

Das Entwerfen geografischer Chartennetze in Verbindung mit dem mathematischen Unterrichte am Obergymnasium.

Ob man den Zweck des mathematischen Unterrichtes an Gymnasien in der Einübung gewisser im gewöhnlichen Leben vorkommender Rechnungen erkenne, ob man ihn vorzugsweise als ein wichtiges Hilfsmittel formaler Denküben ansehe, oder ob man durch ihn den Schülern eine reiche Quelle schönster Entdeckungen und unabänderlicher Wahrheiten eröffnen will; immerhin wird es zur Belebung des Unterrichtes Vieles beitragen, wenn dabei hauptsächlich diejenigen Anwendungen der Theorie ausgewählt werden, welche dem Wesen des Gymnasial-Unterrichtes am meisten entsprechen, und zum Verständniss anderer Gegenstände desselben das ihrige beitragen. Auf eine solche Anwendung will ich meine Fachgenossen aufmerksam machen, weil sie in gar mancher Hinsicht Beachtung verdient, dieselbe aber, so viel mir bekannt, in der Regel nicht findet.

Ihr Gegenstand ist das Entwerfen der, bei Charten einzelner Provinzen, Länder, ganzer Reiche und Welttheile in Anwendung kommenden Netze.

Ausserdem, dass nicht leicht ein anderer Gegenstand eine so unmittelbare Anwendung der Lehren der Geometrie und Trigonometrie zulässt, wie gerade dieser, bestimmen mich auch noch andere, erhebliche Gründe zu diesem Vorschlage. Die Herstellung der Chartenwerke ist gegenwärtig weit vorgeschritten; in schöner Ausstattung, grosser Genauigkeit, und vermöge ihres geringeren Preisses, sind dieselben in allen Händen; ihrer bedient sich beim geografischen Unterrichte der Schüler, wie bei tausend Veranlassungen derjenige, welcher sich über Lage und Gestalt einzelner Punkte, oder ganzer Parthien der Erdoberfläche Rath holen will. Man muss wohl glauben, dass Jedermann, dem die Art, wie die Charten konstruirt werden, nicht bekannt ist, oder welcher höchstens weiss, dass die eine Gattung von Linien Meridiane, und die andere Parallelkreise vorstellen, sich die Frage gestellt habe, warum sie an verschiedenen Charten verschieden angebracht sind, wie sie gefunden werden, wie es sich mit der Richtigkeit der bildlichen Darstellung verhalte, in wie ferne sich aus Charten die Entfernungen von Punkten entnehmen lassen, und ob man etwa auch den Flächeninhalt, wenn auch nur genähert, aus diesem oder jenem Chartennetze finden könne. Welcher Studirende sollte sich derartige Fragen häufiger stellen, als gerade der, der den klassischen Studien obliegt, der sich so häufig im Laufe seiner Studien auf die Abbildungen ferner und naher Länder verwiesen sieht, welche der Schauplatz geschichtlicher Ereignisse, die Heimath berühmter Männer u. s. w. gewesen sind.

Die geografischen Studien gewinnen aber auch in Oesterreich mit jedem Tage mehr an Bedeutung; die Gründung des k. k. geografischen Institutes, der neuerliche, so freudig aufgenommene Antrag des hohen Ministeriums zur Erweiterung des geografischen Unterrichtes an den k. k. Gymnasien, die Fahrt der Novara, die fast aller Orten im Gange befindlichen Aufnahmen der Bodengestalt, die geognostischen Charten, die täglich mehr an Bedeutung gewinnen — sind sprechende Beweise hiefür, die ich wohl berühren darf, um meine Ansicht, dass es für jeden Gebildeten nothwendig sei zu wissen, wie die Charten entworfen werden, und in wie ferne sie, worauf es doch schliesslich immer abgesehen ist, — eine getreue bildliche Darstellung geben oder nicht, zu bekräftigen. So wenig es nun meine Absicht sein kann, hiebei materiell Neues vorzubringen, — denn der Gegenstand kann sowohl in theoretischer als praktischer Beziehung fast als abgeschlossen betrachtet werden — so dürfte die Mittheilung des Folgenden doch schon durch die Auswahl des vorzugsweise Wichtigen und Wissenswerthen, wie ich glaube, wegen der möglichst vereinfachten Darstellung, meinen Fachgenossen nicht ganz unwillkommen sein, indem ich dadurch einen Gegenstand in Anregung bringe, welcher bis jetzt zu wenig beachtet wurde, und indem ich zugleich den Umfang, die Art und Weise bezeichne, in welcher er sich gerade für Gymnasialschüler, etwa am Schlusse der siebenten Klasse, zweckentsprechend behandeln liesse, wobei es mir jedoch nicht einfallen kann, gerade diese Darstellungsweise der Sache für die beste zu halten.

Der Haupttext wird sich auf die Benutzung elementarer Hilfsmittel beschränken, weitere Ausführungen aber, welche höhere Analysis erfordern, werden die Anmerkungen enthalten.

Ich werde die vorliegende kleine Arbeit in zwei Abtheilungen bringen und dabei die folgenden Netze betrachten: 1^{tes} Netze für einzelne Länder und besondere Zwecke; 2^{tes} perspektivische Netze zur Darstellung ganzer Welttheile und der Hemisphären.

I.

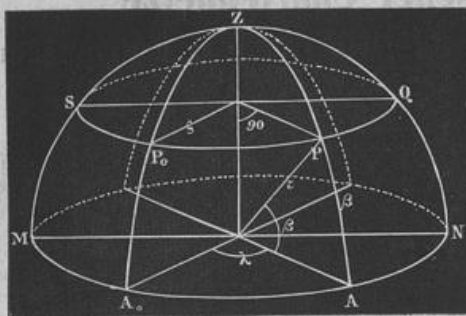
Es scheint angemessen, einige öfter zur Sprache kommende Zahlen und Grundbegriffe vor Allem auseinander zu setzen.

Die Erde wird hier durchaus als Kugel vorausgesetzt. Was unter Erdaxe, Pol, Meridian, Aequator, Parallelkreis, geografischer Länge und Breite verstanden wird, ist bekannt. Es ist nur beizufügen, dass nach den neuesten Bestimmungen von

*

Bessel, die kleine Halbaxe der Erde = 5261159.55, die grosse Halbaxe = 5272077.14 Toisen ist, woraus sich als Mittelwerth der Radius der Erde $r=5266608$ Toisen, für den vorliegenden Zweck hinreichend genau, ergibt. Unter einem Grade des Meridians oder Aequators versteht man die auf seinem Umfange gemessene Bogenlänge, welche einem Winkel von einem Grade am Erdzentrum entspricht. Bei Annahme des obigen mittleren Werthes für den Erdradius ist somit ein Grad = 56985.29 Toisen = 58560.57 Wiener

MN Aequator, z Pol, PQ Parallelkreis in der Breite β



Klafter, eine Länge, welche auf der Charte verjüngt dargestellt, durchgehends mit g bezeichnet werden wird, so dass also g immer 15 geographische Meilen, die Meile zu 3904.02 Wiener Klafter, vorstellt, und darum Meilenmassstab genannt werden soll. Auch kann man den Radius der Erde durch Grade ausdrücken, wodurch man $r=57525$ g erhält.

Die Grade der Parallelkreise jedoch sind mit der Breite veränderlich; nämlich, wenn β die Breite und ρ den Radius eines Parallelkreises bezeichnet, so ist offenbar $\rho=r \cos \beta$, und sofort $P_0 P=A_0 A \cos \beta$, und wegen $A_0 A=l g$, wobei l die geographische Länge des Punktes P vom Anfangsmeridiane $A_0 P_0 Z$ (gewöhnlich der durch Ferro*), oder in neuerer Zeit, der durch irgend eine Hauptsternwarte gehende) ausgedrückt in Sexagesimalgraden bedeutet.

Man sieht hieraus, dass die Parallelgrade gegen den Pol hin, und zwar dem Cosinus der Breite proportional abnehmen, wodurch die sogenannte Convergenz der Meridiane bestimmt ist.

Es ist vielleicht für manchen Leser erwünscht, eine kleine Zusammenstellung der geographischen Lage von grösseren und kleineren Städten, mit besonderer Bedachtnahme auf die österreichische Monarchie, zu Uebungen im Chartzeichnen, hier zu finden, wobei noch bemerkt werden muss, dass in die Tabelle nur solche ausserösterreichische Städte aufgenommen wurden, deren Lage auf astronomischem Wege bestimmt wurde.

Orte	Länge von Paris	Breite	Orte	Länge von Paris	Breite	Orte	Länge von Paris	Breite
Altona . . .	7° 56' 15"	53° 52' 45"	Hradisch . . .	14° 57' 50"	49° 56' 52"	Olmütz . . .	14° 56' 55"	49° 55' 45"
Bergamo . . .	7. 20. 55	45. 41. 55	Iglau . . .	15. 15. 54	49. 25. 48	Oxford . . .	-5. 56. 1	51. 45. 56
Berlin . . .	14. 5. 23	52. 50. 17	Innsbruck . . .	9. 5. 44	47. 16. 10	Padua . . .	9. 52. 3	45. 24. 5
Bern . . .	5. 6. 11	46. 37. 6	Karlsbad . . .	10. 52. 47	50. 15. 58	Palermo . . .	11. 1. 2	58. 6. 44
Bonn . . .	4. 43. 43	50. 45. 43	Königsberg . . .	18. 9. 45	54. 42. 50	Paris . . .	0. 0. 0	48. 50. 15
Bregenz . . .	7. 25. 40	47. 50. 50	Kopenhagen . . .	10. 14. 55	55. 40. 35	Petersburg . . .	27. 58. 1	59. 56. 50
Bremen . . .	6. 28. 50	55. 4. 56	Krakau . . .	17. 57. 26	50. 5. 50	Pilsen . . .	11. 2. 52	49. 44. 45
Brünn . . .	14. 16. 50	49. 11. 59	Krems . . .	15. 15. 45	48. 21. 50	Prag . . .	12. 5. 59	50. 5. 49
Brüssel . . .	2. 1. 52	50. 51. 11	Kremsmünster . . .	11. 47. 40	48. 5. 29	Pressburg . . .	14. 50. 50	48. 8. 7
Christiania . . .	8. 25. 20	59. 54. 44	Laibach . . .	12. 10. 26	46. 2. 57	Rom . . .	10. 8. 50	41. 53. 52
Danzig . . .	16. 20. 55	54. 21. 18	Leyden . . .	2. 9. 0	52. 9. 27	Salzburg . . .	10. 42. 44	47. 47. 45
Dorpat . . .	24. 25. 25	58. 22. 47	Leipzig . . .	10. 2. 11	51. 20. 24	Speyer . . .	6. 6. 13	49. 18. 55
Dresden . . .	11. 24. 8	51. 5. 22	Linz . . .	11. 57. 5	48. 18. 19	Stockholm . . .	15. 45. 20	59. 20. 54
Dublin . . .	-8. 40. 52	55. 25. 15	London . . .	-2. 29. 59	51. 51. 50	Triest . . .	11. 26. 12	45. 58. 57
Edinburg . . .	-5. 51. 16	55. 57. 25	Mailand . . .	6. 51. 18	45. 28. 1	Troppau . . .	49. 56. 24	55. 55. 52
Fiume . . .	12. 5. 16	45. 20. 10	Mannheim . . .	6. 7. 51	49. 29. 15	Turin . . .	5. 21. 44	45. 4. 6
Florenz . . .	8. 55. 50	45. 56. 41	Moskau . . .	53. 15. 51	55. 45. 20	Venedig . . .	10. 0. 59	45. 25. 50
Genf . . .	5. 49. 5	46. 11. 59	München . . .	9. 16. 15	48. 8. 45	Verona . . .	8. 59. 0	45. 26. 7
Göttingen . . .	7. 56. 12	51. 51. 48	Neapel . . .	11. 54. 42	40. 51. 47	Warschau . . .	18. 41. 25	52. 15. 5
Gotha . . .	8. 25. 55	50. 56. 5	Nikolajew . . .	29. 58. 24	46. 58. 21	Wien . . .	14. 2. 40	48. 12. 56
Graz . . .	15. 6. 26	47. 4. 20	Ofen . . .	16. 42. 46	47. 29. 10			

Die Länge auf Ferro bezogen wird erhalten, wenn man zur Länge, welche man aus obiger Tabelle entnimmt, noch $20^{\circ} 0' 0''$ d. i. den Längenunterschied zwischen Paris und Ferro addirt.

II.

