Planimetrische Aufgaben

über

Maxima und Minima.

1. Bestimmung von Punkten.

1. Aufgabe. In einer gegebenen Geraden AB einen Punkt so zu bestimmen, dass das Rechteck aus den beiden Theilen so gross wie möglich wird.

1. Auflösung. Beschreibt man über AB den Halbkreis und errichtet in einem beliebigen Punkte C der AB auf AB die Senkrechte bis zum Durchschnitt in D mit dem Halbkreise, so ist das Rechteck gebildet aus AC und BC gleich dem aus CD gebildeten Quadrate. Dieses Quadrat wird aber um so grösser, je näher C dem Mittelpunkte der AB liegt und wird so gross wie möglich, wenn CD Radius, das ist, wenn C Mittelpunkt der AB ist.

2. Auflösung. Es sei C der Mittelpunkt von AB; D und E seien beliebige Punkte zwischen B und C, D näher an C gelegen als E. Konstruirt man aus AB und BD das Rechteck ADFG und aus AE und BE das Rechteck AEHJ, so ist, wenn der Durchschnitt der DF und der HJ mit K bezeichnet wird,

$$\begin{array}{c} DK + KF = BE + KF = BD \\ DE + EH = DE + EB = BD \\ \hline KF = DE \end{array}$$

Die beiden Rechtecke FGJK und DEHK haben also gleiche Höhen; die Grundlinie des ersteren aber ist grösser als die des letzteren, deshalb

$$FGJK > DEHK, \text{ daher auch}$$
$$FGJK + ADKJ > DEHK + ADKJ \text{ oder}$$
$$ADFG > AEHJ$$

Das Rechteck aus den beiden Theilen der AB ist also um so grösser, je näher der Theilpunkt dem Mittelpunkte der AB liegt, folglich am grössten, wenn der Theilpunkt der Mittelpunkt selbst ist.

Zusatz. Von allen Rechtecken gleichen Umfangs hat also das Quadrat den grössten Flächeninhalt; hieraus folgt, dass von allen rechtwinkligen Dreiecken mit gleicher Summe der Katheten das gleichschenklige am grössten ist. Umgekehrt hat auch von allen Rechtecken gleichen Inhalts das Quadrat, und daher auch von allen rechtwinkligen Dreiecken gleichen Inhalts das gleichschenklige den kleinsten Umfang.

2. Aufgabe. Gegeben die Gerade AB und zwei auf derselben Seite liegende Punkte C und D; es soll in AB ein Punkt X so bestimmt werden, dass die Summe der Entfernungen $CX + DX$ so klein wie möglich wird.

Analysis. Nehmen wir zunächst an, C und D lägen nicht auf derselben Seite, sondern auf verschiedenen Seiten der AB, als C und D′, so ist offenbar $CX + D'X$ so klein wie möglich, wenn CXD′ eine gerade Linie ist. Demnach ist auch $CX + DX$ ein Minimum, wenn $DX = D'X$ ist.

DD′X muss daher ein gleichschenkliges Dreieck, $DD' \perp AB$ und, wenn E der Durchschnitt der DD′ mit AB ist, $DE = D'E$ sein. Hieraus ergibt sich folgende

Konstruktion. Man fälle von einem der beiden gegebenen Punkte, etwa von D die $DE \perp AB$, verlängere diese Senkrechte um $ED' = DE$ und verbinde D′ mit C, so ist der Durchschnittspunkt dieser Verbindungslinie mit der AB der verlangte Punkt.

Beweis. Verbindet man irgend einen von X verschiedenen Punkt Y der AB mit C, D und D′, so ist

$$\begin{array}{c} CY + DY = CY + YD' \\ CX + XD' < CY + YD' \\ \hline CX + XD' < CY + DY \\ XD' = XD \\ \hline CX + DX < CY + DY \end{array}$$

1. Anmerkung. Leicht ergiebt sich, dass $\sphericalangle AXC = \sphericalangle BXD$ ist. Die Lösung vorliegender Aufgabe ist daher nicht verschieden von der Lösung der Aufgabe: Auf einer geraden Linie einen Punkt zu bestimmen, so dass seine Verbindungslinien mit zwei gegebenen Punkten mit der geraden Linie gleiche Winkel bilden.

2. Anmerkung. Errichtet man $XF \perp AB$, so ist auch $\sphericalangle CXF = \sphericalangle DXF$.

3. Statt der Punkte C und D können auch Kreise gegeben sein, ohne dass die Lösung sich wesentlich ändert. Für C, D, D′ treten die Mittelpunkte derselben ein.

3. Aufgabe. In einer gegebenen Geraden AB einen Punkt X zu bestimmen, so dass die Summe seiner Entfernungen von einem gegebenen Punkte C und einer zweiten gegebenen Geraden DE so klein wie möglich wird.

Auflösung. 1) Trifft die Senkrechte von C auf DE die AB in X, so ist X der verlangte Punkt.

2) Trifft diese Senkrechte erst in ihrer Verlängerung über C hinaus die AB, so ergiebt sich aus Aufgabe 2 folgende Lösung.

Man konstruire zu C den Gegenpunkt C′ in Bezug auf AB und fälle von C′ die $C'F \perp DE$. Der Durchschnitt dieser Senkrechten mit der AB ist der verlangte Punkt.

Beweis. Fällt man von einem beliebigen andern Punkt Y der AB die $YG \perp DE$ und zieht YC, so ist $YC + YG > XC + XF$. Denn zieht man C′Y und $YH \perp C'F$, so ist

$$\begin{array}{l} C'Y + YG > C'F, \text{ weil } C'Y > C'H \text{ ist;} \\ \qquad C'Y = CY \\ \hline CY + YG > C'F \text{ oder} \\ CY + YG > CX + XF. \end{array}$$

Also ist $CX + XF$ ein Minimum.

Determination. Ist $C'F \parallel AB$, was der Fall ist, wenn $DE \perp AB$, so erhalten wir keinen Punkt von verlangter Eigenschaft.

Anmerkung. Statt des Punktes kann ein Kreis gegeben sein, die Lösung bleibt dieselbe.

4. Aufgabe. Gegeben eine Gerade AB und zwei auf verschiedenen Seiten derselben liegende Punkte C und D; es soll in AB ein Punkt X bestimmt werden, so dass die Differenz der Entfernungen $CX - DX$ so gross wie möglich wird.

Auflösung. Man konstruire, wie vorhin, zu C den Gegenpunkt C′, so ist, wenn die Verbindungslinie C′D verlängert die AB in X durchschneidet, X der verlangte Punkt.

Beweis. Verbindet man irgend einen andern Punkt Y der AB mit C, C′ und D, so ist $CY - DY = C'Y - DY$. Letztere Differenz aber ist kleiner als C′D, welches die Differenz von $CX - DX$ ist; also ist $CX - DX$ so gross wie möglich.

Determination. Haben beide Punkte gleichen Abstand von AB, so giebt es keinen Punkt von verlangter Eigenschaft.

Anmerkung. Auch hier können für C und D Kreise gegeben sein, ohne dass die Lösung sich wesentlich ändert.

