Anwendung

der

stereometrischen Lehrsätze auf die Berechnung des Inhaltes verschiedener Körperformen

von

V. Adam.

Obgleich dem mathematischen Unterrichte an den Gymnasien keine sehr weiten Grenzen gesteckt sind und derselbe zunächst den Zweck der allgemeinen Bildung im Auge behalten muss, so könnte es doch kaum gebilliget werden, wenn man gewisse Anwendungen auch von denjenigen allgemeinen Lehren gänzlich ausschliessen wollte, welche dem Schulplane gemäss in den Gymnasialunterricht aufgenommen worden sind. Es ist hier dasselbe der Fall, wie in vielen anderen Gegenständen des Wissens, dass nämlich der Lernende nur dann zur selbständigen Auffassung gelangt und den Zweck der Theorieen zu schätzen weiss, wenn er sie auf concrete Fälle anzuwenden gelernt hat. Sind nun aber diese Anwendungen zugleich von der Art, dass sie, ohne einen grösseren Aufwand theoretischer Kenntnisse zu erfordern, sich auf Gegenstände beziehen, welche vom praktischen Nutzen sind, so scheinen dieselben wohl der Berücksichtigung beim mathematischen Unterrichte auch an Gymnasien werth zu sein. Von dieser Bemerkung ausgehend beabsichtige ich hier einige mehr oder weniger bekannte von mir schon vor mehreren Jahren zusammengestellte Anwendungen der allgemeinen Sätze der Stereometrie zu zeigen, welche ausschliesslich mit Hilfe der elementaren Mathematik sich erledigen lassen und für die Studierenden von mannigfachem Interesse sind, zumal an Beispielen dieser Art in fast allen Lehrbüchern der Stereometrie ein fühlbarer Mangel besteht. Ich gehe hierbei von den Regeln für die Inhaltsbestimmungen der einfacheren, wenn auch nicht regelmässigen Körperformen aus, bestimme vermittelst derselben die Inhalte polyedrischer und einiger runden Körper, welche durch ein mathematisches Gesetz definirt sind, leite hierauf eine bekannte allgemeine Regel für die näherungsweise Bestimmung des Inhaltes unregelmässiger Körper her, und werde zum Schlusse auch noch die ebenfalls in das Gebiet der Stereometrie zu rechnende Aufgabe der Bestimmung zweier mittleren Proportionallinien folgen lassen, welche bekanntlich mit der Auflösung der altberühmten Aufgabe der Verdoppelung des Würfels und der Dreitheilung eines Winkels im nächsten Zusammenhange steht.

I.

Wenn es sich um die Bestimmung eines kubischen Raumes handelt, so müssen selbstverständlich die dazu dienenden linearen Abmessungen durch eine bestimmte Einheit, Klafter, Fuss, Zoll ausgedrückt, und es muss bestimmt sein, ob der Inhalt durch die Kubi jener Einheiten oder durch andere übliche Hohlmaasse bestimmt werden soll. Häufig ist das letztere der Fall, und man wünscht die Anzahl der Eimer oder Maasse zu kennen, welche der zu berechnende hohle Körper fasst; häufig will man das Gewicht kennen, welches derselbe besitzt, wenn er mit Wasser etc. angefüllt ist. Da hierbei gewisse Zahlen öfter vorkommen, so mögen sie hier vorausgeschickt werden.

Was zunächst das Gewicht eines Kubikfusses Wasser bei dessen grösster Dichte betrifft, so kann man dasselbe aus dem Gewichte eines Kubikmeters Wasser ableiten, indem man hiezu die folgenden Angaben benützt.

Gewicht eines Kubikmeters Wasser . . . . = 1000 Kilogramme
Ein Wiener Fuss . . . . = 0·3161109 mètre.
Ein Wiener Pfund . . . . = 0·5600122 Kilogramme.

Est ist somit das Gewicht eines Kubikfusses Wasser $= \frac{(0{\cdot}3161109)^3 \; 1000}{0{\cdot}5600122}$ W. Pfd.

= 56·4054 Wiener Pfund.

Nach einer alten Bestimmung von Vega ist

Eine Wiener Mass . . . . = 0·0448 Kubikfuss.

Daraus findet man

Das Gewicht einer Wiener Mass Wasser . . . = 2·5270 Wiener Pfunde.
Gewicht eines Eimers Wasser . . . . = 101·0784 „ „

Noch mag bemerkt werden, dass

Ein Wiener Metzen . . . . = 1.9471 Kubikfuss ist.

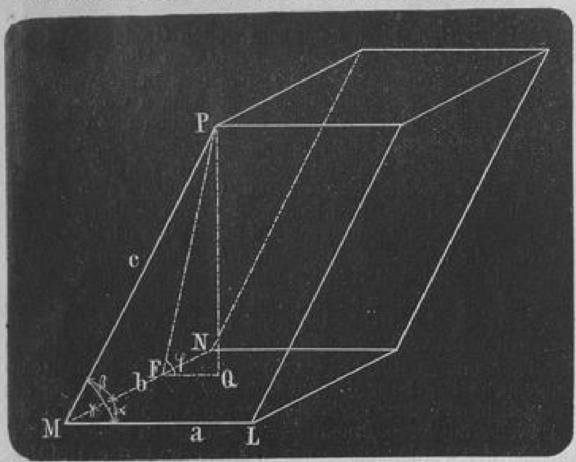
II.

Vorerst muss hier, des Zusammenhanges wegen, die Formel zur Berechnung des Inhaltes einer parallel zur Grundfläche abgestutzten Piramide, welche in allen Lehrbüchern zu finden ist, hingestellt werden. Es ist bekanntlich, wenn die untere Fläche mit S, die obere parallele mit s, und ihr beiderseitiger Abstand mit h bezeichnet wird, der Kubikinhalt

$$J = \frac{h}{3}\left[s + \sqrt{sS} + S\right] \ldots\ldots (1)$$

Die hier angegebene Formel gilt auch für die Berechnung eines abgestutzten Kegels.

In manchen Fällen sind die Grundfläche und die Höhe nicht direkt gegeben, sondern müssen erst aus anderen gegebenen Stücken berechnet werden.



Angenommen z. B., es solle der Inhalt eines schiefwinkeligen Parallelopipeds berechnet werden, wovon nur die drei eine Ecke bildenden Kanten a, b, c und die Winkel α, β, γ, welche dieselben miteinander bilden, gegeben sind, so kann die Berechnung wie folgt geschehen.

Um die Höhe $PQ = h$ zu finden, lege man durch dieselbe eine senkrechte Ebene auf die Kante MN, welche mit den Seitenflächen die Durchschnitte FP und FQ bildet, die den Winkel $PFO = \varphi$ einschliessen. Nun ist

$$PF = c \sin\beta,\; h = PF \sin\varphi = c \sin\beta . \sin\varphi,$$

ferner ist φ ein Winkel des sphärischen Dreieckes an der Ecke M, dessen Seiten α, β, γ sind, und welcher der Seite γ gegenüber liegt. Nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie hat man

$$\sin\varphi = \frac{2}{\sin\alpha \sin\beta}\sqrt{\sin s . \sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}$$

$$\text{wobei } s = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \text{ bedeutet.}$$

Nachdem die Grundfläche

$$S = ab \sin\alpha \text{ ist,}$$

so ist der Inhalt

$$J = 2\, abc \sqrt{\sin s . \sin(s-\alpha), \sin(s-\beta), \sin(s-\gamma).}$$

Daraus ergibt sich für $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$, wegen $\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, die Formel $J = abc$.

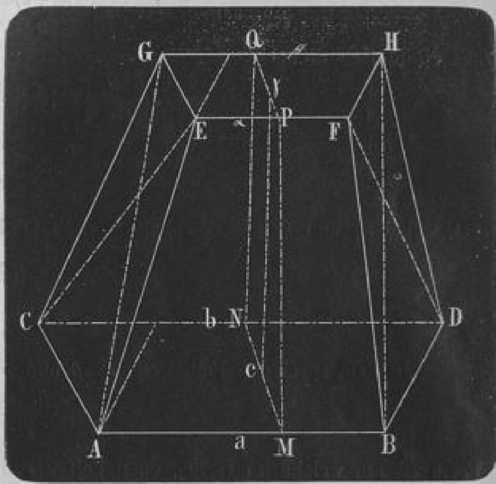
Ist ein dreiseitiges Prisma an beiden Enden schief abgeschnitten, bezeichnen a, b, c, die parallelen Kanten und ist S der Inhalt des auf denselben senkrechten Querschnittes, so hat man bekanntlich die Gleichung

$$J = \frac{a+b+c}{3}\ S.$$

III.

Auf die vorhin angeführten Regeln lässt sich die Berechnung aller polyedrischen Körper zurückführen. Je nach der speziellen Beschaffenheit derselben aber kann man für den Inhalt in gewissen Fällen Ausdrücke aufstellen, welche ihrer einfachen Zusammensetzung wegen bemerkenswerth sind.

Einer dieser Fälle ist der folgende.



Ein von sechs Ebenen eingeschlossener Körper hat ein Paralleltrapez $ABCD$ zur Grundfläche und ist oberhalb ebenfalls durch ein zur Grundfläche paralleles Trapez begrenzt, welches jedoch der Grundfläche nicht ähnlich ist.

Gegeben sind die Kanten $AB=a$, $CD=b$, $EF=\alpha$, $GH=\beta$, ferner sind die Abstände der parallelen Kanten $MN=c$, $PQ=\gamma$ gegeben.

Der Abstand der Grundflächen ist $=h$, man soll den Kubikinhalt berechnen.

Man lege durch die vier parallelen Kanten AB, CD, EF, GH, eine senkrechte Ebene $MNPO$.

Was nun zunächst die sechs Stücke a, b, c, α, β, γ, betrifft, so sind dieselben, wie sich leicht zeigen lässt, nich von einander unabhängig, so dass man nur fünf derselben willkührlich annehmen darf. Zieht man nämlich durch A und E Parallelen, beziehungsweise zu BD und FH, so schneiden diese von den Grundflächen ähnliche Dreiecke ab, worin $b-a$ und $\beta-\alpha$ homologe Seiten und wovon c und γ die Höhen sind, so dass also die Proportion stattfindet

$$b-a : \beta-\alpha = c : \gamma$$

oder

$$\frac{\beta-\alpha}{\gamma} = \frac{b-a}{c}$$

Nun lässt sich der Körper auf doppelte Art in schief abgeschnittene dreiseitige Prismen zerlegen, nämlich dadurch, dass man einmal durch AB und GH und dann durch CD und EF Diagonalebenen legt. Wird auf beide Arten die Berechnung durchgeführt, so erhält man

$$\text{Prisma } ABCDGH = MNQ\ \frac{AB+CD+GH}{3} = \frac{h}{6} c\ (a+b+\beta)$$

$$\text{„}\quad ABEFGH = MPQ\ \frac{AB+EF+GH}{3} = \frac{h}{6}\gamma\ (a+\alpha+\beta)$$

folglich ist

$$J = \frac{h}{6}\left[(a+b+\beta)\ c + (\alpha+\beta+a)\ \gamma\right]$$

Durch die zweite Art der Zerlegung ergibt sich

$$\text{Prisma } CDEFGH = \frac{h}{2}\gamma .\ \frac{\alpha+\beta+b}{3}$$

$$\text{„}\quad ABCDEF = \frac{h}{2}\ c .\frac{a+b+\alpha}{3}$$

und daher

$$J = \frac{h}{6}\left[(a+b+\alpha)\ c + (\alpha+\beta+b)\ \gamma\right]$$

Da der Unterschied der beiden Ausdrücke für J offenbar gleich Null sein muss, so hat man die Gleichung

$$(\beta-\alpha)\ c+(a-b)\gamma=0 \text{ oder } \frac{\beta-a}{\gamma}=\frac{b-a}{c}$$

was mit der oben erhaltenen Bedingung übereinstimmt.

Die Gleichung für J kann in anderer Weise ausgedrückt werden; da nämlich, wenn mit S die untere und mit s die obere Grundfläche bezeichnet wird,

$$\frac{a+b}{2}c=S, \quad \frac{\alpha+\beta}{2}\gamma=s$$

ist, so hat man

$$J=\frac{h}{3}\left[S+s+\frac{\beta c+a\gamma}{2}\right]=\frac{h}{3}\left[S+s+\frac{b\gamma+\alpha c}{2}\right];$$

hieraus ergibt sich wieder

$$J=\frac{h}{3}\left[S+s+\frac{(a+b)\gamma}{4}+\frac{(\alpha+\beta)c}{4}\right]$$

Wird

$$\frac{(a+b)\gamma}{2}=S_1, \quad \frac{(\alpha+\beta)c}{2}=s_1$$

gesetzt, wobei S_1 und s_1 wieder Inhalte von Paralleltrapezen sind, so hat man

$$J=\frac{h}{3}\left[S+s+\frac{S_1+s_1}{2}\right].$$

IV.