Unter einem geographischen Netze ist im Allgemeinen die geometrische Vorschrift zu verstehen, nach welcher Länge und Breite eines Ortes auf der Charte einzutragen sind. An sich ist also, soferne keine näheren Bedingungen gestellt

sind, ein solches Netz etwas sehr willkürliches. Die nähere Bestimmung des Netzes ergibt sich erst aus den Anforderungen, welchen die Charte genügen soll, wobei im Allgemeinen immer verlangt wird, dass das Netz sich leicht entwerfen lasse, und eine getreue Abbildung liefere. Der letzteren Anforderung aber lässt sich in voller Strenge nicht genügen, denn niemals lässt sich eine Figur auf der Kugel,

*) Weil dadurch die ganze Oberfläche der Erde in zwei Hemisphären zerfällt, wobei die eine gerade die alte, und die andere die neue Welt darstellt.

in der Ebene so abbilden, dass die Abbildung dem Urbilde in allen Theilen durchaus geometrisch ähnlich ist. In soferne also wird jede Charte an einer Entstellung des Darzustellenden leiden. Besonderen Bedingungen aber kann man in vielen Fällen ganz streng entsprechen, so z. B., dass, wie auf der Kugel, so auch auf der Charte die Meridiane und Parallelkreise aufeinander senkrecht stehen, dass die Meridiane, wie auf der Kugel, gleiche Winkel miteinander bilden; dass Meridian- und Parallelgrade in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie auf der Kugel, dass die Charte den Flächeninhalt angenähert oder selbst ganz richtig darstelle, dass die kleinsten Theile der Abbildung dem Abgebildeten geometrisch ähnlich seien; oder endlich, dass die Projektion einer gegebenen Linie auf der Kugel, sich auf der Charte als eine andere gegebene z. B. gerade Linie darstelle, u. s. w.

Man nennt derartige, der einen oder anderen Bedingung entsprechende Netze, Netze für besondere Zwecke; während die nach den Grundsätzen der Perspektive entworfenen Netze, besonderen Bedingungen, wenigstens nicht streng, und nicht auf grössere Ausdehnungen, zu entsprechen vermögen.

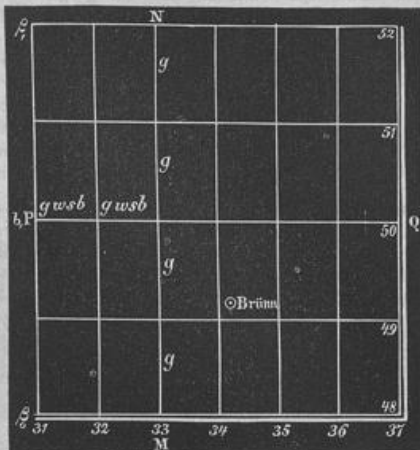
Ich wende mich zur Sache, und werde nun die in den Atlanten vorzugsweise gebräuchlichen Netzarten, mit dem einfachsten beginnend, soweit es zum Verständniss ihrer Konstruktion nothwendig, im Einzelnen betrachten.

A) Netze für besondere Zwecke.

III.

Für Länder von geringer Breitenausdehnung (etwa einige Grade nur), kann man das folgende überaus einfache und zum Eintragen der Orte sehr bequeme Netz anwenden, bei welchem sich die Meridiane und Parallelen als gerade und parallele Linien darstellen, und wenigstens ein Parallelkreis (der mittlere) richtig getheilt ist.

Man wähle je nach dem Massstabe, in welchem die Charte gezeichnet werden soll, die Länge g eines Grades,



und trage sie auf einen Meridian MN , so oft als nothwendig, auf, und ziehe auf MN senkrecht durch die Theilungs-

punkte gerade Linien, welche die Parallelkreise vorstellen. Es seien β_0 und β_1 die Breiten der äussersten Parallelen, und $b = \frac{\beta_0 + \beta_1}{2}$ die mittlere Breite in PQ , so ist der, derselben entsprechende Parallelkreisgrad $= g \cos b$. Man trage nun, so oft es erforderlich, diese Länge auf PQ , vom Durchschnittspunkt mit MN aus, nach rechts und links auf, und ziehe durch die Theilungspunkte Parallele mit MN , so sind dies die Meridiane des Netzes.

Um Punkte nach gegebener Länge und Breite einzutragen, theile man sowohl die Länge g , als auch $g \cos b$ in so kleine gleiche Theile, als es ihre Grössen noch gestatten, um die irgend einem Punkte entsprechende Länge und Breite genau abnehmen und auftragen zu können, wodurch man die beiden hier nothwendigen Massstäbe erhält.

Das Eintragen geschieht, indem man von den am nächsten liegenden, mit nächst kleineren Breiten und Längen bezeichneten Parallelkreisen und Meridianen ausgehend, den Ueberschuss der Breite und Länge des einzutragenden Punktes zuschlägt, und wie aus der Figur ersichtlich verfährt.

Obgleich dieses Netz an dem Mangel leidet, dass nur ein Parallelkreis richtig getheilt ist, und in Folge dessen die Fehler um so grösser werden, je mehr die Breite von der mittleren abweicht, so zeichnet es sich doch durch grosse Einfachheit aus, und besitzt den Vortheil, dass Meridiane und Parallelkreise aufeinander senkrecht stehen, und die ersteren wie in der Wirklichkeit, gleiche Winkel (freilich hier $= 0$) mit einander bilden, so wie endlich, dass seine Fehler mit zunehmender Länge nicht wachsen. Auch die Entfernungen, nicht weit von einander abliegender Punkte, lassen sich mit Hilfe des Massstabes mit ziemlicher Genauigkeit abnehmen. Der Fehler, der beim Abgreifen der Entfernungen aus der Charte entspringt, kann leicht bestimmt werden.

Bezeichnet man mit $\lambda'_0, \lambda'_1, \beta'_0, \beta'_1$ entsprechend die Längen und Breiten zweier Punkte, mit δ die in Winkelgraden gemessene Entfernung, mit D die Entfernung derselben zwei Punkte, wie sie sich aus der Charte ergibt, so ist offenbar

$$D = 15 \sqrt{(\lambda'_1 - \lambda'_0)^2 \cos^2 b + (\beta'_1 - \beta'_0)^2}$$

$$\cos \delta = \sin \beta'_0 \sin \beta'_1 + \cos \beta'_0 \cos \beta'_1 \cos (\lambda'_0 - \lambda'_1)$$

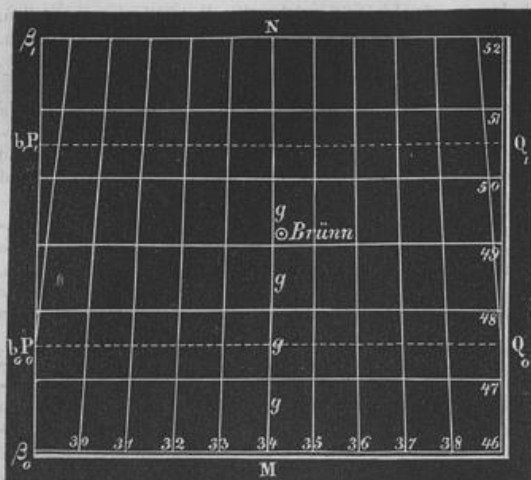
Hat man hieraus δ in Graden gefunden, so ergibt sich die wahre lineare Distanz Δ auf der Kugel in geographischen Meilen aus der Gleichung: $\Delta = 15 \delta$, und es ist somit der Fehler der Charte bezüglich des Abgreifens $= \Delta - D$. Dass der Fehler für grössere Werthe $\lambda'_1 - \lambda'_0$ und $\beta'_1 - \beta'_0$ sehr beträchtlich werden kann, ist leicht einzusehen.

Dieses Netz ist, der oben aufgezählten Vorzüge wegen, vielfach von Reisenden zu Charten benützt worden.

IV.

Verzeichnet man auf einem Parallelkreise die Punkte, durch welche die Meridiane gehen sollen und lässt letztere, wie auf der Kugel konvergiren, während sie immer gerade Linien bleiben, so kann man ein Netz erhalten, bei welchem zwei, der noch immer parallel bleibenden Parallelkreise richtig getheilt sind.

Nachdem nämlich der Meridian MN durch g richtig getheilt, und durch die Theilungspunkte die Parallelkreise senkrecht auf MN gezogen sind, berechne man b_0 und b_1 aus den



beiden äussersten β_0 und β_1 , bis auf welche sich die Charte ausdehnen soll, aus folgenden Gleichungen:

$$b_0 = \beta_0 + \frac{\beta_1 - \beta_0}{4} = \frac{5\beta_0 + \beta_1}{4}; \quad b_1 = \beta_1 - \frac{\beta_1 - \beta_0}{4} = \frac{5\beta_1 + \beta_0}{4}$$

und theile die Parallelkreise P_0Q_0 und P_1Q_1 in gleiche Theile, welche den Längen $g \cos b_0$ und $g \cos b_1$ entsprechen, und verbinde die Theilungspunkte durch gerade Linien, so stellen diese, welche gehörig verlängert, sich in einem Punkte schneiden werden, die Meridiane des Netzes dar.

Behufs der Eintragung eines Punktes, bedient man sich hierzu dreier Massstabe: g , $g \cos b_0$, $g \cos b_1$, die, wie bei dem vorigen Netze bemerkt, einzutheilen sind. Zur Würdigung dieses Netzes ist zu bemerken, dass es auf grössere Breitenausdehnung, als das frühere, noch mit ziemlicher Genauigkeit verwendet werden kann, weil eben die Fehler, wegen unrichtiger Theilung der Parallelen, gegen die Ränder hin, hier nicht die Grösse erreichen können, wie bei dem vorigen Netze; dass ferner, wenn der Längenunterschied nicht beträchtlich ist, auch die Meridiane noch ziemlich nahe auf den Parallelkreisen senkrecht stehen, und unter sich fast gleiche Winkel bilden.

Während also das vorige Netz hauptsächlich für kleine Breiten- und grosse Längen-Ausdehnungen sich besonders gut eignet, ist bei dem vorliegenden gerade das Umgekehrte der Fall. In früherer Zeit wurde dieses Netz vielfach verwendet, während es gegenwärtig durch die folgenden noch vollkommeneren ersetzt wird.

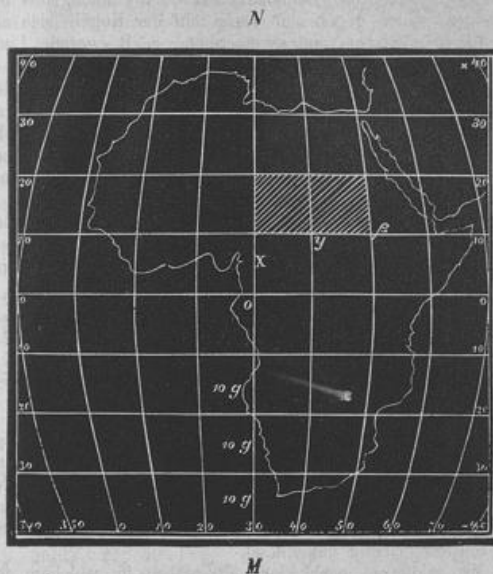
V.

Nimmt man den mittleren Meridian als Gerade an, trägt darauf die Breitengrade wie bisher einander gleich, nämlich $= g$, auf, und verzeichnet nun die Parallelkreise als parallele, auf jenen mittleren Meridiane senkrechte gerade Linien, theilt sofort jeden Parallelkreis richtig nach Maassgabe seiner Breite, also nach dem Ausdrucke $g \cos \beta$ (wobei β die

betreffende Breite des Parallelkreises vorstellt), und verbindet nun schliesslich die entsprechenden Theilpunkte der Parallelen durch eine krumme Linie, so erhält man ein Netz, welches nach seinem Erfinder das Flamsteed'sche Netz genannt, und vorzugsweise zu Himmelscharten verwendet wird, sich übrigens auch noch sehr gut für am Aequator liegende Länder z. B. für Charten von Afrika eignet.

Wie in dieses Netz einzelne Orte nach Länge und Breite, oder Gestirne nach Rektascension und Deklination einzutragen oder abzunehmen sind, bedarf wohl keiner näheren Erklärung.

Flamsteed'sches Netz.



Man wird leicht bemerken, dass für grosse Längenausdehnungen, insbesondere gegen die Pole hin, die Meridiane mit den Parallelen Winkel bilden, welche zum Theil sehr beträchtlich von 90° abweichen, wodurch das Bild bedeutend verzerrt wird; dass sich aber dieses Netz immerhin auf ein ziemlich grosses Stück der Kugeloberfläche, und, wie schon bemerkt, für Aequatoral-Länder besonders gut verwenden lässt, weil unmittelbar am Aequator alle Bedingungen, die man an ein Netz stellen kann, auch richtig erfüllt sind.