5. Aufgabe. Auf der Grundlinie BC eines ungleichschenkligen Dreiecks ABC einen Punkt zu bestimmen, dass die Summe seiner Entfernungen von den beiden Seiten ein Minimum wird.

Auflösung. Nehmen wir zunächst beliebig die Punkte D und E der BC zwischen B und C an und untersuchen, welche von den beiden Entfernungssummen $DF + DG$ und $EH + EJ$ die kleinere sei. (Fund H in AB, G und J in AC gelegen). Zieht man $DK \parallel AB$ bis zum Durchschnitt mit EH und $EL \parallel AC$, bis zum Durchschnitt mit DG, so ändert sich diese Frage um in die Frage, welche von den beiden Summen $HK + DL + EJ$ und $EK + HK + EJ$ die kleinere sei, und diese Frage reduziert sich auf die Frage, welche von den beiden Linien DL und EK die kleinere sei. Ist nun $AC > AB$ und daher $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ACB$, so ist auch $\sphericalangle EDK > \sphericalangle DEL$. In den beiden rechtwinkligen Dreiecken DEL und DEK, welche die Hypotenuse gemeinschaftlich haben, ist daher $DL < EK$, folglich ist auch

$$HK + DL + EJ < EK + HK + EJ \text{ oder}$$
$$DF + DG < EH + EJ$$

Je näher der angenommene Punkt also der Ecke B liegt, desto kleiner wird die Entfernungssumme.

Nehmen wir ferner einen Punkt M in der Verlängerung der BC über B hinaus und fällen MP und $BO \perp AC$ und $MN \perp AB$, so ist schon, wie nahe auch M bei A liegen möge, die $BO < MP$, um so mehr daher $BO < MP + MN$.

Es ergibt sich also, dass B selbst der gesuchte Punkt, und dass das Minimum der Entfernungssumme die Höhe sei, welche vom Scheitel des grösseren anliegenden Winkels auf die gegenüber liegende Seite gefällt wird.

1. Anmerkung. Je weiter der Punkt in der BC, von welchem die Senkrechten gefällt werden, nach der einen oder andern Seite von B sich entfernt, desto grösser wird die Summe der Senkrechten; ein gesuchtes Maximum giebt es daher nicht.

2. Anmerkung. Ist das gegebene Dreieck gleichschenklig, so giebt es in der Grundlinie keinen Punkt von verlangter Eigenschaft; denn in diesem ist die Summe der Senkrechten konstant, nämlich gleich der zu einem der gleichen Schenkel gehörigen Höhe.

6. Aufgabe. Auf der Grundlinie BC des Dreiecks ABC einen Punkt so zu bestimmen, dass die Differenz seiner Entfernungen von den Seiten so klein wie möglich wird.

Auflösung. Der verlangte Punkt ist derjenige, in welchem die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze die Grundlinie trifft.

7. Aufgabe. Gegeben das Dreieck ABC; in demselben einen Punkt X so zu bestimmen, dass die Summe seiner Entfernungen von den drei Seiten so klein wie möglich wird.

Auflösung. Nehmen wir irgend einen Punkt D im Dreieck ABC, fällen von demselben die Senkrechten DE, DF und DG bezüglich auf AB, AC und BC und ziehen noch durch denselben die $HJ \parallel AC$ (H in AB und J in BC gelegen), so ist nach Aufgabe 5, wenn $\sphericalangle BAC > \sphericalangle ACB$ und daher auch $\sphericalangle BHJ > \sphericalangle BJH$ ist, und noch $HK \perp BC$ gezogen wird,

$$HK < DE + DG, \text{ daher auch}$$
$$HK + DF < DE + DF + DG, \text{ oder, da } DF = HL \text{ ist } (HL \perp AC)$$
$$HK + HL < DE + DF + DG.$$

$HK + HL$ wird nach derselben Aufgabe um so kleiner, je näher der Punkt H dem Scheitelpunkte des $\sphericalangle ABC$ liegt, (vorausgesetzt, dass $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BAC$) und so klein wie möglich, wenn H mit B zusammen fällt. Der gesuchte Punkt ist also der Scheitelpunkt des grössten der drei Winkel des gegebenen Dreiecks, das Minimum der Entfernungssumme daher die kleinste Höhe desselben.

8. Aufgabe. Auf einer Dreiecksseite BC zwischen B und C einen Punkt so zu bestimmen, dass die von demselben auf die beiden andern Seiten gefällten Senkrechten das grösstmögliche Rechteck bilden.

Auflösung. Es seien D und E zwei Punkte zwischen B und C in BC gelegen, DF, DG, EH und EJ die Senkrechten auf AB und AC, F und H in AB, G und J in AC, so verhält sich

$$DG : EJ = CD : CE$$
$$DF : EH = BD : BE$$
$$\overline{}$$
$$DF \cdot DG : EH \cdot EJ = BD \cdot CD : BE \cdot CE$$

Liegt nun D dem Mittelpunkte der B'C näher als E, so ist nach Aufgabe 1 $BD \cdot CD > BE \cdot CE$, daher auch $DF \cdot DG > EH \cdot EJ$. Daraus folgt, dass der Mittelpunkt der BC der gesuchte Punkt sei.

Zusatz. Je mehr der Punkt, von welchem aus man die Senkrechten fällt, nach B oder C rückt, desto kleiner wird das betreffende Rechteck. Fällt der Punkt mit B oder mit C zusammen, so wird der Inhalt des Rechtecks $= 0$, rückt endlich der Punkt über die Endpunkte der Grundlinie hinaus, so wird das betreffende Rechteck um so grösser, je weiter von B oder C der Punkt genommen ist. B und C sind daher die Punkte, für welche das Rechteck aus den Senkrechten ein Minimum ist. Es gibt also ein Maximum und zwei Minima.

In derselben Weise werden die beiden folgenden Aufgaben gelöst:

9. Aufgabe. Auf einer Dreiecksseite einen Punkt zu bestimmen, so dass die durch denselben zu den beiden Seiten gezogenen Parallelen, so weit sie von den Dreiecksseiten begrenzt werden, das grösstmögliche Rechteck bilden.

10. Aufgabe. Auf einer Dreieksseite einen Punkt so zu bestimmen, dass die von demselben nach den beiden andern Seiten unter gegebenen Neigungswinkeln gezogenen Linien, so weit sie von den Dreiecksseiten begrenzt werden, das grösstmögliche Rechteck bilden.

11. Aufgabe. Gegeben eine Gerade CD und zwei auf derselben Seite liegende Punkte A und B; es soll in CD ein Punkt X so bestimmt werden, dass der Exponent des Verhältnisses $AX : AX$ so gross oder so klein wie möglich wird.

