Fr. Benzenberg.

1802.

Anfangsgründe der Mathematischen Wissenschaften

von

Wencesl. Johann Gustav Karsten,
der Phil. Doctor, Hofrath und Professor der Mathematik und Naturlehre auf der Universität in Halle, der Churf. Academie der Wissenschaften in München, der Holländischen Gesellschaft der Wissenschaften in Harlem, und der Königl. Dänischen Gesellschaft in Copenhagen, auch der öconomischen Gesellschaft in Leipzig Mitgliede.

Erster Band.

Die Rechenkunst, Geometrie und ebene Trigonometrie.

Greifswald,
gedruckt und verlegt von Anton Ferdinand Röse, 1780.

Seiner Hochfreyherrlichen Excellenz,
dem
Hochgebohrnen Herrn,
Herrn
Carl Abraham
Freyherrn von Zedlitz,
Erbherrn auf Capsdorff, Michelwitz, ꝛc.
Königlich Preussischen
wirklichen Geheimen Staats- und
Justiz-Minister,
Chef des geistlichen Departements und des Armendirectoriums, ersten Präsidenten des Lutherischen Consistoriums, Ober-Curatoren der Königlichen Universitäten, Directoren der königlichen Bibliothek, der Kunst-Cammer und des Medaillen-Cabinets, ꝛc. ꝛc. ꝛc.

meinem gnädgen Herrn.

Hochgebohrner Freyherr,
Gnädiger Herr,

Zu einer Zeit, da eine neue Bearbeitung des ganzen Plans eines von mir abgefaßten mathematischen Lehrbegriffes mich beschäftiget, um demselben nach dem jetzigen Zustande der Wissenschaft wo möglich so viele Vollkommenheit zu geben, als der um die Philosophie und Mathematik gleich verdiente von Wolff seinem grössern lateinischen Lehrbuch der Mathematik vor funfzig Jahren nach dem damahligen Zustande der Wissenschaft gegeben hatte; grade zu der Zeit wird von Eurer Hochfreyherrlichen Excellenz der allergnädigste Königliche Ruf, als Lehrer der Mathematik und Naturlehre auf der Universität zu Halle von Wolffens und von Segners Nachfolger zu werden, auf eine ungemein gnädige Art mir angetragen. Unter dem allergnädigsten Schutz des Preussischen Monarchen, und unter der gnädigen Protection Eurer Hochfreyherrlichen Excellenz eine Lehrerstelle zu bekleiden, welche durch die sehr berühmten Nahmen eines von Wolffen und von Segners auf den deutschen Universitäten sich vorzüglich auszeichnet, ist eine Ehre für mich, welche zu hoffen ich nie gewagt hätte: und daß zu einer so wichtigen Lehrerstelle auserseben Seiner Königlichen Majestät von Eurer Hochfreyherrlichen Excellenz ich sey empfohlen worden, der Gedanke erfüllet meine ganze Seele. Nur in der Stille kann ich das ganz empfinden, wie groß diese Aufmunterung für mich sey, und wie stark das meine Hofnung belebe, bey aller Ruhe und Müsse, welche dem

nach

nach Wahrheit forschenden Geist so sehr nöthig ist, den Plan eines Werks noch glücklich auszuführen, bey dessen Bearbeitung ich die grossen Schwierigkeiten einer solchen Unternehmung sehr oft empfunden habe. Es sey also dies ganze nach einem noch etwas mehr zweckmässigen Plan abgeänderte Werk Eurer Hochfreyherrlichen Excellenz als ein schwaches Zeugniß meiner tiefunterthänigen Dankbarkeit ehrerbietigst gewidmet! Es werde dadurch der gelehrten Welt öffentlich bekannt, wie dringend mein Wunsch sey, des ungemein gnädigen in mich gesetzten Vertrauens und meiner jetzigen Bestimmung mich einigermassen würdig zu machen! Es vertrete zugleich die Stelle der feyerlichsten Versicherung, daß mit der eifrigsten Bemühung ich beflissen seyn werde, die sehr allgemein nützlichen mathematischen Wissenschaften auf der Universität Halle so zu lehren, daß ohne Nachtheil der Gründlichkeit dennoch Liebhabern dieser Wissenschaften die Mühe sie zu erlernen möglichst erleichtert werde. Wenn bey der treuesten pflichtmässigen Abwartung der den angehenden Gelehrten gewidmeten Lehrstunden in Halle auch künftig in den folgenden Bänden ich noch mehrere Früchte meiner Bemühungen in den Wissenschaften der gelehrten Welt vorzulegen vielleicht im Stande seyn werde; so wird es nie ohne die ehrerbietigst dankbare Erinnerung dessen geschehen, daß durch Eurer Excellenz gnädige Unterstützung ich dazu vorzüglich sey aufgemuntert worden, der ich mit Bezeugung meines tiefsten Respects mich unterzeichne als