Man kann leicht die Gleichung der Meridian-Kurven ableiten. Es seien x, y die rechtwinklichten Koordinaten, bezogen auf den Aequator und den mittelsten Meridian MN , so hat man offenbar, vermöge der Konstruktion des Netzes, für einen Punkt auf der Charte, dessen Länge λ und Breite β ist, die Gleichungen:

$$x = \beta g, \quad y = \lambda g \cos \beta \text{ folglich durch Elimination von } \beta:$$

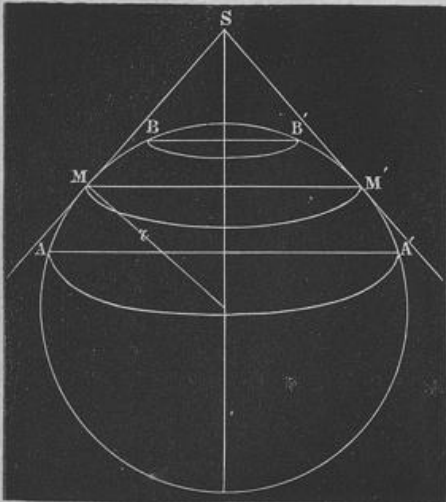
$y = \lambda g \cos \frac{x}{g}$, welches die Gleichung für alle Punkte eines bestimmten Meridians ist. Wie man sieht, ist die Kurve eine Sinuslinie.

Es lässt sich auch zeigen, dass die Charte den Flächeninhalt irgend eines Zonentheiles, und folglich auch (weil

man jede Figur in Zonenstreifen zerlegen kann) den einer jeden Figur richtig darstellt*).

VI.

Man gelangt durch folgende Betrachtung zu einer sehr brauchbaren Netzart.



Es seien AA' , BB' die äussersten Parallelkreise des abzubildenden Landes, β_0 , β_1 ihre Breiten. MM' sei der, der

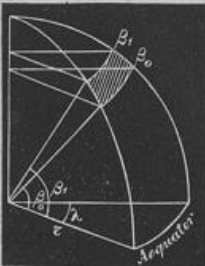
*) Um dies zu zeigen, sei ds ein unendlich schmales Flächenstück einer Zone auf der Charta, so ist $ds = y dx$, oder also $ds = \lambda g \cos \beta \cdot g d\beta$ oder wenn man sich λ in Graden, β dagegen in Bogentheilen für den Radius = 1 ausgedrückt denkt,

$ds = \lambda g \cos \beta \cdot r d\beta$
 mithin, wenn man integriert:
 $s = r \lambda g (\sin \beta + Const.)$ oder zwischen den Grenzen β_0 und β_1 genommen:

$$s = r \lambda g (\sin \beta_1 - \sin \beta_0)$$

oder wegen $r\pi = 180 g$, also $r = \frac{180}{\pi} g$
 auch $s = \frac{180}{\pi} g^2 \lambda (\sin \beta_1 - \sin \beta_0)$,

worin man sich wieder unter β_0 , β_1 die Breiten in Graden ausgedrückt denken kann.



Auf der Kugel aber ist der Flächeninhalt eines solchen Zonenstückes, wie leicht zu sehen

$$s = \frac{r\pi}{180} \lambda (\sin \beta_1 - \sin \beta_0)$$

oder wegen $r = \frac{180}{\pi} g$, sofort

$$s = \frac{180}{\pi} g^2 \lambda (\sin \beta_1 - \sin \beta_0)$$

wie man sieht, derselbe Werth

Breite $b = \frac{\beta_0 + \beta_1}{2}$ entsprechende mittlere Parallelkreis. An

diesem denke man sich eine die Kugel tangirende Kegelfläche MSM' gelegt, die im Punkte S der Erdaxe ihre Spitze hat, so werden die, den aufeinander folgenden Längengraden entsprechenden Meridian-Ebenen, diese Kegelfläche nach geraden Linien schneiden, welche nach Ausbreitung der Kegelfläche in eine Ebene, wie auf der Kugel, durchaus gleiche Winkel mit einander bilden werden, und daher vorzüglich geeignet sind, als Projektionen für die Meridiane selbst zu dienen. Auch die Ebenen der Parallelkreise werden, gehörig erweitert, die Kegelfläche, und zwar nach Kreisen, schneiden, die nach Ausbreitung der Kegelfläche wieder als Kreise, oder vielmehr als Kreisbögen, erscheinen werden.

Obgleich nun alle diese Kreise einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, und die geradlinigen Meridiane senkrecht durchschneiden, so kann man sich ihrer doch nicht strengere als Projektionen der Parallelkreise bedienen, indem dadurch notwendig eine Entstellung des Bildes entstehen müsste, die um so beträchtlicher wäre, je mehr die Breiten β_0 und β_1 von der mittleren des Kreises MM' verschieden wären, und weil namentlich die Breitengrade ungleich werden müssten, während man, im Interesse einer möglichst getreuen Darstellung, an der Gleichheit jener Grade durchgehend festzuhalten sucht. Aus diesem Grunde und dem weiteren, dass aus jener Annahme auch die Theilung der Parallelkreise unabänderlich bestimmt hervorgehen würde, dabei aber ebenfalls um so unrichtiger, je mehr ihre Breite von der mittleren b verschieden wäre, hat man die aus der obigen Betrachtung sich darbietende sogenannte Kegelprojektion nicht in ihrer ganzen Consequenz, sondern nur dasjenige von ihr beibehalten, was besonders vortheilhaft ist, nämlich die Projektion der Meridiane, die richtige Theilung des mittelsten Parallelkreises, und die Kegelspitze S als Mittelpunkt der Parallelkreise. Was aber die Theilung der Meridiane und aller übrigen Parallelkreise betrifft, so macht man die erstere, genau wie auf der Kugel, nämlich durchaus gleichmässig, und bestimmt dadurch schon die Theilung der letzteren, die allerdings mit Ausnahme eines einzigen, nicht mehr richtig sind.

Was die Construction dieses zuerst von Senex und Vaugondy angegebenen Netzes betrifft, so handelt es sich dabei nur um den Radius $MS = R$ der Abwicklung des mittelsten Parallelkreises, welcher sich aus der Formel

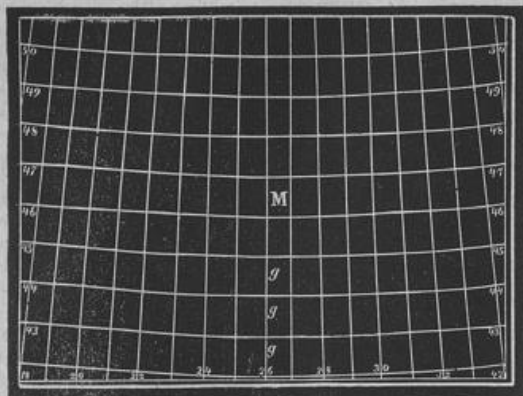
$$R = r \cot g b, \text{ oder } R = 37.525 g \cot g \frac{\beta_0 + \beta_1}{2} \text{ ergibt.}$$

Um das Netz zu construiren, trage man also auf den Meridian AB die Theile $= g$, von M aus nach oben und unten, ziehe von dem oben bestimmten Mittelpunkte S aus die concentrischen Parallelkreise, und theile den mittelsten derselben, welcher durch M geht in gleiche Theile

$= g \cos \frac{\beta_0 + \beta_1}{2}$, und ziehe schliesslich die geradlinigten Meridiane.

Dieses Netz wird, so lange die Breite von der mittleren b nur unbedeutend abweicht, recht gute, mit der Zunahme dieser Abweichungen aber immer unrichtigere Abbildungen liefern. Der wesentlichste Vortheil desselben besteht darin, dass die Meridiane und Parallelen aufeinander senkrecht stehen, dass die Meridiane, wie auf der Kugel, konvergiren, dass sie richtig getheilt sind, und miteinander gleiche Winkel bilden, dass ferner die Entstellung mit der

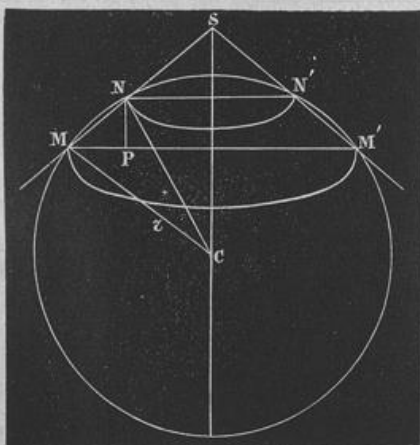
Kegelprojection von Senex und Vaugondy.



Länge nicht wächst, und dass sowohl der Entwurf desselben, als auch das Eintragen und Abnehmen von Punkten, sich auf sehr einfache Weise ausführen lässt.

VII.

Eine der vorhergehenden durchaus analoge Betrachtung leitet zur Construction eines Netzes, welches dem vorigen gegenüber den Vortheil zweier richtig getheilter Parallelkreise besitzt. Zu dem Ende denkt man sich, statt



einer tangirenden Kegelfläche, eine andere, welche durch zwei Parallelkreise $MM'NN'$ geht, also die Kugel schneidet. Dabei werden die Breiten dieser beiden Parallelkreise so genommen, dass, wenn wieder β_0 und β_1 die äussersten Breiten des abzubildenden Landes bedeuten

die Breite von M $b_0 = \beta_0 + \frac{\beta_1 - \beta_0}{3} = \frac{2\beta_0 + \beta_1}{3}$

„ „ „ N $b_1 = \beta_1 - \frac{\beta_1 - \beta_0}{3} = \frac{2\beta_1 + \beta_0}{3}$

wird.

Was die Radien $R_0 = MS$, $R_1 = NS$ der Kreise M und N betrifft, wie sie in der Abwicklung erscheinen, so lassen sich diese leicht, wie folgt, berechnen. Man ziehe die Radien $MC = NC = r$ und falle von N auf MM' die senkrechte NP , so ist offenbar:

$$PM = r \cos b_0 - r \cos b_1$$

$$NM = 2r \sin \frac{b_1 - b_0}{2}, \text{ und da ferner}$$

$MM' = 2r \cos b_0$, $NN' = 2r \cos b_1$ ist, so wird man leicht finden, dass:

$$(r \cos b_0 - r \cos b_1) : 2r \sin \frac{b_1 - b_0}{2} = r \cos b_0 : R_0$$

$$2r \sin \frac{b_1 - b_0}{2}$$

woraus $R_0 = \frac{2r \sin \frac{b_1 - b_0}{2}}{\cos b_0 - \cos b_1} \cos b_0$ (1).

Eben so ist $(r \cos b_0 - r \cos b_1) : 2r \sin \frac{b_1 - b_0}{2} = r \cos b_1 : R_1$

$$2r \sin \frac{b_1 - b_0}{2}$$

woraus $R_1 = \frac{2r \sin \frac{b_1 - b_0}{2}}{\cos b_0 - \cos b_1} \cos b_1$ (2).

Da aber auch hierbei alle Meridiane einander gleich, folglich $R_0 - R_1 = g(b_1 - b_0)$ werden soll, so darf man von den Formeln (1) und (2) nicht in aller Strenge Gebrauch machen, weil sie jener Anforderung offenbar nicht genügen.

Dies ist aber sogleich der Fall, wenn man unter der wohl gestatteten Annahme, dass die Differenz $(b_1 - b_0)$ ziemlich klein sei, im Zähler für den *sinus* jedesmal den Bogen setzt, also statt jener Gleichungen dabei die folgenden anwendet:

$$R_0 = \frac{r(b_1 - b_0)}{\cos b_0 - \cos b_1} \cos b_0; R_1 = \frac{r(b_1 - b_0)}{\cos b_0 - \cos b_1} \cos b_1$$

oder, wenn man unter b_0 , b_1 nicht Bogengrößen für den Radius = 1, sondern die entsprechenden Winkel in Graden verstehen will:

$$R_0 = \frac{g(b_1 - b_0)}{\cos b_0 - \cos b_1} \cos b_0; R_1 = \frac{g(b_1 - b_0)}{\cos b_0 - \cos b_1} \cos b_1.$$

Wie man sieht, folgt daraus unmittelbar

$$R_0 - R_1 = g(b_1 - b_0), \text{ wie es sein soll.}$$

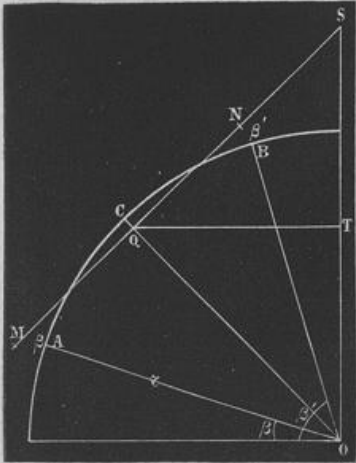
Die Parallelen werden auch hier als konzentrische Kreise, und die Meridiane als durch die Theilungspunkte der zwei nach $g \cos b_0$ und $g \cos b_1$ richtig getheilten Parallelen gehende gerade Linien gezeichnet.

Das hiedurch bestimmte Netz wurde zuerst von dem französischen Geografen De l'Isle in Vorschlag gebracht.