Analysis. Es sei X der verlangte Punkt, also in CD so gelegen, dass $AX : BX > AZ : BZ$, wo Z irgend einen von X verschiedenen Punkt der CD bezeichnet. Wenn man $\sphericalangle AXB$ durch XE und seinen Nebenwinkel durch XF halbirt (E und F Punkte der AB, resp. deren Verlängerung), so verhält sich $AX : BX = EA : EB = FA : FB$. (Die Halbirungslinie eines Dreieckswinkels sowohl als auch seines Nebenwinkels trifft die gegenüber liegende Seite bezw. deren Verlängerung in einem Punkte, dessen Abstände von den Endpunkten dieser Seite sich zu einander verhalten, wie die den Winkel einschliessenden Seiten). Beschreibt man dann über EF als Durchmesser den Kreis, so geht dieser durch X, weil $\sphericalangle EXF = 1R$, und jeder Punkt desselben hat die Eigenschaft, dass die Verbindungslinien desselben mit A und B in dem Verhältniss $EA : EB$ stehen. Für jeden andern, ausserhalb oder innerhalb dieses Kreises liegenden Punkt wird dieses Verhältniss ein anderes. Daraus folgt in Verbindung mit unserer Annahme, dass X der gesuchte Punkt sei, dass die CD nur den Punkt X mit diesem Kreise gemeinsam haben könne, also CD Tangente mit dem Berührungspunkte X an diesem Kreise sei.

Wir haben also $EA:EB = FA:FB$, oder durch Anwendung des Satzes: Halbirt man in einer harmonisch getheilten Linie AF den Abstand zweier konjugirter Punkte E und F in G, so sind die Abstände des Halbirungspunktes von den drei auf derselben Seite von ihm gelegenen Punkten stetig proportionirt: $GA:GE = GE:GB$. Verbindet man noch G mit X, so ist $GE = GX$; daher $GA:GX = GX:GB$; folglich ist GX Tangente des durch A, B und Z gezogenen Kreises. Ein Ort für den Mittelpunkt dieses Kreises ist, weil $GX \perp CD$, die gegebenen Gerade CD, ein zweiter Ort für ihn ist die Mittelsenkrechte auf AB. Daher ist dieser Kreis konstruirbar und somit der Punkt X zu bestimmen.

Konstruktion. Errichte auf AB die Mittelsenkrechte bis zum Durchschnitt in O mit der CD und beschreibe mit AO um O den Kreis; trifft derselbe die CD in X und Y, so ist, wenn X zwischen O und dem Durchschnitt der AB und CD liegt,

$AX:BX$ ein Maximum,
$AY:BY$ ein Minimum.

Beweis. 1) X und Y liegen der Konstruktion gemäss in CD.

2) $AY:BY$ so klein wie möglich,

$AX:BX$ so gross wie möglich. Denn halbirt man $\sphericalangle AYB$ sowohl als auch seinen Nebenwinkel durch YE' und YF', wo E' und F' die Durchschnittspunkte in der AB resp. deren Verlängerung sind, so verhält sich $E'B:E'A = F'B = F'A$ und ein über $E'F'$ als Durchmesser beschriebener Kreis geht, weil $\sphericalangle E'YF' = 1R$ ist, durch Y. Aus obiger Proportion folgt nach dem in der Analysis angeführten Satze über die harmonisch getheilte Linie, wenn G' der Mittelpunkt der $E'F'$ ist, $G'B:G'E' = G'E':G'A$ oder, da $G'E' = G'Y$ ist,

$G'B:G'Y = G'Y:G'A$;

folglich ist $G'Y$ Tangente des durch A, B und Y gehenden Kreises (Konstruktionskreises); daher $G'Y \perp YX$ (CD), desshalb jeder Punkt Y' der CD sowohl auf der einen als auf der andern Seite von Y weiter von G' entfernt als Y, d. h. CD berührt den Kreis über $E'F'$ in Y und Y' liegt ausserhalb dieses Kreises. Daher ist

$BY':AY' > BY:AY$ oder
$AY':BY' < AY:BY$. Also $AY:BY = $ Minimum.

Ganz ähnlich ergiebt sich, dass $AX:BX = $ Maximum.

Anmerkung. Liegen die beiden gegebenen Punkte auf verschiedenen Seiten der CD, so bestimmt man zunächst zu einem derselben etwa zu B den Gegenpunkt B' in Bezug auf CD; die Punkte X und Y, für welche $AX:B'X = $ Maximum und $AY:B'Y = $ Minimum, sind auch die Punkte, für welche $AX:BX = $ Maximum und $AY:BY = $ Minimum.

12. Aufgabe. Gegeben ein Kreis um O und zwei Punkte A und B ausserhalb oder innerhalb desselben; es soll in der Kreislinie ein Punkt X so bestimmt werden, dass der Exponent des Verhältnisses $AX:BX$ so gross oder so klein wie möglich ist.

Analysis. Eine bis zur Bestimmung der Örter für den Mittelpunkt mit der vorhergehenden, wenn wir nur statt der Geraden CD Kreis um O lesen, wörtlich übereinstimmende Analysis führt zu dem Schluss, dass der gesuchte Punkt X in der gegebenen Kreislinie bestimmt werde durch einen Kreis, welcher durch A und B geht und die OG berührt. Daher ist, wenn wir noch O mit A verbinden,

$OA:OX = OX:OH$, wo H den Durchschnitt des oben genannten Kreises mit OA bezeichnet. Da in dieser Proportion OA und OX bekannt sind, so lässt sich die dritte Proportionale OH und somit der Punkt H bestimmen, und damit ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Aufgabe: Durch drei gegebene Punkte A, B und H einen Kreis zu beschreiben.

Konstruktion. Beschreibe über OA den Halbkreis, fälle vom Punkte J, in welchem dieser den gegebenen Kreis schneidet, die $JH \perp OA$ und beschreibe durch A, B und H den Kreis. Trifft dieser den gegebenen Kreis in X und Y, so ist für den einen das Verhältniss seiner Entfernungen von A und B ein Maximum, für den andern ein Minimum.

Beweis. Derselbe ist dem in der vorigen Aufgabe nachzubilden.

Determination. Die Konstruktion ändert sich nicht, wie auch die beiden gegebenen Punkte in Bezug auf den gegebenen Kreis liegen mögen. Nur wenn A, B und O und deshalb auch A, B und H in gerader Linie liegen, gibt es keinen Kreis, welcher durch letztere drei Punkte ginge und darum auch kein X und Y.

13. Aufgabe. In dem Dreieck ABC einen Punkt X so zu bestimmen, dass die Summe seiner Entfernungen von den drei Ecken ein Minimum wird.

Analysis. Es sei C der verlangte Punkt, also so gelegen, dass $AX + BX + CX$ so klein wie möglich ist. Denkt man sich daher um eine der Ecken, etwa um A, mit der Entfernung von X, also in diesem Falle mit AX den Kreis beschrieben und irgend einen von X verschiedenen Punkt Y dieser Kreislinie mit A, B und C verbunden, so wäre

$$AY + BY + CY > AX + BX + CX \text{ oder, da } AY = AX \text{ (Radien desselben Kreises),}$$
$$BY + CY > BX + CX.$$

Der Punkt X liegt demnach auf dieser Kreislinie so, dass für ihn $BX + CX$ ein Minimum ist. Ziehen wir noch durch X die Tangente DE an diesen Kreis, so ist nach Aufgabe 2, Anmerkung 1

$$\sphericalangle BXD = \sphericalangle CXE$$
$$\sphericalangle AXD = \sphericalangle AXE = 1R$$
$$\sphericalangle BXD + \sphericalangle AXD = \sphericalangle CXE + \sphericalangle AXE \text{ oder}$$
$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle AXC.$$

Ebenso finden wir, wenn wir von B und C ausgehen,

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC$$
$$\sphericalangle AXC = \sphericalangle BXC$$
$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle AXC = \sphericalangle BXC = \tfrac{4}{3} R.$$

Der gesuchte Punkt ist also derjenige, von welchem aus die drei Seiten unter gleichen Sehwinkeln erscheinen.