In dem speciellen Fall, wenn $\alpha=\beta$ und $\gamma=0$ ist, nimmt die oben erhaltene Bedingungsgleichung

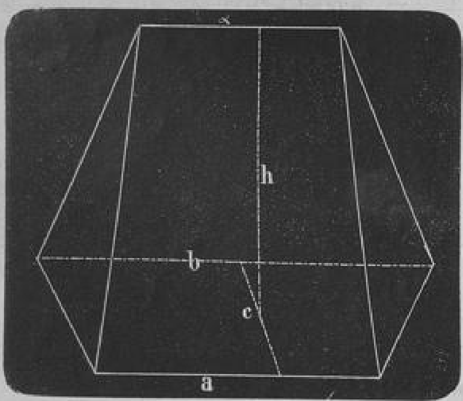
$$\frac{\beta-\alpha}{\gamma}=\frac{b-a}{c}$$

die Form $\frac{0}{0}$ an, welche im vorliegenden Fall wesentlich unbestimmt ist, also die rechte Seite jeden beliebigen Wert haben kann, was nicht der Fall wäre, wenn man blos $\alpha=\beta$ aber nicht $\gamma=0$ setzen würde, denn dann müsste auch $a=b$ sein.

Ist nun aber auch $\gamma=0$, so erhält man einen keilförmigen Körper, dessen obere zur Grundfläche parallele Kante α ist, und dessen Inhalt durch die Formel

$$J=\frac{h}{6}\left[a+b+\alpha\right]=\frac{h}{3}\left[S+\frac{1}{2}\alpha c\right] \quad \ldots\ldots (1)$$

bestimmt, worin das Produkt αc wieder als ein Rechteck betrachtet werden kann.



Diese Resultate lassen sich zur Berechnung eines Körpers von viel allgemeinerer Gestalt benutzen.

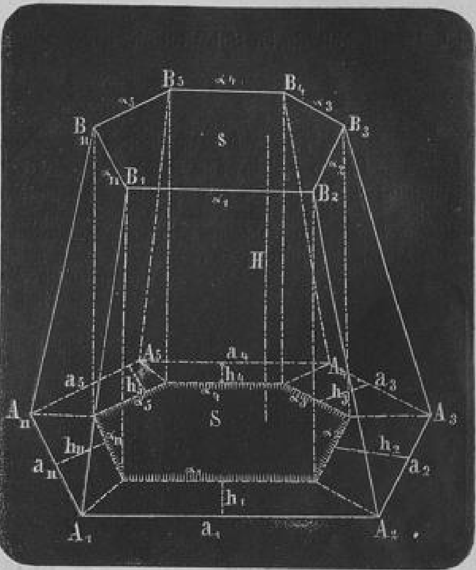
Man denke sich, die Grundfläche eines Körpers sei ein beliebiges Polygon, und ihr parallel werde der Körper durch ein anderes Polygon begrenzt, dessen Seiten jenen der Grundfläche einzeln parallel sind, so dass die übrigen Begränzungsflächen insgesammt Paralleltrapeze werden.

Was nun zunächst die als gegeben zu betrachtenden Stücke der beiden Polygone betrifft, so dürfen dieselben auch hier nicht ganz unabhängig von einander angenommen werden, weil die Winkel in beiden Polygonen einander gleich sein sollen.

Es versteht sich übrigens von selbst, dass im Allgemeinen auch hier die beiden Polygone nicht ähnlich zu sein brauchen.

Will man nun einen solchen Körper aus seinen beiden Grundflächen und seiner Höhe berechnen, so kann dies entweder vermittelst der Seiten und Winkel der Polygone allerdings auf eine etwas weitläufige Art, oder dadurch geschehen, dass man den Körper in ein Prisma, und so viele keilförmige Ergänzungskörper von der so eben betrachteten Form zerlegt, als die Grundfläche Seiten hat.

Es seien a_1, a_2, a_3 . . . a_n die Seiten des untern, und α_1, α_2, α_3 . . . α_n jene des oberen Vieleckes, ferner S und s die Inhalte beider Vielecke, und H ihr senkrechter Abstand. Man projicire vermittelst senkrechter oder schiefer Linien das Vieleck $B_1\ B_2\ B_3$ . . . . B_n auf die Ebene des Vieleckes $A_1\ A_2\ A_3$ . . . . A_n, so wird die Projektion mit dem oberen Vieleck identisch, und es werden die Seiten auch in der Projektion jenen des untern Vieleckes parallel sein. Die Abstände je zweier paralleler Seiten seien der Ordnung nach $h_1\ h_2\ h_3$ . . . . h_n, und zwar seien dieselben positiv, wenn die entsprechende Projektion einer Seite gegen das Innere der Figur, und die ihr parallele Seite der Grundfläche gegen das Äussere fällt; im entgegengesetzten Falle aber sei der betreffende Abstand h mit dem negativen Zeichen zu nehmen. Dies vorausgesetzt, hat man nun die folgende allgemeine Formel.



Es ist:

$$J = sH + \frac{H}{3}\left[\frac{a_1+\alpha_1}{2}\,h_1 + \frac{a_2+\alpha_2}{2}\,h_2 + \ldots + \frac{a_n+\alpha_n}{2}\,h_n + \frac{\alpha_1\,h_1 + \alpha_2\,h_2 + \ldots \alpha_n\,h_n}{2}\right]$$

Nun ist aber:

$$\frac{a_1+\alpha_1}{2}\,h_1 + \frac{a_2+\alpha_2}{2}\,h_2 + \ldots\ldots \frac{a_n+\alpha_n}{2}\,h_n = S - s\ .$$

Folglich kann man schreiben:

$$J = \frac{H}{3}\left[s + 2\,S - \frac{a_1\,h_1 + a_2\,h_2 + \ldots\ldots + a_n\,h_n}{2}\right]$$

$$J = \frac{H}{3}\left[S + 2\,s + \frac{\alpha_1\,h_1 + \alpha_2\,h_2 + \ldots + \alpha_n\,h_n}{2}\right]$$

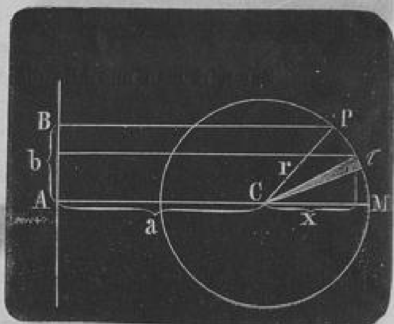
Die Summe $a_1\,h_1 + a_2\,h_2 + \ldots + a_n\,h_n$ behält offenbar für jede Lage der Figur s und S, denselben Werth, soferne die Seiten derselben parallel bleiben, und die Zeichen der h gehörig berücksichtigt werden.

Wird $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$ und s. f. $\alpha_n = a_n$ also auch $s = S$, so erhält man:

$$J = H\,S,$$ wie es sein soll.

V.

Die weiter oben für den Inhalt eines keilförmigen Körpers erhaltene Regel ist noch einer andern Anwendung fähig, und zwar bei der Berechnung von **runden Körpern**, welche nach der Art ihrer Erzeugung sich passend in Elemente von keilförmiger Gestalt zerlegen lassen. Dies ist z. B. der Fall bei dem Körper, welcher durch die Rotation eines Kreisbogens um eine nicht durch dessen Centrum gehende Axe entsteht.



Der rotierende Kreisbogen sei MP, und der ganze zu berechnende Körper wird von der Figur $ABMP$ beschrieben. Man kann nun diesen Körper aus zwei Theilen zusammengesetzt denken, nämlich aus dem abgekürzten Kegel, den das Trapez $ABPC$ beschreibt und aus dem Körper, welchen der Sektor MCP erzeugt, der von einer Ebene, einer Kegelfläche und einer Ringfläche eingeschlossen ist, und der sich in den Kreis ausschärft, welchen der Punkt C beschreibt.

Es sei

$$AC = a,\ CM = r,\ AB = b.$$

Was nun zunächst den Inhalt J_1 des abgekürzten Kegels betrifft, so ergibt sich derselbe unmittelbar aus der im Artikel II entwickelten Formel

$$J_1 = \frac{h}{3}\left[s + \sqrt{s\,S} + S\right]$$

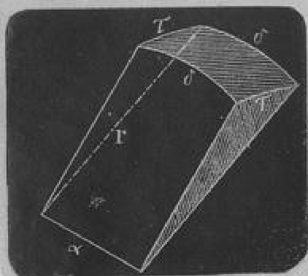
wenn bemerkt wird, dass hier

$$h = b, \qquad s = \pi\, a^2, \qquad S = \pi\,(a + \sqrt{r^2 - b^2})^2$$

ist. Man erhält durch Substitution dieser Werthe

$$J_1 = \pi b \left[a^2 + a \sqrt{r^2 - b^2} + \frac{r^2 - b^2}{3} \right]$$

Der zweite Bestandtheil des gesuchten Raumes lässt sich auf folgende Art berechnen. Man denke sich den Bogen *MP* in eine grosse Anzahl gleicher Theile, deren jeder τ ist, getheilt und von C nach jeden Theilungspunkt Radien gezogen, so wird das Bogenelement τ eine unendlich schmale Ringfläche und seine Radien Kegelflächen beschreiben, welche eine konische Schichte einschliessen, die wieder in unendlich viele gleiche Theile auf folgende Art zerlegt werden kann. Legt man nämlich durch die drei Axen unter gleichen sehr kleinen Winkeln, deren Bogen $= \delta$ ist, Ebenen, so werden diese die bezeichnete Schichte in kleine



keilförmige Elemente von der Höhe r theilen, wovon man jedes nach der Formel (1) der Art IV berechnen kann. Man muss zu dem Ende setzen

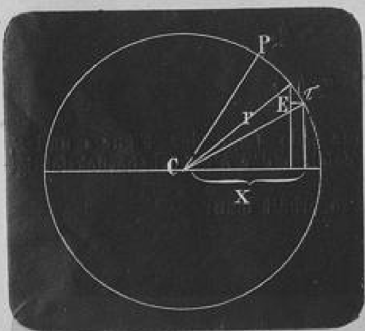
$$h = r, \; S = \tau\delta, \; c = \tau$$

und erhält für den Inhalt jenes Elementes den Ausdruck

$$\frac{r}{3} \left[\tau\delta + \frac{\alpha\,\tau}{2} \right]$$

Summirt man nun alle diese Elemente, so bleibt dabei τ konstant, die Summe der δ aber macht die Peripherie eines Kreises aus, dessen Radius $a + x$ ist, wenn man die Abscisse des Punktes auf den Kreis mit x bezeichnet. Die Summe der α macht die Peripherie eines Kreises aus, dessen Radius a ist. Es ist daher der Inhalt jener konischen Schichte

$$\frac{r}{3} \left[\tau\,(a + x)\; 2\,\pi + \frac{\tau}{2} .\; 2\; a\; \pi \right] = a r\,\pi\,\tau + \frac{1}{3}\, r\,\pi\, .\, x\,\tau$$



Um nun die Summe der Inhalte aller konischen Schichten zu erhalten, müssen die entsprechenden Werte derselben summirt werden, wobei aber x veränderlich ist, was die Summirung der Produkte $x\tau$ erschwert. Man kann aber diese Schwierigkeit umgehen, wenn man jenes Produkt durch eine andere Grösse ausdrückt. Hierzu eignet sich am besten die der Aenderung τ des Bogens entsprechende Aenderung ε der zur Abscisse x gehörigen Kreisordinate. Es findet nämlich die Proportion statt:

$$\tau : \varepsilon = r : x \text{ woraus } x\tau = r\varepsilon.$$

Der Inhalt der konischen Schichte lässt sich also wie folgt, schreiben

$$a\,\pi\, r\,\tau + \frac{2}{3}\,\pi\, r^2\, \varepsilon$$

Summirt man nun alle diese Schichten, so gibt das erste Glied dieses Ausdruckes

$$a\,\pi\, r.\, r \;arc.\ \sin.\ \frac{b}{r}$$

Aus der Summation des zweiten Theiles ergibt sich

$$\frac{2}{3}\,\pi\, r^2\, b$$

folglich ist der Inhalt J_2 des zweiten Bestandtheiles bestimmt durch den Ausdruck

$$J_2 = a\,\pi\, r^2 \;arc\ \sin\ \frac{b}{r} + \frac{2}{3}\,\pi\, r^2\, b$$

und da $J = J_1 + J_2$ so hat man für das verlangte Volumen die Gleichung

$$J = \pi\, b \left(a^2 + r^2 + a \sqrt{r^2 - b^2} - \frac{b^2}{3} \right) + a\,\pi\, r^2 .\ arc\ \sin\ \frac{b}{r}$$

Wird bloss der vom **äusseren Halbkreis** erzeugte Theil des Raumes verlangt, so muss man $b = r$ setzen, aber J_1 ausser Acht lassen und das Resultat doppelt nehmen. Man erhält dann den Ausdruck

$$\pi\, r^2\, (a\, \pi + \frac{4}{3}\, r) \ldots\ldots (1)$$

Um den vom **inneren Halbkreis** beschriebenen Theil zu erhalten, ist in der obigen Herleitung $-x$ für x zu setzen, und man findet also für den Inhalt der konischen Schichte den Ausdruck

$$\frac{r}{3} \left[\tau\, (a - x)\, 2\, \pi + \pi\, a\, \tau \right] = \frac{r}{3}\, (3\, a\, \pi\, \tau - 2\, \pi\, x\, \tau) = \pi\, a\, r\, \tau - \frac{2}{3}\, \pi\, r^2\, \varepsilon$$

Werden nun wie vorhin die Werthe dieses Ausdruckes summirt, so ergibt sich

$$\pi\, ar.^2\, arc.\, sin\, \frac{b}{r} - \frac{2}{3}\, \pi\, r^2\, b$$

und wenn man hierin $b = r$ setzt und das Resultat doppelt nimmt:

$$\pi\, r^2\, (\pi\, a - \frac{4}{3}\, r) \ldots\ldots\ldots (2)$$

Man kann nun sofort den Inhalt des vom **ganzen Kreis** beschriebenen Ringes durch Addition der Werthe (1) und (2) finden und erhält

$$J = 2\, a\, \pi^2\, r^2$$

Da diesem Ausdrucke die Form $2\, a\, \pi\, .\, \pi\, r^2$ gegeben werden kann, so folgt, dass der Inhalt des Ringes gleich ist dem Umfange des vom Mittelpunkte C beschriebenen Kreises multiplizirt mit dem Inhalte der rotirenden Kreisfläche.

