = 4, u. s. f für jede ganze Zahl, die man statt n annehmen will.

53 §.

Wenn eine Kraft V die Masse M, die man sich übrigens ohne Schwere vorstellen muß, gleichförmig beschleuniget, und wenn das Gewicht einer schweren eben so grossen Masse $= P$ ist; so verhält sich V zu P, wie die von der Kraft V bewürkte Beschleunigung der Masse M zur Beschleunigung der Schwere.

Beweis. Die Beschleunigung der Schwere sey wie bisher $= g$, die Beschleunigung der Kraft $V = G$: ferner sey $G : g = m : n$, wenn m und n ein Paar ganze Zahlen sind, also $mg = nG$. Wenn nun eine Kraft X eine Masse $= M$ bewegt und ihre Beschleunigung $= mg$ ist, so ist $X = mP$; wenn ferner eine andre Kraft Y eine eben so grosse Masse M bewegt, und ihre Beschleunigung $= nG$ ist, so hat man $Y = nV$. (52 §.) Es war aber $mg = nG$, also ist $X = Y$, (46 §.) mithin ferner $mP = nV$, und $V : P = m : n$, also auch $V : P = G : g$.

Wofern das Verhältniß $G : g$ irrational ist, so sey $G = \frac{m}{n} g + R$ und $R < \frac{1}{n} g$, mithin $G > \frac{m}{n} g$, und $G < \frac{m+1}{n} g$. Dies vorausgesetzt hat man zugleich allemahl $V = \frac{m}{n} P + R$, und $R < \frac{1}{n} P$, oder $V > \frac{m}{u} P$ und $V < \frac{m+1}{n} P$. Einer Kraft W Beschleunigung sey $\gamma = \frac{m}{n} g$, so ist $W : P = \frac{m}{n} g : g$,

$:g$, und $W = \frac{m}{n} P$. Einer andern Kraft Z Beschleunigung derselben Masse sey $\zeta = \frac{m+1}{n} g$, so ist $Z : P = \frac{m+1}{n} g : g$, also $Z = \frac{m+1}{n} P$. Ueberdem ist $V > W$, und $V < Z$. Denn wäre $V = W$, so wäre $G = \gamma = \frac{m}{n} g$, und wenn $V < W$ wäre, so hätte man $G < \gamma$ oder $G < \frac{m}{n} g$, (49 §.) beydes der Voraussetzung zuwider, also ist $V > W$. Wäre $V = Z$, so wäre $G = \zeta = \frac{m+1}{n} g$, und wenn $V > Z$ wäre, so hätte man $G > \frac{m+1}{n} g$ (49 §.) wiederum beydes gegen die Voraussetzung: mithin ist $V < Z$. Demnach ist allemahl

$$V > \frac{m}{n} P \text{ und } V < \frac{m+1}{n} P,$$

$$\text{wenn } G > \frac{m}{n} g \text{ und } G < \frac{m+1}{n} g \text{ ist,}$$

folglich $V : P = G : g$ (162 §. Geom.)

54 §.

Man kann diesen Schlüssen gemäß die Beschleunigung einer jeden gleichförmig beschleunigenden Kraft mit der Beschleunigung der Schwere vergleichen, und dabey die letztere für Eins annehmen. Weil nun $\frac{G}{g} = \frac{V}{P}$ ist, so giebt der Quotient $\frac{V}{P}$ an, wie groß die

Beschleu-

Beschleunigung der Kraft V in Vergleichung mit der Beschleunigung der Schwere sey. Es ist daher nicht ungewöhnlich, daß man den Quotienten $\frac{V}{P}$ selbst die Beschleunigung der Kraft V nennt, in einem ähnlichen Sinn, wie man auch die Zahl, welche die Dichtigkeit einer Masse in Vergleichung der Dichtigkeit des Wassers angiebt, die Dichtigkeit dieser Masse nennt. Wird alsdenn jener Quotient $\frac{V}{P}$ mit der Beschleunigung der Schwere g multiplicirt, so hat man die Beschleunigung der Kraft V oder $G = \frac{gV}{P}$ in eben dem Längenmaaß, worin g ausgedrückt ist. Weil übrigens die Massen der Körper sich wie ihre Gewichte verhalten, und man die Grösse einer Masse nicht anders als durch ihr Gewicht angeben kann, das sie nahe an der Erdfläche hat; so schreibt man auch wohl M statt P, und setzt $G = \frac{gV}{M}$, allein man muß doch allemahl statt M das natürliche Gewicht dieser Masse setzen, so wie übrigens auch der Druck V durch ein Gewicht angegeben wird, dessen lothrechter Druck eben so groß als V wäre.

55 §.

Die Kraft V, welche die Masse M beschleuniget, ist gegeben, man sucht die Grösse des Weges s, den die Masse in gegebener Zeit t zurück legt, und die Geschwindigkeit c, welche sie nach Verlauf der Zeit t erlangt hat.

Aufl.

Aufl. Es ist $s = Gtt$, wenn G die Beschleunigung der Kraft V bezeichnet, (44 §.) und $G = \frac{gV}{M}$ (54 §.) also $s = \frac{gV}{M} . tt$. Ferner ist $c = 2Gt$, (44 §.) also $c = \frac{2gV}{M} . t$.

Hätte die Masse ihre Bewegung mit der Geschwindigkeit h angefangen, so wäre $s = ht + Gtt$, und $c = h + 2Gt$, (43 §.) also $s = ht + \frac{gV}{M} . tt$ und $c = h + \frac{2gV}{M} . t$. Beydes in der Voraussetzung daß die Richtung nach welcher die Masse von der Kraft V beschleuniget wird, mit der Richtung der anfänglichen Bewegung eine übereinstimmige Lage habe. Wäre die Richtung der Kraft V der Richtung der anfänglichen Bewegung entgegen gesetzt, so müßte man $G = -\frac{gV}{M}$, also V als eine negative Grösse in Rechnung bringen und man hätte $s = ht - \frac{gV}{M} . tt$, so wie $c = h - \frac{2gV}{M} . t$.

Wenn die Bewegung von der Ruhe anfängt, also $s = \frac{gV}{M} . tt$ ist, so findet man $t = \sqrt{\frac{M}{gV} . s}$ als die verflossene Zeit, wenn der zurückgelegte Weg s gegeben ist. Ferner ist $c^2 = 4Gs$ (25. 43 §.) weil

G hier das ist, was a. a. O. g war, also $c^2 = \frac{4gV}{M} s$,

woraus man $s = \frac{M \cdot cc}{4gV}$, und $c = 2\sqrt{\frac{gV}{M} \cdot s}$ erhält.

56 §.

Wenn eine in Bewegung befindliche Masse mehr Geschwindigkeit bekommt, als sie vorher hatte, so bekommt sie in eben dem Verhältniß mehr Bewegung. Wenn ferner eine doppelte Masse eben soviel Geschwindigkeit hat, als eine andre einfache, so sind in der doppelten Masse nochmahl soviele Theile als in der einfachen in einerley Bewegung: daher verhalten sich bey gleichen Geschwindigkeiten die Grössen der Bewegung ungleicher Massen wie die Massen. Diesemnach sind die Verhältnisse der Bewegungen ungleicher Massen bey ungleichen Geschwindigkeiten zusammengesetzt aus den Verhältnissen der Massen und Geschwindigkeiten, oder die Grösse der Bewegung einer Masse verhält sich wie das Product dieser Masse in ihre Geschwindigkeit. Wenn die Massen M, m, sich mit den Geschwindigkeiten C, c, gleichförmig bewegen, und Q, q, die Grösse ihrer Bewegungen bezeichnen; wenn ferner eine dritte Masse $N = M$ sich mit der Geschwindigkeit c gleichförmig bewegt, und k die Grösse ihrer Bewegung bezeichnet;

so ist $Q : K = C : c$

und $K : q = M : m$

also $Q : q = M \cdot C : m \cdot c$.

Man nehme an, daß V und W ein Paar Kräfte sind, welche die Massen M, m, gleichförmig beschleunigen, und in einerley Zeit t ihnen die Geschwindig-

keiten

keiten C, c, mittheilen, so ist $C = \frac{2gV}{M} . t$, $c = \frac{2gW}{m} . t$, also $C : c = \frac{V}{M} : \frac{W}{m}$, mithin $V : W = M . C : m . c$ oder die Kräfte verhalten sich wie die Bewegungen, die sie ihren Massen in gleichen Zeiten mittheilen.

57 §.

Wenn alle Theilchen einer Masse sie sey feste oder flüssig, nach parallelen Richtungen mit gleichen Geschwindigkeiten in Bewegung sind, und überdem alle diese Theilchen nach eben den Richtungen von Kräften beschleuniget werden, die ihren Massen proportional sind; so bleibt die Masse in dieser parallelen Bewegung, alle Theilchen bleiben während der Bewegung in einerley Lage neben einander, und keines von diesen Theilchen kann in dem Zustand der Bewegung der übrigen etwas ändern, keines kann den übrigen voreilen, oder zurück bleiben. Wenn die Kraft p ein Theilchen beschleuniget, dessen Masse m ist, und die Kraft π ein andres Theilchen, dessen Masse μ ist, so ist vermöge der Voraussetzung $p : \pi = m : \mu$, also die Beschleunigung $\frac{p}{m} = \frac{\pi}{\mu}$ für beyde einerley. Demnach ist die Geschwindigkeit $h \pm \frac{2gp}{m} . t$ oder $h \pm \frac{2g\pi}{\mu} . t$ für diese Theilchen eben so wie für alle übrige nach Verlauf jeder angenommenen Zeit t einerley, und jedes Theilchen bewegt sich so, als wenn es mit den übrigen nicht in Verbindung wäre, es mag

mit

mit denselben wie mit den Theilen eines festen Körpers zusammen hängen oder nicht.

Wenn P die Summe aller Kräfte p, und M die Summe aller Massen m ist, so hat man auch $\frac{P}{M} = \frac{p}{m}$ (168 §. Rech.) könnte man die ganze Masse M im Schwerpunct vereinigen, und in eben der Richtung eine Kraft P anbringen, so groß als die Summe aller durch die ganze Masse vertheilten Kräfte, so wäre nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit des Schwerpuncts $h \pm \frac{2gP}{M} t = h \pm \frac{2gp}{m} . t$ eben so groß, als die Geschwindigkeit eines jeden von den Theilchen der Masse einzeln genommen. Die Richtung dieser Kraft am Schwerpunct wäre nun die mittlere Richtung aller durch die ganze Masse vertheilten Kräfte, und die Kraft am Schwerpunct, wenn ihre Richtung jenen Kräften entgegen gesetzt wäre, würde, wenn die Masse eine feste Masse wäre, mit allen durch diese Masse vertheilten Kräften im Gleichgewicht seyn.

58 §.

Wenn ein fester Körper von einer Kraft P beschleuniget wird, deren Richtung durch den Schwerpunct gehet, oder auch von mehrern Kräften, in deren mittlern Richtung der Schwerpunct liegt; so geht der Körper mit paralleler Bewegung fort, und sein Schwerpunct bewegt sich eben so, als wenn in demselben die ganze Masse des Körpers beysammen wäre.

Beweis.

Beweis. Man stelle sich zuerst jedes von den 78F.
Theilchen A, B, C, der ganzen Masse M allein vor, die Masse eines solchen Theilchens sey $= m$, und an demselben sey eine Kraft $p = \frac{m}{M} P$ in der Richtung AD mit der Richtung der Bewegung GH parallel angebracht; so erhellet, wenn der feste Körper nicht von der Kraft P, sondern statt dessen von allen diesen Elementarkräften beschleuniget würde, daß der Zustand seiner Bewegung durch die Gleichung $c = h \pm \frac{2gp}{m} . t = h \pm \frac{2gP}{M} . t$ bestimmt würde, so wie es den Schlüssen im vor. §. gemäß ist. Wenn nun überdem am Schwerpunct G die Kraft P in der Richtung GH, an jedem Theilchen aber eine eben so grosse Elementarkraft, wie die vorige, nach entgegen gesetzter Richtung AE angebracht wird; so erhalten diese Elementarkräfte die vorigen im Gleichgewicht, und es ist eben soviel, als wenn die Kraft P am Schwerpunct allein angebracht wäre. Aber auch mit dieser Kraft P sind die entgegen gesetzten Elementarkräfte in der Richtung AE im Gleichgewicht, also erfolgt die Bewegung wegen der Elementarkräfte in der Richtung GH so wie es der Gleichung $c = h + \frac{2gP}{M} . t$ gemäß ist.

Der IV. Abschnitt.

Vom Falle schwerer Körper auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene.

59 §.

88F. Ein schwerer Punct M, dessen Gewicht $= P$ ist, sinkt auf der gegen den Horizont unter dem Winkel $CBA = \alpha$ geneigten völlig glatten Ebene AB, und wird von seinem respectiven Gewicht $P \sin \alpha$ in der Richtung AB beschleuniget, ohne daß etwa wegen der Friction der Masse des Puncts an der Ebene, oder wegen andrer Hindernisse, die Bewegung verzögert wird: man soll die Geschwindigkeit c des Puncts M nach Verlauf einer gegebenen Zeit t, und die Länge des zurück gelegten Weges finden.

Aufl. Der Weg AB des Puncts liegt in der Ebene des Winkels, unter welchen die schiefe Ebene gegen den Horizont geneigt ist, (103 §. Stat.) und die von dem respectiven Gewicht des Puncts bewürkte Beschleunigung desselben ist $= \frac{gP \sin \alpha}{P} = g \sin \alpha$.

Demnach ist $c = 2gt \sin \alpha$ und $s = gt^2 \sin \alpha$. (55 §.)

Fiele dieser schwere Punct in der Verticallinie AC frey herab, so würde er in der Zeit t die Geschwindigkeit $2gt$ erlangen, und diese Verhält sich zu der durch den schiefen Fall in gleicher Zeit erlangten Geschwindigkeit, wie $1 : \sin \alpha = AB$ $: AC$

: AC, also wie die Länge der Ebene zu ihrer Höhe, welches dem 44 §. gemäß ist, weil sich die bewegenden Kräfte so verhalten. Ferner würde beym lothrechten Fall in der Zeit t der Weg gtt zurück gelegt werden, und dieser verhält sich ebenfalls zu dem in eben der Zeit auf der schiefen Ebene zurück gelegten Wege, wie $1 : \sin\alpha = AB : AC$.

Es sey AM der in der Zeit t zurück gelegte gegen den Horizont geneigte Weg, und MF auf AM senkrecht, so sind die Dreyecke AMF, ACB einander ähnlich und es ist $AB : AC = AF : AM = 1 : \sin\alpha$. Demnach fällt eine schwere Masse durch den geneigten Weg AM in eben der Zeit, worin sie lothrecht von A bis F herabfallen würde, und AM, AF, sind Wege, die in gleichen Zeiten beschrieben werden. (Spatia isochrona).

60 §.

Wenn ein schwerer Punct auf einer schiefen Ebene sinkt, so ist in jeder Stelle M seines Weges die erlangte Geschwindigkeit eben so groß als sie seyn würde, wenn er von seiner höchsten Stelle A bis an eine durch M wagrecht gelegte Ebene lothrecht herab gefallen wäre.

Beweis. Wenn man $g\sin\alpha = G$ sezt, so ist auch $c = 2\sqrt{Gs}$ (55 §.) also $c = 2\sqrt{gAM\sin\alpha}$. Man ziehe MN horizontal, so ist $AN = AM\sin\alpha$, und man erhält $c = 2\sqrt{g \cdot AN}$. Eben diese Geschwindigkeit würde er erlangt haben, wenn er von A um die Höhe AN herab gefallen wäre.

61 §.

Die Zeit des schiefen Falles durch AM verhält sich zur Zeit des senkrechten Falles durch 88F.

eben die lothrechte Höhe AN, wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Höhe.

Beweis. Aus der Gleichung $AM = gt^2 \sin\alpha$ hat man die Zeit des schiefen Falles $t = \sqrt{\frac{AM}{g \sin\alpha}}$, und $AN = AM \sin\alpha$, also $t = \sqrt{\frac{AN}{g \sin\alpha^2}} = \frac{\sqrt{AN}}{\sin\alpha\sqrt{g}}$. Ferner ist die Zeit des lothrechten Falles von der Höhe $AN = \sqrt{\frac{AN}{g}}$; mithin die Zeit des schiefen Falles zur Zeit des lothrechten Falles von eben der Höhe wie $\frac{\sqrt{AN}}{\sin\alpha\sqrt{g}} : \frac{\sqrt{AN}}{\sqrt{g}} = 1 : \sin\alpha = AB:AC$.

62 §.

Jeder schwere Körper würde auf einer völlig glatten Ebene, wenn er gleichfalls mit einer völlig glatten Fläche an der Ebene anläge, damit keine Friction die Bewegung verzögerte, nach eben diesen Gesetzen herab sinken: er würde sich eben so bewegen, als wenn seine ganze Masse im Schwerpunct beysammen, und am Schwerpunct sein ganzes respectives Gewicht $P\sin\alpha$ mit der schiefen Ebene parallel angebracht wäre. Dabey würde doch erfordert werden, daß die Ebene ihn noch in der lothrechten Linie durch den Schwerpunct unterstützte, wiedrigenfalls könnte er nicht mit paralleler Bewegung sinken, er würde umfallen, und mit der Bewegung in der mit der Ebene parallelen Richtung würde zugleich eine Umlaufsbewegung entstehen. Daher rollt eine Kugel so herab, daß sie zugleich um ihren Schwerpunct umläuft.

63 §.

63 §.

Der schwere Punct hat in M seine Bewegung auf der schiefen Ebene AB mit einer Geschwindigkeit angefangen, die der gegebenen Höhe $= a$ zugehört: man soll die Zeit t finden, worin er den gegebenen Weg $MB = s$ zurück legt. 88 F.

Aufl. Man setze die anfängliche Geschwindigkeit $2\sqrt{ga} = c$, so ist $s = c.t + Gtt$, also $tt + \frac{c}{G}t = \frac{s}{G}$. Man addire auf beyden Seiten $\frac{c^2}{4G^2}$ und nehme alsdenn die Quadratwurzel, so findet man $t + \frac{c}{2G} = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4G^2} + \frac{s}{G}\right)}$ also $t = \frac{\sqrt{(c^2 + 4Gs)}}{2G} - \frac{c}{2G}$, oder $t = \frac{\sqrt{(ga + Gs)} - \sqrt{ga}}{G}$. Man nehme $MA = a \operatorname{cosec} \alpha$, ziehe AN lothrecht, und MN wagrecht, so ist $a = AM \sin \alpha = AN$. Ferner ist $s \sin \alpha = MB \sin \alpha = NC$,

$$\text{also } t = \frac{\sqrt{g(AN + NC)} - \sqrt{ga}}{g \sin \alpha} = \frac{\sqrt{AC} - \sqrt{AN}}{\sin \alpha \sqrt{g}}.$$

Die in B erlangte Geschwindigkeit ist $= c + 2gt \sin \alpha$. Wird diese $= h$ gesetzt, so findet man $h = 2\sqrt{ga} + 2\sqrt{gAC} - 2\sqrt{g}.AN = 2\sqrt{gAC}$.

64 §.

Bey einerley Erhöhungswinkel sind die auf der schiefen Ebene durchlaufenen Wege $AM = gtt \sin \alpha$ dem Quadrat der Zeit proportional, wie die lothrechten Höhen des Falles in verschiedenen Zeiten. Wenn nun α ein kleiner Winkel ist, so lassen sich die Zeiten des Falles auf der schiefen Ebene bequemer beobachten, als die Zeiten des lothrechten Falles, weil desto mehr Zeit für einerley Weg verfließt, je kleiner der Winkel α ist. Hiezu dient eine Kugel, die auf einer glatten Ebene herab rollet, weil der Umlaufsbewegung ungeachtet ihr Schwerpunct in der mit der Ebene parallelen Richtung eben so beschleuniget wird, als wenn sie ohne Umlaufsbewegung herab sänke. Diese letztere ist eine Würkung der Friction und die Bewegung des Schwerpuncts wird dadurch nicht verzögert. Galiläus hat vermittelst vieler Versuche, die er im Dial. 3 de motu locali beschreibt, die Wege des schiefen Falles den Quadratzahlen der Zeiten proportional befunden, und dadurch hinlänglich bestättiget, daß die von ihm entdeckten Gesetze des Falles schwerer Körper richtige Naturgesetze sind.

65 §.

88F. **Dem schweren Punct M, welcher sich anfangs in B befindet, wird die Geschwindigkeit h nach der mit der schiefen Ebene parallelen Richtung BA mitgetheilt, und er wird dadurch zum Steigen genöthiget, man soll seine Geschwindigkeit c nach Verlauf der Zeit t und die Länge des Weges $BM = s$ finden.**

Aufl. Seine Bewegung wird nun durch das respective Gewicht $P \sin \alpha$ verzögert, und man muß in den Formuln $c = h - 2Gt$, $s = ht - Gtt$, nun $G = g \sin \alpha$ setzen, so erhält man $c = h - 2gt \sin \alpha$, $s = BM = ht - gtt \sin \alpha$.

Die Geschwindigkeit verschwindet nach Verlauf der Zeit $t = \frac{h}{2g \sin \alpha}$, und in eben diesem Augenblick

ver=

verwandelt sich die Bewegung in die entgegen gesetzte. Man setze diesen Werth statt t in der Gleichung $s = ht - gtt \sin\alpha$, so findet man die ganze Länge des Weges, den der Punct steigend zurück legen kann $= \frac{hh}{2g\sin\alpha} - \frac{hh}{4g\sin\alpha} = \frac{1}{4} \cdot \frac{hh}{g\sin\alpha}$. Ist nun A die höchste Stelle, die er erreicht, so ist $BA = \frac{hh}{4g\sin\alpha}$ und $AC = AB\sin\alpha = \frac{hh}{4g}$ ist die der Geschwindigkeit h zugehörige Höhe. Demnach steigt der Punct in lothrechter Richtung eben so hoch, als er steigen würde, wenn er mit der Geschwindigkeit h in lothrechter Richtung zu steigen anfienge.

Während des schiefen Falles von A nach B verfließt die Zeit $t = \sqrt{\frac{AB}{g\sin\alpha}}$ und es ist $AB = \frac{hh}{4g\sin\alpha}$, also ist die erwehnte Zeit des Falles $= \sqrt{\frac{hh}{4g^2\sin\alpha^2}} = \frac{h}{2g\sin\alpha}$. Eben soviel Zeit braucht der Punct von B bis A zu steigen, mithin beträgt die ganze Zeit des Steigens und Fallens $\frac{h}{g\sin\alpha}$ Secunden.

66 §.

Der schwere Punct steigt auf der schiefen Ebene von B nach A hinauf, und hat in B die Bewegung mit der Geschwindigkeit $h = 2\sqrt{ga}$ angefangen: man soll die Zeit finden, darin er den Weg $BM = s$ zurück legt, und die in M noch übrige Geschwindigkeit. 88F.

Aufl. Es ist $s = ht - Gtt$, und daraus findet man, wie im 32 §. $t = \frac{h - \sqrt{(h^2 - 4G \cdot s)}}{2G}$, wenn hier $G = g \sin \alpha$ statt des dortigen g gesetzt wird. Man nehme $BA = a \operatorname{cosec} \alpha$, ziehe AC lothrecht und BC wagrecht, so ist $AC = BA \sin \alpha = a$, und $h = 2\sqrt{g} \cdot AC$. Ferner ist $s \sin \alpha = BM \sin \alpha = CN$, und man erhält $t = \frac{2\sqrt{g} \cdot AC - 2\sqrt{g}\,(AC - CN)}{2 g \sin \alpha}$, oder $t = \frac{\sqrt{AC} - \sqrt{AN}}{\sin \alpha \sqrt{g}}$.

Die Geschwindigkeit in M sey $= c$, so ist $c = h - 2gt \sin \alpha$, also $c = 2\sqrt{g} \cdot AC - 2\sqrt{g} \cdot AC + 2\sqrt{g} \cdot AN$, oder $c = 2\sqrt{g} \cdot AN$.

Wenn man die Auflösung dieser Aufgabe mit der Auflösung im 36 §. vergleicht, so erhellet daraus die Richtigkeit folgender Sätze: Ein schwerer Punct, der aus M von der schiefen Ebene herab fällt, wenn er seine Bewegung mit einer Geschwindigkeit anfängt, die der Höhe AN zugehört, erlangt durch den Fall bis B so viel Geschwindigkeit, daß wenn er in B mit der erlangten Geschwindigkeit auf entgegen gesetzte Art zu steigen anfienge, er den Weg BM in eben der Zeit hinauf steigen würde, worin er von M bis B herabgefallen ist. Und wenn er in B mit einer Geschwindigkeit zu steigen anfängt, die der Höhe AC zugehört, so hat man die Höhe, die der Geschwindigkeit, womit er in M anlangt zugehört, wenn man von der Höhe AC die lothrechte Höhe CN, um welche er gestiegen ist, abziehet.

67 §.

89 F. Es sey nun der schwere Punct genöthiget, auf einem gebrochenen Wege ABCEG, der ganz in einer-

ley verticalen Ebene liegt, herab zu fallen; so verliert er in jedem Winkelpunct bey A, B, C, u. s. w. einen Theil seiner schon erlangten Geschwindigkeit, der sich den im 9 §. festgesetzten Gründen gemäß finden liesse. Man ziehe GO vertical und AO, BP, CQ, DR, ES, FT, horizontal, so hat der herabfallende Punct in B eine Geschwindigkeit $2\sqrt{g \cdot OP}$, die der Höhe OP zugehört, und wenn er in B nichts von seiner Geschwindigkeit verlöhre sondern mit der erlangten Geschwindigkeit $2\sqrt{g \cdot OP}$ den Fall von B bis C anfienge, so würde in C seine Geschwindigkeit der Höhe $OP + PQ = OQ$ zugehören. (63 §.)

In C geht abermahl ein Theil der schon erlangten Geschwindigkeit verlohren: wäre aber der äussere Winkel bey C so klein, daß dieser Verlust nicht merklich bliebe, und eben so auch die folgenden Winkel E und F; so würde der schwere Punct in der untersten Stelle G mit einer Geschwindigkeit anlangen, die der Höhe OG zugehörte.

68 §.

Man stelle sich in der verticalen Ebene AOG durch alle Winkelpuncte A, B, C, D, E, F, G, eine krumme Linie vor, wozu AB, BC, u. s. f. als Sehnen gehören: wenn alsdenn ein schwerer Punct in dieser krummen Linie herabzufallen genöthiget ist, so wächst seine Geschwindigkeit nach dem Gesetz, daß sie in jeder Stelle der lothrechten Höhe zugehört, wovon er herab gefallen ist. Man kann nemlich diese krumme Linie in soviele Bogen als man will theilen, und die dazu gehörigen Sehnen ziehen. Fällt nun der Punct von A bis E oder G, so ist in E oder G allemahl seine Geschwin- 89F.

digkeit etwas kleiner, als diejenige, welcher der lothrechten Höhe OS oder OG zugehört. Aber der Unterscheid nimmt desto mehr ab, je kleiner die Sehnen sind, denn desto kleiner werden die äussern Winkel bey B, C, D, u. s. f. Die krumme Linie selbst ist die Gränze aller so zuwege gebrachten gebrochenen Linien, und die äussern Winkel verschwinden zuletzt: also ist die Geschwindigkeit womit der schwere Punct in E oder G anlangt, eben so groß, als die Geschwindigkeit, welche er erlangt hätte, wenn er von der lothrechten Höhe OS oder OG herab gefallen wäre.

69 §.

89F. Wenn der schwere Punct in G mit entgegen gesetzter Bewegung zu steigen anfienge, und seine erste Geschwindigkeit der Höhe GO zugehörte, so würde er in F seine Geschwindigkeit der Höhe OT, in E der Höhe OS, in D der Höhe OR, u. s. f. zugehören, bis sie in A verschwände, alles jedoch in der Voraussetzung, daß wegen der Brechung des Weges in den Winkelpuncten nichts von der Geschwindigkeit verlohren gehe. (66 §.) Was aber diese Voraussetzung erfodert, daß nemlich die äussern Winkel bey F, E, D, u. s. f. so klein seyn müssen, daß der Verlust der Geschwindigkeit nicht merklich werde, das trift allererst zu, wenn der Punct in der krummen Linie steigt: in dieser würde er so hoch steigen, als er gefallen ist, wenn er die Bewegung in G mit der Geschwindigkeit anfienge, die der Höhe des Falles OG zugehörte. Auch würde die Zeit des Steigens eben so groß, als die Zeit des Falles seyn.

Wenn GH horizontal ist, und von H durch I, K, L, M bis N eine krumme Linie hinauf stiege, die sich auch nach einem andern Gesetz krümmte, als diejeni-

ge,

ge, welche durch A, B, C, u. s. f. sich bis G erstreckt; so würde der in dieser von A nach G herabgefallene Punct auch in jener von H durch I, K, u. s. f. bis N eben so hoch wieder steigen, als er von A herabgefallen wäre. Aber die Zeit des Steigens würde nur in dem Falle eben so groß, als die Zeit des Falles seyn, wenn beyde krumme Linien einander gleich und ähnlich wären. Die Geschwindigkeit hängt allein von der Höhe des Falles und beym Steigen von der ersten Geschwindigkeit und der lothrechten Höhe ab, die der bewegte Punct schon zurück gelegt hat. Dagegen hängt die Zeit zugleich mit von der jedesmahligen Neigung des Weges, den der Punct durchläuft, gegen den Horizont ab. Auch in der gebrochenen Linie HKMN, und ACEG, wenn sie einander unähnlich wären, würden die Weiten des Steigens und des Falles, die Zögerungen in den Winkelpuncten beyseit gesetzt, mit einander nicht übereinkommen.

70 §.

Eine kleine schwere Kugel würde in einer gebogenen Röhre oder Rinne, die zwey aufwärts gebogene Schenkel hätte, nach diesen Gesetzen fallen, sie würde in dem einen Schenkel so hoch wieder steigen, als sie in dem andern herab gefallen wäre, wenn sonst keine Hindernisse die Bewegung verzögerten, die aber nie gänzlich zu vermeiden sind. Bey einer Bewegung dieser Art tritt der Fall schon ein, daß die Kraft, welche die Bewegung in derjenigen Richtung beschleuniget, die der herabsinkende Punct zu nehmen genöthiget ist, nicht beständig einerley Grösse behält. Auf jedem gradlinichten Theil der gebrochenen Linie ist diese Kraft $= P \sin \alpha$, wenn α den jedesmahligen Neigungswinkel gegen den Horizont bezeichnet, und dieser Winkel

ändert

89F. ändert sich an jeder Stelle B, C, D, u. s. f. wo die Theile der gebrochenen Linie einander schneiden, auf einmahl plötzlich, in der krummen Linie aber ändert sich dieser Winkel nach dem Gesetz der Stetigkeit: es ist in jeder Stelle derjenige Winkel, unter welchem daselbst die Tangente der krummen Linie gegen den Horizont geneigt ist.

71 §.

90F. Wenn an einem zarten in C befestigten recht beugsamen Faden CA ein kleiner schwerer Körper hängt, der hier, so lange auf seine Gestalt und Grösse noch nicht gesehen werden kann, als ein schwerer Punct betrachtet wird; so weiß man, daß derselbe in der lothrechten Lage CA ruhig hängen kann. Bringt man den Faden mit dem daran hängenden schweren Punct in die geneigte Lage CB, und überläßt ihn darauf sich selbst, ohne ihm im geringsten einen Stoß zu geben; so strebt das Gewicht P des Puncts ihn in der Verticallinie BQ zum sinken zu bringen. Wenn nun BS auf CB senkrecht ist, so zerlegt sich das Gewicht P in die Seitenkräfte nach $BS = P \sin QBR = P \sin ACB$, und nach BR in der Richtung des Fadens $= P \cos ACB$. Die Wirkung der letztern Kraft wird durch den Faden aufgehalten, aber die Kraft nach $BS = P \sin ACB$ bringt den schweren Punct in Bewegung: und weil der Faden ihn beständig in gleicher Entfernung von C erhält, so ist er genöthiget seine Bewegung in einem Kreisbogen BMAN fortzusetzen, wozu BS als eine Tangente gehört. In jeder folgenden Stelle M seines Weges aber ändert sich die Grösse der Kräfte in den Richtungen der Tangente MT und des Halbmessers MG. Nun ist die Kraft nach $MT = P \sin ACM$, nach $MG = P \cos ACM$, und ACM hat für jede Stelle

M eine

M eine andre Grösse. In A wird MG = P, und MT verschwindet. Nun hat der schwere Punct in A eine Geschwindigkeit erlangt, die der Höhe AD zugehört, und um deßwillen kann die Bewegung noch nicht aufhören: vielmehr fängt der Punct nun an, in dem Bogen ANE hinauf zu steigen. Der Winkel ACM verwandelt sich nun in einen entgegengesetzten, wie ACN, sein Sinus wird negativ, also auch die Kraft in der Richtung der Tangente. Ihre Richtung ist nemlich nun der Richtung der Bewegung entgegen gesetzt, sie verzögert auf dieser Seite der Verticallinie die Bewegung des Puncts, und dies desto mehr, je höher er schon nach E hinauf gestiegen ist. Der Punct steigt indessen bis E so hoch, als er auf der andern Seite von B herabgefallen ist, und kommt in E auf einen Augenblick in Ruhe. Auch braucht er soviele Zeit für die steigende Bewegung im Bogen ANE, als er nöthig hatte, im Bogen BMA herab zu fallen.

72 §.

Man siehet wohl, daß der Punct in E nicht ruhig 90 F.
bleiben könne, weil er sich daselbst unter eben den Umständen befindet, unter welchen er in B war. Eine mit der vorigen völlig übereinstimmige Bewegung fängt von neuen an, und der schwere Punct durchläuft in eben sovieler Zeit, wie das erstemahl, den Bogen EAB nur in umgekehrter Richtung, er steigt auf der andern Seite wieder bis A, und die Bewegung fängt wie zuvor von neuem an. Man nennt diese so beständig abwechselnde Bewegung eine **Schwingungsbewegung**, und der am Faden aufgehängte Körper, dessen Gewicht diese Schwingungsbewegung verursacht, heißt ein **Pendel**. Wenn diese

Bewegung durch keine Hindernisse verzögert würde, so würde sie das Pendel ohne Aufhören fortsetzen.

Jeder schwere Körper, was er auch für eine Gestalt und Grösse haben mag, wenn er an irgend einer Stelle, die nicht mit seinem Schwerpunct überein kommt, so aufgehängt wird, daß er sich um diese Stelle frey drehen kann, ist einer solchen Schwingungsbewegung fähig. Sich selbst überlassen kann der Körper nur ruhen, wenn sich sein Schwerpunct grade unter dem Aufhängepunct in der lothrechten Linie durch diesen Punct befindet. Bringt man den Schwerpunct seitwärts dieser Verticallinie, und überläßt nun den Körper sich selbst, so nimmt die Schwingungsbewegung ihren Anfang. Weil ein solcher Körper aus unzählig vielen körperlichen Puncten zusammen gesetzt ist; so nennt man ihn ein **zusammengesetztes Pendel**. Jeder kleine an einem Faden aufgehängte Körper ist zwar wirklich ein zusammengesetztes Pendel; so lange man aber das Gewicht des Fadens nicht in Rechnung bringt, auch den kleinen daran hängenden Körper nur als einen schweren Punct betrachtet, heißt es ein **einfaches Pendel**.

Der V. Abschnitt.

Nähere Bestimmung der Fliehkraft bey der Umlaufsbewegung im Kreise.

73 §.

Es ist nicht allein Kraft nöthig, die Bewegung einer Masse in einerley gradlinichten Richtung zu beschleunigen oder zu verzögern; es wird auch Kraft erfo-

erfodert, eine Masse aus dem gradlinichten Wege, den sie wegen ihrer Trägheit nehmen würde, abzulenken, und sie zu nöthigen, daß sie die Bewegung in einer krummen Linie fortsetze. Eine vollständige Ausführung der hieher gehörigen Lehren muß zwar den höhern mechanischen Wissenschaften vorbehalten bleiben: indessen läßt sich hier doch vorläufig einigermassen zeigen, worauf die Sache ankommt. Der Betrachtung der Umlaufsbewegungen im Kreise kann man in der Maschinenlehre nicht ganz entbehren, und es ist sehr nöthig, fehlsamen Anwendungen sonst richtiger mechanischer Grundsätze vorzubeugen, worin Schriftsteller, die vornemlich nur die practische Maschinenlehre vortragen wollen, leicht verfallen.

74 §.

Die bloße träge und nicht schwere Masse *M* 84 F.
läuft im Kreise, dessen Mittelpunct *C* und Halbmesser *CM* ist, mit der unveränderlichen Geschwindigkeit *c* herum: man soll die Grösse der Fliehkraft finden, oder welches einerley ist, die Kraft, welche die Masse beständig in der Richtung des Halbmessers gegen den Mittelpunct zu treiben streben muß, damit die Masse nicht wegen ihrer Trägheit die Bewegung in gradlinichter Richtung fortsetze.

Aufl. Die Masse M, welche hier nur als ein materieller Punct betrachtet wird, laufe in der Zeit *t*, die man sehr klein annehmen kann, durch den Bogen MN, durch M sey eine Tangente des Kreises gezogen, und NQ auf CM, NR aber auf MT senkrecht. Wegen der Trägheit würde die Masse in der Tangente MT bleiben, sie hat aber in dem Zeittheilchen *t* den Weg RN = MQ nach einer mit dem Halbmesser MC paral-

parallelen Richtung zurückgelegt: also muß eine bewegende Kraft, die ich $= V$ setze, die Masse nach dieser Richtung beschleuniget haben. Weil das Zeittheilchen t sehr klein angenommen wird, so kann man voraussetzen, diese Beschleunigung sey wenigstens während des Zeittheilchens t gleichförmig geblieben, gesetzt, daß sie auch sonst veränderlich seyn mögte: demnach ist diese Beschleunigung $\frac{gV}{M} = \frac{RN}{t^2}$. Man setze den Halbmesser $CM = r$, so ist RN der zum Bogen MN gehörige Quersinus, also $RN = \frac{(\text{chord.} MN)^2}{2r}$. (237 §. Geom.) Ferner ist Bog. $MN = c.t$, (2 §.) weil die Masse diesen Bogen in der Zeit t mit der Ge- Geschwindigkeit c durchläuft: also ist auch $RN = \frac{(\text{chord.} MN)^2 . c^2 t^2}{2r . (arc . MN)^2}$, und $\frac{RN}{tt} = \frac{(\text{chord.} MN)^2 cc}{2r . (arc . MN)^2}$. Je kleiner das Zeittheilchen t angenommen wird, desto weniger hat sich die Lage des Halbmessers CM, mithin auch die damit parallele Richtung RN der Kraft V verändert, und die höhere Mechanik beweiset umständlicher, daß eigentlich die Beschleunigung $\frac{gV}{M}$. der Gränze des Verhältnisses $\frac{RN}{t^2}$ gleich sey, die gefunden wird, wenn man annimmt, daß die Zeit t verschwinde. Alsdenn verschwindet zugleich der Bogen MN mit seiner Sehne, und beyde werden zuletzt gleich groß: demnach findet man $\frac{gV}{M} = \frac{cc}{2r}$, also $V = \frac{M . cc}{2gr}$.

Wenn

Wenn also eine bewegende Kraft $V = \frac{M.cc}{2gr}$ die Masse beständig gegen den Mittelpunct C zu treiben strebte, so wäre kein Faden nöthig, sie zu halten, sie würde ihre Umlaufsbewegung ohnehin mit einerley Geschwindigkeit fortsetzen. Die gegen den Mittelpunct gerichtete Kraft würde die Geschwindigkeit weder vermehren noch vermindern, und das um deßwillen, weil ihre Richtung beständig auf der Richtung der Bewegung senkrecht bliebe. Wenn der Faden die Stelle dieser Kraft vertritt, so muß er so stark seyn, daß er nicht zerreissen würde, wenn an demselben ein Gewicht $= \frac{M.cc}{2gr}$ lothrecht herab hienge. So stark ihn dies Gewicht dehnen würde, eben so stark ist er in jeder Lage gedehnt, worin er beym Umlauf der am Ende desselben befestigten Masse kommen mag.

75 §.

In der Formul $V = \frac{M.cc}{2gr}$ kommt zwar M als ein Gewicht vor, und M bezeichnet hier das Gewicht einer schweren Masse, die aus eben so vielen körperlichen Theilen bestünde, als die im Kreise umlaufende Masse: dabey aber muß man nicht vergessen, daß die umlaufende Masse als eine bloß träge Masse betrachtet wird ohne alle Schwere. Im 12 §. ist schon gewiesen worden, unter welchen Umständen eine schwere Masse in eine solche Umlaufsbewegung kommen könne, wie diejenige, welche hier betrachtet wird. Die Ebene des Kreises, worin die Masse umläuft, müßte wagrecht seyn, und das Gewicht der umlaufenden Masse müßte von einer wagrechten Tafel getragen werden, damit es auf die Bewegung keinen Einfluß hätte, alsdenn wäre es eben soviel, als wenn die Masse bloß träge wäre, und gar kein Gewicht hätte.

76 §.

Dies vorausgesetzt wird man richtig verstehen, was es sagen wolle, wenn man aus der gefundenen Gleichung die Proportion herleitet $V : M = \frac{cc}{2g} : r$, oder $V : M = 2 . \frac{cc}{4g} : r$, worin $\frac{cc}{4g}$ die Höhe ist, wovon ein schwerer Körper herab fallen müßte, um die Geschwindigkeit c zu erlangen, womit die Masse im Kreise umläuft. Der Sinn ist: die Fliehkraft verhält sich zum Gewicht einer schweren Masse, die eben soviele materielle Theile, als die umlaufende Masse enthält, wie die doppelte der Geschwindigkeit der umlaufenden Masse zugehörige Höhe zum Halbmesser des Kreises, worin die Masse umläuft.

In dem Fall, wenn $\frac{cc}{4g} = \frac{1}{2} r$ ist, hat man $V = M$: wenn also die Höhe, welche der Geschwindigkeit der umlaufenden Masse zugehört, halb so groß ist, als der Halbmesser des Kreises, worin die Masse umläuft; so ist die Fliehkraft so groß, als das Gewicht einer schweren Masse, die eben soviele materielle Theile als die umlaufende Masse hätte. Nun wird der Faden in allen Richtungen eben so gedehnt, als wenn ein schwerer Körper daran lothrecht herab hienge, der mit dem umlaufenden bloß trägen Körper gleichviel Masse hätte.

77 §.

Es sey nun t die Zeit, worin der träge mit der Geschwindigkeit c umlaufende Körper einmahl im Kreise

Kreise herum kommt; so ist $c = \frac{2\pi r}{t}$, weil der Weg $2\pi r$ als des Kreises Umfang in der Zeit t mit gleichförmiger Bewegung zurück gelegt wird. (2 §.) Man setze diesen Werth statt c in die Gleichung $V = \frac{Mcc}{2gr}$, so erhält man $V = \frac{2M\pi^2 r}{gtt}$. Ferner ist $\frac{cc}{4g} = \frac{\pi^2 r^2}{gt^2}$, wenn also $\frac{\pi^2 r^2}{gt^2} = \frac{1}{2}r$, oder $r = \frac{gtt}{2\pi^2}$ ist, so ist das der vorige Fall, wo $V = M$ war. Eben die Gleichung giebt $t = \frac{\pi\sqrt{2r}}{\sqrt{g}}$, und wenn die Umlaufszeit so groß ist, als sie nach dieser Gleichung gefunden wird; so ist die Fliehkraft so groß, als das Gewicht eines schweren Körpers, der mit dem umlaufenden bloß trägen Körper gleich viele Masse hat.

Huygen hat die Gesetze, nach welchen die Fliehkraft von der Geschwindigkeit des Umlaufs und dem Halbmesser des von dem umlaufenden Körper beschriebenen Kreises abhängt, zuerst bekannt gemacht, (M. s. *Chrift. Hugenii* Opuscula posthuma, Amstelodami 1728. Tom. II. pag. 107.)

Der VI. Abschnitt.

Die Gesetze der Schwingungsbewegung des Pendels.

78 §.

90 F. Der größte Elongationswinkel ACB ist gegeben, um welchen das einfache Pendel anfangs ist aus der lothrechten Lage gebracht worden, man soll die Geschwindigkeit desselben in jeder andern Lage finden, wenn es mit der Verticallinie noch den Winkel ACM einschließt.

Aufl. Man ziehe BD und MP wagrecht, so ist in M die Geschwindigkeit des schweren Puncts M, der hier allein als schwer betrachtet wird, so groß, als die Geschwindigkeit desselben seyn würde, wenn er von einer Höhe $=$ DP lothrecht herab gefallen wäre. Diese Geschwindigkeit sey $= c$, so ist $c = 2\sqrt{g\,.\,\mathrm{DP}}$. (25. 68 §.) Ferner sey $\mathrm{ACB} = \alpha$, $\mathrm{ACM} = \varphi$, $\mathrm{CM} = a$, so ist $\mathrm{CP} = a \cos\varphi$, $\mathrm{CD} = a\cos\alpha$, also $\mathrm{DP} = a(\cos\varphi - \cos\alpha)$. Es ist aber $\cos\varphi - \cos\alpha = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\varphi)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varphi$, (236 §. Geom.) also findet man die gesuchte Geschwindigkeit $c = 2\sqrt{2ag\,.\,\sin\frac{1}{2}(\alpha+\varphi)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)}$.

Wenn der Winkel α mithin auch φ sehr klein ist, so ist beynahe $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\varphi) = \frac{1}{2}(\alpha+\varphi)$ und $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varphi) = \frac{1}{2}(\alpha-\varphi)$ mithin in diesem Fall sehr nahe $c = \sqrt{2ag(\alpha+\varphi)(\alpha-\varphi)}$. Weiter ist $\alpha = \frac{\mathrm{AB}}{a}$, und

$\varphi =$

$\phi = \frac{AB - BM}{a}$, also $\alpha - \phi = \frac{BM}{a}$, und $a + \phi$
$= \frac{2AB - BM}{a}$, woraus $(\alpha + \phi)(\alpha - \phi) =$
$\frac{2AB \cdot BM - BM^2}{a^2}$ gefunden wird, und man erhält

$$c = \sqrt{\frac{2g}{a}} \cdot (2AB \cdot BM - BM^2).$$

79 §.

Das einfache Pendel ist anfangs nur um einen sehr kleinen Winkel gegen die Verticallinie geneigt worden, und deßwegen sind die Schwingungen sehr klein: man soll die Zeit eines Schwunges von der einen größten Abweichung *CB* bis zur andern *CE* finden. 90F.

Aufl. Wenn man den ganzen Bogen von B bis A in sehr kleine gleich grosse Theile wie M*m* theilt, so vergeht auch nur eine sehr kleine Zeit, indem der schwere Punct den Bogen M*m* durchläuft, und während dieser Zeit ist die Aenderung der Geschwindigkeit so wenig merklich, daß man annehmen kann, sie bliebe von M bis *m* unveränderlich. Nun ist im vor. §. die Geschwindigkeit in M $= c$ gefunden, und wenn die Zeit, worin der Bogen M*m* durchlaufen wird, $= \vartheta$ ist, so hat man $\vartheta = \frac{Mm}{c}$ (2 §.) Nun war im vor. §. $c = \sqrt{\frac{2g}{a}} (2AB \cdot BM - BM^2)$, also findet man $\vartheta = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{Mm}{\sqrt{(2AB \cdot BM - BM^2)}}$, oder auch

 $\vartheta =$

$\vartheta = \frac{\sqrt{a}}{AB\sqrt{2g}} \cdot \frac{AB \cdot Mm}{\sqrt{(2AB \cdot BM - BM^2)}}$. Das ist ein allgemeiner Ausdruck für die Zeit ϑ, worin jeder sehr kleine Bogen Mm durchlaufen wird, und die Zeit welche während der Bewegung von B bis A verfließt, ist die Summe aller dieser Zeiten. Könnte man also diese Zeit für jeden dieser kleinen Bogen besonders finden, so würde der Factor $\frac{\sqrt{a}}{AB\sqrt{2g}}$ für alle einerley seyn, er bliebe also auch ein Factor der Summe, und diese erhielte noch einen andern Factor der die Summe aller der Factoren seyn müste, wovon in der Formul für ϑ ein jeder allgemein durch $\frac{AB \cdot Mm}{\sqrt{(2AB \cdot BM - BM^2)}}$ ausgedrückt ist. Wie dergleichen Summen gefunden werden können, das muß eigentlich die Integralrechnung lehren: für diesen besondern Fall läßt sich die Sache so übersehen.

91 F. Aus dem Mittelpunct A verzeichne man einen Kreis, der so lang ist, als der Bogen AB (90 Fig.) welchen das Pendel bey einer halben Schwingung durchläuft, AC setze man auf AB senkrecht, damit BC ein Quadrat werde. Nun theile man den Halbmesser AB in eben so grosse gleiche Theile, wie man den Bogen AB (90 Fig.) getheilt hat, und setze durch die Theilungspuncte auf AB die Linien MN, mn, u. s. f. senkrecht. Ueberdem ziehe man $N\nu$ mit AB parallel, so kann man Nn als eine kleine grade Linie betrachten, weil ein so kleiner Bogen sich sehr wenig krümmt. Alsdenn aber ist DNn ein rechtwinklichtes Dreyeck, welches den Dreyecken ADm ANM ähnlich ist, mithin ist auch das Dreyeck $Nn\nu \sim$ Dr. ANM (183 §. Geom.)

Geom.) und man erhält $MN : AN = N\nu : Nn$, oder $MN : AB = Mm : Nn$, mithin $Nn = \frac{AB \cdot Mm}{MN}$.
Weiter ist $MN = \sqrt{BM \cdot EM}$ (186 §. Geom.) und $EM = 2AB - BM$, also $MN = \sqrt{(2AB \cdot BM - BM^2)}$ und man erhält $Nn = \frac{AB \cdot Mm}{\sqrt{(2AB \cdot BM - BM^2)}}$.
Nun ist die Summe aller der kleinen Bogen Nn von B bis M dem Kreisbogen BN gleich, wozu BM als ein Quersinus gehört, und wenn man die Summe aller dieser kleinen Bogen von B bis C nimmt, so wird sie dem Quadranten gleich, wozu der Halbmesser AB gehört, und dieser Quadrant ist $= \frac{1}{2}\pi \cdot AB$, die Zahl $\pi = 3{,}1415 \ldots$ gesetzt. (256 §. Geom.) Demnach ist die Summe aller Zeiten ϑ, oder die Zeit, welche während der halben Schwingung von B bis A vergeht, $= \frac{\sqrt{a}}{AB\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot AB = \frac{\frac{1}{2}\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$: und weil die Zeit der Schwingung von A bis E eben so groß ist, (71 §.) so findet man die Zeit der ganzen Schwingung von B durch A bis $E = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$.

80 §.

Man muß sich erinnern, daß dieser Ausdruck die Zeit eines Schwunges nicht völlig genau, aber desto richtiger angebe, je kleiner die Bogen sind, die das Pendel beschreibt: denn desto richtiger wird die Voraussetzung, welche bey der Rechnung zum Grunde liegt, daß der Bogen AB seinem Sinus gleich sey. Wenn AD, als die lothrechte Höhe, um welche das Pendel anfangs über der niedrigsten Stelle ist gehoben worden, $= b$ gesetzt wird; so findet man vermittelst der Integralrechnung, (wovon in den folgenden Theilen dieses mathematischen Lehrbegriffs umständlicher gehandelt wird) die eigentliche Zeit des Schwunges durch den Bogen BAE, wenn der gefundene Ausdruck $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$ noch mit dem folgenden Factor multiplicirt wird:

$$1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^n + \ldots$$

(M. s. hievon auch H. Eulers Mechanica s. motus scientia analytice exposita, T. II. §. 161 – 164. und H. Hofr. Kästners Anfangsgr. der höhern Mechanik 2 Absch. 32 – 33 §. 197 – 199 S.) Weil $\frac{b}{2a}$ gewöhnlich ein ziemlich kleiner Bruch ist, so wird der Factor, welchen diese Reihe ausdrückt, auch gewöhnlich sehr nahe $= 1$, und die Zeit des Schwunges sehr nahe $= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$. Richtiger und schärfer findet man sie $= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} \cdot \left(1 + \frac{b}{8a}\right)$.

Der größte Elongationswinkel ACB sey $= \alpha$, so ist $\frac{b}{a} = \frac{AD}{AC} = \text{sinv}\,\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2$, also $\frac{b}{2a} = \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2$. Wenn das Pendel an einer lothrechten Tafel hängt, worauf die Verticallinie CA, und BD wagrecht

recht gezogen ist, so kann man BD messen, wenn das Pendel anfangs bis an B gehoben wird, und daraus hat man $\sin\alpha = \frac{BD}{AC}$, woraus leicht α gefunden wird, da denn die trigonometrischen Tafeln auch $\frac{b}{2a} = \sin\frac{1}{2}\alpha^2$ geben.

81 §.

Eine grade unbiegsame Linie CN sey in dem Punct C so befestiget, daß sie sich zwar um C frey drehen, sonst aber nicht weichen kann: so wird jeder Punct M dieser Linie in einem Kreise herum gehen, der von demjenigen unterschieden ist, worin jeder der übrigen umläuft. In gleichen Zeiten aber werden von zweenen willkührlich angenommenen Puncten dieser Linie M und N ähnliche Bogen BM, EN, beschrieben, die sich wie die Entfernungen CM, CN, vom Mittelpunct der Umlaufsbewegung verhalten, und man hat $EN = \frac{CN}{CM} . BM$. Wenn die Bewegung gleichförmig und BM der von dem Punct M in einer Secunde durchlaufene Bogen ist, der das Maaß seiner Geschwindigkeit abgiebt, so ist des Puncts N Geschwindigkeit 92 F.

$$= EN = \frac{CN}{CM} . BM.$$

Ist nun $CL = 1$, und der Bogen $KL = \varphi$ das Maaß des Winkels BCM in dem Verstande, wie es im 254 §. der Geom. ist erklärt worden, so ist jeder andre Bogen $BM = \varphi . CM$, und wenn dieser Bogen in der Zeit t von dem Punct M gleichförmig zurück gelegt wird, so ist dieses Puncts Geschwindigkeit $= \frac{\varphi}{t} \cdot CM$. Für einerley Punct M ändert sich CM nicht, wenn sich gleich φ mit der Zeit t ändert, und wenn die Umlaufsbewegung gleichförmig ist, so ist der Winkel φ der Zeit proportional. Weil solchergestalt die Linie CM in gleichen Zeiten gleiche Winkel beschreibt, so kann der in jeder Secunde beschriebene Winkel für das Maaß der **Umdrehungs- oder Winkelgeschwindigkeit** der Linie CN angenommen worden. Es sey γ der in einer Secunde beschriebene Winkel, so ist $\gamma = \frac{\varphi}{t}$ die **Umdrehungsgeschwindigkeit**, und daraus wird die wahre Geschwindigkeit eines jeden Puncts M $= \frac{\varphi}{t} \cdot CM$ gefunden, wenn man die Winkelgeschwindigkeit mit seiner Entfernung vom Mittelpunct der Bewegung multiplicirt. Aus der wahren Geschwindigkeit des Puncts M aber findet man die Winkelgeschwindigkeit, wenn man jene mit der Entfernung CM dividirt.

82 §.

92F. Wenn der Punct M bey seinem Umlauf im Kreise von einer Kraft, deren Richtung beständig auf CM senkrecht bliebe, gleichförmig beschleuniget würde, und in der Zeit t seit dem Anfang der Bewegung den Bogen BM zurück legte, so wäre $\frac{BM}{tt}$ die von der angebrachten Kraft bewürkte Beschleunigung des Puncts M; (45 §.) in jeder andern eben so langen Zeit würde der Punct ausser dem Wege, den er nun mit der schon erlangten Geschwindigkeit wegen der Trägheit

beschrie-

beschriebe, wiederum wegen der noch fortwährenden Beschleunigung einen eben so grossen Bogen zurück legen. Ist nun G diese Beschleunigung, so hat man $G = \frac{BM}{tt} = \frac{\varphi . CM}{tt}$, und es hat mit dieser Formul eine ähnliche Bewandniß, wie mit der vorigen, welche die Geschwindigkeit ausdrückte. Bleibt der Punct M einerley, so ändert sich CM nicht, wenn gleich φ von t abhängt, also ist der Winkel $\frac{\varphi}{tt}$ der Beschleunigung proportional, er ist einerley mit demjenigen Winkel um welchen sich CM wegen der Beschleunigung der angebrachten Kraft seit dem Anfang der Bewegung in der ersten Secunde drehet, deßwegen kann dieser Winkel die von der angebrachten Kraft bewürkte Umdrebungs- oder Winkel-Beschleunigung der Linie CN heissen, die Beschleunigung eines jeden Puncts M in dieser Linie wird daraus gefunden, wenn man sie mit der Entfernung CM dieses Puncts vom Mittelpunct der Bewegung multiplicirt: und wenn die Beschleunigung eines solchen Puncts M bekannt ist, so wird die Winkelbeschleunigung gefunden, wenn man mit der Entfernung CM dividirt.

83 §.

In den Stellen *M* und *N* der graden unbiegsamen um den Mittelpunct *C* beweglichen graden Linie *CN* befinden sich ein Paar schwere Puncte, *M* und *N* sind ihre Massen, *P* und Q ihre Gewichte; die Linie ist anfangs aus der lothrechten Lage *CD* in die Lage *CE* gebracht, und wegen der Wirkung der Ge- 92 F.

wichte

wichte nach Verlauf einer gewissen Zeit in die Lage *CN* gekommen: man soll finden, wie groß in diesem Augenblick die von der gemeinschaftlichen Wirkung beyder Gewichte bewirkte Umdrehungs-Beschleunigung der Linie *CN* sey.

Aufl. Die Beschleunigung des Puncts M für sich allein wäre $= g\,\dfrac{P\sin\varphi}{M} = g\sin\varphi$, und eben so groß wäre die Beschleunigung des Puncts N für sich allein, wenn man ACM $= \varphi$ setzt: und wegen dieser allemahl gleichen Beschleunigung, müsten die beyden Puncte in gleichen Zeiten gleiche Bogen beschreiben. Das ist aber um deßwillen nicht möglich, weil sie der Voraussetzung gemäß mit der unbiegsamen Linie so verbunden sind, daß die in gleichen Zeiten beschriebene Bogen sich wie die Entfernungen CM, CN, verhalten müssen. Wenn CM und CN ein Paar neben einander hängende einfache Pendel wären, so würde CB dem längern Pendel voreilen: wenn also M und N beyde mit der unbiegsamen Linie CN verbunden sind, so wird die Bewegung des Puncts M um deßwillen von dem Punct N verzögert, weil N nicht schnell genug ausweicht. Wegen dieses von dem Punct N herrührenden Widerstandes wird der Druck $P\sin\varphi$ in der Richtung MΓ nicht ganz auf die Beschleunigung der Masse M verwandt, sondern ein Theil dieses Drucks, den ich $= V$ setzen will, bleibt übrig, und wird nach den Gesetzen des Gleichgewichts nach N fortgepflanzt, so daß daher in der Richtung N*t* ein Druck $= \dfrac{CM}{CN}\cdot V$ entsteht, (51 §. Statik) der die

Masse

Masse N mit der Kraft $Q\sin\varphi$ gemeinschaftlich beschleuniget, so wie M mit einer Kraft $P\sin\varphi - V$ beschleuniget wird. Es sey die Beschleunigung der Schwere $g = 1$, die Beschleunigung der Masse $M = \gamma$, der Masse $N = G$, so ist $\frac{P\sin\varphi - V}{M} = \gamma$, und $\frac{Q\sin\varphi}{N} + \frac{CM.V}{N.CN} = G$. Der Puncte M und N Winkelbeschleunigungen sind $\frac{\gamma}{CM}$, $\frac{G}{CN}$, (82 §.) und weil diese gleich seyn müssen, so wird erfordert, daß $G = \frac{CN.\gamma}{CM}$ sey, und man erhält $\frac{Q\sin\varphi}{N} + \frac{CM.V}{N.CN} = \frac{CN.\gamma}{CM}$. Ferner ist $V = P\sin\varphi - M.\gamma$, und wenn dieser Werth statt V gesetzt wird, so erhält man $\frac{Q\sin\varphi}{N} + \frac{CM.P\sin\varphi - CM.M.\gamma}{CN.N} = \frac{CN.\gamma}{CM}$.

Daraus folgt ferner

$$Q\sin\varphi + \frac{CM.P\sin\varphi}{CN} = \frac{CM.M.\gamma}{CN} + \frac{CN.N.\gamma}{CM} \text{ oder}$$

$$\frac{CN.Q\sin\varphi + CM.P\sin\varphi}{CN} = \frac{(CM^2.M + CN^2.N)\gamma}{CM.CN},$$

und man findet

$$\gamma = \frac{CN.Q\sin\varphi + CM.P\sin\varphi}{CM^2.M + CN^2.N}.CM;$$

also ist die gesuchte Winkelbeschleunigung $\frac{\gamma}{CM} =$

$$\frac{CM.P\sin\varphi + CN.Q\sin\varphi}{CM^2.M + CN^2.N}$$

84 §.

84 §.

Weil γ und G die würklichen Beschleunigungen der Puncte M und N sind, so erfolgt die Bewegung eben so, als wenn an M die Kraft $M \,.\, \gamma$ an N aber die Kraft $N \,.\, G$ in der Richtung der Bewegung angebracht wäre. Bey dieser Voraussetzung würde der Zustand der Bewegung der Linie CN mit demjenigen vollkommen überein kommen, der von der vereinigten Wirkung beyder Gewichte P und Q herrührt; überdem würde bey eben der Voraussetzung keine von den Massen M oder N einem Druck ausgesetzt seyn, keine würde der andern in ihrer Bewegung hinderlich fallen. Dagegen entsteht von der gemeinschaftlichen Wirkung der Gewichte P und Q ausser der Umlaufsbewegung noch der Erfolg, daß die Masse M dem Druck $V = P \sin \varphi - M \,.\, \gamma$ während der Bewegung ausgesetzt ist. Würde an M eine Kraft $M \,.\, \gamma$ und an N eine Kraft $N \,.\, G$ der Richtung der Bewegung entgegen angebracht, so würde keine Bewegung erfolgen, beyde Kräfte würden mit $P \sin \varphi$ an M, und mit $Q \sin \varphi$ an N im Gleichgewicht seyn, und in diesem Zustande des Gleichgewichts würde M denselben Druck leiden, dem M während der Bewegung ausgesetzt ist. Denn so wäre an M eine Kraft $P \sin \varphi - M\gamma = V$, und an N eine Kraft $= Q \sin \varphi - M \,.\, G = Q \sin \varphi - (Q \sin \varphi + \frac{CM}{CN} \,.\, V) = - \frac{CM \,.\, V}{CN}$ angebracht, die mit der Kraft V an M im Gleichgewicht bliebe, da dann M denselben Druck, wie im Zustande der Bewegung litte.

85 §.

92F. In sovielen Stellen *L*, *M*, *N*, der graden unbiegsamen und um *C* frey beweglichen Linie

nie als man will, befinden sich schwere Puncte, die ihre Umlaufsbewegung beschleunigen: man soll die Winkelbeschleunigung in jeder gegebenen Lage dieser Linie *CN* finden.

Aufl. Von den nach C zu liegenden Puncten werden einige weniger beschleuniget als geschehen würde, wenn jeder von ihnen allein, und mit den übrigen nicht in Verbindung wäre: dagegen werden andre, die näher nach N liegen, mehr beschleuniget, als wenn jeder für sich allein und ausser Verbindung mit den übrigen wäre. Jeder von den erstern bleibt also einem Druck V ausgesetzt, und diese Pressungen pflanzen sich nach den Gesetzen des Gleichgewichts auf die übrigen fort, und vermehren ihre Beschleunigung. Man nehme an, daß P, Q, R, die Gewichte, L, M, N, die Massen, und α, β, γ, die wirklichen Beschleunigungen der Puncte L, M, N, nach der Ordnung sind, die von der gemeinschaftlichen Wirkung der Kräfte $P \sin \varphi$, $Q \sin \varphi$, $R \sin \varphi$, bewirkt werden; so erhellet, daß alles im Gleichgewicht bleibe, wenn an diesen Puncten nach der Ordnung die Kräfte $L . \alpha$, $M . \beta$, $N . \gamma$, der Richtung der Bewegung entgegen angebracht werden, da dann an L die Kraft $P \sin \varphi - L . \alpha$, an M die Kraft $Q \sin \varphi - M . \beta$, an N die Kraft $R \sin \varphi - N . \gamma$, angebracht ist. Demnach hat man nach den Gesetzen des Gleichgewichts $(P \sin \varphi - L . \alpha)\, CL + (Q \sin \varphi - M \beta)\, CM + (R \sin \varphi - N . \gamma)\, CN = 0$, und überdem ist $\alpha = \frac{CL}{CN} . \gamma$, $\beta = \frac{CM}{CN} . \gamma$, also $\left(P \sin \varphi - \frac{CL . L . \gamma}{CN}\right) CL + \left(Q \sin \varphi - \frac{CM . M . \gamma}{CN}\right) CM$

$+ (R \sin$

$+ (R\sin\phi - N \cdot \gamma) CN = 0$. Daraus findet man $CL \cdot P\sin\phi + CM \cdot Q\sin\phi + CN \cdot R\sin\phi = \frac{CL^2 \cdot L \cdot \gamma}{CN}$ $+ \frac{CM^2 \cdot M \cdot \gamma}{CN} + \frac{CN^2 \cdot N \cdot \gamma}{CN}$, folglich $\frac{\gamma}{CN} =$

$$\frac{CL \cdot P\sin\phi + CM \cdot Q\sin\phi + CN \cdot R\sin\phi}{CL^2 \cdot L + CM^2 \cdot M + CN^2 \cdot N}$$

und das ist die Winkelbeschleunigung, welche aus der gemeinschaftlichen Wirkung der dreyen Gewichte erfolgt.

Bey dem angenommenen Zustande des Gleichgewichts ist jede von den so verbundenen Massen eben dem Druck ausgesetzt, den sie während der Umdrehungsbewegung deswegen leidet, weil einige dieser Massen, von den unmittelbar daran befindlichen Kräften nicht so schnell beschleuniget werden, als nöthig wäre, wenn sie den übrigen in ihrer Bewegung nicht hinderlich fallen sollten.

Die Umdrehungsbeschleunigung wird in allen Fällen gefunden, wenn man die Summe der statischen Momente aller respectiven Gewichte mit der Summe aller Producte der Massen in die Quadrate ihrer Entfernungen vom Mittelpunct der Umdrehung multiplicirt.

Wenn G der in L, M, N, befindlichen Gewichte Schwerpunct ist, so hat man auch $CL \cdot P + CM \cdot Q + CN \cdot R = CG(P+Q+R)$, und das giebt die Winkelbeschleunigung $\frac{\gamma}{CN} = \frac{CG\,(P+Q+R)\sin\phi}{CL^2 \cdot L + CM^2 \cdot M + CN^2 N}$.

86 §.

Die grade und unbiegsame um C bewegliche in mehr als einem Punct schwere grade Linie CN ist ein zusammengesetztes Pendel (72 §.) das wie ein

einfa-

einfaches seine Schwingungen in gewisser Zeit vollendet. Die Schwingungszeit dieses zusammengesetzten Pendels wäre also bekanut, wenn man finden könnte, wie lang ein einfaches Pendel seyn müste, wenn es seine Schwingungen mit dem zusammen gesetzten in gleichen Zeiten vollenden sollte. Das einfache könnte alsdenn ein mit dem zusammen gesetzten gleichzeitiges **Pendel** heissen, (pendulum simplex composito isochronum.) Wenn CO die Länge dieses gleichzeitigen einfachen Pendels ist, so heist O der **Schwingungspunct** (centrum oscillationis) des **zusammengesetzten Pendels:** er hat die Eigenschaft, daß wenn er allein schwer wäre, die Umdrehung eben so würde beschleuniget werden, wie in dem Fall, wenn mehr Gewichte am Pendel vertheilt sind.

87 §.

Das Pendel ist eine grade Linie, die in so- 92 F.
vielen Puncten, als man will, schwer ist, man soll die Entfernung des Schwingungspuncts vom Mittelpunct der Umdrehungsbewegung finden.

Aufl. Wenn der Punct O allein schwer und CO ein einfaches Pendel wäre, so wäre des Puncts O Beschleunigung in jeder Lage des Pendels $= \sin\varphi$, (54 §.) also seine Umdrehungsbeschleunigung $= \frac{\sin\varphi}{CO}$, die Beschleunigung der Schwere $g = 1$ gesetzt. Wenn aber diese Beschleunigung in jeder Lage des Pendels für das zusammen gesetzte eben so groß ist, so müssen beyde gleichzeitig seyn, also wird erfordert, daß $\frac{CG.(P+Q+R)\sin\varphi}{CL^2.L+CM^2.M+CN^2.N} = \frac{\sin\varphi}{CO}$ sey, und das giebt $CO = \frac{CL^2.L + CM^2.M + CN^2.N}{CG.(P+Q+R)}$.

Weil die Massen L, M, N, durch ihre Gewichte ausgedrückt werden müssen, so hat man auch $CO = \frac{CL^2.P + CM^2.Q + CN^2.R}{CG(P+Q+R)}$. Ferner ist $CL = CG - GL$, $CM = CG - GM$, $CN = CG + GN$, also findet man

$$CL^2.P = CG^2.P - 2CG.GL.P + GL^2.P$$
$$CM^2.Q = CG^2.Q - 2CG.GM.Q + GM^2.Q$$
$$CN^2.R = CG^2.R + 2CG.GN.R + GN^2.R,$$

und daraus ferner $CL^2.P + CM^2.Q + CN^2.R = CG^2 (P + Q + R) + GL^2.P + GM^2.Q + GN^2.R$, weil vermöge der Natur des Schwerpuncts $GN.R - GM.Q - GL.P = 0$ ist. (58 §. St.) Diesemnach ist auch $CO = CG + \frac{GL^2.P + GM^2.Q + GN^2.R,}{CG(P+Q+R)}$, und so erhellet, daß allemahl $CO > CG$ sey, also der Schwingungspunct niedriger liege als der Schwerpunct.

88 §.

93 F. Wenn die Linie CB in allen ihren Elementen schwer wäre, so müsten die bisherigen Schlüsse zwar ebenfalls ihre Anwendung finden: nur würden alsdenn besondre Kunstgriffe der Rechnung nöthig seyn, um den Schwingungspunct zu finden, wozu wiederum die Integralrechnung die besten Hülfsmittel an die Hand giebt. Wäre CB die geometrische Axe einer prismatischen oder cylindrischen Stange, die man nach ihrer ganzen Länge durch darauf senkrechte Ebenen in unendlich kleine Schichten getheilt hätte; so würden die Schwerpuncte aller der Schichten in

dieser

dieser Axe liegen, und die Gewichte der Schichten könnten alsdenn als Gewichte der dazu gehörigen Puncte in der Axe angesehen werden. Man verhält sich eben so, wenn an der Stange unten bey B noch eine schwere Kugel BDE oder sonst ein Körper von gegebener Gestalt und Grösse hängt, der die Eigenschaft hat, daß er durch wagrechte Ebenen in Schichten getheilt werden kann, die ihre Schwerpuncte in der verlängerten Axe CB haben.

Wenn der Halbmesser der Kugel $= a$, die Länge der Stange von B bis A $= b$, der Aufhängepunct in C, und BC $= c$, der Kugel Gewicht $=$ M, der Stange Gewicht $=$ N ist; so findet man vermittelst der Integralrechnung CO $=$

$$\frac{M(\frac{2}{5}aa + 2ac + cc) + N(cc - bc + \frac{1}{3}bb)}{M(a+c) + N(c - \frac{1}{2}b)}.$$

Wird das Pendel in A aufgehangen, so ist $c = b$, also CO $= \dfrac{M(\frac{2}{5}aa + 2ab + bb) + \frac{1}{3}N bb)}{M(a+b) + \frac{1}{2}N b}$. Das Gewicht der Stange ist alsdenn ihrer Länge b, das Gewicht der Kugel aber ihrem körperlichen Raum proportional: jenes Gewicht wird gefunden, wenn man das specifische Gewicht der Masse, woraus die Stange verfertiget ist, mit ihrer Länge b multiplicirt.

Wenn AB ein so zarter Faden ist, daß man sein Gewicht als unmerklich betrachten kann, so setzt man N $= 0$, und erhält CO $= \dfrac{\frac{2}{5}aa + 2ab + bb}{a+b}$, oder CO $= a + b + \dfrac{\frac{2}{5}aa}{a+b}$. Wäre die Kugel selbst in B aufgehangen, so wäre $b = 0$, und CO $= a + \frac{2}{5}a$.

Für die Stange AB allein ohne Kugel hat man $M=0$, und $CO = \frac{cc - bc + \frac{1}{3}bb}{c - \frac{1}{2}b} = c - \frac{1}{2}b + \frac{1}{12}\frac{b^2}{c - \frac{1}{2}b}$, und wenn sie in A aufgehängt, also $c=b$ ist, so wird $CO = \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}b = \frac{2}{3}b$.

89 §.

Wenn zwey einfache Pendel eine verschiedene Länge haben, und sich durch ähnliche Bogen schwingen, so ist in der Formul des 80 §. welche die Oscillationszeit angiebt, der Bruch $\frac{b}{2a}$ für beyde einerley. Ist also a des einen, A des andern Länge, so verhalten sich die Zeiten ihres Schwunges wie $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}} : \frac{\pi\sqrt{A}}{\sqrt{g}}$, also wie $\sqrt{a} : \sqrt{A}$, mithin wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen, wenn g für beyde einerley ist; mithin die Längen der Pendel wie die Quadrate der Oscillationszeiten. Eben so verhalten sich die Zeiten des kleinsten Schwunges dieser Pendel, und deßwegen ist man gewohnt, nur die Zeiten des kleinsten Schwunges der Pendel von verschiedener Länge zu vergleichen: grössere Schwingungen verhalten sich eben so, wenn die Elongationswinkel von der Verticallinie gleich sind. Die Oscillationszeiten zusammengesetzter Pendel kann man eben so vergleichen, wenn man durch die Länge des zusammengesetzten Pendels die Entfernung des Schwingungspuncts von dem Aufhängepunct versteht.

Ein Pendel, dessen kleinste Schwingungen eine Secunde währen, heißt ein Secunden-Pendel; und

und wenn von der Länge des Secunden-Pendels die Rede ist, so versteht man die Länge desjenigen, dessen kleinste Schwingungen in einer Secunde erfolgen. Ueberhaupt wird im folgenden durch die Oscillationszeit eines Pendels die Zeit seines kleinsten Schwunges verstanden werden, wenn nicht das Gegentheil angezeigt wird.

90 §.

Die Länge des Secunden-Pendels durch Beobachtung zu finden.

Aufl. Man wähle ein solches zusammengesetztes Pendel, dessen Schwingungspunct man durch Rechnung finden kann, so hat man die Länge desselben, oder eigentlich die Länge eines zusammengesetzten gleichzeitigen einfachen Pendels. Man bringe es aus der lothrechten Lage, und messe den Elongationswinkel von der Verticallinie, (80 §.) lasse es darauf frey fallen, zähle die Schwingungen desselben eine zeitlang fort, und beobachte zugleich nach einer Uhr, von deren richtigen Gange man sonst versichert seyn muß, die verflossene Zeit. Diese so beobachtete Zeit drücke man in Secunden aus, und dividire sie mit der beobachteten Anzahl der Schwingungen: so hat man die Oscillationszeit für ein Pendel von bekannter Länge $= a$, und den angenommenen Elongationswinkel α. Diese Oscillationszeit für den Winkel α sey T, so ist $T = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}\left(1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{b}{a} + \frac{9}{256}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \ldots\right)$

also $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}} = \frac{T}{1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{b}{a} + \frac{9}{256}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \ldots}$, und das ist die Zeit des kleinsten Schwunges für ein Pendel dessen Länge $= a$ ist.

Diese Zeit sey $= t$, und die Länge des Secundenpendels $= l$, so hat man nun aus der Proportion $t^2 : 1^2 = a : l$ die Länge $l = \frac{a}{t^2}$.

91 §.

Wenn ein bloß träger nicht schwerer Punct, dessen Masse $= M$ ist, im Kreise so schnell umlaufen soll, daß die Fliehkraft eben so groß wird, als das Gewicht eines schweren Körpers, dessen Masse als Masse der umlaufenden Masse gleich ist; so muß die Umlaufszeit doppelt so groß seyn, als die Oscillationszeit eines Pendels, dessen Länge dem Halbmesser des Umlaufskreises gleich ist.

Beweis. Wenn t die Umlaufszeit und r der Halbmesser des Umlaufskreises ist, so wird bey der angenommenen Bedingung erfordert, daß $t = \frac{\pi\sqrt{2r}}{\sqrt{g}}$ sey, (77 §.) oder $t = \frac{2\pi\sqrt{r}}{\sqrt{2g}}$. Wenn ferner r die Länge eines Pendels ist, so ist seine Oscillationszeit $\vartheta = \frac{\pi\sqrt{r}}{\sqrt{2g}}$; mithin wird erfordert, daß $t = 2\vartheta$ sey.

92 §.

Die Beschleunigung der Schwere, oder die Höhe des freyen Falles schwerer Massen für die erste Secunde des Falles zu finden.

Aufl. Man suche die Länge l des Secunden-Pendels, und setze in der Gleichung $t = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$, wo t die

Oscilla-

Oscillationszeit eines Pendels von der Länge a bezeichnet, diese Länge $a = l$, so muß $t = 1$ Sec. seyn, und man erhält $\sqrt{2g} = \pi\sqrt{l}$, also die Beschleunigung der Schwere $g = \frac{1}{2}\pi^2 l$.

Aus dieser Gleichung kann also g gefunden werden, wenn l durch Beobachtung nach dem 90 §. gefunden ist. Wäre umgekehrt g sonst woher bekannt, so könnte man $l = \frac{2g}{\pi^2}$ durch Rechnung finden. Zugleich ergiebt diese Gleichung, daß die Länge des Secundenpendels nur unter der Bedingung auf der ganzen Erde einerley seyn könne, wofern die Beschleunigung der Schwere auf der ganzen Erde einerley ist. Wofern also die Länge des Secundenpendels vielleicht nicht an allen Orten gleich groß befunden wird, so folgt daraus, daß die Beschleunigung der Schwere an diesen Orten ebenfalls nicht von gleicher Grösse sey.

93 §.

Huygen, der die Lehren vom einfachen Pendel, welche Galiläus mit den Gesetzen der Schwere erfunden hatte, erweitert, und gewiesen hat, wie man sie auch auf das zusammengesetzte Pendel anwenden könne, vermuthete noch nicht, daß die Länge des Secundenpendels an verschiedenen Orten würde von verschiedener Grösse befunden werden: daher schlug er diese Länge als das schönste Mittel vor, ein allgemeines Fußmaaß einzuführen. Weil er diese Länge nur wenig über 3 Pariser Fuß groß fand, so sollte nach seinem Vorschlage der allgemeine Fuß den dritten Theil der Länge des Secundenpendels haben, und nach seiner Bestimmung verhält sich dieser allgemeine Fuß zum Pariser Fuß, wie 881 : 864. (M. s. Hu-

 genii

genii Horologium Oscillatorium Part. I. Operum. Vol. I. pag. 36 et Part IV. Prop. 25. Oper. Vol. I. p. 178.) Das giebt den allgemeinen Fuß in Pariser Maaß = 1,019884 . 12 Zoll = 12,238608 Paris. Zoll; also die Länge des Secunden-Pendels 36,715824 Par. Zoll, oder 36 Zoll 8,59 Linien, oder 440,59 Linien. Nach der Bestimmung des Herrn Mairan (M. s. *Maupertuis* Figure de la Terre pag. 180.) sind es 440,57 Linien. Wenn man die letzte Zahl zum Grunde setzt, so ist $\frac{1}{2}l =$ 220,285 Pariser Linien, und man findet $\pi^2 =$ 9,869604, also $g = \frac{1}{2}\pi^2 l =$ 2174,175 Linien, oder 15,098 Pariser Fuß.

Aus dem 252 §. Rechenk. hat man das Verhältniß des Pariser zum Rheinl. Fuß = 14400 : 13913 = 1,035 : 1, mithin wird $g =$ 15,625 Rheinl. Fuß gefunden, wie es oben im 26 §. vorläufig angezeigt ist. Die Länge des Secundenpendels ist also im Rheinländischen Maaß 455,98995 Linien sehr nahe 456 Linien, oder 3 Fuß und 2 Zoll.

Kruse im Hamb. Contoristen 1 Th. 235 S. unterscheidet zweyerley englisches Fußmaaß, der Londner Fuß soll nach einer Untersuchung, die einige Mitglieder der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahr 1743 angestellet haben, 135,16 Par. Linien lang seyn: dagegen bestimmt er den gemeinen Fuß zu 135,0 Paris. Linien, wie Eisenschmidt (Disquis. de ponderibus et mensuris). Demnach wären 15 Paris. = 16 gemeinen Engl. Fussen, und man findet in diesem Maaß die Länge des Secundenpendels 470 Linien oder 3 Fuß 3 Zoll 2 Linien, und die Beschleunigung der Schwere $g =$ 16,098 Fuß.

Die

Die ersten Gründe der Hydraulik.

Der I. Abschnitt.

Von der Bewegung des Wassers in Gefässen und Röhren.

1 §.

Die kleinsten Theilchen flüssiger Massen sind mit den kleinsten Theilchen fester Massen einerley Bewegungsgesetzen unterworfen. Wenn alle Elemente einer flüssigen Masse einmahl in Ruhe, oder insgesamt nach parallelen Richtungen in Bewegung sind; so bleiben sie im ersten Fall in Ruhe, und im zweyten Fall in derselben Bewegung mit unveränderter Richtung und Geschwindigkeit, wofern nicht der Zustand der Ruhe oder Bewegung durch eine bewegende Kraft geändert wird. (6. 7 §. Mechanik) Auf alle Elemente der uns bekannten flüssigen Massen in der Natur wirkt die Schwere eben so, wie auf alle Elemente einer festen Masse. Jedes Element für sich, wenn es sich selbst frey überlassen ist, fällt gegen die Erde herab, und jedes andre Element von gleicher Masse wird, wenn es herab fällt, völlig eben so beschleuniget. Daher kann eine schwere flüssige Masse von gegebener Gestalt und Grösse eben so wie eine feste Masse fallen, ohne daß einige ihrer Elemente die Bewegung der übrigen entweder beschleunigen oder mehr verzögern. Wenn übrigens ein Element einer flüssigen Masse von einer solchen Kraft bewegt würde, die stärker oder schwächer, übrigens aber wie die Schwere gleichförmig beschleunigte; so würden die allgemeinen Lehren von den gleichförmig beschleunigenden Kräften (Mech. III. Abschnitt) ebenfalls ihre Anwendung finden. So lange alsdenn gleiche Elemente von gleichen Kräften beschleuniget werden, und sonst nichts vorhanden ist, was die daher erfolgende Bewegung ändert; so lange bewegt sich die ganze Masse eben so, wie jedes Theilchen von ihr, und wenn man die Bewegung eines einzigen Theilchens kennet, so ist zugleich die Bewegung der ganzen Masse bekannt. Man vergleiche den 57 §. der Mechanik.

2 §.

94F. Es sey ABCD ein Gefäß, das die Gestalt eines graden Prisma oder Cylinders hat, in der Mitte des Bodens sey eine Oefnung FG befindlich, die man nach Gefallen öfnen und wieder verschliessen kann, und dies Gefäß sey bis an AD mit schwerem Wasser gefüllt. Der Boden stehe wagrecht, damit derselbe mit der höchsten Fläche des Wassers, so lange es im Gefäß ruhig stehet, parallel sey. Man nehme an, FG werde schnell geöfnet, so wiederfährt dem im Gefäß befindlichen Wasser wenigstens zum Theil das, was einer schweren festen Masse, die vorher auf einer Unterstützung ruhig lag, widerfährt, wenn die Unterstützung plötzlich weggenommen wird. Das zunächst über der Oefnung befindliche Wasser wird in diesem Augenblick anfangen nach den Gesetzen der Schwere herab zu sinken, hiedurch wird das Gleichgewicht aller

Elemente

Elemente der ganzen im Gefäß befindlichen Masse Wasser gehoben, und diese Elemente kommen insgesamt mit in Bewegung. Würde der ganze Boden auf einmahl weggenommen, so würden alle Elemente der ganzen Masse Wasser nach den Gesetzen der Schwere herab sinken, kein Element würde dem andern hinderlich fallen, oder auch die Bewegung desselben mehr beschleunigen können, als es für sich schon von der Schwere beschleuniget wird: alle Elemente würden in parallelen lothrechten Richtungen herab fallen. Wenn dagegen die Fläche der Oefnung kleiner als die Fläche des Bodens ist, die hier so groß, als die Fläche eines jeden wagrechten Queerschnittes der im Gefäß befindlichen Masse Wasser angenommen wird; so erfolgt die Bewegung nach ganz andern Gesetzen. Der lothrecht über der Oefnung stehende Wassercylinder TFGV könnte zwar nach den Gesetzen der Schwere fallen, allein das umher befindliche Wasser, weil es sich nach allen Seiten auszubreiten strebt, (12 §. Hydrost.) muß diese Bewegung bald stören: die Wege der Wassertheilchen, welche nicht in einer die Oeffnung treffenden lothrechten Linie liegen, müssen sich desto mehr biegen, je näher sie dem Boden des Gefässes kommen, und je näher sie anfangs der das Gefäß umgebenden Seitenfläche waren, ohngefähr so, wie es die punctirten Linien in der 96 Fig. vorstellen. 96 F. Wenn mit dem Wasser kleine Stückchen von rothen Siegellack vermischt sind, die mit dem Wasser zugleich durchfliessen; so nehmen diese dergleichen Wege, und man kann daraus die Folge ziehen, daß die Wassertheilchen, welche jene Siegellacktheilchen mit sich fortführen, selbst dergleichen Wege nehmen.

men. (M. s. *Daniel. Bernoulli* Hydrodynamica, Sectio IV. §. 3. pag. 62.)

3 §.