1. Konstruktion. Man beschreibe über zwei Seiten des gegebenen Dreiecks Kreisbogen, welche den $\sphericalangle \tfrac{4}{3} R$ als Umfangswinkel fassen, so ist der Durchschnitt derselben der gesuchte Punkt.

2. Konstruktion. Man beschreibe über zwei Seiten des Dreiecks nach aussen oder innen hin gleichseitige Dreiecke und verbinde deren Spitzen mit den gegenüber liegenden Ecken des Dreiecks, so ist der Durchschnitt dieser Verbindungslinien der gesuchte Punkt.

Beweis. Aus der ersten Konstruktion ergiebt sich sofort, dass $\sphericalangle AXB = \sphericalangle AXC = \sphericalangle BXC$ ist. Dieselbe Wahrheit ergiebt sich für die zweite aus dem Lehrsatze: Errichtet man über den Seiten eines beliebigen Dreiecks jedesmal nach aussen oder jedesmal nach innen gleichseitige Dreiecke und verbindet die Spitzen derselben mit den gegenüberliegenden Ecken des ursprünglichen Dreiecks, so schneiden sich diese drei Verbindungslinien in einem einzigen Punkte, welcher so liegt, dass die Verbindungslinien desselben mit den Ecken des gegebenen Dreiecks gleiche Winkel unter sich bilden. Aus Aufgabe 2 ergibt sich ferner:

$$\begin{array}{r} AX + BX = \text{Min.} \\ AX + CX = \text{Min.} \\ BX + CX = \text{Min.} \\ \hline 2AX + 2BX + 2CX = \text{Min. oder} \\ AX + BX + CX = \text{Min.} \end{array}$$

Anmerkung. Sind alle Winkel des gegebenen Dreiecks $< {}^4/_3$ R, so liegt der Punkt X im Dreieck ABC. Ist ein Winkel des Dreiecks $= {}^4/_3$R, so ist der Scheitelpunkt dieses Winkels der gesuchte Punkt X. Ist endlich ein Winkel des Dreiecks $> {}^4/_3$ R, so liegt X ausserhalb des Dreiecks ABC.

14. Aufgabe. Gegeben eine Gerade CD und zwei auf derselben Seite dieser Linie liegende Punkte A und B; es soll ein Punkt X so bestimmt werden, dass die Summe seiner Entfernungen von den beiden Punkten und der Geraden so klein wie möglich wird.

Auflösung. Es sei X der gesuchte Punkt, also $AX + BX + EX$ so klein wie möglich. (E ein Punkt der CD.) Zunächst ist klar, dass $EX \perp CD$. Ziehen wir durch X die FG $\parallel$ CD, so ist ferner nach Aufgabe 2 $\sphericalangle AXF = \sphericalangle BXF$, daher auch $\sphericalangle AXE$. Beschreiben wir um A mit AX den Kreis, so ergibt sich endlich aus Aufgabe 11, dass $\sphericalangle AXE = \sphericalangle AXB$ sein muss. Aus diesen drei Gleichungen folgt, dass $\sphericalangle AXB = \sphericalangle AXE = \sphericalangle BXE$; daher jeder dieser Winkel $= {}^4/_3$R. Ein Ort für X ist demnach der Kreisbogen über AB, welcher den $\sphericalangle {}^4/_3$ R als Umfangswinkel fasst, ein zweiter die durch A gehende Gerade, welche die CD unter $\sphericalangle {}^1/_3$ R schneidet, wobei vorausgesetzt ist, dass A zwischen B und dem Durchschnitt der AB mit der CD liegt.

Anmerkung. Wird der zweite Ort Tangente an den Kreisbogen, so ist, wenn H den Durchschnitt dieses Ortes mit CD bezeichnet, $\sphericalangle BAH = {}^2/_3$ R, daher $\sphericalangle HAJ = {}^4/_3$ R (J Durchschnitt der AB mit CD), folglich $AJD = {}^1/_3$ R. Wenn also die Verbindungslinie AB mit CD einen $\sphericalangle {}^1/_3$ R macht, so ist der Punkt A selbst der gesuchte Punkt. Wird dieser Winkel grösser, so wird der zweite Ort Sekante, schneidet daher den Bogen, welcher $\sphericalangle {}^4/_3$ R fasst, ebenfalls nur in A, folglich ist A auch für diesen Fall der gesuchte Punkt. Schneiden sich AB und CD nach B hin, so gilt das von A Gesagte für den Punkt B.

15. Aufgabe. Gegeben die Gerade AB und zwei nicht in derselben liegende Punkte C und D; es soll in AB ein Punkt X so bestimmt werden, dass $CX^2 + DX^2$ ein Minimum wird.

Analysis. Es sei X der verlangte Punkt, so ist wenn man E, den Mittelpunkt der CD, mit X verbindet, $CX^2 + DX^2 = {}^1/_2 CD^2 + 2EX^2$. Da CD gegeben, so ist ${}^1/_2 CD^2$ konstant; ${}^1/_2 CD^2 + 2EX^2$ und damit $CX^2 + DX^2$ wird daher so klein wie möglich, wenn $2EX^2$ so klein wie möglich wird, und dieses ist der Fall, wenn EX ein Minimum ist. Dieses aber tritt ein, wenn $EX \perp AB$. Daraus fliesst folgende einfache

Konstruktion. Man halbiere die Verbindungslinie CD in E, so ist der Punkt X, in welchem die von E auf AB gefällte Senkrechte die AB trifft, der verlangte Punkt.

Beweis. Verbindet man irgend einen auf der einen oder andern Seite von X liegenden Punkt Y der AB mit C und D, so ist $CY^2 + DY^2 = {}^1/_2 CD^2 + 2EY^2$. Aber $FY > EX$, also auch $2EY^2 > 1EY$, daher auch $CY^2 + DY^2 > {}^1/_2 CD^2 + 2EX^2$, folglich $CX^2 + DX^2$ so klein wie möglich.

Determination. Die Aufgabe ist nicht zu lösen, wenn $AB \perp CD$.

Anmerkung. Ist statt der Geraden AB der Kreis um O gegeben, so führt uns eine ganz ähnliche Betrachtung zu dem Schlusse, dass wir, um X zu bestimmen, den Mittelpunkt E der CD mit O, dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises zu verbinden haben. Der eine der beiden Durchschnitte bedingt ein Minimum, der andere ein Maximum. Fällt E mit O zusammen, so ist die Aufgabe nicht zu lösen.

Für die beiden Punkte C und D können ebenfalls Kreise eintreten.

16. Aufgabe. In dem Dreieck ABC einen Punkt X so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen desselben von den drei Ecken so klein wie möglich wird.