VI.

Im Folgenden wird häufig von einigen Formeln Gebrauch gemacht, welche in der Lehre von den arithmetischen Reihen ihre Begründung finden und die hier wohl als bekannt voraus zu setzen sind. Dieselbe betreffen die Summe der 1., 2., 3. Potenzen der n ersten ganzen Zahlen.

Diese Formeln heissen:

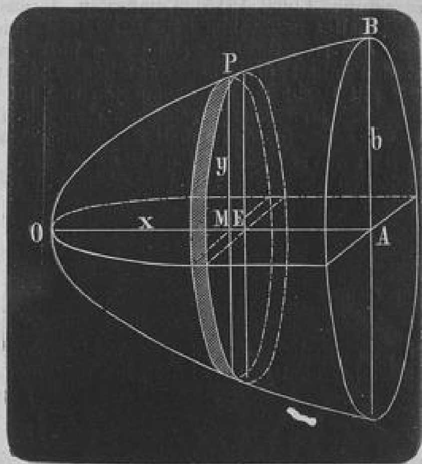
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann man bekanntlich viele Resultate herleiten, welche sonst mit Hilfe der höheren Analysis gefunden werden. Die elementare Lösung von geometrischen und wohl auch mechanischen Aufgaben, welche den Gebrauch jener Formeln nöthig machen, hat den für Anfänger sehr wichtigen Vorteil der grössern Anschaulichkeit und den Umstand für sich, dass die Betrachtung sich gewissermassen fortwährend in der Figur bewegt, was nicht mehr im gleichen Masse der Fall ist, wenn man sich der allgemeinen Resultate einer höheren Rechnungsart bedient. Uibrigens versteht es sich von selbst, dass man auch hierbei nicht zu weit gehen, und die Methode der Summation unendlich kleiner Theile, welche auf die Anwendung jener Formeln sich gründet, nur innerhalb gewisser Schranken im Unterrichte gebrauchen darf.



Um zunächst ein sehr einfaches Beispiel für das angedeutete Verfahren anzuführen, nehme man an, es handle sich um den Inhalt des Abschnittes eines durch Rotation der Parabel um ihre grosse Axe entstehenden parabolischen Conoides.

Die Gleichung der Parabel sei

$$y = \sqrt{p\, x}$$

wobei $OM = x$, $MP = y$.

Die Länge des verlangten Segmentes sei $OA = a$. Ein durch den Punkt M auf die Rotationsaxe OA senkrecht gelegter Schnitt gibt einen Kreis vom Radius y, dessen Inhalt

$$= \pi\, y^2 = \pi .\, p\, x$$

Denkt man sich in der Entfernung ε einen zweiten Kreis gelegt, so schliesst dieser mit dem ersteren eine Schichte ein, welche um so näher als ein Cylinder von der Höhe ε betrachtet werden kann, je kleiner ε ist. Der Inhalt dieses Cylinders ist gleich

$$\pi\, p\, x\, \varepsilon$$

Es sei nun $\varepsilon = \frac{a}{n}$ und n eine sehr grosse ganze Zahl. Legt man durch die Theilpunkte auf AO senkrechte Ebenen, so ergeben sich n Schichten, deren Inhalte gefunden werden, wenn man nach einander $x = \varepsilon, 2\,\varepsilon, 3\,\varepsilon \ldots . n\,\varepsilon$ setzt. Die Summe aller dieser Inhalte ist

$$\pi\, p\, \varepsilon^2 (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \pi p\, \varepsilon^2 \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)$$

oder da $n\varepsilon = a$ ist.

$$\pi\, p \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\, \varepsilon\right)$$

Dieser Ausdruck stellt um so genauer den gesuchten Inhalt dar, je kleiner ε oder also je dünner jede der Elementarschichten ist; er gibt den Inhalt ganz genau, wenn $\varepsilon = o$ gesetzt wird, und es ist daher

$$J = \frac{1}{2}\, \pi\, p\, a^2$$

Setzt man den Radius der Endfläche $AB = b$ so ist

$$\sqrt{p\, a} = b \text{ oder } p\, a = b^2$$

Man hat also

$$J = \frac{1}{2}\, a\, \pi\, b^2$$

woraus hervorgeht, dass der Inhalt des Conoides gleich der Hälfte des Cylinders ist, welcher die Endfläche zur Basis und die Länge des Conoides zur Höhe hat

VII.

Zu den runden Körperformen, welche als durch ein mathematisches Gesetz definirt angesehen werden können, gehören auch die **Weinfässer**, mit deren Berechnung sich Kepler (Stereometria doliorum vinariorum. Lincii 1615), Lambert u. A. ausführlich beschäftigt und verschiedene Regeln für die Bestimmung des Inhaltes angegeben haben. Es lassen sich nämlich je nach dem Grade der verlangten Genauigkeit und nach den Hypothesen, welche man über die Form eines Fasses aufstellen kann, sehr verschiedene Ausdrücke für den Inhalt desselben aufstellen. Hier werden vorzugsweise diejenigen Regeln abgeleitet werden, welche jetzt mit Recht als die genauesten und für die Anwendung empfehlenswerthesten betrachtet werden.

Man gelangt schon zu einer ziemlich brauchbaren Formel, wenn man, das Fass als Rotationskörper vorausgesetzt, für den Inhalt das arithmetische Mittel der Inhalte zweier Cylinder setzt, deren Durchmesser die **Spunttiefe** A und die **Bodenweite** B und **Länge** l ist. Sind diese Dimensionen A, B, l, in **Wiener Zollen** ausgedrückt und bezeichnet N den Inhalt des Fasses in **Wiener Maassen**, so erhält man unter jener Voraussetzung die Formel:

$$N = \frac{\pi}{4}\, l .\, \frac{A^2 + B^2}{2} .\, \frac{1}{12^3 . 0{,}0448}$$

oder also:

$$N = 0{\cdot}005073 .\, (A^2 + B^2).\, l.$$

Würde man dagegen, wie dies wohl auch geschieht, das Fass als aus zwei abgestutzten Kegeln zusammen gesetzt betrachten, so würde man nach der Formel (I) des Art II erhalten

$$N = \frac{\pi}{12}\left[A^2 + AB + B^2\right] \frac{l}{12^3 . 0{,}0448}$$

oder

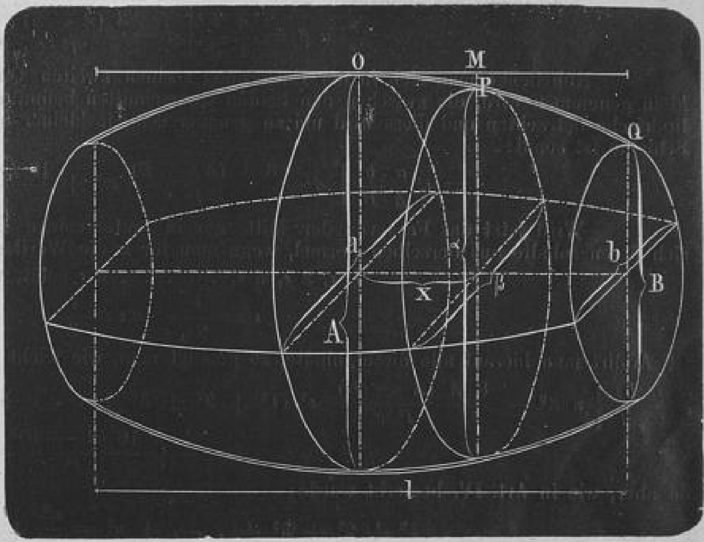
$$N = 0{,}003382\, (A^2 + AB + B^2).\, l$$

Es ist die Berechnung etwas bequemer, wenn man dieser Gleichung die Form gibt:

$$N = 0{,}003382 \left[(A + B)^2 - AB\right] . l.$$

Diese beiden Formeln beruhen jedoch, wie man sieht, auf ziemlich willkürlichen Hypothesen und lassen namentlich für grössere Fässer keine erhebliche Genauigkeit erwarten, insbesondere liefert die letztere der Erfahrung zufolge noch weniger gute Resultate als die erstere. Für ovale Fässer, deren Dauben nicht von gleicher Krümmung sind, lassen sich die Formeln ebenfalls gebrauchen, wenn man die angegebenen Ausdrücke noch mit dem Verhältnisse $\frac{b}{B}$ der horizontalen Axe b und der vertikalen Axe B der elliptischen Bodenfläche multiplicirt. Häufig sind nämlich grössere Fässer theils zur Vermehrung ihrer Festigkeit, theils um den Lagerraum vollständiger zu benutzen, oval gebaut, so dass die zur Längenaxe senkrechten Querschnitte Ellipsen sind, deren grosse Axen vertical stehen, und in der Regel diese Ellipsen insgesammt einander ähnlich sind, so nämlich, dass die grosse Axe zur kleinen durchgehends in demselben Verhältnisse und zwar gewöhnlich im Verhältnisse 4 : 3 steht. Bezeichnet man unter dieser Voraussetzung wie bemerkt mit A die Spundtiefe, mit B die Bodenweite, mit a und b aber die horizontalen Axen der Ellipsen beim Spund und am Boden, so wird also vorausgesetzt, dass

$$A : a = B : b$$



Handelt es sich nun aber um eine genauere Berechnung, bei welcher die eigenthümliche Krümmung der Dauben notwendig in Frage kommen muss, so ist einleuchtend, dass durch die bisherigen Annahmen die Form des Fasses noch keineswegs vollständig bestimmt ist und dass es noch einer weiteren Annahme bezüglich der Curven bedarf, welche die Fassdauben im Längenschnitte des Fasses geben. Hierüber wurden nun sehr verschiedene Annahmen der Rechnung zu Grunde gelegt; es wurde nämlich angenommen, jene Curve sei ein Kreis, dann eine Ellipse, eine Conchoide, eine Parabel u. s. w. Da strenge genommen jede dieser Annahmen willkürlich und theoretisch auch gleich annehmbar ist, weil jede dieser Curven wegen der schwachen Krümmung der Dauben in gleicher Weise sich an die wirkliche Form derselben ziemlich nahe anschliessen wird, so ist doch diejenige vorzuziehen, welche die mit der Erfahrung am besten übereinstimmende und für den Gebrauch bequemste Formel liefert. Dies ist nun bei der Parabel der Fall und es möge daher diese hier zu Grunde gelegt werden. In Folge dieser Annahme ist nun die Form des geometrischen Körpers, welcher an die Stelle des Fasses gesetzt wird, vollkommen bestimmt, und es kann der Inhalt desselben scharf berechnet werden. Allerdings ändern sich die Parameter der auf einander folgenden Parabeln, welche die Krümmung der Dauben vertreten, aber diese Parameter liessen sich allgemein berechnen; es ist übrigens, wie man bald sehen wird, gar nicht nöthig, alle diese Parameter zu kennen, weil es vollständig hinreicht, blos die der obersten Daube entsprechenden Parabel näher zu bestimmen.

VIII.

Es sei p der Parameter der Parabel, welche der obersten Daube QOR entspricht. Man lege an den höchsten Punkt eine Tangente und setze $OM = x$, $MP = y$, also $x = \sqrt{p \cdot y}$, $x^2 = py$. Man kann nun p dadurch bestimmen, dass man die Bedingung einführt, die Parabel müsse durch den Punkt Q der Bodenfläche gehen.

Bezeichnet also l die Länge des Fasses, so müssen die Gleichungen:

$$x = \frac{l}{2}, y = \frac{A - B}{2}$$

stattfinden, so dass

$$\frac{l^2}{4} = p \cdot \frac{A - B}{2}, \quad p = \frac{l^2}{2\,(A - B)}$$

und sofort:

$$x^2 = \frac{l^2}{2\,(A - B)} \cdot y$$

die Gleichung der obersten Parabel ist.