Vermöge dieser der Natur gemässen Vorstellung, wie es mit der Bewegung der ganzen Masse im Gefäß zugehe, wenn es unten durch die Oefnung fließt, darf man nicht voraussetzen, daß alle Theilchen in parallelen Richtungen mit gleichen Geschwindigkeiten herab sinken. Wenn man aber die ganze im Gefäß befindliche Masse Wasser vermittelst wagrechter Querschnitte wie RS, *rs*, in Schichten von sehr geringer Dicke eintheilt, so kann man zur Erleichterung der Rechnung annehmen, daß alle in einerley wagrechten Schichte befindlichen Wassertheilchen in jedem Augenblick mit gleichen Geschwindigkeiten in parallelen Richtungen sinken, gesetzt, daß auch die Geschwindigkeiten der zu jeder Schichte für sich gehörigen Wassertheilchen verschieden wären. Um dieser Vorstellung
95F. desto mehr Deutlichkeit zu geben, nehme man an, das Wasser befinde sich in einem solchen Gefäß, wie AMFGND, dessen wagrechte Querschnitte MN, RS, in verschiedenen Höhen selbst verschieden sind, übrigens aber eine solche Figur haben, daß ihre Schwerpuncte insgesamt in der lothrechten Linie durch die Mitte der im Boden befindlichen Oefnung liegen. Das Wasser, welches jetzt die Schichte M*mn*N ausfüllt, trete in der folgenden sehr kleinen Zeit *t* in die nächste Schichte *mμνn*; so müssen zwar die Wege der zunächst am Umfang der Schichte bey M und N befindlichen Wassertheilchen sich ein wenig biegen, allein die Abweichung von der gradlinichten Richtung ist desto geringer, je kleiner die Zeit *t* angenommen wird.

Wenn

Wenn nun ferner in eben der Zeit t die Wasserschichte V$r s$S in den Raum $r \varrho \sigma s$ sinkt; so wird erfordert, daß die Schichte R$r s$S = M$m n$N sey, weil eben soviel Wasser von RS bis $r s$ nachfolgen muß, als in der Zeit t von MN nach $m n$ sinkt. Wegen der sehr kleinen Dicke der Schichten können sie als grade Prismen oder Cylinder angesehen werden, mithin wird erfodert, daß RS . Ll = MN . Pp sey, also Ll : Pp = MN : RS. Aber die in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege Ll, Pp, verhalten sich wie die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen (2 §. Mech.) während der sehr kleinen Zeit t, mithin verhalten sich diese Geschwindigkeiten umgekehrt, wie die Querschnitte des Gefässes, durch welche die Wassertheilchen während des Zeittheilchens t durchfliessen.

4 §.

Wenn die Querschnitte des Gefässes gegen den Boden zu kleiner werden, so wächst die Geschwindigkeit der Elemente des Wassers, indem sie gegen den Boden herab sinken, und sie fallen mit beschleunigter Bewegung. Wäre das Gefäß ein grades Prisma oder ein grader Cylinder, wie ABCD, (94 Fig.) so würde nach diesem Gesetz folgen, daß das Wasser im Gefäß mit gleichförmiger Bewegung sinke: nur in dem Augenblick, da es durch die Oefnung FG tritt, würde sich die Geschwindigkeit plötzlich ändern. Wenn nemlich in dem Zeittheilchen t der Wassercylinder F$f g$G durch die Oefnung fließt, so wäre vermöge des erwähnten Gesetzes die Geschwindigkeit des durchfliessenden Wassers $= \frac{RS}{FG} . C$, wenn die Ge-

schwin-

schwindigkeit des Wassers im Gefäß = c gesetzt ist. Man ist aber nicht genöthiget, eine so plötzliche Aenderung der Geschwindigkeit anzunehmen, wenn man gleich jenes Gesetz gelten läßt. Man kann die Bewegung des nahe über der Oefnung befindlichen Wassers so betrachten, als wenn es daselbst einen trichterähnlichen Canal wie EMFGNH bildete, dessen Querschnitte MN gegen FG zu nach dem Gesetz der Stetigkeit abnehmen, nicht anders, als wenn das in den Ecken bey B, C, umher befindliche Wasser in Ruhe bliebe. Was am Ende des 2 §. aus des Hn. Daniel Bernoulli Hydrodynanik angeführt ist, stimmt sehr wohl mit dieser Vorstellung zusammen, und es ist eben das, was vom H. Joh. Bernoulli als ein Strudel (gurges) über der Oefnung vorstellig gemacht wird. (M. s. *Ioh. Bernoulli* Hydraulica P. I. §. III-V. Operum Tom. IV. p. 398 auch H. H. Kästners Anfangsgründe der Hydrodynamik, 455 §. 424 S.)

5 §.

97F. Es sey nun AMFGND eine grade oder gebogene Röhre wie man will, und mitten durch diese Röhre erstreckte sich die Linie OPQ als ihre Axe. Ferner sey die Gestalt der Röhre so beschaffen, daß die Schwerpuncte aller auf der Axe OPQ senkrechten Querschnitte in dieser Axe liegen, so kann sie auch die centrische Linie der Röhre heissen, und sie ist für die Röhre das, was die Verticallinie durch die Mitte der Oefnung im Boden für die vorhin betrachteten Gefässe war. Wenn durch diese Röhre Wasser so fließt, daß man von der Wahrheit wenigstens nicht viel abweicht, wenn man annimmt, daß alle durch jeden auf der centrischen Linie senkrechten Querschnitt fliessende Wassertheilchen für jeden Augenblick gleich schnell, und nach Richtungen fliessen, deren Lage mit der Lage der centrischen Linie überein kommt; so **verhalten sich die Geschwindigkeiten der durch zwey verschiedene Querschnitte fliessenden Wassertheilchen allemahl umgekehrt wie diese Querschnitte.** Denn die ganze durchfliessende Masse Wasser kann vermittelst solcher senkrechten Querschnitte in Schichten von sehr kleiner Dicke getheilt werden, und so folgt die Richtigkeit dieser Regel aus den angenommenen Voraussetzungen eben so, wie sie im 3 §. für die Fälle bewiesen ward, wenn die centrische Linie grade und vertical ist.

6 §.

In der Röhre AMFGND fliesse also eine schwere Masse Wasser in der Richtung der centrischen Linie OPVQ, und $M\mu\nu N$ sey ein Element derselben zwischen zwoen auf der centrischen Linie senkrechten Querschnitten, deren Entfernung von einander man unendlich klein annehmen kann. Dies Element rücke in dem kleinen Zeittheilchen t um den Weg pP fort, so kann Pp als eine grade Linie angesehen werden, welche nach beyden Seiten verlängert die centrische Linie in P berührt. Dies Element Pp sey gegen den Horizont unter dem Winkel PTB $= \phi$ geneigt, und das Gewicht der Masse Wasser $M\mu\nu N = p$, die Menge dieser Masse $= m$, so ist das respective Gewicht in 97F.

der Richtung $pP = p \sin\phi = \frac{p \cdot \Pi\pi}{Pp}$, wenn man P$\Pi$, $p\pi$, horizontal ziehet. Ferner sey in eben der Richtung pP die Beschleunigung dieses Elements $=$ G, die Beschleunigung der Schwere $= g$, so ist derjeni-

ge

ge Theil des respectiven Gewichts $p \sin \varphi$, welcher auf diese Beschleunigung verwandt wird $= \frac{G}{g} m$, der übrige Theil $p \sin \varphi - \frac{G}{g} m$ verursacht Druck, wenn das voranlaufende Element nicht so schnell ausweicht, daß jenes frey folgen kann. Wenn nun KZ ein gegebener Querschnitt ist, so pflanzt sich jener Druck nach den Gesetzen des Gleichgewichts so fort, daß daher gegen KZ ein Druck $= \frac{KZ}{MN} \left(p \sin \varphi - \frac{G}{g} \,.\, m \right)$ entsteht, und die Höhe dieses Drucks ist $= \frac{p \sin \varphi - (G:g) \,.\, m}{MN}$, wenn das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= 1$ gesetzt wird. Bey eben der Voraussetzung ist $p = m = MN \,.\, Pp$, und die Höhe des Drucks gegen KZ $= Pp \,.\, \sin \varphi - \frac{G}{g} \,.\, Pp = \Pi\pi - \frac{G}{g} \,.\, Pp$. Wenn also p, m, G, φ, unbestimmt für jedes der zwischen AD und KZ befindlichen Elemente Gewicht, Masse, Beschleunigung und Neigung gegen den Horizont bezeichnen; so leidet KZ in diesem Augenblick einen Druck der gefunden wird, wenn man jene auf KZ reducirten Pressungen $\frac{KZ}{MN} \left(p \sin \varphi - \frac{G}{g} \,.\, m \right)$ alle in eine Summe bringt, und die Höhe dieses Drucks ist die Summe aller Höhen $\Pi\pi - \frac{G}{g} \,.\, Pp$ von O bis S genommen. Die Summe aller Elemente $\Pi\pi$ ist OS, und wenn man die Summe aller $\frac{G}{g} \,.\, Pp$ auf diese Art

$\int \frac{G}{g}$

$\int \frac{G}{g} \cdot Pp$ bezeichnet, so ist die gesuchte Höhe des Drucks gegen KZ $= OS - \int \frac{G}{g} \cdot Pp$.

In freyer Luft ist die höchste Wasserfläche AD allemahl auch dem Druck der Atmosphäre ausgesetzt, der dem Gewicht einer Wassersäule in der Höhe von 32 Fuß gleich ist. Setzt man diese Höhe $= h$, so muß zur Summe jener Höhen noch die Höhe h addirt werden, weil dieser Druck sich ebenfalls nach den Gesetzen des Gleichgewichts gegen KZ fortpflanzt. Uebrigens kann auch AD sonst noch jedem Druck ausgesetzt seyn, er rühre her von welcher Ursache er wolle; allemahl aber kann derselbe durch das Gewicht einer Wassersäule ausgedrückt werden, wovon AD die Grundfläche ist: (9 §. Hydrost.) und wenn alsdenn h die dazu gehörige Höhe ist, so findet man die Höhe des Drucks gegen KZ $= h + OS - \int \frac{G}{g} \cdot Pp$.

Indem das Element MmnN den Weg pP zurück legt, wächst die Geschwindigkeit desselben, und wenn die jetzige Geschwindigkeit dieses Elements $= C$ ist, dasjenige aber, was zu der schon erlangten Geschwindigkeit, indem es den Weg pP zurück legt, hinzu kommt, $= c$ gesetzt wird, so kann man die Geschwindigkeit C auch durch den Weg ausdrücken, den die Masse m hätte zurück legen müssen, wenn seit dem Anfang der Bewegung die Beschleunigung $= G$ gewesen wäre, und die Masse solchergestalt die Geschwindigkeit C erlangt hätte. Es sey also dieser Weg $= S$, so hat man $C^2 = 4G \cdot S$, und wenn man $p\mathrm{P} = s$ setzt, und die Geschwindigkeit $C + c$, welche dem zurück gelegten Wege $S + s$ zugehört, so ist auch $(C + c)^2 =$

$4G.(S+s)$, also $(C+c)^2 - C^2 = 4G.s$, mithin ferner $\frac{(C+c)^2 - c^2}{4g} = \frac{G}{g}.s$. Diesemnach ist $\int \frac{G}{g}.s$ eine Grösse, welche von der jetzigen Geschwindigkeit des Elements $MmnN$ abhängt, wovon zugleich die Geschwindigkeiten aller übrigen Elemente abhängen.

7 §.

Wenn man das Wasser aus einem Gefäß durch eine im Boden oder seitwärts angebrachte Oefnung auslaufen läßt, den Abgang des Wassers aber durch neuen Zufluß ersetzt, so daß das Gefäß beständig voll bleibt, so läuft das Wasser fast vom ersten Augenblick der Bewegung an mit unveränderlicher Geschwindigkeit aus. Dies kann man daraus abnehmen, weil man durch angestellte Versuche finden wird, daß in doppelter Zeit doppelt soviel, in dreyfacher Zeit dreymahl soviel Wasser ausläuft, als in einfacher Zeit, **und daß überhaupt die Menge des auslaufenden Wassers der Zeit proportional ist.** Soviel siehet man wohl, daß das ausströmende Wasser nicht im ersten Augenblick der Bewegung diejenige Geschwindigkeit, womit es hiernächst unveränderlich ausläuft, plötzlich erlangen könne: vielmehr muß die Bewegung desselben nach und nach beschleuniget werden, gesetzt, daß es auch sehr schnell erfolge. Will man also die gesammte Bewegung des Wassers vom ersten Augenblick ihrer Entstehung vollständig kennen lernen, so muß man das Gesetz dieser Beschleunigung suchen. Hier aber muß die folgende Untersuchung auf diejenige unveränderliche Geschwindigkeit eingeschränkt bleiben, womit das Wasser ausströmt,

wenn

wenn alles schon in den Beharrungsstand gekommen ist.

8 §.

Die Röhre *AMFGND* ist bis an *AD* voll 97F. Wasser, welches durch die Oefnung *FG* mit einer unveränderlichen Geschwindigkeit ausläuft, weil der Abgang des Wassers oben in *AD* durch neuen Zufluß beständig ersetzt wird; man soll den Druck finden, welchem ein gegebener Querschnitt *KZ* während der Bewegung ausgesetzt ist.

Aufl. Es sey z die Höhe, welche der Geschwindigkeit des durch FG auslaufenden Wassers zugehört, so ist diese Geschwindigkeit $= 2\sqrt{gz}$, (25 §. Stat.) also die jetzige Geschwindigkeit des Elements $\mathrm{M}mn\mathrm{N}$ $= \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{MN}} \cdot 2\sqrt{gz}$, die dazu gehörige Höhe $= \frac{\mathrm{FG}^2}{\mathrm{MN}^2} \cdot z$. Vorher, ehe es noch den Weg $p\mathrm{P}$ durchlaufen hatte, war die Geschwindigkeit desselben $= \frac{\mathrm{FG}}{\mu\nu} \cdot \sqrt{gz}$, und die dazu gehörige Höhe $= \frac{\mathrm{FG}^2}{\mu\nu^2} \cdot z$. Diese letztere Geschwindigkeit sey $= \mathrm{C}$, die neue, welche es erlangt, indem es den Weg $p\mathrm{P} = s$ durchläuft, $= \mathrm{C} + c$; so ist $\frac{(\mathrm{C}+c)^2}{4g} = \frac{\mathrm{FG}^2}{\mathrm{MN}^2} \cdot z$, $\frac{\mathrm{C}^2}{4g} = \frac{\mathrm{FG}^2}{\mu\nu^2} \cdot z$, mithin $\frac{(\mathrm{C}+c)^2}{4g} - \frac{\mathrm{C}^2}{4g} = \left(\frac{\mathrm{FG}^2}{\mathrm{MN}^2} - \frac{\mathrm{FG}^2}{\mu\nu^2}\right) \cdot z = \frac{\mathrm{G}}{g} \cdot s$. (6 §.) Eben das ist die Differenz der Höhen, welche den jetzigen Geschwindigkeiten der Elemente $\mathrm{M}\mu\nu\mathrm{N}$, $\mathrm{M}mn\mathrm{N}$, zugehören, und man muß

 die

die Summe aller dieser Differenzen für jede zwo nach einander folgenden Elemente $\mu\delta\varepsilon\nu$, $\delta\zeta\eta\varepsilon$, $\zeta\varkappa\lambda\eta$, u. s. f. suchen. Es sind aber diese Differenzen nach der Ordnung von MN nach AD zu folgende:

$$\left(\frac{FG^2}{MN^2} - \frac{FG^2}{\mu\nu^2}\right).z,$$

$$\left(\frac{FG^2}{\mu\nu^2} - \frac{FG^2}{\delta\varepsilon^2}\right).z,$$

$$\left(\frac{FG^2}{\delta\varepsilon^2} - \frac{FG^2}{\zeta\eta^2}\right).z,$$

$$\left(\frac{FG^2}{\zeta\eta^2} - \frac{FG^2}{\varkappa\lambda^2}\right).z,$$ also die Summe von MN bis $\varkappa\lambda = \left(\frac{FG^2}{MN^2} - \frac{FG^2}{\varkappa\lambda^2}\right).z.$

Man sieht leicht, daß eben die Summe bis AD genommen $= \left(\frac{FG^2}{MN^2} - \frac{PG^2}{AD^2}\right)z$ gefunden werde, und wenn KZ statt MN der erste Querschnitt ist, wovon man das Summiren anfängt, so ist diese Summe $= \left(\frac{FG^2}{KZ^2} - \frac{FG^2}{AD^2}\right)z.$ Diesen Werth setze man statt $\frac{G}{g}.s$; so findet man die Höhe des Drucks gegen $KZ = OS - \int\frac{G}{g}.s = OS - \left(\frac{FG^2}{KZ^2} - \frac{FG^2}{AD^2}\right)z.$

In freyer Luft, oder wenn auch sonst AD einem Druck ausgesetzt ist, dem die Höhe $= h$ zugehört, muß diese Höhe noch zu jener gefundenen Höhe addirt

dirt werden. Wenn also p die Höhe des Drucks gegen KZ bezeichnet, so ist $p = h + OS - \left(\frac{FG^2}{KZ^2} - \frac{FG^2}{AD^2}\right) z.$

9 §.

Bey eben den Voraussetzungen, wie im vor. §. die Geschwindigkeit zu finden, womit das Wasser durch die Oefnung *FG* ausläuft.

Aufl. Gegen die untere Oefnung drückt wiederum die Atmosphäre, auch kann diese Oefnung sonst einem Druck ausgesetzt seyn, und es ist gleichgültig, von welcher Ursache er herrühren mag. Wenn dieser Druck gegeben ist, so drücke man ihn durch das Gewicht einer Wassersäule auf der Grundfläche FG aus, und setze seine Höhe $= k$. Nun suche man zuerst aus der Formul des vor. §. den Druck gegen den niedrigsten Querschnitt WY, so findet man $p = h + OB - \left(\frac{FG^2}{WY^2} - \frac{FG^2}{AD^2}\right) z$, und dabey ist zu erwägen, daß OB die Summe der Höhen aller lothrechten Pressungen sey, die von den Gewichten aller Elemente von AD bis WY herrühren. Summirt man nun weiter bis FG, so muß zu OB noch die Summe der Höhen aller lothrechten Pressungen kommen, die von den Gewichten aller Elemente von WY bis FG herrühren, und diese Summe wäre CQ. Weil aber diese Pressungen den vorigen entgegen gesetzt sind, so müssen selbige in der Rechnung als negative Grössen betrachtet, und deswegen zu jenen mit den entgegen gesetzten Zeichen addirt werden. Ferner muß in dem zweyten Theil der Summe FG statt WY gesetzt werden, so findet man die Höhe des Drucks gegen FG $= h + OB$

 $-CQ$

$- CQ - \left(1 - \frac{FG^2}{AD^2}\right) . z$, und diese Höhe ist vermöge der Voraussetzung $= k$, mithin findet man ferner $h - k + OB - CQ = \frac{AD^2 - FG^2}{AD^2} . z$, also $z = \frac{AD^2}{AD^2 - FG^2} . (h - k + OB - CQ)$, und z ist die Höhe, welche der gesuchten Geschwindigkeit zugehört, woraus selbige $= 2\sqrt{gz}$ gefunden wird.

10 §.

Wenn AD und FG sonst keinem Druck, denjenigen ausgenommen, der von der Atmosphäre herrührt, ausgesetzt sind, so sind h und k sehr wenig verschieden, es müßte denn AD sehr viel höher liegen, als FG. Demnach ist alsdenn nahe genug $z = \frac{AD^2}{AD^2 - FG^2} . (OB - CQ)$. Wenn ferner die Fläche der untern Oefnung FG in Vergleichung mit der obern Wasserfläche AD sehr klein, also $\frac{FG^2}{AD^2}$ ein sehr kleiner Bruch ist, so hat man sehr nahe $z = OB - CQ$, und die **Höhe, welche der Geschwindigkeit zugehört, womit das Wasser ausströmt, ist der lothrechten Höhe der obern Wasserfläche über der Oefnung gleich.** In dem Fall also, wenn die letzte Richtung der centrischen Linie bey Q vertical ist, würde das Wasser so hoch steigen, als die obere Wasserfläche über der Oefnung erhaben ist, wenn sonst keine Hindernisse die Bewegung verzögerten.

In eben dem Fall, wenn FG in Vergleichung mit AD sehr klein ist, hat man im 8 §. $p = h + OS - \frac{FG^2}{KZ^2} . z$, und $\frac{FG^2}{KZ^2} . z$ ist die Höhe, welche der Geschwindigkeit des durch den Querschnitt KZ laufenden Wassers zugehört. Eben dem Druck ist zugleich der Seitenumfang der Röhre an dieser Stelle ausgesetzt.

11 §.

Der im 9 §. gefundene Ausdruck für die Geschwindigkeit des auslaufenden Wassers hängt nicht von der Gestalt des Gefässes, sondern allein von dem Verhältniß der obern Oefnung gegen die untere, und von der Höhe der höchsten Wasserfläche über der Oefnung ab. Damit aber die Bewegung des Wassers in dem Beharrungsstande, welchen die Rechnung voraussetzt, erhalten werden könne, müßte in die obere Oefnung nach der Richtung der centrischen Linie allemahl neues Wasser mit der Geschwindigkeit eintreten, der die Höhe $\frac{FG^2}{AD^2} . z$ zugehört. Wenn indessen FG in Vergleichung mit AD sehr klein ist, so bleibt diese Geschwindigkeit kaum merklich, und es genüget, wenn auch das Wasser oben nur seitwärts zufliesset. Ferner erhellet, daß die im 9 §. gefundene Auflösung allemahl diene, die Geschwindigkeit zu finden, auch wenn das Wasser durch eine Oefnung im Boden läuft, sie sey grade in der Mitte oder seitwärts im Boden befindlich. Auch wird die Geschwindigkeit eben so gefunden, wenn die Oefnung in dem Seitenumfang des Gefässes befindlich ist, wie es die 98 Figur vorstellet, 98 F.
wenn das Wasser in horizontaler Richtung aussprützt.

Gewöhnlich kann man sich eine Linie, wie im 9 §. die centrische Linie war, vorstellen, und die ganze Masse Wasser durch darauf senkrechte Querschnitte in unendlich kleine Elemente theilen. Ja es ist nicht einmahl nothwendig, daß dies die Linie der Schwerpuncte aller Elemente der Wassermasse sey, es kann statt dessen die Richtungslinie verstanden werden, nach welcher die Bewegung aller Elemente des Wassers vornemlich erfolgt: alle kleine Abweichungen von dem, was die bisherige Rechnung voraussetzt, hier mit in Betrachtung zu ziehen, würde schon um deßwillen nicht angehen, weil hier nur die ersten Anfangsgründe vorgetragen werden, wenn es auch sonst nicht seine Schwierigkeiten hätte.

12 §.

Weil die Rechnung voraussetzt, daß die Bewegung des Wassers sonst völlig frey sey, nur daß die ganze durchfliessende Masse während der Bewegung im Gefäß selbst auch genöthiget ist, die Figur des Gefässes anzunehmen; so wird erfodert, daß die innere Fläche der Röhre soviel möglich glatt sey, und dies vornemlich in der Gegend der untern Oefnung, durch welche das Wasser ausströmt. Dabey aber ist es nicht zu vermeiden, daß die Bewegung des aussprützenden Wassers nicht durch den Widerstand der Luft verzögert würde, und eben das ist eine der vornehmsten Ursachen, weswegen der Wasserstrahl, wenn er lothrecht in die Höhe sprützt, nie die die Höhe der obern Wasserfläche völlig erreicht. Ueberdem steigt das Wasser mit beständig abnehmender Geschwindigkeit, so daß jeder vorhergehende Tropfen schon etwas langsamer als der nächstfolgende steigt, und eben deswegen ersterer die Bewegung des letztern schon etwas verzögert. In der größten Höhe verliert jeder Tropfen seine Geschwindigkeit gänzlich, und würde sogleich wieder zurück fallen, wenn das beständig nachfolgende Wasser es nicht hinderte, und das oben ruhende Wasser gleichsam auf einen Augenblick trüge, bevor es an den Seiten herab fliesset. Daß der letzte Umstand eine nicht unerhebliche Ursache der Zögerung sey, läßt sich daraus abnehmen, weil die Erfahrung lehrt, daß das Wasser wirklich etwas höher als vorher steige, wenn man die Röhre, aus welcher es heraussprützt, ein wenig von der Verticallinie abbeugt. Bey einer beträchtlich grossen Wasserhöhe würde übrigens auch der Druck der Luft gegen die untere Oefnung merklich grösser seyn, als gegen die höchste Wasserfläche, und es wäre alsdenn nicht verstattet, in der Formul des 9 §. $k = \mathfrak{k}$ zu setzen.

13 §.

Je schneller die Bewegung einer Masse in der Luft ist, desto stärker widerstehet die Luft der Bewegung: daher kommt es, daß die Höhe des springenden Wasserstrahls desto mehr von der Höhe abweicht, die er eigentlich erreichen sollte, je grösser seine Ge- 99 F.
schwindigkeit ist, womit er zu steigen anfängt. Es sey ABCD ein Wasserbehälter, woraus das Wasser durch die Fallröhre EFG abfliesset, durch die Ofnung *ac* aber lothrecht in die Höhe steigt: so ist KD die Höhe der obern Wasserfläche über der untern, welche hier kurz die **Wasserhöhe** heissen kann, und der Wasserstrahl sollte bis an die Horizontalfläche AD steigen. Es bleibt aber die Höhe *ab* des Strahls kleiner als KD, und der Unterscheid KD − *ab* ist desto grösser, je grösser KD also auch *ab* selbst ist. Aus vielen Ver-

suchen, die Hr. Mariotte angestellet hat, schließt derselbe folgende Regel:

Wenn A und a die Wasserhöhen, B und b aber die vom Wasserstrahl wirklich erreichten Höhen sind, so ist $B^2 : b^2 = A - B : a - b$, vorausgesetzt, daß das Wasser durch gleiche Oefnungen springe.

M. s. *Mariotte* Traité du mouvement des eaux IV. Partie 1 Discours p. 304. Weil vermöge dieser Regel $\frac{b^2}{a-b} = \frac{B^2}{A-B}$ eine beständige Zahl bleibt, so sey diese $= E$, und man erhält $b^2 = a . E - b . E$, also $b^2 + E . b = E . a$. Aus der Höhe b, die der Strahl erreichen soll, findet man also die Höhe $a = \frac{b^2 + E . b}{E} = b + \frac{b^2}{E}$, welche der Geschwindigkeit zugehört, womit der Strahl zu steigen anfangen muß, damit er in freyer Luft die Höhe b erreiche.

Wenn umgekehrt aus der Wasserhöhe a die Höhe des springenden Strahls gefunden werden soll, so hat man $b^2 + Eb + \frac{1}{4}E^2 = E . a + \frac{1}{4}E^2$, also $b + \frac{1}{2}E = \sqrt{(E . a + \frac{1}{4}E^2)}$, und $b = \sqrt{(E . a + \frac{1}{4}E^2)} - \frac{1}{2}E$.

14 §.

Bey der Wasserhöhe von 5 Fuß oder 60 Zoll fand Mariotte die Höhe des Strahls 59 Zoll, also wird man nicht merklich fehlen, wenn man mit Mariotte annimmt, die Wasserhöhe müsse 61 Zoll seyn, wenn der Strahl 60 Zoll hoch steigen solle. Demnach setze man $B = 60$ Zoll, $A - B = 1$ Zoll; so ist $\frac{B^2}{A-B} = 60^2 = E$, und man hat

$$a = b + \frac{b^2}{3600^2},$$

$$b = \sqrt{(60^2 . a + \tfrac{1}{4} . 60^4)} - 1800,$$

oder $b = 60\sqrt{(a + 900)} - 1800,$

da dann a und b in Zollen ausgedrückt werden müssen. Will man aber diese Höhen in Fussen ausdrücken, so ist $E = \frac{5^2}{\frac{1}{12}} = 300$, also

$$a = b + \frac{b^2}{300}$$

und $b = \sqrt{(300 . a + \tfrac{1}{4} . 300^2)} - 150$

oder $b = 10\sqrt{(3a + 225)} - 150.$

Soll der Strahl 100 Fuß hoch steigen, so findet man $a = 100 + \frac{100^2}{300} = 133\frac{1}{3}$ Fuß: wenn aber $a =$ 100 Fuß ist, so findet man $b = 10\sqrt{525} - 150 =$ 79 Fuß.

15 §.

Die Wasserhöhe ist gegeben, und die Grösse der Oefnung, aus der das Wasser ausfließt: man soll die in gegebener Zeit t auslaufende Wassermenge finden, wenn das Gefäß soviel Zufluß hat, daß das Wasser darin beständig in einerley Höhe erhalten wird.

Aufl. Wenn die Schwere und andre Ursachen die Richtung und Geschwindigkeit des durch die Oefnung fliessenden Wassers nicht änderten, so würde der Strahl die Gestalt eines graden Cylinders oder Prisma annehmen, dessen Grundfläche die Oefnung wäre, und in der Zeit t würde die Länge des Strahls so groß werden, als der Weg, den die im ersten An-

fang

fang der Zeit t durchgelaufenen vordersten Wassertheilchen in dieser Zeit mit unveränderter Geschwindigkeit zurück legen müsten. Wenn also das Wasser mit der Geschwindigkeit c durchsprützt, so wäre jene Länge $= c.t$, (2 §. Rech.) und wenn man die Fläche der Oefnung $= f^2$ setzt, so findet man die ausgelaufene Wassermenge $= f^2 c t$: denn die Wassermenge leidet keine Aenderung, wenn gleich Richtung und Geschwindigkeit der schon ausgelaufenen Wassertheilchen wegen äusserlicher Ursachen Aenderungen leiden. Aus der Wasserhöhe a hat man $c = 2\sqrt{ga}$, also die Wassermenge $= 2f^2 t\sqrt{ga}$.

16 §.

Ueber die Wassermenge, die aus beständig vollen Gefäßen in gegebener Zeit ausläuft, hat man seit dem Anfang des vorigen Jahrhunderts oft Versuche angestellt, und befunden, daß es nicht einerley sey, was die Röhre für eine Gestalt hat, durch welche es aussprützt. Durch eine cylindrische inwendig recht wohl polirte Röhre, wozu also eine metallene am geschicktesten ist, läuft gewöhnlich ziemlich nahe soviel Wasser, als die Rechnung giebt. Wenn es dagegen durch eine conische Röhre läuft, die sich gegen die äussere Mündung zu verengert, oder wenn eine sonst etwas weite Röhre, wie es die 95 und 96 Figur vorstellen, vorne bey GH mit einer dünnen in der Mitte durchlöcherten metallenen Platte geschlossen ist, und das Wasser alsdenn durch die Oefnung ac läuft, so ist die ausgelaufene Wassermenge um ein beträchtliches geringer, als sie den bisher vorgetragenen Gründen gemäß durch Rechnung gefunden wird. Mariotte a. a. O. III. Partie II. Discours pag. 265 versichert,

sichert, er habe durch viele genau angestellte Versuche gefunden, daß durch eine Kreisrunde Oefnung von 3 Linien im Durchmesser in einer Minute 14 Pariser Pinten laufen, wenn das Wasser 13 Fuß hoch über der Oefnung steht. Nach der von Mariotte beygefügten Zeichnung zu urtheilen lies er das Wasser durch eine cylindrische vorn mit einer durchlöcherten Platte geschlossene Röhre laufen, und nach seinem Bericht wiegt eine Pariser Pinte eigentlich 2 Pfund weniger 7 Drachmen: um aber die Brüche zu vermeiden, nimmt er grade zwey Pfund für das Gewicht einer Pinte und 70 Pfund für das Gewicht eines Cubicfusses Wasser an, da dann 35 Pinten einen Cubicfuß ausmachen.

Setzt man $a = \beta$ Fuß, so findet man in Pariser Maaß $2\sqrt{ga} = 28$ Fuß, und das mit 1 Minute $= 60$ Sec. multiplicirt giebt 1680 Fuß. Der Oefnung Durchmesser war 3 Lin. $= \frac{1}{4}$ Zoll $= \frac{1}{48}$ Fuß, also die Fläche $= \frac{11}{14} \cdot \frac{1}{48^2}$, und das mit jener Zahl multiplicirt giebt für die Wassermenge 0,5129 Cub. Fuß, also 20 Pinten, welches beynahe 6 Pinten mehr sind, als beym Versuch gefunden worden. Dies könnte den Verdacht erregen, als wenn das Wasser mit einer viel kleinern Geschwindigkeit auslaufe, als diejenige ist, welche der Wasserhöhe zugehört. Allein andre Versuche lehren, daß die Geschwindigkeit des ausspritzenden Wassers nahe genug diejenige sey, welche mit der Wasserhöhe zusammen gehört.

17 §.

Es sey nemlich ABCD ein Gefäß, daß auf dem 100
ebenen wagrechten Boden BL steht, und an der Seite Fig.
befinde sich eine kleine Oefnung, woraus das Wasser

in

in horizontaler Richtung hervorspringt, so ist der Weg GH, den die Wassertheilchen nehmen, eine Parabel, (39 §. Mech.) diese ist für alle einerley, weil alle mit gleichen Geschwindigkeiten ausspritzen, deswegen hat der ganze Wasserstrahl die Gestalt einer Parabel, deren Natur die Gleichung $y = \frac{gxx}{hh}$ ausdrückt wenn CP $= x$, PM $= y$, und die Geschwindigkeit des durch G ausspritzenden Wassers $= h$ gesetzt wird. Auf dem wagrechten Boden erreicht der Wasserstrahl die Weite CH $= h\sqrt{\frac{CG}{g}}$, und umgekehrt ist $h = CH\sqrt{\frac{g}{CG}}$, also die Höhe, welche dieser Geschwindigkeit zugehört, $= \frac{h^2}{4g} = \frac{CH^2}{4CG}$.

Hr. Gravesand (Elem. Phys. T. I. pag. 452. §. 1584. 1585) fand CH $= 34\frac{1}{2}$ Zoll Rheinl. wenn CG $= 18$ Zoll war, und man findet $\frac{h^2}{4g} = \frac{34,5^2}{4.18} = \frac{69^2}{4.4.18} = 16\frac{17}{32}$ Zoll. Es war aber beym Versuch auch DG $= 18$ Zoll, und so groß sollte nach der Theorie $\frac{h^2}{4g}$ gefunden werden, die nicht sehr erhebliche Abweichung rührt ohne Zweifel vom Widerstande der Luft her, denn dieser hat die horizontale Weite um $1\frac{1}{2}$ Zoll verkürzt. Weil eigentlich CH $= h\sqrt{\frac{CG}{g}}$ seyn sollte, und $h = 2\sqrt{g\,DG}$ ist, so hat man CH $= 2\sqrt{CG\,.\,DG}$, also wäre im leeren Raum CH $= 2\sqrt{18^2} = 36$ Zoll, und in der Luft war CH $= 34\frac{1}{2}$ Zoll.

18 §.

18 §.

Wenn demnach die auslaufende Wassermenge geringer ist, als sie den bisher angenommenen Voraussetzungen gemäß seyn sollte, so muß das eine andre Ursache haben, und man hat gefunden, daß der auslaufende Wasserstrahl nicht genau die Gestalt eines graden Cylinders oder Prisma habe, wovon alle senkrechte Querschnitte der Oefnung als der Grundfläche gleich sind. Weil sich nahe an der Oefnung etwas dem Bernoullischen Strudel ähnliches bildet, so laufen die ausspritzenden Wassertheilchen, in dem sie durch die Oefnung hindurchgehen, noch nach Richtungen, die gegen die Axe zu convergiren, welche man in der Mitte der Oefnung auf ihrer Fläche senkrecht annehmen kann: deßwegen muß sich der Wasserstrahl nahe vor der Oefnung noch etwas enger zusammen ziehen, so daß seine Querschnitte anfangs noch etwas kleiner als die Oefnung werden. Hat dies seine Richtigkeit, wie es die Erfahrung bestättiget, so muß man bey Berechnung der Wassermenge statt der Fläche der Oefnung **den kleinsten Querschnitt des zusammen gezogenen Wasserstrahls** in Rechnung bringen. Man setze die Fläche der Oefnung f^2 verhalte sich zum kleinsten Querschnitt des Wasserstrahls, wie $= \alpha : 1$, so muß man in dem allgemeinen Ausdruck für die Wassermenge M im 15 §. $\frac{f^2}{\alpha}$ statt f^2 schreiben, und man erhält $M = e\,(f^2 : \alpha)\,t\sqrt{ga}$. Die Herrn **Newton** und **Poleni**, finden aus Versuchen beynahe $\alpha = \sqrt{2} = 1{,}41$ wenn das Wasser durch ein Loch in einer sehr dünnen Platte läuft. (M. s. *Newtoni* Principia Phil. Nat. Mathematica Lib. II. Prop.

Prop. XXXVI. Probl. VIII. Ed. III. *Poleni* de castellis, per quae deriuantur fluuiorum aquae, habentibus latera conuergentia, Pataui 1718. pag. 15 sqq.)

19 §.

Wenn die Oefnung zur Seite des Gefässes befindlich ist, und das Wasser nur wenige Linien hoch über ihren obern Rand stehet, und wenn überdem die Oefnung nicht so gar sehr klein ist; so kann die Rechnung aus jener Formul nicht sehr richtig zutreffen. Man kann indessen die Höhe des Wassers über der Mitte der Oefnung in diesem, wie in allen andern Fällen für die Wasserhöhe annehmen, so giebt die Rechnung noch immer ziemlich nahe das, was auch Versuche geben. Will man wissen, wieviel Wasser eine Kreisrunde Oefnung von 1 Zoll im Durchmesser in einer Minute giebt, wenn das Wasser nur 1 Linie hoch über dem obern Rande stehet, so setze man $a = 7$ Linien $= \frac{7}{144}$ Fuß, und man erhält $\sqrt{ga} = \sqrt{15,1 \cdot \frac{7}{144}} = 0,8567$ $2t\sqrt{ga} = 102,814$, $f^2 : \alpha = \frac{1}{144 \cdot 1,41} \cdot \pi = \frac{100 \cdot \pi}{20302}$, also $M = \frac{10281,4 \cdot \pi}{20304} = 0,3976$ Cub. Fuß, oder $0,3976 \cdot 35 = 13,916$ Pinten. Mariotte a. a. O. III. Partie I. Discours p. 245 fand $13\frac{3}{8}$ Pinten zu 2 Pfund weniger 7 Drachmen.

20 §.

Die Brunnen- und Kunstmeister sind gewohnt, die Menge Wasser, welche die Quellen geben, nach Zollen und Linien anzugeben, und sie verstehen durch einen **Wasserzoll** oder eine **Wasserlinie** die Menge Wasser,

Wasser, welche in gewisser Zeit durch eine Kreisrunde Oefnung läuft, die 1 Zoll oder 1 Linie im Durchmesser hat. Weil sonst dieser Redegebrauch sehr unbestimmt war, auch überhaupt gar nicht bequem ist, so meint Mariotte a. a. O. es sey am besten, ein für allemahl das Maaß eines Wasserzolles auf 14 Pinten in einer Minute zu setzen, jede zu 2 Pfund angenommen, weil ohngefehr soviel durch eine Kreisrunde Oefnung von 1 Zoll im Durchmesser fließt, wenn ihr oberer Band 1 Linie unter Wasser steht. Seit der Zeit ist dies Maaß beym visiren der Quellen eingeführt worden, und diese Redensart heißt bey den Brunnenmeistern untersuchen, wieviel Wasser die Quelle in gewisser Zeit giebt. Sie bedienen sich dabey eines dazu besonders eingerichteten so genannten Eichgefässes, wovon man beym Leupold im Theatro Mach. Gener. 475 u. f. §. 142 u. f. S. und **Belidor** Archit. Hydraul. I. Th. IV. Buch IV. Capitel 1392 §. Nachrichten findet. Das Gefäß DE hat zwey Abtheilungen, und das in der einen aus der Quelle aufgefangene Wasser kann in die andre hineintreten, wovon die vordere Wand KE mit Löchern versehen ist, die man nach Gefallen öfnen und schliessen kann. Die Oefnungen sind Kreisförmig und ihre Mittelpuncte liegen in grader Linie die mit dem Boden parallel, also wagrecht ist, wenn der Boden wagrecht gestellet wird. Bey Oefnung der Löcher sucht man es dahin zu bringen, daß das Wasser beständig in einerley Höhe von 1 Linie über die einzolligen Löcher erhalten werde, so ist man versichert, daß soviel Wasser hinein als heraus geht, und die Quelle giebt soviel Zolle, und Theile eines Wasserzolles, als man Löcher geöfnet hat.

103 Fig.

Der II. Abschnitt.

Vom Lauf des Wassers in Canälen und Flüssen.

21 §.

Die Canäle, worin die natürlichen Flüsse auf der Erde fortlaufen, heissen ihre Betten, und diese haben gewöhnlich eine sehr irreguläre Gestalt; die Canäle aber welche man durch die Kunst anleget, dergleichen z. E. die Mühlengräben, und besonders die Mahl- und Freygerinne bey Mühlen sind, haben die Gestalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi, oder sie ist doch wenigstens sonst prismatisch. Ob nun gleich sowenig in den natürlichen Flußbetten, als in den durch Kunst angelegten Canälen, alle Elemente der fortfliessenden Wassermasse sich durchgängig aufs genaueste nach einerley Richtung bewegen, so laufen doch in künstlichen Canälen alle vornemlich nach solchen Richtungen, die mit dem Boden des Canals parallel sind. Wenn man sich alsdenn eine Ebene vorstellet, die auf dieser Richtung des Flusses im Canal senkrecht ist, so heißt die Durchschnittsfigur ein **Breitenprofil** des Flusses. Das **Längenprofil** giebt eine Ebene, die auf dem Boden senkrecht, und mit der Richtung des Flusses parallel, mithin auf dem **Breitenprofil** senkrecht ist.

22 §.

101 Fig. Wenn das Wasser im Canal ABCD so fortfließt, daß in gleichen Zeiten durch jede zwey Breitenprofile des Flusses BC, AD, eine gleiche Menge Wasser läuft,

so

so behält die Oberfläche des Wassers beständig einerley Figur, und kann sich an keiner Stelle weder mehr von dem Grunde des Canals erheben, noch tiefer senken, wie zuvor. Diesen Zustand des Flusses nennt man seinen Beharrungsstand. Es ist übrigens auch umgekehrt wahr, wenn die Oberfläche des Flusses beständig einerley Figur behält, und sich an keinem Orte weder mehr hebt, noch senkt als vorher, so folgt, daß der Fluß im Beharrungsstande sey.

23 §.

In einem Canal ABCD der die Gestalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi hat, wenn seine Grundfläche horizontal liegt, könnte wohl schweres Wasser so von A nach B fliessen, daß alle Elemente desselben ihre Bewegung mit gleicher Geschwindigkeit in horizontaler Richtung fortsetzten, nur müste auf der einen Seite AD beständig soviel Wasser in eben der Richtung mit eben der Geschwindigkeit eintreten, um den Canal voll zu erhalten. Die Gewichte aller Elemente des Wassers würden in verticaler Richtung von dem wagrechten Boden unterstützt seyn, und die wagrechten Seitenpressungen müsten einander alle aufheben, weil bey gleichförmiger Bewegung keine Kraft nöthig wäre, um die Elemente des Wassers in der Richtung ihrer Bewegung zu beschleunigen: dieser Zustand der Bewegung würde schon wegen der Trägheit unverändert bleiben. 101 Fig.

24 §.

Man nehme an, das Parallelepipedum ABCD sey an allen vier Seiten, also auch bey AD und BC geschlossen, nur sey es oben offen, und bis an DE 101 Fig.

mit Wasser gefüllt. Wenn nun in der Seitenfläche BC bey B eine kleine Oefnung gemacht wird, wodurch das Wasser in horizontaler Richtung BF aussprützt, so ist BE die Höhe, welche der Geschwindigkeit des auslaufenden Wassers zugehört. In der Verticallinie BE sey eben die Seitenfläche mit noch mehrern kleinen Löchern bey Q, P, durchbort, und man nehme die Länge AB des Parallelepipedi so groß an, daß die höchste Fläche des Wassers DE sich nicht merklich senken kann, wenn gleich durch diese kleinen Oefnungen etwas Wasser ausläuft, so sind QE, PE, die den Geschwindigkeiten des durch Q, P, laufenden Wassers zugehörigen Höhen. Wäre BE ein sehr schmaler lothrechter Einschnitt in der Seitenfläche BC, so würden durch denselben unzählig viele zarte Wasserstrahlen ausspritzen, die eine zusammenhängende sehr dünne Wasserschichte ausmachten, und die Geschwindigkeit des durch jede Stelle wie P, Q, B, laufenden Wassers würde der Höhe PE, QE, BE, zugehören. Wenn also PM, QN, BF, diese Geschwindigkeiten sind, und $EP = x$, $PM = y$, $EB = a$, $BF = c$ gesetzt wird; so hat man $EP : EB = PM^2 : BF^2$, also $x : a = y^2 : c^2$, und $y^2 = \frac{c^2}{a} x$. Ferner ist $c^2 = 4ga$, also $y^2 = 4gx$. Eine Linie also, die durch alle Puncte M gehet, ist eine Parabel, ihr Parameter $= 4g$, und die in jeder Secunde auslaufende Wassermenge wäre ein Prismenähnlicher Wasserkörper; die eine Grundfläche wäre das vermischtlinichte Dreyeck EBFNM, und die Höhe so groß, als die Breite der Oefnung BE.

Die höhere Geometrie lehrt, daß die Fläche des vermischtlinichten Dreyecks EBF, wenn EMF die

Parabel

Parabel, E ihr Scheitel, und EB ihre Zwergaxe iſt, $= \frac{2}{3}$ EB . BF ſey. Setzt man alſo die Breite der Oefnung $= b$, ſo iſt die in einer Secunde durchflieſſende Waſſermenge $= \frac{2}{3} . a . b . c$, für jede andre gegebene Zeit t aber $= \frac{2}{3} . a . b . c . t$. Weil ferner $c = 2\sqrt{ga}$ iſt, ſo hat man auch eben die Waſſermenge $\frac{4}{3} b . t . a\sqrt{ga}$.

25 §.

Je gröſſer die Breite b der Oefnung angenommen wird, deſto mehr muß der Erfolg von dem, was dieſe Rechnung giebt, verſchieden ſeyn: denn bey wachſender Breite wächſt die durchflieſſende Waſſermenge in eben dem Verhältniß, die Schnelligkeit bleibt in gröſſern Tiefen gröſſer, als in kleinern Tiefen, alſo kann die obere Fläche DE ſich nicht wagrecht erhalten, ſie muß vielmehr gegen die Oefnung zu ſinken. Wenn man ſich vorſtellt, die ganze vordere Fläche BC werde weggenommen, ſo daß $b =$ BG wäre; ſo würde die herausſtürzende Waſſermenge viel zu groß ſeyn, daß nicht die obere Waſſerfläche DE, an EC ſehr merklich ſinken müſte. Dies ſinken würde ſich ſehr weit längſt des Canals nach KD hinauf erſtrecken, und wenigſtens ein groſſer Theil der Fläche DE nun die geneigte Lage DL annehmen. In dieſem Zuſtande kann in jeder gegebenen Tiefe bey P, Q, B die Geſchwindigkeit des Waſſers wenigſtens nicht gröſſer ſeyn, als in dem Fall, wenn es durch eine ſehr ſchmale Oefnung flöſſe: ob ſie aber nicht kleiner ausfallen müſte? und wie groß ſie nun in jeder Tiefe ſey? dieſe Fragen ſind nicht ſo ganz leicht beantwortet. Das zunächſt an der obern Fläche KL flieſſende Waſſer läuft wie auf einer ſchiefen Ebene herab, und das 101 Fig.

ist Grund genug, darauf zu verfallen, das Wasser werde auch nun bey L mit einer Geschwindigkeit fliessen, die der Höhe EL zugehört, ob aber die gemeinschaftliche Wirkung aller Elemente des Wassers in einander während der Bewegung darin nicht etwas ändre? das bedürfte noch wohl einer weitern Untersuchung. Wenn ferner ein Element, das anfangs in S befindlich war, durch Q fließt, und QR wagrecht ist; so ist dies Element, wenn es in Q anlangt, um die Höhe SR gefallen. Ob es dadurch die Geschwindigkeit $2\sqrt{g} \cdot SR$ erlange? das läßt sich auch um deßwillen nicht schlechthin bejahend annehmen, weil ein solches Element nicht vollkommen frey fällt, sondern während seiner Bewegung der gemeinschaftlichen Wirkung der übrigen Wassertheilchen ausgesetzt ist. Noch weniger ist man wohl berechtiget anzunehmen, es fliesse in S schon mit der Geschwindigkeit $2\sqrt{g} \cdot KS$. Will man indessen beydes annehmen, so gehört die Geschwindigkeit dieses Elements, wenn es in Q anlangt, zur Höhe KR = EQ. Diesemnach wären $L\lambda$, PM, QN, BF, die Geschwindigkeiten in L, P, Q, B, wie sie es seyn würden, wenn die Breite der Oefnung sehr klein wäre, und die in der Zeit t durchfliessende Wassermenge wäre $= \frac{2}{3} bt$ (EB . BF − EL . $L\lambda$). Man setze EL $= \alpha$, und behalte wie vorhin EB $= a$, BG $= b$; so ist diese Wassermenge $= \frac{4}{3} bt (a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha})\sqrt{g}$.

26 §.

101 Fig. Wenn KE wagrecht ist, so heißt EL das Gefälle des Canals oder des Flusses von K bis L, und wenn der Boden AG des Canals selbst gegen den Horizont geneigt ist, so hat auch dies Grundbette des Flusses sein

sein Gefälle. Es sey *abcd* ein grosser Wasserbehäl- 102
ter, worin sich stehendes Wasser befindet, welches Fig.
aus demselben in den Canal ABCD durch die Oefnung AKDN abfliesset. Der Wasserbehälter sey so groß, daß in demselben das Wasser nicht merklich fällt, wenn gleich der Abfluß eine zeitlang fortwähret, oder der Abfluß werde auch durch neuen Zufluß beständig ersetzt. Der Boden des Behälters *abcd* sey wagrecht, und AN seine Durchschnittslinie mit dem Boden des Canals, also AN wagrecht. Wenn nun die Seitenflächen KABL, DNG*l*, auf AN senkrecht sind, so sind selbige beydes auf dem wagrechten Boden des Behälters *abcd*, und zugleich auf dem geneigten Boden AG senkrecht, (286 §. G.) mithin sind sie wegen der ersten Ursache vertical. Man ziehe BG mit AN parallel, so ist BG horizontal, und ein Paar Ebenen AXYN, BL*l*G, auf dem geneigten Boden durch AN und BG senkrecht gesetzt, geben ein Paar Breitenprofile des Flusses ab. Die Oefnung AKDN sey ein verticales Rechteck, dessen Seitenlinien AK, ND, in den verticalen Seitenflächen des Canals liegen, und ASTN sey eine wagrechte Ebene, welche die Seitenflächen des Canals in AS, NT, schneidet: so ist SAB des Grundbettes Neigung gegen den Horizont. Wenn ferner KV horizontal ist, und BE, LE, vertical sind, so ist BH des Grundbettes und LE der höchsten Wasserfläche KL*l* Gefälle. Wenn nun das bey Π eintretende Element, daselbst mit der Geschwindigkeit $2\sqrt{g}\,.\,K\Pi$ eintritt, und im Querschnitt BG*l*L bey P anlangt, ΠQ aber horizontal und P*k* vertical ist; so ist es von Π bis P um die lothrechte Höhe P*k* gefallen. Kann man nun voraussetzen, daß jedes Element, indem es so herabsinkt, die Geschwin-

digkeit erlange, welche der Höhe Pk, oder dem Gefälle zugehört, so kommt diese Höhe noch zur vorigen $K\Pi$ hinzu, und in P gehört die Geschwindigkeit des durchfliessenden Wassers zur Höhe $K\Pi + Pk$.

27 §.

Man setze den Neigungswinkel $SAB = \eta$, und verlängere BL bis an die Horizontallinie KE nach V, so ist auch $VPk = \eta$, und $K\Pi + Pk = PV \cos\eta$. Wenn alsdenn BF, PM, $L\lambda$, die Geschwindigkeiten des bey B, P, L, durchfliessenden Wassers sind, so ist $PM^2 = 4g \cdot VP\cos\eta$, und alle Puncte M liegen in einer Parabel, wozu der Parameter $4g\cos\eta$ gehört. Die durch das Profil $BLlG$ in der Zeit t fliessende Wassermenge sey M, so ist $M = \frac{2}{3}(VB \cdot BF - VL \cdot L\lambda) \cdot BG \cdot t$. Man setze $Be = a$, $LE = \alpha$, $BG = b$, so ist $VB = \frac{a}{\cos\eta}$, $VL = \frac{\alpha}{\cos\eta}$; überdem ist $BF = 2\sqrt{ga}$, $L\lambda = 2\sqrt{g\alpha}$, und man erhält $M = \frac{4}{3}bt \cdot \frac{a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha}}{\cos\eta} \cdot \sqrt{g}$.

Wenn alle Elemente des Wassers mit gleicher Geschwindigkeit c durch den Querschnitt $BLlG$ liefen; und die Wassermenge eben so groß als die vorhin gefundene bliebe, so hätte man $BG \cdot BL \cdot c \cdot t = \frac{2}{3}(VB \cdot BF - VL \cdot L\lambda) \cdot BG \cdot t$, also $c = \frac{\frac{2}{3}(VB \cdot BF - VL \cdot L\lambda)}{BL}$.

Es ist aber $BL = VB - VL = \frac{a - \alpha}{\cos\eta}$, also findet man die mittlere Geschwindigkeit $c = \frac{\frac{4}{3}(a\sqrt{a} - \alpha\sqrt{\alpha})\sqrt{g}}{a - \alpha}$.

28 §.

28 §.

Wenn gleich die Theorie vom Lauf des Wassers in offenen Canälen zu grösserer Vollkommenheit gebracht wäre, so würde doch hier beym Vortrage der ersten Anfangsgründe nicht alles erschöpft werden können. Ich glaube aber, daß man noch um so mehr mich entschuldiget halten werde, wenn ich diese Lehren nicht mit der in der Mathematik sonst gewohnten Schärfe vortragen kann, weil man selbst bey Anwendung der höhern Mathematischen Erfindungskunst auf diese Theorie noch nicht alle Schwierigkeiten hat überwinden können. Auch die natürlichen Flüsse auf der Erde sind offene Canäle, in welchen das Wasser vermittelst eines beständigen Gefälles fortläuft, bis es sich endlich durch das äusserste Ende eines solchen Canals, welches die Mündung des Flusses heißt, in die See oder sonst wohin ergiesset. Wegen der irregulären Gestalt des Grundbettes sowohl als auch der Ufer eines solchen natürlichen Flusses, würde es noch weit mehr Schwierigkeit haben, die Geschwindigkeit des fortfliessenden Wassers an einer gegebenen Stelle desselben nach theoretischen Gründen zu berechnen, wenn es auch bey regulären Canälen schon besser geglückt hätte. Folgende kurze Bemerkungen können indessen dazu dienen, auf die merkwürdigsten Umstände einigermassen aufmerksam zu machen, die auf das schnellere oder langsamere Fliessen des Wassers in seinem Bette Einfluß haben.

29 §.

Man stelle sich zuerst einen Canal mit ebenen vertica- 104
len und parallelen Uferflächen vor, und ADFONMG sey Fig.
eine verticale mit den Ufern parallele Durchschnittsfigur

der fortfliessenden Wassermasse, oder ein **Längenprofil** des Flusses; die mannigfaltig gebogene Linie ABCDEF sey die Durchschnittslinie mit dem Grundbette. Nur selten hat ein Fluß in einerley Breitenprofil einerley Tiefe: wenn man aber eine solche Figur des Grundbettes annimmt, so bleibt die Linie ABCDEF sich selbst gleich und ähnlich, wenn man gleich die Ebene des Längenprofils dem einen oder dem andern Ufer näher rückt, und die Linie ABCDEF kann das Grundbette selbst vorstellen. Die Stellen A, C, D, E, F, welche unter den zunächst vorhergehenden und nachfolgenden der höchsten Wasserfläche am nächsten sind, siehet man als **Untiefen** an, und von der Lage dieser Untiefen gegen einander hängt die Geschwindigkeit des in dem Canal fliessenden Wassers vornemlich ab, wenn die Breite überall einerley ist, und der Zufluß unverändert bleibt.

Man ziehe die höchsten Stellen A, C, E, F der Untiefen mit graden Linien zusammen, und übergehe dabey diejenigen, welche niedriger, als die zunächst folgenden liegen, dergleichen D eine vorstellt, damit solchergestalt von den graden Linien AC, CE, EF, keine nach der Richtung hin, nach welcher das Wasser fließt, sich über dem Horizont ihres Anfangspuncts auf der Seite, wo das Wasser herkommt, erhebe. Nun erhellet leicht, daß der Strom auf dem gebrochenen Wege ACEF eben so wie auf dem krummen Bette fliessen müsse, denn das Wasser, was von A nach B gesunken ist, läuft nicht wieder von B nach C hinauf. Es läuft nicht über C hinüber, bevor die Grube oder der sogenannte **Kolck** ABC angefüllet ist, und soviel Wasser, als diese Grube fasset, bleibt darin ruhig stehen, das übrige läuft auf AC wie auf einer ebenen

ebenen Fläche herab. Eben so verhält es sich mit der Grube CDE, wobey D nicht nicht mit zu den Untiefen zu rechnen ist, wovon die Geschwindigkeit des Flusses abhängt, und welche man bestimmende Untiefen nennen kann.

30 §.

Jede Stromlänge von A bis C, von C bis E, u. s. f. zwischen zwoen bestimmenden Untiefen kann als ein besondrer Canal betrachtet werden, in dessen oberstes Breitenprofil das Wasser mit einer gewissen Geschwindigkeit eintritt. Man setze, es trete aus einem grossen Wasserbehälter in das Profil AG, so daß in jeder Tiefe GP die Geschwindigkeit der Höhe GP zugehöre, so ist in jeder Stelle Q des Breitenprofils CM die Geschwindigkeit $= 2\sqrt{g}.HQ$, in jeder Stelle R des Profils EN ist sie $= 2\sqrt{g}.KR$, u. s. f., wenn anders die bey den Schlüssen im 26 §. angenommenen Voraussetzungen auch hier Anwendung finden. Die zunächst am Grundbette fortfliessenden Elemente des Wassers dürften wohl, indem sie über eine Untiefe wie C laufen, vermöge der im 67 §. Mech. vorgetragenen Gründe, wenn ACE $<$ 2R ist, einen Theil der schon erlangten Geschwindigkeit verlieren: ob aber eben dasselbe von allen übrigen Elementen zu behaupten sey, die zugleich mit durch dasselbe Profil CM laufen, das müßte noch wohl weiter geprüft werden. Ohne Zweifel werden unter diesen Elementen solche seyn, die in einem krummen Wege PQRS fortfliessen, worin vermöge des 68 §. Mech. kein solcher Verlust an Geschwindigkeit statt hat.

Uebrigens muß man bey Anwendung der Schlüsse des 26 §. auf natürliche Flüsse noch bemerken, daß dabey angenommen ist, das Wasser fliesse ganz frey durch

durch das letzte Breitenprofil BGL*l*: (102 Fig.) aber die Flüsse auf der Erde ergiessen sich zuletzt in die offenbare See, und durch ihre Mündung fließt das Wasser nicht frey, ihm stehet vielmehr der Druck des in dem Weltmeer stehenden Wassers entgegen, und um deswillen müssen die bisherigen Schlüsse bey der Anwendung auf die natürlichen Flüsse starke Einschränkungen leiden.

31 §.

Ziehet man die Gestalt der Ufer mit in Betrachtung, so finden sich noch mehr Ursachen, wovon die Geschwindigkeit des fliessenden Wassers in offenen Flußbetten abhängt, wenn man voraussetzt, daß sonst alles im Beharrungsstande, mithin auch der Zufluß aus der obern Gegend unverändert derselbe sey. Man
105 Fig. nehme an, daß AGKMFDBA ein Stück des Stroms im Grundriß vorstelle, wovon die Breiten BH, EL, bald wachsen bald abnehmen, indem sich die Ufer einander bald mehr nähern, bald wieder von einander entfernen: so kann man die kleinsten Breiten BH, EL, Stromengen nennen. Weil nun im Beharrungsstande durch eine der größten Breiten soviel Wasser läuft, als in eben der Zeit durch die Stromengen BH, EL fliesset, so muß die Geschwindigkeit in den Stromengen grösser seyn, als in den grössern Breiten. Wenn die Tiefe einerley ist, so muß sich die Geschwindigkeit wie die Breite umgekehrt verhalten. (Man vergleiche den 3 §.) Hat also ein Fluß Stellen, wo seine Breite in Vergleichung mit den Stromengen sehr groß ist, so kann an denselben die Geschwindigkeit so gering seyn, daß auf der Strecke, soweit sich die grosse Breite erstreckt, das Wasser als ein stehender See anzusehen ist, worin das von oben herab kommende

Wasser

Wasser seine Geschwindigkeit beynahe ganz verliert. Folgt hiernächst eine Strecke, die beträchtlich enger ist mit einem neuen Gefälle, so muß die Geschwindigkeit des Wassers, indem es durch diesen engern Canal fließt, wieder zunehmen. Die meisten Flüsse in der Natur bestehen gleichsam aus solchen Seen, die vermittelst engerer Canäle an einander hängen, und daraus erklärt es sich sehr leicht, daß die Geschwindigkeit der Flüsse mit ihrem Gefälle nicht beständig nach den Gesetzen des Falles zunehmen könne. Die Krümmen des Flußbettes tragen zu den Verminderungen der Geschwindigkeit ebenfalls das ihrige bey, und überhaupt giebt es keinen Fluß in der Natur, dessen Geschwindigkeit sich nach theoretischen Regeln genau berechnen liesse.

32 §.

Was man bis jezt vom Lauf der flüssen weiß, so mangelhaft auch noch die dahin gehörigen Kenntnisse sind, das hat doch in der Ausübung seinen mannigfaltigen grossen Nutzen, und im vorigen Jahrhundert haben sich vornemlich einige Italiänische Mathematiker mit diesen Untersuchungen beschäftiget. Vom **Dominicus Gulielmini** hat man zwey hieher gehörige noch immer schäzbare Schriften, eine unter dem Titel: de mensura aquarum fluentium, und ein grösseres Werk: della Natura de Fiumi Trattato Fisico - Matematico, Bologna 1692. Der zweyte Theil des lezten Werks kam zwey Jahr nach des Verfassers Tode im Jahr 1712 heraus, auch sind seine Werke zusammen gedruckt unter dem Titel Opera omnia Mathematica Hydraulica, Medica et Physica, Genev. 1719. Eine Sammlung mehrerer hieher gehöriger Schriften, welche von Italiänischen Verfassern

fassern herrühren, und bey Gelegenheit einiger Streitigkeiten über die in Vorschlag gekommene Vereinigung des Rheins mit dem Posluß veranlasset sind, unter deren Verfassern, ausser dem schon genannten Gulielmini, vornemlich Castelli und Poleni berühmt sind, ist unter dem Titel Nuova Raccolta d'autori che trattano del moto dell'acque zu Parma seit 1766 in 7 Quartbänden herausgekommen, und man findet angenehme Nachrichten daraus in H. H. Kästners **Anfangsgründen der Hydrodynamik**, Gött. 1769 woselbst vom Lauf der Flüsse insbesondre von der 236 bis 315 S. gehandelt wird. Unter den neuesten zur Stromwissenschaft gehörigen Schriften ist besonders H. Silberschlags **Ausführlichere Abhandlung der Hydrotechnik** oder des Wasserbaues, 2 Theile Leipzig 1772, merkwürdig, und das holländische Werk Rivierkundige Verhandeling afgeleid uit Waterwigt- en Waterbeweegkundige Grondbeginselen, en toepasselyk gemaakt op den Rhyn, de Maas, de Waal, de Merwede, en de Leck. Door Cornelis Velsen, Geadmitteerd Landmeter, Tweede Druck, Te Harlingen 1768.

33 §.

Bey diesen und andern practischen Schriftstellern findet man verschiedene Vorschläge, wie die Geschwindigkeit eines Flusses an einer gegebenen Stelle durch Versuche gefunden werden könne. Schon Hr. **Mariotte**, im Traité du mouvement des eaux III. Partie IV. Discours p. 297, und nach ihm andre schreiben vor, man soll auf die Oberfläche des Wassers eine Wachskugel legen, womit soviel Bley oder sonst schwere Materie vermengt worden, daß nur ein

kleiner

kleiner Theil von ihr über dem Wasser hervorrage, damit auch ein mässiger Wind ihre Bewegung nicht sonderlich störe, wenn er anders nicht so stark ist, daß er Wellen erreget. Diese Kugel wird der Strom mit sich fortführen, und wenn man hiernächst nach einer guten Uhr bemerkt, wie groß der Weg sey, den sie in einer gewissen Zeit zurück legt, so findet man daraus die Geschwindigkeit der Kugel. (2 §. Rech.) Diese aufs Wasser gelegte Kugel fängt ihre Bewegung von der Ruhe an, und wird von den anstossenden Wassertheilchen nach und nach so lange beschleuniget, biß sie eben so schnell ausweicht, als ihr die Wassertheilchen nachfolgen, oder biß ihre Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit des fortfliessenden Wassers einerley ist. Fängt man also mit der kurz vorhin beschriebenen Beobachtung des von der Kugel in bekannter Zeit zurück gelegten Weges alsdenn allererst an, wenn man urtheilen kann, daß die Bewegung der Kugel nicht mehr beschleuniget wird, so hat man mit der gefundenen Geschwindigkeit der Kugel zugleich die Geschwindigkeit des Flusses an dieser Stelle, wiewohl doch nur nahe an der obern Wasserfläche gefunden. Eine andre Methode, die Geschwindigkeit auch in grösserer Tiefe zu finden, soll weiter unten folgen.

Der III. Abschnitt.

Regeln zur Berechnung des Wasserstosses gegen feste Flächen.

34 §.

Wenn das fliessende Wasser gegen eine unbewegliche Fläche strömt, so entsteht daher ein Druck gegen die Fläche, und diesen Druck kann man fühlen, wenn man die flache Hand in ein fortfliessendes Wasser dem Strom entgegen hält. Noch stärker fühlt man diesen Wasserdruck, wenn man eine etwas breite Fläche, etwa ein Stück von einem dünnen leichten Brett so hält, daß das Wasser grade dagegen strömt: je grösser diese Fläche ist, und je schneller das Wasser fliesset, desto stärker ist der Druck, welchen die Fläche leidet. Er ist für unsre Empfindung eben das, was wir fühlen, wenn wir ein Gewicht, etwa einem Stein, ein Stück Bley, auf der Hand tragen. Wie nun sonst gewöhnlich die Stärke eines Drucks durch ein Gewicht ausgedrückt wird, das eine Unterstützung, die es herab zu fallen hindert, eben so stark preßt; so läßt sich auch die Stärke desjenigen Drucks, womit fliessendes Wasser gegen eine demselben entgegenstehende Fläche preßt, auf ähnliche Art durch ein eben so grosses Gewicht angeben.

35 §.

106 Fig. Es sey also AB eine im fliessenden Wasser befindliche ebene Fläche, und zwar in der Lage, daß die Richtungslinie EA, GC, FB, der mit paralleler Bewegung

wegung dagegen strömenden Elemente des Wassers darauf senkrecht sind: so leidet AB einen Druck ebenfalls nach einer darauf senkrechten Richtung, und dieser Druck ist über der Ebene gleichförmig vertheilt. Wenn man sich dasjenige Wasser, was die Fläche AB trift, allein vorstellt, so ist selbiges im Raum einer graden Säule enthalten, die AB zur Grundfläche hat, und die in diesem Raum EABF gegen AB zu fliessenden Wassertheilchen sind es vornemlich, wovon der Druck gegen AB herrührt, weil selbige in ihrer Bewegung aufgehalten werden. Man stelle sich vor, die Wassersäule EABF sey in sehr dünne mit AB parallele Schichten wie M*mn*N eingetheilt; so werden diese Schichten in ihrer Bewegung bis auf eine gewisse Entfernung von AB verzögert. Daher drückt jede dieser Schichten gegen die zunächst voranlaufende, alle diese Pressungen pflanzen sich gegen AB fort, und die Summe aller solchergestalt gegen AB nach den Gesetzen der Hydrostatik fortgepflanzten Pressungen macht den gesammten Druck aus, dem AB ausgesetzt ist. Dies ist jedoch nur eine unvollkommene Vorstellung davon, wie der Druck gegen AB entsteht: vollständigere Untersuchungen darüber gehören für diese ersten Anfangsgründe nicht, und das um so weniger, weil die grösten Analysten auch alsdenn noch bey dieser Untersuchung Schwierigkeiten finden, wenn die Kunstgriffe der höhern Analysis darauf angewandt werden.

36 §.

Dieserwegen bin ich genöthiget, die Regel, nach welcher man gewöhnlich rechnet, um die Grösse dieses Drucks zu finden, hier als eine Hypothese anzunehmen, die sich dadurch rechtfertiget, daß die Folgen, welche man bey den Anwendungen dieser Regel vermittelst der Rechnung findet, ganz gut mit dem, was die Erfahrung lehrt, übereinstimmen. Die Regel selbst ist folgende.

Der vom senkrechten Stoß des Wassers, gegen eine ebene Fläche, wenn alle Elemente desselben in parallelen Richtungen mit gleichen Geschwindigkeiten die Fläche treffen, herrührende Druck ist dem Gewicht einer Wassersäule gleich, auf einer Grundfläche von eben der Grösse, als die dem Stoß ausgesezte Fläche, und in einer Höhe so groß, als die der Geschwindigkeit des Wassers zugehörige Höhe ist.

Wie aber übrigens dieser Druck über der ganzen Ebene AB gleichförmig vertheilt ist, so daß gleiche Elemente von ihr gleich stark gepreßt werden, so giebt es für alle diese Pressungen eine mittlere, deren Richtung CD durch der Ebene AB Schwerpunct gehet, welcher in dieser Rücksicht auch der **Mittelpunct des Wasserstosses** heißt. Ist C dieser Mittelpunct, so würde eine Kraft $= AB \cdot \frac{cc}{4g}$ an C, nach einer der Bewegung des Wassers entgegen gesetzten Richtung angebracht, mit dem Wasserstoß im Gleichgewicht seyn.

Die während jeder Zeitsecunde gegen AB ströhmende Wassermenge sey $= M$, so ist $M = AB \cdot c$; mithin ist eben der Wasserdruck $= \frac{M \cdot c}{4g}$.

37 §.

106 F. Wenn alle Elemente des Wassers vollkommen ruhig sind, und die Ebene AB sich nach einer darauf

senk-

senkrechten Richtung CG im Wasser mit der Geschwindigkeit *c* bewegt, so befindet sich diese Ebene unter denselben Umständen, unter welchen sie sich befinden würde, wenn sie selbst ruhig wäre, das Wasser aber mit der Geschwindigkeit *c* senkrecht dagegen stiesse. Das ruhende Wasser drückt der bewegten Fläche entgegen, und der daher rührende Widerstand ist so groß, als der vom Wasserstoß herrührende Druck seyn würde, wenn die Geschwindigkeit der Fläche in dem einen Fall so groß, als die Geschwindigkeit des Wassers in dem andern Fall angenommen wird. Auch dies wird ein Hülfsmittel durch Versuche ausfindig zu machen, ob die im vorigen §. angenommene Regel die Grösse des Wasserstosses zu finden der Erfahrung gemäß sey. Beyde Theorien, vom Stoß flüssiger Massen gegen feste Flächen, und vom Widerstande, den feste Körper leiden, die sich im Flüssigen bewegen, sind mit einander so genau verbunden, daß allemahl die eine mit zur Richtigkeit gebracht ist, wenn man die andre in ihr gehöriges Licht gesetzt hat. Man muß indessen schon in der höhern Analysi geübt seyn, wenn man auch nur alle hieher gehörige Versuche besonders über den Widerstand flüssiger Massen selbst beurtheilen will: andre Versuche, um die Regel zur Berechnung des Stosses unmittelbar zu prüfen, lassen sich schon zum Theil aus den bisher vorgetragenen Lehren beurtheilen, und man kann dabey folgende Schriftsteller zu Rath ziehen. *Mariotte* Traité du mouv. des eaux II. Partie III. Discours II. Regle p. 197. auch p. 215. 216. *Krafft* de vi venae aquaeae contra planum incurrentis experimenta in den Comment. Petrop. T. VIII. p. 253. s'*Gravesande* Physices Elementa Mathematica §. 1762-1775. Kästners Anfangsgründe der Hydrodynamik II. Abschnitt 318 - 325 §. auch 331-335 §.

38 §.

Hr. Pitot hat in den Memoires de l'Academie de Paris Année 1732, pag. 504 ein Werkzeug angegeben, die Geschwindigkeit der Ströme in verschiedenen Tiefen zu messen, dessen Gebrauch von der
108 F. Theorie des Wasserstosses abhängt. Es bestehet aus einer bey B rechtwinklicht gebogenen Glaßröhre ABC, und die Absicht des Gebrauchs erfodert, daß der eine Schenkel AB beträchtlich länger, als der andre BC sey, so daß jener auf sechs und mehr Fuß Länge hat, wenn B höchstens nur einen Fuß lang ist. Der kurze Schenkel BC wird gegen die Oefnung CF zu etwas erweitert, und die ganze Röhre ABC befestiget man an einer Tafel, woran von B nach A zu Eintheilungen in Füsse, Zolle und Linien angebracht sind. Das Werkzeug wird alsdenn mit dem untern Ende B so in den Fluß getaucht, daß die Axe des kurzen Schenkels BC der Richtung des Stroms grade entgegen gesetzt ist, und AB vertical stehet. Nun würde das Wasser in der Röhre AB schon auf eine gewisse Höhe BD steigen, wenn gleich das Wasser des Flusses ruhig stünde: (15 §. Hydrost.) es würde nemlich D in des Flusses Oberfläche liegen. Wegen der Geschwindigkeit des gegen die Oefnung CF strömenden Wassers aber steigt es in der Röhre höher bis E, und bleibt nicht ehe ruhig stehen, bis das in der Röhre befindliche Wasser gegen CF so stark drückt, als das dagegen fliessende Stromwasser entgegen drückt.

Nun sey die Fläche der Oefnung CF $= h^2$, ihre Tiefe unter dem Wasser BD $= a$, und BE $= b$; so ist

ist der hydrostatische Druck des Wassers gegen die Oefnung CF $= h^2 . a$, und derjenige, welcher von der Geschwindigkeit c des dagegen ströhmenden Wassers herrührt, $= h^2 . \frac{cc}{4g}$, (36 §.) also der gesammte Druck des Stroms gegen CF $= h^2 \left(a + \frac{cc}{4g} \right)$. Der Gegendruck des in der Röhre befindlichen Wassers ist $= h^2 . b$, und beyde Pressungen sind gleich groß: also erhält man $a + \frac{cc}{4g} = b$, und $\frac{cc}{4g} = b - a =$ DE, mithin $c = 2\sqrt{g \text{ DE}}$.

Die Voraussetzung hiebey, daß der hydrostatische Druck im fliessenden Wasser eben so sey, als er im stillstehenden Wasser seyn würde, ist so sicher nicht, daß sie nicht noch eine weitere Prüfung verdiente: er sey indessen so groß er wolle, so läßt sich das aus der Höhe beurtheilen in welcher das Wasser in einer graden unten und oben offenen Röhre erhalten wird, wenn sie lothrecht im Wasser steckt. Deßwegen schlägt H. Pitot vor, man soll neben der gebogenen Röhre noch eine andre grade Röhre befestigen die eben so lang als der längere Schenkel AB der gebogenen Röhre ist. In dieser graden Röhre wird alsdenn das Wasser nur so hoch steigen, als dem hydrostatischen Druck desselben gemäß ist, und die Differenz der Wasserhöhen in beyden Röhren ist alsdenn $= \frac{cc}{4g}$.

39 §.

Wenn alle Elemente der Wassermasse *ABCD* gegen die Ebene *BC* in parallelen ge- 107 F.

 gen

gen diese Ebene geneigten Richtungen mit einerley Geschwindigkeit strömen; so leidet diese davon einen senkrechten Druck, der dem Gewicht einer Wassersäule über der Grundfläche *BC* gleich ist, wenn ihre Höhe so groß genommen wird, als die der Geschwindigkeit des Wassers zugehörige Höhe mit dem Quadrat vom Sinus des Anstoßwinkels *BCD* multiplicirt.

Beweis. Es sey die Geschwindigkeit des Wassers $= c =$ EF, der Winkel BCD $= \vartheta$, und EG auf BC senkrecht. Ziehet man nun FG mit BC und FC mit EG parallel; so zerlegt sich die Geschwindigkeit c nach der Richtung EF in zwo andre nach EG $= c \,.\, \sin\vartheta$ und nach EC $= c \,.\, \cos\vartheta$. Wegen der letztern Geschwindigkeit thut das Wasser gegen BC gar keine Wirkung, wegen der erstern aber preßt es dagegen mit einer Kraft $=$ BC $. \dfrac{cc \sin\vartheta^2}{4g}$, da dann $\dfrac{cc}{4g}$ die Höhe ist, welche der Geschwindigkeit des Wassers zugehört.

Es sey BH ein Schnitt der Wassermasse ABCD auf der Richtung der Bewegung senkrecht, so ist BH $=$ BC $\sin\vartheta$. (305 §. Geom.) Die Menge des in einer Secunde anschlagenden Wassers sey wie im 36 §. $=$ M, so ist M $=$ BH $. c =$ BC $. c . \sin\vartheta$; mithin ist auch der senkrechte Druck gegen BC $= \dfrac{M . c \sin\vartheta}{4g}$.

40 §.

Wenn das Wasser mit paralleler Bewegung durchgängig mit einerley Geschwindigkeit c gegen eine

Kugel

Kugel strömt, so ist nur die vordere Halbkugelfläche dem Wasserstoß ausgesetzt, diejenige nemlich, welche ein gröster Kreis abschneidet, dessen Ebene auf der Richtung des Wassers senkrecht ist. Man stelle sich diese Halbkugelfläche in so kleine Elemente eingetheilt vor, daß ihre Krümme nicht merklich bleibt; so kann man der Regel des vor. §. gemäß den Stoß finden, welchem jedes Element für sich in der darauf senkrechten Richtung ausgesetzt ist. Stellt man sich dies Element als eine unendlich kleine Ebene betrachtet nach allen Seiten erweitert vor, so berührt diese Ebene die Kugel an der Stelle, wo man das Element angenommen hat, und der Anstoßwinkel ϑ ist derjenige, unter welchem die Richtungslinie des Wassers gegen diese Ebene geneigt ist, mithin die Höhe des senkrechten Drucks gegen dies Element $= \frac{c^2 \sin \vartheta^2}{4g}$.

Je näher das Element dem Umfang der Grundfläche der Halbkugel liegt, die den Wasserstoß auffängt, desto kleiner ist der Anstoßwinkel; mithin der senkrechte Druck bey einerley Grösse des Elements desto kleiner, weil er sich wie das Quadrat vom Sinus dieses Anstoßwinkels verhält. Im Umfang der Grundfläche dieser Halbkugel verschwindet dieser Druck gänzlich: dasjenige Element aber, welches im Pol dieser Grundfläche liegt, fängt den ganzen Wasserstoß senkrecht auf, und es ist einem Druck ausgesetzt, dessen Höhe $= \frac{cc}{4g}$ ist.

Wenn gegen alle übrige eben so grosse Elemente der Halbkugelfläche, die den Wasserstoß auffängt, die senkrechten Pressungen eben so groß wären; so entstünde

stünde aus allen zusammen genommen ein mit der Richtung des Wassers paralleler gegen der Halbkugel Grundfläche senkrechter Druck, der so groß wäre, als das Gewicht einer Wassersäule auf dem grösten Kreise der Kugel als ihrer Grundfläche, in der Höhe $= \frac{cc}{4g}$. (10. §. Hydrost. 43 §. Aerost.) Weil aber die den senkrechten Pressungen zugehörigen Höhen im Verhältniß des Quadrats vom Sinus des Anstoßwinkels abnehmen, so bleibt der aus allen senkrechten Pressungen zusammen entstehende mit der Richtung des Wassers parallele Druck nur halb so groß, als er in jenem Fall seyn würde. Der Beweis hievon läßt sich am kürzesten vermittelst der Integralrechnung führen, und der Satz selbst, welcher hier noch nicht weiter gebraucht wird, ist nur um deßwillen vorläufig angeführt, weil sich darauf eine Methode gründet, die Geschwindigkeit eines Flusses in verschiedenen Tiefen zu messen, die **Varignon**, **Hermann** und **Gulielmini** gebraucht haben. Wenn der Kugel Halbmesser $= r$ gesetzt wird, so ist ihr gröster Kreis $= \pi rr$, also der mit der Richtung des Wassers parallele Stoß gegen die Kugel vermöge der angeführten Regel $= \pi r^2 \cdot \frac{cc}{8g}$.

41 §.

109 F. Wenn ACB ein Quadrant ist, von dessen Mittelpunct C an einem Faden CP eine Kugel P herab hängt, die ein wenig schwerer als Wasser ist; so senkt man die Kugel ins fliessende Wasser, stellet den Quadranten lothrecht, und seine Fläche mit der Richtung des Stroms parallel. Nun würde die Kugel sich selbst

gelassen

gelassen vertical herab hängen: weil sie aber vom Strom nach der Richtung PQ getrieben wird; so wird der Faden in einer gegen die Verticallinie CA geneigten Lage erhalten, die er unter einem gewissen Winkel ACP schneidet. Wenn nun alles ruhig ist, so erhalten drey Kräfte, nemlich das Gewicht der Kugel im Wasser PR, die Festigkeit des Fadens PC, und der Druck des Stroms PQ, einander im Gleichgewicht. Wenn ferner die graden Linien PQ, PR, sich wie die Kräfte verhalten, deren Richtungslinien sie vorstellen; so liegt PC mit der Diagonallinie PS des Parallelogramms RPQS in grader Linie. Die Richtung des Stroms ist allemahl sehr nahe horizontal: also kann man RPQS für ein Rechteck annehmen, und man hat $PQ = PR \,.\, \text{tang.}\, RPS = PR \,.\, \text{tang.}\, ACP$. Die Masse der Kugel sey $n$mahl schwerer als Wasser, des Wassers eigenthümliches Gewicht $= 1$, so ist das Gewicht der Kugel im Wassers, oder $PR = \frac{4}{3}\pi(n-1)r^3$, also $PQ = \frac{4}{3}\pi(n-1)r^3 \,\text{tang.}\, ACP$. Wenn aber des Wassers Geschwindigkeit $= c$ gesetzt wird, so ist auch $PQ = \pi r^2 \,.\, \frac{cc}{8g}$, und beyde Werthe gleich gesetzt geben $\frac{\pi r^2 \,.\, c^2}{8g} = \frac{4}{3}\pi(n-1)r^3$ tang. ACP, woraus $c^2 = \frac{32}{3} g(n-1)r \,\text{tang.}\, ACP$ gefunden wird.

Wenn man demnach mit einerley Kugel den Versuch in verschiedenen Tiefen, und an verschiedenen Stellen des Flusses anstellet; so verhalten sich die Quadrate der Geschwindigkeiten des Flusses an diesen Stellen wie die Tangenten der Abweichungswinkel ACP.

42 §.

106 Fig. Wenn die Ebene AB, welche den Stoß des Wassers EABF senkrecht auffängt, selbst nach einerley Richtung mit dem Wasser in Bewegung ist, mithin dem Wasserstoß ausweicht; so ist begreiflich, daß der Stoß nur seine Wirkung thun könne, wenn die Geschwindigkeit der Ebene kleiner ist, als die Geschwindigkeit des Wassers. Wären beyde gleich groß, so könnte das Wasser nicht weiter gegen die Ebene drücken. Wenn nun C des Wassers und c der Ebene Geschwindigkeit in einerley Richtung mit dem Wasser, also $C - c$ des Wassers relative Geschwindigkeit ist; (7 §. Mech.) so wirkt der Wasserstoß eben so, als wenn die Ebene unbeweglich ruhete, das Wasser aber mit seiner relativen Geschwindigkeit anstiesse. Demnach ist in diesen Fällen der vom senkrechten Wasserstoß gegen die Ebene herrührende Druck $= AB \cdot \frac{(C-c)^2}{4g}$.

107 Fig. Weicht die Ebene BC, welche den Stoß der Wassermasse ABCD unter dem Winkel $BCD = \vartheta$ schief auffängt, mit der Geschwindigkeit c nach der auf ihr senkrechten Richtung EG aus, so ist in dieser Richtung die relative Geschwindigkeit des Wassers $C \sin\vartheta - c$, also der vom Wasserstoß herrührende senkrechte Druck gegen $BC = BC \cdot \frac{(C \sin\vartheta - c)^2}{4g}$

Der

Der IV. Abschnitt.

Berechnung des Effects der Saugpumpen.

43 §.

Durch eine Pumpe wird überhaupt eine Maschine verstanden, die so eingerichtet ist, daß das
Wasser in einer Röhre ABCD vermittelst Auf- und 110
Niederdrückung eines Stempels oder Kolbens zum Fig.
Steigen gebracht werden kann, und ihre Erfindung wird dem Ctesibius von Alexandrien zugeschrieben, der nicht lange nach dem Archimedes berühmt gewesen ist. Das allgemeine der ganzen Einrichtung beruhet auf folgenden Stücken. Die Röhre ABCD stehet gewöhnlich vertical, zuweilen auch schief, mit dem untern Ende BC im Wasser, die untere Oefnung oder sonst eine dienliche Stelle ist mit einer Klappe RS, oder dem so genannten Ventil versehen, wodurch dem Wasser, wenn es hinauf getreten ist, der Rückweg verschlossen wird. Die Röhre selbst heißt die Pumpenröhre, auch wohl der Stiefel, und nach den Gesetzen der Hydrostatik steigt das Wasser von selbst durch die untere Oefnung bey R, indem es die Klappe aufstößt, in der Pumpenröhre eben so hoch hinauf, als es ausserhalb der Röhre steht: wofern nicht etwa der Stempel EF so niedrig steht, daß dieser oder eine andre Ursache es hindert.

Man nehme an, der Stempel EF werde vermittelst der Stange KL, welche mit demselben durch einen Hacken oder Ring verbunden ist, in die Höhe gezogen, so folgt ihm das Wasser wenigstens bis zur äussern

Wasserfläche YZ nach. Wenn überdem der Stempel am innern der Röhre genau anschließt, so erhellet, daß über der Wasserfläche YZ in der Röhre ein Luftleerer Raum entstehen muß, wenn man den Stempel noch höher hinauf zieht. In der Röhre würde also die Wasserfläche gar keinem Druck ausgesetzt seyn, da doch die äussere Wasserfläche den Druck der Atmosphäre leidet, der eben so stark ist, als wenn ausserhalb der Röhre das Wasser noch 32 Fuß höher stünde: dieserwegen folgt das Wasser dem Stempel auch noch alsdenn, wenn er gleich über die wagrechte Fläche des ausserhalb der Röhre befindlichen Wassers hinauf gezogen wird. Doch würde es in der Röhre nicht höher als etwa 32 Fuß über die äussere Wasserfläche hinauf steigen können; und wenn man den Stempel noch höher zöge, so würde unter demselben ein leerer Raum bleiben.

