Grundformeln der Dioptrik.

Entwicklung der Formeln für den Durchgang eines Lichtstrahles durch eine einzelne Linse mit Berücksichtigung ihrer Dicke.

Vor etwa 18 Jahren haben drei berühmte Männer, **Gauss**,*) **Bessel**,**) und **Biot**, fast zu gleicher Zeit Theorien veröffentlicht, in welchen die Dicke der Linsen berücksichtigt wird, und alle Abmessungen die bis dahin vermisste vollständige Bestimmtheit erhalten, ohne dass hierdurch die betreffenden dioptrischen Formeln merklich verwickelter wurden. Diese Theorie ist nun bisher, soviel mir bekannt, auch selbst nur in ihren einfachsten Grundzügen, in kein Lehrbuch aufgenommen worden, obgleich kaum ein Zweifel darüber bestehen kann, dass es bei der vorzüglichen Wichtigkeit des Gegenstandes zweckmässig ist, wenn zuerst mit der Entwicklung der ganz strengen, dabei aber keineswegs sehr umständlichen Gleichungen, welche sich auf den Durchgang eines Strahles, durch die einfache Linse beziehen, begonnen wird, und daraus dann die Näherungsausdrücke abgeleitet werden. Dieser Gang ist der Einsicht des Studierenden offenbar förderlicher, als der übliche, welcher schon anfänglich mit gewissen Vernachlässigungen beginnt, wodurch, wie **Gauss** treffend bemerkt: »wir auf einen den mathematischen Sinn unangenehm berührenden Mangel an Präcision schon bei den ersten Begriffsbestimmungen der Dioptrik stossen«, indem z. B. »die Brennweite, wo es einmal genauer genommen wird, bald von der dem Brennpunkte nächsten Oberfläche der Linse, bald von dem sogenannten optischen Mittelpunkte derselben, bald von demjenigen Punkte, welcher zwischen der Vorder- und Hinterfläche mitten inne liegt, . . . gerechnet wird«.

Mit der vorliegenden kleinen Arbeit verbinde ich nun die Absicht, die Grundformeln der Dioptrik ungefähr in dem Umfange, in welchem dieselben in den Lehrbüchern der Physik, praktischen Geometrie &c. mitgetheilt werden könnten, wie soeben angedeutet wurde, mit durchgreifender Berücksichtigung der Dicke der Linse, welche in gewissen Fällen sogar ganz unvermeidlich ist, — zu entwickeln.

Ich gelange hierbei unter Einem zu den Formeln, wodurch die Bedingung für die Wiedervereinigung der mit der optischen Axe der Linse in einer Ebene liegenden Strahlen, welche, von einen ausserhalb dieser Axe liegenden leuchtenden Punkte, in die Linse eintreten, ausgedrückt wird, so dass zur Bestimmung der Vergrösserung, des Gesichtsfeldes &c. nicht, wie dies sonst in den elementaren Büchern der Fall ist, erst noch besondere Betrachtungen nöthig werden, um die erforderlichen Gleichungen zu erhalten.

I.

Es reicht vollkommen hin, diese Formeln für eine der üblichen Linsenformen, also z. B. für die biconvexe aufzustellen, indem sich die entsprechenden Resultate für andere Linsen durch blosse Zeichenänderung der Krümmungsradien ergeben. Ich betrachte daher die biconvexe Linse als einen sogenannten Normalfall, und sehe alle darauf sich beziehenden Grössen als positiv an, so dass also die Radien, wenn sie in einander entgegengesetzten Richtungen gezählt werden, gleiche, und zwar bei der biconvexen Linse positive, bei der biconcaven negative, und endlich bei allen übrigen positive und negative Zeichen haben. Wenn man sich, wie im Folgenden geschehen wird, nicht durchgehends der Coordinaten bedient, so bietet die b i c o n v e x e Linse den wesentlichen Vortheil dar, dass, sowie die Zeichnung, auch die entsprechenden Gleichungen, ganz symmetrische Formen erhalten. —

*) **Dioptrische Untersuchungen** von C. F. **Gauss** 1840, in den Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen I. Band (1838—1841).

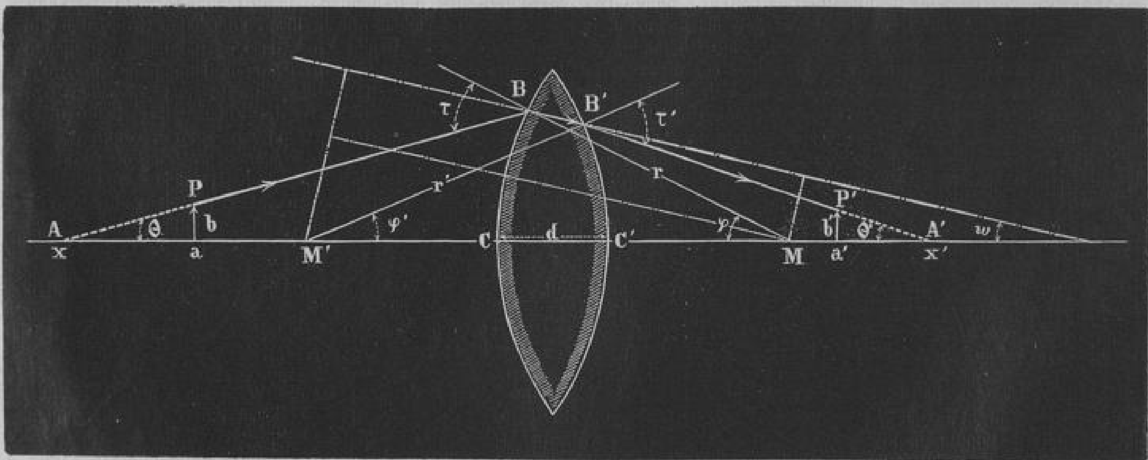
) **Über die Grundformeln der Dioptrik von **Bessel** 1841, in den astronomischen Nachrichten. 18. Band Nro. 415.

Es seien:

M und M' die Krümmungsmittelpunkte, respektive der Vorder- und Hinterfläche der Linse;
$r = CM$ und $r' = C'M'$ die Radien der Flächen;
$d = CC'$ die Dicke der Linse;
n der Brechungsexponent für den Eintritt des Lichtes aus der Luft in Glas;
P der leuchtende Punkt; P' irgend ein Punkt des Lichtstrahles nach seinem Austritte aus der Linse;
$PBB'P'$ der mit der Axe AA' in einer Ebene liegende Weg des Lichtstrahls;
a, b die von der Vorderfläche und der Axe aus gerechneten Coordinaten des Punktes P;
a', b' die von der Hinterfläche und der Axe aus gerechneten Coordinaten des Punktes P';
$x = CA$ und $x' = C'A'$ die Entfernungen, in welchen der ein- und austretende Strahl, resp. von der Vorder- und Hinterfläche aus gerechnet, die Axe schneidet;
Θ und Θ' die Winkel dieser Lichtstrahlen mit der Axe der Linse;
$BM = r$ und $B'M' = r'$ die Radien des Ein- und Austrittspunktes;
φ und φ' ihre Winkel zur Axe;
w der Winkel des zum erstenmale gebrochenen Strahles mit der Axe.