Es seien und α unn β die Axen des in der Entfernung x von der Mitte des Fasses gelegten elliptischen Querschnittes, so hat man:

$$\beta = A - 2y = A - \frac{4\,(A - B)}{l^2} \cdot x^2$$

und da die sämmtlichen Querschnitte ähnlich sind, so ist ferner:

$$\alpha : \beta = a : A = b : B$$

folglich

$$\alpha = \frac{b}{B}\,\beta$$

Der Inhalt des gedachten Querschnittes ist also:

$$\frac{\pi}{4}\,\alpha\,\beta = \frac{\pi}{4}\,\frac{b}{B}\left[A - \frac{4\,(A - B)}{l^2} \cdot x^2\right]^2$$

Nun denke man sich in der Entfernung ε einen zweiten Querschnitt, so kann man, wenn ε sehr klein genommen wird, die zwischen den beiden Querschnitten befindliche Schichte des Körpers als eine cylindrische betrachten und diess wird um so genauer sein, je kleiner eben ε gedacht wird. Der Inhalt dieser Schichte ist somit:

$$= \varepsilon . \frac{\pi}{4}\,\frac{b}{B}\left[A^2 - \frac{8\,A\,(A - B)}{l^2}\,x^2 + \frac{16\,(A - B)^2}{l^4}\,x^4\right].$$

Wird jetzt das Fass von der Mitte aus in lauter solche Elementarschichten zerlegt, so ergeben sich deren Inhalte aus derselben Formel, wenn man für x die Werthe:

$1.\ \varepsilon,\ 2\ \varepsilon,\ 3\ \varepsilon,\ \ldots\ldots\ n\ \varepsilon$ setzt, wobei

$$\varepsilon = \frac{l}{2n}, \qquad n\,\varepsilon = \frac{l}{2}$$

ist. Addirt man hierauf alle diese Inhalte, so gelangt man, wie leicht zu sehen, zu dem Ausdrucke:

$$\varepsilon . \frac{\pi}{4}\,\frac{b}{B}\left\{ n\,A^2 - \frac{8\,A\,(A - B)}{l^2}\,\varepsilon^2\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + \frac{16\,(A - B)^2}{l^4}\,\varepsilon^4\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4)\right\}$$

da aber, wie in Art. IV. bemerkt wurde:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

so geht der vorige Ausdruck in den folgenden über:

$$\frac{\pi}{4}\,\frac{b}{B}\left[n\,\varepsilon\,A^2 - \frac{8\,A\,(A - B)}{l^2}\left(\frac{(n\varepsilon)^3}{3} + \frac{(n\varepsilon)^2}{2}\,\varepsilon + \frac{(n\varepsilon)}{6}\,\varepsilon^2\right) + \frac{16\,(A - B)^2}{l^4}\left(\frac{(n\,\varepsilon)^5}{5} + \frac{(n\,\varepsilon)^4}{2}\,\varepsilon + \frac{(n\,\varepsilon)^3}{3}\,\varepsilon^2 - \frac{(n\varepsilon)}{30}\,\varepsilon^4\right)\right]$$

oder, da $n\,\varepsilon = \frac{l}{2}$ ist, in

$$\frac{\pi}{4}\,\frac{b}{B}\left[\frac{l}{2}\,A^2 - \frac{8\,A\,(A - B)}{l^2}\left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^2}{8}\,\varepsilon + \frac{l}{12}\,\varepsilon^2\right) + \frac{16\,(A - B)^2}{l^4}\left(\frac{l^5}{160} + \frac{l^4}{32}\,\varepsilon + \frac{l^3}{24}\,\varepsilon^2 - \frac{l}{60}\,\varepsilon^4\right)\right]$$

Je kleiner ε genommen wird, desto genauer stellt dieser Ausdruck den halben Inhalt dar; lässt man also ε immer kleiner und kleiner werden und zuletzt verschwinden, d. h. setzt man $\varepsilon = o$, so erhält man genau die Hälfte des Inhaltes I und also:

$$I = \frac{\pi}{2}\,\frac{b}{B}\left[\frac{l}{2}\,A^2 - \frac{A\,(A - B)}{3}\,l + \frac{(A - B)^2}{10}\,l\right]$$

oder nach einigen Umgestaltungen:

$$I = \frac{\pi}{60} \frac{b}{B} \cdot l \, (8\, A^2 + 4\, A\, B + 3\, B^2)$$

Diese Formel hat in etwas anderer Schreibweise zuerst Lambert in seinen „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik“ I. Band mit Hilfe der Integralrechnung gefunden, wesshalb sie gewöhnlich die „Lambert'sche Fassformel“ genannt wird.

Um die dem Inhalte I entsprechende Anzahl N in Massen zu erhalten, muss man, wenn A, B, b, l, in Zollen ausgedrückt werden, durch $12^3 . 0{,}0448$ dividiren und erhält:

$$N = 0{,}00067635 . \frac{b}{B} \, l . \; (8\, A^2 + 4\, A\, B + 3\, B^2).$$

Beim Gebrauche dieser Formel muss man, um den Inhalt mit grösserer Genauigkeit zu erhalten, bei der Messung der Dimensionen des Fasses sehr sorgfältig verfahren, insbesondere auch auf die Dicke der Dauben und der Böden gehörig Rücksicht nehmen.

Bekanntlich bedienen sich die Visierer besonders eingetheilter Stäbe, um unter Anwendung gewisser Vorschriften den Inhalt der Fässer zu bestimmen. Allerdings bedarf es hiebei keiner mathematischen Kenntnisse, aber es ist klar, dass die Resultate derartiger Bestimmungen, welche sich doch immer auf eine für den mechanischen Gebrauch zugerichtete mathematische Berechnung gründen müssen, nicht genauer, ja in der Regel bei Weitem nicht so genau sein werden, als diejenigen, die sich aus einer sorgfältigen Anwendung der mathematischen Formel ergeben, welche die richtigsten Consequenzen aus allen bei dieser Frage zu machenden Annahmen zieht.

Beispiel. Bei der Messung eines Fasses fand man

$$A = 72'' \quad B = 63'' \quad l = 90'', \frac{b}{B} = \frac{3}{4}$$

Aus der obigen Formel ergibt sich hiefür:

$$N = 2782 \cdot 504 \text{ Mass}$$

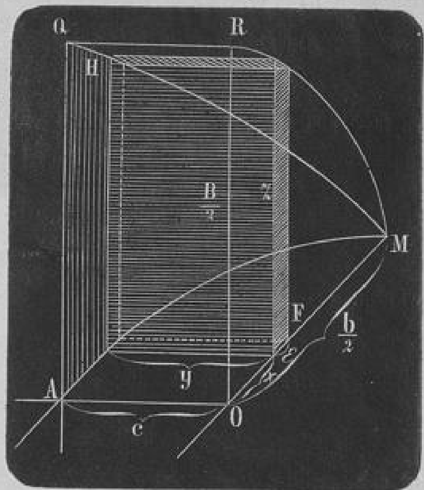
oder:

$$N = 69 \text{ Eimer}, \; 22 \cdot 504 \text{ Mass}.$$

IX.

Bei sehr grossen Fässern findet man nicht selten cylinderisch gekrümmte oder sogenannte gesenkte Böden, deren Krümmung nach einwärts gerichtet ist, und wobei die Erzeugungslinie vertikal steht, so dass die Spund- und Lagerdauben am kürzesten sind.

Hiedurch erleidet die oben ausgeführte Berechnung eine Modification. Man berechnet dann zuerst den Inhalt, indem man die Länge l den beiden Seitendauben entsprechend annimmt und bringt hierauf den cylindrischen Ergänzungsraum an beiden Enden in Abzug. Diesen Raum kann man unter der Voraussetzung, dass die horizontale durch die Mitte des Bodens gehende Senkungslinie entweder der Bogen eines Kreises einer Ellipse oder einer Parabel sei, berechnen.



Es sei Q der Endpunkt der obersten Daube, R der Punkt, in welchen sie verlängert die ebene Bodenfläche $O\,M\,R$ welche eine Ellipse ist, treffen würde. $O\,A = c$ die Senkung des Bodens. Wie bisher sei $O\,R = \frac{B}{2}$, $O\,M = \frac{b}{2}$, der Bogen $A\,M$ der Senkungslinie gehöre einer Parabel vom Parameter p an. Dies vorausgesetzt ist:

$$x = \sqrt{p\,(c - y)} \;, \quad \frac{b}{2} = \sqrt{p\,c}$$

$$y = c - \frac{4\,c\,x^2}{b^2}$$

Bezeichnet z die Ordinate der Ellipse $M\,R$ so ist:

$$z = \frac{B}{b} \sqrt{\frac{b^2}{4} - x^2}$$

Der Inhalt des prismatischen Elements $F\,H$, dessen sehr kleine Dicke $= \varepsilon$, ist also

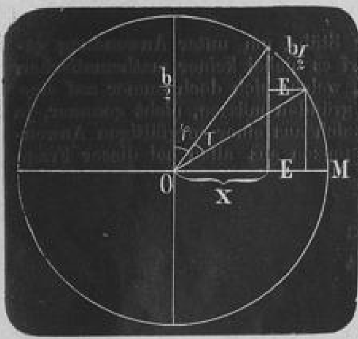
$$y . z . \varepsilon = \varepsilon \left(c - \frac{4\,c\,x^2}{b^2} \right) \frac{B}{b} \sqrt{\frac{b^2}{4} - x^2}$$

oder in etwas anderer Form geschrieben:

$$\frac{c\ B}{b}\sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}\ \varepsilon-\frac{4\ c\ B}{b^3}\ x^2\sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}\ \varepsilon$$

woraus nun, wenn $\varepsilon=\frac{b}{2n}$ und successive $x=1.\ \varepsilon,\ 2\ \varepsilon\ .\ .\ .\ .\ .\ n\ \varepsilon$ gesetzt wird, durch Summation der entsprechenden Werthe der Raum $A\ O\ M\ R\ Q$ sich ergibt. Um die Rechnung abzukürzen, kann man wie folgt, verfahren. Mit dem Radius $\frac{b}{2}$ beschreibe man einen Kreis, so bedeutet $\sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}$ die zur Abscisse x gehörige Kreisordinate; und wenn man

$$x=\frac{1}{2}\ b\sin\varphi \text{ setzt, so ist } \sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}=\frac{1}{2}\ b\cos\varphi$$



Bezeichnet ferner τ die sehr kleine Aenderung von φ, welche dem Zuwachs ε von x entspricht, so wird man leicht einsehen, dass:

$$b\ \tau:\varepsilon=b:\sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}\quad \text{also: } \varepsilon=\tau\sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}=\tau\ \frac{b}{2}\ \cos\varphi$$

Der für das Element FH gefundene Ausdruck geht also über in:

$$\frac{c\ B}{b}\sqrt{\frac{b^2}{4}-x^2}\ \varepsilon-\frac{b\ c\ B}{4}\ \sin^2\varphi\ \cos.^2\varphi.\ \tau$$

Nimmt man nun die Summation vor und bemerkt, dass der erste Theil dieses Ausdruckes nichts Anderes ist, als ein Element der Fläche jenes Kreises, so wird aus ihm der Quadrant desselben hervorgehen, welcher $=\frac{\pi}{4}\frac{b^2}{4}$, so dass aus dem ersten Theile

$$\frac{b\ c\ B}{16}\ \pi\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

erhalten wird. Was nun aber den zweiten Theil

$$\frac{b\ c\ B}{4}\ \sin^2\varphi\ \cos^2\varphi\ \tau=\frac{b\ c\ B}{16}\ \sin^2(2\ \varphi)\ \tau$$

betrifft, so sind hierin für φ nach und nach die Werthe $1.\ \tau,\ 2\ \tau,\ .\ .\ .\ .\ .\ n\ \tau$ zu setzen, wobei $\tau=\frac{\frac{\pi}{2}}{n}=\frac{\pi}{2n}$ ist.