Ausser diesem Erfolg, der daher entsteht, wenn der Stempel in die Höhe gezogen wird, ist noch derjenige zu merken, den man zur Absicht hat, wenn der Stempel wieder niedergedrückt wird. Bliebe alsdenn der Boden BC der Pumpenröhre offen, so würde das mit dem steigenden Kolben hineingetretene Wasser durch denselben Weg wieder zurück fallen. Um dies zu verhindern ist die Oefnung im Boden mit der Klappe RS versehen, welche das mit dem Stempel steigende Wasser offen hält, die aber theils von ihrem eigenen Gewicht, theils von der drüber stehenden Wassersäule in demselben Augenblick zugedrückt wird, da die steigende Bewegung des Stempels aufhört. Drückt nun eine Gewalt den Kolben nieder, so muß das in der Röhre befindliche Wasser ausweichen, wo es eine Oefnung findet. Wenn der Kolben EF selbst durchlöchert

löchert, und mit einer Klappe TV versehen ist, welche die Luft, oder vielleicht eine schon drüber stehende Wassersäule, so lange der Kolben stieg, zudrückte; so weicht diese Klappe, wenn der Kolben zurückgetrieben und dadurch das Wasser zusammen gepresset wird, dem Wasser aus, welches sich nach allen Seiten auszubreiten strebt, und das Wasser tritt durch die Oefnung im Kolben über demselben hinauf. Beym neuen steigenden Kolbenzuge fällt die Klappe TV im Kolben zu, die untere Klappe RS öfnet sich, und es tritt soviel Wasser als das vorigemahl in die Pumpenröhre hinein, wofern man den Stempel wieder eben so hoch hebt, und das solchergestalt hineingetretene Wasser wird beym Zurückstossen des Stempels abermahl genöthiget, durch die Klappe TV über dem Kolben hinaufzutreten. Werden solchergestalt die Züge und Rückzüge des Stempels mehrmals wiederholt; so nimmt die Höhe der über dem Kolben befindlichen Wassersäule immer mehr zu, bis endlich das Wasser die Oefnung M erreicht, und durch eine daselbst angebrachte Röhre oder Rinne abläuft, oder oben bey AD überläuft. Dies Ausfliessen des Wassers dauret hiernächst so lange fort, als die Bewegung des Stempels fortgesetzt wird. Wenn überdem Ventile und Kolben gut schliessen, so bleibt die Wassersäule EM auch wenn die Bewegung des Stempels nachläßt, über demselben stehen, und die unter ihm in der Pumpe befindliche Wassersäule wird entweder durch die Klappe RS, wofern sie im Boden, wie in der 110 Fig. befindlich ist, oder unter der Klappe RS in der bald weiter zu beschreibenden so genannten Saugröhre GH durch den äussern Druck der Atmosphäre zurück gehalten, da dann von selbst klar ist, daß GH weniger als 32 Fuß hoch seyn müsse.

44 §.

44 §.

Wenn der Stempel auch in seinem höchsten Stande noch unter der äussern Wasserfläche bliebe, so würde die Pumpe auch im Luftleeren Raum ihren Effect haben. Stiege der Stempel im Luftleeren Raum höher als die äussere Wasserfläche, behielte aber seinen niedrigsten Stand unter derselben; so würde zwar noch bey jedem Zuge etwas Wasser in die Röhre hineintreten, aber so hoch als die äussere Wasserfläche steht, und unter dem Stempel in seinem höchsten Stande würde ein leerer Raum bleiben. Es würde also beym Rückzuge nicht soviel Wasser als in dem vorigen Fall bey gleicher Höhe des Kolbenzuges durchs Ventil über demselben hinauftreten, mithin der Pumpe Effect geringer ausfallen. Ist dagegen alles der freyen Luft ausgesetzt, so ist nicht einmahl nöthig, daß bey den ersten Zügen der Stempel im niedrigsten Stande bis zur äussern Wasserfläche herabsinke: das abwechselnde Steigen und Sinken des Stempels bey den ersten Zügen und Rückzügen hat einen zwiefachen Erfolg: die unter dem Kolben noch befindliche Luft tritt nach und nach durch das Kolbenventil aus der Pumpenröhre heraus, indem zugleich das Wasser durch den Druck der äussern Luft bey jedem Zuge höher getrieben wird, bis es endlich selbst den Kolben erreicht, und bey den folgenden Zügen auf die schon beschriebene Art weiter gehoben wird. Pumpen dieser Art heissen Saugwerke, weil man sich das, was die äussere Luft eigentlich wirkt, gewöhnlich als ein Saugen vorstellet.

111 Fig. Ein solches Saugwerk kann aus zwoen Röhren AB und GH zusammen gesetzt werden, wovon die obere AB etwas weiter ist, als die untere GH: als-

denn

denn heißt die untere engere Röhre, welche im Wasser zu stehen kommt, die Saugröhre, und die obere, worin der Stempel auf und niederspielt, wird der Stiefel genannt. Weite und etwas hohe Saugröhren lassen das Wasser leicht fallen, wofern nicht alles gegen den Zugang der Luft aufs sorgfältigste verwahrt ist; um deßwillen wählt man gern Saugröhren, die enger als die Stiefel sind. Ferner wird ausser dem Ventil im Kolben im Boden BC des Stiefels ein Ventil RS gelegt, und die Saugröhre kann unten bey H offen bleiben. Wenn indessen die Pumpe dienen soll, aus einen Brunnen oder andern Behälter reines Wasser zu heben, so wird die untere Oefnung mit einem Blech, das viele kleine Löcher hat, (dem Seiherblech) oder mit einem Korbe verschlossen, um den im Wasser etwa befindlichen Unrath abzuhalten. Uebrigens muß die Höhe der Saugröhre von der untern Wasserfläche bis zum Boden des Stiefels, worin das Ventil liegt, nicht über 28 Fuß betragen, damit die Atmosphäre das Wasser noch um einige Füsse durchs Ventil über den Boden des Stiefels hinauf treiben könne.

45 §.

Es stehe nun anfangs der Kolben in seiner nie- III
drigsten Stelle, so daß seine Grundfläche am Boden F.
BC, worin das Ventil liegt, anschliesset: so würde zwischen beyden gar keine Luft befindlich seyn, wenn sich die Einrichtung so machen liesse, daß alles genau aneinander schlösse. Allein das ist nicht wohl thunlich, zwischen der Grundfläche des Kolbens und dem Boden des Stiefels wird doch allemahl ein kleiner Raum bleiben, der anfangs so wie auch die Höhlung des Kolbens unter dem Kolbenventil mit Luft von na-

türlicher Dichtigkeit angefüllet ist. Wenn aber der Kolben bis zu seiner höchsten Stelle auch nur um 2 bis 3 Fuß hinauf steigt; so breitet sich diese eingeschlossene Luft in den ganzen Raum aus, der nun zwischen dem Kolben und dem Boden des Stiefels leer wird. Hiedurch wird ihre Federkraft vermindert, die Federkraft der in der Saugröhre befindlichen Luft ist stärker, also stößt sie das Stiefelventil RS auf, und ein Theil von ihr tritt in den Stiefel hinein. Hiedurch wird zugleich die Federkraft der in der Saugröhre zurück bleibenden Luft vermindert, so daß sie mit der Federkraft der äussern Luft nicht mehr im Gleichgewicht bleibt. Der Erfolg davon ist dieser, daß die äussere Luft in die Saugröhre soviel Wasser hineintreibt, bis das Gewicht der hineingetretenen Wassersäule mit dem Druck der eingeschlossenen Luft zusammen dem Druck der Atmosphäre gleich ist. Wenn hiernächst der Kolben von seiner höchsten bis zur niedrigsten Stelle zurück gestossen wird, so drückt er die unter ihm und über dem Stiefelventil befindliche Luft zusammen; wegen ihrer dadurch vermehrten Federkraft drückt diese nun das Stiefelventil zu, stößt das Kolbenventil offen, und tritt durch dasselbe über den Kolben hinauf, einen kleinen Theil ausgenommen, der wie anfangs unter dem Kolben im Stiefel zurück bleibt. Beym zweyten Kolbenhub erfolgt eben das mit einem geringen Unterscheid, was beym ersten Hub erfolgte; ein Theil der in der Saugröhre noch zurückgebliebenen Luft tritt in den Stiefel, die Atmosphäre preßt etwas mehr Wasser in die Saugröhre hinein, und beym Rückzuge des Kolbens geht die in den Stiefel hinein getretene Luft durchs Kolbenventil gröstentheils bis auf etwas weniges wieder heraus in die freye Luft. Wenn der Kolben so auf und nieder zu spielen fortfährt; so steigt bey jedem Hub in der Saugröhre das Wasser höher, und tritt endlich durchs Ventil RS in den Stiefel, da es denn weiter vermittelst des Kolbens wie bey gemeinen Wasserpumpen (43 §.) biß zur Gußröhre gehoben wird.

46 §.

Liesse sich die Einrichtung so machen, daß zwischen dem Kolben- und Stiefelventil beym niedrigsten Stande des Kolbens gar keine Luft bliebe, so würde das Wasser allemahl bis in den Stiefel steigen, und bis zur höchsten Stelle des Kolbens gehoben werden, wofern diese gröste Kolbenhöhe über der äussern Wasserfläche nur nicht über 32 Fuß betrüge. In allen andern Fällen ist die zwischen dem Kolben in seinem niedrigsten Stande und dem Boden des Stiefels zurück bleibende Luft dem in der Saugröhre hinauf steigenden Wasser desto mehr hinderlich je grösser dieser Zwischenraum ist, und um deßwillen heißt er der schädliche Raum der Pumpe. Die Pumpe ist desto vollkommener je kleiner dieser schädliche Raum ist, und die vollkommenste Pumpe wäre diejenige, welche gar keinen schädlichen Raum hätte.

47 §.

Die Abmessungen des Stiefels und der Saugröhre einer Pumpe der vollkommensten Art, die Höhe ZB des Stiefelventils RS über der äussern Wasserfläche YZ; und die Höhe AB des Kolbenhubs, sind gegeben: man soll finden, wie hoch das Wasser beym ersten Kolbenhub in die Saugröhre hinein treten wird. 114 F.

Aufl. Man setze $ZB = b$, als die Höhe des Stiefelventils über der äussern Wasserfläche YZ, die Höhe des Kolbenhubs $BA = c$, den Querschnitt des Stiefels $= m^2$ der Saugröhre $= n^2$; so ist der Inhalt der Saugröhre, soweit sie anfangs leer ist $= n^2 b$, und diesen Raum füllt die natürliche Luft aus, bevor der Kolben das erstemahl zu steigen anfängt. Der Inhalt des Stiefels bis an die höchste Stelle A der Grundfläche des Kolbens ist $m^2 c$, und wenn das Wasser in der Saugröhre beym ersten Kolbenhub um die Höhe $ZX = x$ steigt, so füllt nach dem ersten Hub diejenige Luft den Raum $AB + BZ - ZX = m^2 c + n^2 (b - x)$ aus, welche anfangs in dem Raum der Saugröhre $n^2 b$ ausgebreitet war. Wenn also die natürliche Dichtigkeit der Luft $= \Delta$, die Dichtigkeit der eingeschlossenen Luft nach dem ersten Kolbenzuge $= \delta$ gesetzt wird, so ist $\delta = \dfrac{n^2 b \cdot \Delta}{m^2 c + n^2 (b - x)}$. (7 §. Stat.) Weiter nehme man an, daß h und h' die Höhen zwoer Wassersäulen bezeichnen, wovon die erste mit der Federkraft der natürlichen Luft, die zweyte mit der Federkraft der nach dem ersten Kolbenzug in der Pumpe schon verdünnten Luft das Gleichgewicht hält; so ist $\Delta : \delta = h : h'$, (35 §. Aerost.) also auch $h' = \dfrac{n^2 b h}{m^2 c + n^2 (b - x)}$. Weil nun die Federkraft der äussern Luft die Wassersäule ZX erhält, deren höchste Fläche bey X dem Druck der eingeschlossenen verdünnten Luft ausgesetzt ist; so hat man $h' + x = h$, oder

$$\frac{n^2 bh}{m^2 c + n^2 (b - x)} + x = h.$$

Man multiplicire auf beyden Seiten mit dem Nenner des Bruchs, so erhält man

$$m^2cx + n^2bx - n^2x^2 = m^2ch - n^2hx$$

oder $n^2x^2 - (m^2c + n^2b + n^2h)x = - m^2ch$,

mithin $x^2 - \left(\frac{m^2}{n^2}c + b + h\right)x = - \frac{m^2ch}{n^2}$.

Um abzukürzen setze man $\frac{m^2c}{n^2} + b + h = A$ $\frac{m^2ch}{n^2} = B$, so ist $x^2 - Ax = - B$, und daraus folgt $x^2 - Ax + \frac{1}{4}A^2 = \frac{1}{4}A^2 - B$. Wird ferner auf beyden Seiten die Quadratwurzel genommen, so findet man $\frac{1}{2}A - x = \surd(\frac{1}{4}A^2 - B)$, und daraus $x = \frac{1}{2}A - \surd(\frac{1}{4}A^2 - B)$.

48 §.

Wenn beym zweyten Kolbenzuge das Wasser von X nach W steigt, so sey $XW = y$, $XB = b - x = \beta$, und die Höhe einer Wassersäule, die mit der Federkraft der innern Luft nach dem zweyten Zuge im Gleichgewicht ist, sey $= h''$, so ist nun y, β, h', h'', was vorhin x, b, h, h', war, und man erhält $y = \frac{1}{2}A - \surd(\frac{1}{4}A^2 - B)$, wenn man $A = \frac{m^2c}{n^2} + \beta + h'$, und $B = \frac{m^2ch'}{n^2}$ annimmt. Eben so läßt sich die Höhe finden, um welche das Wasser beym dritten und den folgenden Kolbenzügen steigt, wenn durch β die Höhe des beym vorigen Zuge vom Wasser noch leer gebliebenen Theils der Saugröhre, und durch h' das Maaß der Federkraft der darin zurück gebliebenen Luft verstanden wird.

Sind Stiefel und Saugröhre gleich weit, so hat man $A = c + \beta + h'$, und $B = c \cdot h'$: also hängt nun die Höhe, um welche das Wasser jedesmahl steigt von der Weite der Pumpe nicht ab. Man stelle sich zwey Pumpen vor, wovon die eine im Stiefel soweit als in der Saugröhre ist, die andre aber nicht; die Querschnitte des Stiefels und der Saugröhre der letztern bezeichne man mit m^2 und n^2 auch die Höhe des Zuges für diese Pumpe bleibe $= c$: so steigt das Wasser auf den ersten und jeden folgenden Kolbenzug in beyden Saugröhren gleich hoch, wenn in der durchgängig gleich weiten Pumpe die Höhe des Zuges jedesmahl $= \frac{m^2 c}{n^2}$ ist. Mit eben dem Zuge, womit in der durchaus gleichweiten Pumpe das Wasser durchs Ventil in den Stiefel tritt, mit eben dem Zuge tritt es auch in der andern Pumpe in den Stiefel, und dies muß erfolgen, wenn $y > \beta$ wird. Demnach kann man jede Pumpe bey dieser Rechnung so betrachten, als wenn sie durchaus gleich weit, und die Höhe des Kolbenzuges $= \frac{m^2 c}{n^2}$ wäre. Man könnte diese Höhe die auf die Weite der Saugröhre **reducirte** Höhe des Kolbenzuges nennen.

Weil übrigens keine Pumpe ohne schädlichen Raum zuwege gebracht werden kann, so wird zwar diese Rechnung mit dem Erfolg nie völlig zutreffen, demselben aber doch desto näher kommen, je kleiner der schädliche Raum ist, der zwischen dem Kolben und dem Ventil im Boden des Stiefels sich nicht ganz vermeiden läßt.

49 §.

114 F. Ist nach einigen Kolbenzügen mit dem letzten schon etwas Wasser durchs Ventil in den Stiefel getreten,

treten, so tritt dasselbe beym Rückzuge durchs Kolbenventil über dem Kolben hinauf, beym nächsten Kolbenzuge folgt hiernächst das Wasser dem Kolben unmittelbar, und steigt bis an die höchste Stelle der Grundfläche des Kolbens. Diese sey AD, und der Kolben selbst befinde sich bey seiner steigenden Bewegung jetzt in EFGH; so ist eine Kraft nöthig, die den Kolben aufwärts zu ziehen strebt. Denn der Kolben strebt schon vermöge seines Gewichts herab zu sinken, und überdem, weil er an der innern Fläche des Stiefels genau anschliessen muß, kann das Reiben zwischen dieser Fläche und der äussern Fläche des Kolbens nicht gänzlich vermieden werden, welches seiner Bewegung ein beträchtliches Hinderniß entgegen setzt. Wenn aber auch der Kolben bloß träge nicht schwer wäre, und das Reiben gänzlich vermieden werden könnte, so wäre doch noch Kraft nöthig, um den Kolben hinauf zu ziehen: er würde in der Stelle EFGH nicht bleiben, sondern von der Atmosphäre, die gegen seine obere Grundfläche FG drückt zum Sinken genöthiget werden, wenn ihn nichts hielte, und das Ventil im Boden des Stiefels offen bliebe.

50 §.

Die Abmessungen der Pumpe sind gegeben: man soll die Kraft finden, welche den Stempel in jeder gegebenen Stelle bey offenem Ventil im Boden des Stiefels zu erhalten erfodert wird, damit er nicht wieder herab sinke, wenn dieser Stempel selbst nicht schwer wäre, auch zwischen seiner äussern und des Stiefels innere Fläche das Reiben gänzlich wegfiele.

114 Fig. Aufl. So lange die Wassersäule ZV nicht völlig 32 Fuß beträgt, so lange ist sie mit dem Druck der Atmosphäre auf die äussere Wasserfläche bey Z noch nicht im Gleichgewicht: vielmehr strebt diese Wassersäule ZV noch höher zu steigen, und daraus entsteht ein Druck gegen die untere Grundfläche EH des Stempels. Wenn die Höhe der Wassersäule, die mit der Atmosphäre im Gleichgewicht ist, $= h$ gesetzt wird; so ist dieser Druck gegen des Stempels untere Grundfläche $= EH\ (h - ZV)$. Seine obere Grundfläche FG leidet von der Atmosphäre einen Druck $= FG \,.\, h$ $= EH \,.\, h$; demnach ist der lothrechte Druck nach unten $= EH (h - (h - ZV)) = EH \,.\, ZV$. Soll demnach eine Kraft, die den Stempel lothrecht aufwärts ziehet, mit jenem Druck nach unten im Gleichgewicht seyn; so wird erfordert, daß sie dem Gewicht einer Wassersäule gleich sey, die mit dem Kolben einerley Grundfläche hat, und so hoch ist, als die Höhe der untern Grundfläche des Kolbens über der äussern Wasserfläche, oder die Höhe in der das in die Pumpe bis an den Stempel hinein getretene Wasser erhalten werden soll.

51 §.

Weil diese gefundene Kraft den Stempel nur im Gleichgewicht erhalten würde, so erhellet, daß noch mehr Kraft nöthig sey, um denselben hinaufzuziehen. Wenn der Kolben steigt, und ihm das Wasser unmittelbar nachfolgt, so ist der Druck desselben gegen des Stempels untere Grundfläche nicht so groß, als im Zustande des Gleichgewichts, also der Ueberschuß des Drucks der Atmosphäre gegen die obere Grundfläche des Stempels über jenen Druck gegen seine untere Grundfläche grösser, als vorhin. Das Wasser

ser kann dem Stempel nur mit einer bestimmten Geschwindigkeit folgen: je mehr die Geschwindigkeit des Stempels die Geschwindigkeit des ihm folgenden Wassers übertrift, desto geringer ist der Druck des Wassers gegen die untere Grundfläche, und dieser verschwindet gänzlich, wenn der Stempel eben so schnell steigt, als das Wasser folgt. Im letztern Fall müßte die Kraft, welche den Stempel hebt, den ganzen Druck der Atmosphäre überwinden. Soll die Pumpe auf jedem Zuge soviel Wasser heben, als den ganzen körperlichen Raum des Kolbenzuges füllet, so muß der Stempel nicht schneller steigen, als das Wasser folgen kann, widrigenfalls würde zwischen beyden ein leerer Raum bleiben, und jene Absicht nicht erreicht werden.

52 §.

Aus der bekannten Kraft, die den Stempel aufwärts zieht, läßt sich die Zeit des ganzen Zuges, und umgekehrt aus der gegebenen Zeit des Kolbenzuges die nöthige Kraft finden. Alles folgt aus den Gründen, die oben im ersten Abschnitt der Hydraulik sind festgesetzt worden: nur lassen sich die hier gesuchten Resultate nicht wohl anders als vermittelst der Integralrechnung finden, und um deßwillen müssen die fernern Untersuchungen hierüber den folgenden Theilen dieses Lehrbuchs vorbehalten bleiben. Es sey b die Höhe des Kolbenzuges, f die Höhe der untern Grundfläche des Kolbens in seinem niedrigsten Stande über dem aus der Tiefe zu hebenden Wasser g, die Höhe des freyen Falles einer schweren Masse in der ersten Secunde $= 15\frac{5}{8}$ Rheinl. Fuß, k die Höhe einer Wassersäule über der Grundfläche des Kolbens, deren Gewicht der Kraft am Kolben gleich ist, l die

Länge der Saugröhre bis zur untern Oefnung, a und δ die Durchmesser der Querschnitte des Stiefels und der Saugröhre, ϑ die Zeit eines Kolbenzuges: so ist $\vartheta = \frac{a\sqrt{l}}{2\delta\sqrt{g}} \cdot \mathrm{A\,sv.}\,\frac{2b}{k-f}$, da dann der Ausdruck $\mathrm{A\,sv.}\,\frac{2b}{k-f}$ einen mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Kreisbogen bezeichnet, wozu ein Quersinus $= \frac{2b}{k-f}$ gehört. Umgekehrt giebt das $\mathrm{A\,sv.}\,\frac{2b}{k-f} = \frac{2\delta\vartheta\sqrt{g}}{a\sqrt{l}}$, also $\frac{2b}{k-f} = \mathrm{sv.}\,\frac{2\delta\vartheta\sqrt{g}}{a\sqrt{l}}$, und $k = f + 2b : \mathrm{sv.}\,\frac{2\delta\vartheta\sqrt{g}}{a\sqrt{l}}$.

Diese Formuln, welche vermittelst der Integralrechnung gefunden werden, hat man nöthig, wenn man den Effect einer Saugpumpe etwas genau berechnen will. Sonst nimmt man gewöhnlich $k = f + b$ an, und setzt wegen der Friction zwischen Kolben und Stiefel auch wegen des Gewichts des Kolbens und der Stange mehr nach ungewissen Gutdünken als nach richtigen Gründen noch etwas hinzu. Die hier mitgetheilte Formul aber ergiebt, daß k ausser von ϑ und l vornemlich auch vom Verhältniß $\delta : a$ abhänge. Je enger die Saugröhre in Vergleichung mit der Weite des Stiefels ist, desto mehr Kraft ist nöthig, den Kolben in einerley Zeit zu heben.

53 §.

111 F. Weil die Ausgußröhre MN noch über der höchsten Stelle befindlich ist, die der Stempel erreicht; so wirkt die Pumpe sonst als Saugpumpe, nur muß

d

der Stempel das durchs Ventil über ihm hinauf getretene Wasser bis zur Ausgußröhre heben. Dies Gewicht des über dem Stempel stehenden Wassers muß also die Kraft, welche den Stempel hebt, noch mit überwinden, und um deßwillen rechnet man zur vorhin bestimmten Höhe k noch die Höhe einer Wassersäule hinzu, welche mit dem Stempel einerley Grundfläche hat, und sich vom höchsten Kolbenstande bis zur Ausgußröhre erstreckt. Es sey diese Höhe $= c$, so wird zur Bewegung des Stempels, wenn derselbe in der Zeit ϑ um die Höhe b steigen soll, eine Kraft erfodert, die so groß ist, als das Gewicht einer Wassersäule auf der Grundfläche des Stempels, deren Höhe $= k + c$ ist. Die schärfste Rechnung würde erfodern, die Kraft, welche die über dem Stempel befindliche Wassersäule bewegen soll, ebenfalls etwas grösser in Rechnung zu bringen, weil eine Kraft, die dem Gewicht dieser Säule gleich ist, nur mit ihr im Gleichgewicht seyn würde. Bey einer regelmässigen Anordnung der Pumpenkünste, wovon die Maschinenlehre mehr Unterricht geben wird, ist indessen allemahl eine langsame Bewegung des Klobens der schnellern vorzuziehen, und alsdenn bedarf es nur eines geringen Uebergewichts der Kraft über die zu bewegende Last. Wenn alsdenn auch δ und a mit ϑ so angenommen werden, daß k die Höhe $f + b$ nur wenig übertrift; so kommt die Kraft, welche den Kolben zu bewegen erfordert wird, dem Gewicht einer Wassersäule auf der Grundfläche des Kolbens sehr nahe, deren Höhe $= f + b + c$ ist, oder der gesammten Höhe, um welche das Wasser soll gehoben werden.

Der V. Abschnitt.

Vom Effect der Druckpumpen.

54 §.

112 113 Fig. Wenn der Kolben EF einer Pumpe mit keiner Ventilöfnung versehen ist, die übrige Einrichtung aber wie vorhin bleibt, so kann statt dessen die Pumpenröhre selbst seitwärts eine Oefnung GT haben, und daselbst mit einer aufwärts gebogenen und wohin man sonst will geführten Röhre GHM zusammen hängen. Wird alsdenn vor der Oefnung GT ein Ventil so gelegt, daß das Wasser zwar aus der Pumpe durchs Ventil in die Seitenröhre, aber nicht aus dieser in jene wieder zurück treten kann; so weicht diese Klappe, wenn der Kolben zurückgetrieben, und dadurch das Wasser in der Pumpe zusammengedrückt wird, dem nach allen Seiten nun pressenden Wasser eben so aus, wie sonst die Ventilklappe im Kolben thun würde. Demnach dringt das Wasser durchs Ventil in die Seitenröhre hinein, und steigt darin so lange, bis der Kolben seinen niedrigsten Stand erreicht hat. In dem Augenblick, da der Kolben umkehrt, läßt die steigende Bewegung des Wassers in der Seitenröhre nach, und während des folgenden Zuges würde, es aus der Seitenröhre in die Pumpe zurück treten, wenn die Klappe TV nicht zufiele. Weil diese sich schließt, so wird mit dem neuen Zuge die Pumpe wieder durchs Ventil RS im Boden des Stiefels gefüllt, und die so hineingetretene Menge Wasser beym Rückzuge abermahl in die Seitenröhre hinein getrieben.

55 §.

55 §.

Die Seitenröhre sey nach *HM* lothrecht 212.
aufwärts gebogen, und bey *M* befinde sich ei- Fig.
ne Oefnung, die in Vergleichung mit den Querschnitten des Stiefels sehr klein ist; durch welche das Wasser lothrecht in die Höhe spritzt, indem der Kolben lothrecht niedergedrückt wird: die Kraft *P* am Kolben ist gegeben, man soll die Höhe finden, die der durch *M* ausspritzende Wasserstrahl erreichen wird.

Aufl. Die Kraft P, welche vermittelst der Stange KL den Kolben niederdrückt, preßt die untere Grundfläche FP des Kolbens gegen die obere Grundfläche des Wassers im Stiefel, und der Druck gegen diese Wasserfläche vertheilt sich über dieselbe gleichförmig. Wenn nun Q die cubische Grösse einer Wassersäule über der Grundfläche FP ausdrückt, deren Gewicht $= P$ ist, so ist ihre Höhe $= \frac{Q}{FP}$; und wenn die Pumpenröhre so hoch wäre, daß über FP statt des Kolbens eine Wassersäule in der Höhe $FO = \frac{Q}{FP}$ stünde: so würde das Wasser durch M mit einer Geschwindigkeit sprützen, die der Höhe MN der höchsten Wasserfläche OQ über der Oefnung M zugehörte. (10 §.) Den Widerstand der Luft beyseite gesetzt würde demnach die Höhe, welche der Wasserstrahl erreicht, wenn man sie von der untern Grundfläche des Kolbens aufwärts rechnet, $= \frac{Q}{FP}$ seyn, oder so groß als die Höhe einer Wassersäule über der Grundfläche

fläche des Kolbens, deren Gewicht so groß ist, als die Kraft, welche den Kolben niederdrückt.

Wegen des Widerstandes der Luft kann bekanntermassen der Wasserstrahl diese Höhe nicht erreichen. Setzt man $\frac{Q}{FP} = a$, und die vom Wasser wirklich erreichte Höhe $= b$, so hat man $b = \sqrt{(E \cdot a + \frac{1}{4}E^2)} - \frac{1}{2}E$, wenn man nach Mariotts Versuchen $E = 300$ setzt, und die Höhen in Fussen ausdrückt. (14 §.)

Vermittelst der Integralrechnung kann man auch über diese Aufgabe schärfere Untersuchungen anstellen: wenn indessen die Länge der Seitenröhre GHM nicht sehr beträchtlich ist, und ihre Querschnitte, die äussersten gegen die Oefnung M zu ausgenommen, in Vergleichung mit den Querschnitten des Stiefels so groß angenommen werden, daß jene im Durchmesser ohngefähr $\frac{2}{3}$ vom Durchmesser der Querschnitte des Stiefels betragen, wie es auch bey der Saugröhre im 52 §. nöthig war; so giebt die Integralrechnug sehr nahe ebenfalls das hier gefundene Resultat.

56 §.

112 Fig. **Die Höhe des Kolbenzuges ist mit den übrigen Abmessungen der Druckpumpe gegeben, auch ist die Kraft bekannt, welche den Kolben gegen das Wasser im Stiefel preßt: man soll die Zeit finden, worin derselbe von der höchsten bis zur niedrigsten Stelle herab sinkt.**

Aufl. Der Kolben muß beym Herabsinken die Ventilöfnung GT nicht schliessen, und seine niedrigste Stelle muß in T fallen. Die lothrechte Höhe der Oefnung M über T sey $= c$, und die Höhe einer Wasser=

Wassersäule über der Grundfläche TW, deren Gewicht der am Kolben angebrachten Kraft gleich ist, $= k$; so springt das Wasser aus M mit einer Geschwindigkeit hervor, die der Höhe $k - c$ zugehört, (55 §.) und diese Geschwindigkeit ist $= 2\sqrt{g(k-c)}$. Die Fläche der Oefnung M sey in der Fläche eines Querschnitts vom Stiefel n mahl enthalten, so ist die Geschwindigkeit des Wassers im Stiefel $= \frac{2\sqrt{g(k-c)}}{n}$, (3 §.) und eben so groß ist die Geschwindigkeit des Kolbens. Wenn also die Höhe des Kolbenzuges $= b$ gesetzt wird, und die Zeit $= \vartheta$, welche verfließt, indem der Kolben von der höchsten zur niedrigsten Stelle herabsinkt, so ist $\frac{2\sqrt{g(k-c}}{n} = \frac{b}{\vartheta}$, (2 §. Mech.) mithin $\vartheta = \frac{nb}{2\sqrt{g(k-c)}}$.

Umgekehrt wird hieraus $k = c + \frac{n^2 b^2}{4g\vartheta^2}$ gefunden, wenn die Abmessungen der Druckpumpe bekannt sind, und die Zeit ϑ gegeben ist.

57 §.

Die nach der bisherigen Beschreibung eingerichtete Druckpumpe ist bey der Anordnung der Feuerspritzen und andrer Maschinen gewöhnlich, welche das Wasser, wie bey Springbrunnen, in freyer Luft zum Steigen bringen sollen. Oft aber ist es nur darum zu thun, das Wasser zu nöthigen, daß es in einer hohen Seitenröhre GHMN aufwärts steige, da es 113 Fig.
denn aus dieser Röhre, wenn es bey N ausläuft, in einem erhaben liegenden Wasserbehälter gesammlet, und aus demselben zum anderweitigen Gebrauch abgeleitet

leitet werden kann. Wenn bey dieser Einrichtung der Pumpe der Druck des Stempels gegen die unter ihm befindliche Wasserfläche *FP* nur um etwas weniges grösser ist, als das Gewicht einer Wassersäule auf der Grundfläche des Stempels, die so hoch ist, als die Höhe, um welche das Wasser über *FP* gehoben werden soll, so muß das Wasser bey *N* ausfliessen.

Denn man stelle sich wie im 55 §. die Pumpenröhre hoch genug, und bis an OQ mit Wasser angefüllet vor, so erhellet, daß das Wasser in der Röhre GHMN bis an die erweiterte Horizontfläche OQ steigen, mithin bey N ausfliessen werde, so bald die Höhe FO diejenige zu übertreffen anfängt, um welche die Oefnung N über der Horizontfläche FP erhaben ist. Es sey die zuletzt erwehnte Höhe $= f$, die Höhe FO $= k$; so muß k etwas grösser als f seyn, wofern das Wasser bey N ausfliessen soll. Wenn FO nur bis an den Horizont von N reichte, und die Pumpenröhre so hoch wäre, daß sie bis an OQ mit Wasser gefüllt werden könnte, so würde das Wasser aus N noch nicht fliessen, also muß die Höhe des Drucks gegen FP etwas grösser seyn, als die Höhe um welche das Wasser über FP gehoben werden soll. Wäre die Kraft, welche den Stempel gegen FP drückt grade so groß, daß die Höhe des Drucks gegen FP $= f$ wäre, so wäre das Wasser im Stiefel und in der Steigröhre bis an N völlig in demselben Zustande, worin es sich befände, wenn es mit einer Wassersäule in der Höhe FO $= f$ das Gleichgewicht hielte: also erhellet wenigstens soviel, daß die Höhe des Drucks, womit der Stempel gegen FP preßt, die Höhe f übertreffen müsse, wofern das Wasser bey N ausfliessen soll.

58 §.

58 §.

Wenn die Buchstaben k und f die eben angezeigte Bedeutung behalten; wenn ferner die Länge der Steigröhre $= l$, die Höhe des Stempelzuges $= b$ gesetzet, und die Durchmesser der Querschnitte des Stiefels und der Steigröhre mit a und c bezeichnet werden; übrigens aber die Zeit, worin der Kolben von der höchsten bis zur niedrigsten Stelle herab sinkt, $= \vartheta$, und $g = 15\frac{5}{8}$ Rheinl. Fuß angenommen wird; so ist $\vartheta = \frac{a\sqrt{b.l}}{c\sqrt{g(k-f)}}$. Ein Ausdruck, der vermittelst der Integralrechnung gefunden wird, und um deßwillen hier mitgetheilt ist, weil man ihn nöthig hat, den Effect der Druckpumpen genauer, als gewöhnlich geschieht, zu berechnen. Sind die Abmessungen der Pumpe und die Zeit ϑ gegeben, so findet man daraus $k = f + \frac{a^2 bl}{c^2 g \vartheta^2}$, und die Formul zeigt an, daß bey einerley Zeit ϑ die Kraft am Stempel desto grösser seyn müsse, je länger die Steigröhre ist, und je enger die Querschnitte der Steigröhre in Vergleichung mit den Querschnitten des Stiefels sind. Die bald folgende Maschinenlehre wird hievon die Anwendung umständlicher zeigen.

Der VI. Abschnitt.

Andre Bewegungen des Wassers, die der Druck der Luft verursacht.

59 §.

115 F. Durch eine krumgebogene zweyschenklichte Röhre ACB, wenn sie in einem Gefäß mit Wasser DEF über dem festen Umfang desselben so hängt, daß der eine Schenkel CA im Wasser und der andre CB ausserhalb des Gefässes herab hängt, kann das Wasser ausfliessen, wenn es gleich in demjenigen Schenkel CA, der im Wasser hängt, nach den Gesetzen des Gleichgewichts nicht höher, als bis an die höchste Fläche DF des Wassers im Gefäß steigen kann, so lange sonst keine Ursache hinzukommt, die das Gleichgewicht hebt. In diesem Zustande des Gleichgewichts, wenn alles in freyer Luft steht, sind beyde Wasserflächen DF im Gefäß, und GH in der Röhre, einem gleichen Druck der Atmosphäre ausgesetzt, der das Gleichgewicht des in die Röhre bey A bis in GH hinein getretenen Wassers nicht stört. Sobald aber die Luft über DF allein, oder über GH in der Röhre allein, verdünnt würde; sobald würde dadurch das Gleichgewicht gehoben werden: im ersten Fall würde das Wasser aus der Röhre ins Gefäß, im letzten Fall aus dem Gefäß durch A in die Röhre hinein treten, und über GH oder DF hinauf steigen müssen. Solchergestalt kann es dahin gebracht werden, daß das Wasser im Schenkel AC zu jeder Höhe gelangt, welche die Höhe von 32 Fuß nicht übertrift, weil zu

solchen

solchen Zweck die Luft in der Röhre nur hinlänglich verdünnt werden muß. Soll das Wasser in AC völlig 32 Fuß hoch über DF steigen, so muß in CB die Luft soweit verdünnt werden, daß ihre Federkraft unmerklich wird. Wenn dagegen die höchste Stelle C der Röhre nur wenige Füsse, oder nur wenige Zolle höher als die Wasserfläche DF liegt; so wird bey einer mässigen, oder im letzten Fall bey einer ganz geringen Verdünnung der Luft in CB das Wasser schon aus dem Schenkel CA in CB hinüber treten, und wegen dieser Wirkung hat die so gebogene Röhre den Nahmen eines Hebers erhalten.

60 §.

Das Wasser ist aus dem im Gefäß hängenden Schenkel *AC* des Hebers in den ausserhalb des Gefässes hängenden Schenkel *CB* bis an *MN* hineingetreten: man soll finden, unter welchen Umständen das Wasser, wenn die unter *MN* befindliche Luft zu ihrer natürlichen Dichtigkeit wieder hergestellt wird, entweder in das Gefäß zurück treten, oder aus dem Schenkel *CB* ausfliessen wird. 115 Fig.

Aufl. Man stelle sich MN als einen auf der centrischen Linie der Röhre senkrechten Querschnitt vor, und suche den Druck, welchem MN von oben her ausgesetzt ist, wenn von unten die Atmosphäre dagegen drückt. Zu dem Ende sey BL eine Verticallinie durch B, welche von der Wasserfläche DF in O, und den durch A und M horizontal gelegten Ebenen in K und L geschnitten wird. Vermöge der Voraussetzung ist auch DF dem natürlichen Druck der Atmosphäre ausgesetzt, und wenn die Höhe dieses Drucks $= h$

ist; so ist das eben soviel, als wenn das Gefäß hoch genug wäre, und über DF noch eine Wassersäule in der Höhe h stünde. Weil nun das Wasser in der Röhre von A bis MN mit dem im Gefäß zusammen hängt, so leidet MN von oben einen Druck, dessen Höhe $= h - OL$ ist, so lange L höher als O, oder höher als die Wasserfläche DF liegt: denn dies wäre die Tiefe der Stelle M unter der höchsten Fläche des Wassers im Gefäß, wenn diese noch um die Höhe h über DF erhalten wäre. Weil nun die Höhe des Drucks, dem MN von unten ausgesetzt ist, $= h$ angenommen wird; so ist dieser letzte Druck grösser als derjenige, welchem MN von der andern Seite ausgesetzt ist: mithin muß das Wasser ins Gefäß zurück treten.

Fällt MN in die Ebene DF, so verschwindet OL, der Druck ist von beyden Seiten gleich, und wofern sonst keine Ursachen das Gleichgewicht stören, so muß das Wasser in der Röhre hängen bleiben.

Wenn dagegen L unter der Ebene DF liegt, etwa in λ, wenn das Wasser bis an $\mu\nu$ hineingetreten wäre; so ist von der Seite her, wo C liegt, die Höhe des Drucks gegen $\mu\nu = h + O\lambda$, und von der andern Seite her, wo B liegt, ist die Höhe des Drucks $= h$. Jene Höhe übertrift diese um die Differenz $O\lambda$; also muß das Wasser nach B zu fliessen.

61 §.

115 116 Fig. Wenn das Wasser einmahl angefangen hat, bey B auszufliessen; so wird diese Bewegung des Wassers so lange fortwähren, bis entweder in die Röhre wieder Luft eindringen kann, oder bis das Gleichgewicht sich auf andre Art wieder herstellet. Während der Bewegung des Wassers kann man Gefäß und Röhre

Röhre zusammen als ein einziges Gefäß betrachten, das aus beyden zusammen gesetzt ist, aus welchem das Wasser nach eben den Gesetzen ausfließt, als wenn sonst im Boden, oder an der Seite des Gefässes eine Röhre befestiget wäre, durch die das Wasser ausflösse. Wenn alsdenn die Querschnitte der Röhre in Vergleichung mit den wagrechten Querschnitten des Gefässes nicht beträchtlich groß sind, oder wenigstens die Oefnung B, wo das Wasser ausfließt, in Vergleichung mit den Querschnitten des Gefässes nur klein ist; so ist die Höhe BO, um welche die Wasserfläche DF im Gefäß über der Oefnung B erhaben ist, zugleich die der Geschwindigkeit des durch B ausfliessenden Wassers zugehörige Höhe, und diese Geschwindigkeit ist $= 2\sqrt{g}.BO$.

In dem Fall, wenn der kürzere Schenkel des Hebers im Gefäß hängt, wie es die 115 Fig. vorstellt, fließt der Heber so lange, als noch ein Theil dieses Schenkels im Wasser eingetaucht bleibt. Die Wasserfläche DF sinkt nemlich nach und nach weiter herab, wenn der Abgang des Wassers nicht durch neuen Zufluß ersetzt wird. Sobald nun DF bis an AK herab gesunken ist, und unter AK zu sinken anfangen würde, sobald dringt die Luft bey A in den Heber das Wasser, was bey A in den Heber schon hinein getreten ist, fließt noch durch den Heber weg, aber dem folgt nun die Luft, und setzt sich wieder ins Gleichgewicht.

Wenn dagegen der längere Schenkel des Hebers im Gefäß hängt, wie es die 116 Fig. vorstellt, so verschwindet BO, wenn die Wasserfläche DF bis in *df* so weit herab gesunken ist, daß die Oefnung B mit ihr in einerley Horizont liegt: auch weiß man schon aus dem 60 §, daß in diesem Fall alles im Gleich- 116 Fig.

gewicht bleibe. Allemahl also muß der Heber zu fliessen aufhören, wenn die im Gefäß herabsinkende Wasserfläche die Horizontalfläche erreicht hat, worin die Oefnung des kürzern Schenkels liegt.

62 §.

Es ist an sich nicht nothwendig, daß die beyden Schenkels des Hebers unmittelbar miteinander zusammen hängen. Wenn eine aufrecht stehende unter 32 Fuß hohe Röhre, unten im Wasser steht, das der freyen Luft ausgesetzt ist, oben aber sich in einem Gefäß endiget, worin man die Luft, es sey durch welches Mittel es wolle, stark genug verdünnen kann; so kann dadurch das Wasser in jener Röhre bis dahin zum Steigen gebracht werden, daß es sich in das Gefäß, worin man die Luft verdünnt hatte, ergießt. Aus demselben kann es hiernächst durch Röhren zum anderweitigen Gebrauch wieder abgeleitet werden. Herr von **Wolff** giebt von diesem **unterbrochenen Heber** eine kurze Beschreibung in den Elem. Matheseos Vniversae Tom. II. Hydraul. §. 77. p. 446; vollständiger giebt sie **Leupold** im Theatro Machinar. Hydraul. T. I. §. 12. p. 7.

117 Fig. Der **Diabetes** der Alten ist ein Heber, wovon beyde Schenkel in einander stecken. Durch den Boden BC des Gefässes ABCD stecke eine zu beyden Seiten offene Röhre EF, und diese sey mit einer etwas weitern Röhre GHI bedeckt, die sonst allenthalben verschlossen, unten aber am Boden des Gefässes seitwärts bey G mit einer Oefnung versehen ist. Wird nun in das Gefäß ABCD Wasser gegossen, so steigt es zugleich in dem zwischen beyden Röhren befindlichen Zwischenraum eben so hoch, als im Gefäß selbst, weil

die darin befindliche Luft durch die engere Röhre EF ihren freyen Ausgang findet. So lange alsdenn die Wasserfläche im Gefäß niedriger als die obere Oefnung E der innern Röhre bleibt, so lange kann kein Wasser auslaufen. Sobald sich aber diese Wasserfläche höher erhebt, als E liegt, sobald tritt es auch bey E in die engere Röhre hinein, und fängt an, durch dieselbe aus dem Gefäß auszufliessen. Weil überdem alle dieselben Ursachen, wie beym gebogenen Heber vorhanden sind, so muß der Abfluß des Wassers so lange fortdauren, bis die Wasserfläche im Gefäß soweit herabgesunken ist, daß sie die Oefnung bey G erreicht hat. Man kann eben so den längern Schenkel des gebogenen Hebers im Boden des Gefässes, wie hier die innere Röhre befestigen, und übrigens den ganzen Heber in dem innern Raum des Gefässes anbringen; so füllt sich derselbe von selbst mit, wenn man das Gefäß mit Wasser füllt, und fängt von selbst an zu fliessen, wenn die Wasserfläche über seine höchste Stelle hinauf steigt. Um also die letzte Absicht zu erreichen, muß der Heber nicht völlig so hoch, als das Gefäß seyn.

63 §.

Durch Verdichtung der Luft über der Fläche DF 115
oder auch durch Vermehrung ihrer Federkraft, wenn 116
man sie erhitzte, könnte das Wasser im Schenkel AC F.
des Hebers eben so zum Steigen gebracht werden, wie solches bey Verdünnung der Luft im Schenkel CB erfolgte: nur müste alsdenn die so verdichtete oder erhitzte Luft über DF von allen Seiten durch einen festen Umfang eingeschlossen seyn, damit sie sich nicht sonst ausbreiten könnte. Auf eben die Art kann man zuwege bringen, daß das Wasser aus einem verschlosse-

118 nen Gefäß in die freye Luft springen muß. Das Ge-
F. fäß ABCD sey mit einem Deckel AD fest und völlig luftdicht verschlossen, im Deckel sey die Röhre EF befestiget, die unten bey E nicht völlig bis auf den Boden BC reicht, damit das im Gefäß befindliche Wasser in die bey E befindliche Oefnung hinein treten könne. Wenn dies Gefäß ohngefehr halb oder etwas mehr als halb voll bis an GH mit Wasser gefüllt, und dabey nur von mässiger Grösse ist; so kann schon dadurch, daß man durch die Oefnung F mit dem Munde etwas Luft hinein bläset, die über GH stehende eingeschlossene Luft etwas mehr als die aussen befindliche natürliche Luft verdichtet werden: und der Erfolg ist, daß das Wasser ausspritzt, sobald man mit dem Hineinblasen aufhört.

Dieser Effect läßt sich sehr ansehnlich verstärken, wenn das Gefäß feste genug, und alles so eingerichtet ist, daß man das Ende F der Röhre an der Luftpumpe gehörig anschrauben, und vermittelst derselben die eingeschlossene Luft verdichten kann. Eben die Röhre EF wird alsdenn nicht weit unter F mit einem Hahnen versehen, um die Oefnung F beym Verdichten nach Erfodern zu öfnen und wieder zu schliessen, auch eben die Oefnung, nachdem das Gefäß schon von der Luftpumpe weggenommen worden, so lange man es nöthig findet, verschlossen zu halten.

Auch ohne weitere Verdichtung wird die Federkraft der eingeschlossenen Luft durch die Erhitzung verstärkt, wenn man das Gefäß auf einen heissen Ofen oder auf glühende Kohlen setzt. Es heißt gewöhnlich ein Heronsball, weil Hero in seinen Spiritualibus es so beschrieben hat.

64 §.

Der Heronsbrunn ist eine andre sinnreiche Erfindung eben dieses Hero: er bestehet aus dreyen übereinander gestellten, und mit Röhren so unter einander verbundenen Gefässen, daß das aus dem obersten ins unterste hinabfallende Wasser die im letztern und zugleich in dem mittlern etwa zur Hälfte mit Wasser gefüllten Gefäß befindliche Luft verdichtet, und solchergestalt das darin befindliche Wasser zum Springen nöthiget. Das mittlere Gefäß AB ist mit dem festen Deckel AO geschlossen, durch dessen Mitte die Springröhre EF bis nahe auf dem Boden steckt. Es ist an sich mit dem Heronsball einerley, über dem festen Deckel AO aber ist unmittelbar das oberste Gewicht AW in Gestalt einer Schüssel angebracht, die eben nicht tief seyn darf, weil es genüget, wenn sie einen oder einige Zoll hohes Wasser fasset. Die Schüssel hat im Boden, welches zugleich der Deckel des Gefässes AB ist, bey G eine Oefnung, und von derselben geht die verticalstehende Röhre GH auch durch den Boden des Heronsballs AB hinunter bis in das dritte unterste Gefäß CD durch den festen Deckel desselben hindurch, und diese Röhre endiget sich unten bey H nahe über dem Boden des Gefässes CD. Im Deckel dieses untersten Gefässes ist bey I eine Oefnung und von derselben steigt eine andre Röhre IK durch den Boden des Heronsballes hinauf bis K nahe beym Deckel desselben. Gefässe und Röhren müssen an sich recht dichte auch die Stellen, wo die Röhren durch Boden und Deckel der Gefässe hindurch geführt sind, gegen den Zugang der Luft wohl verwahrt seyn. Die Röhren selbst dienen zugleich als Stützen, den Heronsball AB mit seiner Schüssel in der nöthigen Höhe über CD

119 Fig.

CD zu tragen, womit man zu desto mehrerer Sicherheit wohl die dritte Stütze verbindet, die jedoch als Röhre nicht weiter nöthig ist.

Wasser, das in die obere Schüssel gegossen wird, läuft durch die Oefnung G die Röhre GH herab, und steigt in dem untern Gefäß CD nach und nach höher; hiedurch drückt es die in dem Raum CPQ darüber befindliche Luft zusammen, wovon also ein Theil durch die Oefnung I in der Röhre IK hinauf steigt, und die im Heronsball befindliche Luft im Raum ARSO ebenfalls verdichtet. Die so verdichtete Luft treibt hiernächst das Wasser in die Röhre EF hinein, wodurch es wie sonst durch die Röhre im Heronsball ausspritzt.

65 §.

Die Oefnung F, durch welche das Wasser aus dem Heronsball oder Heronsbrunnen ausspritzt, ist in Vergleichung mit den Querschnitten des Gefässes, worin die Springröhre steckt, sehr klein, und die Federkraft der eingeschlossenen Luft ist gegeben: man soll die Geschwindigkeit des ausspritzenden Wassers finden.

Aufl. Wenn h die Höhe einer Wassersäule bezeichnet, die mit der natürlichen Federkraft der Luft im Gleichgewicht ist; so sey $m \cdot h$ die Höhe für die Federkraft der im Heronsball oder Heronsbrunnen eingeschlossenen Luft, und $m > 1$. Dies vorausgesetzt, leidet die Wasserfläche RS einen Druck $= RS \cdot m \cdot h$, und ein Theil dieses Drucks $= RS \cdot h$ ist mit dem Druck der natürlichen äussern Luft gegen die Oefnung E, oder die höchste Fläche des in der Röhre EF hineintretenden Wassers im Gleichgewicht. Demnach leidet RS einen Druck $= RS \cdot (m - 1) h$, dem kein

andrer

andrer entgegen gesetzt ist, und es ist eben soviel, als wenn ein Stempel mit dieser Gewalt gegen die Wasserfläche RS preßte. Wenn also LE $= f$ gesetzt wird, so erhellet, daß die Geschwindigkeit des durch F springenden Wassers der Höhe $(m-1)h-f$ zugehöre, und daß diese Geschwindigkeit $= 2\sqrt{g\,(m-1)\,h-f)}$ gefunden werde.

Es sey die Höhe der Wasserfläche in der obern Schüssel AW des Heronsbrunnen über der Wasserfläche PQ im untern Gefäß $= k$, so ist die Federkraft der eingeschlossenen Luft über PQ und RS mit der Federkraft der äussern natürlichen Luft, und mit der Wassersäule NM, deren Höhe $= k$ ist, im Gleichgewicht: mithin ist $mh = h + k$, und $(m-1)h = k$. Dies wäre demnach die Höhe, um welche das aus dem Heronsbrunn springende Wasser über der Wasserfläche RS steigen würde, wenn sonst keine Hindernisse, und vornemlich der Widerstand der äussern Luft die Bewegung verzögerten.

66 §.

Eine sehr starke Verdichtung der Luft im Heronsball, oder einem ähnlichen Gefäß, das genugsame Stärke hat, läßt sich auf folgende Art zuwege bringen. Man verbindet es vermittelst der Seitenröhre GHKI mit einer Druckwasserpumpe damit das Was- 118 Fig.
ser, welches der Stempel aus dem Stiefel durch die Seitenröhre und das davor liegende Ventil GH wegdrückt in den Heronsball trete. Indem solchergestalt das Wasser darin höher steigt, treibt es die darin befindliche Luft über sich hinauf und preßt sie in einen engern Raum zusammen, als sie vorher im natürlichen Zustande einnahm, da sie durch den Raum des ganzen Gefässes ausgebreitet war. Die Springröhre wird

alsdenn vermittelſt des Hahnen oder auf andre Art ſo lange verſchloſſen gehalten, bis die Luft hinlänglich iſt verdichtet worden. Wenn die Kraft am Stempel der Pumpe ſo groß iſt, als das Gewicht einer Waſſerſäule über ſeiner Grundfläche in der Höhe k, ſo läßt ſich vermittelſt der Pumpe die Verdichtung der Luft ſoweit treiben, daß ihre Federkraft mit einer Waſſerſäule von eben der Höhe das Gleichgewicht hält, aber nicht weiter: denn eigentlich iſt dies nur die äuſſerſte Gränze. Bey Eröfnung der Springröhre würde nun auch das Waſſer mit der Geſchwindigkeit $k-f$ hervorſprützen, und wofern bey fortgeſetzter Arbeit der Pumpe beſtändig ſoviel Waſſer zugeführet werden kann, als ausſprützt, ſo wird dadurch zugleich die Luft in dem zuſammen gepreßten Zuſtande erhalten, und das ſpringende Waſſer ſetzt ſeine Bewegung mit einerley Geſchwindigkeit ſo lange fort, als die Bearbeitung der Pumpe fortgeſetzt wird. Bey Feuerſpritzen auch wohl bey andern Waſſerdruckwerken bringt man auf dieſe Art den Heronsball unter dem Nahmen des Windkeſſels aus mehr als einem Grunde mit Vortheil an, wovon die Maſchinenlehre mehr Nachricht geben wird.

Die ersten Gründe der Maschinenlehre.

Der I. Abschnitt.

Das Allgemeine der Theorie vom Maschinen-Wesen.

1 §.

Zu den mancherley theils allgemeinern theils mehr eingeschränkten Bedeutungen des Worts Mechanik gehört auch diese, daß dadurch oft vornemlich die Lehre von den Maschinen verstanden wird, obgleich diese Lehre eigentlich nur eine von den wichtigsten besondern Anwendungen derjenigen Wissenschaften ist, die bisher unter dem allgemeinen Nahmen der mechanischen Wissenschaften sind abgehandelt werden. Ausser der Beschaffenheit der Theile, woraus eine Maschine zusammengesetzt ist, und der Verbindung dieser Theile unter einander, kommt es bey derselben auf den Effect an, den sie leisten soll, und hiernächst auf die an derselben angebrachte Kraft, welche vermittelst der Maschine den verlangten Effect zu Stande bringen soll. Was die Theile betrift, woraus man eine Maschine zusammensetzt, so kennt man den Hebel, die Rolle, das Rad an der Axe, den Keil und die Schraube schon aus dem 142 §. der Statik unter dem Nahmen der einfachen Maschi-

nen

nen. Werden von diesen einige so mit einander in Verbindung gebracht, daß eine der andern ihre Bewegung mittheilen, und keine davon in Bewegung kommen kann, ohne die übrigen mit in Bewegung zu setzen; so entsteht eine zusammengesetzte Maschine. Was ferner den Effect der Maschine betrift, so will man entweder nur einen starken Druck zuwege bringen, wie solches bey allen Arten von Pressen die Absicht ist, oder man will körperliche Massen mit Vortheil und nach gewissen Gesetzen bewegen; da dann die Maschine mit in Bewegung gebracht, und so lange es die jedesmahlige Absicht erfordert, in Bewegung erhalten werden muß. Der Kräfte, wodurch Maschinen in Bewegung gebracht und erhalten werden können, giebt es mancherley Arten. Dahin gehören Gewichte, die man an der Maschine aufhängt, gespannte elastische Stahlfedern, die, wenn sie schneckenförmig gewunden sind, sich wieder aufzudrehen streben. Menschen und Thiere können eine Maschine durch ziehen, stossen und treten bewegen: auch kann man die Einrichtung machen, daß die Maschine durch den Stoß eines fliessenden Wassers oder des Windes, auch wohl durch die Gewalt elastischer Dämpfe ihre Bewegung erhält.

2 §.

Alle dergleichen Kräfte, welche eine Maschine zu bewegen dienen können, lassen sich in zwo Classen bringen. Einige derselben wirken auf die Maschine beständig mit gleicher Stärke, sie mögen selbige allerst in Bewegung setzen, oder sie in der schon mitgetheilten Bewegung erhalten, die Maschine mag sich schnell oder langsam bewegen: andre aber wirken nach Art veränderlicher Kräfte, und die von ihnen herrührende

rende Beschleunigung wird desto geringer, je mehr die Geschwindigkeit der Maschine zunimmt. Zur ersten Classe gehören die Gewichte, zur letzten aber die Kräfte der Menschen und Thiere, imgleichen diejenigen, welche vom Wind- und Wasserstoß ihren Ursprung haben. Ein unterschlächtiges Wasserrad an einer gemeinen Kornmühle, ist eine so bekannte Sache, daß es hier am besten als ein Beyspiel zur Erläuterung dienen kann, obgleich die Einrichtung desselben allererst unten mit mehrerem wird beschrieben werden. Im ersten Augenblick, da die unterste noch ruhende Schaufel des Rades den Stoß des darunter wegfliessenden Wassers senkrecht auffängt, leidet sie einen Druck, der so groß ist, als das Gewicht einer Wassersäule, deren Grundfläche die Schaufel und deren Höhe so groß ist, als die der Geschwindigkeit des Wassers zugehörige Höhe. (36 §. Mech.) Kommt nun das Rad in Bewegung, so ist der Wasserstoß gegen die nachfolgenden Schaufeln um deßwillen schwächer, weil sie selbst schon in Bewegung sind, und das Wasser nur mit seiner relativen Geschwindigkeit dagegen wirken kann. (42 §. Mech.) Käme das Rad in einen so schnellen Umlauf, daß die Schaufeln mit eben der Geschwindigkeit auswichen, womit ihnen das Wasser folgt: so hätte nun der Wasserstoß gar keine Wirkung mehr, es würde aller Druck des unter dem Rade wegfliessenden Wassers gegen die Schaufeln aufhören.

3 §.

Dies letztere könnte nur erfolgen, wenn das Rad für sich allein umliefe, und mit den übrigen Theilen der Maschine nicht in Verbindung wäre, mithin selbige nicht zugleich mit in Bewegung setzte, also auch kein

kein Widerstand da wäre, der den Umlauf zu hindern strebte. Ist das Rad mit den übrigen Theilen der Maschine in Verbindung, und hat überdem die Maschine eine Last zu heben, oder doch sonst einen Widerstand zu überwinden; so können die Schaufeln des Rades nie in eine Bewegung kommen, die eben so schnell, als die Bewegung des dagegen strömenden Wassers ist; vielmehr wird der Erfolg, welchen die Wirkung des Wasserstosses gegen die Schaufeln nach sich ziehet, dieser seyn. Man setze die Stärke des ersten Stosses gegen die unterste noch ruhende Schaufel, (oder wenn ihrer mehrere zugleich den Wasserstoß auffangen, gegen alle zusammen) sogleich nach Eröfnung des Schutzbrettes, sey so groß, als der Druck eines Gewichts von 150 Pfunden, und die Maschine könne nicht in Bewegung kommen, ohne eine Last zu heben, oder sonst einen Widerstand zu überwinden, der mit jenem Druck von 150 Pfunden grade im Gleichgewicht ist: so ist begreiflich, daß die Maschine gar nicht in Bewegung kommen werde. Das Wasser wird, weil alle, mithin auch die untern Schaufeln in Ruhe bleiben, nun beständig mit einer Gawalt von 150 Pfunden gegen die untere Schaufel drücken, die Stärke dieses Drucks wird sich nicht ändern, eine Bewegung wird aber nicht erfolgen, weil die Kraft des Wasserstosses kein Uebergewicht über die zu hebende Last hat. Wofern im Gegentheil die zu hebende Last, oder was auch sonst für ein Widerstand der Bewegung vorhanden seyn mag, nur so groß ist, daß diese Last mit einem Druck von 100 Pfunden gegen die Schaufel des Wasserrades schon im Gleichgewicht wäre, so wird der Ueberschuß von 50 Pfund der Kraft des Wasserstosses über die 100 Pfund, welche mit

mit der Last im Gleichgewicht sind, das Wasserrad, und mit demselben die ganze Maschine in Bewegung setzen. Aber auch eben dies wird den Erfolg haben, daß die Stärke des Wasserdrucks gegen die nun schon umlaufenden Schaufeln kleiner als 150 Pfund wird, auch so lange abnimmt, als die Geschwindigkeit der umlaufenden Schaufeln zunimmt. Wenn endlich die Schaufeln eine solche Geschwindigkeit erlangt haben, wobey die Stärke des Wasserstosses nur noch 100 Pfund beträgt, so kann die Geschwindigkeit der Schaufeln nicht mehr zunehmen, weil diese 100 Pfund mit der Last im beständigen Gleichgewicht bleiben. Die nun schon in Bewegung gesetzten Theile der Maschine bleiben vermöge ihrer Trägheit von selbst in diesem Zustande der Bewegung, und an sich wäre keine Kraft nöthig, sie darin zu erhalten: nur wegen der unvermeidlichen Friction würde diese Bewegung bald wieder langsamer werden, und die ganze Maschine zum Stillstand kommen, wenn die Kraft zu wirken aufhörte, wie sogleich erfolgt, wenn durch Schliessung des Schutzbretts der Wasserzufluß gehemmet wird. So lange aber der Wasserzufluß unverändert bleibt, kann solches nicht erfolgen. Denn sobald man annimmt, die Bewegung fange wieder an, langsamer zu werden, sobald ist auch der nothwendige Erfolg dieser, daß die Stärke des Wasserstosses gegen die nun wieder langsamer umlaufenden Schaufeln aufs neue zunimmt: demnach überwiegt die Kraft auch wiederum die Last, und beschleuniget um deßwillen die Bewegung des Rades. Mithin kann die Geschwindigkeit der Bewegung des Rades nicht abnehmen, ohne daß die zugleich wieder zunehmende Kraft sie nicht aufs neue beschleunigte, das

heißt:

heißt: die Geschwindigkeit der Bewegung muß von nun an einerley, und die Bewegung der Maschine gleichförmig bleiben. Die Schriftsteller von der Mechanik drücken das durch die Redensart aus: die Maschine sey nunmehr im **Beharrungszustande.**

4 §.

Die Effecte sind zwar sehr mannigfaltig, die man durch allerley Arten von Maschinen zuwege bringen will: hier ist indessen die Rede vornemlich nur von solchen Maschinen, die in der Hauptabsicht mit einander übereinkommen, daß man mit möglichster Ersparung der Zeit und Kosten etwas ausrichten will, was sonst mehr Zeit und Aufwand erfodern würde, ja vielleicht ohne Verstärkung der gebrauchten Kräfte vermittelst mechanischer Verrichtungen gar nicht durch Menschenkräfte ausgerichtet werden könnte. Hieher gehören zuerst alle **Heb- und Zugmaschinen,** die dazu bestimmt sind, Lasten zu heben, oder doch von einem Ort zum andern mit Vortheil zu bewegen. Ferner alle Arten von **Mühlen,** die vermittelst einer geschickten Verbindung von Rad und Getriebe mit andern mechanischen Werkzeugen so angeordnet sind, daß dadurch allerhand Sachen, die zu einem gewissen besondern Gebrauch bestimmt sind, in kürzerer Zeit und in grösserer Menge zubereitet werden können, als wenn es durch Menschenhände allein ausgerichtet werden sollte; wovon die gemeinen Kornmühlen die bekanntesten Beyspiele sind. Noch eine eigene Hauptclasse von Maschinen machen die **Wasserkünste** aus, die dazu dienen sollen, das Wasser auf eine verlangte Höhe, oder doch wenigstens von einem Ort zum andern mit Vortheil zu bringen, wenn der letzte Ort höher,

höher, als der erste liegt, und wegen des fehlenden Gefälles kein Wasserleitungs-Canal angelegt werden kann, worin das Wasser von selbst von einem Ort zum andern fliessen würde.

5 §.

Die meisten Maschinen dieser Art, vornemlich solche, die zu den beyden letzten Classen gehören, wirken eine zeitlang ununterbrochen fort, und haben während der Zeit entweder völlig, oder doch beynahe einerley Widerstand zu überwinden, welcher der Bewegung der Maschine eben so entgegen wirkt, wie ein Gewicht, oder jede Last thun würde, die man auf eine gewisse Höhe bringen will. Man dencke hiebey an eine gemeine Hauswinde, oder jede andre Winde, Haspel oder Göpel, vermittelst welcher ein Sack mit Getreyde, oder ein Ballen irgend einer andern schweren Waare, aus dem untersten Stockwerk eines Hauses in eines der obersten hinauf gewunden wird. Die Last hängt an einem Seil herab, das Seil wird nach und nach kürzer und die Last steigt höher. Während der Zeit, darin sie steigt, strebt sie beständig herab zu fallen, und widerstehet der Bewegung der Winde so lange mit einerley Gewalt, als sie noch am Seil herab hängt. Bey andern Maschinen ist keine so sichtbar herab hängende Last vorhanden, die in die Höhe gezogen werden soll, vielmehr hat die Maschine andre Arten des Widerstandes zu überwinden. Der bewegliche Mühlstein, oder der sogenannte Läufer einer Kornmühle, soll das zwischen ihm und dem darunter befindlichen Bodenstein liegende Getreyde zerreiben; dies kann nicht geschehen, ohne daß die Getreyde-Körner den Umlauf des Steins zu hemmen streben, und dieser Widerstand bleibt so lange der Stein mit einerley

Geschwindigkeit umläuft, und einerley überall gleichförmig vertheilte Menge Körner darunter liegt, wenigstens beynahe von einerley Grösse.

Man stelle sich den Läufer wie eine für sich nicht schwere sondern bloß träge und übrigens völlig frey umlaufende Welle, wie die lothrecht stehende Welle einer Winde oder eines Göpels vor, um welche ein Seil gewunden und über eine seitwärts befindliche Rolle geführt ist, so daß an diesem Seil ein Gewicht herab hängen kann. Wird nun der Stein durch die Maschine so in Umlauf gesetzet, daß sich das Seil auf denselben hinauf wickeln muß; so wird das davon herabhängende Gewicht heraufgezogen, es widerstehet dem Umlauf des Steins auf ähnliche Art, wie vorher die unter ihm liegenden Getreyde-Körner, und es muß möglich seyn, ein Gewicht anzugeben, daß bey dieser Anordnung dem Umlauf des Steins eben so widerstehen würde, wie die darunter liegenden Getreyde-Körner demselben widerstehen. Demnach kann man sich in diesem und andern ähnlichen Fällen **den Effect der Maschine allemahl so vorstellen, als wenn sie in gewisser Zeit eine gewisse Last auf eine gegebene Höhe herauf brächte.** Hätte z. E. der Stein im Umfang 15 Fuß, und liefe derselbe in $1\frac{1}{2}$ Secunden einmahl um: wäre ferner der Widerstand der Getreyde-Körner so groß, als wenn auf die vorhin beschriebene Art ein Gewicht von 100 Pfunden am Umfang des Steins angebracht wäre, das seinen Umlauf zu hindern strebte: so würde die Mühle eben das bey Zermalmung der Körner ausrichten, was sie ausrichtete, wenn sie ein Gewicht von 100 Pfunden heraufzöge, und selbiges alle $1\frac{1}{2}$

Secunden 15 Fuß, oder alle Secunden 10 Fuß höher brächte.

6 §.

Bey allen Arten von Winden, bey Göpeln und Treibmaschinen in Bergwerken, bestehet der Effect wirklich darin, daß Lasten wirklich in die Höhe gezogen werden. Man hat Winden, welche die Einrichtung haben, daß um eine Welle zwey verschiedene Seile auf entgegengesetzte Art gewunden sind, so daß sich das eine Seil während der Zeit abwickelt, wenn sich das andre aufwickelt. Hängt alsdenn an jedem Seil ein Korb, ein Kasten, oder sonst ein Behältniß herab, davon das eine unten während der Zeit belastet wird, worin das andre sich entweder selbst vermittelst einer mechanischen Einrichtung, oder durch Menschenhülfe, oben ausleert; so sinkt das ledige Behältniß in der Zeit herab, worin das belastete hinauf steigt, und es ist allemahl ein belastetes und ein lediges Behältniß unterweges. Eine Maschine dieser Art wirkt zwar nicht völlig ununterbrochen, weil etwas Zeit erfodert wird, das untere Behältniß zu belasten, und zugleich das obere auszuleeren: man kann indessen diese Zeit entweder gänzlich abrechnen, oder sie zu derjenigen Zeit zurechnen, welche die Last jedesmahl unterweges zubringt, mithin in allen Fällen die Sache so betrachten, als wenn die Maschine ununterbrochen wirkte. Bey Wasserkünsten läßt sich die Einrichtung machen, daß Eimer oder Schöpfkasten sich unten selbst füllen, und oben von selbst ausleeren, so daß damit eben keine Zeit verlohren geht, wenn alles recht gemacht ist, wiewohl alle dergleichen Arten der Künste den unten weiter zu beschreibenden Pumpenkünsten nachstehen. Eine Kunst, die eine Anzahl Pumpen

Paarweise treibt, wirkt ebenfalls in so fern ununterbrochen, in wiefern die halbe Anzahl der Pumpen allemahl in der Zeit schöpft, worin die andre halbe Anzahl des Wassers in die Höhe treibt.

Die Beurtheilung des Effects einer solchen Maschine, die ihre Wirkung ununterbrochen fortsetzt, kommt demnach nur darauf an, daß man wissen muß, wie groß die Last sey, die sie in einer gewissen Zeit, etwa in einer Stunde, einer Minute, einer Secunde, auf die verlangte Höhe bringt: man weiß alsdenn zugleich, daß in halb sovieler Zeit halb soviel, in doppelter Zeit doppelt soviel Last auf dieselbe Höhe gebracht wird. Es ist dabey gleichgültig, ob die Grösse der Last nach ihrem Gewicht, oder nach ihrer Menge im cubischen Maaß geschätzt wird. Andern Maschinen, die nicht so wie Pumpenkünste ununterbrochen einen Theil der Last oben in der höchsten Stelle des Weges, um welchen die Last steigt, gleichsam abliefern, ist diese Vorstellung nicht so angemessen. Weil jedoch allemahl der Beharrungsstand der Maschine vorausgesetzt wird, so steigt die Last gleichförmig, sie legt in halber Zeit den halben Weg, in doppelter Zeit den doppelten Weg zurück. Weiß man, daß eine Pumpenkunst alle Secunden 3 Pfund Wasser 100 Fuß hoch treibt, so bringt sie alle Stunden 3600mal 3 Pfund, oder 10800 Pfund Wasser eben so hoch. Wenn dagegen der Bergwerks-Göpel jedesmahl in 5 Minuten eine Tonne Erz 600 Pfund schwer, 500 Fuß hoch von unten hinauf zieht, so machen die 5 Minuten 300 Secunden aus; und wenn man die Last von 600 Pfunden auf 300 Secunden vertheilte, so hiesse das: alle Secunden langen oben 2 Pfund Erz an. Allein das erfolgt nicht, 5 Minuten vergehen,

gehen, und es langt oben gar nichts an, nach verflossenen 5 Minuten aber sind 600 Pfund Erz auf einmahl oben. Indessen wächst hier die Höhe, um welche die Last steigt, in einerley Verhältniß mit der Zeit: sie steigt in 1 Minute 100 Fuß, in 2, 3, 4 Minuten 200, 300, 400 Fuß hoch. Uebrigens muß doch die Maschine eben so arbeiten, als wenn sie eine Pumpenkunst triebe, die alle Secunden 2 Pfund Wasser 500 Fuß hoch brächte: deßwegen ist es eben nicht nothwendig, bey der Beurtheilung des Effects einer Maschine im allgemeinen, diese beyden Fälle jedesmahl zu unterscheiden.

7 §.

Diesen Erinnerungen gemäß hat man einen bestimmten Begriff von dem Effect einer Maschine, wenn man die Grösse derjenigen Last kennet, welche eine Maschine, nachdem sie in den Beharrungsstand gekommen ist, in einer Secunde Zeit auf eine bekannte Höhe bringt. Der von der Last in einer Secunde Zeit zurückgelegte Weg ist ihre Geschwindigkeit, weil die Bewegung gleichförmig angenommen wird, und das Product der Last in ihre Geschwindigkeit ist die Grösse der Bewegung, (56 §. Mech.) welche ihr die Maschine mittheilen kann. Demnach versteht man am natürlichsten durch die Grösse des Effects einer Maschine das Product der widerstehenden Last in den Weg, welchen sie in einer Secunde zurück legt, nachdem der Gang der Maschine gleichförmig geworden ist. Wenn z. E. alle Secunden 2 Pfund Last in der Höhe von 500 Fuß entweder würklich anlangen, oder doch die Maschine so arbeitet, daß nach Verlauf etlicher Stunden, oder eines Tages eben soviel Last herauf gebracht ist, als wenn in jeder Secunde 2 Pfund Last oben angelangt wären, so drückt die Zahl 2mahl 500 oder 1000 die Grösse des Effects aus, und das will sagen: der Effect der Maschine ist 1000mahl grösser, als der Effect einer Maschine wäre, die in einer Secunde nur 1 Pfund Last nur 1 Fuß hoch brächte. Dabey ist es ganz gleichgültig, ob man die Grösse der Last nach dem Gewicht in Pfunden, oder nach ihrem körperlichen Raum im Cubicmaaß ausdrücken will. Zwey Pfund Wasser betragen ohngefähr $\frac{1}{35}$ Cubicfuß im Pariser Maaß und Gewicht, (39 §. Hydrostat.) also kann man auch $\frac{1}{35}$ C. F. mit 500 Fuß Höhe multipliciren, und die herauskommende Zahl $14\frac{2}{7}$ zeigt an, der Effect der Maschine sey $14\frac{2}{7}$mahl grösser, als der Effect einer andern Maschine wäre, die 1 Cubicfuß Wasser alle Secunden 1 Fuß hoch brächte.

8 §.

Wenn die Kraft anfangs die Maschine in Bewegung setzen soll; so muß das statische Moment der Kraft das Moment des Widerstandes übertreffen: denn wären die Momente gleich, so könnte keine Bewegung erfolgen. Weil aber die Bewegung der Maschine nach und nach gleichförmig und die Beschleunigung immer geringer wird, so muß die Differenz der Momente abnehmen. Sobald endlich der Gang der Maschine gleichförmig wird, müssen beyde Momente gleich werden, weil die Schnelligkeit der Maschine nothwendig so lange zunehmen muß, als eine Uebermucht da ist. Das Moment der Kraft wird also abnehmen, oder das Moment des Widerstandes wachsen, oder auch beydes zugleich geschehen müssen, bis endlich beyde Momente gleich werden. Wenn aber

beyde

beyde Momente gleich sind, so verhalten sich Kraft und Widerstand umgekehrt, wie die Wege, die sie bey erfolgter Bewegung zugleich durchlaufen. (107 §. St.) Sind also V und M Kraft und Last, oder M jeder andre Widerstand, den man durch ein Gewicht ausdrücken kann; sind überdem α und β die Wege, welche Kraft und Last in gleicher Zeit zurück legen: so ist $V.\alpha = M.\beta$. Man kann ein für allemahl durch α und β die in einer Secunde zurück gelegten Wege verstehen, so sind es die Geschwindigkeiten der Stellen, woran Kraft und Last, jene unmittelbar ihre Wirkung, und diese den entgegen gesetzten Widerstand äussern.

Hiebey betrachtet man die Geschwindigkeit desjenigen Puncts der Maschine, woran die Kraft, welche die Maschine treibt, unmittelbar angebracht ist, gewöhnlich als die Geschwindigkeit der Kraft. Die Einrichtung kann von der Art seyn, daß die Kraft, wenn sie ein Gewicht ist, wirklich mit dieser Geschwindigkeit sinkt. Indessen mag die Kraft von einer Art seyn, von welcher sie wolle, so kann man sich doch allemahl die Sache so vorstellen, als wenn sie bey wirklicher Bewegung der Maschine mit demjenigen Punct, den sie unmittelbar angreift, zugleich fortgienge, und gewöhnlich macht man auch die Sache so vorstellig. Deutlicher würde indessen seyn, wenn man statt des Ausdrucks: Geschwindigkeit der Kraft, den Ausdruck: Geschwindigkeit des angegriffenen Puncts brauchte. Wenn das Wasser ein Mühlrad treibt, so ist der Druck des unter dem Rade wegfliessenden Wassers gegen die Schaufeln die angebrachte Kraft. Wenn alles Wasser mit gleicher Geschwindigkeit anschlägt, so geht die mittlere

Richtung des Drucks durch die Mitte der Schaufeln, und man muß diesen Punct, so wie allemahl den Mittelpunct des Drucks, für die Stelle annehmen, welche die Kraft unmittelbar angreift. Die Geschwindigkeit dieses Puncts ist es eigentlich, was man sich als die **Geschwindigkeit der Kraft** vorstellet. Zwar ändert sich beständig die Stelle am Umfang des Rades, welche die Kraft unmittelbar angreift: in dem Augenblick, das das Wasser eine der untern Schaufeln trift, leidet die Schaufel Druck, aber der Druck hört auf, wenn die Schaufel soweit ausgewichen ist, daß sie vom Wasser nicht weiter getroffen werden kann. Weil aber mittlerweile die nächstfolgende Schaufel in die Lage gekommen ist, worin sie den Wasserstoß auffängt, so wird begreiflich, daß die Geschwindigkeit der nach und nach angegriffenen Stellen als die Geschwindigkeit der Kraft betrachtet werden könne.

Mit der Last, und was man sich als Geschwindigkeit der Last vorstellet, hat es eine ähnliche Bewandniß. Zuweilen ist die Last wirklich ein herabhängendes Gewicht, das mit eben der Geschwindigkeit steigt. Wenn es aber ein andrer Widerstand ist, dessen Grösse man durch ein Gewicht ausdrückt, welches an einer gegebenen Stelle der Maschine angebracht ihrer Bewegung eben so widerstehen würde; so ist die **Geschwindigkeit der Last** nichts anders als die Geschwindigkeit des Puncts, welchen man sich als denjenigen vorstellt, der dem Widerstande unmittelbar ausgesetzt ist.

9 §.

Die Geschwindigkeit der Kraft oder vielmehr des angegriffenen Puncts für den Beharrungs-

harrungsstand der Maschine ist gegeben, und die Kraft ist am Umfang eines Rades in der Richtung der Tangente angebracht: man soll finden, wievielmahl das Rad in einer gegebenen Zeit umläuft.

Aufl. Es sey die Geschwindigkeit der Kraft $= \alpha$, des Rades Halbmesser $= r$, die Umlaufszeit des Rades $= \vartheta$; so ist α ein Bogen, den der angegriffene Punct in einer Secunde zurück leget, so wie eben dieser Punct in der Zeit ϑ einen Weg zurück legt, der dem Umfang des Rades $2\pi r$ gleich ist. Demnach hat man $\alpha = \frac{2\pi r}{\vartheta}$, und $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha}$. (2 §. Mech.) In der Zeit ϑ läuft also das Rad einmahl um, in der Zeit 2ϑ 2mahl, in der Zeit $\frac{1}{2}\vartheta$, oder $\frac{1}{3}\vartheta$ aber $\frac{1}{2}$mahl oder $\frac{1}{3}$mahl. Das letzte will soviel sagen: in der Zeit $\frac{1}{2}\vartheta$, $\frac{1}{3}\vartheta$, macht das Rad einen halben Umlauf, oder ein Drittheil seines Umlaufs, so wie es in der Zeit 2ϑ zwey ganze Umläufe macht. Nun sey T jede andre gegebene Zeit, und $T = n . \vartheta$, so macht das Rad n Umläufe in der Zeit T, und man hat $n = \frac{T}{\vartheta}$, also $n = \frac{T . \alpha}{2\pi r}$.

Es sey μ die Zahl der Umläufe in 1 Secunde, so ist $T = 1''$, also $\mu = \frac{\alpha}{2\pi r}$ mithin auch $\mu = \frac{1}{\vartheta}$. Man kann also die Geschwindigkeit der Kraft durch die Zahl der Umläufe in einer Secunde ausdrücken, denn jene Gleichung giebt $\alpha = 2\pi\mu r$. Hätte man beobachtet, daß ein Mühlrad in der Zeit T $n$mahl umliefe, so fände man die Geschwindigkeit der Kraft $\alpha = 2\pi nr : T$.

Wenn γ die Winkelgeschwindigkeit des Rades in dem Verstande des 81 §. Mech. bezeichnet, so ist auch $\alpha = \gamma r$, also $\gamma = 2\pi\mu$, und $\mu = \frac{\gamma}{2\pi}$. Demnach verhält sich auch μ wie die Winkelgeschwindigkeit des Rades.

10 §.

Das Product der Kraft in ihre Geschwindigkeit kann auch das **mechanische Moment der Kraft** heissen. Es ist so groß als das Product des Widerstandes in seine Geschwindigkeit, (8 §.) und dies letztere Product kann das **mechanische Moment des Widerstandes** heissen. Eben dies Product ist zugleich der Effect der Maschine für eine Zeitsecunde, (7 §.) und man macht sich nun eben so leicht einen bestimmten Begriff vom Effect einer Maschine für jede andre Zeit, für eine Minute, eine Stunde, u. s. f. Wenn der Widerstand, den die Maschine zu überwinden hat, eine wirkliche Last ist, ein Ballen Waare, den eine Winde, ein Korb mit Erz, den ein Göpel um die Höhe f in der Zeit T hinauf zieht, so ist $\beta = \frac{f}{T}$, und die Gleichung $M\beta = V\alpha$ (8 §.) verwandelt sich in folgende $Mf = V\alpha T$. Jedes dieser beyden Producte giebt den Effect der Maschine für die Zeit T an, wenn T in Secunden ausgedrückt wird. Wirkt die Maschine wenigstens in einem gewissen Verstande so ununterbrochen, wie es im 6 §. ist beschrieben worden, so ist f die unveränderliche Höhe, zu der die Maschine nach und nach immer mehr Masse erhebt, und die Gleichung $M = \frac{V\alpha T}{f}$ giebt die

Menge

Menge der Masse nach dem Gewicht an, welche in der Zeit T auf die Höhe f gebracht wird, wenn man die Kraft V durch ein ihr gleiches Gewicht ausdrückt.

11 §.

Wenn die Maschine ein Räderwerk ist, und die Kraft am Umfang des Hauptrades, die Last am Umfang des letzten Rades beyde nach der Richtung der Tangente angebracht sind; so verhält sich die Anzahl der Umläufe des Hauptrades zur Anzahl der Umläufe des letzten Rades, dessen Umlauf der Widerstand zu hemmen strebt, umgekehrt wie das statische Moment der Last zum statischen Moment der Kraft.

Beweis. Wenn der Widerstand in der Entfernung q von der Axe eines Trillings angebracht, und seine Geschwindigkeit $= \beta$ ist, so ist die Umlaufszeit t des Widerstandes $= \frac{2\pi q}{\beta}$. Wenn eben der Widerstand, oder vielmehr die Stelle, an welcher man denselben angebracht annimmt, in einer Secunde $v$mahl umläuft, so ist $v = \frac{\beta}{2\pi q}$, (9 §.) also auch $v = \frac{1}{t}$, und $\beta = 2\pi v q$. Ist demnach V die Kraft, M der Widerstand, so hat man $vqM = \mu r V$, (8 §.) und das giebt die Zahl $\frac{v}{\mu} = \frac{r \cdot V}{q \cdot M} = \frac{r \cdot \beta}{q \cdot \alpha}$, welche anzeigt, wievielmahl die Welle, wovon der Widerstand angebracht ist, in der Zeit umläuft, worinn das Rad, welches die Kraft umtreibt, einen Umlauf macht.

Eben

Eben diese Zahl $\frac{\nu}{\mu}$ ist demnach auch $= \frac{\vartheta}{t}$, also $\mu\vartheta = \nu t$, wie erfordert wird.

12 §.

Es ist bestimmt, wievielmahl das schnellste Rad einer Maschine umlaufen soll, indem das langsamste einmahl umläuft: man frägt, wieviel Zähne und Triebstecken jedes Rad und Getriebe in solcher Absicht haben müsse.

Aufl. Soll die Maschine nur ein Rad und Getriebe haben, so sey M die Anzahl der Zähne, m die Zahl der Triebstecken. Wenn alsdenn n die Anzahl der Umläufe des Getriebes gegen einen Umlauf des Rades ist, so muß $n = \frac{M}{m}$ seyn. (123 §. Stat.) Demnach wird die Zahl der Zähne und Triebstecken an sich nicht, sondern nur ihr Verhältniß gegen einander bestimmt. Nachdem man also M oder m willkührlich bestimmt, nachdem findet man $M = n \cdot m$, oder $m = M : n$.

Man kann nicht wohl weniger, als 5 Triebstecken nehmen, wofern die Bewegung ordentlich fortgehen soll: also wird dadurch wenigstens eine Gränze bestimmt, unter der die Anzahl der Triebstecken nicht genommen werden darf, ob man gleich gar wohl mehrere nehmen kann.

Sollen mehr Räder in damit zusammen gehörige Getriebe greifen, so wird die Frage noch mehr unbestimmt. Wenn nemlich L, Λ, M, die Zahlen der Zähne für drey Räder, und l, λ, m, die Zahlen der

Triebstecken, für die nach der Ordnung damit zusammen gehörigen Getriebe sind; wenn ferner n die Zahl der Umläufe des letzten Getriebes gegen einen Umlauf des ersten Rades ist; so hat man $\frac{L}{l} \cdot \frac{\Lambda}{\lambda} \cdot \frac{M}{m} = n$.