Dies vorausgesetzt hat man aus den Dreiecken ABM und $A'B'M'$ die Proportionen:

$$x + r : r = \sin(\varphi + \Theta) : \sin\Theta$$
$$x' + r' : r' = \sin(\varphi' + \Theta') : \sin\Theta'$$



Hieraus folgt:

$$(x + r)\sin\Theta = r\sin(\varphi + \Theta) \quad \ldots\ldots \quad (1).$$
$$(x' + r')\sin\Theta' = r'\sin(\varphi' + \Theta') \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Ferner hat man nach dem Brechungsgesetze folgende Gleichungen:

$$\sin(\varphi + \Theta) = n\sin(\varphi - w) \quad \ldots\ldots \quad (3).$$
$$\sin(\varphi' + \Theta') = n\sin(\varphi' + w) \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Um den Zusammenhang der Punkte der Figur vollständig auszudrücken, bedarf es noch einer weiteren Bestimmungsgleichung. — Diese ergibt sich am einfachsten durch folgende Bemerkung. Wenn man von den Krümmungsmittelpunkten M und M' auf die nach beiden Seiten verlängerte Richtung BB' Senkrechte fällt, so lässt sich deren Differenz auf doppelte Weise berechnen, nämlich einmal dadurch, dass man die Entfernung MM' der Mittelpunkte, und dann die beiden Radien BM und $B'M'$ auf die durch M' gehende, und zu BB' senkrechte Gerade projizirt, — Man erhält hiedurch die Gleichung:

$$r'\sin(\varphi' + w) - r\sin(\varphi - w) = (r + r' - d)\sin w \quad \ldots \quad (5).$$

Hierbei ist noch zu bemerken, dass die subsidiarisch eingeführten Grössen x und x' durch die Gleichungen:

$$x = a + b \; cotg \; \Theta \text{ und } x' = a' + b' \; cotg \; \Theta'$$

bestimmt sind.

In diesen fünf Gleichungen sind nun, in vollkommener Strenge, alle Formeln enthalten, welche sich auf den Durchgang eines Lichtstrahles unter der Voraussetzung beziehen, dass derselbe nicht in farbige Strahlen von verschiedener Brechbarkeit zerlegt werde.

II.

Behufs einer näheren Diskussion liessen sich von den Hilfsgrössen einige allgemein eliminiren. Man könnte z. B. die Winkel $\varphi - w$, $\varphi' + w$, und selbst $\varphi + \Theta$ und $\varphi' + \Theta'$ herausschaffen, so dass nur die Winkel Θ, Θ' und w in den Gleichungen stehen blieben. Man erhält nämlich, wenn man die Gleichungen (1) und (2) von einander abzieht:

$$(x' + r') \sin \Theta' - (x + r) \sin \Theta = r' \sin (\varphi' + \Theta') - r \sin (\varphi + \Theta)$$

oder wegen (3) und (4)

$$(x' + r') \sin \Theta' - (x + r) \sin \Theta = n \left[r' \sin (\varphi' + w) - r \sin (\varphi - w) \right]$$

woraus man unter Berücksichtigung der Gleichung (5) findet:

$$(x' + r') \sin \Theta' - (x + r) \sin \Theta = n (r + r' - d) \sin w$$

Ferner folgt aus den ersten vier Gleichungen:

$$\frac{x + r}{nr} \sin \Theta = \sin (\varphi - w)$$

$$\frac{x' + r'}{nr'} \sin \Theta' = \sin (\varphi' - w)$$

Addirt und subtrahirt man diese beiden Gleichungen, und dividirt sie nachher durcheinander, so erhält man, mit Rücksicht auf die bekannte Gleichung:

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{tg \frac{1}{2} (A - B)}{tg \frac{1}{2} (A + B)},$$

die Relation:

$$tg \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} - w \right) = \frac{(x + r) r' \sin \Theta - (x' + r') r \sin \Theta'}{(x + r) r' \sin \Theta + (x' + r') r \sin \Theta'} \; tg \, \frac{\varphi + \varphi'}{2}$$

Ebenso erhält man für dieselbe Tangente, indem man auf gleiche Weise mit (3) und (4) verfährt:

$$tg \left(\frac{\varphi - \varphi'}{2} - w \right) = \frac{tg \left(\frac{\varphi + \Theta}{2} - \frac{\varphi' + \Theta'}{2} \right)}{tg \left(\frac{\varphi + \Theta}{2} + \frac{\varphi' + \Theta'}{2} \right)} \cdot tg \, \frac{\varphi + \varphi'}{2}$$

Nun sind $\varphi + \Theta = \tau$ und $\varphi' + \Theta' = \tau'$ die Winkel, welche der ein- und austretende Lichtstrahl mit der entsprechenden Normale der Glasfläche bildet. Man hat also für diese Winkel die Gleichung:

$$\frac{tg \, \frac{\tau - \tau'}{2}}{tg \, \frac{\tau + \tau'}{2}} = \frac{(x + r) r' \sin \Theta - (x' + r') r \sin \Theta'}{(x + r) r' \sin \Theta + (x' + r') r \sin \Theta'}$$

Diese Betrachtung weiter fortzusetzen, liegt jedoch nicht im Zwecke der vorliegenden Arbeit. —

Es mag nur noch bemerkt werden, dass, wenn man die Grössen x, x' eliminirt, die obigen fünf Gleichungen die folgende Form annehmen:

$$(a + r) \sin \Theta + b \cos \Theta = r \sin (\Theta + \varphi)$$
$$(a' + r') \sin \Theta' + b' \cos \Theta' = r' \sin (\Theta' + \varphi')$$
$$\sin (\Theta + \varphi) = n \sin (\varphi - w)$$
$$\sin (\Theta' + \varphi') = n \sin (\varphi' + w)$$
$$r' \sin (\varphi' + w) - r \sin (\varphi - w) = (r + r' - d) \sin w$$

III.

Die trigonometrische Form dieser Gleichungen, welche die vollständige Elimination der blossen Hilfsgrössen fast unmöglich macht, hindert ebenso eine nähere Erforschung des Weges, welchen der Lichtstrahl nimmt, und wie es sich mit mehreren von P ausgehenden Strahlen verhält.

Um diese Fragen beantworten zu können, muss man auf die strenge trigonometrische Form verzichten, und setzt daher den Winkel Θ, und folglich auch alle übrigen Hilfswinkel als sehr klein voraus, wozu man praktisch vollkommen berechtigt ist, so, dass die Rechnung schon eine sehr grosse Näherung geben wird, wenn man sich bei der Entwicklung des *Sinus* und *Cosinus* jedes dieser Winkel auf das erste Glied beschränkt. Dann gestaltet sich die Sache freilich sehr einfach, denn man hat, — immer noch mit Rücksicht auf die Dicke der Linse — Die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a\Theta + b &= r\varphi \\ a'\Theta' + b' &= r'\varphi' \\ \Theta + \varphi &= n\,(\varphi - w) \\ \Theta' + \varphi' &= n\,(\varphi' + w) \\ r\varphi - r'\varphi' &= dw \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, wie wohl nicht näher gezeigt zu werden braucht, durch blosse Elimination der Winkel φ, φ', w die beiden folgenden:

$$\frac{a\Theta + b}{r} + \frac{a'\Theta' + b'}{r'} = \frac{\Theta + \Theta'}{n - 1}$$

$$\frac{2n}{d}\Big\{a\Theta + b - (a'\Theta' + b')\Big\} = (n-1)\Big\{\frac{a\Theta + b}{r} - \frac{a'\Theta' + b'}{r'}\Big\} - (\Theta - \Theta')$$

Eliminirt man hieraus Θ', so ergibt sich

$$\Big\{nar'\Big(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\Big) - \frac{\frac{a}{r}-\frac{a'}{r'}}{1-(n-1)\frac{a'}{r'}}\cdot nr + \Big[1-(n-1)\frac{a}{r}\Big]d\Big\}\,\Theta + nbr'\Big(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\Big) - \frac{\frac{b}{r}+\frac{b'}{r'}}{1-(n-1)\frac{a'}{r'}}\,nr - (n-1)\,\frac{b}{r}\,d = 0$$

Diese Gleichung bestimmt den Winkel Θ, unter welchem ein Lichtstrahl in die Linse eintreten muss, damit er nach dem Austritte durch einen gegebenen Punkt $(a'\,b')$ gehe. Auf ganz ähnliche Weise liesse sich auch der Winkel Θ' beim Austritte bestimmen.