Da aber

$$\sin^2(2\ \varphi)=\frac{1-\cos 4\ \varphi}{2.}$$

so lässt sich jener Ausdruck in der Form,

$$-\frac{b\ c\ B}{32}\ \tau+\frac{b\ c\ B}{32}\ \cos 4\ \varphi.\ \tau$$

schreiben. Bei der Summation erhält man aus dem ersten Gliede offenbar

$$-\frac{b\ c\ B}{32}\cdot\frac{\pi}{2}$$

was mit (1) vereinigt gibt:

$$\frac{b\ c\ B}{16}\ \pi-\frac{b\ c\ B}{32}\ \frac{\pi}{2}=\frac{3\ \pi}{64}\ b\ c\ B\ .\ .\ .\ .\ .\ (\text{m}).$$

Bezüglich des andern noch der Summation zu unterwerfenden Theiles

$$\frac{b\ c\ B}{32}\ \cos 4\ \varphi\ \tau$$

ist es passend $4\ \varphi=\psi$ also $\tau=\frac{\delta}{4}$ zu setzen, so dass man für ψ die Werthe $\delta,\ 2\ \delta,\ 3\ \delta,\ .\ .\ .\ .\ n\ \delta$

zu substituiren hat, wobei $n\ \delta = 2\ \pi$ ist. Wenn man aber in dem Ausdruck:

$$-\frac{b\ c\ B}{128} \cos \psi .\ \delta$$

diese Substitution macht und die Ergebnisse dann addirt, so kommen in der Summe alle Werthe sowohl die positiven als die negativen des cos ψ vor, folglich ist die Summe $= o$. Der Werth in (m) ist also das vollständige Resultat. Nimmt man dasselbe 4fach, so ist der für den einen Boden in Abzug zu bringende Theil

$$\frac{3\ \pi}{16}\ b\ c\ B = \frac{\pi}{4}\ \ b\ B\ \frac{3\ c}{4}$$

also gleich der elliptischen Bodenfläche multiplizirt mit $^3/_4$ der Senkungstiefe c. Da dieser Betrag für beide Enden des Fasses in Abzug zu bringen ist, so ergibt sich für den Inhalt des Fasses mit 2 gesenkten Böden die Formel

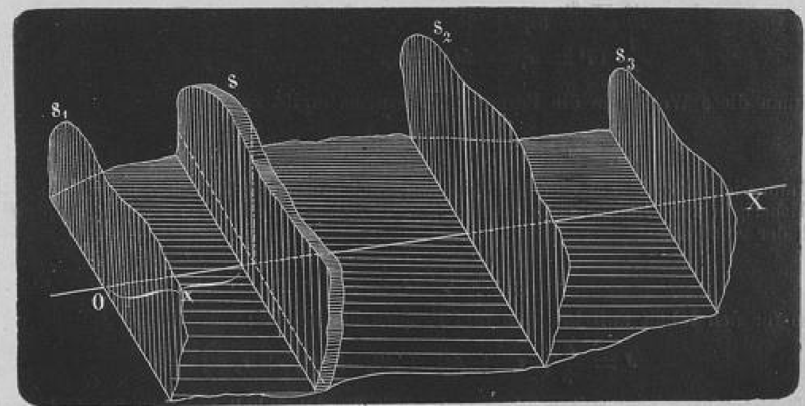
$$I = \frac{\pi}{60}\ \frac{b}{B} \cdot l \left[8\ A^2 + 4\ A\ B + 3\ B^2 \right] - \frac{3\ \pi}{8}\ b\ c\ B$$

und in Maasen ausgedrückt:

$$N = 0{,}00067635\ \frac{b}{B} \cdot l \left[8\ A^2 + 4\ A\ B + 3\ B^2 \right] - 0{,}015218\ b\ c\ B$$

XI.

Bei allen bisher betrachteten Körperformen waren die begrenzenden Flächen durch ein bestimmtes Gesetz gegeben und es konnte die Berechnung des Inhaltes in Strenge geschehen. Häufig aber handelt es sich um die Berechnung von Körpern, welche nur zum Theil von genau bestimmten Flächen, Ebenen, Cylinderflächen u. s. w. zugleich aber auch von Flächen begrenzt sind, die sich nicht mathematisch definiren lassen. In solchen Fällen kann dann die Berechnung nur näherungsweise geschehen, indem man bezüglich jener unregelmässigen Begrenzungsflächen irgend eine passend scheinende Hypothese macht, welche zu praktisch anwendbaren d. h. nicht zu complicirten Regeln führt. Zu einer solchen Hypothese führt folgende Bemerkung



Wenn man irgend einen Körper durch Ebenen senkrecht auf eine Linie OX schneidet, so wird der Gehalt s des Querschnittes von der Entfernung x des Schnittes von dem festen Punkte O abhängen, oder wie man sagt, es wird s als Funktion von x anzusehen sein. Nun kann man im Allgemeinen jede Funktion nach Potenzen der Veränderlichen in eine unendliche Reihe entwickeln, so dass

$$s = A + B\ x + C\ x^2 + \ldots\ldots$$

Wenn nun x nicht sehr gross ist und die Gestalt des Querschnittes sich mit x nicht rasch ändert, so darf man, wenn es sich bloss um einen genäherten Werth von s handelt, die Reihe mit dem dritten Gliede abbrechen und also

$$s = A + B\ x + Cx^2$$

setzen.

Angenommen, es seien die Inhalte von drei Querschnitten oder Profilen $= S_1,\ S_2,\ S_3$ gegeben, welche auf einander folgend in der Entfernung δ senkrecht auf OX stehen, so kann, wenn das durch die dreigliederige Formel für s ausgesprochene Gesetz zu Grunde gelegt wird, der zwischen jenen Profilen enthaltene Raum auf folgende Art berechnet werden. In der Entfernung $x + \varepsilon$ errichte man ein zweites Profil, so wird dieses mit dem Profile des Punktes x eine Schichte einschliessen, welche, wenn ε sehr klein ist, als cylindrisch angenommen werden kann und deren Inhalt also $= S\,\varepsilon$ ist.

Man denke sich nur die Länge $l = 2\delta$ in n Theile getheilt, wovon jeder $= \varepsilon$ ist, so dass

$$\varepsilon = \frac{l}{n} \text{ oder } n\varepsilon = l$$

ist. Die Inhalte aller durch die n Theilpunkte bestimmten Schichten ergeben sich, wenn man in der Formel

$$S\,\varepsilon = A\,\varepsilon + B\,x\,\varepsilon + C\,x^2\,\varepsilon$$

für x nach und nach 1ε, 2ε, 3ε, ... $n\varepsilon$, setzt; addirt man hierauf alle hierdurch erhaltenen Werthe, so findet sich

$$An\varepsilon + B\varepsilon^2\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + C\varepsilon^3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

oder, wenn man die Reihen summirt,

$$An\varepsilon + B\varepsilon^2\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + C\varepsilon^3\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung $n\,\varepsilon = l$ geht dieser Ausdruck über in

$$Al + \frac{B}{2}\left(l^2 + l\varepsilon\right) + C\left(\frac{l^3}{3} + \frac{l^2}{2}\varepsilon + \frac{l}{6}\varepsilon^2\right)$$

Dieser Ausdruck gibt genau den gesuchten Inhalt, wenn ε verschwindet. Man hat also

$$J = Al + \frac{B}{2}l^2 + \frac{C}{3}\,l^3$$

Für die Coefficienten A B C hat man die folgenden Bedingungen.

Wenn $X = 0$ ist, so ist: $s = s_1$ also $s_1 = A$
„ $X = \delta$ „ „ „ $s = s_2$ „ $s_2 = A + B\delta + C\delta^2$
„ $X = 2\delta$ „ „ „ $s = s_3$ „ $s_3 = A + 2B\delta + 4C\delta^2$

aus welchen folgt

$$A = s_1$$
$$Bl = -3s_1 + 4s_2 - s_3$$
$$\frac{1}{2}\,Cl^2 = s_1 - 2s_2 + s_3.$$

Setzt man diese Werthe in die Formel für J ein, so ergibt sich

$$J = \frac{l}{6}\,(s_1 + 4s_2 + s_3) = \frac{\delta}{3}\,(s_1 + 4s_2 + s_3)$$

Man kann diese Formel auf eine beliebige ungerade Anzahl von Profilen ausdehnen. Schliesst man nämlich an die bisherigen zwei Räume noch zwei weitere zwischen den Profilen s_3, s_4, s_5 an, so kommt zu dem obigen noch der Ausdruck

$$\frac{\delta}{3}\left(s_3 + 4\,s_4 + s_5\right)$$

und man hat also für den Inhalt zwischen den fünf Profilen die Formel:

$$J = \frac{\delta}{3}\left(s_1 + 4s_2 + 2s_3 + 4s_4 + s_5\right)$$

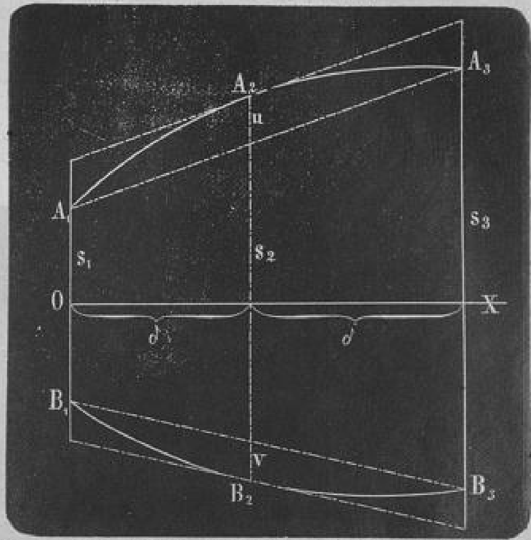
Auf diese Art kann man weiter gehen und erhält für den Inhalt zwischen $2n + 1$ Profilen:

$$J = \frac{\delta}{3}\left(s_1 + 4s_2 + 2s_3 + 4s_4 + 2s_5 + 4s_6 + \ldots + 2s_{2n-1} + 4s_{2n} + s_{2n+1}\right)$$

Diese Formel, von Thomas Simpson (gest. 1761) zuerst gefunden, wird die Simpson'sche Formel genannt.

XII.

Die Formel, welche vorhin zum Zweck der Berechnung von Kubikinhalten hergeleitet wurde, kann auch aus einem andern Gesichtspunkte gefunden werden und die Wichtigkeit dieser Formel mag es rechtfertigen, wenn hier noch andere Arten der Herleitung folgen. Ebenso wie oben der Inhalt des Querschnittes eines Körpers durch die drei ersten Glieder einer unendlichen Reihe bestimmt wurde, kann man auch die Sehne zwischen zwei Curven als durch die Gleichung $s = A + Bx + Cx^2$ bestimmt ansehen und offenbar wird man für den Inhalt des zwischen drei gleich weit entfernten Sehnen befindlichen Flächenraumes der Curven dieselbe Formel erhalten, wie vorhin für den Kubikinhalt eines Körpers zwischen drei Profilen.



Man gelangt übrigens zu dieser Formel auch auf dem folgenden ganz verschiedenen Weg. Denkt man sich nämlich die gegebenen Curvenbogen $A_1\ A_2\ A_3$ und $B_1\ B_2\ B_3$ durch die Bogen von Parabeln ersetzt, welche ebenfalls durch dieselben drei Punkte gehen und deren Axen auf der Linie OX senkrecht stehen, so kann man den gesuchten Flächenraum als aus einem Paralleltrapez und zwei Parabelsegmenten bestehend ansehen. Bekanntlich ist nun der Inhalt des Parabelsegmentes $\frac{2}{3}$ des umschriebenen Parallelogrammes. Der Inhalt des obern Parallelogramms, dessen Grundlinie u und dessen Höhe 2δ ist, ist $= 2\delta.\ u$, jener des untern $= 2\delta.v$, folglich der Inhalt der beiden Segmente

$$= \frac{4}{3}\ \delta\ (u + v)$$

Da aber $u + v = s_2 - \frac{s_1 + s_3}{2}$, so ist dieser Inhalt auch

$$= \frac{2}{3}\ \delta(-\ s_1 + 2s_2 - s_3)$$

Der Inhalt des zwischenliegenden Trapezes ist $= \delta\ (s_1 + s_3)$; folglich hat man für den Inhalt I zwischen den drei Sehnen und den Curven die Gleichung

$$I = \frac{\delta}{3}\left[s_1 + 4s_2 + s_3\right]$$

welche mit der frühern übereinstimmt. Man hat die Simpson'sche Formel auf den Fall ausgedehnt, in welchen die Abstände der Profile oder Sehnen nicht, wie bisher vorausgesetzt wurde, gleich, sondern ungleich sind. Will man aber in diesem Falle eine eben so einfache mit der Anzahl der Sehnen sich nicht complicirende Regel erhalten, so darf man nicht von dem bisherigen Ausgangspunkte, nämlich von der Gleichung

$$s = A + B\ x + C\ x^2$$

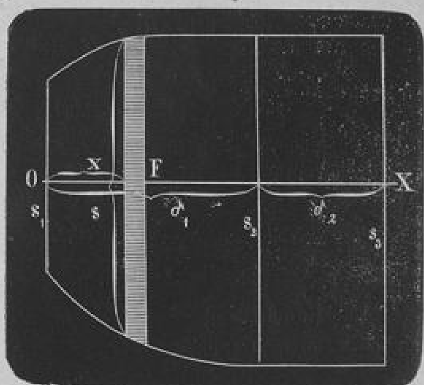
ausgehen.