Demnach zerfälle man die Zahl n in soviele Factoren als man Räder und damit zusammengehörige Getriebe haben will: so drückt jeder Factor die Zahl der Umläufe eines Getriebes gegen einen Umlauf des in dasselbe eingreifenden Rades aus. Wenn alsdenn ζ, η, ϑ, diese Factoren sind, und $n = \zeta \cdot \eta \cdot \vartheta$ ist; so setze man $\frac{L}{l} = \zeta$, $\frac{\Lambda}{\lambda} = \eta$, $\frac{M}{m} = \vartheta$, und man erhält $L = \zeta \cdot l$, $\Lambda = \eta \cdot \lambda$, $M = \vartheta \cdot m$, als die Zahlen für die Zähne, wenn die Zahlen für die Triebstecken willkührlich angenommen werden.

13 §.

Wenn es nur darauf ankommt, die Maschine so anzuordnen, daß ein Getriebe mit seiner Welle eine gegebene Zahl Umläufe in der Zeit mache, worin das Rad einmahl umläuft, so läßt sich solches allemahl schon mit einem Rade und Getriebe zuwege bringen. Soll z. E. das Getriebe 60 mahl in der Zeit umlaufen, worin das Rad einmahl umläuft, so muß das Rad 60mahl mehr Zähne haben, als das Getriebe Stecken hat, also wenigstens 300 Zähne, weil das Getriebe nicht weniger als 5 Stecken erhalten kann. Allein das Rad müste alsdenn sehr groß seyn, vornemlich, wenn Zahn und Getriebe einen starken Druck auszustehen haben, und deßwegen Zähne und Triebstecken etwas Dick seyn müssen, damit sie nicht leicht zerbrechen. Erwählt man in solchen Fällen eine mehr als einmahlige Abwechselung von Rad und Getriebe, so erhält man den Vortheil, daß die Maschine viel kleiner wird. Weil $60 = 10 \times 6$ ist; so kann man zwey Räder mit getrieben brauchen. Will man überdem bey 5 Triebstecken bleiben, so muß das erste Rad $10 \times 5 = 50$, das zweyte Rad $6 \times 5 = 30$ Zähne haben. Wenn also die übrigen Umstände einerley sind, so wird das gröste von diesen beyden Rädern mit 50 Zähnen nur um den 6sten Theil so hoch, als das Rad von 300 Zähnen, welches man haben müste, wenn Rad und Getriebe nur einmahl abwechseln sollten. Denn die Peripherien dieser Räder, also auch ihre Durchmesser würden sich wie die Zahlen 300 und 50 verhalten.

14 §.

Wenn die Zahl der Triebstecken in der Zahl der Zähne aufgeht, so wird die Zahl der Umläufe des Getriebes gegen einen Umlauf des Rades eine ganze Zahl: man siehet aber wohl, daß dies eben nicht nothwendig sey. Das Getriebe würde $6\frac{3}{4}$ Umläufe gegen einen Umlauf des Rades machen, wenn das Rad 54 Zähne, und das Getriebe 8 Stecken hätte. Geht die Zahl der Triebstecken in der Zahl der Zähne auf, so kommen an jeden Triebstock beym Umlauf allemahl dieselben Zähne des Rades: im Gegentheil aber kommen mehr und wohl alle Zähne abwechselnd an einerley Triebstock. Das letzte wird um deßwillen gewöhnlich für besser gehalten, weil bey der Anordnung Zähne und Getriebe sich besser gegen einander abschleifen, wodurch ihre Gestalt nach und nach vollkommener und die Bewegung freyer wird. Giebt man den Zähnen und Triebstecken gleich anfangs eine solche Krümme, wie erforderlich ist, damit Zahn und Triebstecken sich mehr über einander wegwälzen, als an einander fortschieben, um das Reiben an einander möglichst zu verhindern; so ist es um soviel besser, und es bedarf dessen nicht, daß die Maschine so lange schütternd und stotternd laufe, bis Zähne und Triebstecken sich an einander erst abgeschliffen haben. Man weiß nun, daß den Zähnen in solcher Absicht nicht die Krümme des Kreises, wie die ältern Maschinenbücher vorschreiben, sondern die Krümme der Epicycloide gegeben werden muß, einer Linie, von deren Natur die höhere Geometrie mehr Unterricht giebt. Römer hat dies zuerst gewiesen, und man hat seine Theorie, da wo man ihr bey Maschinen im Grossen gefolgt ist, sehr gut befunden. H. H. Kästner erzählt im zweyten Theil seiner Mathem. Anfangsgründe, im 76 §. der Statik, daß man sich von der Wichtigkeit und Brauchbarkeit dieser Art, den Zähnen und Getrieben die rechte Gestalt zu geben, bey den Maschinen des Herrn Bergraths Borlach in den Salzwerken zu Kösen bey Naumburg sattsam überzeugen könne.

15 §.

Die Grösse der Räder und Getriebe mit ihren Zähnen und Stecken richtet sich, wie leicht zu erachten ist, nach der Stärke des Drucks, den sie auszustehen haben, wenn Kraft und Widerstand gehörig angebracht sind, und nach der Festigkeit der Masse, woraus sie verfertiget werden. Weil die Triebstecken diesen Druck öfter, als die Zähne leiden, so müssen sie etwas stärker als die Zähne seyn. Bey grossen Maschinen macht man die Räder und Getriebe aus gutem harten Holz, wie bey den Mühlen, bey andern, wie bey den Uhren, aus Metall. Gewöhnlich nimmt man die Regel an: **die Dicke der Triebstecken müsse sich zu ihrer Zwischenweite, wie 8 : 7 verhalten.** Wenn also die Dicke der Triebstecken bekannt ist, so bestimmt das den Umfang des Getriebes, wofür man hier einen Kreis annimmt, der durch die Mitte der Triebstecken gehet. Es sey δ ihre Dicke, so ist der Bogen zwischen der Mitte zweener nach einander folgender Triebstecken $= \frac{15}{8}\delta$, und wenn ihre Anzahl $= m$ ist, so ist der Umfang des Getriebes $= \frac{15}{8} m\delta$, folglich ihr Durchmesser $= \frac{15}{8} \cdot \frac{m\delta}{\pi}$ (253 §. Geom.) Wenn nun n Umläufe des Getriebes auf einen Umlauf des Rades kommen sollen; so giebt das den Umfang des Rades $= \frac{15}{8} \cdot nm\delta$, wodurch man einen Kreis durch die Mitte der Zähne verstehen muß. Des Rades Höhe oder Durchmesser ist alsdenn $= \frac{15}{8} \cdot \frac{nm\delta}{\pi}$.

Der Bogen zwischen der Mitte zweener nach einander folgender Zähne muß so groß seyn, als der Bogen zwischen der Mitte zweener nach einander folgender Triebstecken, also $= \frac{15}{8}\delta$. Wenn alsdenn die Dicke des Zahns $= \frac{6\frac{1}{2}}{8}\delta$ genommen wird, so bleibt ihre Zwischenweite $= \frac{8\frac{1}{2}}{8}\delta$. Nach **Belidors** Bericht Architect. Hydraul. I. Buch II. Cap. 318 §. hat man diese Eintheilung durch die Erfahrung gut gefunden; andre Schriftsteller schreiben etwas andre Eintheilung vor. M. s. **Leupolds** Theatr. Machin. Generale

Generale §. 85. L. C. Sturms kurzen Begrif der gesammten Mathesis Part. II. p. 308. u. a. m.

16 §.

Wenn die Kraft, welche der Maschine ihre Bewegung giebt, von der Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle der Maschine abhängt, wie die Kraft des Wasserstosses von der Geschwindigkeit der Schaufeln des Wasserrades; so erhellet, daß auch der Effect der Maschine von eben dieser Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle abhänge. Es ist nemlich $V . \alpha = M . \beta$, (8 §.) und jedes dieser Producte drückt den Effect der Maschine aus. Aber im ersten Anfang der Bewegung, bevor noch der angegriffenen Stelle eine gewisse Geschwindigkeit mitgetheilt ist, hat man $\alpha = 0$, also $V . \alpha = 0$, und die Maschine hat noch gar keinen Effect. Mit α wächst auch $V . \alpha$, obgleich V schon abzunehmen anfängt, wenn α nach und nach grösser wird. Weil es nun eine gewisse Geschwindigkeit giebt, wobey V verschwindet; so verschwindet alsdenn auch $V . \alpha$ zum zweytenmahl. Hieraus läßt sich soviel schliessen, daß zwar anfangs $V . \alpha$ mit α wachse, aber nur so lange, als α eine gewisse Gränze nicht übertrift, daß aber hiernächst $V . \alpha$ wieder abnehme, weil zuletzt, wenn α nach und nach immer grösser wird, $V . \alpha$ verschwinden muß. Demnach muß es eine gewisse Geschwindigkeit α geben, wobey $V . \alpha$ am größten wird, und weil $V . \alpha = M . \beta$ bleibt, so ist auch alsdenn der Effect der Maschine am größten.

17 §.

Es sey V der Druck des Wasserstosses gegen die Schaufeln eines Wasserrades, und man nehme an, daß das Wasser beständig nur eine Schaufel des Rades senkrecht treffe. Die Geschwindigkeit des unter dem Wasserrade weglaufenden Wassers, indem es in die Schaufel trift, sey $= C$, die Geschwindigkeit der ausweichenden Schaufel $= c$, ihre Fläche $= a^2$, der Druck gegen die Schaufel $= p$, so ist $p = a^2 . \frac{(C - c)^2}{4g}$ (24 §. Hydraulik.) $= \frac{a^2 . C^2}{4g} . \left(1 - \frac{c}{C}\right)^2$. Im ersten Augenblick des Stosses, wenn annoch $c = 0$ ist, wird $p = \frac{a^2 . C^2}{4g}$, und wenn man diesen Druck $= P$ setzt, so ist $p = P\left(1 - \frac{c}{C}\right)^2$, und dieser Druck verschwindet, wenn $c = C$ wird. Man schreibe nun c statt α, und nehme $V = P\left(1 - \frac{c}{C}\right)^2$ an, so ist der Effect $V . \alpha$ des Rades $= p\left(1 - \frac{c}{C}\right)^2 . c$. Wäre der Widerstand des Mühlsteins so groß, daß er mit der Kraft $P = \frac{a^2 . C^2}{4g}$ das Gleichgewicht hielte; so bliebe $c = 0$, die Maschine käme gar nicht in Bewegung und hätte gar keinen Effect. Liefe das Wasserrad so schnell um, daß $c = C$ wäre, so würde ebenfalls der Effect $V . \alpha = 0$. Zu dieser Schnelligkeit würde das Rad nur gelangen können, wenn der Mühlstein und alle übrigen Theile der Maschine gar nicht widerstünden. Nimmt man nun anfangs für c kleine nach und nach wachsende Werthe an, z. E. $c = \frac{1}{100} C$, $c = \frac{1}{10} C$, so findet man, daß $V . \alpha$ mit c wachse, so lange bis $c = \frac{1}{3} C$ wird,

wird. Bey dieser Voraussetzung findet man $V . \alpha$ grösser, als bey jeder andern Voraussetzung, wenn man c grösser oder kleiner als $\frac{1}{3}C$ annimmt.

Diesemnach kann es nicht gleichgültig seyn, mit welcher Geschwindigkeit das Wasserrad umläuft, wenn es eine Mühle oder jede andre Maschine treibt: ohne Zweifel wird man den vortheilhaftesten Gebrauch von der Kraft des Wasserstosses machen, wenn man alles so anordnet, daß die Maschine in den Beharrungsstand kommen muß, wenn die Schaufeln mit einer Geschwindigkeit umlaufen, die nur den dritten Theil von der Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers beträgt. Daß diese Schlüsse mit gehöriger Veränderung allemahl ihre Anwendung finden, wenn die Kraft an der Maschine von der Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle abhängt, läßt sich nun leicht übersehen. Man macht von der Kraft den vortheilhaftesten Gebrauch, wenn man alles so anordnet, daß Kraft und Last sich mit einander ins Gleichgewicht setzen, wenn die angegriffene Stelle diejenige Geschwindigkeit erlangt hat, welche, wenn man die mit ihr zusammengehörige Grösse der Kraft damit multiplicirt, das größte Product giebt.

18 §.

Es ist eine Gleichung gegeben, welche ausdrückt, wie die an einer Maschine angebrachte Kraft von der Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle abhängt: man soll die vortheilhafteste Anordnung der Maschine angeben.

Aufl. Wenn die Kraft $= V$, der angegriffenen Stelle Geschwindigkeit $= \alpha$, und eine Gleichung zwischen V und α gegeben ist; so suche man diejenige

Geschwindigkeit α, wobey das Product $V \cdot \alpha$ am größten wird. Es sey diese Geschwindigkeit $= c$, und die damit zusammengehörige Grösse der Kraft $= p$; so ist $p \cdot c$ der möglichst größte Effect, welchen die Kraft vermittelst der Maschine zuwege bringen kann. Ferner sey M der Widerstand, seine Geschwindigkeit $= \beta$, so kommt die Maschine in den Beharrungsstand, wenn $M \cdot \beta = V \cdot \alpha$ ist, und der Effect wird am größten, wenn die Anordnung so ist, daß $M \cdot \beta = p \cdot c$ werden muß. Von den beyden Grössen M oder β kann also eine gegeben, oder willkührlich angenommen seyn, so bestimmt jene Gleichung die andre: denn man hat $M = \frac{p \cdot c}{\beta}$, oder $\beta = \frac{p \cdot c}{M}$. In allen Fällen also ist das Verhältniß $\frac{\beta}{c} = \frac{p}{M}$ gegeben, und darnach läßt sich die Maschine jedesmahl anordnen.

Die Maschine sey ein Räderwerk, des Hauptrades Halbmesser $= r$, an der letzten Welle aber sey der Widerstand in der Entfernung $= q$ von der Axe angebracht; so ist $\frac{c}{2\pi r} = \mu$ die Zahl der Umläufe des Hauptrades, und $\frac{\beta}{2\pi q} = \nu = \frac{p \cdot c}{2\pi q M}$ die Zahl der Umläufe der letzten Welle in einer Secunde. Man hat also $\frac{\nu}{\mu} = \frac{r \cdot \beta}{q \cdot c} = \frac{r \cdot p}{q \cdot M}$, als die Zahl der Umläufe der letzten Welle gegen einen Umlauf des Hauptrades, und kann den Regeln des 11 §. gemäß die Maschine so anordnen, daß ihr Effect der möglichst

größte

größte wird, welchen die bey der Maschine angebrachte Kraft ihrer Natur nach zuwege bringen kann.

19 §.

Der Wind ist nichts anders, als bewegte oder gleichsam fliessende Luft, und wenn der Wind eine feste ebene Fläche trift, so entsteht daher auf ähnliche Art wie vom Wasserstoß, ein Druck gegen die Fläche. In wieweit nun die Luft eine flüssige Masse ist, in soweit müssen die Schlüsse im 36 §. Hydraul. auch beym Windstoß ihre Anwendung finden, und man ist wenigstens bis auf weitere Prüfung berechtiget, anzunehmen, der vom senkrechten Stoß des Windes gegen eine feste Fläche herrührende Druck sey dem Gewicht einer Luftsäule gleich, deren Grundfläche so groß ist, als die Fläche, welche den Stoß auffängt, die Höhe aber so groß als diejenige, welche der Geschwindigkeit der anstossenden Lufttheilchen zugehört. Man hat gefunden, daß auch diese Voraussetzung auf solche Folgen leitet, die mit dem, was die Erfahrung lehrt, ganz gut übereinstimmen. Wenn demnach die Richtung des Stosses gegen die ebene Fläche unter einem schiefen Winkel geneigt ist, oder die Ebene selbst in Bewegung ist, und dem Stoß ausweicht; so muß im ersten Fall die der Geschwindigkeit der Lufttheilchen zugehörige Höhe mit dem Quadrat vom Sinus des Anstoßwinkels multiplicirt, im zweyten Fall aber die relative Geschwindigkeit der Lufttheilchen in Rechnung gebracht werden, um die Luftsäule zu finden, deren Gewicht der Stärke des Windstosses gleich ist. (39. 42 §. Hydraul.)

20 §.

Mit den Kräften der Menschen und Thiere, wenn sie einer Maschine durchs Ziehen oder Schieben ihre Bewegung geben, hat es eine ähnliche Bewandniß, wie mit der Kraft des Wasser- und Windstosses: es sind ebenfalls relative Kräfte, die von der Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle abhängen. Man stelle sich eine stehende Welle vor mit einem darum gewundenen Seil, das hiernächst wieder über eine Rolle geführt ist, damit eine Last davon herab hängen kann. An der Welle sey ein wagrechter Baum, wie der Arm eines Haspels, einer Erdwinde, oder der Schwengbaum eines Göpels befestiget, dessen Ende ein Mensch vor sich her schiebt, oder ein Pferd zieht, indem der Mensch oder das Pferd im Kreise herum geht, dessen Halbmesser der Haspelarm oder der Schwengbaum des Göpels ist. Die Stelle des Haspelarms, welche der Mensch mit den Händen oder sonst angreift, indem er sie vor sich herschiebt, leidet Druck, und im ersten Augenblick, da noch alles ruhet, ist dieser Druck am größten. Sein statisches Moment, muß das Moment der Last übertreffen, sonst könnte keine Bewewegung erfolgen. Indem aber diese anfängt, und die angegriffene Stelle den Händen des Menschen ausweicht, wird dieser Druck kleiner, so wie ihre Geschwindigkeit zunimmt. Der Mensch kann nur mit einer bestimmten Geschwindigkeit folgen, und wenn die angegriffene Stelle eben so schnell auswiche, als der Mensch mit seinen Händen folgen kann, so müßte aller Druck aufhören. Ziehet ein Pferd oder auch mehrere den Schwengbaum eines Göpels herum, so leidet die Stelle, woran der Deichsel, oder der Schwengel vermittelst eines Hackens, Ringes oder Polzens

befe-

befestiget ist, die Gewalt des Zuges, und was hier Zug heißt, ist eben so etwas, als man unter andern Umständen Druck zu nennen gewohnt ist. Auch die Grösse dieses Zuges ist im ersten Augenblick, da alles noch ruhet, am stärksten; der Göpel kommt nur in Bewegung, wenn das statische Moment des Zuges anfangs das Moment der Last übertrift. Indem alsdenn die angegriffene Stelle nach und nach in schnellere Bewegung kommt, nimmt die Stärke des Zuges ab, und wenn jene Stelle schon eben so schnell folgte, als das Pferd laufen kann, so würde aller Zug aufhören.

21 §.

Das Gesetz ist nicht mit Zuverläßigkeit bekannt, nach welchem die Stärke dieses Drucks oder Zuges von der Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle der Maschine abhängt: also läßt sich auch nicht zuverlässig die Geschwindigkeit angeben, wobey das mechanische Moment dieser menschlichen oder thierischen Kräfte am grösten wird. Eben so wenig zuverläßig weis man demnach, wie groß die Stärke des Drucks oder Zuges für den Fall geschätzt werden könne, wenn von der Kraft des Menschen oder des Thiers der vortheilhafteste Gebrauch gemacht werden soll. Ueberdem hat der eine Mensch mehr körperliche Kräfte, als der andre, und bey den Thieren findet sich darin ebenfalls ein sehr grosser Unterscheid. Um deßwillen hat man suchen müssen, aus Vergleichung mehrerer Erfahrungen diejenige Kraft und Geschwindigkeit ausfindig zu machen, womit Menschen oder Thiere an Maschinen durch Schieben oder Ziehen arbeiten können, ohne daß sie in so kurzer Zeit ermüden.

22 §.

Gewöhnlich schätzt man die Kraft eines Menschen beym Schieben und Ziehen auf 25 Pfund, wenn die angegriffene Stelle eine Geschwindigkeit von 3 Fuß in einer Secunde hat. Der Mensch kann zwar schneller und stärker arbeiten, wenn es ein gesunder Mann von gewöhnlichen mittlern Leibeskräften ist: allein alsdenn ist er der Arbeit nicht auf lange Zeit ohne Ermüdung gewachsen. Die Rede ist hier überdem nur von einer solchen Art der Arbeit, wobey es hauptsächlich auf die Anstrengung der Kraft der Muskeln ankommt, wie wenn derselbe eine Kurbel drehet. Ist aber die Einrichtung so gemacht, daß der Mensch die Maschine durch Treten, oder auch sonst auf eine solche Art bewegen kann, daß das Gewicht seines Körpers ihm wenigstens zum Theil zu Hülfe kommt; so kann bey eben der Geschwindigkeit von 3 Fuß in einer Secunde, die Kraft, womit er in die angegriffene Stelle der Maschine wirkt, wohl auf 50 und mehr Pfund geschätzt werden. Herr Belidor (Archit. Hydraul. 1 Buch 1 Cap. 117 u. f. §. 30 u. f. S. der 1 Ausg. d. Ueb.) schätzt die Geschwindigkeit eines arbeitenden Mannes, wenn er 25 Pfund Kraft anwendet, auf 1000 Toisen oder 6000 Pariser Fuß in einer Stunde, also in einer Secunde nur auf $1\frac{2}{3}$ Pariser Fuß.

Die Kraft eines tüchtigen Zugpferdes, wenn es mit nochmahl soviel Geschwindigkeit als ein Mensch, also mit einer Geschwindigkeit von 4 bis 6 Fuß in einer Secunde arbeitet, schätzt man siebenmahl grösser, als die Kraft eines arbeitenden Mannes, mithin auf 175 Pfund. Soll das Pferd ziehend arbeiten, so kann es am füglichsten eine vertical stehende Welle

AB

AB (138 Fig.) vermittelst eines daran horizontal befestigten Arms oder Zugbaums CD drehen, wenn es bey D angespannt ist, und sodann im Kreise herum läuft, wozu der Halbmesser CD gehört. Dieser Zugbaum kann am besten die Länge von 10 bis 12 Füssen erhalten; kürzer muß er nicht leicht gewählt werden, damit das Pferd, deren auch mehrere zugleich gebraucht werden können, sich bequem wenden könne. Kommt dem Pferde indem es die Maschine bewegt, das Gewicht seines eigenen Körpers zu Hülfe, oder wirkt wohl gar eigentlich nur das Gewicht des Thiers, wie bey den unten weiter beschriebenen Lauf- und Treträdern; so folgt von selbst, daß die Kraft bey eben der Geschwindigkeit auch grösser sey, und sich nach der Grösse des thierischen Körpers richte.

23 §.

Der Gang der Maschine, wenn sie von einer relativen Kraft getrieben wird, die von der Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle abhängt, kann nur unter der Bedingung in einen völlig gleichförmigen Beharrungsstand kommen, wenn nicht allein der Widerstand selbst, sondern auch das statische Moment des Widerstandes beständig einerley bleibt; allein die Einrichtung läßt sich nicht wohl bey allen Maschinen so machen, daß dieser Bedingung ein Genüge geschehe, ob man gleich der Sache auf mancherley Art zu helfen sucht. Wenn ein Daumen an der Welle einer Stampfmühle den darauf liegenden Zapfen eines Stämpfers fallen läßt, so fällt ein Theil des bisherigen Widerstandes weg: und wofern nicht in demselben Augenblick ein andrer Daumen einen andern Stämpfer ergreift, so muß der Umlauf der Welle so lange schneller werden, als sie einen Stämpfer weniger wie zuvor zu heben hat. Die hin und her schiebende Bewegung der Pumpenstangen bringt man unter andern Arten durch Kurbeln zuwege, welche bey jedem Umlauf die Stange einmahl hin und her schieben. Wenn nun gleich der Widerstand des Kolbens einerley bleibt, so ist doch das statische Moment desselben veränderlich, weil die Pumpenstange dem Mittelpunct der Bewegung der Kurbel bald näher kommt, bald weiter davon wegrückt, da dann im ersten Fall das Moment des Widerstandes abnimmt, und im zweyten Fall wieder zunimmt. Durch eine geschickte Verbindung mehrerer Kurbeln, wenn es die Beschaffenheit der Maschine verstattet, kann zwar diesem Mangel zum Theil jedoch nicht gänzlich abgeholfen werden. Um also auf andre Art den Gang der Maschine in Gleichförmigkeit zu erhalten, ist man auf den Gebrauch des Schwungrades verfallen.

An der Axe eines sonst zur Maschine mit gehörigen Rades, oder eines Trillings der Maschine, wird ein Rad angebracht, das sonst mit der übrigen Maschine nicht in Verbindung ist, und die Absicht ist nur diese, daß dies so genannte Schwungrad seine einmahl erlangte Umlaufsgeschwindigkeit nicht leicht ändern soll, wenn gleich sonst wegen verminderten oder vermehrten Moment des Widerstandes die Bewegung der ganzen Maschine, und mit derselben zugleich der Umlauf der Welle oder der Axe mit dem Schwungrade schneller oder langsamer werden müste.

24 §.

Die Haupteigenschaften dieses Schwungrades sind folgende. 1.) Sein Schwerpunct muß genau in der Umlaufsaxe liegen, damit das Gewicht der

Masse

Masse desselben auf den Umlauf gar nicht wirken könne, und es eben soviel sey, als wenn die ganze Masse desselben bloß träge nicht schwer wäre. 2.) Es muß an sich in Proportion mit den übrigen Theilen der Maschine ziemlich schwer seyn, oder eigentlich nur aus ziemlich vieler Masse bestehen, damit schon ein beträchtliches Uebergewicht der Kraft, oder des Widerstandes nöthig sey, um die Umlaufsbewegung desselben mehr zu beschleunigen oder zu verzögern. Eben um deßwillen wird die meiste Masse am Umfang desselben vertheilt. 3.) Die Figur desselben ist ziemlich, wiewohl wegen des Widerstandes der Luft nicht ganz gleichgültig, denn es muß der Luft nicht zuviel Fläche entgegen setzen.

Der Erfolg ist dieser. Beym verminderten Widerstande kann die Kraft, welche die Maschine treibt, die Maschine nicht beschleunigen, ohne zugleich das Schwungrad in schnellern Umlauf zu bringen. Hiezu aber gehört etwas Zeit, und bevor noch soviele Zeit verflossen ist, als zur beträchtlichen Beschleunigung des Schwungrades nöthig wäre, nimmt der Widerstand der Maschine wieder zu: mithin bleibt der Umlauf des Schwungrades und mit demselben der Umlauf aller übrigen Theile der Maschine beynahe eben so schnell, als in dem Fall, da der Widerstand, oder sein statisches Moment am grösten war.

In andern Fällen, wenn man mit Fleiß breite Schwungflügel wählt, welchen die Luft desto mehr widerstehet, je grösser ihre Fläche, und je schneller ihr Umlauf ist, will man haben, daß die Geschwindigkeit, womit die Theile einer Maschine umlaufen, nicht über eine gewisse Gränze wachsen soll, wenn sonst vermöge der Natur der angebrachten Kraft die

Beschleu-

Beschleunigung beständig zunehmen würde. Das ist der Fall, wenn die Maschine durch Gewichte bewegt wird, wie die Schlagwerke an grossen Thurmuhren, auch die Bratenwender in der Küche. Mit der wachsenden Schnelligkeit, nimmt der Widerstand der Luft gegen die Schwungflügel immer mehr zu, und es kommt bald dahin, daß dieser Widerstand der Luft sich mit dem Zuge des an der Hauptwelle hängenden Gewichts ins Gleichgewicht setzet. Eben darum muß nun alle Beschleunigung der Maschine aufhören, sie muß vielmehr von nun an ihren Umlauf mit unveränderter Geschwindigkeit fortsetzen, und das ist es, was man haben wollte.

Der II. Abschnitt.

Anwendung dieser Lehren bey Anordnung der Pumpenkünste.

25 §.

Wenn die Kolben zweyer Saugwerke, die übrigens gleiche Abmessungen haben, so mit einander vermittelst einer mechanischen Einrichtung verbunden sind, daß sie wechselsweise steigen und sinken, also der eine binnen der Zeit niedergeht, darin der andre das Wasser herauf saugt, so heißt das ein **doppeltes Saugwerk**. Es können eben so mehr als ein Paar Saugwerke unter einander verbunden und alles so angeordnet werden, daß die halbe Anzahl der Kolben das Wasser während des Rückzuges der andern Hälfte heraussauget: alsdenn kann überhaupt der

der Nahme eines zusammengesetzten Saugwerks dienen. Die Kolben zweyer Druckpumpen oder auch mehrerer Paare kann man eben so zusammen ordnen, daß die eine Hälfte das Wasser während des Rückzuges der andern Hälfte hinauf drückt: solchergestalt erhält man ein **doppeltes** oder auch noch mehr **zusammengesetztes Druckwerk**. Beym doppelten Druckwerk können beyde Stiefel vermittelst ihrer Seitenröhren mit einer und eben derselben gemeinschaftlichen Steigröhre zusammen hängen, da dann beyde Seitenröhren, wovon jede für sich mit ihrem eigenen Ventil versehen seyn muß eine so genannte Gabel bilden, durch welche das Wasser aus den Stiefeln in die gemeinschaftliche Steigröhre treten kann. Bey einer so zusammen gesetzten **Pumpenkunst** kann übrigens die Zeit, worin die zusammengehörigen Kolben einmahl auf und niedergehen, **die Zeit eines Kolbenspiels** heissen: sie ist doppelt so groß, als die Zeit eines Kolbenzuges, oder Kolbendrucks.

26 §.

Bey Anordnung einer solchen Maschine, die ein zusammengesetztes Saugwerk oder Druckwerk bewegen soll, kommt die gröste Schwierigkeit dabey ein, daß die Kolbenstangen in eine gradlinichte vor- und rückwärts schiebende Bewegung gesetzt werden müssen: denn diese Bewegung sollen sie den Kolben selbst mittheilen. Unter mehrern Arten dies zu bewerkstelligen, wenn die Maschine übrigens ein Räderwerk ist, hat man den Gebrauch der **Kurbel**, oder wie sie hier auch heißt, des **Krumzapfens**, noch immer ganz gut gefunden. Zwar hat der Krumzapfen seine Mängel, allein andre Einrichtungen haben zum Theil noch

124 Fig.

grössere

grössere Mängel. Wenn die Kurbel zweymahl oder auch mehrmahl gebogen ist, so stellt sie eine eben so vielfache Kurbel vor, und an jeder kann alsdenn eine Pumpenstange hängen. Eine hinlänglich starke Kurbel CB kann mit einer Stange BF verbunden seyn, die sie beym Umlauf einmal hin und wieder schiebt, und diese Stange kann einer Welle G mit Armen CH, CI, woran die Pumpenstangen hängen, oder statt dessen einem oder mehrern gleicharmigen Hebeln, mit deren Armen die Pumpenstangen verbunden sind, die nöthige hin und wieder spielende Bewegung geben. Wenn man die 124 und 127 Figur vergleicht, so kann man sich hier davon vorläufig einen Begrif machen, und es ist hinlänglich, für jetzt nur so viel zu bemerken, daß alsdenn der Durchmesser des Kreises, worin die Stelle der Kurbel umläuft, woran die Stange hängt, mit der Höhe des Kolbenzuges, und die Umlaufszeit der Kurbel mit der Zeit eines Kolbenspiels einerley ist.

27 §.

Alle Abmessungen der zusammen gesetzten Pumpenkunst sind gegeben, und die Höhe, auf welche das Wasser gehoben werden soll, auch ist die Natur der Kraft bekannt, welche der Maschine ihre Bewegung giebt: man soll die Menge Wasser finden, die in gegebener Zeit auf die verlangte Höhe gebracht wird.

Aufl. 1 Fall. Wenn die Kunst ein doppeltes Saugwerk, und die Höhe $= f$ ist, auf welche das Wasser gehoben wird; so sey wie im 52 §. der Hydraulik

die Höhe des Kolbenzuges . . . $= b$

die Höhe einer Wassersäule über der Grundfläche des Kolbens, deren Gewicht der Kraft am Kolben gleich ist . . . $= k$

die

die ganze Länge der Saugröhre = = = l
der Durchmesser der Querschnitte jedes Stiefels = a
jeder Saugröhre = δ
die Zeit eines Kolbenspiels = = = t
die Höhe des freyen Falles einer schweren Masse in der ersten Secunde = = = g:
so ist hier t was im 52 §. der Hydraul. 2ϑ war, und das dortige $\vartheta = \frac{1}{2}t$. Demnach hat man $k = f + 2b : \text{lv.} \frac{\delta t \sqrt{g}}{a\sqrt{l}}$, und die an der Kolbenstange nöthige Kraft ist $= \frac{1}{4}\pi aak$, wenn man das eigenthümliche Gewicht des Wassers = 1 setzt. Eben so groß ist demnach der Widerstand, welchen jeder Kolben der Bewegung der Maschine entgegen setzt. Die Bewegung der Kolben ist zwar nicht völlig gleichförmig: weil jedoch alle Züge, wenn k einerley bleibt, in gleichen Zeiten erfolgen, so kann die Bewegung im Ganzen wenigstens für beynahe gleichförmig, und die Geschwindigkeit der Kolben $= \frac{b}{\vartheta} = \frac{2b}{t}$ angenommen werden. Diesemnach ist das mechanische Moment des Widerstandes $= \frac{1}{4}\pi aak \cdot \frac{2b}{t}$.

Ist das Saugwerk mehr als doppelt zusammen gesetzt, wie wenn es aus n Paar Pumpen bestünde, die alle gleiche Abmessungen hätten; so ist die Anzahl aller Kolben, die zugleich saugen, $= n$, und alle diese Kolben wiederstehen der Bewegung mit gleicher Stärke: also ist nun das mechanische Moment des Widerstandes $= \frac{1}{4}\pi naak \cdot \frac{2b}{t}$, und für das doppelte Saugwerk ist $n = 1$.

Wenn

Wenn nun bey dieser Geschwindigkeit der Kolben die Stelle der Maschine, woran die Kraft angebracht ist, die Geschwindigkeit $= \alpha$ hat, und die damit zusammengehörige Grösse der Kraft $=$ V gesetzt wird, so ist für den Beharrungsstand der Maschine $\frac{1}{4}\pi naak \cdot \frac{2b}{t}$ oder $\frac{1}{2}\pi naak \cdot \frac{b}{t} = V \cdot \alpha$. Wird alsdenn V durch ein Gewicht ausgedrückt, das der Kraft gleich ist, so muß man was vor dem Gleichheitszeichen steht, mit dem eigenthümlichen Gewicht des Wassers multipliciren. Wenn aber durch V eine Menge Wasser verstanden wird, deren Gewicht der Kraft gleich ist; so drückt eben die Zahl, welche diese Menge Wasser angiebt, zugleich ein Gewicht aus, daß der Kraft gleich ist, vorausgesetzt, daß das Gewicht eines Cubicfusses oder Cubiczolles Wasser $= 1$ sey, nachdem man diese Wassermenge in Cubicfüssen oder Cubiczollen ausdrückt.

In der Zeit ϑ wird die Wassermenge $\frac{1}{4}\pi naab$ und in der Zeit $t = 2\vartheta$ die Wassermenge $\frac{1}{2}\pi naab$ auf die Höhe f gebracht: also in jeder andern Zeit T die Wassermenge $M = \frac{1}{2}\pi naab \cdot \frac{T}{t}$, und das giebt $\frac{1}{2}\pi naa \cdot \frac{b}{t} = \frac{M}{T}$. Diesen Werth setze man in die vorige Gleichung, so wird $\frac{M \cdot k}{T} = V \cdot \alpha$ gefunden, und man erhält $M = \frac{V \alpha T}{k}$ im cubischen Maaß, wenn V durch eine Menge Wasser ausgedrückt wird, deren Gewicht der Kraft gleich ist. Druckt man aber V durch ein Gewicht aus, so wird auch $M = \frac{V\alpha T}{k}$ das Gewicht der in der Zeit T auf die Höhe f gehobenen Wassermenge.

Weil allemahl $k > f$ ist, so ist $M < \frac{V\alpha T}{f}$, und die in einer Secunde gehobene Menge Wasser kleiner als $\frac{V\alpha}{f}$: die Ursache ist, weil soviel Kraft erfordert wird, als wenn sonst ein Gewicht, das so schwer als die Wassermenge M wäre, in eben der Zeit auf die Höhe k gehoben werden sollte, die grösser als f ist. Ein Theil der Kraft wird auf die Beschleunigung des Wassers verwandt, weil die Bewegung der Kolben nicht ganz gleichförmig ist: im 10 §. aber setzte die Gleichung $Mf = V\alpha T$ eine völlig gleichförmige Bewegung der Last, und den Zustand des Gleichgewichts zwischen Kraft und Last voraus.

2. Fall. Wenn die Kunst ein doppeltes Druckwerk ist, und die Höhe $= f$ bleibt, auf welche das Wasser gehoben wird; so sey wie im 58 §. d. Hydraul.

die Höhe des Kolbenzuges = = = $= b$
die Höhe einer Wassersäule über der Grundfläche des Kolbens deren Gewicht der Kraft am Kolben gleich ist = = = $= k$
die Länge der ganzen Steigröhre. = = $= l$
der Durchmesser der Querschnitte jedes Stiefels $= a$
der dazu gehörigen Steigröhre = = = $= c$
die Zeit eines Kolbenspiels = = = $= t$;

so ist hier t, was im 58 §. der Hydraulik 2ϑ war, und das dortige ϑ hier $= \frac{1}{2}t$. Diesemnach hat man k

$= f$

$= f + \frac{4a^2bl}{gr^2t^2}$, und die an der Kolbenstange nöthige Kraft ist $= \frac{1}{4}\pi aak$, das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= 1$ gesetzt. Eben so groß ist der Widerstand, welchen jeder Kolben der Bewegung der Maschine entgegen setzt. Auch hier kann man die Bewegung der Kolben wenigstens beynahe gleichförmig annehmen, und ihre Geschwindigkeit $= \frac{b}{\vartheta} = \frac{2b}{t}$ setzen, also das mechanische Moment des Widerstandes $= \frac{1}{4}\pi aak \cdot \frac{2b}{t} = \frac{1}{2}\pi aak \cdot \frac{b}{t}$.

Wenn das Druckwerk aus n Paar Pumpen bestehet, die insgesammt gleiche Abmessungen haben; so ist die Anzahl aller Kolben, die zugleich drücken $= n$, und sie widerstehen der Bewegung gleich stark. Demnach ist das mechanische Moment des Widerstandes $= \frac{1}{2}\pi naak \cdot \frac{b}{t}$, für das doppelte Druckwerk ist $n = 1$, und man erhält $\frac{1}{2}\pi naak \cdot \frac{b}{t} = V \cdot \alpha$, wenn V und α, die vorhin schon angezeigte Bedeutung behalten.

In der Zeit ϑ wird die Wassermenge $\frac{1}{4}\pi naab$, und in der Zeit $t = 2\vartheta$ die Wassermenge $\frac{1}{2}\pi naab$ auf die Höhe f gebracht, und in jeder andern Zeit T die Wassermenge $\frac{1}{2}\pi naab \cdot \frac{T}{t} = M$. Also ist $\frac{1}{2}\pi naa \cdot \frac{b}{t} = \frac{M}{T}$, und man erhält $\frac{Mk}{T} = V\alpha$, mithin

M =

$M = \frac{V\alpha T}{k}$. Der Ausdruck ist dem ganz ähnlich, welcher für das Saugwerk gefunden ward, auch ist allemahl $k > f$, also $M < \frac{V\alpha T}{f}$ aus ähnlichen Gründen, wie beym Saugwerk.

28 §.

Eine vortheilhafte Anordnung eines doppelten oder noch mehr zusammengesetzten Saugwerks anzugeben, wenn festgesetzt ist, welche Art der Kräfte die Kunst treiben, und wie hoch das Wasser gehoben werden solle.

Aufl. Es wird vorausgesetzt, daß $V.\alpha$, als das mechanische Moment der Kraft, bekannt sey: und wenn V in die Classe der relativen Kräfte gehört, daß α und V für den Fall bekannt sind, wenn das Product $V.\alpha$ am grösten wird. Nimmt man alsdenn diese Werthe von α und V zum Grunde, so ist die Wassermenge $M = \frac{V\alpha T}{k}$, und $k = f + 2b : \text{sv.}\, \frac{\delta t\sqrt{g}}{a\sqrt{l}}$. Je grösser diese Wassermenge für einerley Zeit T ausfallen kann, desto vortheilhafter ist die Anordnung der Kunst: man muß also b, δ, a, l, t, so zu bestimmen suchen, daß k der Höhe f so nahe komme, als die übrigen Umstände zulassen. Zu dem Ende setze man $\frac{\delta t\sqrt{g}}{a\sqrt{l}} = \psi$, so ist ψ ein zum Halbmesser = 1 gehöriger Kreisbogen, und man hat $k = f + \frac{2b}{\text{sinv.}\,\psi}$. Je näher der Bogen ψ der halben

Peripherie kommt, desto näher kommt sein Quersinus der Zahl 2, also auch k der Höhe $f + b$ desto näher.

Weil man gern Saugröhren wählt, die enger, als der dazu gehörige Stiefel sind; (44 §. Hydraul.) so ist $\frac{\delta}{a}$ ein ächter Bruch, und $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}}$ wird ebenfalls ein ächter Bruch, wenn $l > 15\frac{5}{8}$ Rheinl. Fuß ist; also ist eine langsame Bewegung des Kolbens allemahl vortheilhaft, damit t nicht zu klein ausfalle. Wenn die Saugröhre grade ist, und lothrecht im Wasser steht, so muß doch l einige Fuß grösser, als f seyn, weil die Saugröhre unten einige Fuß tief im Wasser stehen muß: also kann man $\frac{g}{l}$ als gegeben ansehen. Weil nun f nicht grösser als 28 Fuß seyn kann, so wird $\frac{g}{l}$, wenn die Saugröhre grade und lothrecht ist, nie kleiner als $\frac{1}{2}$ seyn. Ferner kann man $\frac{\delta}{a}$ willkührlich und so annehmen, daß dieser Bruch ohngefehr $= \frac{3}{4}$ oder doch nicht kleiner als $\frac{2}{3}$ ausfällt. Nun hat man $t = \frac{a}{\delta} \cdot \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}} \cdot \psi$, und von den beyden Zahlen t oder ψ kann eine willkührlich genommen werden, so ist die andre bestimmt: mithin ist zugleich $k = f + \frac{2b}{\text{sinv.}\,\psi}$ bestimmt, wenn b bestimmt ist. Gewöhnlich kann man am besten b willkührlich annehmen, so ist zugleich $\frac{2b}{t} = \beta$ als die Ge-

schwin-

schwindigkeit der Kolben bestimmt: und weil α gegeben ist, so hat man zugleich das Verhältniß $\alpha : \beta$ wodurch die Einrichtung der Maschine bestimmt wird. Noch ist das mechanische Moment $V\alpha$ gegeben, und man hat $\frac{1}{4}\pi naak \,.\, \beta = V\alpha$; also findet man $naa = \frac{4V\alpha}{\pi k\beta}$. Die in der Zeit T gehobene Wassermenge ist $\frac{V\alpha T}{k} = M$, also $\frac{V\alpha}{k} = \frac{M}{T}$, und die letzte Gleichung verwandelt sich in folgende $naa = \frac{4M}{\pi\beta T}$. Weil man nun nicht gern Pumpenröhren braucht, die mehr als einen Fuß im Lichten weit sind, so versucht man die Voraussetzungen $n = 1$, $n = 2$, u. s. f. so lange bis $aa = \frac{4V\alpha}{n\pi k\beta}$, oder $aa = \frac{4M}{\pi n\beta T}$, kleiner als 1 Fuß wird, oder wenigstens nicht erheblich grösser als 1 Fuß ausfällt: alsdenn giebt die für n angenommene Zahl an, wie viele Pumpen die Kunst treiben kann, und die Gleichung $a = \sqrt{\frac{4V\alpha}{n\pi k\beta}} = \sqrt{\frac{M}{\frac{1}{4}\pi n\beta T}}$ bestimmt die Grösse vom Durchmesser eines jeden Stiefels im Lichten.

Wenn die Kraft V am Umfang eines Rades nach der Richtung der Tangente angebracht und des Rades Halbmesser $= r$, die Zahl der Umläufe dieses Rades in einer Secunde $= \mu$ ist; so hat man $\mu = \frac{\alpha}{2\pi r}$. Wenn ferner die Kolbenstangen vermittelst einer Kurbel ihre Bewegung erhalten soll, so muß der Durchmesser ihres Umlaufskreises $= b$ und die Umlaufszeit dieser Kurbel $= t$ seyn: (24 §.) also hat man auch die Anzahl der Umläufe der Kurbel in einer Secunde oder $\nu = \frac{1}{t}$, (11 §.) und die Zahl $\frac{\nu}{\mu} = \frac{2\pi r}{\alpha t}$ bestimmt die Anordnung der Maschine. (12 §.)

29 §.

Belidor in der Architectura Hydraul. III. B. IV Cap. 975 u. f. §§. giebt folgende mechanische Anordnung an, welche für einen oder mehr Arbeiter dient, einem doppelten Saugwerk seine Bewegung zu geben.
120 Fig. An der Axe der Kurbel A, welche von einem oder mehrern Arbeitern umgedrehet werden kann, befindet sich ein Trilling C, der in das Sternrad D greift, und die Welle GH dieses Sternrades ist bey M, K, I, N, auf eine solche Art gebogen, daß sie eine doppelte Kurbel LMKINO abgiebt. An jeder dieser Kurbeln hängt eine von den beyden Kolbenstangen E und F der Saugwerke, welche wechselsweise das Wasser heben. Um nun die vortheilhafteste Anordnung einer solchen Maschine anzugeben, erwäge man folgendes.

Ein Rheinländischer Cubicfuß Wasser wiegt ohngefähr 64 Pfund, und die Kraft eines an der Kurbel mit 3 Fuß Geschwindigkeit arbeitenden Mannes kann man auf 24 bis 25 Pfund schätzen, welches das Gewicht von $\frac{3}{8}$ Cubicfuß Wasser ist. Für zwey Männer also ist $V\alpha = \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}$ Cubicfuß. Ferner sey $l = 23\frac{1}{2}$ Fuß, so ist $\frac{l}{g} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$, und $\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{2}\sqrt{6} = 1{,}224744$. Ueberdem nehme man $\frac{a}{\delta} = \frac{4}{3}$ an,

so

so ist $\frac{n}{\delta} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 1{,}632992$, und wenn $\psi = \pi =$
3,1416 angenommen wird, so hat man $t = 1{,}633$
. 3,1416 = 5 Secunden und $v = \frac{1}{5}$. Weiter wird
$k = f + b$, und wenn $b = 1$ Fuß gesetzt wird, so ist
$k = 21$ Fuß, und die wirkliche Wassermenge ist für
1 Secunde $= \frac{9}{84}$ Cubicfuß, für 1 Minute $= \frac{540}{84}$
$= \frac{135}{21} = 6\frac{3}{7}$ Cubicfuß, für 1 Stunde $= 385\frac{5}{7}$
Cubicfuß, und für die Zugkurbeln ist LM = ON
$= \frac{1}{2}$ Fuß. Damit die Arbeiter die Kurbel A
bequem drehen können, muß der Halbmesser davon nicht über $1\frac{1}{2}$ Fuß betragen. Nimmt man
ihn = 1 Fuß an, so ist $r = 1$ Fuß, und $\mu = \frac{\alpha}{2\pi r}$
$= \frac{3}{2\pi} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{22} = \frac{21}{44}$. Vorhin war $v = \frac{1}{5}$, also ist
$\frac{v}{\mu} = \frac{44}{105}$, oder $\frac{\mu}{v} = 2\frac{17}{44}$, und das heißt während eines Umlaufs der Zugkurbeln oder eines Kolbenspiels muß die Hauptkurbel A $2\frac{17}{44}$ mahl umlaufen.
Man gebe also dem Getriebe C 8 Stecken, so muß
das Rad D 19 Zähne haben. Wenn man indessen
wegen der leichtern Eintheilung auch 18 oder 20 Zähne nähme, so würde das den Effect nicht merklich ändern. Endlich ist $\alpha = 3$ Fuß, $\beta = \frac{2b}{t} = \frac{2}{5}f$, also
$\pi\beta = \frac{22}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{44}{35}f$; und weil vorhin $\frac{V\alpha}{k} = \frac{9}{84}$ Cubicfuß gefunden ist, so hat man $\frac{4V\alpha}{k} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ Cubicfuß. Das giebt $\frac{4V\alpha}{\pi k \beta} = \frac{3}{7} \cdot \frac{35}{44} = \frac{15}{44}$ Quadrat-

fuß $= aa$, oder $aa = \frac{15 \cdot 44}{44^2} = \frac{660}{44^2}$ und $a = \frac{\sqrt{660}}{44}$ $= 0{,}584$ Fuß, oder 7 Zoll. Oben aber ist $\frac{\delta}{a} = \frac{3}{4}$ angenommen, mithin wird $\delta = \frac{3}{4} \cdot 7 = 5\frac{1}{4}$ Zoll.

30 §.

Eine vortheilhafte Anordnung eines doppelten, oder noch mehr zusammen gesetzten Druckwerks anzugeben, vermittelst dessen das Wasser in Röhren zum Steigen gebracht wird, wenn die Art der Kräfte gewählt ist, welche die Kunst treiben soll, und überdem die Höhe gegeben ist, auf welche das Wasser gehoben werden muß.

Aufl. Man behalte die Buchstaben in der Bedeutung bey, die sie im 27 §. hatten: so ist für die Zeit T die Wassermenge $M = \frac{V\alpha T}{k}$, und $k = f + \frac{4a^2bl}{gc^2t^2}$. Je mehr man den Ueberschuß $\frac{4a^2bl}{gc^2t^2}$ der Höhe k über f vermindern kann, desto vortheilhafter wird die Einrichtung, weil die Wassermenge für einerley Zeit desto grösser wird. Man nehme also die Länge der Steigröhre l so kurz als die übrigen Umstände zulassen, so ist $\frac{l}{g}$ bestimmt. Die Zahl $\frac{a}{c}$ wird grösser als Eins seyn, weil man gern Steigröhren wählt, die enger als die Stiefel sind. Je grösser indessen l gegen g ist, desto mehr Ursache hat man, c gegen a so groß anzunehmen, als die übrigen Umstände

zulas=

zulassen. Weil ferner eben der Ueberschuß $k - f$ sich umgekehrt, wie t^2 verhält, so ist gewöhnlich eine langsame Bewegung der Kolben vortheilhaft. Man setze $\frac{4a^2l}{gc^2t^2} = \lambda$, so ist $k = f + \lambda b$, und die Anordnung der Maschine ist desto vortheilhafter, je kleiner die Zahl λ ausfallen kann. Wenn l gegeben und überdem das Verhältniß $a : c$ ebenfalls gegeben, oder willkührlich angenommen ist; so hat man $t = \frac{2a}{c}\sqrt{\frac{l}{\lambda g}}$, und t verhält sich umgekehrt, wie $\sqrt{\lambda}$. Wenn also die Zeit t nicht etwa durch andre Gründe schon bestimmt ist, so kann man die Zahl λ gewöhnlich noch kleiner als 1 annehmen, wodurch alsdenn die Zeit t bestimmt, und zugleich die Linie k der Höhe f sehr nahe gebracht wird. Gesetzt es wäre auch $l =$ 1000 Fuß, also $\frac{l}{g} = 64$ und $\sqrt{\frac{l}{g}} = 8$, so könnte man $\lambda = 1$ annehmen, und $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}$, das würde $t = 24$ Secunden geben, und $k = f + b$. Wenn alsdenn die Pumpenstangen an einer Kurbel hängen, so ist t ihre Umlaufszeit, und $v = \frac{1}{t}$ die Zahl ihrer Umläufe in einer Secunde.

Das mechanische Moment der Kraft $V . \alpha$ wird als gegeben angenommen, und in dem Fall, wenn es eine relative Kraft ist, auch diejenige Geschwindigkeit α, wobey das Product $V . \alpha$ am größten wird, und der damit zusammengehörige Werth der Kraft V. Die Höhe des Kolbenzuges b kann willkührlich, oder

 andern

andern Umständen gemäß angenommen werden, also hat man auch $\beta = \frac{2b}{t}$, und das Verhältniß $\alpha : \beta$ bestimmt die Einrichtung der Maschine. Ist es ein Rad, das die Kraft umtreibt, wozu der Halbmesser r gehört, und die Umlaufszeit desselben $= \vartheta$, so muß $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha}$, und $\mu = \frac{1}{\vartheta} = \frac{\alpha}{2\pi r}$ seyn, welches demnach das Verhältniß $\mu : \nu$ bestimmt. Uebrigens hat man $a = \sqrt{\frac{4V\alpha}{n\pi k\beta}}$ und δ aus der angenommenen Zahl $\frac{\delta}{a}$.

31 §.

Wenn zwey Arbeiter vermittelst der Maschine, welche die 120 Figur vorstellt, ein Paar Druckpumpen treiben sollen, die das Wasser 20 Fuß hoch bringen, und l nicht kürzer als 250 Fuß seyn könnte, so hätte man $\frac{l}{g} = \frac{250}{15\frac{5}{8}} = 16$ und $\sqrt{\frac{l}{g}} = 4$. Weiter sey $\lambda = 1$, also $k = f + b$, und $\frac{a}{c} = \frac{4}{3}$, so wird $t = \frac{8}{3} \cdot 4 = \frac{32}{3}$, und $\nu = \frac{3}{32}$. Bleibt nun $r = 1$ Fuß, so hat man $\mu = \frac{21}{44}$, also $\frac{\mu}{\nu} = \frac{21}{44} : \frac{3}{32} = \frac{7 \cdot 32}{44} = \frac{56}{11}$, und die Hauptkurbel muß während eines Kolbenspiels $5\frac{1}{11}$mahl umlaufen: wenn also das Getriebe 6 Stecken hat, so muß das Rad, 30 oder 31 Zähne haben. Weiter nehme man $b = 1$ Fuß an, so ist $\beta = \frac{2b}{t} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$, und $V \cdot \alpha = \frac{9}{4}$, also $\frac{V\alpha}{\beta}$

$\frac{V\alpha}{\beta} = \frac{3 \cdot 16}{4} = 12$ C. F. und $\frac{4V\alpha}{n\pi k\beta} = \frac{7}{22} \cdot \frac{48}{21} = \frac{24}{33} = \frac{8}{11} = \frac{88}{11^2}$, wenn $n = 1$ ist. Das giebt $a = \frac{\sqrt{88}}{11} = 0{,}8528$ Fuß, oder $10\frac{1}{4}$ Zoll, mithin $\delta = \frac{3}{4}a = 7\frac{11}{16}$ Zoll, als der Durchmesser von den Querschnitten der Steigröhre. In einer Stunde werden alsdenn $385\frac{5}{7}$ Cubicfuß Wasser 20 Fuß hochgebracht.

32 §.

Wenn β und k bestimmt sind, so ist die Formul für die Durchmesser der Stiefel $aa = \frac{4V\alpha}{n\pi k\beta} = \frac{M}{\frac{1}{4}\pi n\beta T}$ beydes für das Saugwerk und Druckwerk einerley: nur hat man

für das Saugwerk	für das Druckwerk
$k = f + \frac{2b}{\text{sinv.}\ \psi}$,	$k = f + \lambda \cdot b$
$t = \frac{a\sqrt{l}}{\delta\sqrt{g}} \cdot \psi$,	$t = \frac{2a\sqrt{l}}{c\sqrt{\lambda g}}$,

und für beyde ist $\beta = \frac{2b}{t}$. Kann man für das Saugwerk $\psi = \pi$, und für das Druckwerk $\lambda = 1$ setzen, so ist es am vortheilhaftesten, und man hat $k = f + b$.

Eben die Formuln können auch mit einer geringen Aenderung für das einfache Saugwerk oder Druckwerk dienen. Weil bey demselben der Rückzug vom Kolbenzuge selbst unterschieden werden muß, und ersterer nicht nothwendig eben so viele Zeit als der Kolbenzug selbst erfordert; so setze man die Zeit des Zuges $= \zeta \cdot t$, also des Rückzuges $= (1 - \zeta)^t$, wenn

t die

t die ganze Zeit eines Kolbenspiels bezeichnet. Ferner ist $\beta = \frac{b}{\zeta \, . \, t}$, und in der Zeit t ist die Wassermenge $= \frac{1}{4}\pi aab$, mithin in jeder andern Zeit T, die Zeiten der Rückzüge mit einbegriffen, die Wassermenge $M = \frac{1}{4}\pi aab \, . \, \frac{T}{t}$, also $\frac{1}{4}\pi aa \, . \, \frac{b}{t} = \frac{M}{T}$. Weiter ist $\frac{1}{4}\pi aak \, . \, \frac{b}{\zeta t} = V\alpha$, also $\frac{Mk}{\zeta T} = V\alpha$ und $M = \frac{V \, . \, \alpha \, . \, \zeta T}{k}$ welches auch daher von selbst erhellet, weil die Maschine nur während der Zeit ζT wirksam ist. Uebrigens wird $aa = \frac{4V\alpha}{\pi k\beta}$ gefunden in der Voraussetzung, daß $\beta = \frac{b}{\zeta t}$ genommen sey, oder $aa = \frac{M}{\frac{1}{4}\pi\beta \, . \, \zeta T}$, weil nun $\frac{V\alpha}{k} = \frac{M}{\zeta t}$ ist.

Um t und k zu finden, muß man erwägen, daß im 27 §. $t = 2\vartheta$ gesetzt werden konnte, wenn ϑ die Zeit eines Kolbenzuges war, und die Kunst ununterbrochen arbeitete. Demnach schreibe man 2ϑ statt t, so hat man

für das einfache Saugwerk	für das einfache Druckwerk.
$k = f + \frac{2b}{\text{sinv.}\,\psi}$,	$k = f + \lambda b$,
$\vartheta = \frac{a\sqrt{l}}{2\delta\sqrt{g}} \, . \, \psi$,	$\vartheta = \frac{a}{c} \, . \, \sqrt{\frac{l}{\lambda g}}$,

und hier ist für beyde $\vartheta = \zeta \, . \, t$.

33 §.

Unter den Pumpenkünsten ist die Schwengel= 122
kunst eine der einfachsten und bekanntesten Arten. Fig.
An der Pumpenröhre wird oben bey E ein Gestelle EC angebracht, welches die Unterlage zu einem gebrochenen Hebel ACB abgiebt, dessen Arme gewöhnlich entweder völlig oder doch beynahe einen rechten Winkel einschliessen. Am kürzern Arm CB hängt die Kolbenstange, woran sie bey B vermittelst eines Ringes oder etwas dergleichen so befestiget ist, daß der Winkel sich ändern kann, welchen sie mit dem Hebelsarm einschließt. Der längere Arm CA hängt soweit herab, daß ein Mensch denselben angreifen, und ihn in eine Schwungbewegung nach Art eines Pendels setzen kann. Er heißt der **Pumpenschwengel**, und von ihm hat die Maschine den Nahmen einer **Schwengelkunst**. Vollständigere Beschreibungen und Zeichnungen verschiedener Arten von Schwengelkünsten findet man beym **Leupold** im Theatro Machinarum Hydraul. T. II. im III. Cap. 10 u. f. S. imgleichen beym **Belidor** in der Architectura Hydraul. III. Buch IV. Cap. 971 u. f. §§. Weil die Stelle B des kurzen Arms, woran die Pumpenstange hängt, ihre Bewegung im Kreisbogen macht, so wird die Stange BD zwar nicht beständig in einerley Richtung geschoben, doch ist die Aenderung ihrer Lage während eines Kolbenspiels nicht sehr beträchtlich, weil der kurze Arm nicht wie die Kurbel einen ganzen Umlauf macht, sondern nur einen Bogen beschreibt, der selten den sechsten Theil der ganzen Peripherie übertrift.

Gewöhn=

Gewöhnlich bedient man sich des Schwengels bey einer Saugpumpe, wenn sie durch einen Arbeiter bewegt werden soll. Der Bogen, welchen die angegriffene Stelle A des Schwengels beschreibt, wird etwa 4 Fuß betragen: weil nun $\alpha = 3$ Fuß geschätzt werden kann (22 §.) und hier die Zeit eines Schwunges mit der Zeit eines Kolbenzuges einerley ist, so wird $\vartheta = \zeta t = \frac{4}{3}$ Secunden. Weiter ist $\psi = \frac{2\delta\vartheta\sqrt{g}}{a\sqrt{l}}$: wenn also $\frac{\delta}{a} = \frac{3}{4}$ angenommen wird, und $f = 14$ Fuß ist, die Saugröhre aber lothrecht steht, so ist ohngefehr $l = g$; also $\sqrt{\frac{g}{l}} = 1$, und $\psi = \frac{3}{2}\vartheta = 2$. Weil nun zu diesem Bogen $= \frac{2}{\pi} \cdot 180$ Grade gehören; (253 §. Geom.) so ist sein Winkel am Mittelpunct $= 114^\circ\ 35\frac{1}{2}'$. Sein Quersinus ist $= 1 + \cos 65^\circ\ 24\frac{1}{2}'$ (232 §. Geom.) $= 1{,}6193$, und man findet $\frac{2}{\text{sinv.}\,\psi} = 1{,}235$, also $k = f + \frac{2b}{\text{sinv.}\,\psi} = f + 1{,}235 \cdot b$. Es ist aber $\beta = \frac{CB}{CA} \cdot \alpha = \frac{b}{\vartheta}$, also kann entweder b oder das Verhältniß $\frac{CB}{CA}$ willkührlich genommen werden. Nimmt man $CA = 4CB$, so wird $b = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$ Fuß, und man hat $k = 15{,}235$ Fuß. Der Rückzug wird nicht über eine Secunde Zeit erfordern, also ist die ganze Zeit eines Kolbenspiels $= \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$ Sec. und $\frac{\vartheta}{t} = \frac{4}{7} = \zeta$.

Das

Das giebt die Wassermenge $M = \frac{V.\alpha.\frac{4}{7}T}{k} =$

$\frac{\frac{8}{9}.\frac{4}{7}.T}{15,235} = \frac{9}{14.15,235}.T = \frac{9}{213,3}.T$, also in einer Minute 2,506 Cub. Fuß, welche 14 Fuß hoch gebracht werden. Die Länge der Hebelsarme CA und CB ist bestimmt, wenn der eine gegeben, oder nach Beschaffenheit der sonst dabey eintretenden Umstände willkührlich angenommen wird. Soll CA = 5 Fuß seyn, so muß CB = $\frac{5}{4}$ Fuß oder 1 Fuß 3 Zoll lang gemacht werden. Endlich hat man $aa = \frac{4V\alpha}{\pi k\beta} =$

$\frac{14}{11}.\frac{5}{8}.\frac{4}{15,235} = \frac{7.3}{11.15,235} = \frac{2100}{1676} =$ 0,1254 also $a = 0,354$ Fuß, oder $4\frac{1}{4}$ Zoll, mithin $\delta = \frac{3}{4}a = 3\frac{3}{16}$ Zoll.

34 §.

Statt des Schwengels kann an der einfachen Druckpumpe am besten eine Druckstange CA dienen die entweder oben an der Pumpe selbst, wie es die Figur vorstellt, angebracht, oder durch ein besonders Gestelle unterstützt wird. Liegt die Druckstange so niedrig, daß der Arbeiter, wenn er bey A angreift, von oben herab zugleich mit dem Gewicht seines Körpers drücken kann; oder liegt sie so hoch, daß der Arbeiter sich daran hängen, und solchergestalt ebenfalls das Gewicht seines Körpers wenigstens zum Theil mit wirksam seyn kann; so läst sich die Kraft bey 3 Fuß Geschwindigkeit um ein beträchtliches höher als sonst in Anschlag bringen. Nimmt man alsdenn V = $\frac{5}{8}$ Cub. Fuß Wasser, und $\alpha = 3$ Fuß an, so ist $V\alpha = \frac{15}{8}$ Cub. Fuß. Auch hier ist die Zeit, worin

121 Fig.

worin der Arbeiter die Stange einmahl niederdrückt, der Zeit eines Kolbendrucks gleich, und wenn man den Weg, welchen die angegriffene Stelle jedesmahl zurück legt, auf $3\frac{1}{2}$ Fuß schätzt, so ist die Zeit eines Kolbendrucks $= \frac{3\frac{1}{2}}{3} = \frac{7}{6}$ Secunden, und diese ist hier $= \vartheta = \zeta t$. Ferner ist $\vartheta = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{l}{\lambda g}}$, oder $\lambda = \frac{a^2}{c^2 \vartheta^2} \cdot \frac{l}{g}$, und wenn $\frac{a}{c} = \frac{4}{3}$ genommen wird, so erhält man $\lambda = \frac{16}{9} \cdot \frac{36}{49} \cdot \frac{l}{g} = \frac{64}{49} \cdot \frac{l}{g}$. Es bleibe wie im vor. §. $f = 14$ Fuß, aber l sey $= 30\frac{1}{4}$ Fuß, so ist $\frac{l}{g} = 2$, und $\lambda = \frac{128}{49} = 2{,}61$, mithin $k = f + 2{,}61 \cdot b$. Weiter ist $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{CA}{CB}$, und wenn man diese Zahl $= 4$ annimmt, so erhält man $\beta = \frac{CB}{CA} \cdot \alpha = \frac{3}{4}$, und daraus ferner $b = \beta \cdot \vartheta = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{8}$ Fuß. Das giebt $k = 16{,}28$ Fuß, also die Wassermenge $M = \frac{V\alpha \cdot \zeta T}{k} = \frac{15 \cdot \zeta \cdot T}{8 \cdot 16{,}28}$. Rechnet man alsdenn auf den Rückzug 1 Secunde, so ist $t = \frac{13}{6}$ Secunden, und $\frac{\vartheta}{t} = \frac{7}{13} = \zeta$, also $M = \frac{15 \cdot 7 \cdot T}{8 \cdot 13 \cdot 16{,}28} = \frac{105}{1673} \cdot T$, mithin die Wassermenge für eine Minute $= 3{,}765$ Cub. Fuß. Uebrigens hat man $aa = \frac{4V\alpha}{\pi k \beta} = \frac{14}{11} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{16{,}28} = \frac{7}{11} \cdot \frac{5}{16{,}28} \doteq \frac{53}{179} = 0{,}195531$, also $a = 0{,}442$ Fuß, oder 5,3 Zoll, und $\delta = \frac{3}{4} a = 4$ Zoll.

35 §.

Wenn man den Bogen, um welchen die angegriffene Stelle A der Druckstange oder des Schwengels von den Arbeitern hin und her bewegt wird, = w setzt, so ist allemahl $t = \frac{2w}{\alpha}$, oder $\vartheta = \frac{w}{\alpha}$; weil nun auch $t = \frac{2b}{\beta}$ oder $\vartheta = \frac{b}{\beta}$ ist, so hat man allemahl $\frac{b}{\beta} = \frac{w}{\alpha}$, und $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{w}{b}$. Hiebey wird eigentlich vorausgesetzt, daß die Kraft allemahl nach der Richtung der Tangente des Bogens w ihren Druck äussere, welches man eben nicht völlig genau zum Grunde legen kann. An der Druckstange arbeiten die Leute wohl mehr in verticaler Richtung, und man müste eigentlich die Sehne dieses Bogens, wenn die mittlere Lage der Stange wagrecht ist, in Rechnung bringen. Indessen ist dieser Bogen gewöhnlich von seiner Sehne nur wenig verschieden: wenn er nicht über den sechsten Theil der Peripherie beträgt, so beträgt der Ueberschuß des Bogens über die Sehne noch nicht den 20sten Theil der Länge der Sehne, die gewöhnlich nur zwischen 3 und $3\frac{1}{2}$ Fuß fallen wird.

36 §.

Ein doppeltes oder noch mehr zusammengesetztes Druckwerk, wenn die Pumpen zugleich mit Saugröhren versehen sind, und die Kolben auch beym Rückzuge das Wasser schon auf eine gewisse Höhe durch das so genannte Saugen heben, kann ein vereinbartes Saug- und Druckwerk heissen. Es sey die lothrechte Höhe, auf welche das Wasser durch die

Saugröhre der halben Anzahl steigt, $= e$, diejenige aber $= f$, um welche es die andre halbe Anzahl Pumpen zugleich als Druckwerke heben. Wenn nun die Höhe einer Wassersäule auf der Grundfläche eines jeden Kolben, deren Gewicht so groß ist, als die an der Kolbenstange wegen des Saugwerks nöthige Kraft, $= k$ gesetzt wird; so sey p die Höhe einer Wassersäule auf eben der Grundfläche, deren Gewicht der an der Kolbenstange wegen des Druckwerks nöthigen Kraft gleich ist, und L die Länge der Steigröhre für das Druckwerk: so hat man

$$k = e + \frac{2b}{\text{finv.}\,\psi} \qquad\Big|\qquad p = f + \lambda b$$

$$t = \frac{a\sqrt{l}}{\delta\sqrt{g}}\,.\,\psi \qquad\Big|\qquad t = \frac{2a\sqrt{L}}{c\sqrt{\lambda g}}$$

Sind nun n Paar Pumpen so in Verbindung, daß die eine Hälfte binnen der Zeit das Wasser hinauf saugt, da es die andre Hälfte höher hinauf druckt; so ist der gesamte Widerstand der Kolben $= \frac{1}{4}\pi naa\,(k + p)$.

Die Kraft, welche die Maschine treibt, sey dem Gewicht einer Menge Wasser gleich, die den Raum F füllt, die Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle $= \alpha$, die Geschwindigkeit der Kolben $\beta = \frac{2b}{t}$; so ist $F\alpha = \frac{1}{4}\pi na^2\,(k + p)\,.\,\frac{2b}{t}$. Die in der Zeit t auf die Höhe $e + f$ gehobene Wassermenge ist $= 2\,.\,\frac{1}{4}\pi naab$ also ist in der Zeit T die gehobene Wassermenge M $= \frac{1}{2}\pi naab\,.\,\frac{T}{t}$, mithin $\frac{1}{2}\pi naa\,.\,\frac{b}{t} = \frac{M}{T}$, und $F\alpha$ =

$=\frac{M(k+p)}{T}$, oder $F\alpha T = M(k+p)$, und die Wassermenge $M = \frac{F\alpha T}{k+p}$ ist, wie sonst bey Pumpenkünsten kleiner als $\frac{F\alpha T}{e+f}$, weil $k > e$ und $p > f$ ist.

37 §.

Ein vereinbartes Saug- und Druckwerk vortheilhaft anzuordnen.

Aufl. Ein Theil der Kraft F ist wegen der Saugwerke, der übrige aber wegen der Druckwerke nöthig. Jener Theil sey V dieser W, so wird erfordert, daß $V : W = k : p$ sey, also $V + W$ oder $F : V = k + p : k$, und $F : W = k + p : p$, und man hat $V = \frac{k \cdot F}{k+p}$, $W = \frac{p \cdot F}{k+p}$. Für das Saugwerk ist nun die Wassermenge $= \frac{V\alpha T}{k}$, für das Druckwerk $= \frac{W\alpha T}{p}$, und beyde sind gleich, wie erfordert wird, weil $\frac{V}{k} = \frac{W}{p}$ ist. Ferner ist t für das Saugwerk und Druckwerk einerley, also hat man $\frac{a\sqrt{l}}{\delta\sqrt{g}}\,\psi = \frac{2a\sqrt{L}}{\sqrt{\lambda g}} = t$.

Wäre demnach t gegeben, oder könnte man t willkührlich annehmen, so muß man auch für $\frac{a}{\delta}$ eine solche Zahl annehmen, daß ψ entweder völlig oder beynahe $= \pi$ wird, alsdenn ist zugleich $k = \epsilon + \frac{2b}{\text{sinv.}\,\psi}$ bestimmt. Wenn überdem $\frac{a}{c}$ willkührlich genommen wird, so hat man auch $\lambda = \frac{4a^2 L}{gc^2 t^2}$, also $p = f + \lambda b$. Daraus wird $\beta = \frac{2b}{t}$, $M = \frac{F \alpha T}{k+p}$ und $a = \sqrt{\frac{M}{\frac{1}{4}\pi n \beta T}}$ gefunden. Weil nun die Verhältnisse $\frac{a}{\delta}$ und $\frac{a}{c}$ vorhin bestimmt sind, so hat man auch δ und c.

Der III. Abschnitt.

Von Anordnung der Sprützenkünste.

38 §.

Sprützenkünste sollen das Wasser nöthigen, daß es wie aus einem Springbrunnen mit einer beträchtlich grossen Geschwindigkeit aus der Mündung einer Aufsatzröhre hervorspringe, und hiernächst noch in freyer Luft zu einer beträchtlichen Höhe steige: sie heissen **Feuerspritzen**, wenn man sich ihrer bey entstandener Feuersbrunst zum Löschen bedient. Wenn
121 F. die Steigröhre EFG nur wenige Fusse hoch, und oben bey G mit einer solchen Aufsatzröhre versehen ist, wovon die Oefnung in Vergleichung mit den Querschnitten der Pumpenröhre sehr klein ist, so ist dies Druckwerk eine einfache Sprützenkunst. Auch eine

dop

doppelte Sprützenkunst kann vermittelst einer doppelarmigen Druckstange, die zwischen zwoen Druckpumpen wie ein Wagebalken in der Mitte unterstützt ist, durch Menschen in Bewegung gesetzt werden. Man stelle sich CA nach der andern Seite von C bis auf eine Länge von eben der Grösse als CA verlängert vor, so kann auf dieser Seite in einer Entfernung vom Bewegungspunct C, die der Entfernung CB gleich ist, noch eine Stange mit dem Kolben zur zweyten Druckpumpe herab hängen. Wenn alsdenn die Seitenröhren von beyden Pumpen in einer gemeinschaftlichen oben mit einer engen Gußmündung versehenen Steigröhre sich vereinigen; so ist die Sprützenkunst doppelt. Indem die arbeitenden Personen die Stange wechselsweise niederdrücken, so schöpft jedesmahl der in die Höhe steigende Kolben das Wasser in der einen Pumpe, wenn es der niedergehende aus der andern Pumpe wegdrückt. Die grossen Feuersprützen sind gemeiniglich doppelte Druckwerke, und beyde mit einer gemeinschaftlichen Steigröhre vereinigte Stiefel, so wie das Gestelle, welches der doppelarmigen Druckstange zur Unterstützung dient, stehen in einem hinlänglich grossen Gefäß, das auf einem Fuhrwerk befestiget ist, um es desto schneller von einem Ort zum andern zu bringen. Damit übrigens die Leute, welche an der Druckstange arbeiten sollen, in gleichem Abstande vom Bewegungspunct ihre Kraft anwenden können, wird jedem Arm die Gestalt einer Gabel gegeben, am äussersten Ende eines jeden von beyden Aesten der Gabel befindet sich ein Ring, damit durch beyde Ringe eine Queerstange in senkrechter Lage gegen die Druckstange durchgesteckt werden könne, woran mehr Personen zugleich,

gleich, ohne einander hinderlich zu seyn, ziehen oder drücken können.

39 §.

Die Abmessungen einer doppelten oder auch einfachen Sprützenkunst sind gegeben, auch ist die Kraft mit der Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle der Maschine gegeben: man soll finden, wie hoch das Wasser steigen, und wieviel Wasser die Kunst in gegebener Zeit ergiessen wird.

Aufl. 1. Es sey die Kraft so groß, als das Gewicht einer Menge Wasser, die den Raum V füllt, und α sey die Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle der Maschine, also das mechanische Moment der Kraft $V . \alpha$. Ferner sey der Druck der Kolben gegen das unter ihnen befindliche Wasser dem Gewicht einer Menge Wasser gleich, die den Raum K füllt, die Zeit eines Kolbenspiels $= t$, die Höhe des Zuges $= b$, die Geschwindigkeit der Kolben $\beta = \frac{2b}{t}$; so ist $V . \alpha = \frac{2Kb}{t} = K . \beta$. Weil nun die Einrichtung der Maschine als bekannt angenommen wird, so ist $\alpha : \beta$ ein bekanntes Verhältniß, und man hat $K = \frac{V . \alpha}{\beta}$. Die lothrechte Höhe über der niedrigsten Stelle des Kolbens, welche das steigende Wasser im leeren Raum und alle übrige Hindernisse der Bewegung beyseit gesetzt, erreichen würde, sey $= k$, der Durchmesser der Querschnitte der Stiefel $= a$, so ist $k = \frac{K}{\frac{1}{4}\pi aa}$. (55 §. Hydraul.) In der Zeit t ergießt sich

die

die Menge Wasser $\frac{1}{2}\pi aab$, und in jeder andern Zeit T die Menge $\frac{\frac{1}{2}\pi aab\mathrm{T}}{t} = \mathrm{M}$: mithin ist $\frac{b}{t} = \frac{\mathrm{M}}{\frac{1}{2}\pi aa\mathrm{T}}$, und dieser Werth in die Gleichung $\mathrm{V}\alpha = \frac{2\mathrm{K}b}{t}$ gesetzt giebt $\mathrm{V}\alpha = \frac{\mathrm{K}.\mathrm{M}}{\frac{1}{4}\pi aa\mathrm{T}}$. Ueberdem war $\mathrm{K} = \frac{1}{4}\pi aak$, also erhält man $\mathrm{V}\alpha = \frac{\mathrm{M}.k}{\mathrm{T}}$, und $\mathrm{V}\alpha\mathrm{T} = \mathrm{M}.k$, wie bey andern Pumpenkünsten. (27 §.)

Wird die lothrechte Höhe der Gußmündung über der niedrigsten Stelle der Kolben $= f$ gesetzt, so ist $k - f$ die Höhe, welche der lothrecht steigende Wasserstrahl im leeren Raum, und bey dem gänzlichen Mangel aller sonstigen Hindernisse der Bewegung erreichen würde. Setzt man die wirkliche Höhe, welche der steigende Wasserstrahl erreicht, $= e$, so ist nach Mariotts Regel (14 §. Hydraulik) $e = \sqrt{(\mathrm{E}(k-f) + \frac{1}{4}\mathrm{E}^2)} - \frac{1}{2}\mathrm{E}$, wenn man $\mathrm{E} = 300$ setzt, und die Höhen in Fussen ausdrückt. Demnach ist die lothrechte Höhe über der niedrigsten Kolbenstelle, auf welche die Sprützenkunst das Wasser hebt, $= e + f$, und k ist allemahl beträchtlich grösser als $e + f$. Es ist nemlich $k - f = e + \frac{e^2}{\mathrm{E}}$, also $k = f + e + \frac{e^2}{\mathrm{E}}$: mithin ist die Wassermenge $\mathrm{M} = \frac{\mathrm{V}\alpha\mathrm{T}}{k} = \frac{\mathrm{V}\alpha\mathrm{T}}{f+e+e^2:\mathrm{E}}$ allemahl beträchtlich kleiner als $\frac{\mathrm{V}\alpha\mathrm{T}}{f+e}$, und man kann diesen letzten Ausdruck nicht wie eine Gränze ansehen, der die Wassermenge durch eine vortheilhafte Anordnung der Maschine könnte sehr nahe gebracht werden.

2.) Bey der einfachen Sprützenkunst bleibt $k = \frac{K}{\frac{1}{4}\pi aa}$, und $V\alpha = K.\beta$; nur muß man die Zeit des Rückzuges von der Zeit unterscheiden, worin der Kolben das Wasser wegdrückt. Es sey die Zeit eines Kolbendrucks $= \vartheta$, und $\vartheta = \zeta t$, wenn t die Zeit eines Zuges und Rückzuges bezeichnet; so ist nun $\beta = \frac{b}{\vartheta}$ und in der Zeit t wird die Menge Wasser $= \frac{1}{4}\pi aab$, in der Zeit T also die Wassermenge $M = \frac{\frac{1}{4}\pi aabT}{t}$ weggesprützt. Ferner bleibt $V\alpha = \frac{Kb}{\vartheta} = \frac{Kb}{\zeta t}$, und es ist $\frac{b}{t} = \frac{M}{\frac{1}{4}\pi aaT}$, also $V\alpha = \frac{K.M}{\frac{1}{4}\pi aa\zeta T}$. Wird überdem $K = \frac{1}{4}\pi aak$ gesetzt, so erhält man $V\alpha = \frac{M.k}{\zeta T}$, und $M = \frac{V.\alpha.\zeta T.}{k}$.

40 §.

Eine so eingerichtete Sprützenkunst, wenn sie doppelt ist, wirkt ziemlich nahe ununterbrochen; wenn sie aber nur einfach ist, so ergießt sich während des Rückzuges aus der Gußmündung gar kein Wasser. Um sowohl in dem einen als auch vornemlich in dem zweyten Fall einen ununterbrochen steigenden Wasserstrahl zuwege zu bringen, verbindet man mit beyden Stiefeln, oder auch wohl nur mit einem Stiefel, wenn das Druckwerk einfach ist, den im 66 §. Hydraul. schon beschriebenen Heronsball unter dem Nahmen eines Compressions-Gefässes, welches die Professionfessionisten gewöhnlich den **Windkessel** nennen. Dies Gefäß wird aus Metall hinlänglich stark verfertiget, und mit dem einen Stiefel des einfachen, oder beyden Stiefeln des doppelten Druckwerks, vermittelst der Knieröhren so verbunden, wie es die 118 Figur vorstellet. Statt des aufrecht stehenden Rohrs, welches oben durch die Mitte des Deckels hindurch gehet, kann dies Compressionsgefäß ausser den mit Ventilen versehenen Oefnungen vor der Verbindungsröhre mit den Stiefeln noch eine oder zwo einander gegenüberstehende Oefnungen für die Abtheilungsröhren haben, die der Gußmündung das Wasser zuführen. Weil es bey den Feuersprützen nöthig ist, daß man die Richtung, nach welcher das Wasser aussprützt, nach Gefallen, wie es die jedesmahlige Nothwendigkeit erfodert, in der Geschwindigkeit verändern könne; so wird anstatt der Aufsatzröhre ein bewegliches Gußrohr angebracht. Man verfertiget auch Röhren aus starken Sohlleder unter dem Nahmen der ledernen **Schlangen**, die an der einen Seite mit dem Windkessel, oder statt dessen mit den Stiefeln selbst zusammen hängen, am andern Ende aber mit einem metallenen Gußrohr verbunden sind, womit der Rohrführer, wenn es nöthig ist, sich auf das Dach eines Hauses, oder in die innern Zimmer desselben hineinbegeben kann, um das Wasser überall, wo es nöthig ist, hinzubringen. Die Länge der ledernen Schlange richtet sich nach der jedesmahligen Absicht des Gebrauchs, um deßwillen werden Stücke von etwa 20 Fuß Länge an beyden Enden mit schicklichen Schrauben versehen, um sie vermittelst derselben, wenn es nöthig ist, ohne vielen Zeitverlust an einander zu fügen. Statt eines festen aufrecht stehenden

Rohrs, womit das Gußrohr vermittelst eines Gewindes verbunden ist, dient ebenfalls mit noch mehr Bequemlichkeit eine 6, 8, bis 10 Fuß lange lederne Schlange, die mit dem Gußrohr verbunden ist.

41 §.

Die Kraft ist gegeben, welche den Stempel gegen das Wasser im Druckstiefel preßt, und die Fläche der Ventilöfnung GH ist in Vergleichung mit den Querschnitten des Stiefels nur klein: man soll die Geschwindigkeit finden, womit das Wasser durch die Ventilöfnung in den Windkessel dringt, wenn bey Bearbeitung der Sprützenkunst alles schon in den Beharrungsstand gekommen ist.

Aufl. Es sey k die Höhe einer Wassersäule auf der Grundfläche des Kolbens, deren Gewicht der Kraft am Kolben gleich ist, und h sey die Barometerhöhe, so leidet das Wasser unter dem Kolben einen Druck, dessen Höhe $= k + h$ ist. Im Beharrungsstande sey die Luft im Windkessel μ mahl dichter als die natürliche, so leidet die höchste Fläche des Wassers im Windkessel einen Druck, dem die Höhe μh zugehört, und dieser Druck pflanzt sich gegen die Ventilöfnung fort. Wenn nun die Fläche eines Querschnitts vom Stiefel $= m^2$, die Fläche der Ventilöfnung $= n^2$, die jetzige Höhe des Wassers im Stiefel über der Ventilöfnung $= r$ gesetzt wird, die Höhe aber, welche der Geschwindigkeit des durch die Ventilöfnung strömenden Wassers zugehört $= u$, so ist $u = \frac{m^2}{m^2 - n^2}(h + k - \mu h + r)$. Aber hier ist alle-

mahl

mahl r in Vergleichung mit k sehr klein, und der Bruch $\frac{n^2}{m^2}$ wird auch nur klein angenommen: mithin ist beynahe $u = k - (\mu - 1)h$, und daraus findet man die gesuchte Geschwindigkeit $= 2\sqrt{gu}$.

Man setze den Durchmesser der Querschnitte des Stiefels $= a$, der Ventilöfnung $= \varepsilon$, so ist die Geschwindigkeit des Kolbens $= \frac{2\varepsilon^2}{a^2}\sqrt{gu}$. Die Zeit eines Kolbendrucks sey $= \vartheta$, und die ganze Höhe des Kolbenzuges $= b$, so ist $\vartheta = \frac{a^2 b}{2\varepsilon\sqrt{gu}}$. Wenn aber bey der doppelten Sprützenkunst t die Zeit eines Kolbenspiels ist, so hat man $\frac{2\varepsilon^2}{a^2}\sqrt{gu} = \frac{2b}{t}$, also $t = \frac{a^2 b}{\varepsilon^2\sqrt{gu}}$.

42 §.

Alle Abmessungen der mit dem Windkessel versehenen doppelten Sprützenkunst und die Kraft am Kolben sind gegeben: man soll die Geschwindigkeit finden, womit das Wasser aus der Gußrohrmündung sprützt.