Auflösung. Es sei X der verlangte Punkt und daher, wenn Y irgend ein von X verschiedener Punkt ist, $AY^2 + BY^2 + CY^2 > AX^2 + BX^2 + CX^2$. Verbindet man X mit Y und fällt von A, B und C auf XY bez. deren Verlängerung die Senkrechten AA′, BB′ und CC′, so ist

$$AY^2 = AX^2 + XY^2 + 2XY.A'X$$
$$BY^2 = BX^2 + XY^2 + 2XY.B'X$$
$$CY^2 = CX^2 + XY^2 - 2XY.CX$$
$$\overline{AY^2 + BY^2 + CY^2 = AX^2 + BX^2 + CX^2 + 3XY^2 + 2XY\ (A'X + B'Y - C'X)}$$

Ist nun X der Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks, so ist, wie Y auch liegen mag, die algebraische Summe der Entfernungen A′X, B′Y, C′X gleich Null. Denn zieht man vom Endpunkte D der Mittellinie AD die $DE \parallel A'A$ bis zum Durchschnitt in E mit XY, so ist $B'X + XE = C'X - E'X$, oder $BX + 2XE = C'X$; aber $2XE = A'X$, weil $\triangle DEX \sim \triangle AA'X$ und $AX = 2DX$. Daher ist unter dieser Voraussetzung $AY^2 + BY^2 + CY^2 = AX^2 + BX^2 + CX^2 + 3XY^2$, folglich $AY^2 + BY^2 + CY^2 > AX^2 + BX^2 + CX^2$. Also ist der Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks der gesuchte Punkt.

Anmerkung. Die Aufgabe ist offenbar der Verallgemeinerung für ein System von beliebig vielen Punkten fähig, indem man in diesem den Punkt bestimmt, (Mittelpunkt der mittleren Entfernungen) für welchen die algebraische Summe von A′X, B′X u. s. w. gleich Null ist.

Vergleiche Gandtner und Junghans I § 12. 369.

17. Aufgabe. Gegeben ein Dreieck ABC; in demselben soll Punkt X so bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen desselben von den drei Seiten so klein wie möglich wird.

Auflösung. Es sei X der verlangte Punkt und daher, wenn Y ein von X verschiedener Punkt ist, $D'Y^2 + E'Y^2 + F'Y^2 > DX^2 + EX^2 + FX^2$ (D,D′, E,E′, F,F′ die Fusspunkte der Senkrechten in AB, AC, BC). Um so mehr wäre dann, wenn man DY, EY und FG zieht, $DY^2 + EY^2 + FY^2 > DX^2 + EX^2 + FX^2$ d. h. X muss so liegen, dass die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den drei Punkten D, E, F ein Minimum ist. Der gesuchte Punkt ist also nach der vorigen Aufgabe der Schwerpunkt des Dreiecks DEF. Zieht man AX und verlängert bis zum Durchschnitt in G mit BC, fällt von G die $GH \perp AB$ und $GJ \perp AC$ und zieht $AM \perp BC$, so ist

$$BG : GH = AB : AM \text{ (weil } \triangle BGH \sim ABM)$$
$$CG : GJ = AC : AM \text{ (weil } \triangle CGJ \sim ACM)$$
$$\overline{BG : CG = AB.GH : AC.GJ}$$

Zieht man endlich noch DK und EL senkrecht auf XF (diese Perpendickel sind einander gleich), so ist ferner

$$DX : DK = AB : AM \text{ (weil } \triangle DKX \sim ABM)$$
$$EX : EL = AC : AM$$
$$DK = EL$$
$$\overline{DX : EX = AB : AC.} \text{ Es ist auch}$$
$$DX : EX = GH : GJ$$
$$\overline{AB : AC = GH : GJ.} \text{ Wir hatten vorhin}$$
$$BG : CG = AB.\ GH : AB.GJ$$
$$\overline{BG : CG = AB^2 : AC^2}$$

Ebenso ergiebt sich, wenn man C mit X verbindet und bis zum Durchschnitt G′ in AB verlängert,

$$AG':BG' = AC^2:BC^2.$$

Durch diese Proportionen lassen sich G und G′ und damit X bestimmen.

18. Aufgabe. In dem einen Schenkel eines Winkels sind zwei Punkte A und B gegeben; es soll in dem andern Schenkel ein Punkt X so bestimmt werden, dass $\sphericalangle AXB$ so gross wie möglich wird.

Auflösung. Beschreibt man über AB als Sehne einen Kreis, welcher den andern Schenkel in C und D schneidet, so liegt der gesuchte Punkt offenbar zwischen C und D. Denn wenn man irgend einen Punkt E zwischen C und D mit A und B verbindet, AE bis zum Durchschnitt in F mit dem Kreise verlängert und F mit B verbindet, so ist $\sphericalangle AEB > \sphericalangle AFB$, daher auch $\sphericalangle AEB > ACB$ oder ADB. Wie nahe nun auch C und D genommen sein mögen, immerhin liegt der gesuchte Punkt zwischen C und D. Der Kreis über AB als Sehne muss daher den andern Schenkel berühren, und der Berührungspunkt ist der gesuchte Punkt. Die Aufgabe ist daher zurückgeführt auf die Aufgabe: Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu beschreiben, welcher eine der Lage nach gegebene Gerade berührt; oder, was dasselbe ist, zu zwei gegebenen Geraden die mittlere Proportionale zu bestimmen.

19. Aufgabe. Wie vorhin; jedoch sind statt der beiden konvergirenden Linien zwei parallele Linien gegeben.

Auflösung. Wie vorhin; der gesuchte Punkt ist der Durchschnitt der Mittelsenkrechten auf AB mit der Parallelen.

20. Aufgabe. Gegeben der Kreis um O und zwei Punkte A und B ausserhalb oder innerhalb desselben; es soll in der Kreislinie ein Punkt X so bestimmt werden, dass $\sphericalangle AXB$ ein Maximum oder Minimum wird.

Auflösung. Eine ganz ähnliche Betrachtung, wie die in Aufgabe 18 angestellte, führt zu dem Schluss, dass der verlangte Punkt derjenige Punkt ist, in welchem der durch A und B gehende Kreis den gegebenen Kreis berührt. Liegen A und B ausserhalb des gegebenen Kreises, so bedingt der eine Berührungspunkt ein Maximum, der andere ein Minimum; liegen beide Punkte innerhalb des gegebenen Kreises, so ist, wenn X und Y die Berührungspunkte sind, sowohl $\sphericalangle AXB$, als auch $\sphericalangle AYB$ ein Maximum.

2. Maxima und Minima
des Inhalts und Umfangs von Dreiecken.

21. Aufgabe. Unter allen Dreiecken, welche auf derselben Grundlinie AB stehen und gleichen Umfang haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Inhalt hat.

Auflösung. Ueber der Grundlinie AB denken wir uns zwei Dreiecke ABX und ABY konstruirt, von welchen das erste gleichschenklig, das zweite ungleichschenklig ist, so aber, dass $AB + AX + BX = AB + AY + BY = s$, oder $AX + BX = AY + BY = s - AB$ ist. Von den beiden Dreiecken wird dasjenige den grösseren Flächeninhalt haben, dessen Höhe die grössere ist. Verlängert man AX um $XC = XB$ und verbindet C mit B und Y, so ist $AY + CY > AC$, oder $AY + CY > AX + BX$, daher $CY > AX + BX - AY$, oder $CY > BY$. Es liegt demnach Y zwischen AB und der Senkrechten XE, welche man von X auf BC fällt; daher ist Höhe $XF >$ Höhe YG, folglich $\triangle AXB > \triangle AYB$. Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange, welche über AB als Grundlinie errichtet werden, hat also das gleichschenklige den grössten Inhalt.