Eurer Hochfreyherrlichen
Excellenz

unterthänigen Diener
der Verfasser.

Vorrede.

Es sind zehn Jahre verflossen, seitdem der erste Theil meines Lehrbegriffes der Mathematik im Druck erschienen ist, und durch den Beyfall, welchen mit diesem ersten Theil auch die übrigen seitdem gefunden haben, bin ich vornemlich aufgemuntert worden, als eine neue Auflage des ersten Theils verlangt ward, von allen Seiten zu überlegen, ob vielleicht der ganze Plan des Werkes solche Aenderungen leide, die dasselbe der von mir gewünschten Vollkommenheit näher bringen mögten. Im ganzen halte ich auch jetzt noch die erste Ausgabe für gut: und wenn ich auch nach meinen jetzigen Einsichten weniger damit zufrieden wäre; so würde ich doch dem Beyspiel einiger Schriftsteller gewiß nicht folgen, welche die ersten Ausgaben ihrer Schriften für schlecht erklären, ja wohl gar nicht für ihre Arbeit erkennen

 wollen,

wollen, um die Besitzer zu nöthigen, auch die zweyte Ausgabe zu kaufen. Ich hätte mir diesmahl keinen andern Plan gemacht, wenn mich nicht die Erfahrung gelehret hätte, daß bisher noch immer die meisten von den auf Universitäten studirenden angehenden Gelehrten dafür halten, es sey genug, wenn sie der reinen Mathematik ein halbes Jahr widmen, und hiernächst höchstens noch ein halbes Jahr auf die angewandte Mathematik wenden. Bey dem Plan, nach welchem ich die erste Auflage ausgearbeitet habe, war mein Wunsch, es nach und nach dahin zu bringen, daß man es gewohnt werden mögte, der reinen Mathematik zwey halbe Jahre zu widmen: allein ich habe nur selten das Vergnügen gehabt, im nächsten halben Jahr auch nur einem Theil der Zuhörer den zweyten Theil meines mathematischen Lehrbegriffs zu erklären, welche im vorher verflossenen halben Jahr die Lehrstunden über den ersten Theil besucht hatten. Hiezu kommen noch andre Gründe, die mich bewogen haben, diesmahl verschiedene Lehren, als die von Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzeln, von den Logarithmen, auch die ebene Trigonometrie, und am Ende der körperlichen Geometrie noch die Lehren, worauf sich die Ausmessung der Kugelfläche gründet, mit in den ersten Theil zu bringen, die ich sonst um deßwillen dem zweyten Theil vorbehalten hatte, weil solchergestalt jeder Theil für sich ohngefehr soviele Lehren enthielte, als in der kurzen Zeit eines halben Jahres, ohne daß man zu sehr zu eilen genöthiget ist, füglich erklärt werden können. Ich

werde

werde nemlich diesem ersten Bande noch zwey andre folgen lassen, wovon mir künftig ein jeder zur Grundlage dienen soll, in halbjährigen Lehrstunden das eine mahl die ersten Gründe aller mechanischen Wissenschaften mit Inbegriff der Maschinenlehre, das andremahl die ersten Gründe der optischen und astronomischen Wissenschaften vorzutragen. Um diesen soviele Vollständigkeit als möglich zu geben, muste der erste Band etwas mehr Theorie enthalten, als ich vormahls in den ersten Theil gebracht hatte. Bey dem allen wird doch dieser erste nach dem abgeänderten Plan ausgearbeitete Theil, so weit derselbe nun den ersten Band ausmacht, ein bequemes Handbuch bleiben: wenigstens werde ich suchen meine nach Anleitung desselben anzustellenden Lehrstunden in der gewöhnlichen Zeit eines halben Jahres zu endigen, und ich hoffe, dieser Absicht nicht zu verfehlen, wenn ich mich so verhalte, wie ich in der Vorrede zur ersten Auflage des zweyten Theils mich bey einer ähnlichen Veranlassung erklärt habe.