Aufl. Weil die Fläche des Wassers im Windkessel einem Druck ausgesetzt ist, dem die Höhe μh zugehört, die Gußröhröfnung aber dem Druck der Atmosphäre, dessen Höhe h ist; so hat man die derjenigen Geschwindigkeit zugehörige Höhe, womit das Wasser aus der Gußöfnung sprützt $= \mu h - h - f$, (65 §. Hydraul.) wenn f die Höhe der Gußöfnung über der Wasserfläche im Windkessel bezeichnet. Um abzukürzen, setze man $(\mu - 1)h = \Pi$, und die Höhe, welche

welche der eben erwähnten Geschwindigkeit zugehört, $= q$, so ist $q = \Pi - f$. Der Durchmesser der Gußöfnung sey $= \omega$, die Geschwindigkeit des Kolbens $\frac{2b}{t} = \beta$, so ist $2\sqrt{gq} = \frac{a^2}{\omega^2} \cdot \beta$, und wenn $\frac{a^2}{\omega^2} = n$ gesetzt wird, so hat man $q = \Pi - f = \frac{n^2 \beta^2}{4g}$. Ferner ist $2\sqrt{gu} = \frac{a^2}{\varepsilon^2}\beta$, wenn also $\frac{a^2}{\varepsilon^2} = \nu$ gesetzt wird, so erhält man $u = \frac{\nu^2 \beta}{4g}$. Weil nun $\beta^2 = \frac{4g(\Pi - f)}{n^2}$ war, so wird auch $u = \frac{\nu^2}{n^2} \cdot (\Pi - f$. Eben diese Höhe ist $= k - \Pi$, (38 §.) also findet man $\frac{\nu^2}{n^2}(\Pi - f) = k - \Pi$, und daraus ferner $\left(1 + \frac{\nu^2}{n^2}\right)$ $\Pi = k + \frac{\nu^2}{n^2} f$, also $\Pi = \frac{n^2 k + \nu^2 f}{n^2 + \nu^2}$, oder $\Pi = \frac{n^2 k}{n^2 + \nu^2} + \left(1 - \frac{n^2}{n^2 + \nu^2}\right) f$, und das giebt $q = \Pi - f = \frac{n^2 (k - f)}{n^2 + \nu^2}$, woraus die gesuchte Geschwindigkeit $= 2\sqrt{gq}$ gefunden wird.

Je kleiner die Zahl $\nu = \frac{a^2}{\varepsilon^2}$ in Vergleichung mit $n = \frac{a^2}{\omega^2}$, das heißt, je kleiner $\frac{1}{\varepsilon^2}$ in Vergleichung mit $\frac{1}{\omega^2}$, oder ω^2 in Vergleichung mit ε^2 seyn kann,

desto

desto näher kommt Π der Höhe k, also muß ε^2 in Vergleichung mit ω^2 so groß, oder die Zahl $\frac{n}{v} = \frac{\varepsilon^2}{\omega^2}$ so groß seyn, als die übrigen Umstände zulassen: wie denn auch die Rechnung voraussetzt, daß ε^2 in Vergleichung mit a^2 oder der Bruch $\frac{\varepsilon^2}{a^2}$ noch ziemlich klein bleiben müsse.

43 §.

Die Wassermenge ist gegeben, welche die Sprützenkunst in gegebener Zeit auf eine gegebene Höhe bringen muß: man soll eine vortheilhafte Anordnung derselben angeben.

Aufl. Die gegebene lothrechte Höhe über dem Boden des Stiefels oder des Windkessels sey $= A$. Wenn alsdenn die übrigen Buchstaben ihre Bedeutung wie im vorigen §. behalten, so findet man nach Mariotts Regel $q = A - f + \frac{(A-f)^2}{300}$, und das Wasser muß mit der Geschwindigkeit $2\sqrt{gq}$ aus dem Gußrohr sprützen. Aus der Gleichung $q = \frac{n^2(k-f)}{n^2 + v^2}$ findet man ferner $k = f + \frac{n^2 + v^2}{n^2} q = f + q + \frac{v^2}{n^2} q$, und man kann die Zahl $\frac{n}{v} = \frac{\varepsilon^2}{\omega^2}$ willkührlich und etwas groß annehmen, da dann k bestimmt ist. Weil jedoch $v = \frac{a^2}{\varepsilon^2}$ war, und wenigstens $\frac{1}{v^2} = \frac{\varepsilon^4}{a^4}$ ein ziemlich kleiner Bruch werden muß, so muß hiernächst, wenn ε und ω selbst bestimmt sind, auch a so genommen

men werden, damit dieser Bedingung ein Genüge geleistet werde. Die gesammte Kraft aller Arbeiter an einer von beyden Querstangen sey dem Gewicht einer Wassermenge gleich, die den Raum V füllet, und die Geschwindigkeit $= \alpha$, womit sie die Querstangen bewegen können, ohne zu bald zu ermüden, so hat man $V \alpha T = Mk$, also $V = \frac{M.k}{\alpha T}$. Ist alsdenn die Kraft eines Arbeiters so groß, als das Gewicht von η Cubicfuß Wasser und die Anzahl der Arbeiter an jeder Querstange $= m$, so ist $V = m.\eta$, und die Zahl der benöthigten Arbeiter ist $2m = \frac{2V}{\eta}$.

Durch die Gußrohröfnung sprützt in einer Secunde die Wassermenge $\frac{1}{4} \Pi \omega\omega . 2\sqrt{gq}$, mithin in der Zeit T die Wassermenge $M = \frac{1}{2} \pi \omega\omega T \sqrt{gq}$, und das giebt $\omega = \sqrt{\frac{M}{\frac{1}{2}\pi T \sqrt{gq}}}$: mithin ist auch $\varepsilon = \omega \sqrt{\frac{n}{\nu}}$ bekannt, und man kann a so annehmen, daß $\frac{\varepsilon^4}{a^4}$ ein kleiner Bruch wird. Alsdenn hat man $n = \frac{a^2}{\omega^2}$, und daraus wird $\beta = \frac{2\sqrt{gq}}{n}$ gefunden, da dann das Verhältniß $\alpha : \beta$ die Anordnung der Maschine weiter bestimmt.

Unter mehrern Arten die Kolben zu bewegen behält noch immer die oben schon beschriebene vermittelst der doppelarmigen Druckstange den Vorzug, da dann $\alpha : \beta$ dem Verhältniß des längern Hebelsarms CA zum kürzern CB (121 Fig.) gleich seyn muß.

Wäre

Wäre statt der Wassermenge M für die Zeit T die Zahl der Arbeiter gegeben, so setze man ihre halbe Anzahl $= m$, und nehme $V = m\eta$. Ueberdem ist α gegeben, also hat man $M = \frac{V\alpha T}{k}$, nachdem k gefunden ist, und rechnet übrigens wie vorhin weiter.

44 §.

Die Sprützenkunst ist einfach und mit dem Windkessel versehen, auch ist die Kraft am Kolben gegeben; man soll die Geschwindigkeit finden, womit das Wasser durch die Gußröhröfnung sprützt, nachdem alles schon im Beharrungsstande ist.

Aufl. Die Zeit eines Kolbendrucks sey $\vartheta = \zeta t$, und die Höhe des Drucks gegen das Wasser unter dem Kolben $= k$. Die Bedeutung der übrigen Buchstaben aus dem 42 §. behalte man ebenfalls bey; so bleibt $u = k - (\mu - 1)h$, oder $u = k - \Pi$, und die gesuchte Geschwindigkeit ist $= 2\sqrt{gq}$, weil q die dazu gehörige Höhe bezeichnet. In der Zeit t geht durch die Gußrohrmündung die Wassermenge $= \frac{1}{4}\pi\omega\omega t \,.\, 2\sqrt{gq}$, und in eben der Zeit tritt in den Windkessel die Wassermenge $= \frac{1}{4}\pi aab$. Ferner ist nun $b = \beta\vartheta = \beta . \zeta t$, wenn also jene beyden Wassermengen gleich gesetzt werden, so giebt das $\frac{1}{4}\pi aa\beta \,.\, \zeta t = \frac{1}{4}\pi\omega\omega t \,.\, 2\sqrt{gq}$, also $\frac{aa}{\omega\omega}\beta = \frac{2\sqrt{gq}}{\zeta}$, und $q = \frac{n^2 . \zeta^2 . \beta^2}{4g}$. Ueberdem bleibt $q = \Pi - f$, also hat man $\frac{n^2\zeta^2\beta^2}{4g} = \Pi - f$. Weiter war $2\sqrt{gu} = \frac{a^2}{\varepsilon^2}\beta = \nu\beta$, und

$u =$

$u = \frac{\nu^2 \beta^2}{4g}$, also $\frac{\beta^2}{4g} = \frac{u}{\nu^2}$, und es ist $\frac{n^2 \zeta^2 u}{\nu^2} =$ $\Pi - f$. Setzt man in dieser Gleichung $k - \Pi$ statt u, so wird $\frac{n^2 \zeta^2 (k - \Pi)}{\nu^2} = \Pi - f$, und man findet $\left(1 + \frac{n^2 \zeta^2}{\nu^2}\right)\Pi = f + \frac{n^2 \zeta^2 k}{\nu^2}$, also $\Pi =$ $\frac{n^2 \zeta^2 k + \nu^2 f}{n^2 \zeta^2 + \nu^2}$, und das giebt $q = \Pi - f = \frac{n^2 \zeta^2 (k - f)}{n^2 \zeta^2 + \nu^2}$.

45 §.

Eine einfache Sprützenkunst mit dem Windkessel vortheilhaft anzuordnen, wenn die Wassermenge gegeben ist, welche die Kunst auf eine gleichfalls gegebene Höhe bringen soll.

Aufl. Aus der gegebenen Höhe A wird q wie im 43 §. gefunden. Ferner ist $q = \frac{n^2 \zeta^2 (k - f)}{n^2 \zeta^2 + \nu^2}$, also $k = f + q + \frac{\nu^2}{n^2 \zeta^2} q$, und wenn die Zahl $\frac{n^2}{\nu^2}$ mit Beobachtung der im 43 §. gegebenen Maxime willkührlich angenommen wird, so ist k bestimmt, also $V = \frac{Mk}{\alpha \zeta T}$, und daraus die Zahl aller nöthigen Arbeiter $m = \frac{V}{\eta}$. Ueberdem bleibt $\omega^2 = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi T \sqrt{gq}}$, also ist $\varepsilon^2 = \frac{n}{\nu}\omega^2$ bestimmt, und man nimmt a so an, daß $\frac{\varepsilon^4}{a^4}$ ein kleiner Bruch wird. Alsdenn ist

$\alpha = \frac{a^2}{\omega^2}$, und $\beta = \frac{2\sqrt{gq}}{n\zeta}$, mithin hat man das Verhältniß $\alpha : \beta$, welches das Verhältniß der Entfernungen CA : CB für die einarmige Druckstange bestimmt.

46 §.

Wenn man unter den Ventilen im Boden beyder Stiefel einer Feuersprütze eine wagrecht liegende Verbindungsröhre anbringt; so kann diese Verbindungsröhre wiederum mit einer Saugröhre verbunden werden, und man hat alsdenn ein vereinbartes Saug- und Druckwerk. Eben so läßt sich unter dem Ventil im Boden des Stiefels einer Feuersprütze, deren Druckwerk nur einfach ist, eine Saugröhre anbringen. Die Bequemlichkeit erfordert, daß diese Saugröhre nach Gefallen weggenommen werden könne, und daß sie selbst einige Biegung leide, um sie nach Bedürfniß in einen Brunnen, oder ein sonst vorhandenes Wasser herablassen zu können. Deßwegen setzt man sie entweder aus mehrern metallenen Röhren vermittelst ganz kurzer lederner Schlangen zusammen, oder die ganze Saugröhre wird, wie sonst eine Leitschlange aus starkem Leder gemacht. Im letzten Fall aber würde die äussere Luft eine solche lederne Schlange zusammen drücken, wenn die innere verdünnt wird: und das zu verhüten, setzt man in die Schlange in kurzen Entfernungen von einander metallene Ringe ein, welche das Leder aus einander halten, und versiehet das innere der Röhre überdem noch mit einer Art weicher Kütte, um das Eindringen der äussern Luft desto besser abzuhalten.

47 §.

Eine doppelte oder auch einfache Sprützenkunst zu ordnen, wenn sie zugleich mit einem Saugwerk versehen werden soll.

Aufl. 1.) Wenn e und A die lothrechten Höhen sind, worauf die Sprütze das Wasser anfangs saugen, hernach aber weiter hinauf drücken soll; wenn ferner k und p die Höhen einer solchen Wassersäule bezeichnen auf der Grundfläche des Kolbens, deren Gewicht den zum Saugen und Drücken nöthigen Kräften gleich sind, F aber die Wassermenge bezeichnet, deren Gewicht der ganzen an einer Querstange angebrachten Kraft gleich ist; so hat man die Wassermenge $M = \frac{F\alpha T}{k+p}$. (35 §.) Ein Theil der Kraft F wird zum Saugen, der andre zum Drucken erfordert: wenn also jener $= V$, dieser $= W$ ist, so hat man $V = \frac{kF}{k+p}$, $W = \frac{pF}{k+p}$, und $M = \frac{V\alpha T}{k} = \frac{W\alpha T}{p}$. (39 §.) Aus A findet man q nach Mariots Regel, und überdem ist

$$k = e + \frac{2b}{\sin v\, \psi}, \qquad p = f + q + \frac{v^2}{n^2} q,$$

$$t = \frac{a\sqrt{l}}{\delta\sqrt{g}} \cdot \psi, \qquad n = \frac{a^2}{\omega^2}, \; v = \frac{a^2}{\varepsilon^2}.$$

Nun kann man zuerst $\frac{a}{\delta}$ willkührlich annehmen, so hat man $\psi = \frac{\delta\sqrt{g}}{a\sqrt{l}} t$, denn t ist beym Gebrauch der Druckstange schon bestimmt. Ferner nimmt man für

für $\frac{\nu}{n} = \frac{\omega^2}{\varepsilon^2}$ einen kleinen Bruch an, so ist p bestimmt, und man hat auch $\omega = \sqrt{\frac{M}{\frac{1}{2}\pi T \sqrt{gq}}}$, wenn M gegeben ist, mithin ferner $\varepsilon = \omega\sqrt{\frac{n}{\nu}}$. Nunmehro kann a so angenommen werden, daß auch $\frac{\varepsilon^4}{a^4}$ noch ein kleiner Bruch wird, so ist $n = \frac{a^2}{\omega^2}$ bestimmt, und $\beta = \frac{2\sqrt{gq}}{n}$, mithin ferner $b = \frac{1}{2}\beta t$, also hat man auch $k = e + \frac{2b}{\text{sinv}\,\psi}$, und findet $F = \frac{M(k+p)}{\alpha T} = \eta \cdot m$.

Wäre statt der Wassermenge M die Zahl der Arbeiter gegeben, so hätte man aus ihrer halben Anzahl m die Kraft $V = m\eta$, und daraus $M = \frac{F\alpha T}{k+p}$, woraus ω wie vorhin gefunden wird. Man muß aber ausser der Höhe p vorher auch $k = e + \frac{2b}{\text{sinv}\,\psi}$ dadurch bestimmen, daß man b willkührlich annimmt, so ist zugleich $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{w}{b}$ bestimmt. (35 §.)

2.) Für die einfache Sprützenkunst ist $M = \frac{F\alpha\zeta T}{k+p}$, und $p = f + q + \frac{\nu^2}{n^2\zeta^2}q$, so wie $\beta = \frac{2\sqrt{gq}}{n\zeta}$ und $\zeta t = \vartheta = \frac{a\sqrt{l}}{2\delta\sqrt{g}}\psi$, mithin $\psi = \frac{2\delta\zeta t\sqrt{g}}{a\sqrt{l}}$. Aus ζ und $\frac{\nu}{n}$ wird p, so wie k aus ψ

und b bestimmt, und hiernächst findet man M oder F $= \eta m$ aus der Gleichung $M(k+p) = F\alpha\zeta T$, und $\omega = \sqrt{\frac{M}{\frac{1}{2}\pi T \sqrt{gq}}}$, so wie $\varepsilon = \omega\sqrt{\frac{n}{\nu}}$, und $n = \frac{2\sqrt{gq}}{\beta} = \frac{a^2}{\omega^2}$.

Der IV. Abschnitt.

Vom unterschlächtigen Wasserrade und dessen Effect.

48 §.

Ein Rad, das durch den Stoß eines fliessenden Wassers in Bewegung gesetzt werden soll, muß an seinem Umfange so eingerichtet seyn, daß es allemahl dem Wasser eine hinlänglich breite Fläche entgegen setzt, und das erreicht man durch die am Umfange desselben eingesetzten Schaufeln. Wenn das Rad die verticale Stellung hat, und seine Welle horizontal liegt; so kann das Wasser den Umlauf desselben auf eine zwiefache Art bewirken, nachdem es entweder unter dem Rade wegfließt, oder so geleitet ist, daß es von oben herab auf das Rad fällt. Im ersten Fall heißt es ein unterschlächtiges Wasserrad, der Umlauf desselben ist ein Effect des Wasserstosses gegen die Schaufeln, DE, *de*, und diese werden ge-
124 Fig. wöhnlich zwischen zweenen verticalen Reifen in einer solchen Lage eingesetzt, daß ihre Ebenen durch die horizontale Umlaufsaxe des Rades gehen: es heißt alsdenn ein Staber-Rad. Wenn gleich das Rad nur einen

einen Reifen hat, wie das sogenannte Strauber-Rad, so werden doch die Schaufeln übrigens am Umfang desselben in eben der Lage eingesetzt. Die Reifen mit den dazwischen eingesetzten Schaufeln machen den **Kranz** des Rades aus, und derselbe hat 128
beym **oberschlächtigen** Rade sonst alle Aehnlichkeit Fig.
mit dem Staberrade: allein jede Schaufel, wie RPS, ist nun aus zweyen ungleich breiten Stücken PR, PS, unter einem schicklichen Winkel zusammengesetzt. Von jeder Schaufel wird der breitere Theil PR, der die **Stoßschaufel** heißt, so eingesetzt, daß derselbe auf der Seite, wo das Wasser dazwischen fällt, in paralleler Lage mit der Axe des Rades schräge aufwärts stehet. Der ganze Kranz ist von der innern Seite geschlossen, und der schmalere Theil PS einer jeden gebrochenen Schaufel, der auch die **Kropfschaufel** heißt, schließt an die innere Bekleidung an. Solchergestalt giebt jede Schaufel gleichsam einen Kasten ab, der das Wasser zum Theil auffängt, und es allererst wieder ausgießt, wenn er beym Umlauf des Rades fast die unterste Stelle in FMN erreicht hat. Das Rad wird alsdenn durchs Gewicht des in den Kästen aufgefangenen Wassers umgetrieben, und weil diese Kästen gleichsam Wassersäcke vorstellen, so heissen die oberschlächtigen Räder auch wohl Sackräder.

49 §.

Beym unterschlächtigen Rade sucht man es, wo möglich, in die Wege zu richten, daß das Wasser mit einer etwas beträchtlichen Geschwindigkeit an die Schaufeln anschlage, und um deßwillen wählt man auf kleinen Flüssen oder Bächen eine solche Stelle für das Rad, woselbst entweder schon ein natürlicher Was-

serfall vorhanden ist, oder doch durch Kunst ein Wasserfall zuwege gebracht werden kann, ohne daß solches andre nachtheilige Folgen nach sich ziehet. Zu dem Ende wird quer durch den Fluß ein Damm angelegt, über den das Wasser gleichsam als über eine künstlich angelegte Untiefe hinüber stürzt. Auf den Rücken des Dammes, wovon KLS in der 124 Figur einen verticalen Durchschnitt nach der Länge mit der Richtung des Flusses parallel vorstellt, wird der sogenannte
124 125 Fig. Fachbaum L oder **Grundbaum** wagrecht gelegt, und über demselben kommt eine Wand zu stehen, die mit Oefnungen versehen ist, welche durch vorgesetzte in Falzen auf und niederwärts bewegliche **Schutzbretter** Pp geöfnet, und wieder geschlossen werden können. Die 124 Figur stellet alles im Profil nach der Länge des Flusses vor, L ist der Grundbalken, KL die **Vorarche**, LS ein **Gerinne**, worin das Rad hängt, LP die Oefnung durch welche das Wasser auf das Rad stürzt, Pp das in die Höhe gezogene Schutzbrett. Den übrigen ganzen Bau, welcher bey Mühlen und andern Maschinen, wenn sie durch unterschlächtige Wasserräder getrieben werden, das **Grundwerk** heißt, stellet die 125 Fig. im Grundriß vor. In derselben ist *ab* die Mittellinie vom ganzen Grundwerk, E die Stelle der niedrigsten Schaufel, da wo sie den ganzen Wasserstoß auffängt, *de* der Grundbalken, und L dessen mittelste Stelle. Vom Grundbalken L bis zur niedrigsten Schaufel E giebt man dem Gerinne parallele Seitenwände *ec*, *dh*, und die Breite richtet sich nach der Breite des Rades. Die obere oder **Vorarche** *pedq* erhält aus einander laufende Seitenwände *ep*, *dq*, damit sie das Wasser in hinlänglicher Menge auffangen. Uebrigens aber muß das

das Wasser, nachdem der Stoß gegen die unterste Schaufel seine Wirkung gethan hat, sogleich wegfallen: und um deßwillen müssen auch die Seitenwände *cm*, *hn*, des Unterfluthers aus einander laufen. Wie nun der ganze Bau entweder aus Holzwerk, oder Mauerwerk, aufgeführt werden muß, das zu lehren, gehört eigentlich hieher nicht, sondern zur **Wasserbaukunst**, die für sich, eben so, wie die bürgerliche und Kriegsbaukunst, auch die Schifsbaukunst, einen besondrer Theil der Practischen Mathematik ausmacht, und gewöhnlich den Nahmen der **Hydrotechnik** führet. Ausser Herrn Silberschlags schon einigemahl angeführten **Hydrotechnik** kann man die unter uns nun schon hinlänglich bekannte Uebersetzung von Belidors **Wasserbaukunst** besonders den 1sten Theil, und Beyers Schauplatz der **Mühlenbaukunst** hievon nachsehen.

50 §.

Bey geschlossenen Schutzbrettern kommt das Wasser oberhalb des Grundbalkens zum Stillstande, und die Wasserfläche MN zunächst vor den Schutzbrettern wird wagrecht: sie steigt auch wegen des beständigen Zuflusses nach und nach höher. Auch unterhalb des Wasserrades wird nun das Wasser ruhig, und der Wasserspiegel in der Nähe desselben wagrecht, wenn der Zufluß durch die Schutzbretter eine zeitlang nachgelassen hat. Es wird von der Jahrszeit und Witterung abhängen, wie tief bey geschlossenen Schutzbrettern sich der Spiegel des Unterwasser erniedriget: deßwegen hat man es gewöhnlich nicht in seiner Gewalt, den Bau unter dem Rade, oder den sogenannten **Radestuhl**, in der Höhe anzuordnen, daß bey geschlossenen Schutzbrettern das Rad zu jeder Jahrs-

124 Fig.

zeit und bey jeder Witterung ganz über dem Spiegel des Unterwassers hänge. Gemeiniglich genügt es, wenn das Rad nur beym mittlern Wasserstande vom Unterwasser frey ist. Weiß man aus der Erfahrung, daß zu gewissen Jahrszeiten die untern Fluthen lange anhalten, und den Umlauf des Rades zu sehr hemmen würden, so ordnet man alles so an, daß sich das Wasserrad mit seiner Welle, und den Lagern, worauf die Zapfen ruhen, um einige Fuß höher heben, und hiernächst wieder senken läßt. Ein solches Werk heißt ein **Ziehe-Pansterwerk**, und die Absicht desselben wird am besten erreicht, wenn die Gerinne oder Unterfluther ebenfalls so angelegt sind, daß ihr Boden bey hohen Stauwasser in die Höhe geschroben werden kann. M. s. Silberschlags Hydrotechnik 2ter Theil, 625 §., 204 S.

51 §.

Von der Höhe des obern Wasserspiegels bey geschlossenen Schutzbrettern über dem untern, oder dem Gefälle des Flusses an der Stelle, wo das Grundwerk mit dem Rade erbauet ist, hängt der Effect des letztern hauptsächlich ab. Um dies Gefälle möglichst zu nutzen, müste das Rad so hängen, daß es an seiner untersten Stelle E den Spiegel des Unterwassers berührte: doch ist es auch kein Fehler, wenn es einige Zolle höher liegt, und das Gerinne, dem man unterhalb des Rades doch noch einige Zolle Gefälle geben muß, bey geschlossenen Schutzbrettern völlig trocken wird: um so weniger kann alsdenn das Unterwasser bey gezogenen Schutzbrettern einen Rückstau verursachen, der dem Umlauf des Rades hinderlich ist. Uebrigens kommt es bey Verfertigung des Rades noch auf die gehörige Austheilung der Schaufeln, und die

die richtige Bestimmung ihrer Anzahl an. Es stelle PT die Richtung und zugleich die höchste Fläche des unter dem Rade wegfliessenden Wassers vor, die Schaufel DE sey in der Stellung ins Wasser eingetaucht, daß ihre Fläche zugleich auf der Richtung des Wassers senkrecht ist, und QR sey die nächstfolgende Schaufel. Wenn nun von der letztern ebenfalls schon ein Theil ins Wasser eingetaucht wäre; so würde ihr eingetauchter Theil von der senkrechten Schaufel DE den Stoß des Wassers zum Theil abhalten, der eingetauchte Theil von QR selbst aber würde nur in schiefer Richtung vom Wasser getroffen werden, welches nicht so vortheilhaft ist, als wenn das Wasser die Fläche der ganzen Schaufel DE senkrecht trift. Um diesen Vortheil zu erhalten, muß man die Schaufeln am Umfang des Rades so vertheilen, daß die nachfolgende Schaufel QR mit dem untern Ende bey R die höchste Fläche PT des unter dem Rade wegfliessenden Wassers in dem Augenblick allererst berühre, da die senkrechte Schaufel DE den senkrechten Stand zu verlassen anfängt. 124 Fig.

52 §.

Der Halbmesser *CE* des Rades, bis an den äussern Umfang des Kranzes genommen, ist gegeben, man soll finden, wie die Höhe der Schaufeln von ihrer Anzahl, oder umgekehrt, die Anzahl der Schaufeln von ihrer Höhe abhängen müsse; damit die ganze Fläche jeder Schaufel vom Wasser senkrecht getroffen werden könne. 124 Fig.

Aufl. Es sey die Anzahl der Schaufeln $= n$, so ist der Winkel DCQ oder ECR $= \frac{360°}{n}$, weil die

Schaufeln bey gleicher Höhe gleichweit aus einander stehen müssen, und DE ist der Quersinus dieses Winkels für den Halbmesser CE = r. Wenn also die Höhe der Schaufel DE = a gesetzt wird, so hat man

$$a = r \text{sinv.} \frac{2\pi}{n}.$$

Umgekehrt ist $\frac{2\pi}{n} = \text{A sinv.} \frac{a}{r}$, also $n = \frac{2\pi}{\text{A sinv.} (a:r)}$. Demnach kann man auch den Winkel suchen, welchem der Quersinus $\frac{a}{r}$, oder statt dessen der Cosinus $\frac{r-a}{r}$ zugehört, und alsdenn 360° durch die Zahl der Grade, welche der erwehnte Winkel fasset, dividiren, so giebt der Quotient die Anzahl der Schaufeln.

53 §.

124 Fig. Die Höhe LN, um welche der Spiegel MN des Oberwassers über dem Grundbalken erhaben ist, heißt der Wasserstand, und davon hängt die Geschwindigkeit ab, womit das Wasser nach Aufziehung des Schutzbretts durch die Oefnung LP stürzt. Aus dem 24 §. der Hydraulik weiß man, daß nicht alle Wassertheilchen mit gleicher Geschwindigkeit durchfliessen, und daß in jeder Tiefe NZ das Wasser mit einer Geschwindigkeit ausfliesse, die der Höhe ZN zugehört; wobey jedoch, wie auch a. a. O. ist erinnert worden, auch hier zu bemerken ist, daß der Wasserspiegel MN nicht wagrecht bleiben könne, wenn nach dem Aufziehen des Schutzbretts das Wasser durch PL hindurch stürzt. Indem die Wassertheilchen weiter auf dem geneigten Gerinne herab fallen, nimmt ihre Ge-

schwin-

schwindigkeit noch mehr zu, und wenn das bey P durchgeflossene Wassertheilchen die Schaufel DE bey D trift, so langt es in D mit einer Geschwindigkeit an, welche einer Höhe zugehört, die der Tiefe VD der Stelle D unter dem Spiegel MN des Oberwassers gleich ist. Eben so stößt das Wasser an jede andre Stelle A der Schaufel mit einer Geschwindigkeit, die einer Höhe zugehört, welche der Tiefe dieser Stelle unter dem obern Wasserspiegel MN gleich ist.

In der 126 Figur stelle das Rechteck FBCG die Fläche der Schaufel vor, so sind vermöge der verticalen Stellung des Rades die untere und obere Grundlinie BC und FG horizontal, die Seitenlinien BF, CG, aber, welche zugleich die Höhe der Schaufel vorstellen, liegen in verticalen auf der Axe des Rades senkrechten Ebenen, und was in der 126 Figur DE vorstellet, ist eigentlich die mit den Seitenlinien BF, CG, parallele Mittellinie der Schaufel. Wenn nun MN, mn, ein Paar wagrechte mit der Grundlinie BC parallel laufende Linien sind, und ihre Entfernung Pp von einander sehr klein ist; so stößt das Wasser gegen alle Stellen, die zu dem Rechteck MmnN gehören mit gleicher Geschwindigkeit, die zu einer Höhe gehört, welche der Tiefe desselben unter dem Spiegel des Oberwassers gleich ist. Setzt man diese Tiefe $= x$, das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= 1$, so leidet das Rechteck MmnN im ersten Augenblick, wenn die Schaufel noch ruhet, einen Druck $=$ MN $. Pp . x$. 126 Fig.

54 §.

Die Fläche der Schaufel sey nun in soviele dergleichen kleine Rechtecke, als man will getheilt, und in der Lage DE, welche die 124 Figur vorstellt, sey ihre

ihre Neigung gegen den Horizont $= \alpha$: so erhellet, daß sie wegen des Wasserstosses völlig demselben Druck ausgesetzt sey, den sie leiden würde, wenn sie ein Stück der Seitenfläche OE eines bis an NO mit Wasser gefüllten Gefässes OELN wäre: denn alsdenn wären ebenfalls die dem Druck auf jeder Stelle zugehörige Höhe der Tiefe dieser Stelle unter der höchsten Wasserfläche NO gleich. Wenn also DV und EW lothrecht sind, und die Länge der Schaufel $= b$ gesetzt wird; so ist im ersten Anfang der Bewegung der Wasserstoß gegen die Schaufel $= \frac{1}{2} b(OE^2 - OD^2) \sin\alpha$, und wenn die mittlere Richtung des Stosses durch A geht, so ist $OA = \frac{\frac{2}{3}(OE^3 - OD^3)}{OE^2 - OD^2}$ 20 §. Hydrost.

Die so gefundene Kraft des Wasserstosses sey $= P$, so ist auch $P = \frac{1}{2} b(OE - OD)(OE + OD) \sin\alpha$, und $OE - OD$ ist die Höhe der Schaufel, so wie $OE \sin\alpha = EW$, und $OD \sin\alpha = OV$. Wenn demnach $DE = a$ gesetzt wird, so ist $P = a \cdot b \cdot \frac{1}{2}(EW + DV)$, und dieser Druck wäre eben so groß, wenn alle Wassertheilchen mit einer Geschwindigkeit anstiessen, die der Höhe $\frac{1}{2}(EW + DV)$ zugehörte.

Noch setze man $OE = p$, $OD = q$, so ist $OA = \frac{\frac{2}{3}(p^3 - q^3)}{p^2 - q^2} = \frac{\frac{2}{3}(p^3 - q^3)}{(p+q)(p-q)}$, und die Division giebt $\frac{p^3 - q^3}{p - q} = p^2 + pq + q^2$; also ist $OA = \frac{2}{3} \cdot \frac{p^2 + pq + q^2}{p+q}$, oder $OA = \frac{2}{3} \cdot \frac{(p+q)^2 - pq}{p+q} = \frac{2}{3}\left(p + q - \frac{pq}{p+q}\right)$. Man ziehe hievon $\frac{1}{2}(p+q)$ ab, ab, so findet man $OA - \frac{1}{2}(p+q) = \frac{1}{6}(p+q) - \frac{\frac{2}{3}pq}{p+q} = \frac{\frac{1}{6}(p+q)^2 - \frac{2}{3}pq}{p+q}$. Der Zähler ist $= \frac{1}{6}p^2 - \frac{1}{3}pq + \frac{1}{6}q^2 = \frac{1}{6}(p-q)^2$, also $OA - \frac{1}{2}(p+q) = \frac{\frac{1}{6}(p-q)^2}{p+q}$, und man erhält $OA = \frac{1}{2}(p+q) + \frac{\frac{1}{6}(p-q)^2}{p+q}$.

55 §.

Diese Schlüsse ergeben, daß der Punct A, als der Mittelpunct des Stosses, etwas niedriger als die Mitte der Schaufel liege, wie auch aus der Natur der Sache von selbst daher folgt, weil niedrigere Stellen der Schaufel mehr Druck leiden, als höhere. Gewöhnlich beträgt p ohngefehr 4 Fuß und q etwa 3 Fuß, also $p-q$ einen Fuß, und das giebt $\frac{\frac{1}{6}(p-q)^2}{p+q} = \frac{1}{42}$ Fuß ohngefehr $\frac{1}{4}$ Zoll. Wenn also die gröste Schärfe der Rechnung eben nicht erforderlich ist, so kann man die Mitte der Schaufel für den Mittelpunct des Stosses, mithin für die Stelle annehmen, welche die Kraft des Wasserstosses unmittelbar angreift. Weil überdem $\frac{1}{2}(EW + DV)$ die Tiefe der mittlern Stelle der Schaufel unter dem Spiegel des Oberwassers ist, so berechnet man die Kraft des Stosses so, als wenn alle Wassertheilchen mit einer Geschwindigkeit anstiessen, wozu eine Höhe gehört, die der Tiefe der mittlern Stelle der Schaufel unter dem obern Wasserspiegel gleich ist.

56 §.

Wenn das Rad schon umläuft, mithin die Schaufeln selbst mit in Bewegung sind, so wirkt das Wasser

ser nur mit seiner respectiven Geschwindigkeit auf die Schaufeln. Um nun nicht allein die ganze relative Kraft des Wasserstosses gegen die Schaufeln, sondern auch den Mittelpunct des Stosses zu finden, wäre eine besondre Untersuchung nöthig: denn es hängt nicht allein die Geschwindigkeit des Wassers, womit dasselbe ein jedes von den Rechtecken MmnN trift, worin die Fläche der ganzen Schaufel eingetheilt ist, von der Tiefe desselben unter der Fläche des Oberwassers ab, sondern es ist auch die Geschwindigkeit eines jeden dieser Rechtecke dem Abstande desselben von der Umlaufsaxe des Rades proportional. Weil jedoch weder die Geschwindigkeiten des anschlagenden Wassers, noch auch die Geschwindigkeiten der Schaufel in verschiedenen Entfernungen von der Umlaufsaxe des Rades, sehr erheblich verschieden sind; so kann man die Rechnung so führen, als wenn alle Wassertheilchen mit der Geschwindigkeit $2\sqrt{g \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{EW}+\mathrm{DV})}$ anstiessen, und alle Elemente der Schaufel mit eben der Geschwindigkeit auswichen, womit die mittelste Stelle A ausweicht. Alsdenn ist $\frac{1}{2}(\mathrm{EW}+\mathrm{DV})$ das Gefälle des Triebwassers bis auf die Mitte der untersten Schaufel genommen. Wird dies Gefälle $= h$, die Geschwindigkeit der Schaufel, oder eigentlich ihrer mittelsten Stelle $= c$, die Höhe der Schaufel $= a$, ihre horizontale Länge $= b$ gesetzt, so ist die relative Geschwindigkeit des Wassers $= 2\sqrt{gh} - c$, und die relative Kraft des Wasserstosses $= a \cdot b$

$$\cdot \frac{(2\sqrt{gh}-c)^2}{4g} = a \cdot b \left(\sqrt{h} - \frac{c}{2\sqrt{g}}\right)^2.$$

57 §.

Wenn die Höhe LN des obern Wasserspiegels über dem Grundbalken der **Wasserstand** heißt, (53 §.) so so ist eigentlich diese Höhe für den Zustand des Oberwassers zu verstehen, wobey das Schutzbrett geschlossen ist. Beym aufgezogenen Schutzbrett, wenn das Wasser durch die Oefnung stürzt, kann der Wasserspiegel nicht horizontal bleiben, er wird sich vielmehr von M nach N senken: indessen pflegte man dabey auf ein Paar Zolle Unterscheid nicht zu sehen, weil ohnehin bey der Rechnung die größte Schärfe nicht erreicht werden kann. Die Höhe PN heißt die **Höhe des Druckwassers.** Wenn man voraussetzt, daß das Wasser in jeder Tiefe NZ mit der Geschwindigkeit durchschiesse, die der Höhe ZN zugehört; so wird die mittlere Geschwindigkeit des hindurch stürzenden Wassers wie im 26 und 27 §. der Hydraulik gefunden. Man setze den Wasserstand LN $= e$, die Höhe des Druckwassers PN $= \varepsilon$, so ist die mittlere Geschwindigkeit des durchfliessenden Wassers $=$

$$\frac{\frac{4}{3}(e\sqrt{e} - \varepsilon\sqrt{\varepsilon})\sqrt{g}}{e - \varepsilon}:$$

es fließt nemlich in jeder gegebenen Zeit eben so viel Wasser durch LP, als hindurch gehen würde, wenn alle Elemente des Wassers mit einerley Geschwindigkeit durchflössen, die jener mittlern gleich wäre. Die Höhe der Oefnung ist $= e - \varepsilon$, und wenn ihre Breite $=$ B gesetzt wird, so ist die in jeder Zeitsecunde durchfliessende Wassermenge $=$ $\frac{4}{3}B(e\sqrt{e} - \varepsilon\sqrt{\varepsilon})\sqrt{g}$.

Die Fläche der Schaufel war $= ab$, und die mittlere Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers $=$ $2\sqrt{gh}$; das giebt die in jeder Secunde anschlagende Wassermenge $= 2ab\sqrt{gh}$. Damit die Schaufel in ihrer ganzen Höhe vom Wasser getroffen werde, muß jene Wassermenge nicht kleiner, vielmehr um deswil-

len

len etwas grösser, als diese seyn, weil das Gerinne wegen des nöthigen Spielraums etwas mehr Breite als das Rad haben muß, auch aus eben der Ursache das Rad den Boden des Gerinnes nicht unmittelbar berühren kann. Setzt man übrigens die relative Kraft des Wasserstosses $= p$, so ist $p = \frac{ab \,.\, (2\sqrt{gh} - c)^2}{4g}$

$= ab \,.\, h \,.\, \frac{(2\sqrt{gh} - c)^2}{4gh}$, oder $p = abh\left(1 - \frac{c}{2\sqrt{gh}}\right)^2$.

Ferner sey $2\sqrt{gh} = C$, so ist $h = \frac{C^2}{4g}$, und man hat $p = \frac{abC^2}{4g}\left(1 - \frac{c}{C}\right)^2$. Wird endlich die in einer Secunde anschlagende Wassermenge $= A$ gesetzt, so ist $abC = A$, und $p = \frac{A \,.\, C}{4g}\left(1 - \frac{c}{C}\right)^2$.

58 §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer solchen Maschine, die durch ein unterschlächtiges Wasserrad getrieben werden soll, anzugeben; wenn das Gefälle des Triebwassers bekannt, auch überdem der Widerstand und diejenige Geschwindigkeit gegeben ist, womit der Widerstand bewegt werden muß, vorausgesetzt, daß man auch vom hinlänglichen Wasserzufluß versichert sey.

Aufl. Es sey R der Widerstand, und β die für ihn nöthige Geschwindigkeit, so wird erfodert, daß das mechanische Moment des Wasserrades $= R \,.\, \beta$ sey. Es wird aber dies Moment alsdenn am größten,

wenn

wenn $c = \frac{1}{3}C$ ist, (17 §.) und diese Voraussetzung giebt $p = \frac{4}{9} \cdot \frac{A \cdot C}{4g}$, also das mechanische Moment des Rades $p \cdot c = \frac{4}{9} \cdot \frac{A \cdot C}{4g} \cdot c$, oder eben dies Moment $= p \cdot \frac{1}{3}C = \frac{4}{27} \cdot \frac{A \cdot C}{4g}$. Weiter ist das Gefälle $h = \frac{C^2}{4g}$ gegeben, also hat man $R \cdot \beta = \frac{4}{27} \cdot A \cdot h$, und für jede Zeitsecunde wird ein Wasserzufluß $A = \frac{27}{4} \cdot \frac{R \cdot \beta}{h}$ erfodert. Könnte man also nicht auf soviel Zufluß Rechnung machen, so wäre das Triebwasser nicht mächtig genug, die Maschine zu treiben. Bey der Rechnung selbst drückt man den Widerstand R durch eine Menge Wasser aus, deren Gewicht dem Widerstande gleich ist, oder welches eben soviel heißt, man setzt das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= 1$. Was überdem hier c heißt, nennt man sonst Geschwindigkeit der Kraft, hier ist es die Geschwindigkeit der mittelsten Stelle der Schaufeln, die also $= \frac{2}{3}\sqrt{gh}$ gefunden wird, und das Verhältniß $\frac{2}{3}\sqrt{gh} : \beta$ bestimmt die ganze Anordnung der Maschine. Die Abmessungen der Schaufeln bestimmt die Gleichung $A = a \cdot b \cdot C = a \cdot b \cdot 2\sqrt{gh}$, woraus ihre Länge $b = \frac{A}{2a\sqrt{gh}}$ gefunden wird, wenn ihre Höhe a gegeben, oder willkührlich angenommen ist. In der Zeit ϑ laufe das Wasserrad einmahl um, und desselben Halbmesser bis zur Mitte der Schaufeln genommen sey $= r$, so ist $\vartheta = \frac{2\pi r}{c}$, und r ist bestimmt, wenn ausser der Höhe der Schaufeln auch ihre Anzahl n willkührlich angenommen wird. Es ist nemlich der Halbmesser vom äussern Umfang des Kranzes $r + \frac{1}{2} a = \frac{a}{\text{sinv.}(2\pi : n)}$, also $r = \frac{a}{\text{sinv.}(2\pi : n)} - \frac{1}{2} a$ (39 §.)

Wenn die Maschine ein Räderwerk ist, und der Widerstand R in der Entfernung q von der Axe einer Welle in der Zeit t einmahl umlaufen soll; so ist $t = \frac{2\pi q}{\beta}$, und man hat die Zahl $\frac{\vartheta}{t} = \frac{\nu}{\mu} = \frac{r \cdot \beta}{c \cdot q} = \frac{r \cdot p}{q \cdot \mathrm{R}}$, (11 §.) welche anzeigt, wievielmahl der Widerstand in der Zeit umlaufen muß, darin das Wasserrad einen Umlauf macht.

Nachdem solchergestalt die Abmessungen des Wasserrades festgesetzt sind, wird das Gerinne, und die Breite der davor anzulegenden Schützöfnung darnach geordnet, die mit dem Gerinne selbst, wofern hinlängliches Druckwasser vorhanden ist, entweder einerley Breite, oder auch einige Zolle mehr Breite erhalten kann. Durch Erhöhung des Schutzbretts kann alsdenn allemahl soviel Zufluß auf das Rad gebracht werden, daß es in hinlänglicher Höhe im Gerinne die Schaufeln trift. Mehr als Schaufeln-Höhe würde überflüssig seyn. Bey niedrigem Wasserstande von 1 Fuß oder ein Paar Zollen mehr könnte es wohl am Druckwasser gänzlich fehlen, wenn das Schutzbrett einen Fuß hoch aufgezogen ist. Hätte alsdenn die Schützöfnung nicht hinlängliche Breite, so würden die Schaufeln, wenn sie mit dem Wasserstande ohngefehr

gefehr gleiche Höhe hätten, nicht in ihrer ganzen Höhe vom Wasser getroffen werden. In allen Fällen hat man die durch die Schützöfnung fliessende Wassermenge $= \frac{4}{3}B(e\sqrt{e} - \varepsilon\sqrt{\varepsilon})\sqrt{g}$, und diejenige, welche die Schaufeln treffen muß, $= 2ab\sqrt{gh}$. Beyde müssen gleich groß seyn, also erhält man $\frac{2}{3}B(e\sqrt{e} - \varepsilon\sqrt{\varepsilon}) = ab\sqrt{h}$, mithin $B = \frac{3}{2} \cdot \frac{ab\sqrt{h}}{e\sqrt{e} - \varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$. Fehlte das Druckwasser gänzlich, so wäre $\varepsilon = 0$, also $B = \frac{3}{2} \cdot \frac{ab\sqrt{h}}{e\sqrt{e}}$, und wenn $e = a$ wäre, so müste $B = \frac{3}{2}b\sqrt{(h:a)}$ seyn. Da wo das Rad hängt, muß die Breite des Gerinnes die Breite des Rades nur um einige Zolle übertreffen, also muß in Fällen dieser Art, die Breite des Gerinnes von der Schutzöfnung gegen das Rad zu allmählig schmahler ausfallen.

Je grösser die Fläche der Schaufeln ist, womit sie den Wasserstoß auffangen, desto mächtiger ist das Rad, wenn sonst die Maschine regelmässig geordnet ist: allein je mächtiger das Rad ist, desto mehr Gewalt leiden alle Theile der Maschine, sie müssen um deßwillen desto stärker von Masse seyn, und der Widerstand, welchen die Friction verursacht, wird ebenfalls desto stärker. Wenn demnach nicht sonst Gründe entgegen stehen, so wählt man statt eines sehr breiten Rades lieber mehrere, die nicht soviele Breite haben, und vertheilt die Last auf diese Räder, welches sich unter andern ganz füglich bey Pumpenkünsten thun läßt.

59 §.

Um von dieser allgemeinen Auflösung eine Anwendung auf einen besondern Fall zu machen, setze man, es sollen vermittelst einer Druckpumpenkunst 2000 Cubicfuß Wasser in einer Stunde 72 Fuß hoch gehoben werden; so hat man $M(f + \lambda b) = V\alpha T$, (30 §.) und $M = 2000$ Cubicfuß, $f = 72$ Fuß, $T = 1$ Stunde $= 3600$ Secunden.

Will man an der Axe des Wasserrades AB eine
123 F. Kurbel, oder falls das Rad mächtig genug ist, auf jeder Seite desselben eine Kurbel wie C und D anbringen, welche alsdenn vermittelst eines Gestänges die Pumpenkolben schieben sollen; so ist die Zeit eines Kolbenspiels mit der Umlaufszeit des Wasserrades einerley. Man suche also $\vartheta = \frac{2\pi r}{c} = \frac{\pi r}{\frac{1}{3}\sqrt{gh}}$, so ist eben diese Zeit $= t$, und man findet $\lambda = \frac{4a^2 l}{gc^2t^2}$, wenn $\frac{a}{c}$ willkührlich angenommen wird. Das Gefälle h sey $7\frac{3}{10}$ Zoll $= \frac{7,3}{12} = \frac{73}{120}$ Fuß, so ist gh im Rheinl. Maaß $= \frac{15\frac{5}{8} \cdot 73}{120} = \frac{125 \cdot 73}{960} = 9,5$ und $\sqrt{gh} = 3,08$ Fuß. Man nehme $r = 8$ Fuß an, so giebt das $\vartheta = 7,8 \cdot \pi = 24\frac{1}{2}$ Secunden, und eben so groß ist die Zeit eines Kolbenspiels t.

Um weiter λ zu finden, muß l gegeben seyn. Soll das Wasser nur grade in die Höhe gehoben werden, so wird l nicht viel von f verschieden seyn. Es sey also $l = 75$ Fuß, und $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}$, so erhält man $\lambda =$

$$\frac{9 \cdot 75}{15,625 \cdot 24,5^2} = \frac{9 \cdot 3}{0,625 \cdot 24,5^2},$$ oder $\lambda = \frac{1}{14}$.

Je grösser t und je kleiner b ist, desto kleiner wird

$\beta =$

$\beta = \frac{2b}{t}$, mithin $a = \sqrt{\frac{4V\alpha}{n\pi k\beta}}$ desto grösser, wenn alles übrige einerley ist: demnach muß man entweder desto mehr, oder bey gleicher Anzahl Paare desto weitere Pumpenröhren im Durchmesser haben, je niedriger der Kolbenzug ist. Bey grossen Wasserrädern kann der Krummzapfen, woran die Kunst hänget, wohl 18 Zoll im Halbmesser seines Umlaufs haben, also nehme man $b = 3$ Fuß an, und man erhält $\lambda b = \frac{3}{14}$ Fuß, welches noch keinen $\frac{1}{4}$ Fuß beträgt.

Nimmt man $\frac{1}{4}$ Fuß dafür an, und braucht diesen Werth in der Gleichung $M(f + \lambda b) = V\alpha T$, oder $\frac{1}{3600} M(f + \lambda b) = V\alpha$; so muß man der Bezeichnung des 58 §. gemäß hier $p = \frac{4}{9} \cdot \frac{Ah}{C}$ statt V, und $c = \frac{1}{3}C = \frac{2}{3}\sqrt{gh}$ statt α schreiben, so ist $\frac{1}{3600}M(f+\lambda b) = \frac{4}{27}Ah$, und man findet $A = \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{3600} \cdot \frac{f+\lambda b}{h} \cdot M$, als den in jeder Secunde benöthigten Wasserzufluß. Setzt man also die schon bestimmten Werthe statt f, λb, h und M, so wird $A = \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{3600} \cdot \frac{72,25 \cdot 120}{73} \cdot 2000 = \frac{72,25 \cdot 450}{73} = 445$ Cubicfuß.

Zur Berechnung des Durchmessers der Pumpenröhren hat man $\frac{V\alpha}{k} = \frac{1}{3600}M = \frac{5}{9}$ Cubicfuß, und $\beta = \frac{2b}{t} = \frac{6}{24\frac{1}{2}} = \frac{12}{49}$, so wie $\frac{1}{4}\pi = \frac{11}{14}$, also wird $a = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{14}{11} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{49}{12}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{7}{3}$

 $\cdot\sqrt{}$

$\cdot\sqrt{\frac{70}{132}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{\sqrt{70 \cdot 132}}{132}$, oder $a = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 1{,}614$ Fuß. Wollte man also $n = 1$ setzen, so müßte a mehr denn $1\frac{1}{2}$ Fuß groß seyn: deßwegen nimmt man besser $n = 2$ an, also $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071$, und es wird $a = 1{,}141$ Fuß, oder 1 Fuß $1\frac{7}{10}$ Zoll. Die Voraussetzung $n = 3$ giebt $\frac{1}{\sqrt{n}}\ \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}5773$, und $a = 0{,}9315$ Fuß, oder $11\frac{1}{6}$ Zoll. Der Steigröhre Durchmesser c wird allemahl $= \frac{2}{3}a$, wenn jedes Paar Pumpen seine eigene Steigröhre hat. Wollte man aber alle Pumpen mit einer gemeinschaftlichen Steigröhre verbinden; so müßte $cc = \frac{4}{9}naa$, also $c = \frac{2}{3}a\sqrt{n}$, mithin hier $c = 1{,}076$ Fuß $= 12\frac{9}{10}$ Zoll seyn.

Der V. Abschnitt.

Vom oberschlächtigen Wasserrade, auch vom Lauf= und Tretrade.

60 §.

129 Fig. Am Umfang eines verticalen zu einer horizontal liegenden Axe gehörigen Rades ist eine mit Wasser gefüllte nach der Krümme des Umfangs gebogene Röhre *DEBGFAD* befestiget: man soll das statische Moment finden, womit das Gewicht des Wassers das Rad zu drehen strebt.

Aufl. Es sey CA ein wagrechter Halbmesser des Rades, und eine andre grade Röhre OLQR berühre den Umfang des Rades in A, so daß ihre centrische Linie vertical ist. Die centrische Linie der gekrümmten Röhre ist vermöge der Voraussetzung ein mit dem Rade concentrischer Kreis, und die Ebenen der darauf senkrechten Querschnitte der Röhre gehen insgesamt durch des Rades Mittelpunct. Man stelle sich DAF als die centrische Linie der krummen und LAQ als die centrische Linie der graden Röhre vor, durch D und F lege man ein Paar wagrechte Ebenen, welche den lothrechten Durchmesser des Rades in H und K, die grade Röhre aber in LO und QR schneiden, so ist HK = QL die lothrechte Höhe beyder Röhren. Ueberdem nehme man die Querschnitte beyder Röhren gleich groß an, so daß AB ein gemeinschaftlicher Querschnitt beyder Röhren ist. Wenn nun die lothrechte Höhe HK durch gleichweit von einander entfernte wagrechte Ebenen wie PT, *pt*, in soviele gleiche Theile als man will getheilt wird, so theilen diese die centrische Linie der krummen Röhre in eben soviele, wiewohl ungleiche Theile, wie M*m*, die grade Röhre LORQ aber wird dadurch in eben soviele gleich grosse Theile wie S*st*T getheilt. Durch alle Theilungspuncte M, *m*, der centrischen Linie der krummen Röhre lege man Ebenen auf dieser centrischen Linie senkrecht, so wird dadurch die krumme Röhre selbst in eben soviele, wiewohl ungleiche Theile getheilt, als man gleiche Theile der graden Röhre und der lothrechten Höhe HK hatte. Mit jedem Stück S*st*T der graden Röhre gehört nun ein Stück M*mn*N der krummen Röhre zusammen, dessen centrische Linie mit jenem zwischen einerley parallelen Ebenen PT, *pt*, liegt. Man nehme die Anzahl dieser Theile so groß, mithin die Theile Mm der centrischen Linie der krummen Röhre so klein an, daß ihre Krümme unmerklich wird, und ziehe mR lothrecht, so ist das rechtwinklichte Dreyeck MRm dem gleichfalls rechtwinklichten Dreyeck CPM ähnlich, weil $RmM = 90° - RMm = CMP$ ist. Demnach hat man $Mm : Rm = CM : PM$, also $PM \cdot Mm = CM \cdot Rm$, oder $PM \cdot Mm = CA \cdot Rm$. Wenn nun das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= 1$ gesetzt wird, so ist das statische Moment

des Gewichts $MmnN = PM \cdot MN \cdot Mm$

des Gewichts $SstT = CA \cdot ST \cdot Ss$.

Ferner ist $MN = AB = ST$, und $Ss = Rm$: also verhalten sich die statischen Momente dieser Gewichte wie $PM \cdot Mm : CA \cdot Rm$. Weil nun die Gleichheit dieser Product kurz vorhin bewiesen ist, so folgt daß die Momente der Gewichte $MmnN$ und $SstT$, als zweener zusammen gehöriger Theile der graden und krummen Röhre gleich groß sind. Weil das überdem von jeden zweenen zusammengehörigen Theilen gilt, und die grade Röhre eben soviel Theile als die Krumme hat; so ist das ganze Moment der krummen Röhre, oder die Summe der Momente aller ihrer Theile, so groß, als das ganze Moment der graden Röhre. Diesemnach ist das gesuchte statische Moment vom Gewicht des in der krummen Röhre befindlichen Wassers $= CA \cdot ABHK$.

61 §.

128 Fig. Wenn die Zellen im Kranze des oberschlächtigen Wasserrades von M bis N mit Wasser so gefüllt sind, daß in einer Zelle soviel als in jeder der übrigen befindlich ist; so ist die gesamte Wassermasse an diesem

Bogen

Bogen des Kranzes ziemlich gleichförmig, und beynahe eben so vertheilt, als wenn sich am Umfang des Rades eine gebogene Röhre, wie DEFG in der 129 Figur befände. Man nehme an, daß die Zellen mit eben der Geschwindigkeit umlaufen, womit das Wasser bey N hinein fällt, so wird beym gleichförmigen Umlauf des Rades jede Zelle soviel Wasser als jede andre auffangen, und es wird eben den Erfolg haben, als wenn sich von D bis F am innern Umfang des Kranzes eine Wasserröhre anlegte, die mit dem einfallenden Wasserkörper GN gleiche Querschnitte hätte. Für die Höhe HK dieser so durch den Kranz des Rades vertheilten Wassermasse kann man die lothrechte Höhe der obersten gefüllten Zelle bey D über der niedrigsten FMN annehmen, woraus eben jezt das Wasser auszulaufen anfängt. Nun setze man GL $= h$, als das ganze Gefälle vom Boden des Gerinnes IG bis zur untersten Stelle des Rades; ferner sey die lothrechte Höhe eben des Gerinnes über der höchsten das Wasser auffangenden Zelle GK $= u$, so fällt das Wasser in diese Zelle mit der Geschwindigkeit $2\sqrt{gu}$, und mit eben dieser Geschwindigkeit müssen die Zellen umlaufen; noch sey HL $= k$, als die Höhe der niedrigsten gefüllten Schaufel über der untersten Stelle des Rades: so ist HK $= h - u - k$. Wenn alsdenn der Querschnitt des zufliessenden Wassers $= m^2$ gesetzt wird; so ist das statische Moment, womit das Wasser das Rad zu drehen strebet $=$ CA $. m^2(h - u - k)$, wofern man CA für den Halbmesser desjenigen Kreisbogens annehmen kann, der die centrische Linie abgeben würde, wenn das Wasser sich wirklich wie eine Röhre am Umfang des Rades anlegte.

62 §.

Solchergestalt siehet man nun wohl, worauf die Sache bey Berechnung des statischen Moments ankommen würde, womit das in den Zellen des oberschlächtigen Rades aufgefangene Wasser das Rad zu drehen strebt: allein die Bestimmung der eigentlichen Höhen GK, LH bleibt unsicher, so wie die Bestimmung der eigentlichen Länge des Halbmessers CA. Wenn die Schwerpuncte aller in den Zellen befindlichen Wasserkörper in einem Kreisbogen lägen, so könnte man diesen Bogen für das annehmen, was in der 129 Fig. die centrische Linie war, und CA müste der dazu gehörige Halbmesser seyn. Die Schwerpuncte des Wassers in der höchsten und niedrigsten Stelle würden alsdenn diejenigen seyn, wodurch man DK und FH wagrecht legen müste, um die Höhen GK und LH zu bestimmen. Gesetzt aber man wollte auch die Figur der Zellen für eine gewisse Stellung des Rades darnach einzurichten suchen, so würde es doch nicht für jede Stellung des Rades angehen. Denn die höchste Fläche des in jeder Zelle befindlichen Wassers setzt sich allemahl in den wagrechten Stand, also ändert sich die Figur des in jeder Zelle eingeschlossenen Wasserkörpers beständig, und der Schwerpunct behält nicht einerley Stelle. Man kann also dieser Bedingung kein völliges Genüge leisten. Ueberdem erfodert die Vollkommenheit des oberschlächtigen Rades eine solche Einrichtung der Zellen, daß keine derselben von dem darin befindlichen Wasser etwas verschütte, bevor sie fast die unterste Stelle erreicht hat: denn hievon hängt LH ab, und je kleiner LH ist, desto grösser wird HK mithin das Moment der Kraft des Rades desto grösser.

63 §.

Um diesen Bedingungen soviel thunlich ein Genüge zu leisten, werden die Schaufeln zwischen den Felgen gewöhnlich nach folgender Vorschrift eingesetzet. Wenn CB der Halbmesser der äussern CE der Halbmesser der innern Peripherie des Kranzes, also EB des Kranzes oder der Felgen Breite ist; so nehme man EA $= \frac{1}{3}$ EB, und beschreibe mit dem Halbmesser CA einen neuen Kreis, den die Werkleute den Theilriß nennen. Diesen Kreis theile man in soviele gleiche Theile, als das Rad Schaufeln oder Zellen haben soll, so daß AP $=$ AQ $= \frac{1}{n}$ P wird, wenn P die Peripherie und *n* die Anzahl der Schaufeln bezeichnet. An die Puncte P und Q lege man das Linial, und ziehe PR, so wird das die Lage der Stoßschaufel. Die Fläche der Stoßschaufel ist ein Rechteck, und PR ist dieses Rechteckes Höhe, wenn man die wagrechte Länge der Schaufel zwischen den beyden Felgen des Rades für die Grundlinie annimmt. Auf der Stoßschaufel soll nach der gewöhnlichen Vorschrift die Kropfschaufel PS senkrecht seyn: (M. s. *Wolffii* Elem. Mathes. Vniv. T. II. Mech. §. 923 p. 295 Eberhards Beyträge zur Mathesi Applicata 18 §. Mech. 25 S. Leupolds Theatrum Machinarum Gener. XX. Cap. 552 §. 164 S. Beyers Schauplatz der Mühlenbaukunst VIII. Cap. 10 §. 66 §.) andre aber legen diese Riegelschaufel in der Richtung des Halbmessers.

Die Bogen AP, AQ, des Theilrisses nimmt man um deßwillen nicht gern viel länger als einen Fuß lang, damit das Wasser desto gleichförmiger am Umfang des Rades vertheilt werde: alsdenn aber fallen bey Rädern, welche um ein ansehnliches mehr als

12 Fuß

12 Fuß hoch sind, die Zellen ziemlich eng aus. Um sie etwas mehr zu erweitern nimmt man alsdenn AT = 2AP, und legt das Lineal an P und T um die Stoßschaufel Pr zu ziehen: eben so zieht man Vw durch V und Q. Das giebt zwischen Pr und Vw etwas mehr Zwischenweite, als zwischen PR und VW, nur werden jene Schaufeln etwas kürzer als diese.

Bey dieser Einrichtung der Zellen kann man die Peripherie des Theilrisses als die centrische Linie der am Umfang des Rades in den Zellen befindlichen Wassermasse ansehen, und den Halbmesser desselben für denjenigen annehmen, der CA in der 129 Figur war.

64 §.

Die Menge Wasser A, welche das Gerinne lG in jeder Zeitsecunde auf das Rad schüttet, der Halbmesser des Theilrisses $CA = r$ überdem auch die Geschwindigkeit und die Anzahl n der Schaufeln sind gegeben: man soll finden, wieviel Wasser jede Zelle auffängt.

Aufl. Durch die Geschwindigkeit der Schaufeln verstehe man diejenige, womit ihre Winkelpuncte A, P, V, die im Theilriß liegen, umlaufen, und diese gehöre zur Höhe u, so ist sie $= 2\sqrt{gu}$. Ferner ist die Umlaufszeit des Rades $\vartheta = \frac{\pi r}{\sqrt{gu}}$, und in eben dieser Zeit schüttet das Gerinne eine Menge Wasser $= A \cdot \vartheta = \frac{A\pi r}{\sqrt{gu}}$. Der Voraussetzung gemäß ist der Umlauf des Rades gleichförmig, und die Zellen fangen

gen alle gleichviel Wasser auf, mithin ist für jede derselben die aufgefangene Wassermenge $= \frac{A\pi r}{n\sqrt{gu}}$.

Man setze diese Wassermenge $\frac{A\pi r}{n\sqrt{gu}} = B$, so hat man umgekehrt die Anzahl der Schaufeln $n = \frac{A\pi r}{B\sqrt{gu}}$, wenn alles übrige gegeben ist. Die Wassermenge B, welche jede Zelle auffangen muß, bestimmt die Grösse des Körperlichen Raums von demjenigen Theil jeder Zelle, der in dem Augenblick noch voll Wasser ist, wenn sie in der untern Gegend des Rades das Wasser auszugiessen anfängt.

65 §.

Die Halbmesser der innern und äussern Peripherie des Kranzes und die Anzahl der Zellen sind gegeben, man soll die Höhe *MN* jeder Stoßschaufel und den Winkel *FMN* zwischen der Stoß- und Riegelschaufel finden, wenn das Rad die im 63 §. beschriebene Einrichtung hat. 128 Fig.

Aufl. Weil MN durch Z gehet, so ist CX auf MN in O senkrecht. Wenn also die Anzahl der Zellen $= n$ und der Halbmesser des Theilrisses $= r$ gesetzt wird, so ist $XCM = XCZ = \frac{2\pi}{n}$ und der Winkel $FMN = 90° + \frac{2\pi}{n}$. Ferner ist $CO = r \cos \frac{2\pi}{n}$, $OZ = OM = r \sin \frac{2\pi}{n}$, und $ON = \sqrt{(CN^2 - CO^2)}$,

also

also $MN = ON - OM = \sqrt{\left(CN^2 - r^2\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2\right)}$
$- r\sin\frac{2\pi}{n}$.

Wären die Schaufeln insgesamt in der Lage wie Pr, Vw, eingesetzt, so müste man $C\alpha$ auf Pr senkrecht ziehen. Alsdenn hätte man $\alpha CP = \alpha CT = \frac{3}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{3\pi}{n}$, und $SPr = 90° + \frac{3\pi}{n}$. Ferner $C\alpha = r\cos\frac{3\pi}{n}$, $\alpha P = \alpha T = r\sin\frac{3\pi}{n}$, und $\alpha r = \sqrt{(Cr^2 - C\alpha^2)}$, also $Pr = \alpha r - \alpha P = \sqrt{\left(Cr^2 - r^2\left(\cos\frac{3\pi}{n}\right)^2\right)} - r^2\sin\frac{3\pi}{n}$.

Man setze die Höhe der Riegelschaufel FM oder $SP = p$, die Höhe der Stoßschaufel MN oder Pr, sie sey in der einen oder der andern von diesen beyden Lagen eingesetzt, $= q$, den Winkel FMN oder $SPr = \psi$, und ziehe FN oder Sr, so ist die Fläche des Dreyecks FMN oder $PSr = \frac{1}{2}pq\sin\psi$. Wird nun die Breite der Radfelgen $EB = s$ gesetzt, so ist $p = \frac{1}{3}s$, und CN oder $Cr = r + \frac{2}{3}s$, also $q = \sqrt{\left((r+\frac{2}{3}s)^2 - r^2\left(\cos\frac{m\pi}{n}\right)^2\right)} - r^2\left(\sin\frac{m\pi}{n}\right)^2$, da dann $m = 2$ oder $m = 3$ ist, nachdem man die Schaufeln in der einen oder der andern Lage gezeichnet hat. Weil übrigens $\left(\cos\frac{m\pi}{n}\right)^2 = 1 - \left(\sin\frac{m\pi}{n}\right)^2$ ist,

ist, so hat man auch $q = \sqrt{\left(\frac{4}{3}rs + \frac{4}{9}s^2 + r^2\left(\sin\frac{m\pi}{n}\right)^2\right)} - r^2 \sin\frac{m\pi}{n}$.

Die durch F und N oder S und r laufenden wagrechten Grundlinien der Riegel- und Stoßschaufel sind parallel, also kann man dadurch eine Ebene legen, die mit der Riegel und Stoßschaufel ein dreyseitiges Prisma einschließt. Das Dreyeck MFN oder PSr wird eine von den Grundflächen dieses Prisma, und wenn die horizontale Länge der Schaufeln zwischen den Felgen des Rades $= b$ gesetzt wird, so ist der Inhalt dieses Prismen $= \frac{1}{2}bpq \sin\psi$.

66 §.

Indem das Rad umläuft, und die Schaufel FMN oder SPr durch den halben Umfang des Kranzes WBL herab sinkt, muß FN oder Sr einmahl in die horizontale Lage kommen. Wenn nun jede Zelle nicht mehr Wasser auffängt, als den Raum des Prismen füllt, wozu die Grundfläche MFN oder PSr gehört, so fängt jede Zelle an, das Wasser auszugiessen, wenn FM oder Sr horizontal wird. Aus dem Winkel FMN $= \psi$ und den Seiten MF $= p$, MN $= q$, die ihn einschliessen, hat man auch MFN, und eben so PSr, aus dem Winkel SPr $= \psi$ und den Seiten PS $= p$, Pr $= q$. Setzt man MFN oder PSr $=$ P, so ist $\tang\varphi = \frac{q \sin\psi}{p - q\cos\psi}$ (262 §. Geom.). Daraus giebt sich die Tiefe CH $=$ CF $\sin\varphi$ um welche die Schaufel FMN unter den Mittelpunct des Rades gesunken ist, wenn sie anfängt,

fängt, das Wasser auszugiessen: denn nun trift FN verlängert den lothrechten Halbmesser CZ des Rades in H senkrecht, weil FN wagrecht ist.

Man verlängere Sr durch S und ziehe $C\beta$ darauf senkrecht, so wird $C\beta$ vertical, wenn Sr horizontal wird, und man hat eben so $C\beta = CS \sin \varphi$ für die Tiefe der Schaufel unter dem Mittelpunct des Rades für den Augenblick, wenn sie das Wasser auszugiessen anfängt. Für die Höhe der Zelle, welche in eben dem Augenblick das Wasser aus dem Gerinne auffängt, über dem Mittelpunct des Rades, kann man die Höhe CK annehmen, um welche diejenige Ecke D dieser Zelle, welche nun dem verticalen Durchmesser des Rades am nächsten ist, in eben diesem Augenblick höher liegt, als der Mittelpunct des Rades. Solchergestalt findet man die Höhe des wasserhaltenden Bogens $HK = CH + CK$.

67 §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer solchen Maschine, die durch ein oberschlächtiges Wasserrad ihre Bewegung erhalten soll, anzugeben, wenn das Gefälle des Aufschlagewassers und der Zufluß für jede Secunde bekannt, auch überdem der Widerstand, und diejenige Geschwindigkeit gegeben ist, womit dieselbe bewegt werden soll.

Aufl. Mit der Höhe des oberschlächtigen Rades muß man sich nach dem Gefälle richten, also ist diese Höhe, mithin der Halbmesser des ganzen Rades. oder der äussern Peripherie des Kranzes gegeben. Man mache sich eine vorläufige der Höhe des Rades ange=

angemessene Zeichnung desselben, um CK und CH, auch daraus ferner GK und HL zu finden: so ist GK $= u$ die Höhe für die Geschwindigkeit, womit das Wasser in die höchste Zelle fällt, und mit der Geschwindigkeit $2\sqrt{gu}$ müssen die Zellen umlaufen. Der Wasserzufluß für eine Secunde sey $= A$, so ist der Querschnitt des einfallenden Aufschlagewassers $= \frac{A}{2\sqrt{gu}}$, und wenn dieser $= m^2$ gesetzt wird, so hat man das statische Moment des Rades $= r . m^2 . HK$, wenn r den Halbmesser des Theilrisses bezeichnet, oder eben das statische Moment $= r . m^2 (h - u - k)$, wenn das ganze Gefälle $GL = h$, und $HL = k$ gesetzt ist. Weil nun die Peripherie des Theilrisses mit der Geschwindigkeit $2\sqrt{gu}$ umlaufen muß, so wirkt das Rad eben so, als wenn am Umfang des Theilrisses nach der Richtung der Tangente eine Kraft $= m^2 (h - u - k)$ angebracht und die Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle $= 2\sqrt{gu}$ wäre. Demnach ist das mechanische Moment oder der Effect des Rades $=$ $2m^2 (h - u - k) \sqrt{gu}$. Weil überdem $\frac{A}{2\sqrt{gu}} = m^2$, also $2m^2 \sqrt{gu} = A$ war, so ist eben der Effect $= A(h - u - k)$. Soll nun der Widerstand R mit der Geschwindigkeit β bewegt werden, so wird erfordert, daß $R . \beta = A(h - u - k)$ sey, mithin $A = \frac{R . \beta}{h - u - k}$. Soviel Zufluß wird erfodert, wenn R und β gegeben sind. Wäre A gegeben, so müßte man sich mit dem Widerstande darnach richten, damit $R = \frac{A(h - u - k)}{\beta}$ werde. Uebrigens wird die Anordnung der Maschine durch das Verhältniß $2\sqrt{gu}$: bestimmt, weil $2\sqrt{gu}$ hier das ist, was c im 18 §. war.

Noch ist übrig, die horizontale Länge der Schaufeln zu bestimmen, und diese wird aus der Wassermenge $B = \frac{A\pi r}{n\sqrt{gu}}$ (64 §.) gefunden, welche jede Zelle auffängt. Bey vorläufiger Zeichnung des Rades hat man n aus r bestimmt, also hat man B aus A und u. Weil nun eben diese Wassermenge dem 65 §. gemäß den Raum $\frac{1}{2} bpq \sin\psi$ füllen muß, so findet man die horizontale Länge der Schaufeln $b = \frac{2B}{pq\sin\psi}$.

68 §.

Die Kraft des Wassers am oberschlächtigen Rade gehört an sich nicht in die Classe der relativen Kräfte, bey gleicher Menge Wasser in allen wasserhaltenden Zellen eines und eben desselben Rades ist das statische Moment einerley, der gleichförmige Umlauf des Rades mag schneller oder langsamer seyn. Indessen hat doch die Art wie das Wasser auf das oberschlächtige Rad wirkt, einige Aehnlichkeit mit der Wirkung der relativen Kräfte. Soll die Maschine in Bewegung kommen, so muß anfangs das statische Moment des Rades grösser seyn, als es nachher im Beharrungsstande ist, da es dem Moment des Widerstandes gleich wird: eben darum müssen die Zellen, so lange sie sich im obersten Quadranten GB befinden vielmehr Wasser fassen können, als sie beym Umlauf des Rades im Beharrungsstande auffangen. Nach geöfnetem Schuzbrett vor dem Gerinne läuft zuerst die oberste Zelle Db voll Wasser, indem diese überläuft füllt sich die folgende cW, und so immer weiter die darauf folgenden

folgenden bis zur ersten oder zweyten von denjenigen, die schon wenigstens zum Theil unter der Horizontfläche durch den Mittelpunct des Rades liegen. Die Anzahl aller Zellen, die sich so füllen kann, bevor das Rad noch in Bewegung kommt, beträgt eine oder zwo mehr, als die halbe Anzahl aller wasserhaltenden Zellen. Wenn nun jede von diesen Zellen, so lange sie in der anfänglichen Stellung bleiben, wenigstens nochmahl soviel Wasser fassen kann, als sie nachher beym gleichförmigen Umlauf des Rades im Beharrungsstande auffängt; so wird das statische Moment des Rades, so wie die Zellen sich nach und nach bey dem noch ruhenden Rade anfüllen, anfangs grösser als es nachher im Beharrungsstande bleibt: also wird begreiflich, wie das Rad in Bewegung kommen kann, wenn das Moment des Widerstandes nur dem statischen Moment des Rades, so wie es im Zustande der gleichförmigen Umlaufsbewegung ausfällt, gleich ist.

69. §.

Ob nun gleich das Wasser in den Zellen des oberschlächtigen Rades mit seinem Gewicht, nicht durch den Stoß wirkt, und in sofern die Kraft in die Classe der absoluten Kräfte gehört: so kann doch der Umlauf des Rades nicht in einem fort beschleuniget werden. Denn die Beschleunigung könnte nur so lange fortwähren, als das Moment der Kraft das Moment des Widerstandes übertrift, und dieser Ueberschuß des Moments der Kraft über das Moment der Last nimmt immer mehr ab, so wie der Umlauf schneller wird, weil die Zellen immer weniger Wasser auffangen, bis zuletzt beyde Momente gleich werden, und so wie dies erfolgt, kommt die Maschine in den Beharrungsstand. Denn nähme die Geschwindigkeit des Umlaufs wieder ab, so würden sich die Zellen wieder mehr anfüllen, das Moment der Kraft würde wieder wachsen, und daraus würde eine neue Beschleunigung erfolgen. So erhellet demnach, daß aus ähnlichen Gründen, wie beym unterschlächtigen Rade der Gang der Maschine zuletzt gleichförmig werde.

70 §.

Wenn ein grosses verticales Rad mit einer horizontal liegenden Welle, das übrigens, die Schaufeln ausgenommen, mit einem Wasserrade alle Aehnlichkeit hat, so eingerichtet wird, daß Menschen oder Thiere auf den äussern oder innern Umfang treten, und auf solche Art das Rad in Umlauf bringen können, so heißt es ein verticales Tret- oder **Laufrad**. Ich werde es hier schlechthin ein **Laufrad** nennen, weil ich von demjenigen, die eine schiefe Lage gegen den Horizont haben, unten noch besonders eine kurze Nachricht beyfügen werde. Zeichnungen vom verticalen Laufrade findet man beym **Leupold** Theatr. Machin. Gener. XVII. Cap. 267 u. f. §. 93 u. f. S. Theatr. Machin. Hydraul. I. Tom. III. Cap. 63 §. 33 S. auch im II. Tom. II. Cap. 18 §. 9 S. Nachdem die arbeitenden Menschen oder Thiere entweder auf den innern oder den äussern Umfang treten, und solchergestalt das Rad drehen sollen, nachdem muß auch der innere oder äussere Umfang mit Stuffen, und wenn es am innern Umfang nur starke Leisten sind, versehen werden, damit die Menschen oder Thiere, wozu letztere besonders abgerichtet werden müssen, auf diesen Stuffen gleichsam als auf einer Treppe hinan steigen können.

71 §.

Es sey also C der Mittelpunct CA der Halbmesser eines Laufrades, und A die Stelle, wo eine oder mehr arbeitende Personen oder Thiere neben einander auf dem innern Umfang des Kranzes stehen. Ferner sey CL ein lothrechter Halbmesser des Rades, und der Winkel LCA $= \eta$, der Halbmesser CA $= r$. Das gesamte Gewicht P der arbeitenden Menschen oder Thiere, welches in verticaler Richtung AF nach unten drückt, zerlegt sich in zwo Kräfte; die eine in der Richtung des Halbmessers AE $= P \cos\eta$, welche in eben dieser Richtung die Axe des Rades drückt, die andre in der Richtung der Tangente des Rades AD $= P \sin\eta$, welche das Rad zu drehen strebt. Das statische Moment der letztern ist $= Pr\sin\eta$. Dieser Druck $P\sin\eta$ gegen die Stuffen am innern Umfang des Kranzes nach der Richtung ihrer Bewegung ändert sich beym gleichförmigen Umlauf des Rades nicht, wenn alles schon im Beharrungsstande ist, und die Arbeiter alsdenn auch ihre Entfernung von der Verticalfläche durch die Axe des Rades nicht weiter ändern, mithin der Winkel η einerley bleibt. Uebrigens ist dieser Druck desto grösser, je grösser η seyn kann, und er würde am grösten seyn, wenn $\eta = 90°$ seyn könnte: im Rade aber könnten die arbeitenden Menschen oder Thiere an derjenigen Stelle, die um einen ganzen Quadranten von L entfernt ist, nicht stehen, und das Rad durch Treten drehen. Auf jeder andern Stelle A, wenn sie von einer Stuffe auf die nächstfolgende treten, die Stuffen aber unter ihren Füssen ausweichen, wird ihnen das Fortschreiten eben so beschwerlich, als wenn sie einen Berg hinan stie- 130 F.

gen, dessen Fläche so wie die Tangente in A gegen den Horizont unter dem Winkel η geneigt wäre.

72 §.

Auf einer horizontalen Ebene können Menschen und Thiere, ohne eben sehr bald zu ermüden, schneller fortgehen, als wenn sie einen Berg hinan steigen müssen; und wofern das Steigen nicht äusserst beschwerlich werden soll, so ist man genöthiget, desto langsamer eine schiefe Ebene hinan zu steigen, je grösser ihr Winkel mit dem Horizont ist: eine verticalstehende Wand kann man gar nicht hinan steigen. Man nehme an, daß sich zwey Personen um einerley verticale Höhe a in gleicher Zeit erheben, aber solche schiefe Ebenen hinan steigen sollen, die mit dem Horizont verschiedene Winkel η, ϑ, machen. Die Länge der einen Ebene sey l, der andern L, so ist der Voraussetzung gemäß $l \times \sin\eta = \mathrm{L} \times \sin\vartheta = a$, und $l : \mathrm{L} = \sin\vartheta : \sin\eta$. Beyde Personen haben demnach in gleicher Zeit verschiedene Wege zurück zu legen, und es ist $\mathrm{L} > l$, wenn $\eta > \vartheta$ ist. Derjenige, welcher den kürzern Weg vor sich hat, wird wegen der grössern Schräge desselben mehr Beschwerde haben, so wie der andre, der einen längern Weg vor sich hat, schneller gehen, und sich um deßwillen mehr als jener angreifen muß. Diesemnach wächst die Beschwerlichkeit des Gehens sowohl, wenn der Neigungswinkel der Ebene etwas groß wird, als auch, wenn er mehr abnimmt, und daraus folgt, daß es einen Neigungswinkel geben müsse, wobey die Beschwerlichkeit, in der gesetzten Zeit die Höhe a zu erreichen, am geringsten ist.

Wenn man wüste, wie diese Beschwerlichkeit des Gehens von dem Winkel η abhängt, so liesse sich wenigstens

nigstens durch Kunstgriffe der höhern Analysis finden, wie groß η seyn müsse, damit die Beschwerlichkeit des Gehens am kleinsten sey. Gewöhnlich nimmt man an, daß dies ein Winkel von 30 Graden seyn müsse, wenigstens wenn von Menschen die Rede ist; für Thiere aber noch kleiner, vielleicht für einige derselben nur halb so groß, also nur von 15 Graden. M. s. *Dan. Bernoulli* Hydrodynam. Sect. IX. §. 4. pag. 166.

73 §.

Wendet man diese Schlüsse auf das Laufrad an, so fließt daraus folgende Regel: die Stelle *A*, **wo arbeitende Menschen im innern Umfange des Rades stehen, muß von der niedrigsten Stelle** *L* **des Rades um einen Bogen** *LA* **von 30 Graden entfernt seyn.** Alsdenn wirkt das halbe Gewicht der Arbeiter nach der Richtung der Tangente des Rades, und wenn die Stuffen im Beharrungsstande mit der Geschwindigkeit α umlaufen, so ist das mechanische Moment des Rades $= \frac{1}{2} P . \alpha$. Den Arbeitern wird alsdenn das Umtreiben des Rades eben so beschwerlich, als wenn sie mit der Geschwindigkeit α einen Berg hinan stiegen, dessen Fläche gegen den Horizont unter dem Winkel $\eta = 30°$ geneigt wäre. Wofern also die Arbeiter mit einer Geschwindigkeit von 2 bis 3 Fuß in einer Secunde an dieser Stelle im Rade fortgehen können; so läßt sich vermittelst des Laufrades doppelt soviel ausrichten, als wenn man eine Kurbel, Haspel oder Winde gebraucht, weil in solchen Fällen die Arbeiter nur mit einer solchen Kraft in die angegriffene Stelle der Maschine wirken können, die ohngefehr dem vierten Theil ihres Gewichts gleich ist, da statt dessen beym Laufrade ihr halbes Gewicht darin wirkt.

74 §.

Die fernere Anwendung hievon ist leicht zu machen, wenn vermittelst der Maschine ein Widerstand R mit der Geschwindinkeit β bewegt werden müßte, und man alsdenn die Anordnung der Maschine angeben sollte. Die Gleichung $\frac{1}{2}P \cdot \alpha = R \cdot \beta$ giebt $\frac{1}{2}P = \frac{R \cdot \beta}{\alpha}$, und bestimmt solchergestalt die Anzahl der benöthigten Arbeiter aus ihrem Gewicht, mithin zugleich die Breite des Kranzes vom Rade, die so groß seyn muß, daß die arbeitenden Menschen ungehindert neben einander fortschreiten können, und das Verhältniß $\alpha : \beta$ bestimmt die Anordnung der Maschine. Wenn der Widerstand in der Zeit t den Weg s zurück legen soll, so ist $t = \frac{s}{\beta}$, und die Umlaufszeit des Rades ist $\frac{2\pi r}{\alpha} = \vartheta$. Soll der Widerstand eine Umlaufsbewegung im Kreise haben, wozu der Halbmesser q gehört, so ist $t = \frac{2\pi q}{\beta}$, und die Zahl seiner Umläufe in einer Secunde $= \frac{\beta}{2\pi q}$, so wie die Zahl der Umläufe des Tretrades $= \frac{\alpha}{2\pi r}$. Laufen beydes Kraft und Widerstand um einerley Axe, wie wenn an der Axe des Laufrades sich eine Kurbel befände, daran eine Pumpenkunst hienge; so so wäre $t = \vartheta$, also $\frac{\beta}{q} = \frac{\alpha}{r}$, und dies würde $r = \frac{\alpha}{\beta} \cdot q$ bestimmen, wenn q gegeben wäre. In andern Fällen ist es mehrentheils gleichgültig, wie groß r genommen wird, und die Höhe des Rades richtet sich nach andern eintretenden Umständen. An sich haben hohe Räder mit andern, die niedriger sind, im Ganzen einerley Effect, obgleich das statische Moment der Kraft am hohen Rade grösser als am kleinen ist: denn das mechanische Moment bleibt $\frac{1}{2}P \cdot \alpha$, das Rad mag höher oder niedriger seyn, und α behält einerley bestimmten Werth. Bey einerley Anordnung der Maschine bewegt zwar das doppelt so hohe Rad eine doppelt so grosse Last, aber nur mit der halben Geschwindigkeit. Denn $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha}$ wird doppelt so groß, wenn r verdoppelt wird; und weil der Widerstand in der Zeit t den Weg s zurück legt, so legt eben der Widerstand in der Zeit ϑ den Weg $\frac{\vartheta}{t} s$ zurück. Bey einerley Anordnung der Maschine ist das Verhältniß $\vartheta : t$ einerley, es mag ϑ grösser oder kleiner ausfallen, also ist der Weg des Widerstandes in jeder Umlaufszeit des Rades einerley, wenn gleich bey verdoppelter Höhe des Rades diese Umlaufszeit doppelt so groß wird, das heißt, seine Geschwindigkeit ist nur halb so groß. Wenn gegen μ Umläufen des Rades der Weg s von dem Widerstande νmahl zurück gelegt wird, so ist $\nu = \frac{1}{t}$, $\mu = \frac{1}{\vartheta}$, und $t = \frac{\mu}{\nu} \vartheta$, (11 §.) also $\beta = \frac{s}{t} = \frac{\nu \cdot s}{\mu \cdot \vartheta}$. Wenn also ϑ doppelt so groß ausfällt, so bleibt β nur halb so groß, weil $\frac{\nu}{\mu}$ bey einerley Anordnung der Maschine einerley ist.

75 §.

Um die Maschine in Bewegung zu setzen, müssen sich die Arbeiter anfangs etwas weiter als um einen Bogen LA von 30° Graden von der niedrigsten Stelle des Rades entfernen, wenn die Last mit dem Gewicht der Arbeiter in der Stelle A im Gleichgewicht ist. Sind die arbeitenden Menschen in der Art das Laufrad zu drehen schon geübt, oder wenn man Thiere braucht, diese darauf abgerichtet; so kommt die Maschine bald in ziemlich gleichförmigen Gang, und es kommt hauptsächlich darauf an, daß die Menschen oder Thiere selbst gleichförmig die Stuffen hinan steigen. Sobald wegen der Friction oder anderer Hindernisse der Bewegung die Stuffen langsamer unter den Füssen der Arbeiter auszuweichen anfangen, als sie selbst hinan zu steigen streben, sobald kommen diese auch etwas weiter vorwärts von der niedrigsten Stelle A des Rades weg, und das statische Moment wird grösser, also das Rad wieder mehr beschleuniget.