Es ist nämlich der Inhalt eines in der Entfernung x befindlichen Streifens, dessen Breite ε ist

$$= s\ \varepsilon$$

und wenn man den Abstand x in n Theile theilt und die entsprechenden Streifen summirt, so ergibt sich auf gleiche Art, wie früher der Raum zwischen O und T

$$= A\ x + \frac{B}{2}\ x^2 + \frac{C}{3}\ x^3$$



Sind nun δ_1 und δ_2 die Abstände der Sehnen s_1, s_2, s_3, so ergibt sich hieraus für den gesammten zwischen ihnen enthaltenen Flächenraum die Gleichung:

$$I = A\ (\delta_1 + \delta_2) + \frac{B}{2}\ (\delta_1 + \delta_2)^2 + \frac{C}{3}\ (\delta_1 + \delta_2)^3$$

Für die Coefficienten finden die Bedingungen statt:

$$s_1 = A$$
$$s_2 = A + B\ \delta_1 + C\ \delta_1^{\ 2}$$
$$s_3 = A + B\ (\delta_1 + \delta_2) + C\ (\delta_1 + \delta_2)^2.$$

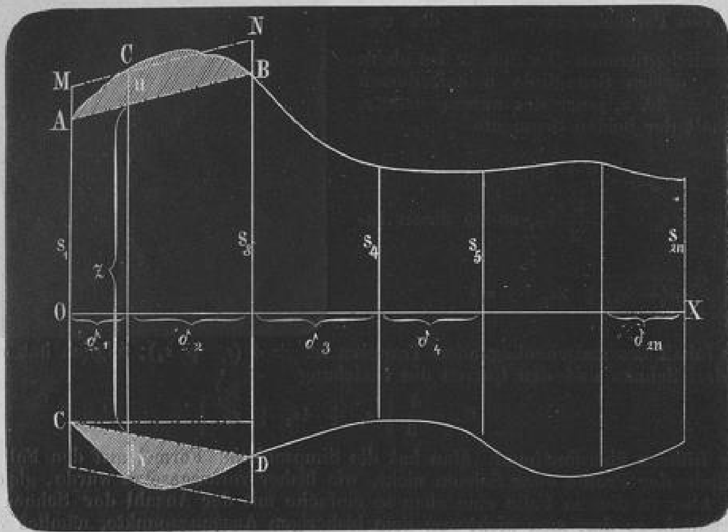
Setzt man die hieraus für A, B, C sich ergebenden Werthe in die Formel für I, so folgt:

$$J = \frac{\delta_1 + \delta_2}{6}\left[\frac{2\delta_1 - \delta_2}{\delta_1}\ s_1 + \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{\delta_1\ \delta_2}\ s_2 + \frac{2\delta_2 - \delta_1}{\delta_2}\ s_3\right]$$

Diese Formel ist nun nicht mehr von der Einfachheit, welche die Simpson'sche so sehr auszeichnet, denn die s sind nicht mehr mit ganzzahligen Koëfficienten, sondern mit Brüchen multiplicirt, welche von den Abständen δ_1 und δ_2 abhängen. Uebrigens verdient bemerkt zu werden, dass in dem besondern Fall, wenn $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ist, jene Formel in die Simpson'sche übergeht. Um nun aber dennoch für den Fall ungleicher Abstände zu einer praktischen, einfachen Formel zu gelangen, hat man die Hypothese bezüglich des Parabelsegmentes, oder also die Gleichung

$$s = A + B\,x + C\,x^2$$

aufgegeben und angenommen, dass Segment $A\,B\,C$ lasse sich ebenso, wie bei gleichen Abständen, durch den $^2/_3$ Theil eines Parellelogrammes $A\,B\,M\,N$ ersetzen. Dieses Parellelogramm aber ist dann nicht mehr



wie früher ein umschriebenes und kann je nach dem Verhältniss der Abstände δ_1 und δ_2 beträchtlich von dem Segment $A\,B\,C$ abweichen. Diese Bemerkung ist nicht ausser Acht zu lassen, wie dies in manchen Schriften geschieht. Die bezeichnete Annahme hat keinen geometrischen Grund mehr, sondern ist eben so willkürlich, als wenn man für das Segment z. B. den $^3/_5$ Theil des Parallelogrammes annehmen würde. Nur der eine Umstand spricht für den Koëfficienten $^2/_3$, dass man für ihn eine Formel erhält, die beinahe ebenso einfach als die Simpson'sche ist und für gleiche Abstände in der That in dieselbe übergeht.

Dies vorausgesetzt, hat man nun für den Gehalt der zwei Streifen zwischen den Sehnen s_1, s_2, s_3 den Ausdruck

$$\frac{s_1 + s_3}{2}(\delta_1 + \delta_2) + \frac{2}{3}u(\delta_1 + \delta_2) + \frac{2}{3}v(\delta_1 + \delta_2)$$

$$= (\delta_1 + \delta_2)\left[\frac{s_1 + s_3}{2} + \frac{2}{3}(u + v)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Um das zwischen $A\,B$ und $C\,D$ fallende Stück z der mittleren Sehne s_2 zu berechnen, hat man die Proportion

$$z - s_1 : s_3 - s_1 = \delta_1 : \delta_1 + \delta_2$$

woraus

$$Z = \frac{\delta_2\,s_1 + \delta_1\,s_3}{\delta_1 + \delta_2}$$

Nun ist $u + v = s_2 - z$

folglich wenn man substituirt:

$$u + v = \frac{-\delta_2\,s_1 + (\delta_1 + \delta_2)\,s_2 - \delta_1\,s_3}{\delta_1 + \delta_2}$$

Wird dieser Werth in (1) eingesetzt, so ergibt sich

$$\text{Inhalt } (s_1, s_3) = \frac{1}{6}\Big[(3\,\delta_1 - \delta_2)\,s_1 + 4\,(\delta_2 + \delta_2)\,s_2 + (3\,\delta_2 - \delta_2)\,s_3\Big]$$

Auf analoge Weise kann man den Inhalt zwischen den drei folgenden Sehnen finden und erhält

$$\text{Inhalt } (s_3, s_5) = \frac{1}{6}\Big[(3\,\delta_1 - \delta_4)\,s^1 + 4\,(\delta_3 + \delta_4)\,s_4 + (3\,\delta_4 - \delta_3\,)\,s_5\Big]$$

die Summe dieser beiden Inhalte gibt:

$$\text{Inhalt } (s_2, s_5) = \frac{1}{6}\Big[(3\,\delta_1 - \delta_2)\,s_1 + (3\,\delta_2 + 3\,\delta_3 - \delta_1 - \delta_4)\,s_3 + (3\,\delta_4 - \delta_3)\,s_5\Big] +$$
$$+ \frac{2}{3}\Big[(\delta_1 + \delta_2)\,s_2 + (\delta_3 + \delta_4)\,s_4\Big]$$

Es ist leicht einzusehen, wiesich diese Formel allgemein für $2\,n + 1$ Sehnen gestaltet, man findet nämlich

$$\text{Inhalt } (s_1, s_{2\,n+1}) =$$
$$\frac{1}{6}\Big[(3\,\delta_1 - \delta_2)\,s_1 + (3\,\delta_2 + 3\,\delta_3 - \delta_1 - \delta_4)\,s_3 + (3\,\delta_4 + 3\,\delta_5 - \delta_3 - \delta_6)\,s_5 + \ldots .$$
$$+ (3\,\delta_{2n-2} + 3\,\delta_{2n-1} - \delta_{2n-3} - \delta_{2n})\,s_{2n-1} + (3\,\delta_{2n} - \delta_{2n-1})\,s_{2n+1}\Big]$$
$$+ \frac{2}{3}\Big[(\delta_1 + \delta_2)\,s_2 + (\delta_3 + \delta_4)\,s_4 + (\delta_5 + \delta_6)\,s_6 + \ldots + (\delta_{2n-1} + \delta_{2n})\,s_{2n}\Big]$$

Der Probe wegen sei bemerkt, dass diese Formel für $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \ldots = \delta_{2n+1} = \delta$ in

$$\frac{\delta}{6}\Big[2\,s_1 + 4\,s_3 + 4\,s_5 + 4\,s_7 + \ldots 4\,s_{2n-1} + 2\,s_{2n+1}\Big] +$$
$$+ \frac{4\,\delta}{3}\Big[s_2 + s_4 + s_6 + \ldots . + s_{2n}\Big]$$
$$= \frac{\delta}{3}\Big[s_1 + 4\,s_2 + 2\,s_3 + 4\,s_4 + 2\,s_5 + \ldots + 4\,s_{2n} + s_{2n+1}\Big]$$

übergeht.

Es wurde bereits bemerkt, dass alle diese Gleichungen ebenso für die Berechnung von Kubikinhalten, wie für Flächen, wofür sie hier abgeleitet wurden, benützt werden können.

XIII.

Aus der vorstehenden Erörterung sieht man leicht ein, dass die Simpson'sche Formel nicht etwa bloss genäherte, sondern in allen Fällen die ganz richtigen Werthe für die Inhalte liefert, wenn die Sehne zwischen zwei Curven, oder die zur Abscisse x gehörige Ordinate einer Curve oder endlich der Querschnitt eines Körpers in der Entfernung x von einem festen Punkte geführt, sich in der Form

$$A + B\,x + C\,x^2$$

darstellen lässt und es kann daher nicht auffallen, wenn die Simpson'sche Formel oft ganz streng richtige Resultate gibt. Fälle dieser Art lassen sich mehrere leicht angeben. Es seien z. B. von einem abgekürzten Kegel drei äquidistante Profile gegeben. Die Radien der Endflächen seien R und r; davon ist:

$$s_1 = \frac{\pi}{2}\,r^2, \quad s_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r + R}{2}\right)^2, \quad s_3 = \frac{\pi}{2}\,R^2$$

Setzt man diese Werthe in die Simpson'sche Formel ein, so folgt

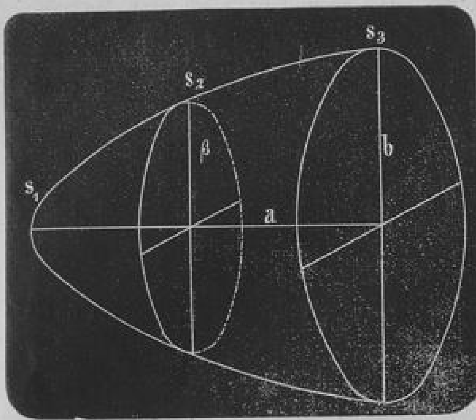
$$J = \frac{l}{6}\left[\frac{\pi}{2}\,r^2 + \frac{\pi}{2}\,\big(r + R\,\big)^2 + \frac{\pi}{2}\,R^2\right] = \frac{\pi}{6}\,l\,\left(r^2 + 2\,r\,R + R^2\right)$$

was ganz richtig ist.

Für die Halbkugel ist $s_1 = o,\ s_2 = \frac{\pi}{2}\,R^2,\ s_3 = o$

folglich erhält man

$$J = \frac{R}{3}\,4\,\frac{\pi}{2}\,R^2 = \frac{2}{3}\,\pi\,R^3, \quad 2\,J = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$$



Für das Rotationsparoboloid hat man, wenn a die Höhe, b der Radius der Grundfläche, folglich $\frac{b}{\sqrt{2}}$ den Radius β des durch die Mitte gehenden Querschnittes bezeichnet:

$$s_2 = 0,\ s_2 = \pi \frac{b^2}{2}, \quad s_3 = \pi\, b^2$$

folglich:

$$J = \frac{a}{6}\left[4\, \pi \frac{b^2}{2} + \pi . b^2 \right] = \frac{1}{2}\, a .\, \pi .\, b .^2$$

genau, wie früher gefunden wurde.

XIV.

Von den Fällen, in welchen der Inhalt des Querschnittes in der Form

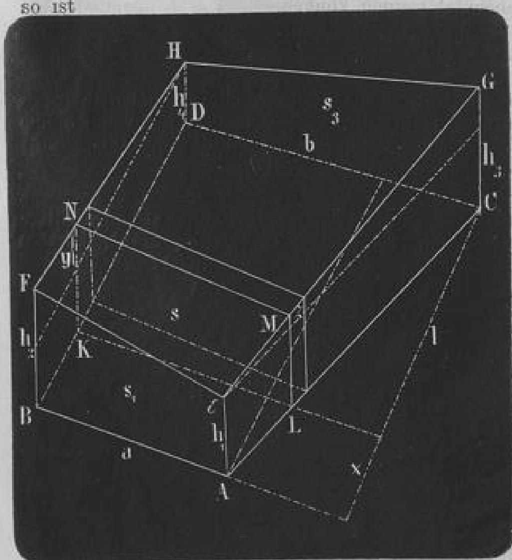
$$A + B\, x + C\, x^2$$

erscheint, kommen viele bei Körperformen vor, um deren Berechnung es sich beim Auf- und Abtrag bei Erdbauten handelt. Sind nämlich grosse Erdvolumina zu berechnen, die auf der Oberfläche nicht mehr als eben betrachtet werden können, so nimmt man auf die natürliche Krümmung gewöhnlich in der Art Rücksicht, dass man die windschiefe Fläche dafür setzt, die entsteht, wenn eine gerade Linie auf zwei andern nicht in einer Ebene liegenden Geraden sich so fort bewegt, dass sie stets einer vertikalen Ebene parallel bleibt. Legt man diese Annahme zu Grunde, so muss man, um den Körper zu berechnen, denselben in Elementarschichten parallel zu jener vertikalen Ebene zerlegen.

Diese Schichten erscheinen dann als prismatische Körper, deren Grundfläche meist ein Paralleltrapez ist, und die Inhalte der Grundflächen dieser Schichten haben, wenn ihre Entfernung von der genannten Vertikalebene mit x bezeichnet wird, die Form des obigen dreigliederigen Ausdruckes. Einige Beispiele mögen dies näher erläutern.

Es sei $ABCD$ ein horizontal liegendes Parallelotrapez. Die parallelen Seiten seien $AB=a$ und $CD=b$, ihre Entfernung $=l$. Die Punkte E, F, G, H, liegen auf der natürlichen Erdoberfläche, ihre Höhen sind gegeben $= h_1\ h_2\ h_3\ h_4$. Durch das räumliche Viereck $EFGH$ wird eine windschiefe Fläche gelegt, die erzeugt wird, indem sich die Gerade MN parallel zur vertikalen Ebene $ABEF$ fortbewegt.