Ich halte es nicht für nothwendig, daß der Lehrer grade alles beym mündlichen Vortrage durchgehe, was in dem Buche stehet, worüber die Vorlesungen gehalten werden, wenn das Buch schon mit Rücksicht auf diesen Umstand abgefasset ist. In keiner Wissenschaft sind eigene Uebungen mehr nothwendig, als in der Mathematik, und wenn der eigene Fleiß des Zuhörers nicht hinzu kommt, so mag derselbe immer die Hofnung aufgeben, es in der Wissenschaft auch nur bis zum

mittel-

mittelmässigen zu bringen. Das Rechnen in den Lehrstunden nimmt sehr viele Zeit weg, die alsdenn, wenn der Vortrag über die Gründe der Rechenkunst schon geendiget ist, besser angewandt werden kann. Dem Zuhörer kann es unmöglich angenehm seyn, den Vortrag anzuhören, wenn man mit Multipliciren, Dividiren, Ausziehungen von Quadrat- oder Cubicwurzeln und dergleichen mehr, halbe Stunden Zeit zubringt. Demjenigen, der in der Stunde nicht mitrechnet, wird die Zeit dabey lang, und wer soweit gekommen ist, daß er mitrechnen kann, der wird auch für sich beym Privatfleiß die im Buch angegebenen Resultate nachrechnen können. Viele dergleichen Resultate in den Abschnitten von Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzeln auch besonders in der Lehre von den Logarithmen, ferner eben so in der ebenen Trigonometrie, habe ich im Buch angezeigt, theils zum Zweck der eigenen Uebung beym Privatfleiß, theils zum weitern Gebrauch in den folgenden Theilen dieses Lehrbuches. Ich bin sehr davon überzeugt, daß alle diejenigen, welche beym Gebrauch dieses Handbuches vielleicht auch künftig mich mit dem Vertrauen beehren mögten, meine mündlichen Lehrstunden zu besuchen, den Nutzen davon desto mehr verspüren werden, je weiter sie es durch eigenen Fleiß in der Mathematik werden zu bringen suchen. Sollten indessen bey allen von mir angezeigten Zeitersparungen die Lehrstunden nach diesem Handbuch in einem halben Jahr nicht bequem geendiget werden können; so würde das keine andre Folge haben, als die es auch bey

andern

andern Lehrbüchern hat, welche durchgängig für die besten gehalten werden. Diese enthalten noch mehr Sachen, als das meinige, und ich würde mich noch weniger getrauen, diese Lehrbücher in halbjährigen Lehrstunden völlig durchzugehen. Der Sache ist geholfen, wenn man entweder die Trigonometrie wegläßt, und diese Wissenschaft in besondern Lehrstunden vorträgt, oder mit den Zuhörern, die sich das ganze Buch wollen erklären lassen, wöchentlich eine oder zwo Stunden mehr, als gewöhnlich darauf verwandt werde, verabredet.