Die beim vorhergehenden Netze angegebenen Vorzüge gelten auch für dieses, nur kommt hier noch dazu, dass, obwohl gerade die mittlere Parthie der Charte nicht ganz richtig ist, doch zwei Parallele richtig getheilt sind, und daher dieses Netz für noch grössere Breiten-Differenzen anwendbar ist, als das frühere. Wie Euler gezeigt hat, können die Entfernungen, der in dieses Netz eingetragenen Orte noch mit sehr erheblicher Genauigkeit mittelst des Massstabes g abgenommen werden, nur darf auch hier, wie bei dem vorigen Netze der Aequator nicht in das Bereich der Charte fallen, weil sonst das Bild stark verzerrt würde. Dieses Netz wurde im vorigen Jahrhundert zu einer Charte des ganzen russischen Reiches angewendet.

VIII.

Von den beiden bisher betrachteten Kegelprojektionen nicht wesentlich verschieden, ist die folgende nach dem Engländer Murdoch benannte Projektionsart. Derselbe stellte an das Netz folgende drei Anforderungen: 1^{ten} die



Seite (MN) des zur Projektion dienenden Kegels soll auf den Radius (CO), welcher der Mitte (C) des gegebenen Meridianbogens (AB) entspricht, senkrecht stehen; 2^{ten} die Länge (MN) der Seite des Kegels soll jener des Meridianbogens (AB) genau gleich sein, u. zugleich der Durchschnittspunkt (Q) auf der Mitte von MN liegen; 3^{ten} soll die Oberfläche der Kegelzone eben so gross sein, als die betreffende Kugelzone.

Es kommt nun darauf an, diesen Anforderungen entsprechend, die zur Ausbreitung der Kegelfläche nötigen Grössen zu bestimmen.

Hierunter gehört vor Allem der Radius (SQ) des mittleren Parallelkreises, wozu man vorerst den Radius QT zu berechnen hat. Es ist zu dem Ende, wenn β, β_1 die Breiten der Parallelen A und B in Sexagesimalgraden bezeichnen, $ACB = g(\beta_1 - \beta)$ mithin auch $MN = g(\beta_1 - \beta)$.

Da nun, der Forderung gemäss, der Punkt Q in den Mitte zwischen M und N liegt, so hat man bekanntlich für die Fläche des abgekürzten von der Seite MN beschriebenen Kegels $= 2\pi \cdot QT \cdot MN = 2\pi g(\beta_1 - \beta) \cdot QT$. Andererseits ist die Oberfläche der Kugelzone

$$= 2r^2 \pi (\sin \beta_1 - \sin \beta) = \frac{2}{\pi} \cdot 180^2 \cdot g^2 (\sin \beta_1 - \sin \beta).$$

Da nun vermöge der dritten Forderung diese beiden Inhalte gleich sein sollen, so muss

$$2\pi g(\beta_1 - \beta) \cdot QT = \frac{2}{\pi} \cdot 180^2 \cdot g^2 (\sin \beta_1 - \sin \beta) \text{ sein,}$$

$$\text{woraus } QT = \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \cdot g \cdot \frac{\sin \beta_1 - \sin \beta}{\beta_1 - \beta} \text{ folgt.}$$

Um SQ zu erhalten, bemerke man nur, dass der Winkel $SQT = 90 - \frac{\beta_1 + \beta}{2}$ und $SQ = \frac{QS}{\cos SQT}$ ist, woraus, wenn man den Radius $SQ = R$ setzt,

$$R = \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \cdot g \cdot \frac{\sin \beta_1 - \sin \beta}{(\beta_1 - \beta) \sin \frac{\beta_1 + \beta}{2}} \text{ oder wegen}$$

$$\sin \beta_1 - \sin \beta = 2 \cos \frac{\beta_1 + \beta}{2} \sin \frac{\beta_1 - \beta}{2} \text{ auch}$$

$$R = \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{g}{\beta_1 - \beta} \cdot \cotg \frac{\beta_1 + \beta}{2} \sin \frac{\beta_1 - \beta}{2} \text{ folgt.}$$

Ist der mittlere Parallelkreis mit diesem Radius bereits gezeichnet, so handelt es sich nur noch um seine Ein-

theilung. Da aber dieser Kreis nicht, wie das sonst der Fall ist, auf der Kugel liegt, so muss der Parallelgrad so bestimmt werden, dass das 360fache desselben der Peripherie des mit dem Radius QT beschriebenen Kreises gleich werde. Bezeichnet man also mit l die Länge des Grades auf dem mittelsten Parallelen, so muss $360 \cdot l = 2\pi \cdot QT$ sein, woraus, wenn man für QT den obigen Ausdruck substituirt

$$l = \frac{\pi}{180} \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \cdot g \cdot \frac{\sin \beta_1 - \sin \beta}{\beta_1 - \beta} \text{ oder}$$

$$l = \frac{180}{\pi} \cdot g \cdot \frac{\sin \beta_1 - \sin \beta}{\beta_1 - \beta} \text{ folgt.}$$

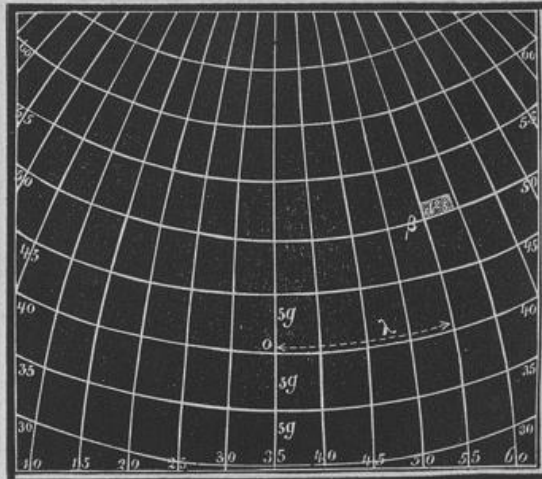
Sobald diese Eintheilung vollzogen ist, können die geradlinigen Meridiane gezeichnet werden. Was schliesslich die übrigen Parallelkreise betrifft, so werden die Meridiangrade, wie bei allen vorhergehenden Netzen in ihrer natürlichen Grösse aufgetragen, und durch die Theilpunkte aus dem oben bestimmten Zentrum Kreise gezogen, welche die verlangten Parallelkreise vorstellen, und damit ist das Netz konstruirt.

Dieses Netz zeichnet sich vor den beiden früheren dadurch aus, dass die Bestimmung des Kegels nicht aus mehr oder weniger willkürlicher Annahme hervorgeht, sondern aus ganz bestimmten geometrischen Bedingungen, welche der Genauigkeit des Netzes durchaus förderlich sind, erhalten werden; ausserdem verursacht seine Berechnung keine beträchtlich grössere Umständlichkeit, als die der übrigen Kegelprojektionen. — Aber alle diese drei Arten leiden an dem gemeinschaftlichen Uebelstande, dass bei ihnen nur ein, höchstens zwei Parallelkreise richtig getheilt sind, — ein Umstand, der auch durch die sorgfältigere Bestimmung des Kegels beim Murdoch'schen Netze nicht unschädlich gemacht werden kann, so lange darin die Meridiane durch gerade Linien dargestellt werden sollen. Um daher der aus dieser Annahme entspringenden Ungenauigkeit zu begegnen, hat man auf die geradlinigen Meridiane verzichtet, und ist dabei zu Netzarten gelangt, die wir nun näher beschreiben wollen.

IX.

Theilt man bei dem in Art. 6 angegebenen Netze, bei welchem b die Breite des mittleren Parallelen bedeutet, und

Netz von Boune.



$R = r \cot g. b$ gefunden wurde, nicht bloß diesen einen Parallelkreis, sondern alle von dem Mittelpunkte S aus gezogenen konzentrischen Parallelen im richtigen Verhältnisse, so ergeben sich die Meridiane als die krummen Linien, welche durch die kontinuierliche Verbindung jener Theilpunkte erhalten werden, wodurch das zuerst von Bonne angegebene Netz entsteht. Auch dieses Netz stellt den Flächeninhalt richtig dar^{*)}, und giebt die Entfernungen schon sehr genau, insbesondere genauer, als alle früheren Netze an, was schon aus dem Grunde sich erwarten liess, weil die Entfernungen der auf demselben Parallelkreise liegenden Oerter den entsprechenden Entfernungen auf der Charte genau proportional sind, und dass dies bei allen Oertern der Fall ist, welche auf dem mittleren Meridiane liegen. Es schadet hier nicht, wenn der Aequator in das Bereich der Charte fallen sollte; für Gegenden am Pole entsteht jedoch eine grosse Entstellung. In dieser Beziehung findet also, gegenüber der im Art. 6 und 7 beschriebenen Netzarten, das Umgekehrte statt.

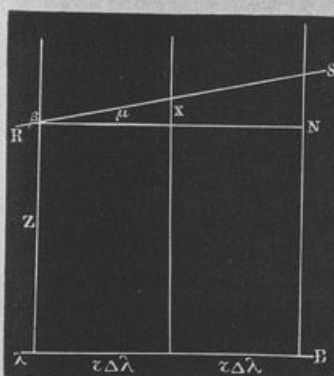
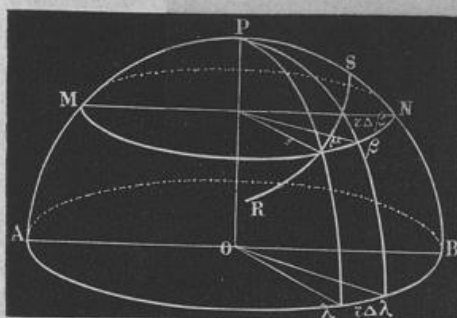
X.

Das Seechartennetz von Mercator.

Die meisten der bisher betrachteten Netze haben die Eigenschaft, dass sich auf ihnen alle grössten Kreise der Erdkugel als gerade Linien darstellen, und der grösste Theil des auf der Charte dargestellten Landes mehr oder weniger in seinem richtigen Verhältnisse erscheint. Für Landcharten sind diese beiden Eigenschaften die wichtigsten; für Seecharten dagegen ist ihre Bedeutung nur eine untergeordnete. Während man unter der Entfernung zweier Punkte auf dem festen Lande den Bogen des durch sie gehenden grössten Kreises versteht, misst der Seefahrer den Seeweg auf dem vom Schiffe wirklich durchlaufenen Wege, dies ist, auf der krummen Linie, welche das Schiff beschreibt, während ununterbrochen nach derselben Himmelsgegend gesteuert wird, und welche also die aufeinander folgenden Meridiane sämmtlich unter demselben Winkel durchsetzt. Diese Kurve heisst

Loxodromie, und diese, wie man sieht, besonders wichtige Kurve, ist es, welche sich auf Seecharten als gerade Linie darstellen soll, und für welche offenbar ein Netz erforderlich ist, welches von den bisher vorgetragenen wesentlich verschieden sein muss. Da nun die Loxodromie sich als gerade Linie darstellen, und mit allen Meridianen, wie auf der Kugel, gleiche Winkel bilden soll, so ist vor Allem klar, dass die Abbildung aller Meridiane, indem jeder derselben selbst eine Loxodromie ist, ebenfalls nur aus geraden einander parallelen Linien bestehen müsse, und zwar, wie sich von selbst versteht, wird man sie gleichweit, wie beim Aequator, also von Grad zu Grad um g von einander entfernt, annehmen. Was aber nun die Darstellung der Parallelkreise betrifft, so müssen sie als Loxodromien ebenfalls gerade Linien sein, und zwar muss sich ihre Entfernung, z. B. von Grad zu Grad, aus der oben an das Netz gestellten Forderung ableiten lassen.

In der That, man denke sich zwei Meridiane um die Differenz $r \Delta \lambda$ am Aequator, auf der Kugel und Charte, von einander entfernt; der Winkel der Loxodromie mit dem



Parallelkreise in der Breite β sei $= \mu$, und auf der Kugel sei $r\beta + r\Delta\beta$ die Breite des Punktes, in welchem sie den zweiten Meridian durchsetzt; auf der Charte dagegen x die entsprechende Zunahme an Breite, beim Übergang vom ersten auf den zweiten Meridian, so hat man auf der Kugel

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r \Delta \beta}{r \Delta \lambda \cos \beta} \quad (m)$$

auf der Charte $\operatorname{tg} \mu = \frac{x}{r \Delta \lambda}$

Durch Vergleichung dieser beiden Ausdrücke folgt:

$$\frac{x}{r \Delta \lambda} = \frac{\Delta \beta}{\Delta \lambda \cos \beta}, \text{ folglich } x = \frac{r \Delta \beta}{\cos \beta}$$

Diese Rechnung ist nun in so ferne nicht ganz genau, als das kleine Kugeldreieck als ein ebenes betrachtet worden ist; aber es wird Alles um so genauer sein, je kleiner jenes Dreieck, oder, je kleiner $\Delta \beta$ gewonnen wird. Nimmt

*) Dass die Charte den Flächeninhalt richtig darstelle, hat zuerst Mollweide in der Monatl. Correspondenz von Zach gezeigt; der Nachweis lässt sich, wie folgt, durchführen. Es sei $d^2 s$ der Inhalt

$$\begin{matrix} r d \lambda \cdot \cos \beta \\ d^2 s \\ r d \beta \end{matrix}$$

eines der unendlich kleinen Rechtecke, aus denen man sich die Zone zusammengesetzt denken kann, und dessen Dimensionen sich, wie folgt, bestimmen lassen. Es seien λ und β in Bogen-theilen für den Radius = 1 ausgedrückt, so ist die eine Seite des unendlich kleinen

(herausgezeichneten) Rechteckes $= r \cdot d\beta$, die andere $= r \cdot d\lambda \cdot \cos \beta$, folglich $d^2 s = r^2 \cos \beta \cdot d\beta \cdot d\lambda$. Integriert man nach λ , so folgt: $ds = \lambda r^2 \cos \beta \cdot d\beta$, und wenn man schliesslich noch nach β integrirt: $s = \lambda r^2 (\sin \beta_1 - \sin \beta_0)$.