Der Inhalt eines in der Entfernung x von dieser Ebene befindlichen Querschnittes $KLMN$ sei $=s$ so ist



$$s = \frac{LM + KN}{2}\, KL$$

Wird $LM = h_1 + z$ gesetzt, so hat man die Proportion

$$z : h_3 - h_1 = AL : AC = x : l$$

woraus:

$$z = \frac{h_3 - h_1}{l}\, x, \quad LM = h_1 + \frac{h_3 - h_1}{l}\, x$$

Ist ferner $KN = h_4 + y$, so hat man

$$y : h_2 - h_4 = DK : DB = l - x : l$$

woraus:

$$y = \frac{h_2 - h_4}{l}\,(l - x), \ KN = h_4 + \frac{h_2 - h_4}{l}\,(l - x)$$

Für: $KL = a + u$, hat man die Proportion

$$u : b - a = x : l$$

woraus:

$$u = \frac{b - a}{l}\, x, \ KL = a + \frac{b - a}{l}\, x$$

Setzt man diese Werthe in s ein und führt die Multiplication aus, so ergibt sich

$$s = \frac{a\,(h_1 + h_2)}{2} + \frac{(b - a)\,(h_1 + h_2) + a\,(h_3 - h_1 + h_4 - h_2)}{2l}\, x + \frac{(b - a)\,(h_3 - h_1 + h_4 - h_2)}{2\, l^2}\, x^2$$

Dieser Ausdruck ist nun von der Form $A+Bx+Cx^2$, also übereinstimmend mit demjenigen, welcher der Simpson'schen Formel zu Grunde liegt, und man hat

$$J = \frac{l}{6}\left[s_1+4s_2+s_3\right]$$

Um die Inhalte der drei Profile zu bestimmen, kann man sich nun eben der Formel für s bedienen, wenn darin nach einander

$$x = o,\ \frac{l}{2},\ l$$

gesetzt wird.

Nun ist

$$s = \frac{1}{2}\left(a+\frac{b-a}{l}x\right)\left[h_1+h_2+\frac{h_3-h_1+h_4-h_2}{l}x\right]$$

folglich

$$s_1 = \frac{h_1+h_2}{2}a, \quad s_2 = \frac{a+b}{8}\left(h_1+h_2+h_3+h_4\right)$$

$$s_3 = \frac{h_3+h_4}{2}b$$

Setzt man diese Werthe in die Formel für J ein, so ergibt sich

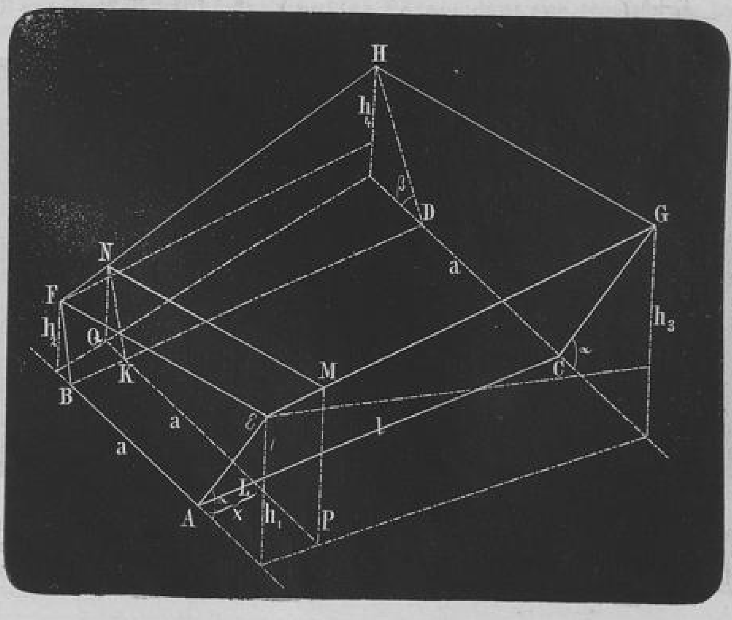
$$J = \frac{l}{12}\left[a\,(2\,h_1+2\,h_2+h_3+h_4)+b\,(2\,h_3+2\,h_4+h_1+h_2)\right]$$

Für den Fall, in welchem die h alle einander gleich sind, erhält man den Inhalt eines Prismas, dessen Basis ein Parallelogramm ist, nämlich

$J = \frac{a+b}{2}\,h.\,l$, wie es sein soll.

XV.

Um einen zweiten hierher gehörigen Fall zu betrachten, nehme man an, es sei ein Körper AH zu berechnen, dessen Grundfläche $ABCD$ ein Rechteck ist, und der an den beiden Enden durch senkrechte Paralleltrapeze, an den beiden Seiten aber durch zwei schiefe Ebenen begrenzt ist, die mit dem Horizont die Winkel α und β bilden.



Die Höhen der Punkte E, F, G, H über der Grundfläche $ABCD$ sind $= h_1, h_2, h_3, h_4$, gegeben und die obere Begrenzungsfläche wird wieder als eine durch die Bewegung der Geraden MN erzeugte windschiefe Fläche betrachtet.

Man mache in beliebiger Entfernung x von A einen Schnitt parallel zu den beiden Profilen und berechne den Inhalt s dieses Schnittes.

Zu dem Ende hat man die Proportion

$$(MP-h_1) : (h_3-h_1) = x : l, \text{ woraus } MP = h_1 + \frac{h_3-h_1}{l}\, x$$

$$(NQ-h_2) : (h_4-h_2) = x : l, \text{ woraus } NQ = h_2 + \frac{h_4-h_2}{l}\, x$$

Da nun

$$LP = MP \; cotg\; \alpha, \quad KQ = NQ \; cotg\; \beta,$$

so hat man

$$PO = a + MP \; cotg\; \alpha + NQ \; cotg\; \beta$$

und da

$$s = \frac{MP+NQ}{2}\, PQ - \frac{1}{2}\, MP.LP - \frac{1}{2}\, NQ.KQ$$

so erhält man durch Einsetzung der gefundenen Werthe die folgende Gleichung

$$s = \frac{1}{2}\left\{h_1 + h_2 + \frac{h_3+h_4-h_1-h_2}{l}\, x\right\} \cdot \left\{a + h_1\, cotg.\, \alpha + h_2\; cotg.\, \beta + \frac{(h_3-h_1)\; cotg.\; \alpha + (h_4-h_2)\; cotg.\; \beta}{l}\, x\right\}$$

$$- \frac{1}{2}\left[h_1 + \frac{h_3-h_1}{l}\, x\right]^2 cotg.\; \alpha - \frac{1}{2}\left[h_2 + \frac{h_4-h_2}{l}\, x\right]^2 cotg.\; \beta$$

Dieser Ausdruck hat nach Potenzen von x geordnet, wieder die Form

$$s = A + Bx + Cx^2$$

es ist also auch hier

$$J = \frac{l}{6}\left[s_1 + 4s_2 + s_3\right]$$

und man braucht nur s_1, s_2, s_3, zu berechnen; dies geschieht, wenn man $x = o$, $\frac{l}{2}$ und l setzt; man findet

$$s_1 = \frac{h_1+h_2}{2}\left(a + h_1 .\; cotg.\; \alpha + h_2 .\; cotg.\; \beta\right) - \frac{h_1^2\; cotg.\, \alpha + h_2^2}{2}$$

$$s_3 = \frac{h_3+h_4}{2}\left(a + h_3\; cotg.\, \alpha + h_4\, cotg.\; \beta\right) - \frac{h_3^2 .\; cotg.\, \alpha - h_4^2\, cotg.\, \beta}{2}$$

$$s_2 = \frac{h_1+h_2+h_3+h_4}{8}\left[2a + (h_1+h_3).cotg.\alpha + (h_2+h_4) cotg.\, \beta\right]$$

$$- \frac{1}{8}\left[(h_1+h_3)^2 .\, cotg.\; \alpha + (h_2+h_4)^2\; cotg.\; \beta\right]$$

Sofort also:

$$J = \frac{l}{12}\left\{3\; a\; (h_1+h_2+h_3+h_4) + \left[(2h_2+h_4).\; h_1 + (2h_4+h_2)\; h_3\right]\, (cotg.\; \alpha + cotg.\; \beta)\right\}$$

Ist z. B. $\alpha = \beta = 45^0$, so folgt

$$J = \frac{l}{12}\left\{3\; a\; (h_1+h_2+h_3+h_4) + 2\; \left[(2h_2+h_4)\; h_1 + (2\; h_4+h_2)\; h_3\right]\right\}$$

Obschon diese Gleichungen aus einer Figur abgeleitet wurden, in welcher das Volumen J als Abtrag erscheint, so ist doch leicht einzusehen, dass man sie auch für die Berechnung von Auftragskörpern ohne weiters benützen kann.

XVI.

Man kann sich der Simpson'sche Regel sehr bequem auch zur Berechnung der ovalen Fässer bedienen, muss aber dann die im Artikel VIII. über die geometrische Linie der Fassdauben gemachte Annahme aufgeben, so nämlich, dass der Inhalt eines Querschnittes nicht wie dort durch einen Ausdruck vom vierten

Grad in x, sondern nur vom zweiten Grad sei. Behält man die frühere Bezeichnung bei, so ist, wenn man für s_1 und s_3 die Bodenfläche und für s_2 den Querschnitt durch die Spundlinie annimmt, zu setzen

$$s_1 = s_3 = \frac{\pi}{4} . Bb, \; s_2 = \frac{\pi}{4} . Aa$$

und man erhält

$$J = \frac{l}{6} \left[\frac{\pi}{2} . Bb + \pi . Aa \right]$$

oder da

$$a = \frac{b}{B} ; \; A, \text{ so ist}$$

$$J = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{b}{B} \cdot l \, (2 \, A^2 + B^2)$$

Durch Vergleichung dieser Formel mit der Lambert'schen kann man leicht nachweisen, dass der Unterschied nicht beträchlich ist. Man kann nämlich der Lambert'schen Formel die folgende Gestalt geben:

$$J_1 = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{b}{B} . l \left[2 A^2 + B^2 - \frac{2}{5} B^2 + \frac{4}{5} \; AB \right]$$

Es ist also:

$$J - J_1 = \frac{\pi}{30} \cdot \frac{b}{B} . \; l \, (A - B)^2$$

Dieser Unterschied in Massen ausgedrückt ist:

$$N - N_1 = 0{,}0013527 . \; \frac{b}{B} . \; l \; (A - B)^2$$

Ist z. B. $\quad A = 72'', \; B = 63'', \; l = 90'', \; \frac{b}{B} = \frac{3}{4}$

so ergibt

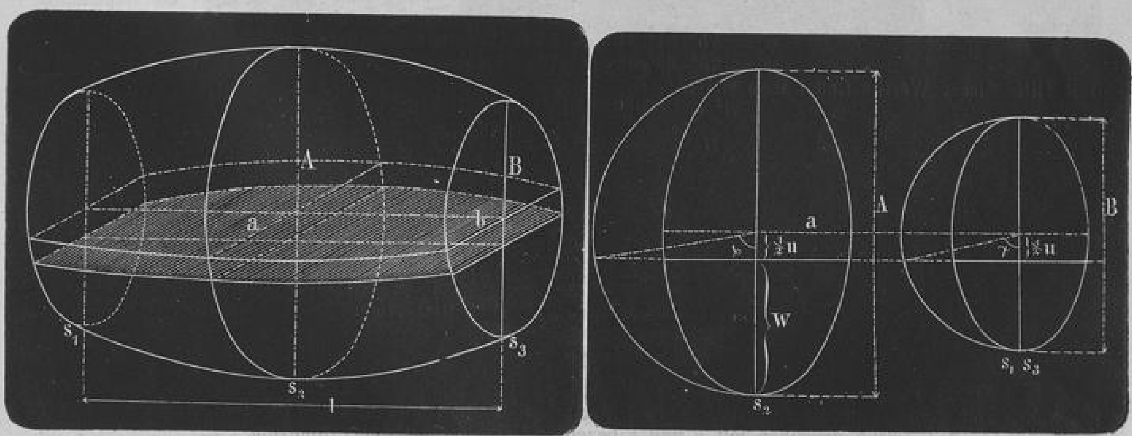
$$N - N_1 = 7 \cdot 4 \text{ Maass.}$$

Da nun $N = 3272 \cdot 3$ Mass, so sieht man, dass

$$\frac{N - N_1}{N} = \frac{7 \cdot 4}{3272 \cdot 3} = \frac{1}{467.}$$

XVII.

Die Berechnung nicht ganz voller Fässer, lässt sich ebenfalls am bequemsten auf die Simpson'sche Formel gründen, wie schon Tobias Mayer bemerkt hat.



Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die in dem Fasse befindliche Flüssigkeit bis an die beiden Böden reiche, und die Mittellinie des Fasses genau horizontal gestellt sei, so dass dieselbe der Oberfläche der Flüssigkeit parallel ist. In dieser Lage des Fasses messe man die Tiefe W der Flüssigkeit mit einem Stabe, welcher vertikal durch das Spundloch eingelassen wird.