Für Pferde ist der Winkel LCA von 30 Graden nicht so vortheilhaft wie für Menschen, die das Rad treten: sie können sich in grader Linie etwa nur um den dritten Theil des Halbmessers von CL entfernen. Alsdenn ist sin LCA $= \frac{1}{3}$, und dieser Winkel beträgt alsdenn ohngefehr $19\frac{1}{2}$ Grade. Demnach wirkt nach der Richtung der Tangente des Rades nur der dritte Theil ihres Gewichts, und man hat in dem Fall, wenn das Laufrad am innern Umfang des Kranzes von Pferden gedrehet wird, deren gesammtes Gewicht $= P$ ist, die Gleichung $\frac{1}{3}P \cdot \alpha = R \cdot \beta$.

76 §.

Um es in die Wege zu richten, daß bey einerley Grösse des Rades das Moment des Gewichts der arbeitenden Menschen oder Thiere grösser ausfalle, als in dem Fall, wenn sie auf den innern Umfang des Kranzes treten, bringt man auch wohl ausserhalb des Rades ein Gerüste an, damit die arbeitenden Menschen auf den äussern Umfang des Rades etwa in der Gegend H treten, und so das Rad drehen können. Man muß alsdenn oberhalb der Stelle, wo die Arbeiter stehen sollen, eine horizontale gehörig befestigte Stange anbringen, woran sich die Arbeiter halten können: denn die Arbeit wird ihnen nun fast so beschwerlich, als wenn sie eine verticale Treppe hinan steigen sollten, weßwegen sie auch etwa nur mit 1 Fuß Geschwindigkeit für jede Secunde arbeiten können. M. s. hievon Leupolds Theatrum Machinarum Hydraul. T. II. §. 19. p. 9. Der verticale Druck P in der Richtung HK zerlegt sich nun in die Kräfte $HM = P \sin HCO = P \sin HCL$ in der Richtung der Tangente des Rades, und $HN = P \cos HCO$ in der Richtung des Halbmessers. Ist nun die Last mit der Kraft $P \sin HCO$ im Gleichgewicht, so werden die Arbeiter die Maschine noch in Bewegung bringen, wenn sie anfangs an der Stelle G, die von L und O um einen ganzen Quadranten entfernt ist, auf das Rad treten. Im VI. Theil der Abhandlungen der Königlich-Schwedischen Akademie der Wissenschaften auf der 190 u. f. S. findet sich eine Abhandlung vom H. Elvius unter dem Titel: **Versuch von Tretkranen**, worin folgende Erfahrungen erzählt werden.

In einem Laufrade von 12 Fuß im Durchmesser liefen 2 Arbeiter und brachten $46\frac{1}{2}$ Schwedische

Lies

Liespfund zu 20 Pfund in 4 Minuten 30 Fuß hoch. Sie hatten ihren Stand so, daß bey jedem Schritt der hintere Fuß grade unter der Axe des Rades war, wenn der vordere auf eine 2 Fuß weit davon entfernte Stelle trat. Die Richtungslinie der Schwere des Arbeiters fiel also in der Mitte zwischen seinen Füssen, einen Fuß weit von der untersten Stelle des Rades entfernt, und es war LCA $= 9\frac{3}{5}$ bis $9\frac{3}{4}$ Grad; also sinLCA $= \frac{1}{6}$. Jede Minute machten die Arbeiter 68 Schritte von 2 Fuß Länge, also war ihre Geschwindigkeit $\frac{136}{60} = 2{,}26$ Fuß in 1 Secunde $= \alpha$. Kann man nun das Gewicht eines Arbeiters 8 Liespfund schätzen, so war der Effect für eine Secunde $= \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 2{,}26$ Liespfund oder 3 Liespf. Für 4 Minuten oder 240 Secunden und 2 Arbeiter war der Effect $46\frac{1}{2}$ Liespf. $\times$ 30 Fuß, also für 1 Secunde und 1 Arbeiter $= \frac{46\frac{1}{2} \times 30}{2 \cdot 2400}$ ebenfalls beynahe 3 Liespfund.

Nach einem andern Versuch giengen die Leute mit $1\frac{1}{2}$ Fuß Geschwindigkeit, wenn sie etwa 30 Grad von der untersten Stelle des Rades entfernt waren, und der Effect für 1 Secunde war 6 Liespfund. Herr Polhem hat einen Pfahlkran beym Schloßbau in Stockholm mit einem 6 Fuß 4 Zoll hohen Tretrade gebraucht, auf dessen äussern Umfang die Arbeiter traten, fast 90 Grad von der obersten Stelle des Rades entfernt. Sie machten 72 Schritte jeden von 10 Zoll in einer Minute, also betrug ihre Geschwindigkeit 1 Fuß in jeder Secunde, und der Effect für jede Secunde war 8 Liespfund. (a. a. O. 169. 197. Seite).

Bey Thieren, weil sie entweder nur mit den Vorderfüssen allein, oder mit den Hinterfüssen allein auf den äussern Umfang des Rades treten können, gewinnet man den Vortheil nicht. Wenn gleich das mechanische Moment ihres Gewichts grösser wird, als wenn sie im innern Umfang des Rades gehen; so verliert man doch die Hälfte ihres Gewichts selbst, weil ihr halbes Gewicht nur in das Rad wirken kann.

77 §.

Schiefliegende Träträder werden gewöhnlich 131 F.
nur alsdenn gebraucht, wenn solche Thiere, die zwar von Körper ansehnlich schwer sind, aber nur langsam arbeiten können, ein solches Rad drehen sollen. Es sey *PQ* die geometrische Umlaufsaxe des Rades, worauf die Fläche desselben DOHL senkrecht ist. Durch den Mittelpunct C des Rades sey CR lothrecht, und die Ebene des Winkels RCP schneide die Ebene des Rades in CL, eine durch P wagrecht liegende Ebene aber in PR; so ist RCP die Neigungsebene des Rades gegen den Horizont, weil diese Ebene beydes zugleich auf des Rades Ebene und den Horizont senkrecht ist. (284 §. Geom.) Demnach ist des Rades Neigungswinkel gegen den Horizont = 90° — RPC = RCP, so wie RPC der Axe Neigung gegen den Horizont ist. Wenn nun ein Thier, wozu gewöhnlich ein Ochse gewählt wird, das Rad drehen soll, so wird derselbe über eine gegen die niedrigste Stelle F gelehnte schiefliegende Brücke auf die obere Fläche des Rades hinauf geführt. Unfern der Stelle A, wo der Ochse stehen soll, muß neben dem Rade ein Pfahl stehen, oder sonst etwas haltbares befindlich seyn, um den Ochsen vermittelst eines um die Hörner geschlagenen Stricks daran fest zu binden.

In

In A drückt alsdenn das Gewicht P des Ochsen in verticaler Richtung AF, und wenn AG mit PQ parallel ist, so ist die Ebene GAF vertical und mit PCR oder PCL parallel: mithin ist auch AB, als der Ebene FAG und des Rades Durchschnittslinie mit CL parallel. Ferner ist der Winkel FAG = RCP, (88 §. Geom.) und wenn derselbe = ζ gesetzt wird, so zerlegt sich der Druck P in der Richtung AF nach den Richtungen AG und AB in die Kräfte $P\cos\zeta$ und $P\sin\zeta$, wovon nur der letzte das Rad um die Axe PQ zu drehen strebt. Weiter sey BD mit CA parallel, aber BE, AD auf CA senkrecht und der Winkel BAC = ACO = η: so zerlegt sich der Druck $P\sin\zeta$ in der Richtung AB wiederum in zwo andre nach den Richtungen AD = $P\sin\zeta\sin\eta$, und AE = $P\sin\zeta\cos\eta$. Der letztere wird von der Axe des Rades aufgehalten, der erstere $P\sin\zeta\sin\eta$ aber strebt das Rad um die Axe PQ zu drehen, und sein statisches Moment ist $CA \cdot P\sin\zeta\sin\eta$.

Weil der Ochse noch weniger als das Pferd dazu geschickt ist, eine schräge Fläche hinan zu gehen, so kann die Neigung des Rades gegen den Horizont, also der Winkel RCP nicht wohl mehr als 15 Grade betragen, da dann RPC = 75° ist. Alsdenn aber wirkt wenig mehr als der vierte Theil vom Gewicht des Thiers in der Richtung AB, und nach der auf dem Halbmesser CA senkrechten Richtung AD ein noch kleinerer Theil: mithin ist der Gebrauch des schiefliegenden Tretrades eben nicht vortheilhaft, zumahl da auch der Ochse nur langsam, und nicht leicht schneller als 2 Fuß in einer Secunde fortschreitet.

Wenn das Tretrad am Umfange mit Zähnen oder Kämmen versehen ist, die in einen Trilling an einer andern

andern Welle greifen, so kann doch dadurch, wenn der Widerstand nur geringe ist, eine ziemlich schnelle Umlaufsbewegung bewirkt werden, und in solchen Fällen, besonders wenn noch andre Nebenursachen hinzukommen, warum man lieber Ochsen als Pferde arbeiten lassen will, kann das Tretrad seine Dienste leisten.

Das statische Moment des Gewichts, womit der Ochse das Rad zu drehen strebt, wäre zwar am grösten, wenn derselbe in der Gegend B um einen Quadranten von O und L entfernt, seine Stelle hätte: allein wenn das Moment des Widerstandes nun mit seinem respectiven Gewicht im Gleichgewicht wäre, so würde er das Rad nicht in Umlauf bringen können. Ist dagegen der Widerstand mit dem Gewicht des Ochsen im Gleichgewicht, wenn derselbe in A stehet, so kann der Ochse zuerst in der Gegend B auf das Rad geführet werden, damit er es in Umlauf bringe: hiernächst wird er so angebunden, daß er an einer etwas höhern Stelle A seinen Stand behält.

Der VI. Abschnitt.

Anwendung der bisherigen Lehren bey Anordnung der Getreyde- Stampf- und Sägemühlen.

78 §.

Unter den Mühlenwerken ist die Classe der Korn- 132
mühlen eine der bekanntesten. Das Getreyde F.
wird zwischen zweenen von diesem Gebrauch sogenann-

ten

ten Mühlsteinen IK und MN gemahlen oder zerrieben, diese Steine haben eine cylindrische Gestalt, und ihre Höhe beträgt etwa den vierten oder fünften Theil des Durchmessers ihrer Grundfläche. Beyde werden so auf einander gesetzt, daß ihre geometrischen Axen in eine grade Linie fallen, jedoch müssen sie einander nicht berühren. Der untere IK, welcher der **Bodenstein** heißt, liegt fest: der obere MN aber der so genannte **Läufer**, steckt auf einer vertical stehenden eisenen Stange OL als seiner Axe, die das **Mühleisen** heißt, und wird mit derselben vermittelst eines daran befindlichen Trillings PQ von der übrigen Maschine herum getrieben. Beyde Steine müssen in der Mitte durchbort seyn: der untere, weil das Mühleisen hindurch gehen, und ohne den untern Stein mit umzutreiben, um seine geometrische Axe frey umlaufen soll, der obere, um durch die Oefnung das Getreyde zwischen beyde Steine zu schütten. Diese Oefnung in der Mitte des Läufers heißt das **Läuferauge** Mit der Zwischenweite zwischen dem Läufer und Bodenstein richtet man sich darnach ob das Getreyde mehr oder weniger fein zerrieben werden soll, und um deßwillen wird die Pfanne, worin der untere Zapfen des Mühleisens laufen soll, in einem Querholz FG, wie es die 137 Figur vorstellt, oder dem so genannten **Steg** angebracht, welches bey H nur soweit be-
137 Fig. festiget ist, daß es nicht seitwärts weichen, übrigens aber sich um den durchgesteckten Polzen H drehen kann. Bey G läßt sich alsdenn dieses Steg durch untergeschobene Keile erhöhen und wieder erniedrigen.

Die übrige Einrichtung, welche die Einfassung der Mühlsteine mit der so genannten **Zarge** oder dem **Lauft** betrift, woran seitwärts in dem sogenannten Mehl-

Mehlbaum ein Loch befindlich seyn muß, wodurch das gemahlne Getreyde ablaufen kann, ferner die Einrichtung des Trichters oder Rumpfs, aus welchem das Getreyde zwischen die Mühlsteine nur nach und nach herabfallen soll, die fernere Anordnung, um einen langen nicht sonderlich weiten Beutel, wohinein das zermalmte Getreyde aus dem Mehlloch fällt, hin und wieder zu schütteln, damit das feine Mehl durchstäube, die abgesonderte Kleye aber zurück bleibe, und aus dem untersten Ende des Beutels für sich allein heraus falle, dies alles kann man am besten in jeder Kornmühle selbst in Augenschein nehmen.

79 §.

Nachdem nun die Art der Kräfte verschieden ist, wodurch man der Mühle ihre Bewegung geben will, nachdem leidet auch die übrige Anordnung der Maschine ihre Abänderungen. Die 132 Figur stellet 132
die vornehmsten Theile einer Wassermühle vor, AB Fig.
ist das grosse Wasserrad, welches unterschlächtig oder oberschlächtig seyn kann, nachdem es das Gefälle und der Wasserzufluß erlaubet. Ferner ist DE die zum Wasserrade gehörige Welle, und an derselben befindet sich das Kammrad GH, welches in den Trilling PQ am Mühleisen LO greift, und solchergestalt dem Läufer MN seine Umlaufsbewegung giebt. Hat man Gefälle und Wasserzufluß genug, so kann ein und eben dasselbe Wasserrad zwey so genannte Mahlgänge treiben. An der Welle des Wasserrades befindet sich alsdenn statt des Kammrades GH ein Sternrad, welches auf jeder Seite in den Trilling einer besondern wagrecht liegenden Welle greift, die ihr eigenes Kammrad hat, da dann jedes dieser Kammräder in

den Trilling eines besondern Mühleisens greifen kann, damit auf solche Art zwey Läufer zugleich in Umlauf erhalten werden. Eine dieser Nebenwellen wird alsdenn gewöhnlich auf ein in soweit bewegliches Lager gelegt, daß man sie vermittelst desselben von der Hauptwelle ein wenig entfernen kann, bis die Zähne des Sternrades nicht mehr zwischen die Stecken dieser Nebenwelle eingreifen. Man nennt das ein **Vorgelege**, und die Einrichtung ist um deßwillen nöthig, weil zuweilen der Wasserzufluß nicht stark genug ist, um beyde Gänge schnell genug zugleich umzutreiben, zuweilen auch vielleicht nicht Getreydevorrath genug zur Mühle gebracht wird, um beyden Gängen zu thun zu geben.

80 §.

Bey einer solchen Kornmühle ist eigentlich keine Last von unten in die Höhe zu heben, vielmehr bestehet der Widerstand, den die Mühle zu überwinden hat, ausser der Friction aller Theile der Maschine unter einander selbst, die sie mit andern Maschinen gemein hat, hauptsächlich darin, daß die Getreydekörner, welche zwischen den Steinen zerrieben werden, den Umlauf des Läufers zu hemmen streben. Auch dies ist eine Friction, die ohne Zweifel von dem Gewicht des Läufers selbst mit abhängt. Indem sich die Körner zwischen den Steinen klemmen, streben sie gleichsam den umlaufenden Läufer etwas in die Höhe zu heben, und tragen wenigstens einen Theil seines Gewichts. Das könnte auf die Vermuthung leiten, es müsse wohl dieser Widerstand der Getreydekörner dem Gewicht des Läufer selbst proportional seyn, so wie sonst die Friction dem Druck ohngefehr proportional ist, welcher die reibenden Flächen gegen einan-

der

der preßt. (113 §. Stat.) Hr. Belidor, in der Architectura Hydraul. 1 Th. 2 Buch 1 C. 3te Ausg. der Uebers. 654 §, schließt aus Beobachtungen, die er über die Wirkung einer Mühle angestellet hat, das Moment des Widerstandes der Getreydekörner zwischen den Mühlsteinen sey so groß, als wenn in einer Entfernung, die zwey Drittheile vom Halbmesser des Läufers betrüge ein Gegendruck seinen Umlauf zu hemmen strebte, der dem 35 oder 36sten Theil vom Gewicht des Läufers gleich wäre. Das ist eben soviel, als wenn am Umfang des Läufers ein Wiederstand die Bewegung desselben zu hemmen strebte, der dem 54sten Theil vom Gewicht des Läufers gleich wäre. Sollte vielleicht, wie wohl zu glauben ist, diese Regel eben nicht allemahl aufs genaueste zutreffen, so kann man doch um so mehr darnach rechnen, weil man doch nicht beständig einerley Kraft am Umfang des Wasserrades, und noch weniger einerley Kraft des Windstosses bey Windmühlen voraussetzen kann. Von den letztern wird unten mehr Nachricht vorkommen, und was die unterschlächtigen Wassermühlen betrift, so weiß man, daß in Ströhmen und Bächen das Wasser bald steigt, bald wieder fällt, mithin auch bey einerley Höhe der Schutzöfnung der Stoß des Wassers gegen die Schaufeln bald grösser bald geringer ausfallen muß. Belidor versichert übrigens, daß er seine Regel sehr zutreffend befunden habe.

81 §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer Wassermühle anzugeben, jedoch für jetzt noch mit Beyseitsetzung der Friction aller Theile der Maschine unter einander selbst.

Aufl. 1. Wenn die Mühle unterschlächtig seyn soll, so findet die Aufgabe des 58 §. ihre Anwendung. Das Gewicht des Läufers mit dem daran befindlichen Mühleisen und dessen Trilling sey so groß, als das Gewicht einer Menge Wasser, die den Raum Q füllet, so ist das R des 58 §. hier $= \frac{1}{54}Q$, wenn man annimmt, daß dieser Widerstand am Umfang des Läufers seine Bewegung zu hemmen strebt. Ich werde dafür λQ schreiben, um die Auflösung nicht an die Belidorsche Regel zu binden. Aus der Erfahrung muß als bekannt angenommen werden, welches die vortheilhafteste Umlaufsgeschwindigkeit des Läufers sey, wievielmahl er also in einer Minute, oder in einer Secunde umlaufen müsse: auch wird eben dadurch die Umlaufszeit $t = \frac{1}{v}$ des Läufers bestimmt. Es sey also der Halbmesser des Läufers $= q$, und $v = \frac{1}{t}$ die Zahl seiner Umläufe in einer Secunde, β die Geschwindigkeit, womit jeder Punct in seinem Umfang umläuft, so ist $\beta = 2\pi v q$, (18 §.) oder auch $\beta = \frac{2\pi q}{t}$. Weiter hat man aus dem 58 §. die Gleichung $\lambda Q . \beta = \frac{4}{27} A . h$, da dann A der Wasserzufluß für jede Secunde und h das Gefälle ist; auch wird überdem erfodert, daß die Geschwindigkeit der Schaufeln $= \frac{2}{3}\sqrt{gh}$, und die Umlaufszeit des Wasserrades $\vartheta = \frac{\pi r}{\frac{1}{3}\sqrt{g}}$ sey, wenn r des Wasserrades Halbmesser ist. Die Zahl der Umläufe des Wasserrades in einer Secunde sey μ, so ist $\mu = \frac{1}{\vartheta} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{gh}}{\pi r}$, und $\frac{v}{\mu} =$

$r . \beta$

$\frac{r.\beta}{\frac{2}{3}q\sqrt{gh}}$, (58. 11 §.) oder $\frac{v}{\mu} = \frac{\pi r}{\frac{1}{3}t\sqrt{gh}}$. Weil nun t und h gegeben sind, so hängt die Zahl $\frac{v}{\mu}$ vom Halbmesser r des Wasserrades ab, und umgekehrt der Halbmesser r von der Zahl $\frac{v}{\mu}$; eins von beyden kann demnach willkührlich bestimmt werden.

Ist nun die Gestalt und Grösse des Läufers gegeben, so ist q gegeben, und man hat $\beta = \frac{2\pi q}{t}$. Ueberdem ist zugleich Q gegeben, mithin wird erfodert, daß $A = \frac{27}{4} \cdot \frac{\lambda Q.\beta}{h}$ sey, und man muß von dem hinlänglichen Wasserzufluß versichert seyn, um die Länge der Schaufeln $b = \frac{A}{2a\sqrt{gh}}$ aus ihrer Höhe a zu finden, und darnach die Breite der Schutzöfnung mit dem Gerinne einzurichten.

Hätte man dagegen nur einen bestimmten Wasserzufluß, so müste man mit der Grösse des Läufers sich darnach richten, mithin zuerst $Q = \frac{\frac{4}{27}Ah}{\lambda.\beta}$ suchen; dies giebt eine Menge Wasser, die soviel wiegt, als der Läufer mit dem Mühleisen und Trilling zusammen. Weil aber $\beta = 2\pi v q$ war, so findet man $Q = \frac{\frac{4}{27}Ah}{2\lambda\pi v q}$, oder $Q = \frac{\frac{4}{27}Aht}{2\lambda\pi q}$, und Q hängt von dem Halbmesser q ab. Dieser Halbmesser kann also willkührlich angenommen werden, oder auch gegeben

 seyn,

seyn, so wird dadurch Q bestimmt. Weiter suche man eine Menge Wasser, die soviel als das Mühleisen mit dem Trilling wiegt, und setze diese $= S$, so ist $Q - S$ eine Menge Wasser, die soviel, als der Läufer für sich allein wägen muß. Wenn also die Zahl ζ ausdrückt, wievielmahl die Steinart, woraus die Mühlsteine verfertiget werden, schwerer als Wasser ist, so hat man $\frac{1}{\zeta}(Q - S)$ für den cubischen Inhalt des Läufers, da dann ferner seine Höhe aus dem Durchmesser $2q$ seiner Grundfläche gefunden wird. Die Höhe sey e und ϱ der Halbmesser des Läuferauges, so hat man $\pi(q^2 - \varrho^2)e = \frac{Q-S}{\zeta}$, also $e = \frac{Q-S}{\pi\zeta(q^2-\varrho^2)}$. Herr **Belidor** hat einen Cubicfuß derjenigen Steinart, die zu Mühlsteinen gebraucht wird, 110 Pfund schwer gefunden: (a. a. O. 651 §.) wenn also 1 Cubicfuß Wasser 70 Pfund wiegt, so ist $\zeta = 1\frac{4}{7} = 1{,}591$. Uebrigens wird vermittelst der Gleichung $a \,.\, b = \frac{A}{2\sqrt{gh}}$ die Fläche der Schaufeln bestimmt.

2.) Statt der Gleichung $\lambda Q \,.\, \beta = \frac{4}{27} A \,.\, h$ hat man $\lambda Q \,.\, \beta = A(h - u - k)$ wenn die Mühle oberschlächtig werden soll, (67 §.) und die Geschwindigkeit, womit jeder Punct im Theilriß des Wasserrades umläuft, ist $2\sqrt{gu}$, so wie auch wiederum vermittelst der Gleichung $\frac{v}{\mu} = \frac{\pi r}{t\sqrt{gu}}$ die Zahl $\frac{v}{\mu}$ oder der Halbmesser des Wasserrades r bestimmt wird, wenn man das eine oder das andre willkührlich annimmt. Aus der gegebenen Gestalt und Grösse des Läufers ist als-

alsdenn Q gegeben, und $\beta = 2\pi v q$, an Wasserzufluß wird die Menge $A = \frac{\lambda Q . \beta}{h - u - k}$ erfodert, und für den Querschnitt der zuflieſſenden Masse Wasser hat man $m^2 = \frac{A}{2\sqrt{gu}}$ (67 §.). Ferner ist die Wassermenge welche jede Zelle des Rades auffängt, $B = \frac{A\pi r}{n\sqrt{gu}}$, und die horizontale Länge der Schaufeln $b = \frac{2B}{pq \sin\psi}$ (65. 67. §.).

Wenn umgekehrt nur ein bestimmter Wasserzufluß vorhanden wäre, wonach man sich mit der Grösse des Läufers richten müste, so müste man den Werth $\beta = \frac{2\pi q}{t}$ in der Gleichung $\lambda Q\beta = A(h - u - k)$ brauchen. Das giebt $Q = \frac{A(h - u - k)t}{2\lambda\pi q}$, und man findet daraus Q wenn q willkührlich angenommen wird. Läßt man alsdenn S und ζ die vorhin angezeigte Bedeutung behalten, so sucht man weiter den cubischen Inhalt des Läufers $\frac{1}{\zeta}(Q - S)$ und daraus seine Höhe $e = \frac{Q - S}{\pi\zeta(q^2 - \rho^2)}$. Was die Einrichtung des oberschlächtigen Rades insbesondre betrift, davon ist oben im 63-67 §. der nöthige Unterricht schon gegeben worden.

3. Soll das Wasserrad zwey Gänge zugleich treiben, so nehme man die Rechnung zuerst nur für

einen Gang vor, und verdoppele hiernächst die so gefundene Fläche der Schaufeln dadurch, daß man ihre horizontale Länge verdoppelt. Weil Rad und Getriebe, in einer solchen Mühle mit dem Vorgelege zweymahl vorkommen, so muß dem 12 §. gemäß die Zahl $\frac{v}{\mu}$, nachdem selbige den vorhin gegebenen Auflösungen gemäß gefunden ist, in zweene Factoren zerfället werden: davon giebt alsdenn der eine an, wievielmahl die Zahl der Triebstecken des Trillings an jeder Nebenwelle in der Zahl der Zähne des Sternrades an der Hauptwelle enthalten seyn müsse, der andre aber, wievielmahl die Zahl der Triebstecken des Trillings an jedem Mühleisen in der Zahl der Kämme des hineingreifenden Kammrades enthalten seyn müsse.

82 §.

137 Fig. **Handmühlen** werden diejenigen genannt, welche von Menschen getrieben, und **Roßmühlen** solche, die von Pferden in Wirksamkeit gesetzt werden. Die 137 Fig. stellt eine der einfachsten Anordnungen einer Handmühle vor. Die Kurbel A wird von zwey Personen gedrehet, an ihrer Axe befindet sich das Kammrad B, welches den Trilling C und mit demselben den Läufer D treibt. Um den Umlauf desto gleichförmiger zu erhalten, sind an der Axe der Kurbel die Schwungflügel K, L, und am Mühleisen die Schwungflügel M, N, angebracht. Diese bestehen aus zwoen hölzernen kreuzweise übereinander gelegten Latten, etwa von 6 Fuß Länge, die an ihren Enden mit bleyernen Platten belegt sind. Für eine solche Handmühle hat man die beyden Fundamentalgleichungen $V.\alpha = \lambda Q.\beta$, oder $V.\alpha =$

$2\pi\lambda Qq$

$\frac{2\pi\lambda Q q}{t}$ und $\frac{v}{\mu} = \frac{2\pi . r}{t . \alpha}$: α ist die Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle der Kurbel, V die Kraft, womit die Arbeiter in die angegriffene Stelle wirken, r der Halbmesser oder der **Bug** der Kurbel. Folgende Abmessungen einer solchen Handmühle hat Hr. **Belidor** angegeben, die man nun nach der Theorie prüfen kann. Die Kurbel hat 12 Zoll Bug, das Kammrad 12 Zoll im Halbmesser, und ist mit 12 Kämmen versehen. Der Trilling hat 6 Zoll im Halbmesser und 6 Triebstecken. Des Läufers Durchmesser ist $3\frac{1}{2}$ Fuß, seine Dicke ohngefehr 6 Zoll, und das Läuferauge hat im Durchmesser 5 Zoll.

83 §.

Weil ein Pferd am füglichsten eine verticalstehende Welle AB vermittelst eines an derselben horizontal befestigten Zugbaums CD drehet, (22 §.) wenn es bey D angespannet ist, und sodann im Kreise herum läuft, wozu der Halbmesser CD gehört; so kann man an der Welle AB ein Sternrad EF anbringen, das in den Trilling G greift, und vermittelst desselben den Läufer H herum treibt. Für die Anordnung einer solchen Roßmühle dienen ebenfalls die beyden Gleichungen $V . \alpha t = 2\pi\lambda Q . q$ und $\frac{v}{\mu} = \frac{2\pi r}{t . \alpha}$, wenn r die Länge des Schwenkbaums CD, α die Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle D, und V die Kraft bezeichnet, womit das Pferd, oder vielleicht mehrere zugleich bey D in die Maschine wirken. Die Länge des Arms CD $= r$ wird am besten den Erinnerungen

138 Fig.

des 22sten §. gemäß willkührlich gewählt, so ist $\frac{\nu}{\mu}$ $= \frac{2\pi . r}{t . \alpha}$ bestimmt. Wenn ferner die Gestalt und Grösse des Läufers und dadurch Q und q gegeben sind, so bestimmt die Gleichung $V \alpha t = 2\pi\lambda Q q$ die bey D nöthige Kraft V, woraus sich also ergeben muß, ob ein Pferd genüge, oder ob ihrer zwey erfordert werden. Umgekehrt, wenn es vorgeschrieben ist, daß ein Pferd allein gebraucht werden solle, oder vielleicht zwey Pferde zur Arbeit bestimmt sind; so muß die Grösse des Läufers sich darnach richten. Man findet nun $Q = \frac{V . \alpha . t}{2\pi\lambda q}$, wenn man q willkührlich nimmt, welches hiernächst die Höhe $e = \frac{Q - S}{\pi \varsigma (q^2 - \varrho^2)}$ für den Läufer bestimmt.

84 §.

Die Mengen des Mehls, welche Mühlen von verschiedener Anordnung in gleichen Zeiten liefern, verhalten sich nach Belidors Erfahrung ziemlich nahe, wie die Effecte der Maschinen oder ihre mechanischen Momente. Der allgemeine Ausdruck des Effects ist $\lambda Q . \beta$, und weil $\beta = 2\pi\nu q$ ist, so hat man für den Effect der Mühle auch den Ausdruck $2\pi\lambda Q\nu q$. Bey Mühlen von verschiedener Anordnung bleibt doch die Zahl λ einerley, also verhält sich der Effect wie das Product $Q\nu q$.

Eine Mühle zu la Fere, die Herr Belidor untersucht hat, lieferte in 24 Stunden 120 Septiers gemahlnes Getreyde, den Septier zu 75 Pfund schwer gerechnet. Sie führte einen 4348 Pfund schweren Läu-

Läufer von 6 Fuß im Durchmesser, der in einer Minute 53 mahl umlief. (M. s. Belidor a. a. O. 656 §.) Im ersten Theil von Krusens Hamburgischen Contoristen 289 S. unter dem Artikel: Paris, wird angegeben, daß 1 Septier an Rocken 220 Pfund an Waizen 240 Pfund wäge, und 7736 französische Cubiczoll halte. Woher der Unterscheid von Belidors Angabe komme, ist mir nicht bekannt. Nach den Vergleichungstafeln in Krusens Contoristen sind 792 Pariser Pfunde soviel als 827 Beliner Pfunde, mithin 75 Pariser soviel als $78\frac{1}{4}$ Berliner Pfünde. Der Berliner Scheffel soll 82 Pfund an Rocken wägen, also beträgt 1 Septier nach Belidor ziemlich nahe einen Berliner Scheffel.

Wenn nun der Läufer, welcher zu der im 82 §. angegebenen Handmühle gehört, 700 Pfund schwer, im Durchmesser $3\frac{1}{2}$ Fuß groß ist, und 60 mahl in einer Minute umläuft; so findet man wieviel gemahlnes Getreyde diese Handmühle in 24 Stunden liefern würde nach der Proportion $4348 . 53 . 6 : 700 . 60 . 3\frac{1}{2}$: 120 Septier zur gesuchten Zahl $12\frac{7}{10}$ Septiers.

85 §.

Stampfmühlen sind Maschinen, welche dazu dienen sollen, mancherley Materialien durch starkes stossen oder schlagen zum anderweitigen eigenen Gebrauch zuzubereiten: einige führen eigentlich so genannte **Stämpfer** andre aber **Hammer**. Die Stämpfer sind verticalstehende bewegliche Pfosten, unter welchen in einer starken hölzernen Schwelle Gruben befindlich sind, worin die Masse liegt, welche von den Stämpfern zerstossen wird, indem die Maschine sie wechselsweise aufhebt, und wieder fallen läßt.

Man

Man stampft auf solche Art den Lein- und Rüben-Saamen zu einem Teig, woraus hiernächst durch eine besondre Vorrichtung das Oel gepreßt wird, und dies geschicht in den **Oelmühlen.** Auf ähnliche Art wird in den **Lohmühlen** die Rinde von Eichen- und Tannenholz zerstossen, und daraus die Werkloye zum Gebrauch der Gerber zubereitet. Die Masse, woraus man Schießpulver macht, und welche aus Salpeter Schwefel und Kohlen bestehet, wird in den **Pulvermühlen** eben so zerstossen. Wenn in den Bergwerken das aus den Gruben gebrachte Erz, nachdem man es auf der Scheidebank mit breiten Hammern zerschlagen hat, noch mit zu vielen Gestein vermischt ist, so wird dasselbe auf das so genannte **Pochwerk** oder **Puchwerk** geliefert: auch diese Maschine ist nichts anders, als eine Stampfmühle, wodurch das Gestein, in welchem sich das Erz befindet, so klein als möglich zerstossen, und hernach von demselben durchs Schlemmen abgesondert wird. M. s. Calvörs Acta Historico-Chronologico-Mechanica circa metallurgiam in Hercynia Superiori, im II Th. V. Cap. 2 Abth. 3 u. f. §§. Noch gehören hieher die **holländischen Walkmühlen**, worin Leder, Leinwand, Tuch, und allerhand wollene Zeuge durch das Stampfen zum bequemern Gebrauch gelinde und dichte gearbeitet werden. Die **deutschen Walkmühlen** sind statt der Stämpfer in eben der Absicht mit Hammern versehen, und diese Hammer sind starke und schwere mit einem proportionirlich langen Stiel versehene Klötze, welche die Gestalt eines Cirkelbogens haben, wozu der Stiel den Halbmesser abgiebt. Dieser Stiel ist am äussersten Ende um einen Polzen beweglich, damit die Maschine vermittelst einer ähnlichen

chen Anordnung, wie bey Stampfmühlen, den Kloß wechselsweise heben und wieder fallen lassen könne. In den Papiermühlen dienen die Hammer dazu, daß die Lumpen, aus welchen das Papier gemacht wird, völlig zermalmet und aufgelöset werden.

86 §.

Alle Arten von Stampfmühlen haben folgende 139
Einrichtung mit einander gemein. An der Welle BC Fig.
des Wasserrades A befindet sich ein Sternrad D, welches in das Getriebe E eingreift, dessen Welle FG eine Reihe Stämpfer wie HI, KL, mittelst der Daumen oder Tangenten M, N, auf folgende Art in
Bewegung setzet. In der 140 Fig. stellet der Kreis 140
um C einen Durchschnitt dieser Welle vor, der auf Fig.
ihrer geometrischen Axe senkrecht ist; an ihrem Umfang werden die Zapfen A, B, E, F, welche die Daumen heissen, eingesetzt, jeder Stämpfer wird ebenfalls, wie HI mit einem Zapfen GD versehen, den die Daumen, wenn die Welle umläuft, unten anfassen, also vermittelst desselben den Stämpfer in die Höhe heben, und wenn sie den Zapfen verlassen, wieder fallen lassen. Wenn hinlängliches Wasser und Gefälle vorhanden ist, so kann das Sternrad D auf je- 139
der Seite in ein Getriebe wie E greifen, und zwey Fig.
Daumenwellen mit ihren Stämpfern zugleich in Bewegung setzen. Das Sternrad mit dem Getriebe ist übrigens nur alsdenn nöthig, wenn das Wasserrad mit seiner Welle nicht schnell genug umlaufen, mithin auch die abwechselnde Bewegung der Stämpfer zu langsam ausfallen würde, wenn die Hauptwelle des Wasserrades selbst mit Daumen versehen wäre, um den Stämpfern dadurch ihre Bewegung zu geben.

Könnte dem Wasserrade für sich schon ein hinlänglich schneller Umlauf zuwege gebracht werden; so wäre das Sternrad mit dem Getriebe nicht nöthig.

87 §.

Die Gestalt und Einrichtung der Stämpfer und Gruben ist nach der Verschiedenheit der zu stampfenden Masse ebenfalls verschieden. Bey den **Oelmühlen** sind die Stämpfer unten rund, mit Eisen beschlagen, und gemeiniglich aus Ahorn- oder Weiß-Büchenholz gemacht. Die Gruben in der Schwelle unter den Stämpfern sind am Boden nach der Oberfläche einer Kugel gerundet, und unten in denselben ist eine eiserne Platte angebracht. Eben so sind in den **Lohmühlen** die Stämpfer mit Eisen beschlagen, und haben noch überdem drey oder vier scharfe Ecken, damit sie die Baumrinde desto besser zerschneiden können. In den **Pochwerken** heissen sie **Pochstempel**, und sind unten mit sehr starken eisernen Schuhen versehen, die wohl 50 und mehrere Pfunde schwer seyn müssen. In **Pulvermühlen** aber, um die Gefahr der Entzündung zu vermeiden, sind die Stämpfer nicht mit Eisen sondern mit Messing so beschlagen, daß das Holz vor dem Messing hervorraget, und in den Gruben sind entweder Spiegel von Messing befindlich, oder welches noch besser ist, von recht harten und glatten Holz.

Die Daumen an der Welle sind gewöhnlich keine gradlinichte sondern etwas gebogene Zapfen, man hat dabey die Absicht, den von der Friction herrührenden Widerstand möglichst zu vermindern, und in folgenden werden noch einige hieher gehörige Bemerkungen vorkommen.

88 §.

88 §.

Um die Bewegung der Maschine möglichst gleichförmig zu erhalten, muß man die Anordnung so machen, daß beständig einerley Anzahl Stämpfer den Umlauf der Daumenwelle zu hemmen strebe: um deßwillen muß in dem Augenblick, da eine Tangente ihren Stämpfer fallen läßt, eine andre dagegen sogleich anfangen, den ihrigen zu heben. Wie man diesen Erfolg zuwege bringen könne, wird auf folgende Art begreiflich. Durch den Punct E am äussern 140
Ende eines jeden Daumen, da wo derselbe den Zapfen Fig.
des Stämpfers ergreift, und durch die Axe der Daumenwelle stelle man sich eine Ebene vor, und eben so durch denselben Punct E eine andre Ebene auf der Umlaufsaxe der Welle senkrecht: so schneidet jene Ebene die cylindrische Oberfläche der Welle in einer graden Linie, die mit ihrer Axe parallel ist, die auf der Axe senkrechte Ebene aber giebt einen Kreis auf der Oberfläche der Welle, und in eben dieser Ebene läuft der Zapfen um. Es sey der Kreis um C ein solcher Querschnitt der Welle, so erhellet, daß es von der Zahl der Daumen, welche im Umfang dieses Kreises eingesetzt werden, abhänge, wievielmahl jeder Stämpfer, den diese Daumen ergreifen können, während eines Umlaufs der Welle gehoben werde. Man kann Kürze halber ihn den **Umlaufskreis** der Daumen nennen, die in seinem Umfange eingesetzt sind. Für jeden andern Stämpfer stelle man sich eben so einen eigenen Kreis im Umfang der Welle mit eben so vielen eben so weit aus einander gesetzten Daumen vor; so erhellet, daß alle Stämpfer zugleich würden ergriffen werden, und daß sie auch bey einerley Gestalt und Grösse der Daumen zugleich wieder herab

fallen würden, wenn man soviele Daumen, als Stämpfer vorhanden sind, in einerley graden mit der Axe der Welle parallelen Linie da einsetzte, wo diese grade Linie von den Umlaufskreisen der Daumen durchschnitten wird. In demselben Augenblick, nachdem so alle Stämpfer herab gefallen wären, müßte nun eine andre Reihe Daumen alle Stämpfer ergreifen, um die Bewegung gleichförmig zu erhalten: allein das wäre aus mehr als einem Grunde nicht so gut, als wenn man die Daumen so vertheilt, daß die durch ihre Stellen auf der Oberfläche der Welle laufende Linie gleichsam einen Schraubengang vorstellet, damit die Stämpfer von den Daumen nicht alle zugleich, sondern nur nach und nach, jedoch so ergriffen werden, daß allemahl eine gewisse Anzahl von den Stämpfern zugleich an der Welle hängt. Die folgende nähere Beschreibung wird das deutlicher machen.

89 §.

1.) Wenn während eines Umlaufs der Welle jeder Stämpfer nur einmahl gehoben werden soll, so bedarf es für jeden Stämpfer nur eines Daumen, und die Welle muß mit eben sovielen Daumen versehen seyn, als sie Stämpfer bewegen soll. Damit diese nun nach einander gehoben werden, so vertheile man die Daumen an der Welle auf solche Art, daß die Ebenen durch ihre Endpuncte und die Umlaufsaxe einander unter gleichen Winkeln schneiden. Man hat alsdenn die Grösse eines jeden dieser Winkel, wenn man 360° durch die Zahl aller Daumen dividirt: und es kann Kürze halber ein solcher Winkel oder auch der Bogen eines jeden von den Umlaufskreisen der Dnumen, der das Maaß dieses Winkels in Graden

ist,

ist, die **Umlaufs-Entfernung** der Daumen heissen. Gesetzt also, man hätte 12 Stämpfer, so müßten diese Winkel 30° betragen. Wenn nun im Anfang der Bewegung der erste Daumen seinen Stämpfer ergreift, so muß derselbe in seinem Umlaufskreise einen Bogen von 30° durchlaufen haben, bevor der zweyte Daumen seinen Stämpfer ergreift, er muß von neuem 30°, zusammen nun 60°, zurück gelegt haben, wenn der dritte Daumen den seinigen zu heben anfängt. Weiter würde der erste Daumen die Bogen von 90°, 120°, u. s. w. jedesmahl von 30° mehr, beschrieben haben, bevor der vierte, fünfte, Daumen u. s. f. seinen Stämpfer ergreifen könnte. Wieviel Stämpfer nun während des fortgesetzten Umlaufs beständig an der Welle hängen, und ihren Umlauf zu hindern streben, das hängt ausser der Entfernung CF der Stämpfer von der Umlaufsaxe der Welle, noch ab von der Länge CD des Daumen, und des dazu gehörigen Hebezapfens GD am Stämpfer. Die Länge des Daumen muß von der Umlaufsaxe C der Welle bis an den Endpunct D des Daumen gemessen werden. Wenn übrigens der Daumen in der wagrechten Lage CE den Stämpfer ergreift, und in der Lage CD ihn wieder fallen läßt; so kann FCD Kürze halber der **Erhebungswinkel** heissen. Wird alsdenn DE lothrecht herabgelassen, so ist $DE = FG = CD \sin \eta$ die Höhe, um welche der Stämpfer gehoben wird.

2.) Sollte während eines Umlaufs der Welle jeder Stämpfer zweymahl gehoben werden, so müßte man auf jeden Umlaufskreis zwey Daumen CE, CA, setzen, und diese könnten um 180° von einander entfernt werden. Die Zahl der Daumen muß nun doppelt so groß, als die Zahl der Stämpfer seyn, und 140 Fig.

man muß zwo Reihen Daumen anordnen, davon die erste während des halben Umlaufs der Welle alle Stämpfer nach der Reihe hebt, und die zwote Reihe während des zweyten halben Umlaufs. Stellt man sich alsdenn die Ebenen durch die Endpuncte der Daumen und die Umlaufsaxe vor, so findet man die Grösse eines jeden Winkels zwischen diesen Ebenen, oder die **Umlaufs-Entfernung** der Daumen, wenn man 180° mit der Zahl der Daumen, die zu jeder Reihe gehören, dividirt; oder welches einerley giebt, 360° mit der Anzahl aller Daumen, weil zwo Reihen vorhanden sind.

Auf ähnliche Art kann man auf jeden Umlaufskreis drey oder vier Daumen setzen, um gleiche Bogen von einander entfernt; damit während eines Umlaufs der Welle jeder Stämpfer drey oder viermahl gehoben werde. Man ordnet jedesmahl eben soviele Daumenreihen an, als jeder Umlaufskreis Daumen führt. Wenn alsdenn der Bogen zwischen zweenen Daumen auf einerley Umlaufskreise $= \frac{1}{n} 2\pi$ ist, und die Zahl der Daumen $= m$, so gehört zu jeder Daumenreihe die Zahl $\frac{1}{n}.m$, und die Umlaufsentfernung der Daumen bleibt $= \frac{2\pi}{m}$.

90 §.

141 Fig. **Die Entfernung der Stämpfer $CF = e$ von der Umlaufsaxe der Welle, die Länge des Daumen $CD = b$, und die Länge $GD = c$ des Zapfens am Stämpfer sind gegeben: man soll den Erhebungswinkel finden.**

Aufl.

Aufl. Man lasse DE auf CF senkrecht herab, und setze FCD $= \eta$, so ist CE $= b\cos\eta$, also FC oder e $= c + b\cos\eta$, woraus $\cos\eta = \frac{e-c}{b}$ gefunden wird.

Wenn $e - c = b$, also $e = b + c$ wäre, so hätte man $\cos\eta = 1$, also $\eta = 0$, und der Stämpfer würde gar nicht gehoben, wie für sich klar ist. Wäre $c = e$, also $\cos\eta = 0$, so hätte man $\eta = 90^\circ$. Allein so groß kann der Winkel η um deßwillen nicht werden, weil der Zapfen, wenn er herab fällt, die Welle nicht treffen muß. Setzt man den Halbmesser der Welle CH $= \varrho$, so kann c nicht grösser als $e - \varrho$, mithin $e - c$ nicht kleiner als ϱ, und $\cos\eta$ nicht kleiner als $\frac{\varrho}{b}$ werden, folglich $\sin\eta$ nicht grösser als $\frac{\sqrt{(b^2 - \varrho^2)}}{b}$.

91 §.

Die Zahl aller Daumen ist gegeben, und es ist vorgeschrieben, wieviele Stämpfer beständig während des Umlaufs an ihren Daumen hängen, und der Bewegung der Welle widerstehen sollen: man soll den Erhebungswinkel finden.

Aufl. Die Anzahl der Stämpfer, welche beym Umlauf der Welle beständig an den damit zusammen gehörigen Daumen hängen, und ihrer Bewegung widerstehen sollen, sey $= n$, die Anzahl aller Daumen $= m$, so wird erfodert, daß der Erhebungswinkel $= \frac{n}{m} \cdot 2\pi$ sey. Denn CD sey der erste Daumen, der seinen Stämpfer in der Lage CE ergreift, 141 F.

so hat derselbe Daumen die Winkel $\frac{1}{m} 2\pi$, $\frac{2}{m} . 2\pi$, $\frac{3}{m} . 2\pi$ . . . $\frac{n}{m} . 2\pi$ zurück gelegt, wenn der zweyte, dritte, vierte, u. s. f. der $(n+1)$te Daumen den dazu gehörigen Stämpfer ergreift. Weil nun n die Zahl der Stämpfer seyn soll, die zugleich an der Welle hängen bleiben; so muß der erste Daumen seinen Stämpfer fallen lassen, wenn der $(n+1)$te den seinigen ergreift. Das heißt, der erste Daumen muß in der Lage CD, wenn $FCD = \frac{n}{m} . 2\pi$ ist, seinen Stämpfer fallen lassen, also ist $\eta = \frac{n}{m} . 2\pi$.

Weil $\sin \eta$ also $\sin \frac{n}{m} . 2\pi < \frac{\sqrt{(b^2 - \varrho^2)}}{q}$ seyn muß, so wird erfodert, daß $\frac{n}{m} . 2\pi < A \sin \frac{\sqrt{(b^2 - \varrho^2)}}{b}$ sey, mithin $n < \left(m . A \sin \frac{\sqrt{(b^2 - \varrho^2)}}{b} \right) : 2\pi$.

Uebrigens ist nun η in der Gleichung $e = c + b . \cos \eta$ gegeben, (90 §.) und wenn von den Grössen b, c, e, zwey willkührlich genommen werden; so ist die dritte bestimmt.

Die Länge der Daumen CD wird durch die schicklichste Höhe $DE = a = b \sin \eta$ bestimmt, um welche die Stämpfer gehoben werden müssen, damit sie gehörig ihre Dienste leisten; es wird also erfodert, daß $b = a : \sin \eta$ sey, oder $b = a \operatorname{cosec} \eta$.

92 §.

Einige Stampfmühlen werden so angeordnet, daß 2 Stämpfer in einer Grube arbeiten, die alsdenn einen Fuß weit von einander stehen. Man hat alsdenn zwo Reihen Stämpfer, und für jede Reihe Stämpfer besonders kann man zwo oder drey Reihen Daumen auf einerley Art anordnen, nachdem jeder Stämpfer zwey oder dreymahl gehoben werden soll. Um ferner die Last gleichförmig zu vertheilen, muß von jeder Stämpferreihe besonders allemahl eine gleiche Anzahl an der Welle hängen. Wenn also für jede Stämpfer-Reihe besonders die Zahl derer, die zugleich an der Welle hängen sollen, $= \nu$, für beyde Stämpferreihen zusammen aber diese Zahl $= n$ ist; so ist $n = 2\nu$. Ist ferner die Zahl aller Daumen für jede Stämpfer-Reihe besonders $= \mu$, und die Zahl aller Daumen, welche die Welle führen muß $= m$; so ist $m = 2\mu$. Demnach bleibt der Erhebungswinkel $\eta = \frac{\nu}{\mu} \cdot 2\pi = \frac{n}{m} \cdot 2\pi$. (91 §.) Die Umlaufsentfernung der beyden Daumen, die zu jedem Paar in einerley Grube arbeitenden Stämpfer gehören, muß diesem Erhebungswinkel gleich seyn, wie man gleich übersiehet, wenn man für ν und μ ein Paar bestimmte Zahlen annimmt. Es sey $\nu = 4$, also $n = 8$, und die Einrichtung sey für 8 Paar Stämpfer so, daß beym ganzen Umlauf der Welle jeder Stämpfer dreymahl gehoben werde; so ist für jede Stämpferreihe besonders die Zahl aller Daumen $\mu = 3 \times 8 = 24$, also $m = 48$, und $\eta = \frac{1}{6} \cdot 2\pi = 60°$. Im Anfang der Bewegung heben der erste, 2te, 3te, 4te Daumen der einen Stämpferreihe nach einander, und wenn der 5te angegriffen wird, so fällt der erste nieder. Damit nun noch vier andre Daumen von der andern Stämpferreihe nach und nach ergriffen werden, so muß in eben dem Augenblick der erste zur zweyten Stämpferreihe gehörige

gehörige Daumen seinen Stämpfer ergreifen, und eben so die folgenden drey nach einander: da dann während der Zeit der 5te, 6te, 7te und 8te Daumen der ersten Stämpferreihe ergriffen sind. Darauf nach geendigtem ersten Umlauf der Welle fallen der fünfte Stämpfer in der ersten und der erste in der zweyten Reihe beyde zugleich nieder, wogegen der erste Stämpfer in der ersten, und der fünfte in der zweyten Reihe wieder ergriffen werden. Die Ebenen durch die Endpuncte aller 24 Daumen, welche zur ersten Stämpferreihe gehören, schneiden einander unter Winkeln von $\frac{360^\circ}{24} = 15$ Graden, und das ist zugleich das Maaß der Umlaufsentfernung der Daumen. Auf jede von den parallelen Durchschnittslinien dieser Ebenen mit der Oberfläche der Welle müssen zwey Daumen gesetzt werden, da wo diese Linien von den 16 Umlaufskreisen der Daumen geschnitten werden.

93 §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer Stampfmühle anzugeben, jedoch wiederum fürjetzt noch mit Beiseitsetzung der Friction aller Theile der Maschine unter einander.

Aufl. Es sey α diejenige Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle der Maschine, wobey das mechanische Moment der Kraft, wenn diese von der Geschwindigkeit abhängt, am grösten wird, und die Kraft sey alsdenn so groß als das Gewicht einer Menge Wasser, die den Raum V füllet. Ferner sey t die Umlaufszeit der Daumenwelle, so ist $\frac{n}{m}t$ die Zeit, worin jeder Stämpfer um die Höhe $a = b \sin \eta$ steigt, und

und die Geschwindigkeit der Stämpfer $\beta = \frac{ma}{nt}$.
Das Gewicht eines Stämpfers sey so groß, als das Gewicht einer Menge Wasser, die den Raum Q füllet, so ist der Widerstand am Umfang der Daumenwelle $= nQ$, und es wird erfodert, daß $V \cdot \alpha = Q \cdot \frac{ma}{t}$ sey. Aus der Erfahrung muß als bekannt angenommen werden, wievielmahl die Daumenwelle am vortheilhaftesten in einer Minute oder Secunde umlaufen müsse, damit die Bewegung der Stämpfer weder zu schnell noch zu langsam sey: also ist t gegeben. Eben so muß auch die schicklichste Höhe a der Stämpfer als gegeben angenommen werden, und m kann man ebenfalls willkührlich nehmen, wie es den übrigen Umständen am angemessensten ist. Demnach bleiben in der Gleichung $V\alpha = Q \cdot \frac{ma}{t}$ nur V und Q unbestimmt: ist eine von diesen Grössen gegeben, so findet man vermittelst jener Gleichung die andre.

Der Winkel $\eta = \frac{n}{m} \cdot 2\pi$ muß kleiner seyn, als ein Winkel, wozu der Sinus $\frac{\sqrt{(b^2 - \varrho^2)}}{b}$ gehört, also $\sin\eta^2$ oder $\frac{a^2}{b^2} < \frac{b^2 - \varrho^2}{b^2}$, mithin $b^2 > a^2 + \varrho^2$. Wird b dieser Einschränkung gemäß so wie ϱ willkührlich angenommen, so ist η aus der Gleichung $\sin\eta = \frac{a}{b}$ bestimmt, und $n = \frac{m \cdot \eta}{2\pi}$. Wie die übrige Anordnung der Maschine beschaffen seyn müsse, findet man

man vermittelst des Verhältnisses $\alpha : \beta$, denn es ist nunmehro auch $\beta = \frac{ma}{nt}$ bestimmt. Ist die Kraft V am Umfang eines Rades angebracht, so sey der Halbmesser r, die Umlaufszeit ϑ, also $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha}$. Daher erhält man die Zahl $\frac{\vartheta}{t} = \frac{2\pi r}{\alpha t}$, welche noch von r abhängt.

Wird die Stampfmühle durch ein Wasserrad getrieben, so ist hier V, α, und nQ, was im 58 §. p, $\frac{1}{3}$C, und R war. Ferner wenn h das Gefälle ist, so wird der Wasserzufluß $A = \frac{27}{4} \cdot \frac{nQ \cdot \beta}{h}$ erfordert, woraus man die Abmessungen der Schaufeln erhält, wenn Q gegeben ist.

94 §.

Wenn der Stamm von einem Baum, dem vorher durch die Zimmeraxt schon die Gestalt eines rechtwinklichten Parallelepipedi gegeben ist, durch Menschen ohne Hülfe einer Maschine vermittelst einer Säge nach seiner Länge in Bretter oder schwächere Stücken Bauholz zerschnitten wird, so liegt der Baum, oder der so genannte Block, wagrecht auf zweyen Blöcken, und zwar in einer solchen Höhe, daß der eine Arbeiter unter demselben aufrecht stehen kann. Der andre Arbeiter stehet oben auf dem Block, und beyde setzen die Säge in eine verticale Bewegung, die eigentlich zum Zerschneiden des Holzes erfodert wird: überdem rücken sie zugleich mit der Säge nach der Länge des Stammes weiter fort, so wie die Säge nach und nach tiefer in das Holz einschneidet. Die verticale auf und nieder

nieder spielende Bewegung kann man der Säge ohne grosse Schwierigkeit vermittelst einer Maschine mittheilen, allein es würde mehr Umstände machen, wenn die Maschine der Säge auch die horizontale Bewegung nach der Länge des Stammes mittheilen sollte. Deswegen läßt man in einer Sägemühle die Säge nur lothrecht auf und nieder spielen, und macht übrigens die Einrichtung so, daß der Sägeblock in waagrechter Richtung mit seiner Länge parallel der Säge entgegen rückt. Wenn auf solche Art der Baum nach seiner ganzen Länge zerschnitten ist, und der Widerstand aufhört, welchen das Holz bis dahin der Bewegung der Säge entgegen gesetzt hat, so muß die fernere Bewegung durch etwas mit der Maschine zusammenhängendes um deßwillen gehemmet werden, weil sonst die Bewegung der Maschine nun viel schneller als vorher würde, wodurch leicht der eine oder der andre Theil von ihr beschädiget werden könnte.

95 §.

Die verticale Bewegung der Säge wird auf folgende Art zuwege gebracht. An der Welle AB des Wasserrades befindet sich ein Sternrad C, daß in den Trilling D greift, und an der Welle dieses Trillings befindet sich die Kurbel E, welche die Säge OP auf eine ähnliche Art auf und abwärts schiebt, wie man sich bey Pumpenkünsten der Kurbel bedient, dem Kolben mit der Kolbenstange die hin und wieder schiebende Bewegung zu geben. Die Säge ist in dem so genannten Sägegatter FG befestiget, welches in den Falzen oder Nuthen der lothrecht stehenden Gattersäulen HI, KL, auf und abwärts beweglich ist. Am untersten Querriegel des Sägegatters ist, in der Mitte 142 Fig.

vermittelst einer eisernen Gabel, durch welche ein Bolzen gesteckt wird, eine eiserne Stange MN, der so genannte **Lenker** befestiget, der am andern Ende bey N mit der Kurbel E vermittelst eines Ringes zusammen hängt. Bey jedem Umlauf der Kurbel wird also das ganze Gatter mit der lothrecht darin befestigten Säge einmahl auf und nieder geschoben. Auf der andern Seite der Mühlwelle liegt gewöhnlich noch ein Trilling, um dessen Welle QR ein Seil gewunden ist, damit vermittelst desselben das Wasserrad auch dienen könne, das zum Segen bestimmte Holz herbey zu ziehen. Weil jedoch derselbe nur zu diesem Gebrauch allein dienen soll; so wird die Einrichtung so gemacht, daß man ihn zurück legen und von den Zähnen des Sternrades entledigen kann, wenn die Säge arbeiten soll.

96 §.

Um dem Block, welchen die Säge zerschneiden soll, die horizontale Bewegung zu geben, dienet folgende Einrichtung. Auf dem Brettboden der Mühle werden zwey horizontal und einander parallel liegende mit Falzen oder Nuthen versehene Straßbäume befestiget. Auf selbige wird ein Gatter, der so genannte **Klotzwagen** gelegt, und in die Falzen der Straßbäume so eingefuget, daß er sich auf demselben in der nöthigen auf der Fläche des Sägegatters senkrechten oder mit der Fläche der Säge parallelen Richtung vor und rückwärts schieben lässet. An beyden Enden des Klotzwagens befinden sich die **Ruheschemel**, wovon der eine beweglich ist, und verschoben werden kann, um ihn nach Beschaffenheit der Länge des zu zerschneidenden Klotzes von dem andern zu entfernen, daher er auch der **Richtschemel** oder **Rückschemel** heißt.

Auf

Auf diese beyden Schemel wird der Block gelegt, und gehörig befestiget. Unter den Klotzwagen liegt eine Welle, und diese ist mit zweenen gleich grossen Trillingen versehen, so daß unter jedem der beyden Bäume des Klotzwagens einer von diesen Trillingen liegt; die Bäume sind mit Zähnen oder Kämmen besteckt, welche zwischen den Stecken der erwehnten Trillinge eingreifen, und dadurch bringt man zuwege, daß die Trillinge, wenn die dazu gehörige Welle umläuft, den Klotzwagen mit dem darauf liegenden Block fortschieben. Zur Verringerung der Friction wird jeder Straßbaum von metallenen Rollen getragen, die an demselben von 4 zu 4 Füssen ausgetheilt sind, 4 Zoll im Durchmesser haben, und einen Zoll dick sind: ihr Polzen ist einen halben Zoll dick. Um auch die Friction an den Seitenflächen der Wagenbäume gegen die Falzen der Straßbäume zu vermindern, macht man noch in den nehmlichen Bäumen verschiedene Seitenrollen mit ihren Polzen fest, die horizontal umlaufen, im Durchmesser 3 Zoll halten, und 1 Zoll dick sind.

97 §.

Die Welle mit den Trillingen unter den Straßbäumen wird auf folgende Art mit der Säge zugleich in Bewegung gesetzet. An der Welle K dieser Trillinge bringt man auf einer Seite des Klotzwagens ein so genanntes Sperr-Rad AHB an, dessen Zähne 145
die in der Zeichnung vorgestellte zackenförmige Gestalt haben, und dies Rad wird vermittelst der Stoßstange DH, die am äussern Ende H etwas nach der Figur der Zähne gebogen ist, und zwischen diesen Zähnen eingreift, auf folgende Art in Bewegung gesetzet. Seitwärts des Sägegatters liegt die Welle E wag- Fig.

recht

recht und mit der Fläche des Sägegatters parallel, an derselben ist ein Hebelsarm EF befestiget, der sich von E bis oberhalb des Sägegatters G erstreckt. (Man vergleiche die 145ste mit der 142 Figur.) Am äussern Ende desselben F wird dieser Hebel EF vermittelst der Lenkstange FG mit dem obern Querriegel des Sägegatters bey G verbunden, und diese Lenkstange muß bey G und F mit einem Ringe und Zapfen versehen seyn, damit sie sich auf die Seite legen kann, wenn das Sägegatter steigt, und den Hebel EF in die Lage E*f* bringt. Mit der Welle E ist ein andrer kurzer Arm ED verbunden, der mit EF den Winkel FED einschließt, und mit diesem Arm ED wird bey D die Stoßstange DH so verbunden, daß sie sich um D frey drehen kann. Wenn nun das Sägegatter in die Höhe steigt, so drehet es vermittelst der Lenkstange GF die Welle E, und indem EF in die Lage E*f* kommt, rückt ED in die Lage EC, der Winkel EDH verwandelt sich in ECH, und DH kommt in die Lage CI. Hiedurch wird der Zahn des Sperr-Rades, der vorhin in H war, bis I fortgestossen. Wenn sich das Sägegatter wieder senkt, so kommt alles in die vorige Lage, das Ende I der Stoßstange rückt zurück nach H und fasset einen neuen Zahn des Sperr-Rades, der beym wiederhohlten Steigen des Sägegatters vorwärts gestossen wird. Mit dem Sperr-Rade, welches durch einen vorfallenden Sperrkegel gehindert wird, daß es sich nicht von I nach H zurück drehen kann, drehen sich alsdenn jedesmahl die an der Axe desselben befindlichen Trillinge und schieben den Klotzwagen ein wenig vorwärts. Nachdem durch den Umtrieb des Sperr-Rades der Klotzwagen um die ganze Länge des Blocks fortgeschoben ist, und das

Ende

Ende desselben bey dem Sägegatter anlanget, so wird die Bewegung der Maschine, wenn sie durch ein Wasserrad getrieben wird, auf folgende Art gehemmet. Mit dem Schutzbrett vor dem Gerinne des Wasserrades ist ein Hebebaum verbunden, wovon der eine Arm sich bis in die Mühle hinein erstreckt. Am Ende dieses Arms wird ein Strick gebunden, woran ein Ring befestiget ist, den man über einen Klinkhacken hängt, welcher in einer von den Falzsäulen des Sägegatters angebracht ist. Am hintern Ruheschemel des Klotzwagens ist ein eisener Bolzen eingeschlagen, der bey seiner Annäherung an den Klinkhaken stößt, und den Ring löset. Sobald dies erfolgt, fällt das Schutzbrett nieder, weil die Einrichtung vermittelst eines angehängten Gewichts so gemacht ist, daß auf der Seite des Hebebaums, wo das Schutzbrett anhängt, das Uebergewicht sehr stark ist.

98 §.

Der Widerstand, welchen das Holz der Bewegung der Säge entgegen setzet, hängt nicht allein von der Festigkeit des Holzes, sondern auch von der Gestalt und Einrichtung der Säge selbst ab, und der Art, wie sie in das Holz wirkt. Soviel weiß jedermann, daß die Säge mit spitzigen Zacken oder Zähnen versehen ist, welche die Fasern des Holzes zerreissen müssen, wenn die Säge hinein schneiden soll, die in solcher Absicht vor und rückwärts oder auf und niederwärts gezogen, zugleich aber etwas gegen das Holz gedruckt wird. Die grossen Zimmersägen haben doppelte Zähne und jeder Zug schneidet tiefer ein; gewöhnlich aber haben diejenigen, welche man in den Sägenmühlen braucht, nur eine einfache Reihe von

Zähnen, weswegen sie nur wechselsweise in das Holz einschneiden, so daß der Rückzug keinen Effect hat. Der Schnitt geschicht, wenn das Sägegatter sinkt, und die Säge arbeitet gar nicht, wenn das Gatter
143 Fig. wieder hinauf steigt. Die Säge EF selbst hat folgende Einrichtung. Wenn AC eine verticale Linie in ihrer Fläche und BD die grade Linie ist, worin die Spitzen von den Zähnen liegen, so müssen DB und CA nach unten gegen einander laufen, und verlängert einander unter einem sehr spitzen Winkel ζ schneiden. Wenn nun BG mit AC parallel, und $AC = f$ ist, so hat man $GD = f \tang \zeta$, und so tief würde die Säge in das Holz einschneiden, wenn sie nach ihrer ganzen Länge durch das Holz durchgezogen würde. In allen Fällen, wenn man durch f die Länge des durch das Holz hindurch gezogenen Theils der Säge und durch c die Tiefe des Schnitts verstehet, hat man $c = f \tang \zeta$. Wenn übrigens ein Stamm von einer gewissen Art Holz durchgängig von gleicher Festigkeit ist, so leidet die Säge beständig einerley Widerstand, wenn allemahl eine gleiche Anzahl Zähne in das Holz einschneidet. Demnach kann man bey Anordnung einer Sägemühle den Widerstand des Holzes als unveränderlich betrachten, und die allgemeinen Gesetze der Maschinenlehre auch hier anwenden.

99 §.

Wenn die Säge bloß von Menschen gezogen wird, so scheint es, daß man annehmen könne, der Widerstand des Holzes sey mit der Kraft im Gleichgewicht, womit sie alsdenn in die Säge wirken können, wenn letztere ohngefehr mit 2 Fuß Geschwindigkeit auf und niederspielt. Beym H. Belidor in der Wasserbauserbaukunst 710 §. findet man folgende hieher gehörige Erfahrungen. Drey an einer Säge angebrachten Personen können binnen einer Stunde einen annoch grünen 12 Zoll ins Gevierte starken eichenen Stamm bis auf eine Länge von 10 Fussen von einander sägen, wenn zwey derselben unten stehen, und die Säge abwärts ziehen, der dritte aber oben stehet, und die Säge wieder hinauf ziehet, aber auch jedesmahl von oben herab die Säge mit niederdruckt. Jeder Arbeiter wendet alsdenn etwa 30 Pfund Kraft an, also beträgt der Widerstand 90 Pfund. Wie viele Schnitte binnen einer Stunde, oder einer sonst bekannten Zeit geschehen, hat Herr Belidor nicht angemerkt, sonst liesse sich daraus finden, wie tief jedesmahl ein Schnitt der Säge gewesen sey: indessen läßt sich so ein ohngefehrer Ueberschlag machen. Die ganze Länge des Zuges beträgt etwa 3 Fuß, und dazu gehören $1\frac{1}{2}$ Secunden Zeit. Wenn nun Schnitt und Rückzug ohngefehr gleich viele Zeit erfodern, so geschehen in einer Secunde $\frac{1}{2} \cdot 3600 : 1\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3600 = 1200$ Schnitte, und jeder Schnitt gehet $\frac{10}{1200} = \frac{1}{120}$ Fuß, oder $1\frac{1}{5}$ Linie tief. Es wäre also tang ζ

$$= \frac{c}{f} = \frac{1}{3 \times 120} = \frac{1}{360}.$$

100 §.

Für jede Holzart müßte man dergleichen Erfahrungen besonders haben, da dann bey einerley Holzart und einerley Einrichtung der Säge, also einerley Winkel ζ der Widerstand der Dicke des Holzes proportional ist. Denn zweymahl, dreymahl und überhaupt $n$mahl soviele Zähne leiden zweymahl, dreymahl und über-

überhaupt $n$mahl mehr Widerstand, als die einfache Anzahl Zähne, wenn sie alle zugleich schneiden. Dabey ist aber auch noch zu bemerken, daß der Widerstand selbst bey einerley Holzart, nachdem es naß oder trocken ist, verschieden ausfalle. Das völlig ausgetrocknete Holz widerstehet weit stärker, als wenn es noch grün ist, und nach Belidors Erfahrungen a. a. O. können 3 Arbeiter einen 12 Zoll dicken völlig trockenen eichenen Stamm binnen einer Stunde nur auf eine Länge von 5 Fuß von einander sagen. Demnach geht alsdenn der Schnitt nur 0,6 Linien tief, und es wird tang $\zeta = \frac{1}{720}$. Wenn das eichne Holz 7 bis 8 Zoll dick und annoch grün ist, so durchschneiden sie stündlich eine Länge von 25 bis 26 Fuß, wenn es aber völlig trocken ist, nur 17 bis 18 Fuß. Von weichen (vermuthlich Tannen-) Holze, wenn es grün ist, zerschneiden 3 Arbeiter stündlich eine Länge von 14 Fuß, wenn es aber trocken ist, nur $6\frac{1}{2}$ bis 7 Fuß. Von weichen alten Holz, wenn es nur 7 bis 8 Zoll stark ist, können 3 Arbeiter stündlich eine Länge von 31 bis 32 Fuß zerschneiden.

101 §.

Damit die Bewegung der Sägemühle, wie bey andern Maschinen, gleichförmig werden, und alles wenigstens beynahe in einen gleichförmigen Beharrungsstand kommen könne, muß das Gewicht des Sägegatters halb so groß seyn, als der Widerstand, welchen die Säge zu überwinden hat.

Beweis. Das Gewicht der Säge mit dem Gatter sey $= Q$, der Widerstand des Holzes $= R$, so ist ausserdem, wenn gleich alle von der Friction herrührende Hindernisse der Bewegung für jetzt beyseit gesetzt

setzt werden, noch der Widerstand in Betrachtung zu ziehen, welchem der oberste Querriegel G des Sägegatters ausgesetzt ist, indem bey der steigenden Bewegung der Säge vermittelst der Lenkstange GF und des Hebels FE die Welle E bewegt, und der Wagen mit dem Sägeblock fortgeschoben wird. Es sey dieser Widerstand $= S$, so hat die Maschine, wenn die Säge steigt, nur das Gewicht des Gatters und den Widerstand S, mithin zusammen den Widerstand $Q + S$ zu überwinden, weil nun das Holz der Säge gar nicht widerstehet. Wenn dagegen die Säge mit dem Gatter herabsinkt, so vereiniget sich das Gewicht Q mit der Kraft der Kurbel, den Widerstand R zu überwinden, und der Widerstand S fällt weg. Demnach hat die Kurbel nur den Widerstand $R - Q$ zu überwinden, und damit die Bewegung gleichförmig erhalten werde, muß dieser Widerstand dem vorigen bey der steigenden Bewegung der Säge gleich seyn, mithin $R - Q = Q + S$, welches $R = 2Q + S$, also $Q = \frac{1}{2}(R - S)$ giebt.

Der Widerstand S ist allemahl in Vergleichung mit Q und R sehr klein: denn das ganze Gewicht des Wagens mit dem Block ist unterstützt, beym jedesmahligen Hub der Säge wird der Wagen nur um eine Kleinigkeit verrückt, und der Widerstand, welchem die horizontale Bewegung dieses Wagens ausgesetzt ist, rührt nur von der Friction der unter ihm liegenden Rollen an ihren Polzen her, zum Theil auch von der Friction zwischen den Kämmen der Wagenbäume und den Triebstecken, wo sie zwischengreifen. Es sey dieser Widerstand $= X$, welchem die horizontale Bewegung des Wagens ausgesetzt ist, so kann man auf folgende Art daher den Widerstand S finden, welchem der oberste Querriegel G des Sägegatters bey der steigenden Bewegung entgegen wirkt.

145 Es sey HI der Bogen, um welchen sich die Pe-
146 ripherie des Sperr-Rades in der Zeit t drehet, da
Fig. die Kurbel einmahl umläuft, und die Säge einmahl auf und nieder spielt, der Halbmesser des Sperr-Rades $= a$, der Trillinge an der dazu gehörigen Welle $= \alpha$, der Halbmesser des Umlaufskreises der Kurbel $= q$: so ist der Weg des Wagens mit dem Block in eben der Zeit $= \frac{\alpha}{a} \cdot \mathrm{HI}$, und in derselben Zeit steigt der Querriegel G des Sägegatters um die Höhe $Gg = 2q$. Demnach hat man nach dem Cartesianischen Gesetz $\mathrm{X : S} = 2q : \frac{\alpha}{a} \cdot \mathrm{HI}$, und $\mathrm{S} = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\mathrm{HI}}{2q} \cdot \mathrm{X}$. Gewöhnlich beträgt HI nicht völlig einen ganzen oder ohngefähr $\frac{3}{4}$ Zoll, und $2q$ nicht leicht unter $2\frac{1}{2}$ Fuß, also ist $\frac{\mathrm{HI}}{2q}$ ohngefähr $\frac{1}{40}$. Ueberdem ist das Sternrad doch wenigstens 4 mahl grösser im Durchmesser, als die dazu gehörigen Trillinge, mithin $\frac{\alpha}{a}$ etwa $\frac{1}{4}$, und das giebt S ohngefähr $= \frac{1}{160} \cdot \mathrm{X}$. Ferner sey P das Gewicht des Wagens mit dem Kloß, so wäre das Hinderniß der Friction höchstens $\frac{1}{3}$ P, wenn die Straßbäume auf einem wagrechten Boden geschoben würden. Wegen der unten angebrachten Rollen vermindert sich dieser Widerstand im Verhältniß der Durchmesser dieser Rollen zu ihren Polzen $= 8 : 1$ und bleibt nur $\frac{1}{24} \cdot \mathrm{P}$. Setzt man diesen Werth

statt

statt X, so wird $S = \frac{1}{3800} \cdot P$, und würde nur ohngefehr 5 Pfund betragen, wenn auch P ein Gewicht von 20000 Pfund hätte. So grosse und schwere Klötze aber werden nicht leicht gebraucht, und überdem ist man bey Berechnung des Widerstandes R, welchen das Holz der Säge entgegen setzt, kaum auf 5 Pfund sicher. Demnach kann ohne merklichen Fehler $Q = \frac{1}{2} R$ angenommen und S in Vergleichung mit R weggelassen werden.

102 §.

Eine Sägemühle vortheilhaft anzuordnen, wenn durch Versuche bekannt ist, wie stark der Widerstand sey, den das zu schneidende Holz der Säge entgegen setzt.

Aufl. Das Gewicht Q des Sägegatters mit der Säge zusammen muß halb so groß seyn, als der Widerstand des Holzes, (101 §.) alsdenn leidet die Stelle N der Kurbel in lothrechter Richtung, wenn die Säge steigt den Widerstand Q, und wenn sie sinkt den Widerstand $R - Q = Q$, weil $R = 2Q$ seyn muß: mithin ist in dieser lothrechten Richtung durch N allemahl der Widerstand, oder wie man bey Maschinen redet, die zu bewegende Last $= Q$. Der Umlaufshalbmesser der Kurbel bleibe $= q$, die Umlaufszeit $= t$; so ist die Geschwindigkeit des Sägegatters $= \frac{4q}{t} = \beta$ als die Geschwindigkeit der Last. Ferner sey die vortheilhafteste Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle der Maschine $= \alpha$, die damit zusammen gehörige Grösse der Kraft $= V$, wenn diese veränderlich ist, so wird erfodert, daß $V\alpha = Q\beta$ sey. Aus der Erfahrung muß als bekannt angenommen

141 Fig.

werden, welches die vortheilhafteste Geschwindigkeit der Säge sey, weil bey sehr schneller Bewegung des Gatters das heftige Reiben in den Falzen eine zu starke Erhitzung zuwege bringt. H. Belidor a. a. O. 706 §. setzt folgende Gränze dieser Geschwindigkeit fest: bey einer Mühle, wo die Säge um 30 Zoll steigt und fällt, müsse sie in einer Minute nicht über 80 mahl auf und nieder spielen; und das giebt eine Geschwindigkeit von 80 mahl 60 Zoll in einer Minute, also 80 Zoll oder $6\frac{2}{3}$ Fuß in einer Secunde. In den meisten Fällen dürfte also eine Geschwindigkeit von 5 bis 6 Fuß genügen. Das Verhältniß $\alpha : \beta$ dient hiernächst das Sternrad mit dem Getriebe richtig anzuordnen. Ist die Kraft V am Umfang eines Rades angebracht, wozu der Halbmesser r die Umlaufszeit ϑ gehört, so hat man $\vartheta = \frac{2\pi r}{\alpha}$, $t = \frac{2\pi q}{\beta}$, und $\frac{\vartheta}{t} = \frac{\beta r}{\alpha q}$. Alsdenn aber ist noch übrig, das Schiebwerk gehörig anzuordnen, wobey es hauptsächlich auf die Frage ankommt, wie weit der Wagen mit dem Block nach jedem Sägeschnitt vorrücken müsse. Hat man vermittelst solcher Erfahrungen, wie sie oben im 99 §. angeführt sind, gelernt, wieweit die Säge bey einem bekannten Widerstande einer gewissen Holzart jedesmahl einschneiden könne, so weiß man auch, wie weit der Wagen nach jedem Schnitt vorrücken müsse. Der Bogen, um welchen die Zähne des Sperr-Rades bey jedem Rückzuge der Säge fortrücken, sey = W, und der dazu gehörige Weg des Klotzwagens = w; ferner sey das Verhältniß der Halbmesser des Sperr-Rades und der dazu gehöri-

gehörigen Trillinge $= n : 1$, so hat man $W = nw$. Kann man also w als bekannt annehmen, so bleiben nur n und W in dieser Gleichung unbestimmt. Weil man nun, wenn die Höhe, um welche die Säge jedesmahl steigt, bekannt ist, den gebrochenen Hebel FED mit der Stoßstange DH so einrichten kann, daß $HI = W$ eine gegebene Grösse wird, so bestimmt das zugleich $n = \frac{W}{w}$. Nachdem alsdenn die Stoßstange jedesmahl nur einen oder zwey Zähne des Sperr-Rades fortstossen soll, nachdem muß man W entweder mit der ganzen oder halben Anzahl der Zähne, die man dem Rade geben will, multipliciren, um die Peripherie des Sperr-Rades, und daraus ferner den dazu gehörigen Halbmesser zu finden, der alsdenn mit n dividirt den Halbmesser der Trillinge giebt.

Ob man nur eine Säge in das Gatter setzen müsse, oder ob er mehrere führen könne, läßt sich aus dem Widerstande derjenigen Holzart, und aus der Dicke der Stämme beurtheilen, welche die Mühle zerschneiden soll. Aus der Grösse der Kraft, womit sie noch in die angegriffene Stelle der Maschine beym vortheilhaftesten Umlauf des Hauptrades wirkt, hat man $Q = \frac{V\alpha}{\beta}$, und der gesamte Widerstand des Holzes muß $= 2Q$ seyn. Wenn also R der Widerstand ist, den eine Säge allein antreffen würde, so giebt $\frac{2Q}{R}$ die Anzahl der Sägen, die zugleich schneiden können. Der Effect der Mühle wird alsdenn aus der Länge des Schnitts beurtheilet, den die Sägen in gegebener Zeit in dem Kloß zuwege bringen, und in jeder gegebenen Zeit T ist die Länge dieses Schnitts $= \frac{wT}{t}$ für jede einzelne Säge.

Der VII. Abschnitt.

Vom Effect der Windflügel bey Mühlen und andern Maschinen.

103 §.

Weil der Wind nichts anders als ein Luftstrohm ist; so hat er eine ganz ähnliche Wirkung mit dem Wasserstrom, wenn derselbe gegen eine feste Fläche stößt. Fängt eine ebene Fläche den Windstoß senkrecht auf, so ist sie einem Druck ausgesetzt, der so groß ist, als das Gewicht einer Luftsäule über dieser Ebene als einer Grundfläche in einer Höhe, die so groß ist, als die der Geschwindigkeit des Windes zugehörige Höhe. Beym schiefen Stoß muß man noch mit dem Quadrat vom Sinus des Anstoßwinkels multipliciren, und wofern die Ebene dem Stoß ausweicht, nur die relative Geschwindigkeit des Windes in Rechnung bringen. (42 §. Hydraul.) Daraus wird begreiflich, daß auch der Windstoß einer Maschine ihre Bewegung geben könne, wenn dieser Absicht gemäß alles recht angeordnet ist.

144 Fig. Durch den Kopf AB der Hauptwelle AC werden ein Paar lange hölzerne Bäume DE, FG, welche die **Windruthen** heissen, so hindurch gesteckt, daß beyde sowohl gegen einander, als auch gegen die Welle

AC eine senkrechte Lage bekommen. Diese Ruthen werden in Entfernungen von einer bis zwey Ellen bey V, X, Y, Z, u. s. f. mit Löchern durchbort, und hölzerne Sprossen MO, HI, KL, u. s. f. so lang, als der Flügel breit seyn soll, hindurch gesteckt, die Sprossen werden zu beyden Seiten durch die Leisten oder Rahmen MN, OP, wegen mehrerer Festigkeit verbunden, und hiernächst entweder mit Schilf ausgeflochten, oder mit dünnen Brettern, den hier so genannten Thüren zugedeckt, die man bey Stürmen hinweg nehmen kann, damit alsdenn der Wind durch die Flügel hindurch streiche, und der Maschine keinen Schaden zufüge. Wenn alle zu einerley Flügel gehörige Sprossen in einerley Ebene liegen, so bekommt der Flügel die Natur einer festen Ebene, die um deßwillen gegen die Umlaufsaxe unter einem schiefen Winkel geneigt seyn muß, damit der Wind, wenn er in paralleler Richtung mit der Axe der Welle gegen den Flügel stößt, ihn seitwärts drücke, und solchergestalt den Flügel mit der Welle in Umlauf bringe. Vorläufig übersiehet man leicht, daß der Wind den Flügel nach der Seite hin in Umlauf zu bringen streben müsse, wo der Flügel mit der Umlaufsaxe einen stumpfen Winkel macht: deswegen können nicht zwey einander entgegen gesetzte Flügel NMOP und QRST an einerley Ruthe FG in einerley Ebene liegen, weil sonst der Wind diese Flügel auf entgegengesetzte Art zu drehen streben würde. Die Absicht ist, daß der Wind alle vier Flügel auf einerley Art in Umlauf bringen soll, deßwegen muß bey der Anordnung und Stellung der Flügel darauf Rücksicht genommen werden.

104 §.

Die Richtung des Windes ist gewöhnlich entweder völlig, oder doch beynahe horizontal: also muß auch die Umlaufsaxe der Windflügel horizontal liegen, um der Bedingung, daß die Richtung des Windes damit parallel sey, ein Genüge zu leisten. Indessen ist es auch nicht ungewöhnlich, daß der Umlaufsaxe eine gegen den Horizont etwas geneigte Lage gegeben wird, so daß der Kopf mit seinem Zapfen an der Seite, wo der Wind herkommt, etwas höher liegt, als der hintere Zapfen an der Seite, wo der Wind hinbläset: alsdenn ist zugleich diese Umlaufsaxe gegen die Richtung des Windes geneigt, wofern letztere horizontal ist. Wenn diese Neigung der Axe gegen die Richtung des Windes nur wenige Grade beträgt; so läßt sich auch ohne Rechnung schon voraussehen, daß der Effect im ganzen beynahe eben so groß, als in dem Fall seyn müsse, wenn die Axe mit der Richtung des Windes parallel liegt. Ueberdem wird man selten durch andre Gründe genöthiget, die Lage der Axe gegen die Richtung des Windes unter einen Winkel von beträchtlicher Grösse zu neigen. Deßwegen soll im folgenden die Lage der Axe allemahl mit der Richtung des Windes parallel angenommen werden.

105 §.

Die Umlaufsgeschwindigkeit der Flügel ist gegeben, man soll die wahre Geschwindigkeit finden, womit jeder gegebene Punct in der Ebene des Flügels umläuft.

133 Fig. Aufl. Es sey CA die Mittellinie der Windruthe, die man als die Axe des Flügels betrachten kann, und CD die Umlaufsaxe; so ist $ACD = 90°$.

Wenn

Wenn nun γ die Umlaufsgeschwindigkeit des Flügels EHFI ist, und P ein Punct in seiner Axe, $CP = x$ seine Entfernung von der Umlaufsaxe; so ist die wahre Geschwindigkeit dieses Puncts $P = \gamma x$. (28 §. Mech.) Wenn ferner PT eine Tangente des Kreises ist, worin P umläuft; so ist PT die jetzige Richtung der Bewegung des Puncts P, und die Ebene CPT ist auf CD senkrecht.

Wenn nun ein andrer Punct M in der Ebene des Flügels ausserhalb seiner Axe gegeben ist, und MP auf CA senkrecht gezogen wird, so ist die Stelle dieses Puncts M durch CP und PM gegeben. Durch P sey PQ mit CD parallel gezogen, so ist $CPQ = 90°$, also die Ebene MPQ auf AC senkrecht, (267 §. Geom.) und mit CD parallel. (281 §. Geom.) In eben dieser Ebene MPQ liegt auch PT, (288 §. Geom.) sie schneidet die Ebene des Flügels senkrecht in MP, und wenn MP nach N verlängert wird, so ist NPQ der Neigunswinkel des Flügels gegen die Umdrehungsaxe. (292 §. Geom.) Dieser Winkel sey $= \vartheta$, und man ziehe Mq mit PQ parallel, so ist auch $NMq = NPQ = \vartheta$. Ueberdem sey MV auf PQ und VS auf CD, folglich auch auf VQ senkrecht, so ist die Ebene MVS auf VQ, folglich auch auf SD senkrecht; (276, 278 §. Geom.) und wenn man MS ziehet, so ist MS die Entfernung des Puncts M von der Umlaufsaxe. In dieser Ebene MVS sey Mt auf MS senkrecht, so ist das die jetzige Richtung der Bewegung des Puncts M, und seine Geschwindigkeit $= \gamma . SM$. Wird überdem $CP = x$, $PM = y$ gesetzt, so hat man $MV = y \sin \vartheta$, und $MS = \sqrt{(MV^2 + VS^2)} = \sqrt{(x^2 + y^2 \sin \vartheta^2)}$, folglich ist die gesuchte wahre Geschwindigkeit des Puncts $M = \gamma \sqrt{(x^2 + y^2 \sin \vartheta^2)}$.

Wenn man sich die Ebene MVS gehörig erweitert vorstellt, so wie sie in der Figur durch das Viereck SW ausgedrückt ist; so schneidet sie die Ebene des Flügels in einer graden Linie EH, die durch M gehet. Weil nun diese Ebene auf VQ senkrecht war, so ist sie auf der Ebene MPQ senkrecht, (276 §. Geom.) worauf auch die Ebene des Flügels senkrecht stehet: folglich ist EH auf MPQ senkrecht, (278 §. Geom.) und PMV $= 90° - \vartheta$ ist der Neigungswinkel des Flügels gegen die Ebene MVS oder SW. Ferner hat man SM$t = 90° =$ HMV, also SMt − SMH = HMV − SMH, oder HMt = SMV. Wird nun HM$t = \beta$ gesetzt, so ist $\sin\beta = \frac{VS}{MS} = \frac{x}{\surd(x^2 + y^2 \sin\vartheta^2)}$.