Will man λ, β, β_0 wieder durch Sexagesimalgrade ausgedrückt voraussetzen, so ist statt λ zu setzen $\frac{g}{r} \lambda$, und man hat:

$$= g \cdot \lambda r (\sin \beta_1 - \sin \beta_0)$$

oder da $r = \frac{180}{\pi} \cdot g$ ist, folgt:

$$= \frac{180}{\pi} g^2 \lambda (\sin \beta_1 - \sin \beta_0)$$

ein Ausdruck, der, wie in der Note des Art. 5 gezeigt wurde, mit dem Inhalte der Kugelzone vollständig übereinstimmt.

man z. B. $\Delta\beta =$ einen Grad entsprechend, und heisst $r\Delta\beta = g$, so kommt der einfache Ausdruck

$$x = \frac{g}{\cos \beta} = g \sec \beta \text{ der Wahrheit schon sehr nahe.}$$

Mit Hilfe dieses Ausdruckes lässt sich die Entfernung z des der Breite β (Grad) entsprechenden Parallelkreises, der (von der Länge unabhängig) offenbar eine zu den Meridianen senkrechte Gerade ist, sehr leicht finden, indem man von Grad zu Grad der Breite, vom Aequator ausgehend, alle Stücke berechnet und addirt. Man hat dann:

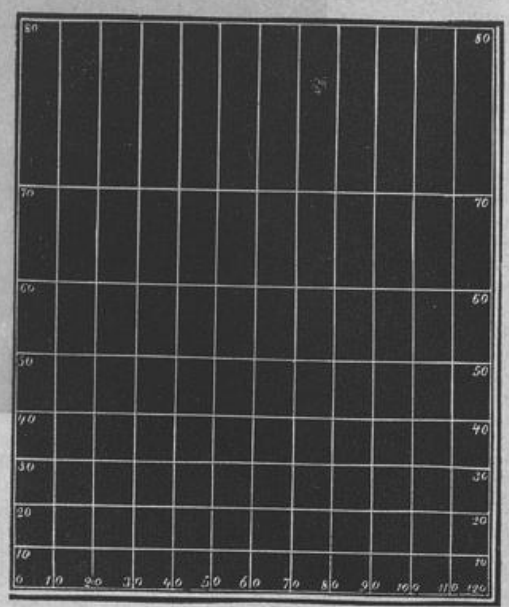
$$x_1 = g \sec. 1^\circ; x_2 = g \sec. 2^\circ; x_3 = g \sec. 3^\circ \dots \dots x_\beta = g \sec \beta^\circ$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_\beta \text{ oder}$$

$$z = g (\sec. 1^\circ + \sec. 2^\circ + \sec. 3^\circ + \dots + \sec \beta^\circ).$$

Hieraus sieht man, dass die Entfernung der Parallelen vom Aequator, oder die Breitengrade, auf der Charte sehr rasch wachsen, wesshalb dieses Netz ein solches mit wachsenden Breiten- und konstanten Längen-Graden genannt wird. Ferner sieht man, dass es vermöge der obigen An-

Seecharten-Netz von Mercator.



forderung die Eigenschaft hat, dass die Parallel- und Breitengrade an jeder einzelnen Stelle auf der Charte sich ebenso verhalten, wie auf der Kugel, was bei keinem der früheren Netze der Fall war. Das Netz hat vermöge dieses Umstandes die sehr beachtenswerthe Eigenschaft, dass, z. B. die in die Fläche eines Parallel- und Breiten-Grades fallende Figur fast an keiner Verzerrung leidet, und sich in ihrem wahren Verhältnisse darstellt; freilich ist jeder solche Netztheil in einem anderen Massstabe gezeichnet, und die Darstellung, als Ganzes betrachtet, sehr entstellt, was indessen, wie schon früher bemerkt wurde, hiebei nur die Bedeutung einer Nebensache hat.

XI.

Der Verfasser dieser kleinen Abhandlung ist in der obigen Darstellung von jedem, der ihm bekannten Wege abgewichen, indem er, auf elementare Weise, so direkt als möglich, aus den Anforderungen, die an die Charte gestellt wurden, die Konstruktion des Netzes herleitete, was offenbar der natürlichste Weg ist. Insbesondere bedarf es, wie man sieht, der Gleichung der Loxodromie durchaus nicht*).

*) Für diejenigen Leser, welche sich hiefür mehr interessieren, soll die Herleitung in aller Strenge folgen.

Lässt man $\Delta\lambda$ und $\Delta\beta$ unendlich klein werden, und in $d\lambda, d\beta$ übergehen, wobei diese Grössen immer als in Bogentheilen ausgedrückt gedacht werden, so ergibt sich aus der obigen Gleichung (m)

$$tg \mu = \frac{d\beta}{d\lambda} \frac{1}{\cos \beta}, \quad d\lambda = tg \mu \frac{d\beta}{\cos \beta} \text{ mithin } \lambda = tg \mu \int \frac{d\beta}{\cos \beta} + Const.$$

Um dieses Integral leicht zu finden, setzt man $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, wor-

$$\text{aus folgt: } \int \frac{d\beta}{\cos \beta} = \int \frac{d\alpha}{\sin \alpha} = - \int \frac{\frac{1}{2} d\alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \log. \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{folglich } \int \frac{d\beta}{\cos \beta} = \log. \log \left(\frac{\pi + \beta}{4 + \frac{\beta}{2}} \right) \text{ und daraus ist}$$

$$\lambda = tg \mu \cdot \log. \text{nat.} \left(\frac{\pi + \beta}{4 + \frac{\beta}{2}} \right) + Const.$$

Ist λ_0, β_0 ein Punkt, durch welchen die Loxodromie ebenfalls gehen

$$\text{soll, so folgt: } \lambda - \lambda_0 = tg \mu \cdot \log. \text{nat.} \frac{tg \left(\frac{\pi + \beta}{4 + \frac{\beta}{2}} \right)}{tg \left(\frac{\pi + \beta_0}{4 + \frac{\beta_0}{2}} \right)}, \text{ welches die Glei-}$$

chung der Loxodromie für sphärische Koordinaten ist. Noch muss beigefügt werden, dass sich die Loxodromie leicht rektifiziren lässt. Bezeichnet ds ihr Bogenelement, so ist

$$ds = \sqrt{(r \cdot d\beta)^2 + (r \cdot \cos \beta \cdot d\lambda)^2} = r \cdot d\beta \sqrt{1 + tg^2 \mu}$$

oder $s = r \beta \sec. \mu + Const.$ folglich, weil für $\beta = \beta_0$ auch $s = 0$, mithin auch $Const. = 0$ wird, auch $s = r(\beta - \beta_0) \sec. \mu$.

Will man den Winkel μ berechnen, welchen die durch zwei bestimmte Punkte $(\lambda_0, \beta_0), (\lambda, \beta)$ gehende Loxodromie mit dem Meridiane bildet, so ist, wenn man zugleich $\frac{\lambda - \lambda_0}{206265}$ für $\lambda - \lambda_0$ setzt, damit

λ und λ_0 in Sexagesimalsekunden ausgedrückt, und ferner zur Berechnung die gewöhnlichen Logarithmen statt der natürlichen, mit dem Modul 0.4542945 angewendet werden

$$tg \mu = \frac{0.4542945}{206265} \frac{(\lambda - \lambda_0)''}{\log. \text{brig.} \frac{tg \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)}{tg \left(45^\circ + \frac{\beta_0}{2} \right)}}$$

und da $r = 8594567$ Meilen, sofort der Seeweg

$$s = \frac{8594567}{206265} (\beta - \beta_0)'' \sec. \mu.$$

Will man z. B. von Boston in Nordamerika nach dem Cap der guten Hoffnung fahren, so ist vor Allem der Winkel μ zu bestimmen, welchen die zwischen beiden Orten gezogene gedachte Loxodromie mit den Parallelkreisen einschliesst:

$$\text{Boston } \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -75^\circ 14' 4'' \\ \beta = 42^\circ 19' 24'' \end{array} \right.$$

$$\text{Cap d. g. H. } \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 16^\circ 8' 25'' \\ \beta = 53^\circ 56' 5'' \end{array} \right.$$

$$45 + \frac{\beta}{2} = 28^\circ 1' 58'' \quad \log. \log \left(45 + \frac{\beta}{2} \right) = 0.726276 - 1$$

$$45 + \frac{\beta_0}{2} = 66^\circ 9' 42'' \quad \log. \log \left(45 + \frac{\beta_0}{2} \right) = 0.534725.$$

Die oben gefundenen Gleichungen

$$tg \mu = \frac{\Delta \beta}{\Delta \lambda} \sec. \beta = \frac{x}{r \Delta x}$$

können auch dazu dienen, die Länge des Bogens abzuleiten; denn auf der Kugel ist das Bogenelement $\Delta s = \sqrt{(r \Delta \beta)^2 + (r \Delta \lambda \cos \beta)^2}$ oder

$$\Delta s = \sqrt{(r \Delta \beta)^2 + (r \Delta \lambda \cos \beta)^2} \text{ woraus}$$

$$\Delta s = r \Delta \beta \sec. \mu$$

Summirt man die Elemente, so folgt $s = r(\beta - \beta_0) \sec. \mu$.

Was nun ferner die Bestimmung des Winkels μ betrifft, unter welchem die Loxodromie, welche zwei Punkte von gegebener Länge und Breite verbindet, die Parallelkreise schneidet, so kann man diesen allerdings aus den obigen nur näherungsweise gültigen Formeln, nicht bequem berechnen, aber um so leichter ihn aus der Charte selbst entnehmen, indem man die zwei Punkte einfach durch eine gerade Linie verbindet, und den Winkel misst, unter welchem diese Linie, die in Wirklichkeit der Loxodromie entspricht, die Meridiane schneidet.

Das soeben beschriebene Netz, welches jetzt für Seacharten ausschliesslich in Anwendung und darum so wichtig ist, wurde zuerst von dem niederländischen Geografen Georg Mercator und einem Engländer Eduard Wriqht in der Mitte des sechzehnten Jahrhunderts angegeben, bei Gelegenheit, als sie auf die Fehler der früher in Gebrauch befindlichen Plancharten aufmerksam machten.

B) Perspectivische Netze.

XII.

Jede perspectivische Darstellung eines Gegenstandes hängt 1^{ten} von der Lage des Auges, d. i. desjenigen Punktes, von welchem aus der Gegenstand betrachtet wird, und 2^{ten} von der Lage der Bildfläche d. i. derjenigen Fläche ab, durch welche man sich die von den abzubildenden Gegenständen in das Auge gelangenden Sehstrahlen hindurch gehend denkt, und auf welcher eben diese Durchgangspunkte die gewünschte Abbildung liefern.

Man würde nach Obigem, je nach der Wahl der Bildfläche und der Lage des Auges bei Abbildung der Erdoberfläche unendlich mannigfaltige perspectivische Bilder erhalten,

$$\log \operatorname{trig} \mu = \frac{\log \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right) - \log \left(45^\circ + \frac{\beta_0}{2} \right)}{206265} = -0.628447,$$

und $\lambda - \lambda_0 = 89^\circ 22' 27'' = 521747''$, folglich

$$\log \mu = \frac{0.4542945 \cdot 521747}{206265} = -0.628447, \text{ woraus } \mu = 137^\circ 8' 55.45'' \text{ ist.}$$

Berechnet man noch den Seeweg, so erhält man wegen

$$(\beta - \beta_0)'' = -274527'' = \frac{8594567}{206265} = \frac{274527}{\cos 47^\circ 8' 55.45''}$$

oder ausgeführt $s = 1681.9$ geographische Meilen, welches der Weg ist, den das Schiff wirklich zu machen hat.