Die wichtigste Frage jedoch, welche sich durch obige Gleichung beantworten lässt, besteht umgekehrt darin, ob sich der Punkt P', oder also dessen Koordinaten $(a'\,b')$ so bestimmen lassen, dass alle von P ausgehenden Strahlen nach ihrem Austritt durch einen und denselben Punkt P' gehen. Soll dies möglich sein, so müssen a', b' so bestimmt werden, dass sie, als allen möglichen Werthen von Θ entsprechend, eben von Θ ganz unabhängig sind. Da nun aber die willkührliche Grösse Θ, in der obigen Gleichung explicite nur einmal, ausserhalb der Klammer, vorkommt, so kann die Gleichung, wenn sie jenen Anforderungen genügen soll, offenbar nur bestehen, wenn jedes Glied derselben für sich $= 0$ ist.

Daraus entspringen die zwei Gleichungen, durch welche sowohl a' als b' ihre vollständige Bestimmung erhalten. Diese Gleichungen sind:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} - (n-1)\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\Big) + \Big(\frac{1}{a} - \frac{n-1}{r}\Big)\Big(\frac{1}{a'} - \frac{n-1}{r'}\Big)\frac{d}{n} = 0 \;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad \textbf{(I).}$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} + (n-1)\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\Big)\frac{a'}{b'} + \frac{n-1}{r}\Big(\frac{1}{a'} - \frac{n-1}{r'}\Big)\frac{a'}{b'}\cdot\frac{d}{n} = 0 \;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad \textbf{(II).}$$

Das hieraus für a' und b' stets reelle und unzweideutige Werthe erhalten werden, so ergibt sich, dass auch bei Berücksichtigung der Dicke der Linse stets nur ein gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt der gebrochenen Strahlen statt findet. Dieser Punkt wird bekanntlich das Bild desjenigen genannt, wovon die Strahlen ausgegangen sind. Die Abscisse dieses Punktes, oder die sogenannte Vereinigungsweite der Lichtstrahlen, ist gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{1}{a'} = \frac{(n-1)\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\Big) - \frac{(n-1)^2}{n}\cdot\frac{d}{rr'} - \frac{1}{a}\Big(1 - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{d}{r'}\Big)}{1 + \frac{1}{a}\cdot\frac{d}{n} - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{d}{r}}$$

mit deren näherer Betrachtung sich der folgende Artikel beschäftigen wird. Die ähnlichen Erörterungen bezüglich der Gleichung zwischen den Grössen b und b', erledigen sich dann, wie man sehen wird, in sehr einfacher Weise.

IV.

Wie bekannt, wird unter der, gewöhnlich mit f bezeichneten Brennweite einer Linse die Vereinigungsweite der parallel zur Axe einfallenden Strahlen verstanden. Was im Folgenden durch f bezeichnet wird, ist nicht ganz genau der Werth von a' für $a = \infty$, sondern es wird

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{d}{rr'} \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

gesetzt, woraus allerdings, wenn man, wie dies gewöhnlich geschieht, $d = o$ setzt, für f der bekannte Ausdruck sich ergibt. — Man mag daher auch den, durch die obige Gleichung bestimmten Werth der Constante f, um einen Namen dafür zu haben, die Brennweite nennen.

Dieses vorausgesetzt, seien nun α und α' zwei weitere kleine Linienstücke, bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{\alpha}{f} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{r'} \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

$$\frac{\alpha'}{f} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{r} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

so lässt sich leicht nachweisen, dass die im vorigen Artikel entwickelte Gleichung zwischen a und a' sich ausschliesslich durch die fünf Grössen a, a', α, α' und f, und zwar in merkwürdig einfacher Weise darstellen lässt.

Zu dem Ende beachte man, dass

$$\frac{n-1}{r'} = \frac{n}{d} \cdot \frac{\alpha}{f};$$

$$\frac{n-1}{r} = \frac{n}{d} \cdot \frac{\alpha'}{f}$$

folglich, wenn man diese Gleichungen zuerst zu einander addirt, und dann miteinander multiplizirt

$$(n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) = \frac{n}{d} \cdot \frac{\alpha + \alpha'}{f}$$

$$\frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{d}{rr'} = \frac{n}{d} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{f^2}$$

Die für $\frac{1}{f}$ angegebene Gleichung geht also über in

$$\frac{1}{f} = \frac{n}{d} \cdot \frac{\alpha + \alpha'}{f} - \frac{n}{d} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{f^2}$$

und daraus folgt:

$$\frac{d}{n} = \alpha + \alpha' - \frac{\alpha\alpha'}{f}$$

Hiermit lässt sich nun auch noch der Nenner des für $\frac{1}{a'}$ im vorigen Artikel erhaltenen Ausdrucks transformiren. Man erhält nämlich

$$1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{d}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{r} = 1 + \frac{\alpha + \alpha'}{a} - \frac{\alpha\alpha'}{af} - \frac{\alpha'}{f}$$

so, dass man nunmehr die Gleichung findet:

$$\frac{1}{a'} = \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{a}\left(1 - \frac{\alpha}{f}\right)}{1 + \frac{\alpha + \alpha'}{a} - \frac{\alpha\alpha'}{af} - \frac{\alpha'}{f}}$$

oder, wenn man den Nenner entfernt

$$\frac{1}{a'} + \frac{\alpha + \alpha'}{aa'} - \frac{\alpha\alpha'}{aa'f} - \frac{\alpha'}{a'f} = \frac{1}{f} + \frac{\alpha}{af} - \frac{1}{a}$$

Fasst man die Glieder, welche $\frac{1}{f}$ enthalten, zusammen, so folgt hieraus:

$$\frac{1}{f}\left(1+\frac{\alpha}{a}+\frac{\alpha'}{a'}+\frac{\alpha\alpha'}{aa'}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}+\frac{\alpha+\alpha'}{aa'}$$

oder wie man leicht bemerkt:

$$\frac{1}{f}\left(\frac{\alpha}{a}+1\right)\left(\frac{\alpha'}{a'}+1\right)=\frac{1}{a}\left(\frac{\alpha'}{a'}+1\right)+\frac{1}{a'}\left(\frac{\alpha}{a}+1\right)$$

oder auch:

$$\frac{1}{f}(a+\alpha)(a'+\alpha')=(a+\alpha)+(a'+\alpha')$$

Dividirt man endlich mit $(a+\alpha)(a'+\alpha')$ so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{a+\alpha}+\frac{1}{a'+\alpha'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

um deren Herleitung es sich vorzugsweise handelte. — Ich füge noch bei, dass die in Art. 3 gefundene Gleichung für die Grösse des Bildes, nämlich:

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}+(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\frac{a'}{b'}+\frac{n-1}{r}\left(\frac{1}{a'}-\frac{n-1}{r'}\right)\frac{a'}{b'}\cdot\frac{d}{n}=0$$

wenn man darin, gemäss der eingeführten Bezeichnungsweise:

$$(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)=\frac{n}{d}\cdot\frac{\alpha+\alpha'}{f}$$

$$\frac{n-1}{r}\cdot\frac{d}{n}=\frac{\alpha'}{f};$$

$$\frac{n-1}{r'}\cdot\frac{d}{n}=\frac{\alpha}{f}$$

setzt, in die folgende

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}+\frac{n}{d}\cdot\frac{\alpha+\alpha'}{f}\cdot\frac{a'}{b'}+\frac{a'}{b'}\cdot\frac{\alpha'}{f}\left(\frac{1}{a'}-\frac{n}{d}\cdot\frac{\alpha}{f}\right)=0$$

oder:

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}+\frac{n}{d}\cdot\frac{a'}{b'}\left(\frac{\alpha+\alpha'}{f}-\frac{\alpha\alpha'}{f^2}\right)+\frac{\alpha'}{b'f}=0$$

übergehe.