Man hat nun die beiden elliptischen Querschnittsegmente $s_1 = s_3$ und s_2 zu berechnen. Es sei U eine Hilfsgrösse, bestimmt durch die Gleichung

$$U = A - 2W.$$

Ferner seien φ und ψ zwei Hilfsmittel, bestimmt durch die Gleichungen

$$\cos\varphi = \frac{U}{A}, \text{ und } \cos\psi = \frac{U}{B}$$

oder

$$\varphi = arc.\ \cos\frac{U}{A} \text{ und } \psi = arc.\ \cos\frac{U}{B}$$

dann ist, wie die Figur zeigt

$$s_2 = \left[\frac{1}{4}A^2\varphi - \frac{U}{2}\sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{U^2}{4}}\right]\frac{a}{A},\ s_1 = s_3 = \left[\frac{1}{4}B^2\psi - \frac{U}{2}\sqrt{\frac{B^2}{4} - \frac{U^2}{4}}\right]\frac{b}{B}$$

oder auch

$$s_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{a}{A}\left[A^2\varphi - U\sqrt{A^2 - U^2}\right],\ s_1 = s_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{b}{B}\left[B^2\psi - U\sqrt{B^2 - U^2}\right]$$

Substituirt man diese Werthe in die Simpson'sche Formel und bemerkt, dass wegen der voraus gesetzten Ähnlichkeit der Querschnitte $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$ ist,

so folgt

$$J = \frac{1}{6}\cdot\frac{b}{B}\cdot l\left\{A^2\varphi + \frac{1}{2}B^2\psi - U\sqrt{A^2 - U^2} - \frac{1}{2}U\sqrt{B^2 - U^2}\right\}$$

wobei

$$\varphi = arc.\ \cos\frac{U}{A}, \text{ und } \psi = arc.\ \cos\frac{U}{B}$$

Diese Formel kann den vollen Inhalt des Fasses nicht geben, weil bei ihrer Herleitung angenommen wurde, die Flüssigkeit reiche bis an die beiden Bodenflächen hin. Diese Voraussetzung aber wird nicht erfüllt, wenn die Flüssigkeit ausschliesslich nur von den Daubenflächen begrenzt wird.

Beispiel:

Es sei $A = 72'',\ B = 63',\ l = 90'',\ \frac{b}{B} = \frac{3}{4}$

und $W = 27'',\ U = 18''$

dann ist

$$\cos\varphi = \frac{1}{4} \quad \cos\psi = \frac{2}{7}$$

woraus

$$\varphi = 75^0\ 31'\ 21'' = 1{\cdot}3181162 \text{ in Bogentheilen}$$
$$\psi = 73^0\ 23'\ 54'' = 1{\cdot}2810445 \text{ „ „}$$

Mit Hilfe dieser Werthe findet man weiter:

$$A^2\varphi = 6833{\cdot}11,\ B^2\psi = 5084{\cdot}46$$
$$U\sqrt{A^2 - U^2} = 1254{\cdot}834$$
$$\frac{U}{2}\sqrt{B^2 - U^2} = 543{\cdot}366$$

folglich

$$J = \frac{3}{4}\ .\ 15\ .\ 7757{\cdot}14$$
$$N = 1101{\cdot}1 \text{ Mass} = 27 \text{ Eimer, } 21{\cdot}1 \text{ Mass.}$$

XVIII.

Mehrere stereometrische Aufgaben, deren Lösung ausschliesslich durch geometrische Construction geschehen soll, führen auf die Aufgabe, zu zwei gegebenen Linien a und b, zwei mittlere Proportionallinien zu finden, so dass, wenn dieselben mit u und v bezeichnet werden, sie der Proportion

$$a : u = u : v = v : b$$

Genüge leisten. Es ist bekannt, dass wenn es sich bloss um eine mittlere Proportionale w handelt, dieselbe also der Proportion

$$a : w = w : b$$

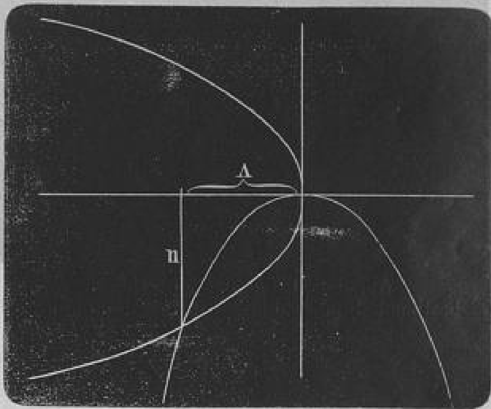
genügen soll, diese vermittelst des Kreises und der geraden Linie gefunden werden kann.

Die Aufgabe zweier mittleren Proporzionallinien war schon im Alterthum bekannt; denn schon Hippokrates von Cios (460 v. Ch.) kannte diese Aufgabe und wusste, dass dieselbe nicht mehr mittelst des Kreises und der geraden Linie gelösst werden kann und eigentlich eine Aufgabe des Raumes sei. Die Sage erzählt, dass König Minos das seinem Sohne Glaukus errichtete Grabmahl verdoppeln lassen wollte, einer anderen von Platon (Anfang des 4. Jahrhunderts vor Chr.) erzählten Sage gemäss verlangte das Orakel von Delos die Verdopplung des würfelförmigen Altars des Gottes Appolon und die alten Schriftsteller erwähnen, dass man sich bald überzeugt habe, diese Aufgabe erheische die Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen. Die auf uns gekommenen Lösungen datiren aus der Zeit nach Platon. Dieser selbst fand eine Lösung, und auch ein Instrument, eine Art von Parallellineal, wodurch sie graphisch ausgeführt werden konnte. Sein Schüler Meneachmus fand zwei Lösungen, die darum sehr bemerkenswerth sind, weil bei ihnen zuerst der Begriff des geometrischen Ortes vorkommt, und weil jener Schüler Platons sich mit der Ausbildung der Lehre von den Kegelschnittslinien beschäftiget hat.

Eine dieser Lösungen ist sehr einfach und beruht auf der Bestimmung des Durchschnittes zweier Parabeln. Betrachtet man nämlich die aus den angegebenen Proportionen entstehenden Gleichungen

$$av = u^2 \text{ und } bu = v^2,$$

so überzeugt man sich bald, dass, wenn unter u und v die Abscissen und Ordinaten zweier Parabeln verstanden werden, dieselben die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser Parabeln sind. Es ist klar, dass hiedurch zugleich die Aufgabe der Verdoppelung des Würfels gelösst ist; denn setzt man $b = 2a$ und eliminirt dann v, so folgt



$$u^3 = 2a^3$$

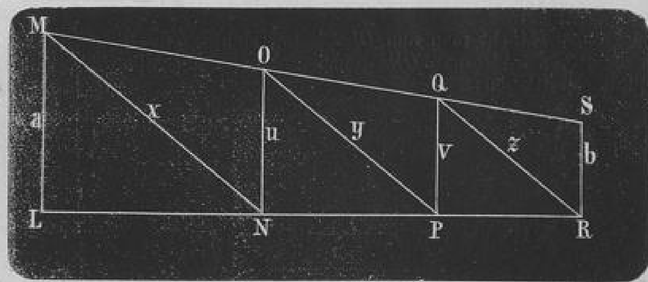
so dass u die Seite eines Würfels ist, dessen Inhalt doppelt so gross, als jener des Würfels von der Seite a, erscheint.

Unter allen Lösungen dieser Aufgabe ist vermöge ihrer Einfachheit die merkwürdigste jene von Eratosthenes (276 v. Ch.), da sie nur auf der Lehre von den Parallellinien beruht.

Zwischen 2 geraden Linien LR und MS sind 2 Systeme von Parallelen gezogen; es sind nämlich LM, NO, PQ, RS und anderseits MN, OP, QR unter einander parallel. Es sei $LM = a$, $RS = b$

$$MN = x,\ OP = y,\ QR = z$$

Dies vorausgesetzt, hat man wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke die Proportion



$$a:x = u:y = v:z$$
$$x:u = y:v = z:b$$

Aus diesen Proportionen folgt, wenn man sie mit einander multiplicirt:

$$a:u = u:v = v:b$$

Es sind also die mit u und v bezeichneten Linien die gesuchten mittleren Proportionalen. Man kann dieses Ergebniss leicht verallgemeinen und genau auf gleiche Weise die Aufgabe lösen, zwischen zwei Linien a und b irgend eine gegebene Anzahl mittlerer Proportionalen zu finden. Sollen z. B. deren drei gefunden werden, so dient dieselbe Construktion, wenn sie nur um zwei Dreiecke erweitert wird. Man hat nämlich

$$a:x = u:y = v:z = w:t$$
$$x:u = y:v = z:w = t:b$$

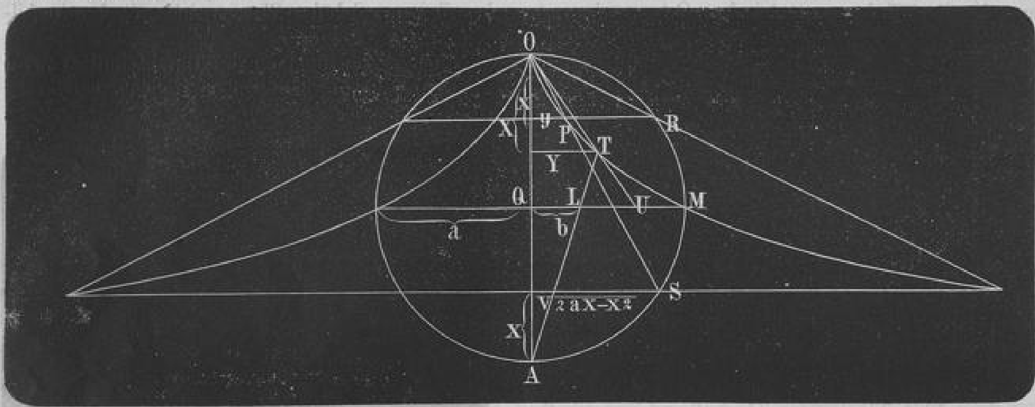
und wenn man diese Proportionen mit einander multiplizirt:

$$a:u = u:v = v:w = w:b$$

So einfach der Grundgedanke dieser Lösung ist, so lässt sich doch, wenn a und b gegeben sind, die Figur nicht mit Cirkel und Lineal direkt construiren. Eratosthenes bediente sich eines hierzu erfundenen Instrumentes, welches Mesolab genannt wird und aus drei rechteckigen Tafeln besteht, wovon die mittlere befestiget ist, die beiden andern aber beweglich sind, so nämlich, dass die eine über und die andere unter der mittleren längs zwei parallelen Coulissen sich verschieben lassen, damit die Linien a und b, welche auf den verschiebbaren Tafeln aufgetragen sind, in die Stellung gebracht werden können, welche der obigen Figur entspricht.

Der Erfinder schätzte diese Lösung so hoch, dass er das Instrument in einem Tempel aufstellte und darauf eine Inschrift anbrachte. Eine andere Lösung rührt von Nikomedes (100 — 300 v. Chr.) her, welche sich auf die Eigenschaften der Conchoide (Muschellinie) gründet und welche durch mechanische Bewegung beschrieben werden kann. Eine weitere Auflösung wird gewöhnlich Diocles (ungef. 500 nach Chr.) zugeschrieben, welche auf den Eigenschaften einer andern Kurve, der Cissoide (epheuförmige Linie) beruht. Da aber diese Kurve schon Geminus bekannt war (100 J. v. Chr.), so zweifelt man, ob jene Lösung Diocles zuzuschreiben sei.

Uebrigens ist dieselbe sehr leicht einzusehen. Die Cissoide wird erhalten, wenn man von der Mitte M des Halbkreises AO die beiden gleichen Bogen MR und MS aufträgt und die Ordinaten dieser Punkte construirt.



Auf der Ordinate ergibt sich dann ein Punkt P der Curve, wenn man ihren Durchschnitt mit OS bestimmt. Sind x und y die Coordinaten von P, so besteht offenbar die Proportion

$$x : y = 2a - x : \sqrt{2ax - x^2}$$

woraus

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

Macht man nun $OL = b$ und zieht AL bis zum Punkt T der Curve, und durch T und O die Gerade OU, setzt ferner $QU = u$, so ergeben sich, wenn X und Y die Coordinaten des Punktes T bezeichnen, die Proportionen:

$$X : Y = a : u$$
$$Y : 2a - X = b : a$$

woraus

$$X = \frac{a}{u} Y, \qquad 2a - X = \frac{a}{b} Y$$

Da aber vermöge der Gleichung der Curve:

$$(2a - X)\, Y^2 = X_3$$

so folgt:

$$\frac{a}{b} Y^3 = \frac{a^3}{u^3} Y^3$$

oder

$$u^3 = a^2 b.$$

Aus den früheren Gleichungen:

$$av = u^2 \quad , \quad bu = v^2$$

ergibt sich, wenn man v eliminirt, dieselbe Gleichung für u, woraus man sieht, dass die mit u bezeichnete Linie QU die eine der beiden mittleren Proportionalen ist. Ist diese auf angegebene Weise gefunden, so bleibt nur noch übrig, zwischen u und b eine mittlere Proportionale v zu finden, was auf bekannte Art geschehen kann.

Brünn, im Mai 1864.