106 §.

133 F. Alle Puncte der graden Linie *MN*, welche die Axe des Flügels in *P* senkrecht schneidet, haben während der Umlaufsbewegung in jedem Augenblick einerley Geschwindigkeit nach derjenigen Richtung, die mit der Richtung *PT* der Bewegung des in der Axe des Flügels liegenden Puncts *P* parallel ist.

Beweis. Es war der Winkel HMt = SMV $= \beta$ und MV ist parallel mit PT: wenn also MV durch M nach v verlängert wird, so ist tM$v = 90° - \beta$. Des Puncts M Geschwindigkeit in der Richtung Mt ist $= \gamma$. MS, und diese zerlegt sich nach den Richtungen Mv und MH in die Geschwindigkeiten γ . MS$\sin\beta$, und γ . MS$\cos\beta$. Ferner war $\sin\beta = \frac{x}{MS}$, also die Geschwindigkeit in der mit PT parallelen Richtung Mv $= \gamma x$. Weil nun x für alle Puncte der graden Linie MN, MN, die CA in P senkrecht schneidet, einerley ist; so haben alle Puncte derselben in der mit PT parallelen Richtung einerley Geschwindigkeit.

107 §.

Die Geschwindigkeit des mit der Umlaufsaxe parallel gegen den Windflügel *EF* anstoßenden Windes, und die Winkelgeschwindigkeit, womit die Windruthe umläuft, sind gegeben: man soll das statische Moment der Kraft des Windes finden, womit derselbe den Flügel zu drehen strebt. 133 F.

Aufl. Zuerst stelle man sich ein sehr schmales Stück MmnN des Flügels zwischen zwoen auf seiner Axe CA senkrechten einander sehr nahe liegenden Parallellinien vor, so kann man dasselbe als eine Ebene betrachten, welche in diesem Augenblick mit paralleler Bewegung und mit der Geschwindigkeit γx nach der Richtung PT fortgeht. (107 §.) Denn x bleibt für alle Puncte des Rechtecks MmnN der Voraussetzung gemäß sehr nahe einerley. Man setze die Geschwindigkeit des Windes in der Richtung PQ = C, die mit CD parallel ist, und PR sey auf der Ebene des Flügels senkrecht; so liegt PR in der Ebene MPQ, die auf CA und den Flügel selbst senkrecht ist, (106 §.) und man hat QPR $= 90° - \vartheta$. Ferner ist die Geschwindigkeit des Windes nach der Richtung PR $=$ C sin NPQ $=$ C sin ϑ. Ueberdem ist TPR $=$ NPQ $= \vartheta$, und aus der Geschwindigkeit γx in der Richtung PT entsteht nach PR die Geschwindigkeit $\gamma x \cos\vartheta$. Nun sey die Luft n mahl leichter als Wasser, und das Rechteck MmnN $= hh$; so leidet dasselbe den senkrechten Druck $P = hh \cdot \frac{n(C \sin\vartheta - \gamma x \cos\vartheta)^2}{4g}$, und dieser zerlegt sich in die Seitenkräfte nach $PQ = P \sin NPQ = P \sin\vartheta$, und nach $PT = P \cos\vartheta$. Jener Druck nach PQ ändert nichts in der Umlaufsbewegung des Flügels, aus diesem aber entsteht das statische Moment $\frac{n(C \sin\vartheta - \gamma x \cos\vartheta)^2 \cos\vartheta}{4g} \cdot xhh$.

Wenn man sich vorstellet, der ganze Flügel sey in dergleichen sehr schmale Rechtecke getheilt, so gilt dieser Ausdruck allgemein für das Moment des Windstosses gegen jedes dieser Rechtecke, nur daß x für jedes derselben einen andern Werth hat. Die Summe aller dieser Momente ist alsdenn dem gesuchten Moment des Windstosses gegen den ganzen Flügel gleich.

108 §.

Das statische Moment des Windstosses gegen den Flügel für den ersten Anfang der Bewegung zu finden.

Aufl. Wenn der Flügel noch ruhet, also im ersten Anfang der Bewegung, hat man $\gamma = 0$, also das statische Moment des Windstosses gegen jedes der kleinen Rechtecke $MmnN = \frac{n C^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{4g} \cdot xhh$. Setzt man nun statt x alle Werthe CP nach der Ordnung von CB bis CA, so behalten alle so gefundene Producte den unveränderlichen Factor $\frac{nC^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{4g}$; und wenn die Summe aller Factoren xhh so bezeichnet

net wird $\int xhh$, so ist das gesuchte Moment $= \frac{nC^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{4g} \cdot \int xhh$. Wird ferner die Fläche des Flügels als eine schwere Ebene betrachtet, deren Gewicht ihrer Fläche proportional ist, so sey G ihr Schwerpunct, $CG = f$, und die Fläche des Flügels $= A$; so hat man $\int xhh = Af$, (66 §. Statik.) mithin ist das gesuchte Moment des Windstosses $= \frac{nC^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{4g} \cdot Af$.

109 §.

Bey einerley Gestalt und Grösse der Flügel auch einerley Geschwindigkeit des Windes hängt das Moment des Windstosses gegen den noch ruhenden Flügel vom Winkel ϑ so ab, daß es anfangs, wenn ϑ nur klein ist, mit dem Winkel ϑ wächst, hiernächst aber, wenn ϑ dem rechten Winkel nahe kommt, wieder abnimmt, und für $\vartheta = 90°$ verschwindet, so wie es für $\vartheta = 0$ ebenfalls $= 0$ seyn muß. Daraus folgt, daß es eine gewisse Grösse des Winkels ϑ geben muß, wobey dies Moment des Windstosses am größten ist. Es ist aber das Product $\sin\vartheta^2 \cos\vartheta$ am größten, wenn $\sin\vartheta^2 = \frac{2}{3}$, und $\cos\vartheta^2 = \frac{1}{3}$, also $\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \tan g\,\vartheta = \sqrt{2}$, mithin wenn ϑ ein Winkel ist, der $54° 44' 8\frac{1}{2}''$ fasset. Nimmt man ihn nur um etwas weniges grösser oder kleiner an, so wird das Product $\sin\vartheta^2 \cos\vartheta$ kleiner als bey jener Voraussetzung gefunden.

110 §.

Der allgemeine Ausdruck für die Kraft des Windstosses, gegen das Element MmnN des umlaufenden

fenden Flügels war $= \frac{n(C\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2\cos\vartheta}{4g}\cdot hh$, und daraus entsteht das statische Moment $= \frac{n(C\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2\cos\vartheta}{4g}\cdot xhh$. (107 §.) Eben dies Moment ist =

$$\frac{n}{4g}(xhh.C^2\sin\vartheta^2\cos\vartheta - 2x^2h^2.\gamma\sin\vartheta\cos\vartheta^2 + x^3h^2.\gamma^2\cos\vartheta^3),$$

und die Summe aller dieser Momente von B bis A genommen giebt das statische Moment des Windstoßes für den ganzen Flügel. Wenn nun die Summen der Producte xhh, x^2h^2, x^3h^2, die gefunden werden, wenn man statt x nach und nach alle Werthe CP von CB bis CA setzt, auf diese Art bezeichnet werden: $\int xh^2$, $\int x^2h^2$, $\int x^3h^2$, so hat man $\int xh^2 = A.f$, wie im vor. §, und die übrigen beyden Summen werden vermittelst der Integralrechnung gefunden. Sind die Flügel, wie ich hier voraussetze, Rechtecke, so hat man $f = \frac{1}{2}(CA + CB)$, und wenn man $CA = a$, $CB = b$ setzt, so werden vermittelst der Integralrechnung die Summen

$$\int x^2h^2 = (\tfrac{2}{3}af + \tfrac{1}{3}b^2).A = (\tfrac{2}{3}a + \tfrac{1}{3}(b^2:f))Af,$$

$$\int x^3h^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)Af, = \tfrac{1}{2}a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)Af,$$

gefunden.

Gewöhnlich ist a in Vergleichung mit b ansehnlich groß, alsdenn aber sind die Brüche $\frac{b^2}{a^2}$, und $\frac{b^2}{f} = \frac{2b^2}{a+b}$ so klein, daß man sie, ohne sehr zu fehlen, weglassen, und $\int x^2h^2 = \frac{2}{3}.a.A.f$, so wie $\int x^3h^2 = \frac{1}{2}a^2.A.f$ setzen kann. Wenn also das statische Moment des Windstosses gegen den ganzen Flügel $= S$ gesetzt wird, so findet man

$$S = \frac{nAf}{4g}.(C^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta - \tfrac{4}{3}aC\gamma \sin\vartheta \cos\vartheta^2 + \tfrac{1}{2}a^2\gamma^2 \cos\vartheta^3)$$

oder auch

$$S = \frac{nAf\cos\vartheta^3}{4g}(C^2 \operatorname{tang}\vartheta^2 - \tfrac{4}{3}aC\gamma \operatorname{tang}\vartheta + \tfrac{1}{2}a^2\gamma^2).$$

Man setze, um die Formuln mehr abzukürzen, die Linie $\frac{\cos\vartheta^3}{4g}(C^2 \operatorname{tg}\vartheta^2 - \frac{4}{3}aC\gamma \operatorname{tg}\vartheta + \frac{1}{2}a^2\gamma^2) = k$, so ist $S = nAkf$, und dies statische Moment des Windstosses ist eben so groß, als wenn am Schwerpunct des Flügels in der Richtung seiner Bewegung beständig eine Kraft wirkte, die dem Gewicht einer Luftsäule auf der Fläche des Flügels als einer Grundfläche in der Höhe k gleich wäre. Würde nemlich am Schwerpunct G des Flügels eine Kraft $= nAk$ der Richtung der Bewegung entgegen angebracht, so würde sie mit der Kraft des Windstosses im Gleichgewicht seyn.

111 §.

Die Geschwindigkeit des Schwerpuncts der Flügel ist $= \gamma f$: mithin ist das mechanische Moment des Windstosses gegen den Flügel $= nAk.\gamma f$, und man findet das mechanische Moment, wenn das statische Moment mit der Umlaufsgeschwindigkeit γ multiplicirt wird. Beyder Grösse hängt also bey einerley Gestalt und Grösse der Flügel und einerley Umlaufsgeschwindigkeit von der Linie k, und die Grösse dieser Linie hängt bey gegebener Geschwindigkeit des Windes beydes vom Neigungswinkel der Flügel gegen die

Umlaufsaxe und von der Umlaufsgeschwindigkeit ab. Das mechanische Moment verschwindet, wie der Natur der Sache gemäß ist, einmahl wenn $\gamma = 0$ ist, und hiernächst auch, wenn das statische Moment $nAkf$ verschwindet: die Umstände aber, unter welchen das letztere erfolgen muß, übersiehet man vermittelst folgender Schlüsse.

Jedes Element $MmnN$ leidet von der Seite des Winkels her den senkrechten Druck $nh^2 . \frac{(C\sin\vartheta - \gamma x \cos\vartheta)^2}{4g}$ nur so lange, bis $\gamma x \cos\vartheta = C\sin\vartheta$, also $\gamma x = C\mathrm{tg}\vartheta$, und $\gamma = \frac{C\mathrm{tg}\vartheta}{x}$ wird. In dem letzten Fall verschwindet der Druck gegen dies Element, und weil x für jedes Element einen eigenen Werth hat, so kann der Druck des Windstosses nicht für alle Elemente zugleich verschwinden. Noch mehr: wenn $\gamma x \cos\vartheta > C\sin\vartheta$, also $\gamma > \frac{C\mathrm{tg}\vartheta}{x}$ wird, so scheint der vom Windstoß herrührende Druck wieder zu wachsen, allein er wächst nun auf eine der vorigen entgegen gesetzte Art. Es ist nemlich $\gamma x \cos\vartheta$ die Geschwindigkeit des Elements $MmnN$ in der Richtung PR, die auf des Flügels Ebene senkrecht ist, und $C\sin\vartheta$ die Geschwindigkeit des Windes in eben dieser Richtung. Wenn jene Geschwindigkeit diese zu übertreffen anfängt, so verwandelt sich das, was bisher Druck von der Seite des Windes her war, in Gegendruck oder Widerstand dem Winde entgegen. Ist nun $\gamma = \frac{C.\mathrm{tg}\vartheta}{CO}$, so leidet das Element $KklL$ gar keinen Druck, weder von der einen noch von der andern Seite her.

Für

Für die der Axe näher liegenden Elemente ist noch $\gamma x < C\tan\vartheta$, für die weiter als um den Abstand CO entfernten aber ist schon $\gamma x > C\tan\vartheta$: daher treibt der Wind zwar den unterhalb KL liegenden Theil des Flügels vor sich her, dem übrigen oberhalb KL liegenden Theil aber widersteht die Luft eben so, als wenn demselben ein Wind mit der Geschwindigkeit $\gamma x \cos\vartheta - C \sin\vartheta$ in jedem zwischen KL und EI liegenden Element senkrecht entgegen stiesse.

Wenn nun die Momente aller Pressungen von der Seite des Windes her, welchen der Flügel unterhalb KL ausgesetzt ist, zusammen genommen so groß sind, als die Summe der Momente aller entgegen gesetzten Pressungen von der andern Seite her, welchen der oberhalb KL befindliche Theil des Flügels ausgesetzt ist; so läuft der Flügel völlig frey um, eben so, als wenn er gar keinen Druck litte.

112 §.

Es ist unstreitig schädlich, wenn oben ein Theil der hintern Fläche des Flügels, wie EKLI einen Druck leidet, der dem Druck, welcher vom Anstoß des Windes gegen die vordere Fläche HKLF herrühret, entgegen gesetzt ist. Damit solches vermieden werde, muß $\gamma < \frac{C\tan\vartheta}{a}$ seyn, oder $a\gamma < C\tan\vartheta$, da dann $a\gamma$ die Geschwindigkeit der äussersten Gränze EI des Flügels ist. Man setze also $\gamma = \zeta \cdot \frac{C\tan\vartheta}{a}$, so wird erfordert, daß $\zeta < 1$ sey; und wenn der Werth $a\gamma = \zeta \cdot C\tan\vartheta$ in dem allgemeinen Ausdruck für das mechanische Moment des Windstosses

$$\frac{nAf\gamma\cos\vartheta^3}{4g}\left(C^2\operatorname{tang}\vartheta^2 - \tfrac{4}{3}aC\gamma\operatorname{tang}\vartheta + \tfrac{1}{2}a^2\gamma^2\right)$$

gebraucht wird, das ich nun = M setzen werde, so ist

$$M = \frac{nAf\cos\vartheta^3}{4g}\cdot\frac{\zeta C\operatorname{tg}\vartheta}{a}\left(C^2\operatorname{tg}\vartheta^2 - \tfrac{4}{3}\zeta C^2\operatorname{tg}\vartheta^2 + \tfrac{1}{2}\zeta^2C^2\operatorname{tg}\vartheta^2\right)$$

oder $M = \dfrac{n\zeta AfC^3\sin\vartheta^3}{4ga}\left(1 - \tfrac{4}{3}\zeta + \tfrac{1}{2}\zeta^2\right)$.

Wenn nun der Winkel ϑ einerley bleibt, aber γ geändert wird; so ändert sich $\zeta = \dfrac{a\gamma}{C\operatorname{tg}\vartheta}$, und das Product $\zeta\left(1 - \tfrac{4}{3}\zeta + \tfrac{1}{2}\zeta^2\right)$ wird am grösten, wenn die Zahl $\zeta = \dfrac{8-\sqrt{10}}{9} = 0{,}537525$ gesetzt wird. Von der Richtigkeit dieses letzten Satzes kann man sich wiederum dadurch überzeugen, daß man statt ζ solche Zahlen annimmt, die grösser oder kleiner sind, als $\dfrac{8-\sqrt{10}}{9}$, da dann allemahl M kleiner ausfällt, als wenn man $\zeta = \dfrac{8-\sqrt{10}}{9}$ gesetzt hat.

Je grösser nun überdem der Winkel ϑ genommen wird, desto grösser wird $\sin\vartheta$, mithin auch M, und am grösten wäre M bey der Voraussetzung $\vartheta = 90°$ und $\sin\vartheta = 1$. Allein das würde $\gamma = \dfrac{\zeta . C\operatorname{tg}\vartheta}{a}$ unendlich groß geben; demnach muß nur ϑ dem **rechten Winkel so nahe kommen, als die übrigen Umstände zulassen.** Es sey nemlich das statische Moment = S, so ist $S = \dfrac{M}{\gamma}$, und weil $\gamma = \dfrac{\zeta . C\operatorname{tg}\vartheta}{a}$ war, so findet man

S =

$$S = \frac{nAfC^2 \sin\vartheta^3}{4g\,\mathrm{tg}\vartheta}\left(1 - \tfrac{4}{3}\zeta + \tfrac{1}{2}\zeta^2\right),$$

oder auch $S = \frac{nAfC^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{4g}\left(1 - \frac{4}{3}\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2\right)$.

Dies Moment verschwindet, wenn $\vartheta = 90°$ ist, wie der Natur der Sache nach nicht anders seyn kann, weil alsdenn die Flügel vom Winde gar nicht seitwärts gedruckt werden können. Die Windflügel könnten also, wenn $\vartheta = 90°$ wäre, gar nicht in Umlauf kommen.

113 §.

Im ersten Anfang der Bewegung, da noch $\gamma = 0$ ist, hat man auch $\zeta = 0$ und $S = \frac{nAfC^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{4g}$, wie im 108 §. Wenn γ also auch $\zeta = \frac{a\gamma}{C\,\mathrm{tg}\vartheta}$ wächst, so nimmt der Factor $1 - \frac{4}{3}\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2$, mithin auch das mechanische Moment, ab, so lange bis $\zeta = \frac{4}{3}$ würde. Aber die Formuln finden nur so lange ihre Anwendung, als $\zeta < 1$ bleibt, mithin kann der Fall nicht eintreten, daß dasjenige statische Moment, wovon hier die Rede ist, grösser würde, als es in dem Fall ist, wenn $\zeta = 1$ wird, da dann $S = \frac{1}{6}\cdot\frac{nAfC^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{4g}$ gefunden wird. Setzt man aber $\zeta = \frac{8 - \sqrt{10}}{9}$, so wird

$$\tfrac{1}{2}\zeta^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{74 - 16\sqrt{10}}{81} = \frac{37 - 8\sqrt{10}}{81}$$

$$1+\tfrac{1}{2}\zeta^2=\frac{118-8\sqrt{10}}{81}$$

$$\tfrac{4}{3}\zeta=\frac{32-4\sqrt{10}}{27}=\frac{96-12\sqrt{10}}{81},$$

also $1+\tfrac{1}{2}\zeta^2-\tfrac{4}{3}\zeta=\frac{22+4\sqrt{10}}{81}=0{,}427767$, mithin $S=0{,}427767\,.\,\frac{nAfC^2\sin\vartheta^2\cos\vartheta}{4g}$, und in eben dem Fall $\zeta(1+\tfrac{1}{2}\zeta^2-\tfrac{4}{3}\zeta)=0{,}427767\,.\,0{,}537525$ sehr nahe $=0{,}23$, also $M=0{,}23\,.\,\frac{nAfC^3\sin\vartheta^3}{4ga}$. Der Wind wirkt nun eben so gegen den Flügel, als wenn am Schwerpunct desselben eine Kraft $F=0{,}427767\,.\,\frac{nAC^2\sin\vartheta^2\cos\vartheta}{4g}$ angebracht wäre, und die Geschwindigkeit dieses Schwerpuncts ist alsdenn $=\gamma f=\frac{0{,}537525\,.\,fC\operatorname{tg}\vartheta}{a}$. Für alle vier Flügel zusammen hat man $S=1{,}711068\,.\,\frac{nAfC^2\sin\vartheta^2\cos\vartheta}{4g}$, und $M=0{,}92\,.\,\frac{nAfC^3\sin\vartheta^3}{4ga}$: die Wirkung aber ist eben so, als wenn am Schwerpunct eines dieser Flügel in der Richtung der Bewegung eine Kraft $V=4F=1{,}711068\,.\,\frac{nA\,.\,C^2\sin\vartheta^2\cos\vartheta}{4g}$ angebracht wäre.

114 §.

Eine Maschine die durch vier ebene und rechteckigte Windflügel ihre Bewegung erhalten soll, vortheilhaft anzuordnen, wenn die

die Last oder der **Widerstand** gegeben ist, und die Geschwindigkeit, womit die Last, oder die vom Widerstande angegriffene Stelle der Maschine bewegt werden muß.

Aufl. Es sey die Last $= R$, ihr Widerstand $= \beta$, so wird erfordert, daß $V \cdot \gamma f = R\beta$ sey. Damit aber von dem Windstoß der vortheilhafteste Gebrauch gemacht werde, muß $\gamma = \frac{\zeta . C \tan \vartheta}{a}$, die Zahl $\zeta = \frac{8 - \sqrt{10}}{9}$, und der Winkel ϑ dem rechten Winkel so nahe seyn, als die übrigen Umstände zulassen. In allen Fällen muß die Geschwindigkeit des Windes als gegeben angenommen werden, und weil die ganze Anordnung davon abhängt, so läßt sich eine solche Einrichtung der Maschine nicht ausfündig machen, die bey unverändertem Widerstande und Winden von verschiedener Stärke dennoch einerley Effect haben könne. Die Unbeständigkeit des Windes gehet so weit, daß man zuweilen vielleicht keine Minute lang auf völlig einerley Geschwindigkeit desselben Rechnung machen kann. Bey einem stehenden Winde ist indessen die Geschwindigkeit bald wieder etwas stärker, wenn sie gleich kurz vorher etwas schwächer gewesen ist: dies durch einander gerechnet, weil beständig stärkere und schwächere Stösse mit einander abwechseln, wird es eine **mittlere Geschwindigkeit** geben, die oft verschiedene Tage nach einander unverändert bleibt. Je schneller aber die Windflügel umlaufen, desto weniger wird die Gleichförmigkeit ihrer Umlaufsbewegung durch die Veränderlichkeit in der Geschwindigkeit des Windes gestört, weil die Flügel solchergestalt die Natur der Schwungflügel bekommen.

kommen. (23 §.) Weil nun $\gamma = \frac{\zeta . C\tang\vartheta}{a}$ desto grösser wird, je grösser man den Winkel ϑ annimmt, so ist dies noch ein neuer Grund, weswegen der Winkel ϑ dem rechten Winkel so nahe kommen muß, als die übrigen Umstände zulassen.

Es sey die Umlaufszeit der Flügel $= \vartheta$, so ist $\gamma = \frac{2\pi}{\vartheta}$, und γ ist bestimmt, wenn man ϑ willkührlich annimmt. Mit der Höhe a der Flügel muß man sich nach der Höhe des Gebäudes richten, und so erhält man $\tang\vartheta = \frac{a\gamma}{\zeta . C}$. Ferner kann b willkührlich genommen werden, und das giebt $f = \frac{1}{2}(a+b)$, mithin ist $V = \frac{R . \beta}{\gamma f}$ bestimmt. Ueberdem war $V = 1{,}711068 . \frac{nA . C^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}{4g}$, also ist auch $A = \frac{4gV}{1{,}711068 . nC^2 \sin\vartheta^2 \cos\vartheta}$ gegeben: wird also die Breite der Flügel $= e$ gesetzt, so ist $A = e\,(a - b)$; und man findet $e = \frac{A}{a-b}$. Die übrige Anordnung der Maschine wird durch das Verhältniß $fg : \beta$ bestimmt.

Gewöhnlich ist die Last mit ihrer Geschwindigkeit gegeben, wie die Aufgabe annimmt: wären aber statt dessen die Abmessungen der Flügel mit ihrer Lage gegen die Umlaufsaxe gegeben, und man wollte wissen, was die Maschine bey einer angenommenen Geschwindigkeit

digkeit des Windes auszurichten vermag, so ist $\gamma = \frac{\zeta . C \tang \vartheta}{a}$ gegeben, und überdem das mechanische Moment $M = 0{,}92 . \frac{n A f C^3 \sin \vartheta^3}{4ga}$, welches $= R\beta$ seyn muß: mithin hat man R oder β, nachdem man das eine, oder das andre, willkührlich annimmt.

115 §.

Ausser dem Neigungswinkel ϑ der Flügel gegen die Umlaufsaxe kommt ihre gute Wirkung vornemlich an auf das Verhältniß $\frac{C \sin \vartheta}{\gamma x \cos \vartheta}$ der Geschwindigkeit des Windes in der auf den Flügel senkrechten Richtung zur Geschwindigkeit eines jeden Elements des Flügels, womit dasselbe dem Winde in eben der Richtung ausweicht. Ist der Flügel eine ebene Fläche, also ϑ für alle Elemente desselben einerley, so ist das Verhältniß $\frac{C \sin \vartheta}{\gamma x \cos \vartheta} = \frac{C \tang \vartheta}{\gamma x}$ für verschiedene Elemente selbst verschieden, und desto kleiner, je weiter das Element von der Umlaufsaxe entfernt ist. Eben um deßwillen hat der Wind auf diese von der Umlaufsaxe weiter entfernten Elemente weniger Wirkung, als auf die der Axe näher liegenden. Kann man aber dem Flügel eine solche Gestalt geben, daß das Verhältniß $\frac{C \tang \vartheta}{\gamma x}$ für alle Elemente einerley bleibt; so hat der Wind auf alle Elemente einerley Wirkung. Diese Absicht erreicht man, wenn die Flügel so gebogen werden, daß sich die Tangenten der

Neigungswinkel der Sprossen gegen die Umlaufsaxe, wie ihre Entfernungen von dieser Axe verhalten: denn alsdenn ist $\frac{\mathrm{tg}\vartheta}{x}$ für alle Elemente des Flügels einerley. Für $x = b$ sey $\vartheta = \eta$, oder η sey der Neigungswinkel des untersten Elements $HhfF$ gegen die Umlaufsaxe, so wird erfodert, daß $b : x = \mathrm{tg}\eta : \mathrm{tg}\vartheta$ bleibe, also $\frac{\mathrm{tg}\vartheta}{x} = \frac{\mathrm{tg}\eta}{b}$.

116 §.

Jedes Element $MmnN$ für sich allein leidet von der Seite des Windes her den senkrechten Druck $= n \cdot h^2 \frac{(C\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2}{4g}$, in der Richtung der Umlaufsbewegung aber den Druck $= nh^2 \frac{(C\sin\vartheta - \gamma x\cos\vartheta)^2\cos\vartheta}{4g} = nh^2 \cdot \frac{(C\mathrm{tg}\vartheta - \gamma x)^2\cos\vartheta^3}{4g}$, und aus dem letztern entsteht das mechanische Moment $nh^2 \cdot \gamma x \cdot \frac{(C\mathrm{tg}\vartheta - \gamma x)^2\cos\vartheta^3}{4g}$. Das Product $\gamma (C\mathrm{tg}\vartheta - \gamma x)^2$ verschwindet einmahl, wenn $\gamma = 0$, überdem aber auch wenn $\gamma x = C\mathrm{tg}\vartheta$ wird, und es giebt einen gewissen Werth, der statt γ gesetzt das Product $\gamma(C\mathrm{tg}\vartheta - \gamma x)^2$ grösser giebt, als jeder andre für γ angenommene grössere oder kleinere Werth. Man erhält aber diesen grösten Werth des angezeigten Products, wenn man $\gamma x = \frac{1}{3} C\mathrm{tg}\vartheta$, oder $\gamma x\cos\vartheta = \frac{1}{3} C\sin\vartheta$ setzt, wie bey Wasserrädern: (17 §.) demnach muß $\gamma = \frac{\frac{1}{3}C\mathrm{tg}\vartheta}{x}$ seyn, damit das mecha-

nische

nische Moment des Windstosses gegen jedes Element des Windflügels, mithin auch gegen den ganzen Flügel am grösten werde.

Man setze dies mechanische Moment $\frac{nh^2\gamma x(\mathrm{Ctg}\vartheta-\gamma x)^2\cos\vartheta^3}{4g}=\mu$ und $\frac{\mathrm{Ctang}\vartheta}{\gamma x}=z$, also $\gamma x=\frac{\mathrm{Ctg}\vartheta}{z}$, so wird $\mu=\frac{nh^2.\mathrm{C}^3\mathrm{tg}\vartheta^3}{4gz}.\left(1-\frac{1}{z}\right)^2$ $.\cos\vartheta^3$, oder $\mu=\frac{nh^2.(z-1)^2}{4gz^3}.\mathrm{C}^3\sin\vartheta^3$. Dies Moment würde am grösten werden, wenn man $\vartheta = 90°$ nehmen könnte, welches aber die Umlaufsgeschwindigkeit $\gamma=\frac{\mathrm{Ctg}\vartheta}{zx}$ unendlich groß geben würde, wenn nicht zugleich x unendlich groß wäre, und dieserwegen nicht bestehen kann. Setzt man das statische Moment des Windstosses $= s$; so ist $s=\frac{\mu}{\gamma}=\frac{\mu.zx}{\mathrm{Cgt}\vartheta}$, also $s=\frac{nh^2(z-1)^2x}{4gz^2\mathrm{tg}\vartheta}.\mathrm{C}^2\sin\vartheta^3$, oder $s=\frac{nh^2(z-1)^2x}{4gz^2}\mathrm{C}^2\sin\vartheta^2\cos\vartheta$, und dies Moment verschwindet, wenn $\vartheta = 90°$ ist, wie der Natur der Sache nach nicht anders seyn kann. Je näher indessen der Winkel ϑ dem rechten Winkel kommen kann, desto grösser ist der mechanische Effect des Windstosses gegen ein solches Element des Flügels.

117 §.

Das mechanische Moment des Windstosses gegen den ganzen nach dem Gesetz des 115 §. gebogenen

Flügel ist die Summe aller Momente des Windstosses gegen alle Elemente dieses Flügels. Man müste also in dem Ausdruck $\mu = \frac{(z-1)^2 nh^2}{4gz^3} \cdot C^3 \sin \vartheta^3$ nach und nach alle Werthe x von CB bis CA setzen, und jedesmahl $\mathrm{tg}\vartheta = \frac{\mathrm{tg}.\eta}{b}\, x$, also $\cot\vartheta = \frac{b}{x\mathrm{tg}\eta}$, $\mathrm{cosec}\,\vartheta = \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{x^2\mathrm{tg}\eta^2}\right)}$ und $\sin\vartheta = \frac{x\,\mathrm{tg}\eta}{\sqrt{(b^2 + x^2\mathrm{tg}\eta^2)}}$ nehmen, wobey $z = \frac{C\mathrm{tg}\vartheta}{\gamma x} = \frac{C\mathrm{tg}\eta}{\gamma b}$ unverändert bleibe. Die so berechneten Momente μ alle in eine Summe gebracht würden das gesuchte Moment gegen den ganzen Flügel geben. Vermittelst der Integralrechnung aber findet man dergleichen Summen kürzer und richtiger. Wird das gesuchte Moment = M und das Product der Länge des Flügels in seine Breite = A gesetzt, so giebt die Integralrechnung

$$M = \frac{(z-1)^2 nA.C^3}{4gz^3}(\cos\eta - \cos\vartheta)(\sec\eta - \cos\vartheta)\,\mathrm{cosec}\,\vartheta,$$

und man muß in dieser Formul denjenigen Winkel ϑ verstehen, unter welchem das äusserste Element EI des Flügels gegen die Umlaufsaxe geneigt ist, so hat man auch $\gamma = \frac{C\mathrm{tg}\vartheta}{za}$. Wird ferner das statische Moment des Windstosses gegen den ganzen Flügel = S gesetzt, so ist $S = \frac{M}{\gamma} = \frac{zaM}{C\mathrm{tg}\vartheta}$, oder

S =

$$S = \frac{(z-1)^2 nA.C^2 a}{4gz^2 tg\vartheta}(\cos\eta - \cos\vartheta)(\sec\eta - \cos\vartheta)\operatorname{cosec}\vartheta.$$

Für den ersten Anfang der Bewegung ist $\gamma = 0$, also $z = \infty$, und $\frac{z-1}{z} = 1$. In allen andern Fällen ist $\frac{z-1}{z}$ ein eigentlicher Bruch: also das statische Moment des Windstosses im ersten Anfang der Bewegung grösser, als beym Umlauf der Flügel. Uebrigens ist die Wirkung des Windstosses gegen den Flügel eben so groß, als wenn am äussersten Ende A der Windruthe eine Kraft $F =$

$$\frac{(z-1)^2 nA.C^2}{4gz^2 tg\vartheta}(\cos\eta - \cos\vartheta)(\sec\eta - \cos\vartheta)\operatorname{cosec}\vartheta$$

in der Richtung der Bewegung angebracht wäre.

Um die Formuln mehr abzukürzen setze man die Zahl $(\cos\eta - \cos\vartheta)(\sec\eta - \cos\vartheta)\operatorname{cosec}\vartheta = \lambda$, so ist für alle vier Flügel zusammen die Kraft $V = 4F = \frac{\lambda(z-1)^2 nA.C^2}{z^2 g \tan g\vartheta}$, das mechanische Moment $M = a\gamma.V$, und das statische Moment $= a.V$.

118 §.

Eine Maschine, die durch vier gehörig gebogene Windflügel ihre Bewegung erhalten soll, vortheilhaft anzuordnen.

Aufl. Wenn R die Last und β ihre Geschwindigkeit bezeichnet, so hat man $a\gamma.V = R.\beta$, und es ist auch bey gebogenen Flügeln vortheilhaft, daß sie schnell umlaufen. Dies erhält man, wenn der Winkel ϑ am äussersten Ende der Windruthe dem rechten

Winkel sehr nahe kommt. Mit der Länge a der Ruthen richtet man sich nach der Höhe des Gebäudes, und der Effect wird am grösten, wenn $nz = 3$ ist. Alsdenn hat man $V = \frac{4\lambda n A . C^2}{9 g \operatorname{tang} \vartheta}$, und $\gamma = \frac{\frac{1}{3} C \operatorname{tang} \vartheta}{a}$, mithin muß man die Anordnung so machen, daß $\frac{4\lambda n A . C^3}{27 g} = R . \beta$ werde. Man nehme ferner die Umlaufszeit ϑ der Flügel willkührlich und so klein an, als die übrigen Umstände zulassen, so ist $\gamma = \frac{2\pi}{\vartheta}$ bestimmt, und $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{a\gamma}{\frac{1}{3} C}$, weil auch a als gegeben angenommen wird. Für jede andre Entfernung x von der Umlaufsaxe ist alsdenn die Tangente des Neigungswinkels der Sprosse $= \frac{x\gamma}{\frac{1}{3} C}$.

Wenn nun R und β gegeben sind, so hat man das Verhältniß der Geschwindigkeiten der Kraft und Last $= a\gamma : \beta$, auch ist die Zahl

$$\lambda = (\cos \eta - \cos \vartheta)(\sec \eta - \cos \vartheta) \operatorname{cosec} \vartheta$$

bekannt, weil $\operatorname{tang} \eta = \frac{b\gamma}{\frac{1}{3} C}$ gefunden wird, und b willkührlich genommen werden kann. Weiter ist $A = \frac{27 g . R . \beta}{4\lambda n C^3}$, und wenn die Breite der Flügel $= e$ gesetzt wird, so findet man $e = A : a$.

In dem umgekehrten Fall, wenn die Abmessungen der Flügel gegeben sind, giebt die Gleichung $R = \frac{a\gamma . V}{\beta}$ die Last, welche die Maschine mit der Geschwinschwindigkeit β bey der vortheilhaftesten Anordnung bewegen kann.

119 §.

Werkzeuge, die dazu bestimmt sind, theils die Geschwindigkeit des Windes, theils die Stärke des Windstosses zu messen, heissen Anemometer oder **Windmesser**: sie sind von **Windzeigern** verschieden, welche die Gegend des Horizonts anzeigen, wovon der Wind herkommt, oder wohin er bläset, woraus sich die Richtung des Windes ergiebt. Bey meteorologischen Beobachtungen verbindet man gern beydes mit einander, auch ist selbst beym Gebrauch des Anemometers ein Windzeiger nöthig, wenn man es so stellen will, daß der Wind in der Richtung anstosse, welche man bey der Anordnung des Anemometers vorausgesetzt hat. Windfahnen, so wie sie auf Thürmen und andern Dächern gebraucht werden, Bänder an lothrecht stehenden Stangen, wie die Flaggen auf den Masten der Schiffe, dienen als Windzeiger. Genauer und für den Beobachter bequemer zeigt die Windfahne die Richtung des Windes, wenn man die Anordnung auf folgende Art macht. Man befestiget die Windfahne auf ihrer lothrechten Stange, die in solcher Absicht durch eine andre feststehende Stange mit zweenen Ringen gehalten werden muß, so daß sich jene Stange zugleich mit der Fahne drehet, wenn der Wind diese in eine andre Lage bringt. Die bewegliche Stange läßt man in ein Zimmer hinab gehen, woselbst sie am untern Ende mit einem Zeiger versehen ist, der auf einer Tafel oder Scheibe die Gegend des Horizonts anzeiget, woher der Wind bläset.

120 §.

120 §.

Wenn das Anemometer dienen soll, die Stärke des Windstosses anzuzeigen, so erhält man es auf die einfache Art dadurch, daß man an einer Welle vier kleine gewöhnliche Windflügel anbringt, die Welle aber mit einer conischen Spindel versiehet, woran eine Schnur mit einem Gewicht hängt. Die Spindel wird mit Gängen versehen, worauf sich die Schnur beym Umlauf der Flügel aufwickelt, und die Halbmesser der Gänge müssen deswegen nach und nach grösser werden, damit der Wind die Flügel nur so lange umtreiben könne, bis das Moment des an der Schnur hängenden Gewichts, welches bey jedem Umlauf grösser wird, dem Moment des Windstosses gegen die Flügel gleich ist. Die Welle des vom Herrn von Wolff vorgeschlagenen Anemometers ist mit einer Schraube ohne Ende versehen, mit der Axe des dazu gehörigen Sternrades ist rechtwinklicht ein Hebelsarm verbunden, und am äussersten Ende desselben ist ein Gewicht befestiget. Dies Gewicht wird beym Umlauf der Flügel gehoben: weil aber das Moment desselben wächst, so hebt jeder Wind dies Gewicht nur auf eine gewisse Höhe. Diese Wolffische Einrichtung hat den Vortheil, daß der Hebelsarm, wenn die Stärke des Windes nachläßt, nicht zurück fällt, weil das Sternrad die Schraube nicht umdrehen kann: dagegen muß an der conischen Spindel ein Sperr-Rad mit dem Sperrkegel angebracht werden, wenn das daran hängende Gewicht bey abnehmender Stärke des Windes nicht wieder sinken soll. Man sehe hievon *Wolfii* Elementa Matheseos Vniuersae T. II. Aerom. §. 182. pag. 405; auch **Leupolds** Theatrum machinarum generale 347 u. f. §§. 110 u. f. S.

121 §.

121 §.

Aus dem vermittelst eines solchen Anemometers beobachteten Moment des Windstoßes kann die dermahlige Geschwindigkeit des Windes durch Rechnung gefunden werden, vorausgesetzt, daß die oben vorgetragene Theorie von der Stärke des Windstoßes (36 §. Hydraul.) nicht zu sehr fehlsam sey. Weil jedoch die Geschwindigkeit des Windes sehr veränderlich ist, mithin beständig stärkere und schwächere Stöße mit einander abwechseln, so dienen die Anemometer von der im vor. §. beschriebenen Einrichtung nur dazu, von der Stärke der heftigsten Stöße zu urtheilen. Es ist aber in mancher Absicht, und besonders alsdenn, wenn man den Effect einer von Windflügeln getriebenen Maschine beobachten, und mit dem Resultat, was die Theorie giebt, vergleichen will, sehr nützlich, daß man die mittlere Geschwindigkeit des Windes während einer gewissen Zeit vermittelst des Anemometers finden könne.

H. Schober hat Versuche über den Widerstand der Luft und die Stärke des Windstoßes angestellet, und in einer Abhandlung bekannt gemacht, die im IX Bande des Hamburgischen Magazins im 2ten und 3ten Stück abgedruckt ist. Dabey hat er ein Anemometer gebraucht von folgender Einrichtung. Eine horizontal liegende Welle mit vier kleinen Windflügeln wird aus Stahl etwa vier Zoll lang und $1\frac{1}{2}$ Linien dick gemacht. Diese Welle läuft mit der Spitze in Messing, am Halse aber, wo sie eine Hohlkehle hat, und nur eine Linie dick ist, in Horn. Die Ruthen werden von gutem Holz etwa $1\frac{1}{2}$ Linien dick gemacht und von der Axe bis auf die Mitte der Flügel gemessen 4 Zoll lang: so ist der Kreis, worin ihr

Mittel-

Mittelpunct umläuft, $2\frac{1}{2}$ Fuß lang im Umfang. Die Schoberschen Flügel waren aus dünnem messingenen Blech gemacht, und hatten auf der hintern Seite eine Hülse, damit sie auf die Ruthen aufgesteckt und nach Gefallen gewendet werden konnten; ihre Breite war beynahe $2\frac{1}{2}$ Zoll, ihre Höhe nach der Länge der Ruthe gemessen $1\frac{1}{4}$ Zoll.

Soll das Anemometer gebraucht werden, so bringt man die Welle in die mit der Richtung des Windes parallele Lage, und stellet den Kopf mit den Flügeln dem Winde grade entgegen, damit er sie zum Umlauf bringe, und so lange in gleichförmiger Umlaufsgeschwindigkeit erhalte, als seine mittlere Geschwindigkeit dieselbe bleibt. Um die jedesmahlige Umlaufsgeschwindigkeit der Flügel zu erfahren, wird an der Welle eine Schraube ohne Ende, und an dem Lager, worin die Welle läuft, eine kleine Klocke mit einem Hammer angebracht, der mittelst eines oder zweener im Sternrade befestigten Stifte gehoben wird. Solchergestalt läßt sich die Zahl der ganzen oder halben Umläufe des Sternrades zählen, die in einer oder mehrern Minuten erfolgen, wenn man die Schläge des Hammers auf die Klocke zählt; auch findet man ferner aus der bekannten Anzahl der Zähne des Sternrades die Zahl der Umläufe der Windflügel gegen einen ganzen oder halben Umlauf des Sternrades: mithin läßt sich daraus die Umlaufsgeschwindigkeit der Flügel, und zugleich die wahre Geschwindigkeit ihres mittlern oder jedes andern in der Fläche der Flügel gegebenen Puncts finden, woraus hiernächst die dermahlige Geschwindigkeit des Windes hergeleitet werden muß.

122 §.

Wenn die Höhe der Flügel nach der Länge der Ruthen gemessen in Vergleichung mit ihrer Breite und mit der Länge der Ruthen selbst sehr klein ist, so ist das statische Moment des Windstosses gegen den umlaufenden Flügel $= nh^2x \cdot \frac{(C \tang\vartheta - \gamma x)^2 \cos\vartheta^3}{4g}$, (116 §.) und dasselbe verschwindet, wenn $\gamma x = C \tang\vartheta$ wird. Man neige die kleinen Flügel gegen die Umlaufsaxe unter einem Winkel von 45°, so ist $\tang\vartheta = 1$, und $\gamma x = C$, wenn die Wirkung des Windes gegen die Flügel völlig aufhört. Alsdenn aber ist der Umlauf der Flügel gleichförmig, so lange die Geschwindigkeit des Windes einerley bleibt, und die Geschwindigkeit der Flügel selbst ist mit der Geschwindigkeit des Windes einerley. Weil nemlich die Höhe der Flügel sehr klein angenommen wird, so kann man durch x die Geschwindigkeit ihres mittlern Puncts verstehen, und diese wird nicht beträchtlich von der Geschwindigkeit der übrigen Puncte in der Fläche der Flügel verschieden seyn. Die Flügel des Anemometers, welches Herr Schöber brauchte, scheinen diesen Bedingungen kein völliges Genüge zu leisten. Sie waren unter einem Winkel von 52° gegen die Axe geneigt, und er meint durch Versuche gefunden zu haben, daß dies der rechte Winkel wenigstens für sein Anemometer bey der Voraussetzung gewesen sey, daß die Geschwindigkeit des Schwerpuncts im Beharrungsstande der Geschwindigkeit des Windes gleich werde. Seine Flügel waren überdem auch noch höher als nöthig scheint, weil die Höhe eines halben Zolles genügen kann. Man hat davon auch den Vortheil, daß die Flügel desto leichter werden, die sonst wegen der Schwungkräfte beym etwas schnellen Umlauf leicht von den Ruthen sich loßreissen, auch wenn sie durch vorgeschlagene Stiftchen befestiget sind, welche Vorsicht übrigens allemahl nöthig bleibt.

Der VIII. Abschnitt.

Von der Archimedischen Wasserschraube.

123 §.

Um die Spindel einer Schraube (134 §. Statik) sey statt des sonst gewöhnlichen Schraubenganges eine hohle Röhre so herum geführet, daß ihre Axe die a. a. O. erklärte Gestalt eines Schraubenganges bekommt: so dient die solchergestalt eingerichtete **Wasserschraube** oder **Wasserschnecke**, das Wasser auf eine mässige Höhe zu heben, wenn die übrige Anordnung auf folgende Art gemacht wird. Die Spindel wird in eine gegen den Horizont geneigte Lage gebracht, und so unterstützt, daß sie sich um ihre geo-
134 metrische Axe *Oo* frey drehen kann. Sie ist in solcher
Fig. Absicht am Mittelpunct beyder Grundflächen bey O und *o* mit Zapfen versehen, die auf den Grundflächen senkrecht stehen, beyde Zapfen sind gehörig unterstützt, und der unterste Zapfen liegt unter der höchsten Fläche des Wassers, wovon die Schnecke schöpfen soll. Die übrige Einrichtung hängt von der Art und Weise ab, wie die Schnecke in Umlauf gebracht werden soll. Der obere Zapfen bey *o* kann mit einer Kurbel versehen seyn, und so von Menschen gedrehet werden. Man kann

kann aber auch Rad und Getriebe daselbst anbringen, und der ganzen Maschine durch Pferde und andre Kräfte ihre Bewegung geben, nachdem es die Umstände zulassen. In Holland, woselbst dergleichen Schnecken häufig zur Austrocknung der Ländereyen gebraucht werden, heissen sie wegen ihres äusserlichen Ansehens auch Tonnenmühlen, und werden gewöhnlich durch Windflügel in Bewegung gesetzt.

124 §.

Das Rechteck ABCD sey ein verticaler Schnitt durch die Axe Oo, so ist AB ein Durchmesser der untern Grundfläche, der Punct A liegt unter allen Puncten im Umfang der Grundfläche am höchsten, B aber am niedrigsten. Wenn nun die grade Linie CK vertical ist, und durch B eine wagrechte Ebene gelegt wird, welche CK in K schneidet; so ist CBK der Neigungswinkel der Wasserschraube gegen den Horizont. Ferner sey AEFID die Schraubenlinie, nach welcher die Röhre um die Spindel geführt ist, oder wie man es sich am besten vorstellet, die centrische Linie der um die Spindel gewundenen Röhre A sey die unterste, und D die oberste Oefnung dieser Röhre: so wird beym Umlauf der Spindel allemahl A im Umfange des Kreises BPAV bleiben, so wie C im Umfange des Kreises CΠλD. Das Wasser stehe bis an *hi*, oder *hi* sey die Linie, worin die Verticalfläche ABKCD von der Wasserfläche geschnitten wird, so ist *hi* eine Horizontallinie, welche AB in G schneidet. Eben die Wasserfläche schneidet auch die Grundfläche der Spindel in einer graden Linie VQ, die durch G gehet, diese Durchschnittslinie ist horizontal, und weil beydes die Ebenen der Wasserfläche und der Grundfläche APB*q*

134 Fig.

auf der Ebene ABKCD senkrecht sind, so ist auch VQ auf ABKCD, (289 §. Geom.) mithin auf AB und *hi* senkrecht.

Die verticale Ebene DABKC stelle man sich nunmehro unbeweglich vor, und nehme an, die Spindel drehe sich einmahl so um, daß die untere Oefnung der Schnecke von A durch V, B, P, wieder nach A laufe: so wird die untere Oefnung unter Wasser seyn, so lange sie in dem Bogen VBPQ bleibt, und während dieser Zeit wird nach den Gesetzen der Hydrostatik Wasser in die Röhre hinein treten. Ist der Umlauf nicht zu schnell, so wird derjenige Theil der Röhre, welcher sich unter dem Wasser befindet, indem die Oefnung A bey Q aus dem Wasser wieder herauf zu steigen anfängt, ganz mit Wasser angefüllt.

125 §.

Der Winkel ist gegeben, unter welchem die Schraubenlinie den Umfang der Grundfläche der Spindel schneidet, nebst dem Neigungswinkel der Axe der Spindel gegen den Horizont; die untere Oefnung befindet sich an ihrer höchsten Stelle bey *A*: man soll die Höhe eines gegebenen Puncts *M* der Schraubenlinie über der durch *B* horizontal liegenden Ebene finden.

Aufl. Es sey MP mit der Axe der Spindel parallel, und der Bogen $AP = x$, der Winkel $MAP = \eta$, so ist $PM = x \tang \eta$. (135 §. Stat.) Ferner sey MR die verticale Höhe des Puncts M über der durch B wagrecht angenommenen Ebene, und PT horizontal, so ist MPT der Neigungswinkel der Spindel gegen den Horizont: wird also derselbe $= \vartheta$ gesetzt; so ist $MT = PM \sin \vartheta = x \tang \eta \sin \vartheta$. Weiter sey P*r* die

die lothrechte Höhe des Puncts P über der durch B wagrecht gelegten Ebene, so ist $Pr = TR$. Noch ziehe man PH auf AB senkrecht, so ist PH mit VQ parallel, also horizontal, und wenn HS auf die wagrechte Ebene durch B senkrecht fällt, so wird $HS = Pr = TR$. Weiter hat man $HBS = 90° - \vartheta$, also $HS = BH \cos\vartheta$, und die gesuchte Höhe $MR = MT + TR = x \tang \eta \sin\vartheta + BH \,.\, \cos\vartheta$. Endlich sey der Spindel Halbmesser $OA = OB = r$, so ist $BH = 2r - AH = 2r - r\,\mathrm{sinv.}(x:r)$, und weil $\mathrm{sinv.}(x:r) = 1 - \cos(x:r)$, so ist auch $2 - \mathrm{sinv}(x:r) = 1 + \cos(x:r)$. Demnach erhält man $MR = x \tang\eta \sin\vartheta + r(1 + \cos(x:r))\cos\vartheta$.

126 §.

Aus dieser gegebenen Auflösung fliessen folgende Sätze. Wenn $x = 0$ ist, so hat man $MR = 2r\cos\vartheta$, wie aus der Zeichnung auch sogleich erhellet, wenn man M in A annimmt. So lange x nur klein ist, wächst MR mit x, weil $\cos(x:r)$ sehr nahe $= 1$ bleibt, so lange x in Vergleichung mit r sehr klein bleibt. In dem Fall $\sin\dfrac{x}{r} = \tang\eta \tang\vartheta$ wird MR am grösten, und nimmt hiernächst wieder ab, wovon man sich durch Proberechnungen überzeugen kann. Man nehme an, daß $\sin(AQ:r) = \tang\eta\tang\vartheta$ gefunden werde, und ziehe QL mit der Axe der Spindel parallel: so liegt der Punct L in der Schraubenlinie höher als die nächsten Puncte auf beyden Seiten. Wird $x = \frac{1}{2}\pi r$, das heißt, wenn AP ein Quadrant ist, so wird $\sin(x:r) = 1$, und grösser kann dieser Sinus nicht werden. Für grössere Werthe x nimmt dieser Sinus wieder ab, und es wird aufs neue

$\sin(x:r) = \tang\eta \tang\vartheta$, wenn $x = r\pi - AQ$ ist: für grössere Werthe x also muß $\sin(x:r) < \tang\eta \tang\vartheta$ werden, und MR wieder wachsen. Wenn demnach $AP = \pi r - AQ$ genommen, und PM mit der Axe der Spindel parallel gezogen wird; so liegt M niedriger, als die zunächst vorhergehenden und nachfolgenden Puncte der Schraubenlinie. Daraus folgt, daß für $x = AQ$ die Höhe $L\varrho$ einen grösten, für $x = AP = \pi r - AQ$ aber MR einen kleinsten Werth habe. Wenn demnach eine durch L horizontal gelegte Ebene die Schraubenlinie auf der hintern Seite der Spindel in l schneidet; so ist LMl der Bogen, welcher sich auf einmahl mit Wasser füllen kann (arcus Hydrophorus). Stiege das Wasser bey ungeänderter Lage der Spindel höher als L liegt, so würde durch A Wasser in die Röhre hinein treten auch noch höher als l liegt: sänke hiernächst das aussen befindliche Wasser wieder, auch noch tiefer als Ll liegt, so würde doch der Bogen LMl mit Wasser angefüllet bleiben.

127 §.

Der Neigungswinkel *CBK* der Spindel gegen den Horizont und der Winkel der Schraubenlinie mit dem Umfang der Grundflächen müssen zusammen weniger als 90° ausmachen, wofern die Schnecke beym Umlauf Wasser schöpfen soll.

Beweis. Wäre $\eta + \vartheta > 90°$, also $\eta > 90° - \vartheta$, so wäre $\tang\eta > \cot\vartheta$, mithin $\tang\eta \tang\vartheta > 1$. Wenn aber $L\varrho$ ein gröstes und MR ein kleinstes seyn soll; so wird erfodert, daß $\sin\frac{AQ}{r} = \sin\frac{AP}{r} = \tg\eta \tg\vartheta$

seyn,

sey, und dies wird unmöglich, wenn $\tan\eta \tan\vartheta > 1$ ist. Wäre $\eta + \vartheta = 90^\circ$, also $\eta = 90^\circ - \vartheta$, und $\tan\eta = \cot\vartheta$, so wäre $\tan\eta \tan\vartheta = 1$; damit also von den Höhen $L\varrho$ und MR die erste grösser, die andre kleiner ausfallen könnte, als die zunächst vorhergehenden und nachfolgenden, müste $\sin\frac{AQ}{r} = \sin\frac{AP}{r} = 1$, also $AQ = AP = \frac{1}{2}\pi r$ seyn; das heißt, die Puncte L und M, so wie Q und P müsten zusammen fallen, und der wasserhaltende Bogen wäre $= 0$. Demnach wird erfodert, daß $\eta + \vartheta < 90^\circ$ sey.

Der Winkel AMP der Schraubenlinie mit PM, oder die Neigung der Schraubenlinie gegen die mit der Axe der Spindel parallele Ordinate ist $= 90^\circ - \eta$; mithin wird erfodert, daß die Neigung der Spindel gegen den Horizont, oder ϑ, kleiner sey, als der eben erwehnte Winkel $AMP = 90^\circ - \eta$.

128 §.

Aus diesen festgesetzten Gründen wird die Art und 134
Weise begreiflich, wie vermittelst der Wasserschrau- F.
be das Wasser zum Steigen gebracht werden könne, wenn man nachfolgende Schlüsse damit verbindet. Man stelle sich die Ebene ABCD, und eben so die graden Linien $P\Pi$, $L\lambda$, auch alsdenn unbeweglich vor, wenn die Schnecke umläuft, so verrücken sich während eines Umlaufs die Puncte A und E, worin AD, BC, vom untersten Schraubengange AMEF geschnitten werden, so daß sie nach und nach höher steigen. Eben so verrückt sich auch der Durchschnittspunct M mit $P\Pi$ und steigt höher. Die Schnecke werde so gedrehet, daß die untere Oefnung von A durch V nach B

B laufe, so ist nach einem halben Umlauf E durch p nach e gelaufen, und Epe ist ein Halbkreis, dessen Ebene mit der Grundfläche APBV parallel liegt, $e\mu f$ ist die obere Hälfte des untersten Schraubenganges, und liegt nun diesseits der Spindel, so wie AME nun jenseits liegt, und der Durchschnittspunct M ist nach μ gerückt. Wie nun im Bogen LME der Punct M die niedrigste Stelle hatte, so hat wieder μ unter allen Puncten des Bogens $\lambda\mu f$ die niedrigste Stelle. Eben die Bewandniß hat es mit den Puncten μ, die in PΠ liegen allemahl, wie groß auch der Winkel angenommen wird, um welchen sich die Spindel während des Umlaufs gedrehet haben soll. In einem kleinen Zeittheilchen t drehe sich die Spindel um so viel, daß M nach u rücke, so rückt der Bogen MCl in die Lage $um\varepsilon$, m liegt am Ende des Zeittheilchens t niedriger als u, also kann das vorher in M befindliche Wassertheilchen nicht in u bleiben, sondern es muß wegen seines Gewichts von u nach m sinken. Demnach ist während des Zeittheilchens t das Wassertheilchen, was im Anfang desselben in M war, nach Verlauf dieses Zeittheilchens in m, es ist um soviel höher gehoben, um wieviel m höher als M liegt, und alle übrige Wassertheilchen sind um eben soviel gehoben.

129 §.

136 Fig. **Wenn der Quersinus AH eines Kreisbogens AP um ein gegebenes sehr kleines Stück Hh, und der Kreisbogen zugleich selbst um das sehr kleine Stück Pp wächst, so kommt das Verhältniß $Hh : Pp$ dem Verhältniß des $\sin AP$ zum Halbmesser AO desto näher, je kleiner Hh und Pp genommen werden.**

Beweis.

Beweis. Man ziehe PR mit AO parallel, und nehme den Bogen Pp so klein an, daß seine Krümme nicht merklich bleibt; so hat das Dreyeck PRp die Natur eines bey R rechtwinklichten gradlinichten Dreyecks. Weil nun OPp, und RPH, rechte Winkel sind, so ist $RPp = OPH$, und das Dreyeck OHP ist dem Dreyeck PRp ähnlich: mithin $RP : Pp = HP : OP$. Es ist aber $RP = Hh$, und HP der Sinus des Bogens AP für den Halbmesser $OP = OA$, also $Hh : Pp = \sin AP : \text{Halbmesser}$. Eigentlich ist $HP : OP$ des Verhältnisses $Hh : Pp$ Gränze, die dies Verhältniß $Hh : Pp$ alsdenn allererst erreicht, wenn Hh und Pp verschwinden.

130 §.

Das statische Moment zu finden, womit das durch den wasserhaltenden Bogen *LMl* vertheilte Wasser die Wasserschraube um ihre Axe zu drehen strebt.

Aufl. Es sey Mm ein sehr kleines Stück der cen- 135 Fig.
trischen Linie des wasserhaltenden Bogens, und das Stück AM dieser centrischen Linie $= s$, $AL = \varepsilon$, die Länge des wasserhaltenden Bogens $LMl = \lambda$, so sind die Kreisbogen $AP = s \cos\eta$, $AQ = \varepsilon \cos\eta$, $AQPBq = (\varepsilon + \lambda) \cos\eta$, folglich $QPBq = \lambda \cos\eta$. Wenn nun LQ und lq mit der Axe der Spindel parallel, QG und qk aber auf AB senkrecht sind, so ist $AG = r \operatorname{sinv} \frac{AQ}{r}$, $AK = r \operatorname{sinv} \frac{APBQ}{r}$. Wenn ferner das Gewicht der ganzen im Bogen LMl befindlichen Masse Wasser $= P$ gesetzt, und die um die Spindel gewundene Röhre überall gleich weit angenommen wird, so ist das Gewicht des in dem Element Mm befindlichen

Wassers $= \frac{P.Mm}{\lambda}$, die Richtung MV dieses Gewichts ist vertical, also MV mit der Ebene ABCD parallel, und weil auch MP mit dieser Ebene parallel ist; (295 §. Geom.) so ist die Ebene PMV mit ABCD parallel. In dieser Ebene sey MT auf MP senkrecht, so ist $VMT = 90° - VMP = \vartheta$, und das Gewicht $\frac{P.Mm}{\lambda}$ zerlegt sich in zwo Pressungen nach $MP = \frac{P.Mm}{\lambda} \sin\vartheta$, und nach $MT = \frac{P.Mm}{\lambda} \cos\vartheta$: da dann der letzte Druck allein die Schnecke zu drehen strebt. Durch M sey die Ebene XMY mit der Grundfläche APB*q* parallel gelegt, und Z sey ihr Durchschnittspunct mit der Axe O*o*, so wie ZM ihre Durchschnittslinie mit der Ebene der Parallellinien PM und OZ: so ist ZM mit OP parallel und der Winkel YZM = AOP. Die Entfernung der Richtungslinie MT von dem Punct Z oder der Axe O*o* ist $= r\sin XZM = r\sin YZM$, also eben die Entfernung $= r\sin AOP$, folglich das Moment des Drucks nach $MT = \frac{P.Mm.\cos\vartheta}{\lambda} . r\sin AOP$, oder eben dies Moment $= \frac{P.Mm.\cos\vartheta}{\lambda} . HP$. Wenn nun auch *mp* mit O*o* parallel und *ph* auf AB senkrecht ist, so wächst der Kreisbogen AP um das Stück P*p*, und sein Quersinus AH um das Stück H*h*, wenn der wasserhaltende Bogen AM um das Stück M*m* wächst, und man hat $\frac{Hh}{Pp} = \frac{HP}{r}$, (129 §.) also $HP = \frac{r.Hh}{Pp}$. Weiter ist

MN

$MN = Mm \,.\, \cos\eta = Pp$, also $HP = \frac{r \,.\, Hh}{Mm \,.\, \cos\eta}$,
und dieser Werth von HP gebraucht giebt das Moment
$\frac{P \,.\, Mm \,.\, \cos\vartheta}{\lambda} \,.\, HP = \frac{P \,.\, r \,.\, \cos\vartheta}{\lambda \,.\, \cos\eta} \,.\, Hh.$

Wenn man sich vorstellt, der ganze wasserhaltende Bogen LMl sey in dergleichen Elemente, wie Mm, getheilt, so entsteht aus dem Gewicht eines jeden dieser Elemente ein solches statisches Moment, wie das gefundene $\frac{P \,.\, r \,.\, \cos\vartheta}{\lambda \,.\, \cos\eta} \,.\, Hh$, und die Summe aller ist das ganze gesuchte Moment. Wenn sich nun gleich Hh für ein andres Element Mm ändert, so bleibt doch der Factor $\frac{P \,.\, r \,.\, \cos\vartheta}{\lambda \,.\, \cos\eta}$ für alle einerley, und das gesuchte Moment ist ein Product dieses Factors in die Summe aller Hh. Für alle Elemente Mm von L bis m ist die Summe aller $Hh = Gh$, und $Gh = r\left(\operatorname{sinv}\frac{Ap}{r} - \operatorname{sinv}\frac{AQ}{r}\right)$. Demnach ist das statische Moment des Gewichts, womit das durch den Bogen Lm vertheilte Wasser die Schnecke zu drehen strebt $= \frac{Pr\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta} \,.\, r\left(\operatorname{sinv}\frac{Ap}{r} - \operatorname{sinv}\frac{AQ}{r}\right)$. Für den ganzen wasserhaltenden Bogen LMl verwandelt sich Ap in den Bogen $APBq$. Wenn also das statische Moment des Gewichts der gesammten durch den Bogen LMl vertheilten Wassermenge $= \mu$ gesetzt wird, so ist

$\mu =$

$$\mu = \frac{Pr\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta} r \left(\text{sinv.} \frac{APBq}{r} - \text{sinv.} \frac{AQ}{r} \right)$$

oder auch $\mu = \frac{Pr\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta} r \left(\cos\frac{AQ}{r} - \cos\frac{APBQ}{r} \right)$.

131 §.

Das statische Moment des Gewichts, womit das durch den wasserhaltenden Bogen vertheilte Wasser die Wasserschraube zu drehen strebt, ist eben so groß, als es in dem Fall seyn würde, wenn das gesammte Gewicht des Wassers im niedrigsten Punct des wasserhaltenden Bogens beysammen wäre.

Beweis. Es sey M ein willkührlich angenommener Punct im Bogen LMl, wozu im Umfang der Grundfläche der Bogen $AP = x$ gehört, und MR die lothrechte Höhe des Puncts M über dem Horizont durch B, so ist

$$MR = x\tan\eta\sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{x}{r}\right)\cos\vartheta. \quad (125\ \S.)$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = AQ$, so findet man die lothrechte Höhe des Puncts L über dem Horizont durch B, oder $L\varrho = AQ\tan\eta\sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{AQ}{r}\right)\cos\vartheta$.

Wenn ferner in der ersten Gleichung $x = APBq$ gesetzt wird, so findet man die Höhe des Puncts l über eben dem Horizont durch

$$B = APBq\,.\tan\eta\sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{APBq}{r}\right)\cos\vartheta.$$

Weil nun L und l die Endpuncte des wasserhaltenden Bogens sind, so müssen beyde Höhen gleich seyn.

Man

Man setze also $AQ = \alpha$, $APBq = \beta$; so erhält man die Gleichung

$$\alpha \mathrm{tg}\eta \sin\vartheta + r\left(1 + \frac{\cos\alpha}{r}\right)\cos\vartheta = \beta \mathrm{tg}\eta \sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{\beta}{r}\right)\cos\vartheta.$$

Daraus folgt

$$(\beta - \alpha)\,\mathrm{tg}\eta \sin\vartheta = r\left(\frac{\cos\alpha}{r} - \frac{\cos\beta}{r}\right)\cos\vartheta,$$

oder $(\beta - \alpha)\,\mathrm{tg}\eta\,\mathrm{tg}\vartheta = r\left(\frac{\cos\alpha}{r} - \frac{\cos\beta}{r}\right)$,

und es ist $\beta - \alpha = QPBq = \lambda\cos\eta$, (130 §.) also

$\lambda \sin\eta\,\mathrm{tg}\vartheta = r\left(\frac{\cos\alpha}{r} - \frac{\cos\beta}{r}\right)$. Weiter hat man

aus dem vor. §. $\mu = \frac{P.r.\cos\vartheta}{\lambda.\cos\eta} r\left(\frac{\cos\alpha}{r} - \frac{\cos\beta}{r}\right)$,

also auch $\mu = \frac{P.r.\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta}.\lambda\sin\eta\,\mathrm{tg}\vartheta$, oder $\mu = Pr\mathrm{tg}\sin\vartheta$.

Wenn nun M der niedrigste Punct des wasserhaltenden Bogens ist, und dabey vorausgesetzt wird, daß derselbe allein dem Druck des ganzen Gewichts P in der verticalen Richtung MV ausgesetzt sey, so findet man wie im vor. §. schon gewiesen ist, das Moment dieses Gewichts $= P\cos\vartheta . r\sin AOP$, und vermöge des 126 §. ist $\sin AOP$ nun $= \sin\frac{AP}{r} = \mathrm{tg}\eta\,\mathrm{tg}\vartheta$, mithin das eben erwehnte Moment $= Pr\,\mathrm{tang}\eta\sin\vartheta$ eben so groß, als das vorhin gefundene.

132 §.

Die Länge des Wasserhaltenden Bogens *LMl* $= \lambda$ **zu finden.**

Aufl.

Aufl. Im vor. §. war $(\beta-\alpha)$ tangηtang$\vartheta = r\left(\cos\frac{\alpha}{r} - \frac{\cos\beta}{r}\right)$, also ist

$$\cos\frac{\alpha}{r} - \frac{\cos\beta}{r} = \frac{\beta-\alpha}{r}\,\mathrm{tang}\eta\,\mathrm{tang}\vartheta.$$

Man setze tangη tang$\vartheta = T$, so ist $\sin\frac{\alpha}{r} = T$ (126 §) und $\frac{\alpha}{r} = A\sin T$. Setzt man diese Werthe in jene Gleichung; so erhält man

$\cos.A\sin T - \cos\frac{\beta}{r} = T.\frac{\beta}{r} - T.A\sin T$. Weiter sey der Winkel $\frac{\beta}{r} = \zeta$, so verwandelt sich diese Gleichung auch in folgende

$$T.\zeta + \cos\zeta = T.A\sin T + \cos.A\sin T.$$

Kann man aus dieser Gleichung $\zeta = \frac{\beta}{r}$ finden, so hat man $\beta = r.\zeta$ und $\alpha = r.A\sin T$, mithin auch $\beta-\alpha$, und daraus wird $\lambda = (\beta-\alpha)\sec\eta$ gefunden.

Die Auflösung der zuletzt gefundenen Gleichung um ζ zu finden, müste aus den Gründen der höhern Mathematischen Analysis hergenommen werden, und angehende Mathematiker, die bis hieher gekommen sind, können unter mehrern andern bereits vorgekommenen auch aus diesem Beyspiel lernen, daß man mehr Kenntnisse als die ersten Anfangsgründe nöthig habe, um nicht allein die Begebenheiten in der Natur aus ihren Gründen zu erklären, sondern auch Werke der Kunst richtig zu beurtheilen. Folgende Anweisung

sung kann hier genügen, um ζ aus der erwehnten Gleichung wenigstens durch Näherung zu finden.

Es kann $\tang\eta \tang\vartheta = T$ nie grösser als 1 seyn, (127 §.) die Voraussetzung $T = 1$ giebt $\zeta + \cos\zeta = \frac{1}{2}\pi$, und dieser Gleichung geschieht ein Genüge, wenn auch $\zeta = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt wird, weil alsdenn $\cos\zeta = 0$ wird. Wenn $\tang\vartheta \tang\eta$ oder $T < 1$ ist, so muß $\frac{\alpha}{r} < \frac{1}{2}\pi$ und $\frac{\beta}{r} > \pi - \frac{\alpha}{r}$ werden. Es sey nemlich M der niedrigste Punct des wasserhaltenden Bogens; so ist $\frac{AP}{r} = \pi - \frac{\alpha}{r}$ (126 §.) und $\beta > AP$, also $\frac{\beta}{r} > \pi - \frac{\alpha}{r}$, da dann zu merken ist, daß $\cos\zeta$ das entgegen gesetzte Zeichen haben müsse, so lange bis $\frac{\beta}{r}$ oder $\zeta = \frac{3}{2}\pi$ wird. Je kleiner $tg\eta tg\vartheta$, also auch $\frac{\alpha}{r}$ ist, desto grösser muß $\frac{\beta}{r}$ werden, und in dem Fall $tg\eta tg\vartheta = 0$, also $\frac{\alpha}{r} = 0$, wird $1 - \cos\frac{\beta}{r} = 0$, also $\cos\frac{\beta}{r} = 1$, und $\frac{\beta}{r} = 2\pi$, weil nun $AP = \pi$ und allemahl $\beta > AP$ ist.

Man drücke nun die Gleichung für z so aus: $T.\zeta + \cos\zeta - T.A\sin T - \cos.A\sin T = 0$, und nehme für ζ muthmaßlich einen Werth an, um zu versuchen, wie weit er dieser Gleichung ein Genüge leiste. Hat man den rechten Werth getroffen, so muß sich alles aufheben, wenn man ihn statt ζ setzet, und

und nach Anweisung der Gleichung die Rechnung anstellet. Gesetzt aber man habe $\zeta = z$ gesetzt, und $T.z + \cos z - T.A\sin T - \cos.A\sin T = Z$ gefunden, so hat man beynahe $\zeta = z - \frac{Z}{T - \sin z}$ wenigstens alsdenn, wenn die Zahl Z schon ziemlich klein, oder von der o nicht viel verschieden ist. Daß dies richtig sey, davon kann man sich überzeugen, wenn man diesen neuen so gefundenen Werth statt ζ in die Gleichung setzt. Was vorhin Z hieß, wird nun schon viel kleiner als vorhin herauskommen, und der o viel näher seyn; daraus aber folgt, daß das, was man statt ζ gesetzt hat, dem gesuchten Werth schon viel näher, als vorhin sey. Dasselbe Verfahren kann man mehrmals wiederhohlen, so läßt sich ζ so genau finden, als man es nöthig hält. Beobachtet man die kurz vorhin angeführten Maximen, so wird es nicht leicht fehlen, daß nicht bey der ersten Voraussetzung die Zahl Z ziemlich klein gefunden würde; wäre das nicht, so müßte man, um unnöthige Mühe des Rechnens zu vermeiden, nur folgendes überlegen.

Der negative Theil der Gleichung $T.A\sin T + \cos.A\sin T$ ist durch η und ϑ gegeben, und ändert sich nicht weiter, wenn auch ein andrer Werth z statt ζ gesetzt wird. Gewöhnlich wird nun ζ zwischen 90° und 270° fallen, daß also auch $\cos\zeta$ zum negativen Theil gehört, und $T.\zeta$ allein der positive Theil bleibt. Wenn nun überdem der Winkel ζ von 180° nicht viel verschieden ist, so ändert sich sein Cosinus nur wenig, wenn gleich der Bogen selbst schon ziemlich beträchtliche Aenderungen leidet: also kann man leicht voraussehen, ob ζ grösser oder kleiner ausfallen müsse, als der anfangs dafür angenommene Werth z war.

133 §.

133 §.

Um die Auflösung der Aufgabe des vor. §. auf ein Beyspiel anzuwenden, muß man die Winkel η und ϑ als gegeben annehmen. Vitruv (de Architectura Lib. X. Cap. XI. p. m. 418.) schreibt vor, es solle allemahl AP = PM seyn, und CK : BK (134 Fig.) = 3:4. Das giebt $\tang \eta = \frac{PM}{AP} = 1$, also $\eta = 45°$, und $\tang \vartheta = \frac{3}{4}$, also wäre $\vartheta = 36° \, 52'$ und noch einige Secunden mehr. Weil jedoch eine schärfere Rechnung hier nicht nöthig ist, und überdem diese Rechnung nur als ein Beyspiel dienen soll, das ganze Verfahren zu erläutern; so werde ich die Voraussetzung $\vartheta = 36° \, 52'$ behalten, also $\tang \vartheta = 0{,}74991$ annehmen. Alsdenn ist auch $T = \tang \eta \tang \vartheta = 0{,}74991$, zu diesem Sinus gehört ein Winkel von $48° \, 35'$, und man findet dem 253 §. n. 3. Geom. gemäß

	$A.1° = 0{,}0174533$
	48
	$0{,}698132$
	1396264
	$A.48° = 0{,}8377584$
Ferner	$A.1' = 0{,}0002909$
	35
	$0{,}008727$
	14545
	$A.35' = 0{,}0101815.$
Wird hiezu addirt	$0{,}8377584$
so giebt das	$A.\sin T = 0{,}8479400$
also	$T.A\sin T = 0{,}635877$
und	$\cos A \sin T = 0{,}661530,$

mithin erhält man

$$T \,.\, A \sin T + \cos A \sin T = 1{,}297397,$$

und man soll ζ finden aus der Gleichung:

$$0{,}74991 \,.\, \zeta + \cos\zeta - 1{,}297397.$$

Die Voraussetzung $\zeta = \pi = 3{,}14159$ würde $\cos\zeta = -1$, also den negativen Theil $= 2{,}297397$ geben. Es ist aber $\frac{3}{4}\pi = 2{,}35619$, mithin der positive Theil noch zu groß. Nähme man $\zeta > \pi$, so bliebe anfangs auch $\cos\zeta$ negativ, fiele aber kleiner aus, als in dem Fall $\zeta = \pi$; demnach würde um so mehr der positive Theil den negativen übertreffen. Auf diese Art läßt sich jedesmahl leicht übersehen, ob ζ kleiner oder grösser als ein Halbkreis ausfalle. Nimmt man $\zeta < \pi$, so nimmt der negative $\cos\zeta$ zwar auch wieder ab, aber anfangs nur langsam. Man versuche also die Voraussetzung $\zeta = A \,.\, 175°$, so findet man

$$
\begin{array}{rl}
A \,.\, 1° = & 0{,}0174533 \\
& 175 \\
\hline
& 0{,}0872665 \\
& 1{,}221731 \\
& 1{,}74533 \\
A \,.\, 175° = & 3{,}054\cancel{3}\cancel{2}\cancel{7}\cancel{8} = z \\
& 0{,}\cancel{7}\cancel{4}\cancel{9}\cancel{9}1 \\
\hline
& 2{,}13802925 \\
& 12217310 \\
& 2748894 \\
& 274889 \\
& 3054 \\
\hline
\end{array}
$$

$$0{,}74991 \,.\, z = 2{,}2904707.$$

Weiter

Weiter ist $\cos z = - 0{,}9961947$
hiezu $- 1{,}297397$
giebt den neg. Theil $- 2{,}2935917$
der positive war $+ 2{,}2904707$
mithin hat man $Z = - 0{,}003121$.
Ferner ist $T = 0{,}74991$
$\sin z = 0{,}08715$
$T - \sin z = 0{,}66276$

also $\dfrac{Z}{T - \sin z} = - \frac{312}{66276} = - \frac{26}{5523} = -$ $0{,}0047076$, und man findet $\zeta = z - \dfrac{Z}{T - \sin z}$ $= 3{,}0543275 + 0{,}0047076$ oder $\zeta = 3{,}0590351$. Dieser Bogen übertrift das vorige $z = 3{,}0543275$ um den Ueberschuß $0{,}0047076$, und es ist $A \,.\, 1' = 0{,}0002909$, diese Zahl aber ist in jenem Ueberschuß 16mahl enthalten, mithin ist ζ ein Bogen von $175^\circ\ 16'$.

Das giebt $\cos \zeta = - 0{,}9965895$
hiezu noch $- 1{,}297397$
giebt die Summe $- 2{,}293986$
der positive Theil ist
$0{,}74991 \,.\, \zeta = + 2{,}294000$
also wäre nun $Z = + 0{,}000014$,

wenn man den Bogen von $175^\circ\ 16'$ nun $= z$ nimmt, um ζ noch näher zu finden. Es wird nemlich

$T = 0{,}74991$
$\sin z = 0{,}082518$
$T - \sin z = 0{,}667393$

also $\dfrac{Z}{T - \sin z} = 0{,}000021$, und $\zeta = z -$

$$\frac{Z}{T - \sin z} = 3{,}059035 - 0{,}000021 = 3{,}059014.$$

Weil nun $A \,.\, 1'$ oder $A \,.\, 60'' = 0{,}000291$ ist, so gehen von $175^\circ\, 16'$ noch ab $\frac{21}{291} \,.\, 60'' = \frac{7}{97} \,.\, 60''$ oder $4\frac{1}{3}''$. Weil jedoch keine so scharfe Rechnung nöthig ist, so würde es schon genügen, $\zeta = 3{,}059035$ zu behalten.

Weiter ist alsdenn $\alpha = r \,.\, A \sin T = 0{,}847940 \,.\, r$, und $\beta = \zeta \,.\, r = 3{,}059035 \,.\, r$, mithin $\beta - \alpha = 2{,}211095 \,.\, r$. Weil überdem $\sec\eta = \sqrt{2} = 1{,}4142136$ gefunden wird, so hat man $\lambda = (\beta - \alpha) \sec\eta = 3{,}12696 \,.\, r$.

134 §.

Wenn die Spindel gleichförmig umläuft, so steigt auch das Wasser in der Schnecke gleichförmig, und Cartesens Gesetz der Statik (142 §. Statik) findet auch bey der Wasserschraube seine Anwendung.

Beweis. Die Wasserschraube drehe sich so,
134 Fig. daß B durch P nach A läuft, und in der Zeit t rücke der Punct M, welcher allemahl im Kreise XMY bleibt, von M nach u, da dann zugleich das in M befindlich gewesene Wasser von M nach m steigt. Man setze den Winkel $MZu = \varphi$, also den Bogen $Mu = r\varphi$, so ist $Mm = r\varphi \tang\eta$, und des Puncts M lothrechte Höhe über eine durch M wagrecht gelegte Ebene ist $= r\varphi \tang\eta \sin\vartheta$. So hoch steigt das Wasser also in der Zeit t lothrecht in die Höhe, und wenn φ der Zeit proportional ist, so ist es diese Höhe ebenfalls.

Es sey die Entfernung der Schraubengänge von einander $= b$, so ist $\tang\eta = \dfrac{b}{2\pi r}$, und das statische Moment des im Bogen LMl befindlichen Wassers ist

$= r \,.\, P$

$= r \,.\, P \tan g \eta \sin \vartheta$ (131 §.) $= \dfrac{b}{2\pi} P \sin \vartheta$. Die Zahl aller Schraubengänge, und der dazu gehörigen wasserhaltenden Bogen sey $= n$, so wird das Moment, womit alles in diesen Bogen befindliche Wasser die Schraube zu drehen strebt, $= \dfrac{nb}{2\pi} P \sin \vartheta$, und nP ist das Gewicht der gesammten Wassermenge, welche man hier für die zu bewegende Last ansehen kann. In der Entfernung f von der Axe der Spindel sey eine Kraft V angebracht, welche die Schraube so zu drehen strebt, daß dadurch die Last gehoben werde, so ist ihr Moment $= Vf$; und wenn man die Last $nP = Q$ setzt, so hat man für den Fall des Gleichgewichts $Vf = \dfrac{b \sin \vartheta}{2\pi} Q$, also $V : Q = b \sin \vartheta : 2\pi f$. Beym einmahligen Umlauf der Schnecke durchläuft die Kraft den Weg $2\pi f$, und die Last steigt um die Höhe $b \sin \vartheta$; also findet das Cartesianische Gesetz der Statik seine Anwendung.

135 §.

Die Wasserschraube soll vermittelst einer Maschine in Umlauf gesetzt, und an derselben eine Kraft angebracht werden, die von der Geschwindigkeit der Maschine abhängt: man soll die Menge Wasser finden, welche die Maschine bey ihrer vortheilhaftesten Einrichtung in gegebener Zeit T auf eine gegebene Höhe a bringen kann.

Aufl. Diejenige Geschwindigkeit der angegriffenen Stelle der Maschine sey $= \alpha$, wobey das mechanische Moment der Kraft am größten wird, und die

Kraft sey alsdenn einer Menge Wasser gleich, die den Raum V füllet: so ist die Kraft selbst $= V$, wenn man das eigenthümliche Gewicht des Wassers $= 1$ setzt. Die Umlaufszeit der Spindel sey $= t$, so steigt das Wasser in der Zeit t auf die Höhe $b \sin \vartheta$, und die Geschwindigkeit desselben in der verticalen Richtung ist $= \frac{b \sin \vartheta}{t}$, folglich das mechanische Moment der Last $= \frac{b \sin \vartheta}{t} . Q$. Diesemnach wird erfodert, daß im Beharrungsstande der Maschine $V\alpha = \frac{b \sin \vartheta}{t} . Q$ sey.

Die Zahl der Schraubengänge sey $= n$, so hebt die Maschine in der Zeit t die Wassermenge $\frac{1}{n} Q$, und wenn die in der Zeit T gehobene Wassermenge $= M$ gesetzt wird; so ist $M = \frac{Q . T}{n . t}$. Es ist aber $\frac{Q}{t} = \frac{V . \alpha}{b \sin \vartheta}$, also $M = \frac{V \alpha T}{n b \sin \vartheta}$. Die ganze Höhe a, worauf die Wasserschraube das Wasser bringen kann, ist $= n b \sin \vartheta$, mithin erhält man wie bey andern Maschinen $M = \frac{V \alpha T}{a}$.

136 §.

Eine vortheilhafte Anordnung für eine solche Maschine anzugeben, welche die Wasserschraube in Umlauf zu bringen dienen soll.

Aufl. Man hat ausser der Gleichung $M . a = V\alpha T$ die in der Zeit t gehobene Menge Wasser $\frac{1}{n} Q = \frac{Mt}{T}$. Eben diese Menge Wasser füllet einen wasser-

halten=

haltenden Bogen, dessen Länge oben $=\lambda$ gesetzt ist: wenn demnach k^2 die Grösse eines jeden seiner Querschnitte bezeichnet, so hat man auch $\frac{1}{n}Q$ oder $\frac{Mt}{T}$ $= k^2\lambda$. Gewöhnlich ist die Höhe a gegeben, auf welche die Maschine das Wasser bringen soll, die, wenn eine Wasserschraube allein gebraucht werden soll, nur wenige Fusse betragen kann, auch könnte überdem die in der Zeit T zu hebende Wassermenge gegeben seyn. Ist statt der letztern das mechanische Moment $V\alpha$ der Kraft gegeben, so hat man $M = \frac{V\alpha T}{a}$.

In allen Fällen sind in der Gleichung $\frac{Mt}{T} = k^2\lambda$ die drey Grössen t, k^2, und λ noch nicht bestimmt, wovon man also zwey willkührlich annehmen kann. Die Umlaufszeit t würde ihre nähere Bestimmung erhalten, wenn aus einer vollständigern Theorie bekannt wäre, wieviel Wasser in gegebener Zeit bey bekannter Umlaufsgeschwindigkeit in die schneckenförmig gewundene Röhre hinein trete. Bey den Schlüssen im vorigen §. ist vorausgesetzt worden, daß bey jedem Umlauf in die Schnecke soviel Wasser hinein trete, als den ganzen wasserhaltenden Bogen füllen kann, und wofern dies zutreffen soll, so ist leicht zu erachten, daß der Umlauf nicht zu schnell, also die Umlaufszeit nicht so gar klein seyn könne. Denn das Wasser bedarf nach Beschaffenheit der übrigen Umstände mehr oder weniger Zeit, wenn es in bestimmter Menge in die Röhre hinein fliessen soll. Bey der bis jetzt noch mangelhaften Theorie, auch wenn man die höhere mathematische Analysin zu Hülfe nimmt, muß es bey der Regel sein Bewenden behalten, **daß die Umlaufszeit nicht unter 6, 8, bis 10 Secunden, auch wohl noch mehr betragen müsse**, besonders wenn der Halbmesser der Spindel etwas groß ausfallen muß.

Von diesem Halbmesser r, dessen Länge von der Axe der Spindel bis an die centrische Linie der Röhre genommen wird, und von den beyden Winkeln η und ϑ hängt die Länge λ des wasserhaltenden Bogens ab: jene beyden Winkel kann man willkührlich bestimmen, und die Länge λ bleibt noch unbestimmt, so lange r nicht bestimmt ist. Man setze die ganze Länge der Spindel $Oo = l$, so ist $\sin\vartheta = \frac{a}{l}$, und ϑ wird desto grösser, je kleiner l in Vergleichung mit a angenommen wird. Nun ist es zwar an sich vortheilhaft, l so klein zu nehmen, als die übrigen Umstände zulassen, weil dadurch nicht allein ein Theil der Kosten erspart, sondern auch zugleich das Gewicht der Schnecke, mithin die Friction an ihren Zapfen vermindert wird; aber man darf doch auch l nicht zu klein gegen a annehmen, damit $\sin\vartheta$ nicht zu groß ausfalle. Denn einmahl muß $\tang\eta \tang\vartheta < 1$ seyn, weil die Schnecke fast gar kein Wasser schöpfen würde: (127 §.) fürs zweyte wird der wasserhaltende Bogen desto länger, je kleiner $\tang\eta \tang\vartheta$ bleibt. (132 §.) Herr Daniel Bernoulli (Hydrodynam. Sect. IX. p. 189) schlägt vor, man soll $\vartheta = 60°$ nehmen, so ist $\sin\vartheta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, und man hat $l = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$ bestimmt. Weil ferner $\eta < 90° - \vartheta$ seyn muß, (127 §.) so darf nun η nicht über 30° betragen, und der wasserhaltende Bogen wird desto länger, je kleiner man η nimmt.

nimmt. H. Dan. Bernoulli schlägt den Winkel η von 5° vor, der jedoch in der Ausübung wohl zu klein ausfallen dürfte.