22. Aufgabe. Unter allen Dreiecken, welche auf derselben Grundlinie AB stehen und den gleichen Winkel α an der Spitze haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Inhalt hat.

Auflösung. Die Spitzen aller Dreiecke auf derselben Grundlinie und mit gleichem Winkel α an der Spitze liegen in einem Kreisbogen, welcher über AB als Sehne beschrieben den $\sphericalangle \alpha$ als Umfangswinkel fasst. Von allen diesen Dreiecken hat offenbar das gleichschenklige die grösste Höhe; also ist auch in diesem Falle das gleichschenklige das verlangte Dreieck.

23. Aufgabe. Unter allen Dreiecken, welche in einem Winkel α und der Summe der einschliessenden Seiten übereinstimmen, das grösste zu finden.

Auflösung. Es seien ABC u. ADE zwei Dreiecke, in welchen $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAE = \alpha$ u. $AB + AC = AD + AE = s$. Ist $\triangle ABC = \triangle ADE$, so ist nach dem Satze: Haben zwei gleiche Dreiecke einen gleichen Winkel, so sind die Rechtecke gebildet aus den diesen Winkel einschliessenden Seiten einander gleich, $AB.AC = AD.AE$. Rechteck gebildet aus AB und AC ist aber so gross wie möglich (Aufgabe 1), wenn $AB = AC$. Also ist auch in diesem Falle das gleichschenklige Dreieck, dessen Seite $= \frac{1}{2}s$ und dessen Winkel an der Spitze $= \alpha$, das verlangte.

24. Aufgabe. Unter allen Dreicken, welche denselben Umfang u und gleiche Höhe h haben, das grösste zu finden.

Analysis. Da die in Betracht kommenden Dreiecke dieselbe Höhe haben, so hat offenbar dasjenige von denselben den grössten Flächeninhalt, welches die grösste Grundlinie hat. Für ein solches ist aber die Summe der beiden Seiten so klein wie möglich. $AB + AC$ wird nach Aufgabe 2 so klein wie möglich, wenn $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAE$ ist ($DE \parallel BC$), und dieses ist der Fall, wenn $AB = AC$ ist.

Konstruktion. Man konstruire aus h und $\frac{1}{2}u$ das rechtwinklige Dreieck AFG ($AF = h$ und $FG = \frac{1}{2}u$, $\sphericalangle AFG = 1 R$), errichte auf AG die Mittelsenkrechte bis zum Durchschnitt in B mit FG, verbinde A mit B, mache $FC = FB$ und verbinde A mit C, so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Beweis. Es ist $AF = h$ und $AB + AC + BC = u$ nach der Konstruktion. Dass $\triangle ABC$ so gross wie möglich, ergiebt sich leicht durch Vergleichung mit einem andern Dreieck.

25. Aufgabe. Unter allen Dreiecken auf derselben Grundlinie AB, deren Seiten in einem gegebenen Verhältniss $m:n$ zu einander stehen, das grösste zu finden.

Auflösung. Theilt man AB in einem zwischen A und B liegenden Punkte C und in einem in der Verlängerung über B hinaus liegenden Punkte D nach dem Verhältniss $m:n$, so ist der Kreis über CD als Durchmesser der Ort aller Punkte, deren Entfernungen von A und von B sich verhalten wie $m:n$. Verbindet man irgend einen Punkt X dieses Kreises mit A und B, so ist also $AX:BX = m:n$, und das $\triangle ABX$ ist so gross wie möglich, wenn seine Höhe XE ein Max. ist. Diese ist aber am grössten, wenn sie Radius des konstruirten Kreises, d. i., wenn ihr Fusspunkt Mitttelpunkt des Kreises ist.

26. Aufgabe. Unter allen Dreiecken, welche gleiche Höhe h und gleichen Winkel α an der Spitze haben, das kleinste zu finden.

Analysis. ABC und ADE seien zwei Dreiecke, welche dieselbe Höhe $AF = h$ haben und in welchem $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAE$ ist. Dreieck ABC sei gleichschenklig, ADE ungleichschenklig. Von den beiden Dreiecken ist offenbar dasjenige das kleinere, welches die kleinere Grundlinie hat. Beide Grundlinien haben das Stück DC gemeinsam; untersuchen wir daher BD und CE. Machen wir $FG = FD$, so ist, wenn wir G mit A verbinden, $\triangle ABD \cong \triangle ACG$, daher $\sphericalangle CAG = \sphericalangle CAE$, folglich $CE:CG = AE:AG$. Nun ist offenbar $AE > AG$, folglich auch $CE > CG$, daher auch $CE + CD > CG + CD$, oder $DE > BC$, folglich $\triangle ADE > \triangle ABC$. Von den Dreiecken mit gemeinsamer Höhe und gleichem Winkel an der Spitze ist also das gleichschenklige das kleinste.

Konstruktion. Konstruire zunächst das rechtwinklige $\triangle ABF$ aus $AF = h$ und $\sphericalangle BAF = \frac{1}{2}$

27. Aufgabe. Unter allen Dreiecken, welche einen gleichen Winkel α und gleichen Flächeninhalt haben, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Auflösung. Es seien ABC und ADE zwei gleichflächige Dreiecke, in welchen $\sphericalangle BAC = DAE = \alpha$, so ist $AB.AC = AD.AE$. Der Umfang dieser Rechtecke ist aber nach Aufgabe 1 am kleinsten, wenn dieselben Quadrate sind, d. i., wenn $AB = AC$. Die Aufgabe ist somit zurückgeführt auf die Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem der Inhalt und die Winkel gegeben sind.

28. Aufgabe. Unter allen Dreiecken von gleicher Höhe und gleichem Flächeninhalt dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Auflösung. Alle in Betracht kommenden Dreiecke haben, weil sie gleichen Inhalt und gleiche Höhe haben, auch gleiche Grundlinien. ABC und BCD seien zwei solche Dreiecke, das erstere gleichschenklig, das andere ungleichschenklig. Nach Aufgabe 2 ist $AB + AC < BD + CD$ Also ist der Umfang des gleichschenkligen Dreiecks kleiner als der eines jeden ungleichschenkligen, welches mit ihm auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallelen liegt.

Konstruktion. Bestimme aus Inhalt und Höhe die Grundlinie u. s. w.

29. Aufgabe. Durch einen innerhalb eines gegebenen Winkels BAC gegebenen Punkt O eine Gerade so zu legen, dass das abgeschnittene Dreieck AXY an Inhalt ein Minimum wird.