Nun ist bekanntlich der kürzeste Weg dasjenige Stück des grössten Kugelkreises, welches zwischen beiden Endstationen liegt, zu dessen Berechnung wir die Formel

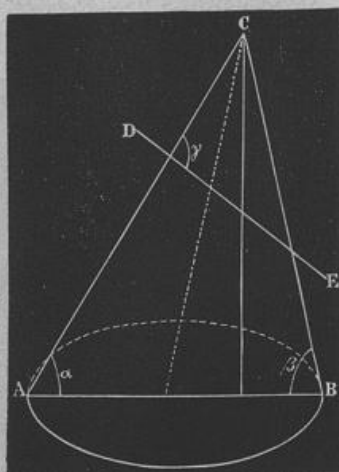
$$\cos \delta = \sin \beta \sin \beta_0 + \cos \beta \cos \beta_0 \cos (\lambda_0 - \lambda)$$

anwenden, dadurch aber die Entfernung in Graden bekommen.

Substituirt man die obigen Angaben, so erhält man $\delta = 111^\circ 40' 55.8'' = 111.6816^\circ$, und daher wegen $1'' = 15$ geographische Meilen, $s = 1675.224$ geographische Meilen, welcher Weg um 6.7 Meilen kürzer ist, als der auf der Loxodromie zurückgelegte.

wenn nicht viele Rücksichten jene Wahl dadurch sehr beschränkten, dass man verlangt, es sollen sich sowohl Meridiane als auch Parallelkreise als einfache Linien, und zwar wo möglich als Kreise projizieren, und dass wenigstens an einer bestimmten Stelle der Charte die Bilder dem Abgebildeten möglichst ähnlich seien. In Folge dieser Anforderung hat man zumeist nur solche perspectivische Netze gewählt, bei welchen die Bildfläche die Erdoberfläche entweder tangirt, oder durch deren Mittelpunkt geht, und das Auge entweder im Mittelpunkte, oder auf der Oberfläche der Erde, oder im Unendlichen, und zwar immer in einem zur Bildfläche senkrechten Radius angenommen hat. Sobald aber der Ort des Auges und die Lage der Bildfläche einmal festgesetzt sind, muss das perspectivische Bild nach festen geometrischen Grundsätzen, mit Ausschluss jeder sonstigen Willkürlichkeit, konstruirt werden. Man unterscheidet drei Projektionsarten. Um die Eigenschaften dieser Projektionsarten leichter bezeichnen zu können, schiebe ich Einiges zur Erinnerung voraus.

Wenn man einen Kegel von kreisförmiger Basis, dessen Höhenloth CP in der Ebene ABC liegt, durch irgend eine Ebene ab , und zwar ist, wenn DE die schneidende Ebene vorstellt, welche mit der Seite AC den Winkel γ einschliesst, während AC und BC mit dem Durchmesser AB die Winkel α und β bilden, bekanntlich die Durchschnittslinie:



1^{ten} für $\gamma = \alpha$

(paralleler Schnitt) und $\gamma = \beta$ (antiparalleler Schnitt) ein Kreis; 2^{ten} für $\gamma > 0$, und $\gamma < 180^\circ - (\alpha + \beta)$ (die Fälle in Punkt 1 ausgenommen) eine Ellipse; 3^{ten} für $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ eine Parabel; 4^{ten} für $\gamma > 180^\circ - (\alpha + \beta)$ und $\gamma < 180^\circ$ eine Hyperbel; und endlich 5^{ten} für $\gamma = 0$ oder $= 180^\circ$ eine gerade Linie. Alle diese Linien fasst man unter den Namen Kegelschnittslinien zusammen.

Es ist klar, dass bei der perspectivischen Darstellung der kreisförmigen Meridiane und Parallelkreise, deren Ebenen man sich als die Grundflächen von Kegeln, welche ihre Spitzen in demjenigen Punkte haben, in welchem man sich das Auge denkt, vorzustellen habe, die perspectivischen Bilder derselben, die nichts anderes, als Durchschnittslinien dieser Kegel mit der Bildebene sind, nur Kegelschnittslinien sein können.

Man theilt die perspectivischen Projektionen nach der Lage des Auges ein:

1. in die stereografische Projektion, wobei die Bildfläche durch den Mittelpunkt der Erde geht, und das Auge sich in der Oberfläche am Endpunkte des auf der Bildebene senkrechten Radius liegt; 2. in die centrale Projektion, wo-

bei die Bildfläche die Erdkugel berührt, und das Auge im Mittelpunkte der Erde gedacht wird; 5. in die orthogonale Projektion, das Auge im Unendlichen, die Bildfläche senkrecht zur Verbindungslinie desselben mit dem Erdmittelpunkte. Jede dieser drei Projektionsarten zerfällt wieder in zwei Unterarten, je nachdem die Bildebene dem scheinbaren Horizont an den Polen, oder am Aequator parallel ist, — in die polare und äquatorale. — Es ist demnach leicht begreiflich, was man z. B. unter stereografischer Polarprojektion, centraler Äquatoralprojektion u. s. w. zu verstehen hat.

Da man diese perspektivischen Projektionen gegenwärtig nur zur Darstellung der Hemisphären anwendet, weil sie sich nur hierzu besonders eignen; für einzelne Länder dagegen, theils wegen ihrer minder einfachen Konstruktion, theils wegen ihrer geringeren Genauigkeit, gegen die früheren Netzarten zurückstehen, so werde ich nur das Wesentliche, insbesondere der am meisten in Anwendung kommenden stereografischen Projektion, und zwar kürzer, als es sonst zu geschehen pflegt, darzustellen suchen.

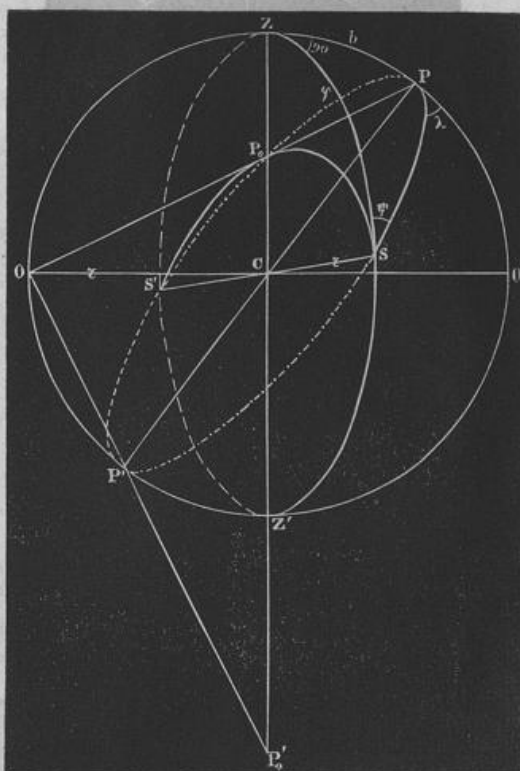
XIII.

1. Die stereografische Projektion.

Diese Projektionsart, welche gegenwärtig für Erd- und Himmelscharten am meisten angewendet wird, ist die älteste aller perspektivischen Darstellungen, indem sich ihrer schon Hipparch, 200 Jahre vor Christus, bediente. Wie bereits bemerkt wurde, liefert sie die Perspektive der Linien und Punkte auf einer, durch den Erdmittelpunkt gedachten Bildebene, wenn das Auge in der Erdoberfläche in einem zur Bildebene senkrechten Radius angenommen wird. Es leuchtet von selbst ein, dass diese Projektion, statt den Eindruck der convexen Kugelgestalt hervorzubringen, vielmehr das Bild einer hohlen Schale darstellt, welche zwar die ganze Erdhälfte umfasst, aber zugleich auch in verkehrter Lage, z. B. Amerika zur rechten, Europa zur linken Seite, so, dass man, um die wirkliche Orientierung beizubehalten, von der Grundanschauung in so ferne abgehen muss, als die Lage beim Eintragen nochmals verkehrt wird. Daraus und in Folge der Concavität wird die Vorstellung erschwert und die Zeichnung unnatürlich. Gleichwohl bedient man sich dieser Entwurfsart, und zwar aus dem Grunde, weil sie von allen perspektivischen Kugelprojektionen am leichtesten zu zeichnen ist, da sowohl die Parallelkreise, als die Meridiane sich als Kreise projizieren.

Diese wichtige Eigenschaft will ich vor Allem begründen, um zugleich die Mittel zu gewinnen für die Berechnung der Lage der Mittelpunkte und der Längen der Radien jener Kreise, wie sie zur Darstellung des Netzes nothwendig sind.

Zieht man vom Auge nach allen Punkten der kreisförmigen Meridiane oder Parallelkreise die Sehstrahlen, so bilden diese zusammen offenbar die Mantelfläche eines im allgemeinen schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis. Jeder solche Kegel wird von der Bildfläche geschnitten, und die Durchschnittslinie ist nun eben die gesuchte Projektion selbst, von der behauptet wurde, dass sie stets ein Kreis sei.

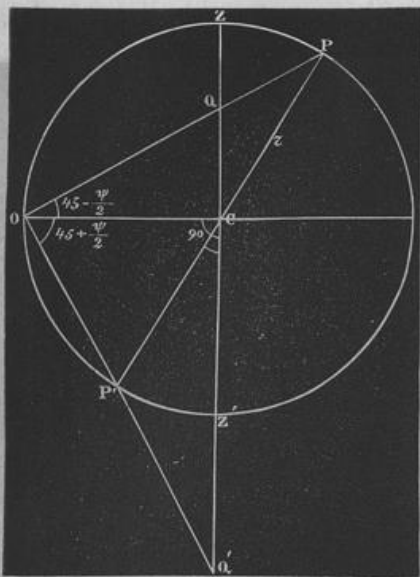


Der Beweis wird geführt sein, wenn wir zeigen, dass die Grundfläche, und der Schnitt der Bildebene immer einander parallel sind.

Es sei O der Ort des Auges, P der nördliche Pol, $ZSZ'S'$ die Bildfläche senkrecht auf dem Halbmesser OC , P_0 die Projektion des Poles, P' der Südpol, P'_0 dessen Projektion, $PSP'S'$ irgend ein Meridian, POP' der projizirende Kegel, und SP_0S' die Projektion der einen Hälfte jenes Meridians. Nun ist offenbar POP' ein rechter Winkel, folglich $POC + QOC = 90^\circ$ $OPC = POC$
 $OPC + QOC = 90^\circ$ da aber
 $QOC + POC = 90^\circ$
 so folgt, dass $QOC = OPC$,

dass daher PP' und QQ' sogenannte Wechselschnitte (*Sectiones subcontrariae*), oder was dasselbe sagt, antiparallele Schnitte sind. Da nun PP' als Meridian ein Kreis ist, so folgt, dass QQ' als dessen Projektion, ebenfalls ein Kreis sein müsse. Ist ferner ψ der Winkel der beiden kreisförmigen Schnitte PP' und QQ' , deren Durchmesser $2r$ und 2ρ sind, so ist offenbar:

$$2\rho_0 = r \cdot \left(45 + \frac{\psi}{2} \right) + r \cdot \left(45 - \frac{\psi}{2} \right) \text{ oder nach einer leichten Reduktion, } \rho_1 = \frac{r}{\cos \psi}$$



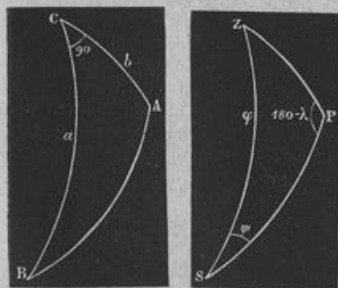
Mit diesen Nachweisen verbinden wir zugleich die Berechnung der zur Bestimmung dieses Kreises nöthigen Stücke.