Ob mir der Vortrag einzelner Lehren, wenigstens zum Theil, hier besser geglückt sey, als in der ersten Auflage, das muß ich Kennern zur nähern Prüfung anheim geben. Von einigen glaube ich es, die ich kurz anzeigen will. Beym V. Abschnitt der Rechenkunst habe ich auf die Erinnerungen in der Allg. D. Bibl. VI. B. 2 Stück 193 S. Rücksicht genommen. Der Uebergang zum allgemeinen Ausdruck der Sätze mit Buchstaben war in der ersten Ausgabe wirklich etwas zu schnell: hier wird hoffentlich auch der Leser, welcher keine Erklärung darüber hört, weniger Anstoß finden. Uebrigens glaube ich doch, daß diese Lehren, ihres übrigen Nutzens zu geschweigen, auch schon um deßwillen eine Stelle in einem Lehrbuch für Anfänger verdienen, weil sie die ersten Beyspiele davon abgeben, daß es in der mathematischen Rechenkunst nicht bloß ums Rechnen, sondern auch darum zu thun sey, über die Natur der Zahlen allgemeine philosophische Untersuchungen anzustellen. Euclides hat sie im VII. Buch, und mir ists bey Lehrbüchern, die sie nicht haben, immer so vorgekommen, als wenn dem System etwas fehlte. Die Lehren von den Verhältnissen und Proportionen habe ich, der Schärfe und Allgemeinheit der Beweise unbeschadet, etwas mehr zu verkürzen, und das Kennzeichen der Proportionalität incommensurabler Grössen im 164 §. der Rechenkunst für Anfänger noch faßlicher auszudrücken gesucht. Eben das glaube ich bey den Lehren von Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzeln geleistet zu haben. Die Logarithmen habe ich nach meinem jetzigen Plan um der Trigonometrie willen nicht weglassen, und dem zweyten Theil vorbehalten können. Ein Lehrer der etwa beym Unterricht nach diesem Handbuch die Trigonometrie besonders zu Lehren für gut fände, könnte die Logarithmen auch weglassen, und die Lehren von ihnen mit der Trigonometrie besonders vortragen. Beym practischen Vortrag der Regel Detri suche ich gute geübte Rechner zu bilden, und die vollständigern Nachrichten von der Maaß- und Gewichtsvergleichung wird man um deßwillen nicht unnöthig finden, weil in der practischen Mathematik oft Anlaß vorkommt, davon Gebrauch zu machen.

Ob mein Vortrag in der Lehre von den Parallellinien nunmehro völlig befriedigend sey? darüber wünsche ich das Urtheil der Kenner zu erfahren. In einer andern kleinen Schrift: Versuch einer völlig berichtigten Theorie von den Parallellinien, die ich zugleich als eine Anzeige meiner Vorlesungen auf der Universität Halle drucken zu lassen, eben jetzt beschäftiget bin, werde ich mein Verfahren etwas umständlicher rechtfertigen, als hier geschehen konnte. Einige Eigenschaften der gradlinichten Figuren überhaupt sind im VII. Abschnitt schärfer und allgemeiner als gewöhnlich bewiesen, besonders auch die Möglichkeit der Voraussetzung, daß jede gradlinichte Figur sich durch Diagonallinien in Dreyecke theilen lasse, deren Summe der Fläche der ganzen Figur gleich ist. Die Sätze welche man aus dieser Voraussetzung, oder auch aus der ihr ähnlichen, gewöhnlich herleitet, daß man annimmt, jede gradlinichte Figur lasse sich durch grade Linien, die aus einerley Punct bis an die Winkelpuncte laufen, in Dreyecke theilen, sind hier auf andre Gründe zurück geführt.

Die Gründe der allgemeinen Lehre von den Verhältnissen und Proportionen sind zwar hier in der Rechenkunst vorgetragen, die ich in der ersten Ausgabe der Geometrie vorbehalten hatte: weil jedoch viele von den besondern Regeln zur Verwandelung einer Proportion, um andre daraus herzuleiten, vornemlich in der Geometrie nur gebraucht werden; so konnten sie bis dahin ausgesetzt bleiben, wo mit der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren ihre beständigen Anwendungen allererst den Anfang nehmen. Solchergestalt werden diese Lehren, die sonst für sich etwas trocken sind, dem angehenden Geometer angenehmer, wenn er bald darauf ihre beständigen Anwendungen siehet. Einen Fehler beym Vortrag dieser so genannten Proportionalregeln, den ich in den meisten Lehrbüchern bemerket habe, glaube ich hier ganz vermieden zu haben. Man leitet verschiedene dieser Regeln aus dem Lehrsatz von Verwechselung der mittlern Glieder her, und wendet sie doch auch auf Fälle an, wo die Glieder des einen Verhältnisses mit den Gliedern des andern nicht von einerley Art sind, wo also keine Verwechselung der mittlern Glieder statt hat.