Berücksichtigt man nun, dass:

$$\frac{d}{n}=\alpha+\alpha'-\frac{\alpha\alpha'}{f}$$

und führt die nahe liegenden Reduktionen aus, so gelangt man bald zu der einfachen Beziehung.

$$\frac{b}{a+\alpha}+\frac{b'}{a'+\alpha'}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

V.

Vernachlässigt man die Dicke der Linse, setzt also $d=0$, so geht, gemäss der Gleichungen (1), (2), (3) des vorigen Artikels, $\frac{1}{f}$ in den gewöhnlichen Ausdruck über, und wird $\alpha=0$, $\alpha'=0$, so, dass man unmittelbar die übliche Gleichungen findet:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}$$

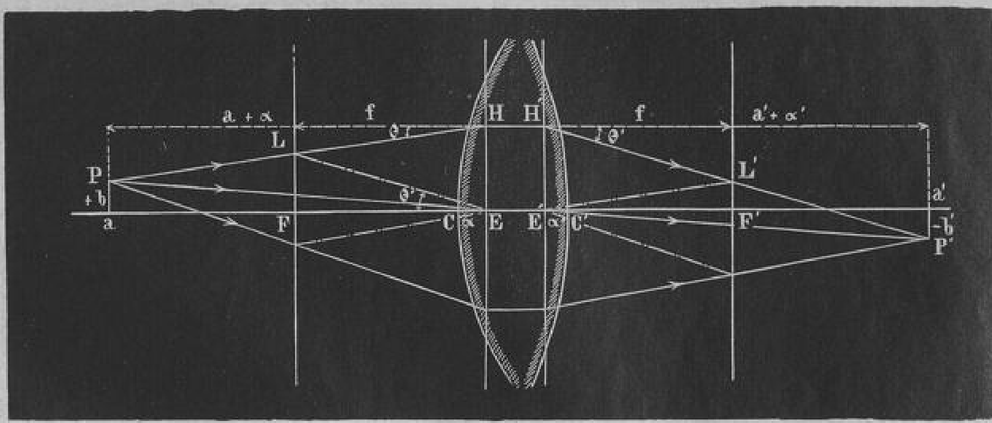
$$\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}=0$$

Durch die Gleichung (4) des vorigen Art. ist nun nachgewiesen, dass durch die Berücksichtigung der Dicke der Linse, die eben angeführte, für die Dioptrik durchaus fundamentale Gleichung für die Vereinigungsweite, von ihrer Einfachheit nicht das Geringste verliert, indem dadurch eigentlich nur die Anfangspunkte für die Zählung der a und a' respective um die kleinen Längen α und α' zurück verlegt werden, was natürlich der Einfachheit in keiner Weise Eintrag thut.

Sofort lassen sich nun auch die zuerst von **Möbius***) für ein System von Linsen mit der schon von **Lagrange** vorgeschlagenen Zuhilfenahme der Kettenbrüche aufgestellten eleganten Sätze, ohne den geringsten Verlust an Einfachheit, dahin erweitern, dass durchgehends die Dicke der Linse des Systems berücksichtigt wird. Dieses Alles näher zu zeigen, war, wie bereits bemerkt, vorzugsweise der Zweck der genannten Abhandlungen von **Gauss, Bessel** und **Encke****).

VI.

Zu den schönen Resultaten der soeben erwähnten Untersuchungen gehört nun insbesondere auch noch der Nachweis, dass den Grössen α und α' eine sehr einfache geometrische Bedeutung zukommt, und dass man durch sie in den Stand gesetzt ist, die Richtung der austretenden Lichtstrahlen, so wie die Lage des Bildes des leuchtenden Punktes mit Rücksicht auf die Dicke der Linse geometrisch zu construiren.



Man trage von den Punkten C und C' der Vorder- und Hinterfläche der Linse resp. die Länge $CE = \alpha$, $C'E' = \alpha'$ auf, so erhält man im Inneren der biconvexen Linse, die Punkte E und E'; **Gauss** nennt sie die Hauptpunkte, und die durch sie gelegten und zur Axe senkrechten Ebenen, die Hauptebenen der Linse. — Trägt man ferner von E und E' nach F und F' die Grösse f, so, dass also

$$EF = E'F' = f$$

und legt durch die Punkte F und F' zur Axe senkrecht die Ebenen FL und $F'L'$, so werden diese, ebenfalls nach dem Vorschlage von **Gauss**, resp. die erste und zweite Brennpunktsebene genannt.

Es sei nun wieder P der leuchtende Punkt, und P' sein Bild; PL einer der eintretenden Strahlen, welcher nach zweimaliger Brechung in der Richtung $L'P'$ aus der Linse tritt. Um nun aus der ersten Richtung die letztere durch Construction zu erhalten, verlängere man den eintretenden Strahl bis zum Punkte H der ersten Hauptebene, und ziehe HH' parallel zur Axe. Hierauf verbinde man den Punkt L, in welchem der eintretende Lichtstrahl die erste Brennpunktsebene trifft, mit dem ersten Hauptpunkte E, so ist dieser Verbindungslinie LE der austretende Lichtstrahl parallel, so dass man diesen letzteren erhält, wenn man durch H' eine zu LE parallele Gerade $H'L'P'$ zieht. — Man könnte den Punkt L' des austretenden Strahles auch erhalten, wenn man $E'L'$ zum eintretenden Strahl PH parallel durch den zweiten Hauptpunkt zöge.

---

*) Crelle, Mathem. Journal. Band V und VI.

**) De Formulis Dioptricis. Berolini 1844.

Construirt man auf diese Weise den Austritt zweier von demselben Punkte P ausgehenden Strahlen, so ergibt sich unmittelbar auch die Lage P' des Bildes. —

Um nun die Richtigkeit der angegebenen Construction nachzuweisen, bemerke man, dass sich

$$EH = E'H'$$

auf dreifache Weise berechnen lässt. Bezeichnet man nämlich mit Θ und Θ' die Winkel, resp. des ein- und austretenden Strahls, wie solche die Figur angibt, so hat man offenbar:

$$EH = (a + \alpha)\ tg\ \Theta + b$$
$$E'H' = (a' + \alpha')\ tg\ \Theta' - (-b')$$

und auf eine dritte Art berechnet sich EH aus dem Dreiecke ELH, woraus sich ergibt:

$$EH = (tg\Theta + tg\Theta').\ f$$

Durch Vergleichung dieser Werthe findet man nunmehr die beiden Gleichungen:

$$(tg\Theta + tg\Theta')\ \frac{f}{a + \alpha} = tg\Theta + \frac{b}{a + \alpha}$$

$$(tg\Theta + tg\Theta')\ \frac{f}{a' + \alpha'} = tg\Theta' + \frac{b'}{a' + \alpha'}$$

Addirt man dieselben, und berücksichtiget, dass gemäss der Gleichung (5) des Artikels 4

$$\frac{b}{a + \alpha} + \frac{b'}{a' + \alpha'} = 0$$

und dass man daher nach der Addition durchgehends mit $(tg\Theta + tg\Theta')$ dividiren kann, so erfolgt:

$$\frac{f}{a + \alpha} + \frac{f}{a' + \alpha'} = 1$$

oder

$$\frac{1}{a + \alpha} + \frac{1}{a' + \alpha'} = \frac{1}{f}$$

eine Bedingung, welche mit der Gleichung (4) des Artikels 4 vollkommen übereinstimmt, und daher die Richtigkeit der Construction bestätigt.