Sind solchergestalt die Winkel η und ϑ bestimmt, so suche man den Winkel oder Bogen $\frac{\beta}{r} = \zeta$ dem 132 §. gemäß, setze $\frac{\alpha}{r} = \varepsilon$, so hat man $\lambda = (\beta - \alpha) \sec \eta$, oder $\lambda = (\zeta - \varepsilon) r \sec \eta$. Wird dieser Werth in der Gleichung $M.t = k^2 \lambda T$ gebraucht, so hat man $Mt = k^2 T (\zeta - \varepsilon) r \sec \eta$, und $k^2 r = \frac{M.t}{(\zeta - \varepsilon) T \sec \eta}$. Von den beyden Grössen k^2 und r kann nun eine willkührlich genommen werden, so ist die andre bestimmt. Daß übrigens k^2 nicht zu klein ausfalle ist um deßwillen rathsam, damit das Wasser einen völlig freyen Durchgang behalte, und sich keine Unreinigkeiten in der Röhre ansetzen: auch hat man davon den Vortheil, daß r desto kleiner ausfällt, je grösser man k^2 annimmt, welches wiederum andrer Ursachen halber dienlich ist.

Der IX. Abschnitt.

Kurze Beschreibung der Kastenkünste, Schöpfräder Rosenkranzmühlen und Schaufelwerken.

137 §.

Wenn das Wasser auf eine beträchtlich grosse Höhe gehoben werden soll; so ist fast allemahl ein Pumpwerk einer jeden andern Einrichtung vorzuziehen:

hen: bey mittelmäßigen und kleinen Höhen aber dienen ausser der Wasserschraube auch andre Einrichtungen, zumahl solche, wodurch eine beträchtliche Menge Wasser in kurzer Zeit auf die verlangte Höhe gebracht wird. Unter diesen verdienen die **Kastenkünste** und **Rosenkranzmühlen**, wovon die **Schaufelwerke**, und die **Taschen- oder Büschelkünste** besondre Arten sind, noch einige Aufmerksamkeit. Man bringt unter dem Wasser eine horizontalliegende prismatische Welle AB an, und grade über ihr eine
147 andre CD, die eben so groß, als die vorige ist, und
148 mit ihr parallel liegt. Um beyde Wellen werden Ket-
F. ten oder Seile geführt, die in sich selbst wieder schliessen, und deswegen **Ketten oder Seile ohne Ende** heissen, diese müssen so stark gespannt seyn, daß wenn die obere Welle durch eine daselbst angebrachte Kraft umgedrehet wird, eben dadurch zugleich auch die untere Welle in Umlauf gebracht werde. An den Ketten befestiget man eine der Höhe der obern Welle über die untere angemessen gewählte Anzahl Kästen E, F, G, H, oder andre zum Wasserschöpfen dienliche Gefässe so, daß ihre Oefnung, wenn sie herunter sinken, nach unten, und wenn sie hinauf steigen, aufwärts gekehrt ist: alsdenn heißt das Werk eine **Kastenkunst**. Wenn aber an dem Seil oder der Kette ohne Ende statt der Kästen lederne ausgestopfte Kugeln oder so genannte **Püschel** hölzerne Scheiben, oder auch wohl viereckte Tafeln wenn die Röhre ein vierecktes Prisma ist, so angebracht sind, daß sie das Wasser in einer Röhre zum Steigen bringen, durch welche in solcher Absicht die Kette, oder das Seil durchgehen muß, so heißt das Werk ein **Paternosterwerk**, oder eine **Rosenkranzmühle**, auch wohl eine

eine **Püschelkunst.** Gewöhnlich steht die Röhre, wenn es eine Püschel- oder Scheibenkunst ist, lothrecht. Man braucht aber auch wohl eine schiefliegende viereckte Röhre, da dann die Kunstkette mit viereckten Brettern versehen ist, die Schaufeln auch **Paletten** heissen, und die Maschine heißt alsdenn von ihnen ein **Schaufelwerk.** Umständlichere Beschreibungen mit beygefügten Zeichnungen findet man in **Leupolds** Theatro machinar. hydraul. im 1 Th. V. u. VI. Cap. 84 u. f. §§. auch in Belidors Architectura Hydraul. II. Buch IV. Cap. 740 und 748 §. 149 Fig.

Bey der Kastenkunst kommt es vornemlich auf eine geschickte Einrichtung der Kunstkette an, die doppelt seyn muß, wie es die 147 Figur vorstellt. Damit sie die Kästen in der rechten Lage fest genug halten könne; ferner auf eine geschickte Figur der Kästen selbst, damit nicht viel Wasser daraus verschüttet werde; endlich auch auf eine geschickte Figur der Wellen. Man brauchte sonst viereckte, sechseckigte, auch wohl achteckigte, zuletzt völlig runde Wellen, damit die Bewegung der Kästen möglichst frey von statten gehe, welches bey der an sich einfachen Einrichtung einer solchen Maschine doch nicht so leicht in die Wege zu richten ist, als es scheinen mögte.

138 §.

Die Menge Wasser zu finden, welche die angebrachte Kraft in gegebener Zeit vermittelst der Kastenkunst auf eine gegebene Höhe bringen kann.

Aufl. Die an der Kunstkette hangenden Kästen müssen, so lange sie ledig sind, mit sich selbst im Gleichgewicht, diejenigen aber, welche zugleich in die Höhe steigen, müssen voll Wasser seyn, und das

Gewicht

Gewicht dieses mit den Kästen hinauf steigenden Wassers ist die Last, oder der Widerstand, den die Maschine überwinden soll, die Friction und andre Hindernisse der Bewegung beiseit gesetzt. Aus der Gestalt der Welle und der Kästen läßt sich beurtheilen, wie viele derselben an den Umfang der Welle sich nach und nach anlegen, bevor sie einmahl herum kommt, wie lang also das Stück der Kunstkette sey, welches sich binnen der Umlaufszeit t der Welle aufwickelt: diese Länge ist alsdenn einerley mit der Höhe, um welche die Last in eben der Zeit steigt. Die ganze Höhe, worauf die Maschine das Wasser hebt, sey $= f$, die Anzahl der Kästen, welche zugleich steigen, $= n$, und die Menge Wasser, welche sie alle zusammen enthalten, $= K$, so hält jeder eine Menge Wasser $= \frac{1}{n} K$, und der Abstand eines jeden Kastens von dem folgenden ist $= \frac{1}{n} f$. Ferner sey m die Anzahl der Kästen, welche sich während eines Umlaufs der Welle nach und nach anlegen, und ihr Wasser ausgiessen; so ist $\frac{m}{n} K$ die Menge Wasser, welche die Maschine in der Zeit t auf die Höhe f bringt, die ganze Last K aber steigt in der Zeit t um die Höhe $\frac{m}{n} f$. Demnach ist die Geschwindigkeit der Last $\beta = \frac{mf}{nt}$, und man hat überdem die allgemeine Fundamentalgleichung $V\alpha = K\beta$, (18 §.) also für die Kastenkunst $V\alpha = \frac{mfk}{nt}$. Die Menge Wasser, welche die

Maschine

Maschine in jeder andern Zeit T auf die Höhe f bringt, sey $= M$, so ist $t : T = \frac{m}{n} K : M$, also $\frac{mK}{nt} = \frac{M}{T}$, und man erhält $V\alpha = \frac{M.f}{T}$, also $M = \frac{V\alpha T}{f}$, wie bey andern Hydraulischen Maschinen.

139 §.

Mit Beyseitsetzung der Friction eine vortheilhafte Anordnung der Kastenkunst durch Rechnung zu finden.

Aufl. Die vortheilhafteste Umlaufszeit t der Welle muß als gegeben angenommen werden, und man wird leicht für sich die Bemerkung machen, daß ein langsamer Umlauf der Kunstwelle rathsamer als ein schneller Umlauf sey. Die Zahl m giebt sich aus der Gestalt der Welle, die man wählt, auch richtet sich darnach die Länge und eben so die Anzahl aller Kettenglieder, wovon die Hälfte $= n$ ist. Aus m, n, f, und t, hat man $\beta = \frac{mf}{nt}$, und α ist gegeben: mithin wird die Anordnung der Maschine nun vermittelst des Verhältnisses $\alpha : \beta$ bestimmt. Ueberdem hat man $K = \frac{V\alpha}{\beta}$, und $\frac{1}{n}K$ ist die Menge Wasser, welcher jeder Kasten fassen muß.

Die Höhe f, auf welche die Maschine das Wasser heben soll, rechnet man bey Pumpenkünsten von der Oberfläche des in der Tiefe befindlichen Wassers bis an die Stelle, wo sich oben das Wasser ergießt: hier aber ist die halbe Länge der Kunstkette dafür angenomgenommen. An sich ist das etwas zuviel, weil die noch unter der Wasserfläche befindlichen Kästen vom Wasser getragen werden. Weil jedoch das Wasser der Bewegung der Kästen etwas widerstehet, auch diese Rechnung überhaupt keine grosse Schärfe zuläßt, so kann jene Voraussetzung bey der Rechnung ohne erheblichen Fehler beybehalten werden.

140 §.

Mit diesen Kastenkünsten haben diejenigen Schöpfräder die meiste Aehnlichkeit, welche durch angehängte Kästen oder Eimer das unten geschöpfte Wasser, indem das Rad umläuft, mit in die Höhe bringen, und daselbst ausgiessen. Eine andre Art Schöpfräder ist mit Röhren versehen, die das Wasser, indem das Rad umläuft, auffangen, und in der Mitte des Rades ausgiessen. Sie bringen das Wasser auf eine solche Art in die Höhe, die derjenigen ähnlich ist, wie es die Wasserschraube hebt, und man könnte sie durch den Nahmen der Schneckenräder von der andern Art Schöpfräder unterscheiden. Vitruv hat im X Buch de Architectura schon beyder Arten erwehnt und Leupold im Theatro Machinar. Hydraul. I Th. III Cap. beschreibt zwölferley Arten, wovon einige ganz unnütz sind, andre etwas ausrichten, jedoch entweder viel Wasser vergeblich verschütten, oder es nur auf eine geringe Höhe bringen, noch andre aber das verlangte ziemlich leisten. Wenn ein solches Rad im fliessenden Wasser hängt, so kann es durch den Strom selbst umgetrieben werden, und es muß in solcher Absicht am Umfang mit Schaufeln versehen werden: hängt es aber im stillstehenden Wasser, so muß es vermittelst einer andern mechanischen Einrichtung umgetrieben werden, wozu unter andern ein an eben der Welle angeordnetes Laufrad dienen kann.

141 §.

Man mag Schöpfräder und andre Künste anordnen, wie man will, so wird man doch nie mehr damit ausrichten, als was der allgemeinen Gleichung $Mf = V \propto T$ gemäß ist. Zur Probe um die Rechnung darauf anzuwenden, kann die Anordnung eines Schöpfrades dienen, wie es Belidor in der Archited. Hydraul. II. Buch IV. Cap. 783. 784 §. beschreibt. Dies Schöpfrad ist mit beweglichen Eimern versehen, welche ganz frey seitwärts am Umfang des Rades an eisernen Polzen aufgehenkt werden. Weil diese Eimer so lange von selbst vertical herab hängen, bis sie zur höchsten Stelle gelangen, so verschütten sie unterwegens nichts von dem geschöpften Wasser, welches festgemachte Zuber oder kleine Kästen thun. Oben aber beym Sammelbehälter wird ein Querholz oder eine Sparre so angebracht, daß jedes Eimer in dem Augenblick, da es oben anlangt, daran stößt, und dadurch auf die Seite geneigt wird, so daß es das Wasser in den Behälter fallen läßt. Wenn man nun jedes Eimer für sich allein als eine Last betrachtet, so ist das statische Moment, womit diese Last den Umlauf des Rades zu hemmen strebt, veränderlich, indem diese Last beym Umlauf des Rades nach und nach höher steigt. Weil aber mehr Eimer am Umfang des Rades vertheilt sind, so behält die Summe der Momente aller angefüllten Eimer beständig ohngefehr dieselbe Grösse; und weil die Last binnen der halben Umlaufszeit des Rades um die Höhe des Durchmessers gehoben wird, so ist das Verhältniß

zwischen

zwischen den Wegen der Kraft und Last $= \pi : 2$, wie bey der Kurbel.

Die Menge Wasser, welche in allen Eimern zugleich steigt, sey $= K$, des Schöpfrades Halbmesser $= r$, die halbe Umlaufszeit $= t$; so ist die Geschwindigkeit der Last in ihrer Richtung $\beta = \frac{2r}{t}$, und man hat $V . \alpha = K . \beta$. Die in der Zeit T gehobene Menge Wasser sey $= M$, so ist $t : T = K : M$, folglich $V\alpha = \frac{2Kr}{t} = \frac{2rM}{T}$, und $M = \frac{V\alpha T}{2r}$. Wenn also die Kraft am Umfang des Rades selbst angebracht und α sowohl als V gegeben ist, so hat man $\alpha = \frac{\pi r}{t}$, also $t = \frac{\pi . r}{\alpha}$, und $\beta = \frac{2r}{t}$ ist ebenfalls gegeben, mithin $K = \frac{V\alpha}{\beta}$. Wird diese Menge Wasser, welche alle zugleich steigende Eimer fassen müssen, mit der halben Anzahl aller Eimer dividirt, so weiß man wie groß jedes Eimer gemacht werden müsse.

142 §.

Wenn die ledernen Kugeln oder Scheiben an der innern Fläche der Steigröhre des lothrecht stehenden
148 Fig. Paternosterwerks so genau anschliessen, daß sie keine Luft durchlassen; so steigt das Wasser in die untere Mündung der Saugröhre nach eben den Gesetzen hinauf, wie es in den Stiefel eines Pumpwerks hinauf steigt, indem der Kolben gehoben wird. Man setze die Entfernung einer jeden Scheibe von der nächstfolgenden $= b$, so stehet über jeder Scheibe, so lange sie sich der höchsten Mündung der Steigröhre noch nicht

nicht bis auf eben diese Entfernung genähert hat, eine Wassersäule in der Höhe $= b$, und diese Wassersäule muß die Scheibe mit in die Höhe heben. Hiezu wird nun zwar eine Kraft erfodert, die das Gewicht dieser Wassersäule um etwas übertrift: weil jedoch auch bey dieser Art Wasserkünste die Rechnung nicht ohne Weitläuftigkeit bis zur grösten Schärfe getrieben werden kann; so nimmt man das ganze Gewicht der in der Steigröhre oberhalb der untern Wasserfläche befindlichen Wassermenge für die Last an, welche der Bewegung der Maschine widerstehet. Bey einer genauern Rechnung muß davon noch das Gewicht von sovielem Wasser abgehen, als mit der Kunstkette in der Röhre einerley Raum füllen würde.

143 §.

Die Kraft und ihre Geschwindigkeit sind gegeben, man soll die Menge Wasser finden, welche die lothrecht stehende Püschel oder Scheibenkunst in gegebener Zeit auf eine gegebene Höhe bringen kann, alle Frictionen beyseit gesezt.

Aufl. Die Umlaufszeit der Kunstwelle, oder des Bocks sey $= t$, ihr Umfang $= p$, so steigt die Last K binnen der Zeit t um die Höhe p, ihre Geschwindigkeit ist $= \frac{p}{t} = \beta$ und man hat wie bey allen Maschinen $V\alpha = K\beta$. Jeder Querschnitt der innern hohlen Röhre sey $= h^2$, und f die Höhe, um welche das Wasser über dem Spiegel des untern gehoben wird; so ist der Inhalt der innern Röhre, so weit sie über dem Wasser steht, $= h^2 f$. Ferner sey der Raum, welchen die Kunstkette mit den Püscheln oder Scheiben in der Röhre einnimmt, so groß, als eine Wassersäule in der Höhe $= f$ über einer Grundfläche $= k^2$, so ist wegen der am Ende des vor. §. beygefügten Erinnerung $K = (h^2 - k^2) f$. Man setze $h^2 - k^2 = m^2$ und nenne dies den reducirten Querschnitt der Röhre; so ist $K = m^2 . f$, und $V\alpha = \frac{m^2 fp}{t}$. In der Zeit t ist die gehobene Wassermenge $= m^2 . p$, die in der Zeit T gehobene Menge $M = \frac{m^2 pT}{t}$, und man erhält $V\alpha = \frac{Mf}{T}$, also $M = \frac{V\alpha T}{f}$, wie bey den übrigen Wasserkünsten.

144 §.

Wenn die Steigröhre schief gegen den Horizont liegt, und die Maschine ein Schaufelwerk ist, wie es die 149 Figur vorstellet, so sey die ganze Länge der Steigröhre, soweit sie über dem Wasser liegt, $= L$, ihr Neigungswinkel gegen den Horizont $= \eta$, die Höhe, worauf das Wasser gehoben wird $= f$, so ist $f = L \sin \eta$. Die Röhre ist gewöhnlich viereckt und die Schaufeln, wovon eine Seitenlinie allemahl horizontal liegt, werden wegen der sonst zu starken Friction etwas kleiner gemacht, als die innern Querschnitte der Röhre sind, und dies verursacht, daß sich die Zellen zwischen den Schaufeln nicht aufs genaueste mit Wasser ausfüllen. Man verstehe wie im vor. §. durch h^2 den Querschnitt der Röhre, so ist $h^2 L$ ihr Inhalt, so weit sie über dem Wasser steht. Wenn nun der Raum, welchen die Kette mit den Schaufeln

feln einnimmt, mit dem Raum, welcher in der Röhre vom Wasser leer bleibt, zusammen genommen so groß ist, als eine Wassersäule in der Höhe L auf einer Grundfläche $= k^2$; so ist hier $h^2 - k^2 = m^2$ der reducirte Querschnitt der Röhre. Die Umlaufszeit der Welle mit den Armen, welche die Kette fassen, bleibe $= t$, die Peripherie des Polygons, welches die Kettenglieder bilden, wenn sie sich an den Armen anlegen, $= p$, die ganze Wassermenge in der Steigröhre $=$ K, so steigt diese Last in der Zeit t um die Höhe $p \sin \eta$, und es ist $\beta = \frac{p \sin \eta}{t}$. Ferner ist $K = m^2 h$

so wie $V\alpha = K\beta$, also $V\alpha = \frac{m^2 p L \sin \eta}{t} = \frac{m^2 pf}{t}$, in der Zeit t aber ist die gehobene Wassermenge $= m^2 p$, also die in der Zeit T gehobene Menge $M = \frac{m^2 p T}{t}$, und man findet $V\alpha = \frac{Mf}{T}$, also $M = \frac{V\alpha T}{f}$, wie im vor. §.

145 §.

Will man die Anordnung sowohl der lothrecht stehenden Rosenkranzmühle, als auch des schiefliegenden Schaufelwerks durch Rechnung suchen; so hat man in der Gleichung $V\alpha = \frac{m^2 pf}{t}$ die Grössen m^2 und p, wovon man eine willkührlich nehmen kann, wenn V, α, f gegeben sind: denn t muß auch als gegeben angenommen werden, weil die vortheilhafteste Umlaufsgeschwindigkeit aus der Erfahrung bekannt seyn muß. Nimmt man die Länge der Arme an der Welle willkührlich an, so ist p bestimmt, und man erhält $m^2 =$

$\frac{V\alpha t}{pf}$, woraus $h^2 = m^2 + k^2$ gefunden wird, wenn auch k^2 bekannt ist. Die übrige Anordnung muß alsdenn dem Verhältniß $\alpha : \beta$ gemäß seyn.

Um auf das schiefliegende Schaufelwerk die Rechnung anzuwenden, muß man erwegen, daß die in jeder Zelle enthaltene Wassermenge einen prismatischen Körper ausfülle, dessen Grundfläche das Trapezium CDFO, und dessen Höhe die horizontale Breite der Schaufeln ist. Man setze die Höhe der Schaufel $CD = a$, ihre horizontale Breite $= b$, die Entfernung $CE = c$; so ist überdem der Winkel $ECO = \eta$, wenn das Wasser bis an CO steht. Das giebt $EO = c . \text{tang}\eta$, $FO = a - c\text{tang}\eta$, und das Trapezium $CDFO = \frac{1}{2}CE(CD + FO) = \frac{1}{2}c(2a - c\text{tang}\eta)$. Ferner sey n die Anzahl aller Schaufeln, welche zugleich steigen, so ist die Wassermenge in allen Zellen $= \frac{1}{2}nbc(2a - c\text{tang}\eta) = nabc - \frac{1}{2}nbc^2\text{tang}\eta$. Der Raum welchen das Stück YZ der Kunstkette im Wasser einnimmt, ist in Vergleichung der ganzen Zelle nur klein, und kann ohne erheblichen Fehler aus der Rechnung weggelassen werden.

Was nun im vor. §. h^2 war, das ist hier $a . b$ und $nc = L$, die Dicke der Schaufeln beyseit gesetzt: also ist die Wassermenge in der ganzen Röhre $= abL - \frac{1}{2}bc\text{Ltang}\eta$, mithin $k^2 = \frac{1}{2}bc\text{tang}\eta$, und $m^2 = ab - \frac{1}{2}bc\text{tang}\eta$. Ferner war $M = \frac{m^2 pT}{t}$, und p ist die Peripherie des Polygons um die Welle Q, wozu die Seitenlinie RS gehört. Wenn also die Zahl der Seitenlinien dieses Polygons $= \nu$ gesetzt wird, so ist

$p =$

$p = \frac{v}{n} L = v \,.\, c$, weil $L = nc$ war, und das giebt

$$M = \frac{vc(ab - \frac{1}{2}bc\,\mathrm{tg.}\eta)T}{t} \text{ oder } M = \frac{\frac{1}{2}vbc(2a - c\,\mathrm{tg}\eta)T}{t},$$

also den Effect der Maschine

$$M.f = \frac{\frac{1}{2}vbcLT}{t}(2a - c\,\mathrm{tang}\eta)\sin\eta.$$

Dieser Ausdruck ist $= 0$ wenn $\eta = 0$ ist, und wächst anfangs mit η, verschwindet aber wieder, wenn $\mathrm{tang}\eta = \frac{2a}{c}$ ist: also muß es einen gewissen Winkel η geben, wobey der Effect Mf am grösten wird.

Wegen dieses Winkels η ist aber noch zu bemerken, daß $\mathrm{tang}\eta$ nicht grösser als $\frac{a}{c}$ genommen werden könne, wenn diese Rechnung ihre Anwendung finden soll; denn das Trapezium CDFO verwandelt sich in ein Dreyeck, wenn $c\,\mathrm{tang}\eta > a$ wird, dessen Fläche alsdenn die Formul $\frac{1}{2}c(2a - c\,\mathrm{tang}\eta) = ac - \frac{1}{2}cc\,\mathrm{tang}\eta$ nicht mehr ausdrücken kann. Wie groß η seyn müsse, damit der Effect $M.f$ am grösten werde, findet man vermittelst der Differentialrechnung: hier kann es genügen, zu bemerken, daß in dem Fall $c = a$, wenn man die Zwischenweite der Schaufeln ihrer Höhe gleich macht, $\mathrm{tang}\eta = \frac{3}{4}$ seyn müsse, damit der Effect am grösten ausfalle. Das giebt $\cot\eta = \frac{4}{3}$ $\mathrm{cosec}\eta = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$, und $\sin\eta = \frac{3}{5}$, mithin wird $L = \frac{f}{\sin\eta} = \frac{5}{3}f$ aus der gegebenen Höhe f gefunden.

Der X. Abschnitt.

Regeln zur Berechnung der Friction bey Maschinen.

146 §.

Die Friction macht bey allen Maschinen, die im grossen erbauet werden, einen beträchtlichen Theil des Widerstandes aus. Wenn derselbe bey der Rechnung nicht in Betrachtung gezogen wird, welche man in der Absicht anstellet, um die vortheilhafteste Anordnung der Maschine ausfündig zu machen; so kann die nach einer solchen Rechnung angeordnete Maschine den Effect nicht leisten, der sonst erfolgen würde, wenn die Friction keine Wirkung hätte. Es sey R derjenige Widerstand, welchen man bey Anordnung der Maschine als die Last betrachtet, und der Widerstand wegen der Friction sey eben so groß, als wenn die Last R noch um den Theil S grösser, alsdenn aber die Maschine von aller Friction frey wäre. Mit der Last $R + S$ sey die Kraft V, welche der vortheilhaftesten Geschwindigkeit α zugehört, im Gleichgewicht, und die Maschine sey so angeordnet nach dem 18 §, daß wenn keine Friction wäre, alles in den Beharrungsstand käme, sobald die angegriffene Stelle der Maschine die Geschwindigkeit α erlangt hat, und die Geschwindigkeit der Last $\beta = \frac{V\alpha}{R+S}$ wird: so ist das mechanische Moment der Maschine $V\alpha = (R+S)\beta$; was man aber als den eigentlichen Effect der Maschine

schine betrachtet ist $R\beta = V\alpha - S.\beta$. Eine Kraft $= F$ sey, wenn sie an eben der Stelle, wo V angreift, angebracht würde, mit S im Gleichgewicht, so ist $F\alpha = S\beta$ also $R\beta = (V - F)\alpha$. Diesemnach kann man die Friction, wenn man die vortheilhafteste Anordnung einer Maschine sucht, auf folgende Art in Rechnung bringen.

1.) Anfangs setze man die Friction ganz beyseite, und suche die Anordnung so, wie bisher die Anleitung ist gegeben worden: denn die ganze Structur der Maschine muß schon bekannt seyn, bevor man über den Effect der Friction Rechnungen anstellen kann.

2.) Ferner betrachte man die Sache so, als wenn die schon vorhandene Maschine keine eigentlich so genannte Last bewegen, sondern nur die Kraft F gefunden werden sollte, welche mit der Friction aller Theile der Maschine alsdenn im Gleichgewicht wäre, wenn überdem auch die Kraft V und die Last R an ihren Stellen angebracht einander im Gleichgewicht erhielten.

3. Ist alsdenn die Last R mit ihrer Geschwindigkeit β gegeben, so suche man V aus der Gleichung $R\beta = (V - F)\alpha$, woraus $V = \frac{R\beta}{\omega} + F$ gefunden wird. Wenn dagegen die Kraft V gegeben ist, wie wenn man bey einem Wasserrade nur einen bestimmten Wasserzufluß und Gefälle hätte; so suche man R aus der Gleichung $R = \frac{(V-F)\alpha}{\beta}$, wenn β gegeben, oder sonst durch andre Gründe bestimmt ist.

147 §.

Wie die Kraft am Umfang eines Rades, dessen Welle wagrecht liegt, oder am Umfang einer Rolle, welche der Friction am Zapfen der Welle des Rades oder am Polzen der Rolle das Gleichgewicht hält, gefunden werden könne, dazu ist im 124 §. der Statik schon die allgemeine Anleitung gegeben worden.

43F. Wenn in der 43 Fig. nicht allein die Last R am Umfang der Welle AB, in der Richtung FP vertical herab hängt, sondern auch eine Kraft P, die mit R im Gleichgewicht ist, am Umfang des Rades lothrecht herab zieht, so leiden beyde Zapfen zusammen den Druck $P + R$ und dazu kommt noch das Gewicht von Rad und Welle selbst. Wird letzteres $= M$ gesetzt, und das Verhältniß der Friction zum Druck $= \mu : 1$; so ist die Friction an beyden Zapfen zusammen $= \mu(P + R + M)$. Wenn nun ferner auch P noch um die Kraft F vermehrt wird, die mit der Friction an den Zapfen das Gleichgewicht hält; so wird auch eben dadurch der Druck auf die Zapfenlager um eben soviel vermehrt, und die Friction ist $= \mu\,(P + F + R + M)$. Des Rades Halbmesser sey $= r$, der Zapfen Halbmesser $= \varrho$, so ist das statische Moment der Friction $= \varrho \cdot \mu(P + F + R + M)$, und weil dasselbe dem statischen Moment der Kraft F gleich seyn soll, so ist $r . F = \varrho \cdot \mu(P + F + R + M)$, und daraus folgt $(r - \mu \cdot \varrho)\, F = \varrho \cdot \mu(P + R + M)$, mithin $F = \frac{\varrho \cdot \mu(P + R + M)}{r - \mu \cdot \varrho}$.

In dem Fall $\mu = \frac{1}{3}$ bey grossen Maschinen, die aus Holz gebauet werden, hat man $F = \frac{\varrho \cdot (P + R + M)}{3r - \varrho}$.

Wenn

Wenn also Zapfen und Welle gleiche Halbmesser haben, auch überdem die Kraft am Umfang der Welle selbst herab hängt, also $r = \varrho$ ist; so wird $F = \frac{1}{2}(P + R + M)$ gefunden.

148 §.

Es sey *ABDE* die Grundfläche einer schweren Scheibe, die auf einem horizontalen Boden der Friction ausgesetzt ist, indem die Scheibe selbst um eine verticale Axe umläuft, die durch ihre Mitte *C* gehet; in der Entfernung *CG* ist eine Kraft *F* auf *CG* senkrecht in einer auf der Umdrehungsaxe senkrechten Ebene angebracht: man soll finden, wie groß diese Kraft seyn müsse, damit sie mit der Friction zwischen der Grundfläche der Scheibe und dem wagrechten Boden unter derselben das Gleichgewicht halte. 150 Fig.

Aufl. Die Grundfläche der Scheibe sey durch concentrische Kreise PQRS, *pqrs*, in sehr schmale Ringe, jedoch von gleicher Breite Pp, Qq, getheilt, so verhalten sich diese Ringe, wie die darauf drückenden Theile des Gewichts der ganzen Scheibe. Das ganze Gewicht der Scheibe sey $= M$, und m bezeichne unbestimmt den Theil dieses Gewichts, welcher auf einen Ring drückt, wozu der Halbmesser CP gehört: so ist die widerstehende Kraft der Friction gegen $Pp = \mu . m$, und die Summe aller dieser widerstehenden Kräfte $= \mu . M$ für die ganze Scheibe. Folglich verhält sich auch der Widerstand der Friction gegen Pp zum Widerstande der Friction gegen Qq, wie die Flächen der Ringe, wozu die Halbmesser CP und CQ gehören. Für jeden Augenblick der Bewegung sind die Richtungen aller dieser widerstehenden Kräfte auf den Theilen Pp, Qq, des Halbmessers CA senkrecht, und es muß eine mittlere Richtung aller dieser widerstehenden Kräfte geben.

Man nehme die Berührungslinien PM, AN, so groß, als die zu den Halbmessern CP, CA, zugehörigen Peripherien, so liegen C, M, N, in grader Linie, die Gewichte der Scheiben PQRS, ABDE, verhalten sich wie die Flächen dieser Scheiben, und diese wie die Dreyecke CPM, CAN, mithin verhalten sich eben so die Summen der widerstehenden Kräfte, welchen CP, CA, ausgesetzt sind. Wäre CAM ein schweres Dreyeck, das an der wagrecht unterstützten Seitenlinie CA lothrecht herab hienge, so litte CA einen Druck der von C nach A in eben dem Verhältniß zunähme, wie hier die widerstehende Kraft der Friction von C nach A zunimmt, und dann gienge die mittlere Richtung des Gewichts durch einen Punct P, wenn $CP = \frac{2}{3} CA$ genommen würde. Demnach muß auch die mittlere Richtung der widerstehenden Kräfte der Friction durch P gehen, wenn man $CP = \frac{2}{3} CA$ nimmt, und in A wird eine Kraft $F = \frac{\frac{2}{3} CA \,.\, \mu M}{CG}$ erfodert, wenn sie mit der Friction das Gleichgewicht halten soll.

Wenn die Kraft F am Umfang der Scheibe selbst in der Richtung der Tangente angebracht, also $CG = CA$ ist, so wird $F = \frac{2}{3} \mu . M$. Würde die Scheibe auf dem wagrechten Boden mit paralleler Bewegung fortgeschoben, so wäre die Friction $= \mu . M$, und so groß müste eine am Schwerpunct in wagrechter Richtung angebrachte Kraft seyn, die der Friction das Gleichgewicht hielte. Die Kraft am Umfang der

Scheibe, welche bey der Umlaufsbewegung mit der Friction im Gleichgewicht ist, beträgt also von jener Kraft nur zwey Drittheile. Es behalten übrigens diese Schlüsse auch ihre Richtigkeit, wenn die Scheibe ausser ihrem eigenen Gewicht sonst noch mit einer Last beschwert ist, da dann in dem gefundenen Ausdruck statt M die Summe des Gewichts der Scheibe und der darauf sonst noch drückenden Last gesetzt werden muß.

149 §.

Auf dem äussern Ende *B* **eines um** *C* **beweglichen Hebels, woran bey** *A* **eine Kraft** *P* **senkrecht zieht; liegt ein andrer, um den Punct** *G* **beweglicher Hebel, worauf die Last** *Q* **nach** *EQ* **senkrecht drückt, in so weit frey, daß wenn** *P* **das Uebergewicht bekäme, nicht allein beyde Hebel sich um ihre Ruhepuncte drehen, sondern auch** *B* **weiter nach** *I* **zu rücken, und sich an dem Hebel** *GI* **reiben müste: man soll die Kraft** *F* **finden, um welche man** *P* **vermehren muß, damit selbige der Friction das Gleichgewicht halte.**

Aufl. Es sey ausser P noch die Kraft F in der Richtung AP an A angebracht, so leidet der Punct B wegen der Kraft P + F nach der auf AB senkrechten Richtung BN einen Druck $p = \frac{AC(P+F)}{BC}$, wegen der Last Q aber nach der auf GI senkrechten Richtung BH einen Druck $q = \frac{EG.Q}{BG}$. Man setze den Winkel ABI = φ, und zerlege den Druck BH = q nach den Richtungen BR und BS auf AB senkrecht und damit paral=

parallel, so wird $HBR = 90° - ABH = \varphi$, mithin der Druck nach $BR = q . \cos\varphi = \frac{EG . Q . \cos\varphi}{BG}$, und der Druck nach BS wird von der Unterlage in C aufgehalten. Wegen der Kraft P allein leidet B nach BN den Druck $\frac{AC . P}{BC}$, und wegen des Gleichgewichts muß derselbe dem Druck nach BR gleich seyn. Daher erhält man $\frac{AC . P}{BC} = \frac{EG . Q\cos\varphi}{BG}$, mithin $P = \frac{BC . EG . Q\cos\varphi}{AC . BG}$. Die Stelle B des Hebels GI ist dem senkrechten Druck $Bh = q$ ausgesetzt, also ist die Friction $= \mu q$, welche dem Punct B des Hebels AB in der Richtung BG widerstehet. Man nehme $BH : BD = 1 : \mu$, so ist $BD = \mu . BH = \mu . q$, weil BH den Druck q vorstellet; aus den Pressungen $BH = q$, $BD = \mu q$ entsteht der mittlere Druck $BK = q\sqrt{(1 + \mu^2)}$, und wenn der Winkel $HBK = \alpha$ gesetzt wird, so ist $\tang\alpha = \frac{HK}{BH} = \frac{BD}{BH} = \mu$, also $\sqrt{(1 + \mu^2)} = \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$. Weiter zerlege man BK nach den Richtungen BL und BM auf AB senkrecht und damit parallel, so ist $KBL = \varphi - \alpha$, und der Druck nach $BL = q . \cos(\varphi - \alpha)\sqrt{(1 + \mu^2)}$. Die Unterlage C hält den Druck BM auf, und der Druck nach BL muß $= p$ seyn, damit das Gleichgewicht mit der Last und Friction zusammen erhalten werde. Demnach erhält man die Gleichung

AC

$$\frac{AC(P+F)}{BC} = \frac{EG \,.\, Q}{BG} \cos(\varphi - \omega) \sqrt{(1 + \mu^2)},$$

also $P + F = \frac{BC \,.\, EG \,.\, Q \sqrt{(1 + \mu^2)}}{AC \,.\, BG} \,.\, \cos(\varphi - \alpha)$,

oder auch $P + F = \frac{BC \,.\, EG \,.\, Q \cos(\varphi - \alpha)}{AC \,.\, BG \,.\, \cos\alpha}$; woraus F gefunden wird, wenn man P abziehet.

In dem Fall $\varphi = 0$, wenn beyde Hebel einerley Lage haben, ist $P = \frac{BC \,.\, EG \,.\, Q}{AC \,.\, BG}$, wegen des Gleichgewichts mit Q. Setzt man also zum Grunde, daß für diese Lage der Hebel $P = \Pi$ sey, so hat man überhaupt $P = \Pi \cos\varphi$, und $F = \Pi\left(\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha} - \cos\varphi\right)$. Ferner ist $\cos(\varphi - \alpha) = \cos\varphi \cos\alpha + \sin\varphi \sin\alpha$, und man findet auch $F = \Pi \sin\varphi \,\mathrm{tang}\,\alpha$.

Im Anfang der Bewegung, wenn beyde Hebel noch einerley Lage haben, ist $\varphi = 0$, also $F = 0$. Wäre aber $\varphi = 90°$, so würde man $F = \Pi \,\mathrm{tang}\,\alpha$ finden. Uebrigens ändern sich beyde Kräfte P und F, wenn sich φ ändert, die Summe $P + F$ aber wird am größten, wenn $\varphi - \alpha = 0$, also $\varphi = \infty$ ist, und man hat alsdenn $P + F = \Pi \sec\alpha = \Pi \sqrt{(1 + \mu^2)}$. Kann man $\mu = \frac{1}{3}$ setzen, so ist $\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{1}{3} = 0{,}3333333$, also $\alpha = 18° \, 26'$, und $\sec\alpha = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{10} = 1{,}0540826$ beynahe $= \frac{19}{18}$, mithin ist $\frac{19}{18}\Pi$ der größte Werth von F.

Alle diese Schlüsse würden noch ihre Anwendung finden, wenn gleich ACB ein gebrochener Hebel wäre: die Arme AC und BC können bey C einen Winkel, von

von welcher Grösse man will, einschliessen, auch könnte GI ein doppelarmiger Hebel seyn, da dann die Last auf der andern Seite des Ruhepuncts in *e* nach *eq* ziehen müste. Uebrigens ist dabey noch zu bemerken, daß bey wirklicher Umdrehung des Hebels AB um C sich auch GB und damit zugleich II ändere, weil B gegen I rückt, wenn der Winkel φ grösser wird. Wenn der Abstand CG beyder Umdrehungspuncte von einander gegeben ist, so hat man im Dreyeck BCG ausser dem Winkel CBI $= 180° - \varphi$ die Seiten BC und CG, und daraus läßt sich GB für jede Lage der Hebel trigonometrisch finden.

150 §.

152 Fig. In der Ebene eines Rades *DHN* ist die Kraft *P* nach der Richtung *AP* in der Entfernung *CA* vom Mittelpunct *C* angebracht, und die Zähne *H*, *L*, desselben greifen in die Zwischenräume der Triebstecken *K*, *M*, eines Trillings, an dessen Welle eine Last *Q* zieht: Kraft und Last sind im Gleichgewicht, und man sucht die Kraft *F*, welche noch ausser *P* bey *A* angebracht, mit der Friction zwischen Zahn und Triebstecken im Gleichgewicht ist.

Aufl. Indem der Halbmesser des Rades CH in die Lage CL kommt, schiebt derselbe den anliegenden Triebstock aus K nach M, und indem L den Triebstock M bey B verläßt, fängt der folgende Zahn H an, den folgenden Triebstock K zu berühren. Demnach kann man sich ACB und BGE als zwey gebrochene Hebel vorstellen, die sich unter den Umständen befinden, welche im vor. §. sind vorausgesetzt worden, und wenn man CBI $= \varphi$, tang $\alpha = \mu$ setzt, so hat man P + F

=

$= \frac{BC.EG.Q\cos(\varphi - \alpha)}{AC.BG.\cos\alpha}$. So müßte man eigentlich die Rechnung für jeden Winkel φ besonders anstellen, wobey auch darauf Rücksicht zu nehmen wäre, daß Zahn und Triebstecken sich nicht immer in einerley Punct berühren, mithin die Hebelsarme CB und GB einige Aenderung leiden. Indessen giebt es in jedem Fall eine gewisse Gränze, die der Winkel φ nicht übertrift. Aus der Anzahl n der Triebstecken hat man den Winkel HGB $= \frac{360°}{n}$ für den Fall, wenn der Zahn L den Triebstock verläßt; da dann ferner im Dreyeck BCG aus dem Winkel HGB und den anliegenden Seiten CG, GB, der Winkel CBG, folglich auch CBI $= 180° - CBG = \varphi$ gefunden wird.

Je mehr Stecken das Getriebe hat, desto kleiner ist HGB, weil man aber nicht leicht mehr als 20 Triebstecken braucht, so ist HGB, mithin auch CBI nicht leicht kleiner als 18°. Weil nun in dem Fall $\varphi =$ 18° 26′ die Summe P+F am größten wird, so begnügt man sich in der Ausübung für diesen Fall die Rechnung anzustellen, welche $P + F = \frac{19}{18} \cdot \frac{BC.EG}{AC.BG} \cdot Q$ giebt. Alsdenn ist BC der Halbmesser des Rades, die Länge des Zahns mit eingerechnet, und BG der Abstand der Mitte der Triebstecken von der Axe des Getriebes.

Hätte man den Zähnen diejenige Gestalt gegeben, welche sie nach Römers Vorschrift eigentlich haben müsten, (14 §.) so würde die Friction wegfallen, und die Berechnung der Kraft F zwischen Zahn und Triebstecken nicht nöthig seyn.

151 §.

44F. Sind mehr Räder und Getriebe mit einander verbunden, so macht man von diesen Schlüssen darauf leicht folgende Anwendung. Die Halbmesser der Räder ABC, EGF, FST, bezeichne man nach der Ordnung mit a, b, c, die Halbmesser der Getriebe DHI, MLN, und der Welle VW mit α, β, γ. Mit der Last R, die am Umfang der Welle des Rades FST herab hängt, wäre bey E in der Richtung EK eine Kraft $K = \frac{\beta \cdot \gamma}{b \cdot c} \cdot R$ ohne Friction im Gleichgewicht, wegen der Friction aber zwischen R und S wird die Kraft $\frac{19}{18} \cdot \frac{\beta \cdot \gamma}{b \cdot c} \cdot R = K + F$ erfordert. Demnach muß der Druck des Triebstocks D gegen den Zahn E dieser Kraft gleich seyn. Eben so groß müßte dieser Druck seyn, wenn an LMN die Last $Q = \frac{b}{\beta}(K + F) = \frac{19}{18} \cdot \frac{\gamma}{c} \cdot R$ hienge, und dann würde an B die Kraft $P = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} Q$ zum Gleichgewicht erfordert, wegen der Friction zwischen D und E aber die Kraft $P + F' = \frac{19}{18} \cdot \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} \cdot Q$. Setzt man hier den Werth $\frac{19}{18} \cdot \frac{\gamma}{c} \cdot R$ statt Q, so erhält man

$$P + F' = \frac{19^2}{18^2} \cdot \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} \cdot \frac{\gamma}{c} \cdot Q.$$

Kämen Rad und Getriebe dreymahl, oder überhaupt n mahl vor; so müßte man die Kraft am Umfange

fange des Hauptrades die mit der Last am Umfang der letzten Welle ohne Friction im Gleichgewicht wäre, ..emahl zuerst nach dem 122 §. Stat. suchen, und hiernächst mit $\frac{19^3}{18^3}$, oder überhaupt mit $\frac{19^n}{18^n}$, multipliciren.

152 §.

H. Belidor in der Architect. Hydraul. I. Theil 2 Buch 1 Cap. 3te Ausg. der Uebers. 648 u. f. §. 9 u. f. S. giebt folgende Abmessungen aller Theile einer von den zu la Fere befindlichen Mühlen an, die hier als ein Beyspiel dienen kann, um die bisherigen Lehren von Berechnung der Friction darauf anzuwenden. Das Wasserrad hat im Halbmesser 8 Fuß von der Umlaufsaxe bis zur Mitte der Schaufeln gerechnet, die $2\frac{1}{2}$ Fuß wagrechte Länge, und $9\frac{2}{3}$ Zoll Höhe haben; wobey noch zu bemerken ist, daß die Mühlwelle gewöhnlich 15 bis 18 Zoll im Durchmesser stark gemacht werde. Die eisernen Zapfen an der Mühlwelle sind 18 Linien dick, das Kammrad hat 4 Fuß im Halbmesser, vom Mittelpunct bis an die Mitte der Kämme gerechnet, und dies Kammrad hat 48 Kämme, die 4 Zoll weit hervorstehen, $3\frac{1}{2}$ Zoll breit, vorn 2 Zoll, hinten aber $2\frac{3}{4}$ Zoll dick sind. Der Trilling bestehet aus zwoen Scheiben, im Durchmesser 22 Zoll und 4 Zoll dick, welche mit 9 Triebstecken verbunden sind, die $2\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser haben, und 18 Zoll Höhe. Die Mittelpuncte dieser Triebstecken stehen in einem Kreise um die Axe des Mühleisens herum, der 9 Zoll im Halbmesser hat, mithin den Halbmesser des Getriebes abgiebt. Das Mühleisen ist $2\frac{1}{2}$ Zoll ins Gevierte stark, der Zapfen daran in der untern Pfanne 6

Linien dick, und die Höhe richtet sich nach der Höhe des Orts, wo der Läufer liegt, über dem Steg. (Sie ist bey dieser Mühle nicht angegeben.) Der Läufer hat 6 Fuß im Durchmesser und ist 16 Zoll hoch.

Wenn man eben so die Abmessungen aller übrigen Stücke der Maschine, des Kranzes und der Arme am Wasserrade, die Länge der Mühlwelle, die Grösse der Arme und Felgen am Kammrade u. s. f. auch das eigenthümliche Gewicht des Holzes und Eisens kennet, so läßt sich daraus leicht das Gewicht eines jeden dieser Stücke berechnen. Herr **Belidor** schätzt einen Cubicfuß Eichenholz 60 Pfund schwer, und er hat durch einen hydrostatischen Versuch für das Gewicht eines Cubicfusses derjenigen Steinart, die zu Mühlsteinen gebraucht wird, 110 Pfund gefunden, (a. a. O. 651 §.) und nach seiner Rechnung hat das Gewicht des Wasser- und Kammrades mit der Mühlwelle zusammen 3015 Pfund, das Gewicht des Läufers mit dem Mühleisen und dem daran befindlichen Trilling zusammen 4348 Pfund betragen.

Bey eben der Mühle ist nach Herrn **Belidor** das Gefälle 5 Fuß, also die dieser Höhe zugehörige Geschwindigkeit $2\sqrt{5g} = 17,378$ Fuß. Aus dem Halbmesser des Wasserrades von 8 Fuß findet man den Umfang 50,2656 Fuß, und wenn die Mühle im vollen Gange ist, so läuft nach Herr **Belidors** Beobachtung das Wasserrad in einer Minute 10mahl um, also hat alsdenn der Mittelpunct des Drucks eine Geschwindigkeit von 8,366 Fuß in einer Secunde. Diese von der Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers abgezogen giebt die relative Geschwindigkeit des Wassers von 9 Fuß, und die dazu gehörige Höhe

von

von 1,341 Fuß. Der Quadrat-Inhalt der Schaufeln ist 2 Quadratfuß 2 Quadratzoll, und dieser mit der Höhe 1,341 Fuß multiplicirt giebt 2,683 Cubicfuß. Wird nun der Cubicfuß Wasser im Pariser Maaß auch 72 Pfund geschätzt, welches das höchste ist, so findet man für den Wasserdruck gegen die Schaufeln 191 Pfund, wofür Herr Belidor die Zahl 200 Pfund hat.

Weil die Geschwindigkeit der Schaufeln beynahe die Hälfte von der Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers ausmacht; so könnten sie einen schwerern Läufer führen, und der Effect im ganzen würde grösser ausfallen, wenn der Läufer so schwer wäre, daß die Geschwindigkeit der Schaufeln nur $\frac{1}{3}$. 17,378 Fuß oder 5,792 Fuß betrüge.

153 §.

Um hierauf die Regeln zur Berechnung der Friction anzuwenden, setze man

den Halbmesser des Wasserrades	$= a = 8$ Fuß
— — — des Kammrades	$= b = 4$ Fuß
— — — des Trillings	$= c = 9$ Zoll
— — — des Läufers	$= r = 3$ Fuß
— — — des Mühleisenzapfens	$= e = 3$ Lin.
den Halbmesser der Zapfen der Mühlwelle	$= f = 9$ Lin.
den Wasserdruck gegen die Schaufeln	$= V = 200$ Pf.
das Gewicht des Wasserrades mit seiner Welle und dem Kammrade	$= M = 3015$ Pf.
die Friction der Zapfen an der Mühlwelle	$= Z$

das Gewicht des Läufers des Mühleisens und Trillings zusammen $= N = 4348$ Pf.

den Widerstand, welchen das Getreyde dem Umlauf des Läufers entgegen setzt $= X$.

Vermöge des 148 §. ist das Moment des vom Getreyde verursachten Widerstandes $= \frac{2}{3} r \, . \, X$, und X wird hier als die Last betrachtet; auch ist aus eben dem Grunde das Moment der Friction unten am Mühleisenzapfen $= \frac{2}{3} \, . \, e \, . \, \mu N$, welches zu jenem Moment noch hinzukommt. Der daher rührende Widerstand ist demnach eben so groß, als wenn am Umfang des Mühlsteins eine Last $= \frac{2}{3}\left(X + \frac{e \, . \, \mu N}{r}\right)$ angebracht wäre. Ferner ist das Moment der Friction an den Zapfen der Mühlwelle $= f \, . \, Z$, und das Moment der Kraft am Umfang des Wasserrades $= a \, . \, V$, welches durch jenes Moment der Friction an den Mühlwellenzapfen vermindert wird: demnach ist es eben so viel, als wenn das Moment der Kraft des Wassers $= a \, . \, V - f \, . \, Z$, oder die Kraft selbst $= V - \frac{f \, . \, Z}{a}$ wäre, und V ist, was im 146 u. f. §§. $P + F$ war. Diesemnach hat man wegen der Friction zwischen den Kämmen und Triebstecken dem 150 §. gemäß $a \, . \, V - f \, . \, Z = \frac{19}{18} \, . \, \frac{b}{c} \left(\frac{2}{3} r \, . \, X + \frac{2}{3} e \, . \, \mu N\right)$, und was hier $P = V - F$ wäre, das wird aus der Gleichung $P = \frac{b \, . \, \frac{2}{3} r \, . \, X}{a \, . \, c}$ gefunden.

Wird

Wird in jener Gleichung der Widerstand des Getreydes X als bekannt angenommen, so kann $V = P + F$ gefunden werden, wenn auch Z bekannt ist. Wenn aber bey einer wirklich erbaueten Mühle, wie die vom H. Belidor beschriebene zu la Fere ist, $V = P + F$ aus der beobachteten Umlaufsgeschwindigkeit des Wasserrades gefunden ist, so dient eben die Gleichung, X als den Widerstand des Getreydes zu finden. In allen Fällen muß Z vorher aus dem Druck gesucht werden, dem die Zapfen und Zapfenlager ausgesetzt sind. Es leiden aber diese Zapfen einmahl den Druck des Gewichts M, der sich auf beyde Zapfen vertheilt, und seine Richtung ist lothrecht. Ferner drückt das Wasser mit einer Kraft $= V$ gegen die untere Schaufel in horizontaler Richtung, und der Druck gegen den obersten Zahn im Kammrade $= \frac{a}{b} \cdot V$, welcher vom Widerstand des Trillings herrührt, ist ebenfalls horizontal. Weil die Richtungen dieser Pressungen nicht parallel sind; so müste man nach den Gesetzen der Statik für jeden Zapfen den Druck besonders suchen, den derselbe von jenen dreyen Pressungen leidet: diese Pressungen liessen sich alsdenn für jeden Zapfen auf eine bringen, die jenen äquipollent wäre, und daraus könnte die absolute Grösse der Friction für jeden Zapfen besonders gefunden werden. Weil jedoch ohnehin die gröste Schärfe bey Rechnungen dieser Art nicht erreicht werden kann, so fehlt man eben nicht merklich, wenn man so rechnet, als wenn die Richtungen aller dreyer Pressungen in einer Ebene lägen.

Hier war nun der lothrechte Druck $M = 3015$ Pfund und die beyden wagrechten Pressungen, deren Richtungen in Ansehung der Lage mit einander übereinstimmig sind, waren $V = 200$ Pfund, $\frac{a}{b} V = 400$ Pfund zusammen 600 Pfund. Aus diesem und dem Druck M zusammen entsteht der mittlere Druck $\sqrt{(3015^2 + 600^2)} = 3074$ Pfund: wenn also $\mu = \frac{1}{3}$ ist, so wird $Z = 1027$ Pfund, und man findet

$$X = \frac{27}{19} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a.V - f.Z}{r} - \frac{e}{r} \cdot \mu N = 126 \text{ Pf.}$$

Das Gewicht N war 4348 Pfund und man findet $\frac{4348}{126} = 34\frac{1}{2}$ ohngefehr: also widerstehet das Getreyde dem Umlauf des Mühlsteines eben so, als wenn in der Entfernung von 2 Drittheilen seines Halbmessers ein Widerstand die Bewegung zu hemmen strebte, der den 34sten oder 35sten Theil vom Gewicht des Läufers gleich wäre, das Gewicht des Mühleisens und Trillings dazu gerechnet. So hat H. Belidor die im 80 §. schon angeführte Regel aus der Erfahrung geschlossen.

Zusatz
zur Mechanik fester Körper.

Vom centralen Stoß fester Körper an einander.

94 §.

Ein Körper stößt an den andern, wenn der erste seine Bewegung nicht ungeändert fortsetzen kann, ohne den andern, dafern er ruhet, in Bewegung zu setzen, oder wenigstens, wenn er ebenfalls in Bewegung ist, seine Bewegung zu ändern.
Der Schwerpunct G eines Körpers M bewege sich 87 F.
in der graden Linie GH, und in derselben graden Linie zugleich der Schwerpunct g eines andern Körpers N, so giebt es zweene Fälle, in welchen beyde Körper zusammen stossen werden: einmahl, wenn die Richtungen ihrer Bewegungen einander entgegen gesetzt sind; und zweytens, wenn der eine Körper M dem andern N in einerley Richtung folgt, der voran laufende N aber langsamer als der nachfolgende M fortrückt. Auch würde ein Stoß erfolgen, wenn N völlig in Ruhe wäre, und die Richtung GH der Bewegung des Schwerpuncts G zugleich durch den Schwerpunct g des ruhenden Körpers liefe. In allen diesen Fällen erfolgt gewiß ein Stoß: es kann aber auch ein Stoß erfolgen, wenn gleich die Schwerpuncte beyder Körper sich nicht in einerley graden Linie bewegen, oder auch alsdenn, wenn der eine Körper

Körper ruhet, die Richtung in der sich der Schwerpunct des andern bewegt, nicht durch des ruhenden Schwerpunct gehet. Uebrigens könnten vielleicht die Körper vor dem Stoß ausser der Bewegung, die alle Theilchen eines jeden dieser Körper mit seinem Schwerpunct gemein haben, auch noch um ihren Schwerpunct auf mancherley Art umlaufen, da dann der Stoß zugleich Aenderungen in der Umlaufsbewegung nach sich ziehen würde. Hier wird aber die Umlaufsbewegung ganz beyseit gesetzt und nur der Fall betrachtet werden, wenn alle Elemente eines jeden dieser Körper sich mit gleichen Geschwindigkeiten in parallelen Richtungen bewegen.

95 §.

Die Wirkung des Stosses fängt mit dem Augenblick an, worin beyde Körper einander zu berühren anfangen. Ferner hängt es von der Gestalt der Körper ab, ob beyde Körper einander alsdenn nur in einem oder in mehrern Puncten berühren. Eine Kugel die an eine andre stößt, wird sie im Anfang des Stosses nur in einem Punct berühren, ein Würfel aber kann mit seiner Seitenfläche an die Seitenfläche eines andern stossen, und beyde können einander in einer Ebene berühren. Wenn aber auch die
87F. Berührung nur in einem Punct F erfolgt, so kann man sich eine Ebene KL vorstellen, die beyder Körper Oberflächen zugleich da berührt, wo sie selbst mit dem Anfang des Stosses einander berühren. Nennt man diese die Berührungsebene, so kommt die Wirkung des Stosses darauf an, ob die Richtungen der Bewegungen beyder Körper, oder auch nur des einen, wenn der andre ruhet, die Berüh-

rungsebene senkrecht oder unter einem schiefen Winkel treffen. Im letzten Fall kann man die Geschwindigkeit des gegen die Berührungsebene schief stossenden Körpers in zwo andre zerlegen, davon eine auf der Berührungsebene senkrecht, und die andre damit parallel ist: da dann nur die auf der Berührungsebene senkrechte Geschwindigkeit durch den Stoß Aenderungen leidet. Wenn nun die auf der Berührungsebene senkrechte Richtung des Stosses auch durch des einen oder des andern, oder durch beyder Körper Schwerpunct gehet, so heißt der Stoß im ersten Fall für einen von beyden Körpern, und im letzten Fall für alle beyde ein centraler Stoß, und derselbe muß vom eccentrischen Stoß unterschieden werden: so heißt nemlich der Stoß in Ansehung desjenigen von beyden Körpern, dessen Schwerpunct nicht in der Richtung des Stosses liegt.

96 §.

Bey den allgemeinen Untersuchungen über die Gesetze des Stosses kann man den Fall zum Grunde setzen, daß beyder Körper M und N Schwerpuncte G und g in einerley graden Linie GH sich nach einerley Richtung bewegen, vor dem Stoß aber des vordern Körpers N die Geschwindigkeit kleiner sey, als die Geschwindigkeit des nachfolgenden Körpers M. Wenn dieses nachfolgenden Körpers M Geschwindigkeit $= a$, des voran laufenden Körpers N Geschwindigkeit $= b$ gesetzt, und $a > b$ angenommen wird, so sind auch die Fälle mit darunter begriffen, 1.) wenn $b = 0$, also N in Ruhe ist, und 2.) wenn b in Beziehung auf a negativ, oder die Richtung der Bewegung des vordern Körpers N der Rich- 87F.

tung des hintern M grade entgegen gesetzt ist, also beyde wider einander laufen. Sobald nun beym graden und centralen Stoß die erste Berührung erfolgt, muß der vordere Körper N, der entweder langsamer als der hintere M fortrückt, oder gänzlich ruhet, oder dem Körper M entgegen rückt, anfangen, der Bewegung des letztern M zu widerstehen. In eben diesem Augenblik entsteht zwischen beyden Körpern ein Druck, der die Bewegung des Körpers M verzögert und des vordern Körpers N Bewegung, im Fall er vor dem Stoß ruhete oder mit M nach einerley Richtung lief, beschleuniget. Liefe N dem Körper M entgegen; so würde der mit der Berührung entstehende Druck des Körpers N Bewegung ebenfalls verzögern.

97 §.

Weil man keinen Grund hat, vollkommen harte Körper in der Natur anzunehmen; so kann man voraussetzen, daß während des Stosses an der Stelle F, wo die Körper einander berühren, einige Aenderung in der Figur beyder Körper um deßwillen vorgehe, weil daselbst die Theile eines jeden dem Druck etwas nachgeben. Einige Theilchen der Masse M weichen von F nach f zurück, eben so weichen auch einige Theilchen der Masse N von F nach φ aus, und die Schwerpuncte G, g, rücken während des Stosses einander noch etwas näher, als um ihren Abstand $GF + Fg$ im Augenblick der ersten Berührung. Diese Wirkung des Stosses erfordert einige wiewohl nur eine sehr kleine Zeit, und während dieser Zeit ist die Grösse des Drucks, womit jeder Körper gegen den andern preßt, nicht beständig einerley. Der Druck nimmt anfangs zu, und währet wenigstens so lange, bis beyder Körper Geschwindigkeit gleich groß geworden ist, welches um deßwillen einmahl erfolgen muß, weil des voranlaufenden Körpers Geschwindigkeit wächset, und des nachfolgenden Körpers Geschwindigkeit dagegen abnimmt.

98 §.

Der fernere Erfolg des Stosses kommt darauf an, ob die an einander stossenden Körper elastisch, oder unelastisch sind. Sobald als unelastische Körper während der Wirkung des Stosses gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben, muß auch alle Wirkung des Stosses aufhören, weil keiner von beyden ein Bestreben äussert, seine vorige Figur herzustellen; beyde unelastische Körper setzen nun mit der ihnen gemeinschaftlichen Geschwindigkeit ihre Bewegung fort, ohne daß sie weiter einigen Eindruck auf einander machen können. Wenn dagegen beyde Körper elastisch sind, so strebt jeder von dem Augenblick an, da beyde eine gleiche Geschwindigkeit erlangt haben, seine vorige Figur wieder herzustellen, der voranlaufende vermindert dadurch die Geschwindigkeit des nachfolgenden, dieser zuletzt erwehnte vermehrt die Geschwindigkeit des erstern noch mehr, und das währt so lange fort, bis beyde ihre vorige Gestalt wieder angenommen haben.

99 §.

Wenn zweene unvollkommen harte und unelastische Körper grade und central an einander stossen; so bleibt die Summe der Bewegungen beyder Körper, jede dieser Bewegungen in ihrer Richtung genommen, nach dem Stoß so groß, als sie vor dem Stosse war.

Beweis.

87F. Beweis. Das Gesetz, nach welchem sich die Stärke des Drucks zwischen beyden Körpern ändert, ist zwar nicht eigentlich bekannt, jedoch weiß man, daß in jedem Augenblick der Druck gegen M, der dieses Körpers Geschwindigkeit vermindert, eben so groß sey, als der Druck gegen N, der dieses voranlaufenden Körpers Geschwindigkeit vermehrt. Während der ganzen Zeit des Stosses muß also der Masse M in allen soviele Bewegung entzogen seyn, als der Masse N durch die in jedem Augenblick mit eben der Stärke darauf wirkende Kraft ist mitgetheilt worden. Die Wirkung der Kraft welche der Masse M Bewegung verzögert, und dagegen der Masse N Bewegung beschleuniget, ist zwar nicht gleichförmig: weil jedoch in jedem unendlich kleinen Theilchen der Zeit, die während des Stosses verfließt, sowohl die Verzögerung der Masse M als auch die Beschleunigung der Masse N keine merkliche Aenderung leidet, so kann die Wirkung während solcher unendlich kleinen Zeittheilchen als gleichförmig angenommen werden, demnach folgt aus dem 56 §. Mech. daß während eines jeden unendlich kleinen Zeittheilchens der Masse M soviele Bewegung entzogen werde, als der Masse N mitgetheilt wird; mithin ist am Ende des Stosses die Summe der Bewegungen, welche M verlohren hat, so groß, als die Summe aller der Masse N mitgetheilten Bewegungen, und beyde Körper zusammen haben nach dem Stosse noch eben so viele Bewegung, als sie vor dem Stosse hatten. Ist also vor dem Stosse der Masse M Geschwindigkeit $= a$ der Masse N Geschwindigkeit $= b$; ist ferner nach dem Stoß die gemeinschaftliche Geschwin-

digkeit

digkeit beyder Massen $= z$; so hat man $Ma + Nb = (M + N)z$.

Wäre N vor dem Stosse in Ruhe gewesen, so würden diese Schlüsse noch ihre Anwendung finden: nach dem Stosse haben beyde Körper zusammen so viele Bewegung, als M allein vor dem Stoß hatte. Wenn aber N dem Körper M entgegen liefe, so würde nach dem Stoß der Ueberschuß der grössern Bewegung über die kleinere noch so groß seyn, als sie vor dem Stoß war: und wenn man das im allgemeinen analytischen Sinn die Summe der Bewegungen nennt, so muß man bemerken, daß eine der andern entgegen gesetzt, mithin eine in Beziehung auf die andre als negativ in Rechnung zu bringen sey. Vor dem Stoß wäre also die Summe der Bewegungen in der Richtung $GH = Ma - Nb$, und während des Stosses leiden Ma in der Richtung GH, und Nb in der Richtung gG, gleichviel Verminderung: mithin ist nach dem Stoß die Grösse der Bewegung beyder Massen zusammen in der Richtung GH noch eben so groß, als sie vor dem Stosse war, und man hat nach dem Stosse $Ma - Nb = (M + N)z$.

100 §.

Die Massen M und N zweener nicht vollkommen harter Körper, deren Schwerpunct G und g sich beyde in der graden Linie GH bewegen, und ihre Geschwindigkeiten a und b im Anfang des Stosses sind gegeben: man sucht die Geschwindigkeit, womit beyde nach dem graden und centralen Stosse ihre Bewegung fortsetzen werden.

Aufl.

Aufl. Man kann die im vor. §. gefundene Gleichung $Ma + Nb = (M + N)z$ als die allgemeine Fundamentalgleichung ansehen, wenn man nur bemerkt, daß $b = 0$ sey, wenn N vor den Stosse ruhet, und daß b als eine negative Grösse in Rechnung gebracht werden müsse, wenn N dem Körper M entgegen läuft.

1.) Wenn also beyde Körper sich vor dem Stosse nach einerley Richtung bewegen, so hat man $z = \frac{Ma + Nb}{M + N}$. Man dividire den Zähler dieses Bruchs mit seinem Nenner so findet man $z = a + \frac{N(b - a)}{M + N}$, oder $z = a - \frac{N(a - b)}{M + N}$, Auch giebt die Division $\frac{Nb + Ma}{N + M} = b + \frac{M(a - b)}{M + N}$. Demnach verliert M die Geschwindigkeit $\frac{N(a - b)}{M + N}$, und N gewinnet die Geschwindigkeit $\frac{M(a - b)}{M + N}$.

2.) Ruhet N vor dem Stoß, so setzt man $b = 0$, und findet alsdenn $z = \frac{Ma}{M + N}$. Diese Geschwindigkeit wird dem ruhenden Körper mitgetheilt: der anstossende M aber verliert die Geschwindigkeit $\frac{Na}{M + N}$.

Wäre die vor dem Stoß ruhende Masse N in Vergleichung mit der daran stossenden Masse M sehr groß; so würde $z = \frac{Ma}{M + N}$ sehr nahe $= 0$ gefunden wer-

werden, und wirklich verschwinden, wenn N in Vergleichung mit M unendlich groß wäre. Diese unendlich grosse ruhende Masse bleibt also auch nach dem Stoß in Ruhe, und die anstossende Masse verliert ihre ganze Geschwindigkeit a, sie bleibt nach dem Stoß ebenfalls in Ruhe.

3.) Wenn die Bewegungen beyder Massen vor dem Stoß einander entgegengesetzt sind; so ist nach dem Stoß $z = \frac{Ma - Nb}{M + N}$, oder $z = a - \frac{M(a-b)}{M+N}$, und M verliert die Geschwindigkeit $\frac{N(a-b)}{M+N}$. Auch ist überdem $z = -b + \frac{M(a+b)}{M+N}$, und die Bewegung der Masse N verliert in ihrer Richtung die Geschwindigkeit $\frac{M(a+b)}{M+N}$.

Sind vor dem Stoß beyde einander entgegengesetzte Bewegungen gleich groß, also $Ma = Nb$, so ist nach dem Stoß $z = 0$: beyde Bewegungen heben einander auf, und beyde Massen bleiben nach dem Stoß in Ruhe.

101 §.

Beym graden und centralen Stoß vollkommen elastischer Körper an einander bleibt in eben dem Sinn, wie für unelastische Körper, die Summe der Bewegungen vor und nach dem Stosse einerley: aber die Geschwindigkeit eines jeden leidet doppelt soviele Aenderung, als die Geschwindigkeit unelastischer Körper leiden würde.

Beweis.

Beweis. Weil eine vollkommene Elasticität beyder Körper vorausgesetzt wird, so strebt jeder von beyden seine Figur völlig wieder herzustellen. In dem Augenblick, da beyder Körper Geschwindigkeit gleich groß geworden ist, haben sie zugleich den größten Eindruck auf einander gemacht, die Theile der Masse N, welche von F nach φ gedrückt waren, streben nun wieder nach F zu rücken, so wie die Theile der Masse M, die von F nach f gedrückt waren, den vorigen entgegen von f nach F zu rücken streben. Demnach fängt sich eine neue Wirkung der Körper gegen einander an, die von der vorigen verschieden ist, und welche die Elasticität zur Ursache hat: jeder Körper fährt noch fort, gegen den andern zu drücken, die Schwerpuncte, welche bis auf den Abstand $Gf + g\varphi$ gegen einander gerückt waren, entfernen sich wieder von einander, und der Druck eines jeden Körpers gegen den andern läßt nicht nach, bevor die Schwerpuncte bis auf den Abstand $GF + gF$ wieder auseinander gerückt sind.

Wenn nun gleich dieser Druck der vollkommen elastischen Körper gegen einander vom Augenblick der ersten Berührung bis zum Zeitpunct der größten Zusammenpressung sich nach andern Gesetzen ändert, als der Druck unelastischer Körper gegen einander, wenn selbige vermittelst des Stosses gegen einander wirken; so muß doch der Zeitpunct der größten Zusammenpressung zugleich derjenige seyn, in welchem die Geschwindigkeiten beyder Körper gleich groß sind. Aus eben den Gründen, die bey den Untersuchungen über den Stoß unelastischer Massen gegen einander sind gebraucht worden, folgt, daß in eben diesem Augenblick der größten Zusammenpressung die Summe der

Bewe-

Bewegungen beyder Körper noch eben so groß sey, als sie im Anfang des Stosses war. In diesem Augenblick der größten Zusammenpressung sey also beyder Körper gemeinschaftliche Geschwindigkeit $= z$, auch sollen wie vorhin a und b die Geschwindigkeiten der Massen M und N im Anfang des Stosses bezeichnen; so ist $Ma + Nb = (M + N)z$, wenn die Körper, wie hier vorausgesetzt wird, einander folgen. Auch ist $z = a - \frac{N(a - b)}{M + N} = b + \frac{M(a - b)}{M + N}$. Der Masse M ist die Grösse der Bewegung $M(a - z)$ entzogen, und der Masse N ist die Grösse der Bewegung $N(z - b)$ mitgetheilt.

Von diesem Zeitpunct der größten Zusammenpressung bis zum letzten Augenblick des Stosses, worin sich die Schwerpuncte wieder um den Abstand GF + gF von einander entfernt haben, verliert die Masse M noch mehr Bewegung, und N gewinnet noch mehr Bewegung. Während dieser noch übrigen Zeit des Stosses aber leidet wiederum in jedem Augenblick der eine Körper M soviel Druck in der Richtung FG als der andre N in der Richtung Fg: mithin wird auch während der noch übrigen Zeit des Stosses dem Körper M soviele Bewegung entzogen, als dem Körper N in eben der Richtung Fg nach und nach mitgetheilt wird. Diesemnach bleibt auch bey vollkommen elastischen Körpern die Summe der Bewegungen in eben dem Sinn, wie bey unelastischen Massen, vor und nach dem Stosse einerley.

Nun mögen sich die Körper während der Zeit, die zwischen der größten Zusammenpressung und letzten Berührung verfließt, in welchem Zustande sie wollen befinden, so sind sie doch in der vorigen zwischen der ersten Berührung und größten zusammenpressung verflossenen Zeit einmahl in eben dem Zustande gewesen. Bey gleichen Entfernungen ihrer Schwerpuncte vor und nach der größten Zusammenpressung hat der Druck zwischen beyden Körpern jedesmahl dieselbe Grösse: nur daß in umgekehrter Ordnung dieser Druck wieder abnimmt, je weiter sich die Schwerpuncte von einander entfernen, bis im Augenblick der letzten Berührung aller Druck aufhört. Diesemnach verliert die Masse M vom Zeitpunct der größten Zusammenpressung bis zum Zeitpunct der letzten Berührung grade eben soviele Bewegung, als sie vorher schon verlohren hatte, und die Masse N gewinnet während eben der Zeit noch eben soviele Bewegung als sie vorher in der Richtung GH schon gewonnen hatte. Folglich ist die Grösse der Bewegung, welche M während der ganzen Zeit des Stosses verliert, $= 2M(a - z)$, und diejenige, welche N gewinnet, $= 2N(z - b)$: demnach verliert M durch den Stoß die Geschwindigkeit $2(a - z) = \frac{2N(a-b)}{M+N}$, und N gewinnet die Geschwindigkeit

$$2(z-b) = \frac{2M(a-b)}{M+N}.$$

102 §.

Die Massen M und N sind vollkommen elastisch, und ihre Geschwindigkeiten a und b vor dem graden und centralen Stoß sind gegeben: man soll ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoß finden.

Aufl.

Aufl. Nach dem Stoß sey der Masse M Geschwindigkeit $= x$, der Masse N Geschwindigkeit $= y$.

1.) Wenn nun N voran läuft und M nachfolgt, so ist $x = a - \frac{2N(a-b)}{M+N}$, und $y = b + \frac{2M(a-b)}{M+N}$.

2.) Ruhet N vor dem Stoß, so setzt man $b = 0$, und es wird $x = a - \frac{2Na}{M+N}$, $y = \frac{2Ma}{M+N}$.

Wäre die vor dem Stosse ruhende Masse N in Vergleichung mit M sehr groß, so würde sehr nahe $x = - a$, und $y = 0$ gefunden werden. Wäre N in Vergleichung mit M unendlich groß, so bliebe N völlig in Ruhe, M aber würde mit derselben Geschwindigkeit zurück springen, welche diese Masse vor dem Stoß hatte.

3.) Sind die Bewegungen beyder Massen vor dem Stoß einander entgegengesetzt; so ist nach dem Stosse $x = a - \frac{2N(a+b)}{M+N}$, und $y = \frac{2M(a+b)}{M+N} - b$.

103 §.

Die relative Geschwindigkeit des Körpers *M* gegen *N* ist nach dem Stosse noch eben so groß, als sie vor dem Stosse war, wenn beyde vollkommen elastisch sind; nur ist eine der andern entgegen gesetzt.

Beweis. Aus den Gleichungen $x = a - \frac{2N(a+b)}{M+N}$, und $y = b + \frac{2M(a-b)}{M+N}$, wenn man zu jener a, zu dieser b auf beyden Seiten addirt, folgt

folgt $a + x = \frac{2Ma + 2Nb}{M+N}$; und $b + y = \frac{2Ma + 2Nb}{M+N}$; also $a + x = b + y$, mithin ferner $a - b = y - x$, oder $a - b = -(x - y)$. Es ist aber $a - b$ die relative Geschwindigkeit des Körpers M gegen N vor dem Stosse, und $x - y$ diese relative Geschwindigkeit nach dem Stosse.

104 §.

Nicht allein für unelastische sondern auch für elastische Körper hat man $Ma + Nb = Mx + Ny$, also $M(a - x) = N(y - b)$: überdem ist für elastische Körper $a + x = y + b$. Wenn nun die erste Gleichung mit der letzten multiplicirt wird, so findet man $M(a^2 - x^2) = N(y^2 - b^2)$, also ferner $Ma^2 + Nb^2 = Mx^2 + Ny^2$. Mit Worten ausgedrückt, heißt das: die Summe der Producte aus jeder Masse mit dem Quadrat ihrer Geschwindigkeit multiplicirt bleibt, wenn die Massen vollkommen elastisch sind, nach dem Stoße so groß, als sie vor dem Stosse war. Der Satz ist eine richtige Folge aus dem vorhergehenden. Wenn er aber nach dem Sprachgebrauch des Herrn von Leibnitz so ausgedrückt werden soll: Beym Stoß elastischer Körper bleibe die Summe der lebendigen Kräfte vor und nach dem Stosse einerley; so muß man das Wort Kraft, oder wie Hr. von Leibnitz will, lebendige Kraft, in einem eigenen sonst in den mechanischen Wissenschaften nicht gewöhnlichen Sinne nehmen.

Einige

Einige Verbesserungen und Druckfehler.

---

5 Seite 5 Zeile von unten statt nW lese man $nV = W$.

Ebendas. 2 Zeile von unten statt nW l. W.

54 S. 7 Z. muß nicht nach P sondern nach dem Wort: aufwärts, das Comma stehen.

83 S. 14 Z. statt $\backsim C$ l. cos.

104 S. 2 Z. von unten, statt daß er, l. daß sie.

108 S. 5 Z. nach Q lösche man das Zeichen = weg.

112 S. 7 Z. vor $V + v$ setze man hinzu V und, auch fehlt den vor dem Wort: Gränzen.

116 S. 3 Z. statt dennoch l. demnach.

138 S. 4 Zeile von unten statt der, l. beyder.

160 S. 9 Z. statt $FK > O$ l. $FK > o$.

167 S. 4 Z. von unten fehlt am Rande: 63 Fig.

198 S. 15 Z. versecket l. versenkt.

202 S. 1 Z. statt $S - D$ l. $\delta - D$.

205 S. unten in der zweyten Columne neben 1201 setze man 330 statt 336,8, und eine Zeile tiefer herunter neben 1204,7 setze man 336,8.

213 S. 15 Z. Statt $\mu . v$ l. $\mu . V$.

221 S. 3 Z. von unten, statt nun, l. man.

228 S. 16 Z. Dichtigkeit, l. Dichtigkeiten.

255 S. letzte Z. unten, l. untern.

259 S. 1 Z. alle, l. also.

268 S. 6 Z. vor Dichtigkeit, setze man: der.

269 S. 1 Z. nach Ausmessung, setze man hinzu: der Höhe.

273 S. 18 Z. Ausfüllung, l. Anfüllung.

Ebendas. 21 Z. auswärts, l. aufwärts.

286 S. 17 Z. Fundamentalstandes, l. Fundamentalabstandes.

Ebendas. 22 Z. als $\frac{1}{2}$ Linie, l. also $\frac{1}{2}$ Linie.

288 S. 16 Z. nach 12,497 muß ein Comma stehen.

304 S. 21 Z. demnach l. dennoch.

309 S. 10 Z. demnach l. dennoch.

315 S. 16 Z. nach dem Wort: letzte, setze man ein Comma.

318 S. 2 Z. von unten, nach dem Wort: liegenden, setze man hinzu: Richtung.

341 S. 3 Z. nach dem Worte: Zeit, setze man den Buchstaben t.

345 S. 4 Z. von unten. Unter $h^2 \sin 2\alpha$ muß $4g$ statt g stehen.

348 S. 8 Z. statt $g\alpha^2$ l. gx^2.

354 S. 10 Z. statt k l. K.

369 S. 1 Z. am Rande statt 78 Fig. l. 87 Fig.

378 S. 15 Z. nach dem Wort: **würde**, lösche man er weg.

379 S. 14 Z. statt **der = = Linie**, l. **den = = = Linien.**

383 S. 16 Z. statt **bloße**, l. **bloß.**

388 S. siebende Zeile von unten $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varphi$ l. $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varphi)$.

390 S. 2 Z. von unten ADmANM, l. ADm,ANM.

405 S. 14 Z. nach: **Länge eines**, setze man hinzu: **mit dem.**

413 S. 2 Z. statt VrsS l. RrsS.

letzte Z. statt $\frac{RS}{FG} . C$, l. $\frac{RS}{FG} . c$.

414 S. 10 Z. von unten: erstreckte, l. erstrecke.

420 S. 11 Z. $\frac{PG^2}{AD^2}$ l. $\frac{FG^2}{AD^2}$.

429 S. 15 Z. $\alpha = \beta$ Fuß, l. $a = 13$ Fuß.
432 S. 19 Z, nach 0,8567 setze man ein Comma.
438 S. 7 Z. von unten $\frac{4}{5}bt$, l. $\frac{4}{3}bt$.
445 S. 17 Z. flůssen, l. Flůsse.
447 S. 8 Z. (2 §. Rech.) l. (2. §. Mech.)
467 S. 6 Z. nach $b+h = A$ setze man ein Comma.
471 S. 5 Z. von unten, muß vor g das Comma stehen.
482 S. 10 Z. erhalten, l. erhaben.
487 S. 13 Z. Gewicht, l. Gefäß.
492 S. 4 Z. von unten, allerst, l. allererst.
496 S. 15 Z. Verrichtungen, l. Vorrichtungen.
500 S. 4 Z. des Wassers, l. das Wasser.
507 S. 3 Z. von unten, wovon, l. woran.
514 S. 6 Z. (24 §. Hydraul.) l. (42 §. Hydraul.)
518 S. 10 Z. davon, l. daran.
525 S. 10 Z. von unten, dabey ein, l. dabey vor.
533 S. 8. Z. im Nenner $\pi\beta\tau$ l. $\pi\beta T$.
540 S. 6 Z. im Nenner $3'T$ l. ζT.
558 S. 13 Z. $\frac{1}{4}\Pi\omega\omega \cdot 2\sqrt{gq}$ l. $\frac{1}{4}\pi\omega\omega \cdot 2\sqrt{gq}$.
577 S. 4 Z. $\frac{A.C}{4g}$ l. $\frac{A.C^2}{4g}$.
582 S. 7 Z. $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{3}\sqrt{3}$ l. $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.
584 S. 6 Z. von unten CA . ABHK, l. CA . AB . HK;
591 S. 4 Z. von unten $PSr = P$, l. $PSr = \varphi$.
594 S. 1 Z. $2\sqrt{gu}$: l. $2\sqrt{gu} : \beta$.
628 S. 11 Z. $\frac{\sqrt{(b^2 - \varrho^2)}}{q}$ l. $\frac{\sqrt{(b^2 - \varrho^2)}}{b}$.
634 S. 11 Z. Segen l. Sägen.
651 S. 18 Z. (107 §.) l. (106 §.)
661 S. 5 Z. ihr Widerstand, l. ihre Geschwindigkeit.
670 S. 4 Z. anfache, l. einfachste.

Verbes=

Verbesserung
einer Stelle im 1 Bande des 1 Theils.

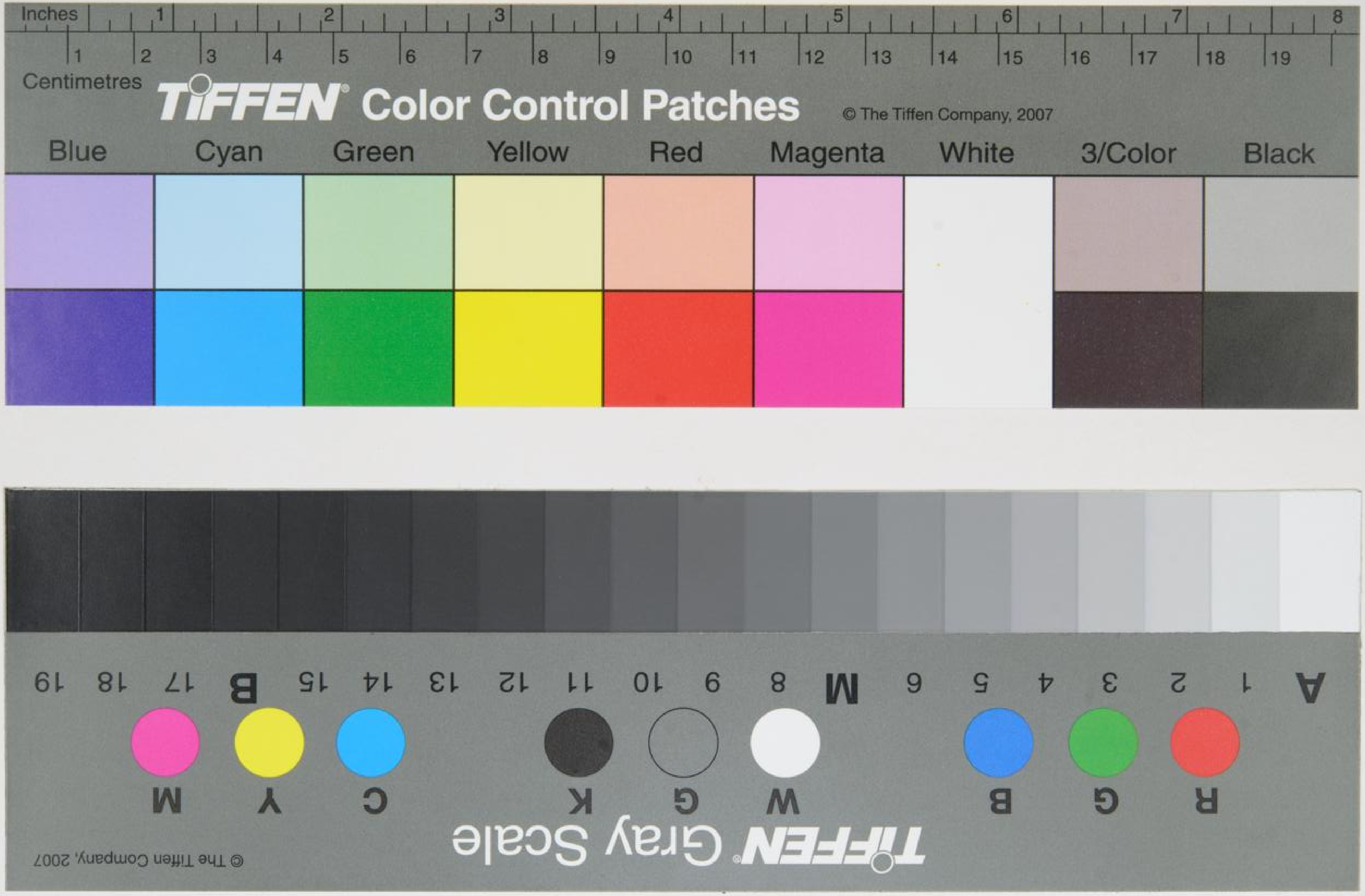
Die letzten drey Zeilen auf der 396 Seite müssen so gelesen werden:

Eine grade Linie EF, die eine Sehne AB des Kreises (25 Fig.) senkrecht halbirt, geht durch des Kreises Mittelpunct: und wenn = =

heils.

ssen so

s Krei-
rch des



Inches
Centimetres
TIFFEN Color Control Patches
© The Tiffen Company, 2007
Blue
Cyan
Green
Yellow
Red
Magenta
White
3/Color
Black
TIFFEN Gray Scale
A
M
B
R
G
B
W
G
K
C
Y
M
© The Tiffen Company, 2007