Die ganze Buchstabenrechenkunst in einem Handbuch, das ohnehin schon sehr reich an interessanten Sachen werden muste, vollständig so vorzutragen, daß der Anfänger darin hinlänglich hätte geübt werden können, wollte ich nicht wagen: indessen konnte ich doch von den entgegen gesetzten Grössen, auch von der allgemeinen mathematischen Addition und Subtraction im 38-40 §. der Geometrie die ersten vorläufigen Begriffe, und Grundregeln mittheilen. Ferner gab die Anwendung der Proportionslehre auf die Geometrie im 179-182 §. den nächsten Anlaß die ersten vorläufigen Begriffe und Grundregeln der allgemeinen mathematischen Multiplication und Division zu erklären, auch kurz zu zeigen, was es mit der Methode der Gleichungen der neuern Geometer für eine Bewandniß habe. Dies war auch um der folgenden beyden noch zu dieser neuen Ausgabe des ersten Theils gehörigen Bände willen nöthig, weil die

die Buchstabenrechenkunst mit so sehr grossen Vortheil in der practischen Mathematik gebraucht wird. Ein so vollständiger Vortrag davon, als zur Bildung eines geübten Analysten nöthig ist, bleibt dem zweyten Theil vorbehalten: für andre ist die Uebung in diesen Lehren bey Anwendung derselben auf die practische Mathematik ungemein viel anzüglicher und reizender, als wenn die Exempel nur im allgemeinen willkührlich gewählt werden.

Alle Beweise der Lehrsätze, wovon in der ebenen Geometrie die Kreismessung (195. 213. 252. 255 §§.) und in der Körperlichen Geometrie die Ausmessung des Cylinders, des Kegels und der Kugel, auch der Oberflächen dieser Körper abhängt, (344. 348. 372. 380. 383. 393 §.) habe ich zwar mehr zu verkürzen und faßlicher zu machen, zugleich aber auch die Evidenz dabey aufs höchste zu treiben gesucht. Den Beweisen einiger hieher gehöriger Lehrsätze, die wenn man sie völlig nach Art der Alten vorträgt, die Form apogogischer Beweise erhalten, habe ich mehr die Form ostensiver Beweise gegeben, weil ich dafür halte, daß die Strenge des Beweises selbst dadurch noch einleuchtender wird.

Die 10te Erklärung beym Euclides im XI. Buch ist höchstens mehr Grundsatz als Erklärung: vielleicht kann der darin liegende Satz in seiner ganzen Allgemeinheit kaum als Grundsatz gelten, ob er gleich in Herrn Hausens Elementis Matheleos wirklich als der V. Grundsatz vorgetragen ist. (M. s. die 135 Seite a. a. O.) Der Grund, welchen Herr Hausen hinzu setzt, beweiset den Satz nicht in seiner ganzen Allgemeinheit, wovon die nächste Anwendung auf die Prismen zeuget, worin das Parallelepipedum von der Diagonalfläche getheilt wird. Die beyden dreyseitigen Prismen, worin ein schiefes Parallelepipedum vermittelst der Diagonalfläche zerschnitten werden kann, passen nicht in einander, sondern nur diejenigen, worin das grade Parallelepipedum durch einen solchen Schnitt getheilt wird: um deßwillen hatte ich schon in der ersten Ausgabe den gewöhnlichen Beweis davon, daß beyde Prismen, auch wenn das schiefe Parallelepipedum so geschnitten wird, gleich groß werden, vollständiger vorgetragen. Wegen der Verschiedenheit der Fälle aber, die dabey eintreten können, ist auch der Beweis noch nicht ganz allgemein, und das hat mich bewogen, hier einen andern Beweis zu führen, der zwar nicht eben kürzer, aber doch leichter zu übersehen ist, als jener Beweis, wenn man alle Fälle vollständig unterscheiden, und ihm dadurch seine völlige Allgemeinheit geben will.

Sollte vielleicht an einer oder der andern Stelle ein Versehen stehen geblieben, und meiner Aufmerksamkeit entgangen seyn; so muß ich es damit entschuldigen, daß zuweilen sehr zerstreuende practische Beschäftigungen diese meine Arbeit unterbrochen haben. Eins ist mir beym Durchlesen der abgedruckten Bogen aufgestoßen, welches