VII.

Bis dahin bezogen sich alle Betrachtungen und alle daraus hervorgegangenen Formeln auf den Fall der biconvexen Linse. Wie sich gezeigt hat, sind für diese alle Ergebnisse vollkommen symmetrisch.

Es ist aber nicht schwer, die Resultate unmittelbar anzugeben, welche sich auf die übrigen Arten von Linsen, z. B. den sogenannten Meniskus (mit einer convexen Vorder- und concaven Hinterfläche) beziehen. Für diesen ist r' negativ zu setzen. Zugleich nehme man an, es sei r' dem absoluten Werthe nach gegen r so klein, dass der Ausdruck für f negativ wird. Setzt man daher, um nur absolut zu nehmende Grössen in der Rechnung zu haben, $-r'$ für r' und $-f$ für f, so nehmen die auf die bezeichnete Linse sich beziehenden Gleichungen die folgende Gestalt an, nämlich:

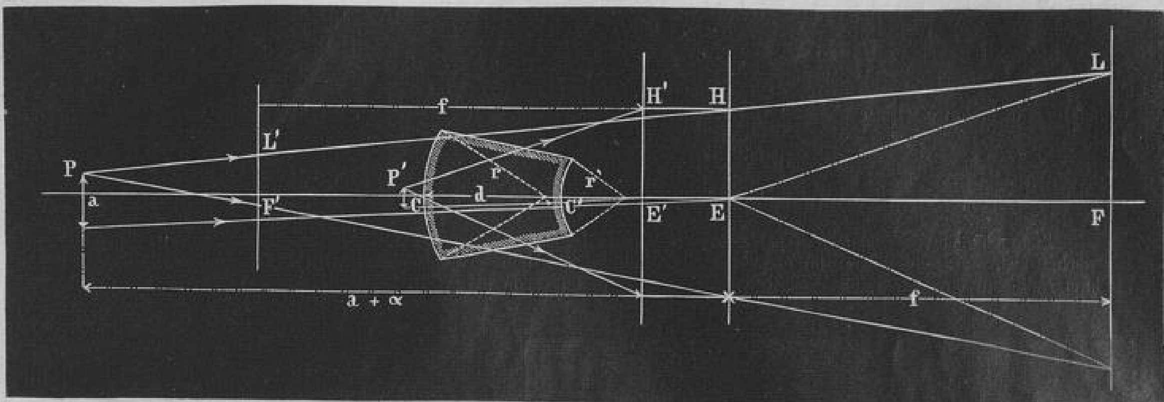
$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) - \frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{d}{rr'} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\alpha = + \frac{n - 1}{n} \cdot \frac{d}{r'}\ f \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\alpha' = - \frac{n - 1}{n} \cdot \frac{d}{r}\ f \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{a + \alpha} + \frac{1}{a' + \alpha'} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Um hieraus die Haupt- und Brennpunktsebenen zu construiren, und sofort die Lage des Bildes zu finden, muss man vor Allem beachten, dass α positiv, α' dagegen negativ ist, sowie dass, der absoluten Grösse nach, α beträchtlich grösser als α' sein müsse. Weil ferner f einen ziemlich bedeutenden Werth erhalten wird, so werden, wenn man die Dicke d einigermassen als stark voraussetzt, auch α und α' beträchtliche Werthe erlangen, so dass sowohl die beiden Brennpunkts- als auch die beiden Hauptebenen ausserhalb der Linse liegen, wie dies die Figur andeutet.



Um die bisher entwickelten Formeln wenigstens auf einen bestimmten Fall anzuwenden, lege ich die Abmessungen einer wirklich (von **Plössl** in Wien) ausgeführten Meniskuslinse zu Grunde. Es waren:

$$r = 17^{\prime\prime\prime}{\cdot}5 \; ; \; r' = 9^{\prime\prime\prime}{\cdot}6 \; ; \; n = 1{\cdot}529 \; ; \; d = 20^{\prime\prime\prime}{\cdot}6.$$

Rechnet man mittelst dieser Angaben nach den Formeln (1), (2) und (3), so ergibt sich:

$$f = +\ 410^{\prime\prime\prime}{\cdot}5$$

$$\alpha = +\ 304^{\prime\prime\prime}{\cdot}76$$

$$\alpha' = -\ 167^{\prime\prime\prime}{\cdot}18$$

Die Figur würde eine zu grosse Ausdehnung erhalten, wenn man darin alle Grössen (α, α', f) im richtigen Verhältnisse angeben wollte. Indessen ist daraus die Lage der Brenn- und Hauptpunktsebenen, sowie der Gang der Lichtstrahlen, dem vorliegenden Falle entsprechend, genau ersichtlich angegeben.

VIII.

Obgleich man durch die auf das vorige Beispiel angewendete Art der Betrachtung in den Stand gesetzt wird, den Gang der Lichtstrahlen schärfer, als auf irgend eine andere Weise, und auch mit grosser Leichtigkeit bei einer gegebenen Linse zu verzeichnen, so reicht jenes Beispiel doch ohne Zweifel hin, dieses Verfahren verständlich zu machen, zumal es sich beim Anfänger nicht sowohl um eine genaue Verzeichnung der Lichtstrahlen, als vielmehr um eine richtige Vorstellung über den Verlauf derselben, über die Lage des Bildes, und sofort um die Unterscheidung handelt, ob die Strahlen convergirend oder divergirend aus der Linse austreten, oder was dasselbe sagt, ob sie sich hinter der Linse schneiden, und ein *wirkliches*, oder ob sie sich vor der Hinterfläche schneiden, und ein blosses *Scheinbild* geben.

Diese Fragen, welche sich, wie bekannt, beantworten lassen, ohne dass es nöthig wäre, auf die Dicke der Linse zu achten, werden nun als hieher gehörig, und weil sie in keinem der mir bekannten Lehrbücher vollständige Berücksichtigung finden, in Kürze hier erörtert werden.

Wie schon im Artikel 5 bemerkt wurde, gehen die beiden Grundformeln, durch welche die Lage und Grösse des Bildes bestimmt wird, für $d = 0$ in die beiden folgenden

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$\frac{b'}{a'} = -\frac{b}{a}$$

über.