Es sei r der Radius der Erde; b die Breite des dem Auge O gegenüber liegenden Ortes (O'), dessen Projektion offenbar am meisten dem Urbilde entspricht, mithin $ZP=b$ γ die Länge des Meridians ($PSP'S$), um dessen Projektion es sich handelt, diese Länge gezählt von dem Meridiane des Punktes (O), in welchem sich das Auge befindet. Ferner wollen wir, der Bequemlichkeit wegen, noch bezeichnen SZ mit φ , und PSZ mit ψ , und um das sphärische Dreieck SPZ , worin der Winkel SZP , der Bildfläche mit dem Augenorte in Folge früherer Voraussetzung ein rechter ist, betrachten, um Relationen zwischen diesen Grössen zu erhalten. Zu dem Ende erinnere man sich nun der, für das rechtwinkliche sphärische Dreieck geltenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \sin b \cdot \operatorname{tg} A \\ \operatorname{cotg} B &= \sin a \cdot \operatorname{cotg} b \\ \cos B &= \cos b \cdot \sin A, \end{aligned}$$

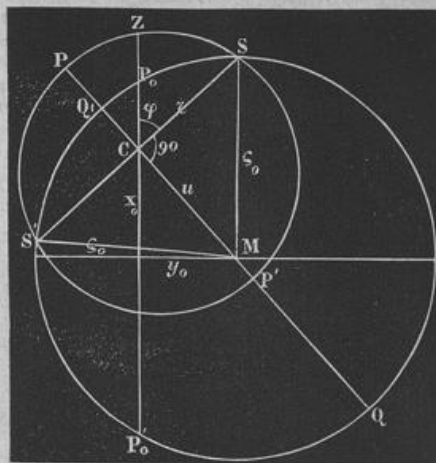
wobei nun zu setzen ist: $a = \gamma$, $b = b$, $A = 180 - \gamma$, $B = \psi$, so erhält man

$$\operatorname{tg} \gamma = -\sin b \cdot \operatorname{tg} \psi; \operatorname{cotg} \psi = \operatorname{cotg} b \cdot \sin \gamma; \cos \psi = \cos b \cdot \sin \lambda.$$



Dies vorausgesetzt, denke man sich nun die Figur der Projektion in der wahren Gestalt herausgezeichnet. Bezeichnet man dabei mit ϱ_0 den Radius der Projektion $SP_0SP'_0$, dessen Mittelpunkt in M ist, $CM = u, x_0, y_0$ die recht-

winklichen Koordinaten dieses Mittelpunktes bezogen auf ZZ' , so ist:



$$x_0 = u \cos(90 - \varphi) = u \sin \varphi$$

$$y_0 = u \sin(90 - \varphi) = u \cos \varphi$$

$$u = \sqrt{\varrho_0^2 - r^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \psi - r^2} = r \operatorname{tg} \psi.$$

Dieses vorausgesetzt, erhält man mit Rücksicht auf die früheren Gleichungen,

$$x_0 = r \sin \varphi \operatorname{tg} \psi = \frac{r \sin \varphi}{\operatorname{cotg} b \sin \varphi}$$

$$y_0 = r \cos \varphi \operatorname{tg} \psi = \frac{r \cos \varphi}{\operatorname{cotg} b \sin \varphi} = \frac{r \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} \varphi} \text{ oder}$$

$$x_0 = r \operatorname{tg} b, y_0 = \frac{r \operatorname{tg} b}{\sin b \operatorname{tg} \lambda}, \varrho_0 = \frac{r}{\cos b \sin \lambda}.$$

Aus diesen Formeln, durch welche die Lage des Mittelpunktes, so wie der Radius des, die Projektion eines Meridians, darstellenden Kreises, vollständig bestimmt sind, geht hervor, dass sämtliche Meridianmittelpunkte M auf einer zur ZZ' senkrechten Linie liegen, weil x_0 von λ unabhängig ist.

XIV.

Wenden wir uns nun zur näheren Untersuchung der Parallelkreise. Es sei RR' ein Parallelkreis, $R_0R'_0$ seine Projektion auf die Bildfläche ZZ' , alsdann sind offenbar ORO' und $OR'O'$ in R und R' rechtwinkliche Dreiecke, welche beziehungsweise den ebenfalls rechtwinklichen Dreiecken OCR_0 und OCR'_0 ähnlich sind, so dass man hat,

$$OR:OO' = OC:OR_0$$

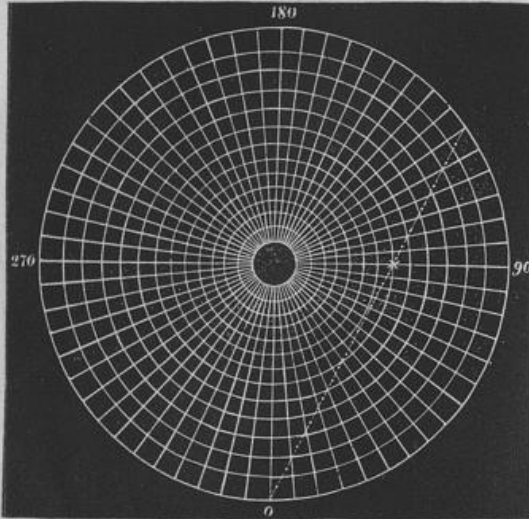
$$OR':OO' = OC:OR'_0, \text{ hieraus folgt nach}$$

bekanntem Sätzen $OR:OR' = OR_0:OR'_0$, und es sind daher auch die Dreiecke $OR_0R'_0$ und OR_0R einander ähnlich, folglich die Winkel $OR_0R'_0$ und OR_0R einander gleich. Sofort schliesst man hieraus, dass $R_0R'_0$ und RR' sogenannte Wechselschnitte (antiparallele) sind, und dass, weil der Schnitt RR' ein Kreis ist, auch dessen Projektion $R_0R'_0$ ein solcher sein müsse.

Für die Parallelkreise ist:

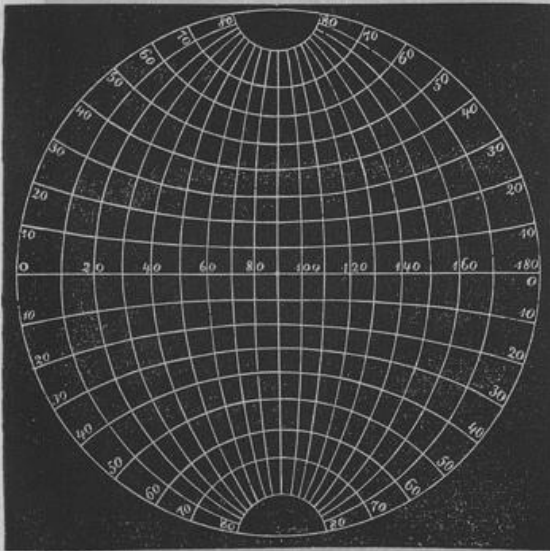
$$y_1 = \frac{r \cos b}{2 \sin \frac{\beta+b}{2} \cos \frac{\beta-b}{2}}; \quad e_1 = \frac{r \cos \beta}{2 \sin \frac{\beta+b}{2} \cos \frac{\beta-b}{2}}$$

Stereografische Polarprojektion.



Es ist leicht, diese Ausdrücke rein agrafisch, ohne Rechnung zu erhalten, wenn man sich den Kreis, von welchem die Bildfläche ZZ' begrenzt wird, in 360 Grade getheilt

Stereografische Äquatorialprojektion.



denkt, so dass daraus die Längen und Breiten unmittelbar gegeben, zur Konstruktion der betreffenden Linien benützt werden können. Es würde aber zu weit führen, wollte ich mich in Einzelheiten dieser Art einlassen, nur die Spezialisierung der obigen allgemeinen Formeln für die stereografischen Polar- und Äquatorial-Projektion mag noch Platz finden.

1. Für die stereografische Polarprojektion. Diese ist charakterisirt durch die Annahme $b=90^\circ$.

Daraus folgt $x_0=\infty, y_0=\infty, e_0=0$, folglich sind die Meridiane gerade Linien die durch O gehen.

Für die Parallelen $y_1=0, e_1=r \operatorname{tg} \left(45 - \frac{\beta}{2} \right)$. Die Konstruktion in diesem Falle ist so für sich verständlich, dass es wohl keiner weiteren Auseinandersetzung bedarf.

2. Stereografische Äquatorialprojektion. Diese ist bezeichnet durch die Annahme $b=0$, wofür man erhält

$$x_0=0, y_0=r \operatorname{ctg} \lambda, e_0=\frac{r}{\sin \lambda}, y_1=\frac{r}{\sin \beta}, e_1=r \operatorname{ctg} \beta.$$

Auch diese Ausdrücke lassen sich leicht konstruieren, wenn man zuvor den Kreis der Bildfläche eingetheilt hat.

XVI.

II. Centrale Projektion.

Wie im Artikel X. bemerkt wurde, ist die centrale Projektion diejenige, bei welcher das Auge im Mittelpunkte der Erde gedacht wird, und die Bildfläche der Horizont irgend eines Punktes der Erdoberfläche ist. Was zunächst die Wahl dieses Ortes betrifft, so muss man denjenigen dafür nehmen, dessen Umgebung am getreuesten in der Abbildung erscheinen soll.

In der nächstfolgenden Figur sei O der Ort des Auges, O_0 jener Punkt der Erdoberfläche; AA' der Äquator; P einer der Erdpole; $A_0P_0M_0$ die Bildfläche; $APA'P'$ der erste Meridian, das heisst, der des Ortes O_0 ; $b=AO_0$ die Breite des Ortes N_0 ; $\lambda=AOM$ die Länge } irgend eines Punktes N .
 $\beta=MN$ die Breite }

Ferner bezeichne M den Punkt, in welchem der durch N gehende Meridian den Äquator schneidet; A_0, P_0, M_0, N_0 seien die centralen Projektionen der Punkte A, P, M, N ; M_0A_0 die Projektion des Äquators.

Um die Lage der Projektion N_0 von N zu finden, bestimme man zuerst die des entsprechenden Meridians, welche offenbar eine gerade Linie M_0P_0 ist. Um diese zu finden, bestimme man die Lage des Punktes P_0 und A_0 ,

wozu man hat $OP_0 = \frac{r}{\sin b}, OA_0 = \frac{r}{\cos b}, O_0P_0 = r \operatorname{ctg} b$;

$$O_0A_0 = r \operatorname{tg} b.$$

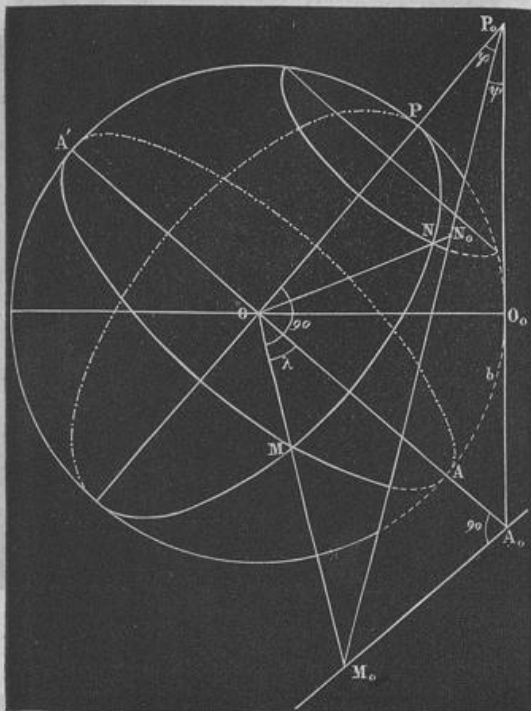
Da ferner das Dreieck A_0OM_0 in A_0 ein rechtwinkliches ist, so hat man auch

$$A_0M_0 = OA_0 \operatorname{tg} \lambda$$

$$OM_0 = \frac{OA_0}{\cos \lambda}, \text{ daher auch}$$

$$A_0M_0 = \frac{r \operatorname{tg} \lambda}{\cos b}, \text{ und } OM_0 = \frac{r}{\cos b \cos \lambda}, \text{ wodurch die Li-}$$

nie P_0M_0 , als Projektion des Meridians PNP' , von der Länge λ vollkommen bestimmt ist.



Um sofort die Projektion N_0 zu erhalten, bemerke man vor Allem, dass der Winkel $M_0P_0O = \varphi$ aus dem rechtwinkligen Dreiecke M_0P_0O sich durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{OM_0}{OP_0} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{\cos b \cdot \cos \lambda} : \frac{r}{\sin b} \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos \lambda} \quad \dots \quad (1) \quad \text{berechnen lasse.}$$

Dies vorausgesetzt hat man aus dem Dreiecke OP_0N_0 die Proportion $P_0N_0 : OP_0 = \sin(90 - \beta) : \sin(180 - 90 + \beta - \varphi)$, woraus $P_0N_0 = \rho = \frac{r \cos \beta}{\sin b \cdot \cos(\beta - \varphi)} \dots \dots (a)$,

wobei ρ den Radiusvektor der Projektion N_0 bezeichnet. Ist ferner $A_0P_0M_0 = \psi$ der Winkel, welchen die Projektion des Meridians von der Länge λ mit dem ersten Meridian bildet, so hat man, zu seiner Bestimmung, aus dem rechtwinkligen Dreiecke $A_0M_0P_0$ die Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{M_0A_0}{A_0P_0} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{r \operatorname{tg} \lambda}{\cos b} : (r \cotg b + r \operatorname{tg} b) \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \lambda \cdot \sin b.$$

XVII.

Indem nun die beiden Polarkoordinaten ρ und ψ der Projektion (N_0) des Punktes N gefunden sind, kann die Aufgabe als gelöst betrachtet werden. Es ist jedoch nicht

schwer für dieselbe eine Gleichung zwischen rechtwinklichen Koordinaten x, y zu erhalten, welche, unabhängig von λ , die Projektion eines ganzen Parallelkreises von der Breite β darstellt.