Auflösung. Zieht man durch O beliebig die Verbindungslinie der beiden Schenkelpunkte B und C, macht $OD = OB$ (für den Fall, dass $OB > OC$), zieht $DX \parallel AB$ und durch O die XY, so ist von allen Dreiecken, welche sich durch eine durch O gehende Linie abschneiden lassen, das Dreieck AXY das kleinste. Denn es ist $\triangle DOX \cong \triangle BOY$, daher $\triangle COX > \triangle BOY$. Je näher nun BD an XY heranrückt, desto kleiner wird der Ueberschuss $\triangle CDX$, und dieser verschwindet ganz, wenn BC mit XY zusammenfällt.

Aus der Kongruenz der Dreiecke DOX und BOY ergiebt sich, dass OX = OY. Vorliegende Aufgabe ist somit zurückgeführt auf die Aufgabe: Durch einen Punkt innerhalb eines gegebenen Winkels eine Gerade so zu legen, dass die Theile derselben zwischen dem gegebenen Punkte und den Schenkeln einander gleich sind.

30. Aufgabe. Durch einen Punkt O innerhalb eines gegebenen Winkels BAC eine Gerade so zu ziehen, dass der Umfang des abgeschnittenen Dreiecks so klein wie möglich wird.

Auflösung. Es sei XY die verlangte Linie. Beschreibt man einen Kreis, welcher die beiden Schenkel beliebig in C und B und die XY berührt, so ist AB (= AC) gleich dem halben Umfang des $\triangle$ AXY. Die Tangente AB wird aber um so kleiner, je kleiner der Kreis, bez. dessen Radius wird, und ersterer ist offenbar so klein wie möglich, wenn er durch O geht. Die Aufgabe ist somit zurückgeführt auf die Aufgabe: Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene gerade Linien berührt.

31. Aufgabe. In den Seiten eines gegebenen gleichseitigen Dreiecks ABC drei Punkte X, Y, Z so zu bestimmen, dass die Verbindungslinien derselben wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden und zwar das kleinstmögliche.

Auflösung. Es seien X, Y, Z die gesuchten Punkte in den Seiten AB, AC und BC des gegebenen gleichseitigen Dreiecks ABC. Das Dreieck XYZ ist offenbar so klein als möglich, wenn die Summe der abgeschnittenen Dreiecke AXY, BXZ und CYZ so gross wie möglich ist. Diese Dreiecke stehen der Voraussetzung gemäss auf gleichen Grundlinien und haben gleiche Winkel an der Spitze. Daher sind nach Aufgabe 22 diese drei Dreiecke gleichschenklig mit den Grundlinien XY, XZ, YZ. Da aber der Winkel an der Spitze derselben $^2/_3$ R beträgt, so ist auch jeder Winkel an der Grundlinie $= ^2/_3$ R, d. h. die Dreiecke AXY, BXZ und CYZ sind ebenfalls gleichseitig. Hieraus ergiebt sich, dass die Mittelpunkte der Seiten des gegebenen Dreiecks die gesuchten Punkte sind.

32. Hülfsaufgabe. Gegeben sind zwei Kreise um O und O′, welche sich in A und B durchschneiden; es soll durch A eine Sekante so gezogen werden, dass das zwischen den äussersten Durchschnittspunkten liegende Stück derselben so gross wie möglich wird.

Auflösung. Zur Lösung dieser Aufgabe gelangen wir am einfachsten, wenn wir von der Aufgabe ausgehen, durch A eine Sekante von gegebener Länge zu ziehen. Es sei CD die verlangte Sekante, also gleich m. Fällen wir OE und O′F senkrecht CD, so ist EF = $^1/_2$ CD = O′G, wenn wir noch O′G $\parallel$ CD bis zum Durchschnitt mit OE in G ziehen. Verbinden wir endlich O mit O′, so ist das rechtwinklige Dreieck GOO′ bekannt. O′G wird aber so gross wie möglich, wenn O′G = OO′ ist, d. h., wenn O′G mit OO′ zusammenfällt. Daraus folgt, dass CD so gross wie möglich ist, wenn CD $\parallel$ OO′.

33. Aufgabe. Um ein beliebiges Dreieck ABC ein gleichseitiges Dreieck XYZ zu beschreiben, dessen Umfang so gross wie möglich ist.

Analysis. Es sei XYZ das verlangte Dreieck. Zunächst ist klar, dass die Ecken desselben in den über AB, AC und BC beschriebenen Kreisbogen liegen, welche den $\sphericalangle\, ^2/_3$ R als Umfangswinkel fassen. Von den auf diese Weise leicht zu konstruirenden gleichseitigen Dreiecken deren Seiten durch die Ecken des gegebenen Dreiecks gehen, ist nun das an Umfang grösste zu bestimmen. Die Aufgabe ist somit auf die vorangestellte Hülfsaufgabe zurückgeführt.

Konstruktion. Man beschreibe über AB und AC als Sehnen-Kreisbogen (beide nach aussen hin), welche den $\sphericalangle\, ^2/_3$ R als Umfangswinkel fassen, ziehe durch A die XY $\parallel$ OO′ (Centrale), verbinde X mit B und Y mit C und verlängere diese Verbindungslinien bis zu ihrem Durchschnitt in Z, so ist XYZ das verlangte Dreieck.

Beweis. 1) Die Seiten des Dreiecks XYZ gehen der Konstruktion gemäss durch A, B und C. 2) $\sphericalangle YXZ = \sphericalangle XYZ = {}^2/_3 R$ nach der Konstruktion, folglich ist auch $\sphericalangle XZY = {}^2/_3 R$, also Dreieck XYZ gleichseitig. 3) XY ist so gross wie möglich, daher auch der Umfang des Dreiecks XYZ der grösstmögliche.

Zusatz. $\triangle XYZ$ ist auch dem Inhalte nach das grösste gleichseitige Dreieck, welches sich um ABC beschreiben lässt.

34. Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck ABC ein anderes DXY so einzuschreiben, dass seine Spitze in einem gegebenen Punkt D der Seite BC liegt, die gegenüber liegende Seite XY parallel der Seite BC, und sein Inhalt so gross wie möglich ist.

Auflösung. Es sei DXY das verlangte Dreieck. Zieht man AD, so verhält sich

$$\triangle DXY : \triangle AXY = DE : AE \text{ (E ist Durchschnitt der AD mit XY)}$$
$$= CY : AY \text{ oder}$$
$$= CY.AY : AY^2. \quad \text{Ferner}$$
$$\triangle AXY : \triangle ABC = AY^2 : AC^2$$
$$\overline{\triangle DXY : \triangle ABC = CY.AY : AC^2.}$$

Da nun $\triangle DXY$ so gross wie möglich sein soll, so muss auch CY.AY so gross wie möglich sein, und dieses ist der Fall, wenn $CY = AY$ (Aufgabe 1). Also wird AC in Y, und daher auch AB in X halbirt.

Zusatz. In derselben Weise werden folgende Aufgaben gelöst:

1) In ein Dreieck ein Parallelogramm einzuschreiben, welches mit dem Dreieck einen Winkel gemeinsam hat und dessen Inhalt ein Maximum ist.

2) In ein Dreieck ein Rechteck einzuschreiben, dessen Inhalt ein Maximum ist.

3) In ein Dreieck ein Parallelogramm, von welchem ein Winkel gegeben ist, so einzuschreiben, dass sein Inhalt ein Maximum wird.