Aus der ersten dieser Gleichungen bestimme man die Abscisse a', und aus der letzteren, unter gleichzeitiger Elimination von a' die Ordinate b', so wird man finden:

$$a' = \frac{af}{a - f} = \frac{a}{\frac{a}{f} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$b' = - \frac{bf}{a - f} = - \frac{b}{\frac{a}{f} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

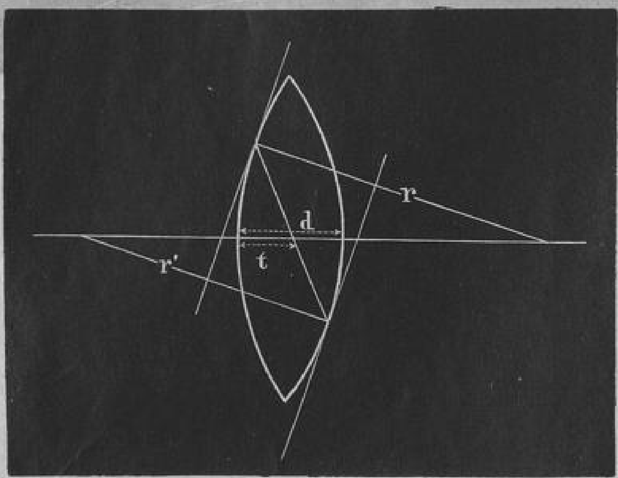
wobei für die biconvexe Linse

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ist.

Zugleich bemerke man, dass es, wie bekannt, im Inneren der biconvexen Linse einen Punkt gibt, welcher die Eigenschaft hat, dass alle durch ihn gehenden Strahlen parallel zu ihrer ursprünglichen Richtung, wieder austreten. Bezeichnet t die auf der Axe gemessene Entfernung dieses Punktes von der Vorderfläche, so ist, wie bekannt:

$$t = \frac{r}{r + r'} \cdot d$$



Dieser Punkt wird der optische Mittelpunkt der Linse genannt. Die durch diesen Punkt gehenden Strahlen heissen die Hauptstrahlen.

Gauss hat vorgeschlagen, den Namen „optischen Mittelpunkt" demjenigen Punkte der Axe beizulegen, welcher zwischen den beiden Hauptpunkten in der Mitte liegt. Bezeichnet man den Abstand dieses Punktes von der Vorderfläche mit t^0, so ist

$$t^0 = \frac{d}{2} + \frac{a - a'}{2}.$$

Hält man an der gewöhnlichen Bestimmung fest, so dient jener Punkt bekanntlich zur sehr bequemen Verzeichnung eines der Hauptstrahlen. — Um nun die oben bezeichneten Fragen unter Zugrundelegung der Gleichung (1), (2) und (3) zu lösen, hat man der Entfernung a des leuchtenden Punktes von der Vorderfläche successive alle möglichen Werthe beizulegen, und daraus auf die entsprechenden Werthe und Zeichen von a' und b' einen Schluss zu ziehen.

IX.

I. Die biconvexe Linse. Auf diese sind die Formeln des vorigen Artikels unmittelbar bezogen.

Der leuchtende Punkt befinde sich näher an der Vorderfläche, als der vordere Brennpunkt; es sei also $a < f$, so ist $\frac{f}{a} > 1$, folglich a' negativ; die Strahlen vereinigen sich also vor der Linse, und geben daher kein wirkliches sondern nur ein Scheinbild. Was nun die Grösse des Bildes betrifft, so sieht man aus der Gleichung (2) des vorigen Artikels, dass $b' > b$ und positiv ist. Es findet somit in diesem Falle ein aufrechtes und vergrössertes Scheinbild statt.

Für $a = f$ ist $\frac{f}{a} = 1$ und $a' = \infty$.

Wenn also der leuchtende Punkt sich in einem der Brennpunkte befindet, so sind die Strahlen, nach ihrem Durchgange durch die Linse, zur Axe parallel.

Für $a > f$ sind drei Fälle zu unterscheiden:

α) Es sei $a > f$, und zugleich $a < 2f$, so ist $2 > \frac{a}{f} > 1$, mithin $1 > \frac{a}{f} - 1 > 0$, folglich der Bruch ein echter. Es ist somit $a' > a$ und positiv. Ferner ergibt sich, dass $b' > b$, und zugleich negativ ist. Es entsteht somit ein reelles, verkehrtes, und zugleich vergrössertes Bild.

β) Es sei $a > 2f$, so ist offenbar $\frac{a}{f} > 2$, folglich $a' < a$ und positiv; $b' < b$ und negativ. Es entsteht somit ein verkehrtes und zugleich verkleinertes, wirkliches Bild.

γ) Ist endlich $a = \infty$, so ist $a' = f$, und $b' = 0$.

Wenn bei einer biconvexen Linse $r' = r$, folglich beide Flächen gleich stark gekrümmt sind, so nennt man sie eine gleichseitige. Es ist dann $f = \frac{r}{2(n-1)}$. Da nahezu $n = 1 \cdot 5$, so ist auch nahezu $f = r$.

II. Für die planconvexe Linse gilt dasselbe, was soeben für die biconvexe Linse nachgewiesen wurde, nur muss $r = \infty$ gesetzt werden, wodurch $f = \frac{r'}{n-1}$ wird. Setzt man, wie vorhin $n = 1.5$, so folgt $f = 2r'$, mithin die Brennweite gleich dem doppelten Radius.

III. Bei der convexconcaven Linse — oder dem sogenannten Meniskus, ist, weil beide Krümmungsmittelpunkte auf derselben Seite ihrer entsprechenden Flächen liegen, einer der beiden Radien negativ zu setzen. Vor Allem ist zu unterscheiden, ob das Licht auf die concave oder convexe Fläche der Linse einfällt, wobei dann jedesmal wieder zwei Fälle möglich sind, weil der Radius der concaven Seite entweder grösser oder kleiner, als jener der convexen, sein kann.

A. Fällt das Licht auf die concave Seitenfläche, so ergeben sich die entsprechenden Formeln aus jener der biconvexen Linse, wenn man darin $-r$ für r setzt, wodurch man erhält:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$$

und

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} = \frac{a}{b}\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)\frac{a}{b}.$$

α) Es sei $r > r'$, so ist $\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} > 0$, daher auch f stets positiv, so dass für diese Linse alles über die biconvexe Linse Angeführte gilt.

β) Es sei $r < r'$, so ist $\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} < 0$, mithin auch f negativ. Setzt man $-f$ statt f, um alle Abmessungen der Linse als absolute Grössen in der Rechnung zu haben, so erhält man

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = -\frac{1}{f}$$

und

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} = -\frac{a}{fb} = (n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)\frac{a}{b}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$a' = -\frac{f}{\frac{f}{a} + 1} \text{ und } b' = \frac{b}{\frac{a}{f} + 1}.$$

Man sieht hieraus, dass die Vereinigungsweite a' stets kleiner als f und immer negativ ist. Da ausserdem $b' < b$, so ist das Bild immer kleiner als der Gegenstand. Diese Linse ist somit unter allen Umständen eine Zerstreuungslinse, und gibt ein aufrechtes und verkleinertes Scheinbild, welches der Linse näher liegt als der Brennpunkt.

B. Fällt das Licht auf die convexe Seite der Linse, so ist $-r'$ für r' zu setzen, und man hat

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right).$$

α) Wenn nun $r' < r$, so ist $\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$, folglich auch f negativ.

Setzt man daher $- f$ statt f, so folgt:

$$a' = - \frac{f}{\frac{f}{a} + 1} \text{ und } b' = \frac{b}{\frac{a}{f} + 1}.$$

Es findet also hier genau dasselbe statt, wie im zuletzt betrachteten Falle; die Linse ist auch diesmal eine Zerstreuungslinse.