Es ist nämlich:

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi, \quad \text{woraus folgt:}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \lambda \cdot \sin b,$$

$$\text{folglich} \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{y}{x \cdot \sin b} \quad \dots \quad (2),$$

und weil $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, so ist nach Gleichung (a) des vorigen Art. $\frac{r \cos \beta}{\sin b \cdot \cos(\beta - \varphi)} = \sqrt{x^2 + y^2}$, oder

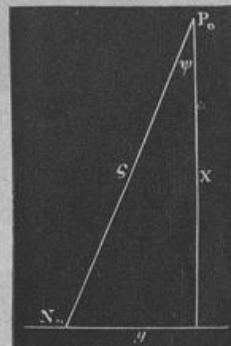
$$\cos \beta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi = \frac{r \cos \beta}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin b} \quad \dots \quad (3).$$

Aus dieser Gleichung muss die von λ unabhängige Grösse φ eliminiert werden. Zu dem Ende hat man aus (2)

$$\cos \lambda = \frac{x \sin b}{\sqrt{x^2 \sin^2 b + y^2}}, \quad \text{und wenn man diesen Werth in (1) substituirt,} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{x^2 \sin^2 b + y^2}}{x \cdot \cos b}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich nun $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ berechnen, und man erhält:

$$\cos \varphi = \frac{x \cos b}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{x^2 \sin^2 b + y^2}}{x^2 + y^2}$$



Substituirt man nun diese beiden Werthe in die Gleichung (3), so folgt:

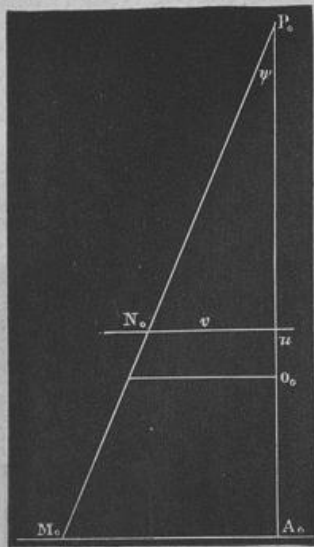
$$x \cdot \cos b \cos \beta + \sqrt{x^2 \sin^2 b + y^2} \cdot \sin \beta = \frac{r \cos \beta}{\sin b}, \quad \text{oder, wenn man die Wurzel durch Quadriren entfernt:}$$

$$(x^2 \sin^2 b + y^2) \sin^2 \beta = \left(\frac{r \cos \beta}{\sin b} \right)^2 - (x \cos b \cos \beta)^2 - 2rx \frac{\cos b \cos^2 \beta}{\sin b}$$

$$\text{Ordnet man nach } x \text{ und } y, \text{ so ergibt sich schliesslich:} \quad x^2 (\sin^2 \beta - \cos^2 b) + y^2 \sin^2 \beta + 2rx \cotg b \cos^2 \beta = \frac{r^2 \cos^2 \beta}{\sin^2 b}$$

Dies ist die verlangte Gleichung der Projektion eines, der Breite β entsprechenden Parallelkreises, und zwar bezogen auf den ersten Meridian (jenen des Ortes O_0), als Abscissenaxe, und dem Pol (P_0) als Anfangspunkt der Koordinaten.

Etwas einfacher gestaltet sich diese Gleichung, wenn man die Abscissen von O_0 , statt von P_0 aus zählt.



Man setze zu dem Ende:

$$x = r \cotg b - u$$

$$y = v,$$

wo nun u, v die neuen Koordinaten bezeichnen.

Dann ist:

$$x^2 = (r \cotg b)^2 + u^2 - 2ur \cotg b, \text{ folglich}$$

$$v^2 \sin^2 \beta + (r^2 \cotg^2 b + u^2 - 2ur \cotg b)(\sin^2 \beta - \cos^2 b) +$$

$$+ 2r \cotg b \cos^2 \beta (r \cotg b - u) = \frac{r^2 \cos^2 \beta}{\sin^2 b}$$

oder

$$v^2 \sin^2 \beta + u^2 (\sin^2 \beta - \cos^2 b) - 2ur \sin b \cos b = r^2 (\sin^2 b - \sin^2 \beta).$$

XVIII.

Aus der letzten Gleichung zeigt sich, dass die Parallelen sich im Allgemeinen nicht als Kreise projizieren, und zwar überzeugt man sich, nach bekannten Kennzeichen auf der Stelle, dass die Projektion

eine Hyperbel für $\cos b > \sin \beta$, oder $b < 90 - \beta$
oder $b + \beta < 90$,

eine Ellipse für $\cos b < \sin \beta$, oder $b > 90 - \beta$,
oder $b + \beta > 90$

eine Parabel für $\cos b = \sin \beta$, oder $b = 90 - \beta$,
oder $b + \beta = 90$

ein Kreis . . . für $\cos b = 0$, oder $b = 90^\circ$, ist,

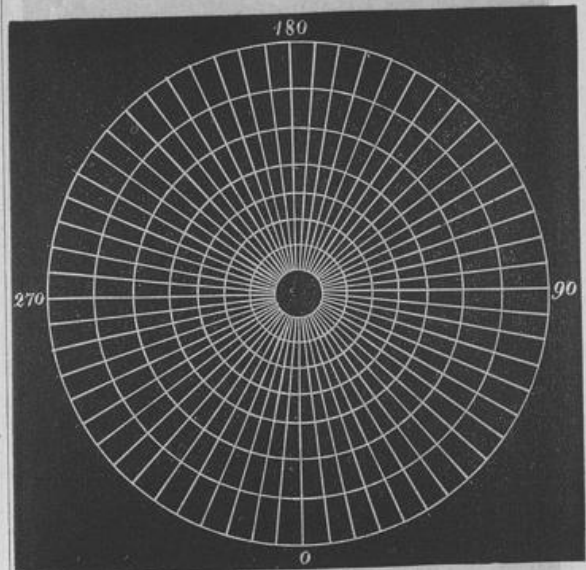
das heißt also, die Projektion ist nur in dem Falle ein Kreis, wenn die Bildfläche den Pol berührt, also nur für die centrale Polarprojektion.

In Bezug auf diesen besonderen Fall, bemerke man, dass aus der oben gefundenen Gleichung folgt:

$$v^2 \sin \beta + u^2 \sin^2 \beta = r^2 \cos^2 \beta, \text{ oder } v^2 + u^2 = r^2 \cotg^2 \beta.$$

Es ist somit der Radius dieses Kreises $= r \cotg \beta$, und daher die Verzeichnung des entsprechenden Netzes eine sehr einfache.

Centrale Polarprojektion.

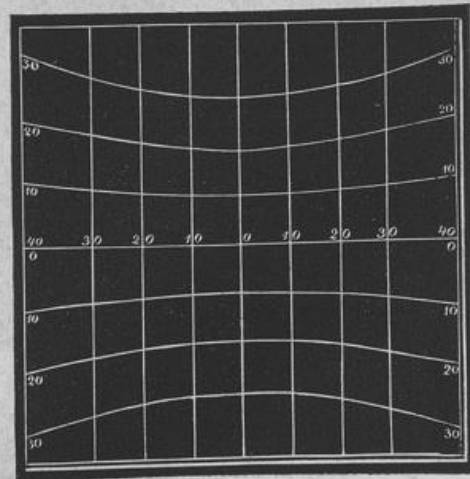


Endlich bemerke man noch, dass für die centrale Äquatoralprojektion zu setzen ist $b = 0$, und dass daher

$$v^2 \sin^2 \beta - u^2 \cos^2 \beta + r^2 \sin^2 \beta = 0,$$

oder also $\left(\frac{v}{r}\right)^2 - \left(\frac{u}{r \tg \beta}\right)^2 = -1$ folgt, welches die Gleichung einer Hyperbel ist, deren Halbaxen r und $r \tg \beta$ sind. Die Projektion P_0 des Poles fällt ins Unendliche, weil $O_0 P_0 = r \cotg b = \infty$ wird. Die Meridiane erscheinen daher

Centrale Äquatoralprojektion.



als parallele, auf dem Äquator senkrecht stehende Linien deren Entfernung von A_0

$$A_0 M_1 = r \operatorname{tg} \lambda \text{ ist.}$$

für $v = 0$
folgt $u = r \operatorname{tg} \beta$, u. s. w

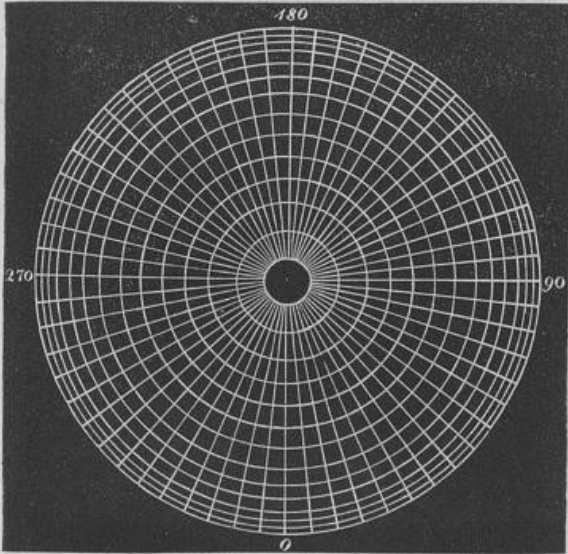
III. Orthografische Projektion.

XIX.

Ogleich bei der eben betrachteten centralen Projektionsart die Meridiane durch die einfachste Art von Linien dargestellt werden, so ist doch ihre Anwendung eine sehr seltene, weil sich die Parallelkreise im Allgemeinen nicht wieder als Kreise, sondern als andere, minder leicht zu verzeichnende Kegelschnittlinien darstellen. Bei der orthogonalen Projektionsart aber sind nicht nur die Parallelkreise, sondern auch die Meridiane solche Kegelschnittlinien, wodurch diese Projektionsart die complicirteste ist, und darum auch fast niemals in ernstliche Anwendung kam, obwohl sie den eigenthümlichen Vortheil besitzt, dass bei ihr der Ort des Auges unseren gewohnten Vorstellungen weit mehr angemessen ist, als bei den bisherigen Arten, und insbesondere die im Artikel 12 erwähnten Uebelstände der stereografischen Projektion bei ihr nicht vorkommen.

Ich glaube, eine weitere Ausführung dieser Projektionsart um so mehr umgehen zu müssen, als nach dem Bisherigen die Aufstellung der betreffenden Gleichungen für den Leser keine eigentlichen Schwierigkeiten mehr haben kann. Nur mag bemerkt werden, dass für den speziellen

Orthografische Polarprojektion.



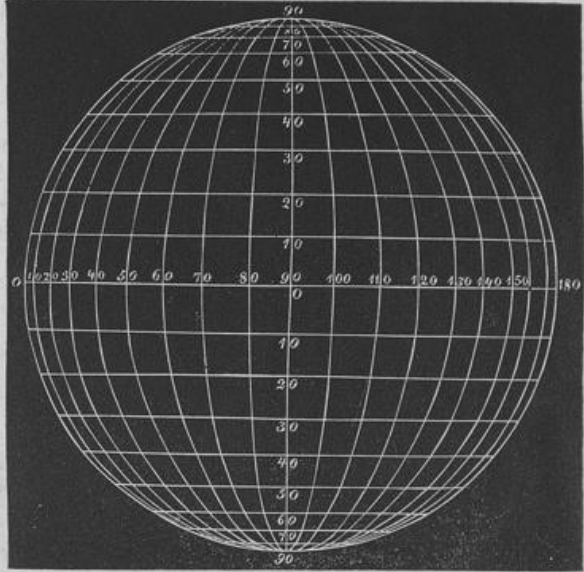
Fall der orthografischen Polarprojektion, wobei das Auge in der unendlichen Verlängerung der Erdaxe gedacht wird, die

Meridiane als gerade Linien, und die Parallelen als concentrische Kreise erscheinen.

Die Winkel der Meridiane zeichnen sich in ihrer unveränderten Grösse, und der Radius eines Parallelkreises von der Breite β ist $= r \cos \beta$.

Bei der orthografischen Äquatoreal-Projektion liegt das Auge im Äquator. Hier zeichnen sich die Parallelkreise als parallele gerade Linien, während sich die Meridiane als Ellipsen darstellen, wesshalb selbst diese Unterart fast gar keine Anwendung findet.

Orthografische Äquatorealprojektion.



XX.

Indem ich hiermit die vorliegende Arbeit abschliesse, glaube ich die Grenzen, welche dem Vortrage einer derartigen mathematischen Theorie beim Gymnasialunterrichte naturgemäss gesteckt sind, kaum überschritten, und vielleicht durch die Sache selbst meine Ansicht unterstützt zu haben, dass sich der hier zur Sprache gebrachte Gegenstand mit dem mathematischen Unterrichte an Gymnasien sehr wohl verbinden lasse. Vielleicht darf ich auch hoffen, dass nunmehr mancher Leser vom Neuen seine Aufmerksamkeit einem Gegenstande zuwende, der eine gewiss fortdauernde Wichtigkeit hat, und nur desswegen, wie es scheint, so sehr unbeachtet blieb, weil er als in sich abgeschlossen betrachtet zu werden pflegt.

Wenn sich die eine oder andere meiner Erwartungen erfüllen, oder wenn es dem Leser willkommen sein sollte, überhaupt nur eine Zusammenstellung der wichtigsten Projektionsarten vor sich zu haben, die kürzer und übersichtlicher ist, als sie die älteren Schriften bieten, so ist mein Wunsch erreicht.

V. Adam.