35. Aufgabe. Auf den drei Seiten eines spitzwinkeligen Dreiecks ABC sollen drei Punkte X, Y, Z so bestimmt werden, dass der Umfang des Dreiecks XYZ so klein wie möglich wird.

Auflösung. Es seien X, Y, Z die verlangten Punkte, also $XY + XZ + YZ$ so klein wie möglich. Daraus ergiebt sich (Aufgabe 2), dass $\sphericalangle AXY = \sphericalangle BXZ$, $\sphericalangle AYX = \sphericalangle CYZ$ und $\sphericalangle BZX = \sphericalangle CZY$. Dieses ist der Fall, wenn X, Y und Z die Fusspunkte der drei Höhen des gegebenen Dreiecks sind; denn dann ist

$$\sphericalangle AXC = \sphericalangle BXC$$
$$\sphericalangle CXY = \sphericalangle CXZ \text{ (die Höhen eines Dreiecks halbiren die Winkel des Fusspunktsdreiecks.)}$$
$$\overline{\sphericalangle AXY = \sphericalangle BXZ.}$$

Ebenso ergeben sich die beiden anderen Winkelgleichungen. Die Fusspunkte der drei Höhen des gegebenen Dreiecks sind demnach die verlangten Punkte.

36. Aufgabe. Unter allen Dreiecken, welche einen gegebenen Winkel enthalten und einem gegebenen Kreise umschrieben werden können, dasjenige zu finden, welches den grössten oder kleinsten Flächeninhalt hat.

Auflösung. Legt man an den gegebenen Kreis zwei Tangenten, welche sich unter dem gegebenen Winkel durchschneiden und zieht zwischen diesen zwei beliebige Tangenten XY und X′Y′ an diesen Kreis, so aber, dass die entstandenen Dreiecke AXY und AX′Y′ von innen von dem Kreise berührt werden, so ergiebt sich ähnlich wie in Aufgabe 29, dass dasjenige von den beiden Dreiecken das grössere sei, bei welchem der Unterschied der beiden Seiten AX und AY resp. AX′ und AY′ der grössere ist. Daraus folgt, dass das Dreieck AXY um so kleiner wird, je kleiner der Unterschied der Seiten AX und AY, und dass AXY dem Inhalte nach ein Minimum wird, wenn $AX = AY$. Die Tangente XY wird alsdann in ihrem Berührungspunkt halbirt. Ein Ort für den Berührungspunkt der dritten Seite ist daher der Kreis, ein zweiter die Halbirungslinie des $\sphericalangle XAY$. Zieht man aber durch den zweiten Punkt, in welchem die Halbirungslinie den Kreis trifft, die Tangente XY an denselben, so erhalten wir ein $\triangle AXY$, welches der Kreis von aussen berührt, und es ergiebt sich in derselben Weise wie vorhin, dass von allen so berührten Dreiecken AXY so gross wie möglich ist.

37. Aufgabe. Unter allen Dreiecken, welche einen gegebenen Winkel enthalten und einem gegebenen Kreise umschrieben werden können, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Auflösung. Es ergiebt sich leicht, dass das Dreieck, welches die vorhergehende Aufgabe als das kleinste ergab, auch dem Umfang nach ein Minimum ist.

38. Aufgabe. Unter allen Dreiecken, welche einem gegebenen Kreissegment eingeschrieben werden können, dasjenige zu finden, dessen Inhalt und Umfang so gross wie möglich ist.

Auflösung. Ist AB die Sehne des Segments, so ist das gleichschenklige Dreieck ABX das verlangte. Denn 1) ist Dreieck ABX an Inhalt grösser als jedes andere eingeschriebene Dreieck ABY nach Aufgabe 22; 2) hat auch $\triangle ABX$ einen grösseren Umfang als ABY. Um dies zu beweisen, beschreibe man mit XA um X den Kreis bis zum Durchschnitt in Z mit der verlängerten AY und verbinde Z mit B, so ist

$\sphericalangle AZB = \frac{1}{2} \sphericalangle AXB$ (Umfangs- und Mittelpunktswinkel auf demselben Bogen)

$\sphericalangle AXB = \sphericalangle AYB$ „ „ „ „ „ „

$\sphericalangle AZB = \frac{1}{2} \sphericalangle AYB$, mithin

$\sphericalangle YZB = \sphericalangle YBZ$, daher

$YZ = YB$. Nun ist

$AZ < 2AX$ (Sehne und Durchmesser), oder

$AZ < AX + BX$, oder

$AY + YB < AX + BX$, mithin auch

$AB + AY + YB < AB + AX + BX$.

39. Aufgabe. Unter allen Dreiecken, welche einem gegebenen Kreissegment umschrieben werden können, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Inhalt hat.

Auflösung. Durch Vergleichung verschiedener um das Segment gezeichneter Dreiecke ergiebt sich, dass das gesuchte Dreieck dasjenige gleichschenklige $\triangle ABC$ ist, dessen Seiten AB und AC in den Berührungspunkten D und E halbirt werden. Denn beschreibt man zunächst beliebig ein vom gleichschenkligen $\triangle ABC$ verschiedenes ungleichschenkliges $\triangle CFG$, dessen Seite CF der Richtung nach mit AC zusammenfallen möge, so ergiebt sich, dass $\triangle ABC < \triangle CFG$. Zieht man nämlich $BH \parallel CF$ und durch den Berührungspunkt D die $HJ \parallel FG$ bis zum Durchschnitt in J mit CF, so ist $\triangle BDH \cong \triangle ADJ$, daher $\triangle BDH < \triangle AFK$ (K ist Durchschnitt der AB mit FG), um so mehr $\triangle BKL < \triangle AFK$ (L ist Durchschnitt der FG mit BH), um so mehr noch $\triangle BGK < \triangle AFK$, folglich auch $\triangle BGK + AKGCA < \triangle AFK + AKGCA$ oder $\triangle ABC < \triangle CFG$. Es ist also das umschriebene gleichschenklige Dreieck kleiner als jedes umschriebene ungleichschenklige. Vergleichen wir ferner irgend ein vom $\triangle ABC$ verschiedenes gleichschenkliges $\triangle MNP$ (M Spitze, N und P in der Sehne liegend) mit $\triangle ABC$. Zieht man $RS \parallel MN$ bis zum Durchschnitt in R mit $AT \parallel BC$ (S ein Punkt der Sehne, T der MN), so ist $\triangle BDS \cong ADR$, daher $\triangle BNU < \triangle ATU$ (U ist Durchschnitt der AB mit MN), um so mehr $\triangle BNU < \triangle AMU$. Ebenso ergiebt sich, dass $\triangle CPV < \triangle AMV$, wo V den Durchschnitt der AC mit MP bezeichnet; daher $\triangle ABC < \triangle MNP$. Also ist $\triangle ABC$ das verlangte. Die Aufgabe ist somit zurückgeführt auf die Aufgabe: An ein gegebenes Kreissegment eine Tangente so zu legen, dass das Stück derselben, welches zwischen der das Segment begrenzenden Sehne und dem darauf senkrecht stehenden Radius (bez. dessen Verlängerung) liegt, in dem Berührungspunkte halbirt wird.