β) Ist dagegen $r < r'$, so ist f positiv, und es verhält sich Alles wie bei der biconvexen Linse.

IV. Für die biconcave Linse endlich sind beide Radien negativ zu setzen. Es ist dann:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = - (n - 1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$$

und

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} = - (n - 1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \frac{a}{b}.$$

Setzt man also auch hier $- f$ für f, so folgt:

$$a' = - \frac{a}{\frac{a}{f} + 1} \text{ und } b' = \frac{b}{\frac{a}{f} + 1}.$$

Die Vereinigungsweite a' ist daher stets negativ und kleiner als a; ferner ist b' stets positiv, aber ebenfalls immer kleiner als b. Diese Linse ist somit unter allen Umständen eine Zerstreuungslinse, und gibt stets ein aufrechtes verkleinertes Scheinbild, welches der Linse näher liegt, als der Brennpunkt.

X.

An die Formeln, welche weiter oben unter Berücksichtigung der Dicke der Linse erhalten wurden, lassen sich noch einige Bemerkungen anknüpfen, welche hier wohl am Platze sein dürften.

Es wurde früher bemerkt, dass in jenen Formeln die mit f bezeichnete Constante nicht in voller Strenge die Vereinigungsweite parallel einfallender Strahlen bedeutet. Es möge nun Φ^0 dieselbe bezeichnen, so ist $a' = \Phi^0$, wenn $a = \infty$, und man findet aus der Schlussgleichung des Artikels 3

$$\frac{1}{\Phi^0} = \frac{(n - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \frac{(n - 1)^2}{n} \cdot \frac{d}{rr'}}{1 - \frac{n - 1}{n} \cdot \frac{d}{r}}$$

Kehrt man die Linse um, so vertauschen die Radien r und r' ihre Rollen und man hat, wenn nunmehr die Vereinigungsweite paralleler Strahlen mit Φ' bezeichnet wird:

$$\frac{1}{\Phi'} = \frac{(n - 1)\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r}\right) - \frac{(n - 1)^2}{n} \cdot \frac{d}{rr'}}{1 - \frac{n - 1}{n} \cdot \frac{d}{r'}}$$

Durch Vergleichung dieser Ausdrücke findet man:

$$\frac{\Phi^0}{\Phi'} = \frac{1 - \frac{n - 1}{n} \cdot \frac{d}{r}}{1 - \frac{n - 1}{n} \cdot \frac{d}{r'}}$$

Wie man sieht, ist dieses Verhältniss, so lange man auf die Dicke d Rücksicht nimmt, von der Einheit verschieden, und hat nur für $d = 0$ den gewöhnlich angenommenen Werth der Einheit. Die Abweichung ist am grössten für concavconvexe Linsen, bei welchen die beiden Flächen sehr stark gekrümmt, und die Dicke sehr bedeutend ist. Denn da alsdann die Radien entgegengesetzte Zeichen haben und sehr klein sind, so weichen der Zähler und Nenner des obigen Bruches im entgegengesetzten Sinne am meisten von der Einheit ab, und es wird daher der Unterschied zwischen Φ^0 und Φ' in diesem Falle am beträchtlichsten sein.

Dieser Umstand verdient bemerkt zu werden, weil sich daraus ergibt, was oft nicht gehörig hervorgehoben wird, dass, abgesehen von der sphärischen und chromatischen Abweichung, die Wirkung der Linse, bei parallelen, und wie sich von selbst versteht, ebenso auch bei divergirend eintretenden Strahlen durch Umkehrung der Linse, schon in Folge ihrer Dicke, eine unter Umständen sehr merkliche Modification erleidet.

XI.

Die zweite Bemerkung, welche ich noch anknüpfen wollte, bezieht sich auf die Formeln für die Vergrösserung der einzelnen Linse, zu deren Bestimmung die früher erhaltenen Formeln sich ebenfalls unmittelbar eignen.

Multiplizirt man nämlich die Gleichung (II) des Artikels 3 mit $\frac{b'}{a'}$, und addirt sie dann zu (I), so ergibt sich:

$$\frac{ab'}{a'b} = -1 - \frac{d}{n}\left(\frac{1}{a'} - \frac{n-1}{r'}\right)$$

Will man hieraus a' eliminiren, so entwickle man diese Grösse aus der Gleichung (I) des Artikels 3, und setze sie ein. Man findet dann:

$$\frac{ab'}{a'b} = -1 - \frac{\left(\frac{n-1}{r} - \frac{1}{a}\right)\frac{d}{n}}{1 + \left(\frac{1}{a} - \frac{n-1}{r}\right)\frac{d}{n}}$$

oder auch:

$$\frac{ab'}{a'b} = -\frac{1}{1 - \left(\frac{n-1}{r} - \frac{1}{a}\right)\frac{d}{n}} \quad \ldots\ldots (1)$$

Es zeigt sich hier der bemerkenswerthe Umstand, dass dieses Verhältniss nur vom Radius r der Vorderfläche, und nicht von r' abhängt.

Für parallel einfallende Strahlen hat man:

$$\frac{a'b}{ab'} = -\frac{1}{1 - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{d}{r}}$$

Dies vorausgesetzt, ist hier nun vor Allem zu unterscheiden, ob die Linse die Wirkung eines Mikroskopes, oder eines Fernrohres haben soll. Benützt man nämlich die Linse als Mikroskop, so ist der Begriff der Vergrösserung ein ganz anderer, als jener für das Fernrohr. Indem man dort als Vergrösserung das Verhältniss der Sehwinkel ansehen muss, unter welchen der Gegenstand mit freiem Auge in der deutlichen Sehweite, und dann durch die Lupe betrachtet, mit seinem, ebenfalls in der deutlichen Sehweite liegenden Scheinbilde erscheint. Es werden also hierbei die beiden Grössen auf gleiche Entfernungen vom Auge bezogen. Setzt man nun die deutliche Sehweite $= w$, so erscheint der Gegenstand b unter dem Winkel $\frac{fb}{w}$. Durch die Lupe betrachtet erscheint das Bild in der Weite $a' = -w$, und hat die Grösse b'. Es sei die Entfernung des Gegenstandes von der Lupe $a = E$, so hat man nach der oben entwickelten Formel (1) die Gleichung:

$$\frac{b'}{w} = \frac{b}{E - \left[(n-1)\frac{E}{r} - 1\right]\frac{d}{n}}$$

Nun ist aber das Verhältniss der beiden Sehwinkel, unter welchen der Gegenstand durch die Lupe, und direkt gesehen wird, also $\frac{b'}{w} : \frac{b}{w}$ die Vergrösserung, welche durch M bezeichnet werden möge. Man hat daher den Ausdruck:

$$M = \frac{w}{E - \left[(n-1)\frac{E}{r} - 1\right]\frac{d}{n}} \quad \ldots\ldots (2)$$

Dieser Ausdruck ist von dem üblichen ziemlich verschieden, insbesondere von jenem, in welchem auf die Dicke der Linse keine Rücksicht genommen ist, und vorausgesetzt wird, der Gegenstand werde in den Brennpunkt gestellt, oder das Auge sei das sogenannte Normalauge, welches parallele Strahlen auf der Netzhaut zu einem Bilde vereinigt, d. h. ein unendlich weitsichtiges Auge. Diese Voraussetzung wird bekanntlich den üblichen Formeln meistens stillschweigend zu Grunde gelegt, und bewirkt eine grosse Vereinfachung der Rechnung. Fügt man sich dieser Annahme, so ist $E = f$ zu setzen; vernachlässigt man ferner die Dicke, so findet man die übliche Formel:

$$M = \frac{w}{f}$$

Es ergibt sich aber daraus, wenn man $d = 0$ setzt, dass die Vergrösserung sehr nahe mit dem Verhältnisse $\frac{w}{E}$ constant bleibt, was ungefähr für jedes Auge der Fall sein wird, indem bei einer kürzeren Sehweite auch die Entfernung E kleiner wird.

XII.

Wenn nun aber die Linse als Fernrohr dient, so kann man begreiflich nicht annehmen, dass der Gegenstand in die deutliche Sehweite gebracht werden könne. Dann muss das Verhältniss der Sehwinkel, unter welchem das Bild in der Entfernung $a' = -w$, und der Gegenstand in seiner wirklichen Entfernung $a = \mathbf{E}$ erscheint, als die Vergrösserung angesehen werden. Es ist also:

$$M = \frac{b'}{w} : \frac{b}{\mathbf{E}} = \frac{b'\mathbf{E}}{bw}$$

oder, da nach der Formel (1) des vorigen Artikels

$$\frac{b'\mathbf{E}}{-bw} = -\frac{1}{1 - \left(\frac{n-1}{r} - \frac{1}{E}\right)\frac{d}{n}}$$

ist, so folgt:

$$M = \frac{1}{1 - \left(\frac{n-1}{r} - \frac{1}{E}\right)\frac{d}{n}}$$

worin, wie man sieht, die deutliche Sehweite nicht erscheint, so dass die Lupe als Fernrohr für jedes Auge dieselbe Vergrösserung zeigt. Setzt man $\mathbf{E} = \infty$, was wohl immer gestattet ist, und was, wenn es nicht stattfindet, eine zu starke Vergrösserung gibt, so hat man:

$$M = \frac{1}{1 - \frac{n-1}{r} \cdot \frac{d}{n}}$$

Ist die Linsendicke gegen r einigermassen beträchtlich, so wird M von der Einheit schon merklich verschieden sein, während die Vernachlässigung der Dicke ($d = o$) eine Vergrösserung $= 1$ geben wird, so dass die gewöhnliche Betrachtungsweise für diesen Fall ganz unzulänglich erscheint. Dies ist z. B. der Fall bei dem schon von **Huyghens** vorgeschlagenen, und später wieder von Professor **Steinheil** in Anregung gebrachten sogenannten „kleinen Fernrohr", welches jetzt in Wien von **Plössl** u. a. Optikern verfertigt wird. Für dieses so einfache und interessante Instrument ist es also unmöglich, eine Theorie mit der üblichen Vernachlässigung der Dicke herzustellen. Es zeigt entfernte Gegenstände in der That vergrössert, während man, wie bemerkt, für $d = o$ die Vergrösserung $M = 1$ erhält.

XIII.

Vielleicht hat es einiges Interesse zu sehen, durch welche Betrachtung man zu der Construction einer Linse, von soeben beschriebener Eigenschaft, gelangen könne. Was zunächst die Grösse und Zeichen der Radien betrifft, welche die Linse haben muss, so ergibt sich auf der Stelle, dass dieselben für ein sehr weit entferntes Objekt ein Scheinbild geben müsse, was bei keiner anderen Linsenform, als bei dem Meniskus der Fall ist. Dies ergibt sich indessen auch aus den früheren Formeln; denn man erhält durch das oben beschriebene Eliminationsverfahren zwischen den Gleichungen (I) und (II) die Gleichung:

$$\frac{ab'}{a'b} = -1 - \frac{d}{n}\left(\frac{1}{a'} - \frac{n-1}{r'}\right)$$

Setzt man hierin $a' = -w$, und bemerkt, dass der Ausdruck linker Hand $= -M$ ist, so hat man:

$$M = 1 + \frac{d}{n}\left(\frac{1}{-w} - \frac{n-1}{r'}\right) \; \ldots\ldots (1)$$

woraus folgt:

$$r' = -\frac{n-1}{(M-1)\frac{n}{d}+\frac{1}{w}}$$

und

$$r = \frac{(n-1)\,Md}{n\,(M-1)+\frac{Md}{E}}$$

Man sieht also, dass r' negativ, und r positiv sein muss, wenn man eine Vergrösserung $M > 1$ erhalten will. Für ein negatives r, also für eine biconcave Linse, erhielte man eine Verkleinerung $M < 1$. Demnach muss, wie bemerkt, die Linse als vergrösserndes Fernrohr ein Meniskus, und als verkleinerndes eine biconcave Linse sein, und zwar wäre im letzteren Falle, wenn man $-r$ für r setzt, die Vergrösserung (resp. Verkleinerung)

$$M = \frac{1}{1+\frac{n-1}{r}\cdot\frac{d}{n}+\frac{1}{E}\cdot\frac{d}{n}}$$

Wie man sieht, ist, um für M einen Werth zu erhalten, der merklich unter der Einheit liegt, eine sehr stark gekrümmte Vorderfläche, und eine grosse Dicke der Linse erforderlich. Die im Artikel 7 gezeichnete Linse bildet, in den angegebenen Abmessungen, ein solches sogenanntes kleines Fernrohr. Nimmt man die deutliche Sehweite $w = 120'''$, und setzt, wie a. a. O.

$$r = +\,17\overset{'''}{.}5 \qquad n = 1{\cdot}529$$
$$r' = -\,9\overset{'''}{.}6 \qquad d = 20\overset{'''}{.}6,$$

so erhält man aus der Formel (1) die Vergrösserung

$$M = 1{\cdot}63 \text{ mithin nahezu } \tfrac{5}{3}.$$

Aus den oben für r und r' angegebenen Formeln sieht man, dass auf r' die Sehweite, auf r aber die Entfernung E, und auf beide zugleich, die Vergrösserung M bestimmenden Einfluss hat.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man für $E = \infty$ den Radius der Vorderfläche aus der Formel:

$$r = \frac{M}{M-1}\cdot\frac{n-1}{n}\,d$$

erhält.

Man kann den oben beschriebenen Meniskus natürlich auch als Mikroskop gebrauchen, wenn man die Vorderfläche zur Hinterfläche macht. Um die Vergrösserung, die übrigens — bei grosser Deutlichkeit des Bildes — nur gering ist, zu berechnen, muss man in der Gleichung (2) des vorigen Artikels

$$r = -\,9\overset{'''}{.}6$$
$$r' = +\,17\overset{'''}{.}5$$

setzen.

XIV.

Die Resultate der bisherigen Erörterungen liessen sich nun in gleicher Weise auch benützen, um, unter Rücksicht auf die Dicke der Linse, die Grösse des Gesichtsfeldes, und die Lage des vortheilhaftesten Augenpunktes, su ermitteln. Wenn diese beiden Dinge ebenfalls zur Kenntniss der einzelnen Linse gehören, so ist nicht zu verkennen, dass noch ungleich wichtigere Erörterungen ihre schon so hoch ausgebildete Theorie bilden helfen, und dass hier mein Zweck nur darin bestehen konnte, in einer für die Studierenden geeigneten Darstellung auf einen einzigen Punkt jener Theorie hinzuweisen, der seiner Natur nach, zu den Elementen gehörig, durch die mehrfach erwähnten Männer der Wissenschaft, in jüngerer Zeit eine so wesentliche Vervollkommnung erfahren hat, ohne dass sie, meines Wissens, allgemeiner bekannt geworden wäre, oder in elementaren Schriften die entsprechende Berücksichtigung gefunden hätte.

V. Adam.