ches ich zu verbessern bitte. Im 66 §. der Rechenkunst habe ich vergessen, dem Satz: zwey oder mehr absolute Primzahlen sind allemahl auch unter sich Primzahlen, die Einschränkung beyzufügen: wofern nicht etwa die Primzahl selbst ein Maaß aller übrigen ist. Soviel ich bisher habe finden können, hat dies Versehen auf das folgende weiter keinen Einfluß: nur hätte im Beweise des Satzes im 86 §. der Rechenkunst bemerkt werden müssen, daß N : a auch um deßwillen keine ganze Zahl seyn könne, weil wenn a in N aufgienge, auch der eben so groß angenommene Quotient $b : \alpha$ eine ganze Zahl seyn müste, welches darum nicht seyn kann, weil b eine absolute Primzahl ist. Eben die Bewandniß hat es daselbst mit den Quotienten $(b \,.\, c) : a$ und N : a. Der letzte könnte eine ganze Zahl seyn, wenn a in N aufgienge: dann aber wäre auch $(b \,.\, c) : a$ eine ganze Zahl gegen den vorher schon bewiesenen Satz. Mit den übrigen Schlüssen in diesem Beweise behält es sonst seine völlige Richtigkeit.

In der Vergleichungstafel der Fußmaasse, im 252 §. der Rechenkunst, sind ein Paar Lücken, bey Bayern und Leipzig fehlen die Zahlen, weil ich keine übereinstimmende Nachrichten fand. Kruse giebt den Bayerschen Fuß 986 Pariser Linien an, und nach Herrn von Limbrum (Abhandl. der Churb. Acad. d. Wiss. II. Band 360 S.) sind 1000 Pariser Fuß = 1113 Bayerschen = 1083 Wienerischen, also der Bayersche Fuß = 129,3 Pariser Linien. Ferner ist nach Kruse in

Leipzig der gemeine Fuß 125,1 und der Baufuß 125,3 Pariser Linien, nach Leupold aber (im Theatro Arithm. Geom. 335 §. 151 S.) und Böhms Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde, in der am Ende beygefügten IIten Tafel ist der Leipziger Fuß 139,7 Pariser Linien lang. Woher der grosse Unterschied von mehr denn 1 Zoll komme, habe ich bisher nicht finden können.

Bützow, im April des Jahrs 1778.

Inhalt.

Anfangsgründe der Rechenkunst.

Der Geometrie erster Theil.

Die ebene Geometrie.

Der

Die ebene Trigonometrie mit ihren Anwendungen.

Der Geometrie zweyter Theil.

Die körperliche Geometrie und Berechnung der körperlichen Grössen.

Der

Anfangs=

Anfangsgründe der Rechenkunst.

Der I. Abschnitt.

Von einigen allgemeinen Grundwahrheiten der Mathematik überhaupt, und der Rechenkunst insbesondere.

1. §.

Wenn gleich unsre Begriffe von den Sachen, die der menschliche Verstand fassen kann, desto vollkommener sind, je deutlicher wir alle Merkmale derselben, die würklich unterschieden sind, nicht allein in Gedanken unterscheiden, sondern auch durch Worte andern bezeichnen können; so sind doch nicht alle unsre Begriffe einer solchen Deutlichkeit fähig. Die Wörter, welche die ersten Grundbegriffe einer Wissenschaft bezeichnen, haben zum Theil eine so sehr allgemeine Bedeutung, daß es nicht wohl möglich ist, eine völlig angemessene Erklärung davon zu geben, die beydes zugleich den Begrif deutlicher macht, und denselben nach seinem ganzen Umfang erschöpft. Der Begrif von dem, was eine **Zahl** sey, und der noch allgemeinere Begrif von einer **Grösse** überhaupt, gehören zu den ersten Grundbegriffen der **Mathematik**, weil diese Wissenschaft lehren soll, wie man Grössen mit einander vergleichen, und aus bekannten Grössen andre finden kann: was aber eine Zahl und überhaupt eine Grösse sey, das dürfte schwerlich jemand, der es noch nicht wüste, durch eine Erklärung lernen. Die Wörter: **Vielheit, Menge, Zahl, Anzahl**, bedeuten einerley, und wer die Sprache versteht, der weis, was diese Wörter sagen wollen. Eben so hat auch jedermann für sich schon einen Begrif davon, was insbesondre bey körperlichen Dingen ihre **Grösse** ausmache, und man kann ziemlich versichert seyn, daß dies Wort, wenn es beym Vortrag der ersten mathematischen Grundwahrheiten gebraucht wird, nicht leicht von jemand werde unrichtig verstanden werden. Daß übrigens die Zahlen vornehmlich als Hülfsmittel dienen, um die Grösse einer Sache mit der Grösse einer andern Sache von eben der Art zu vergleichen, davon kann man sich durch allerley ganz bekannte Beyspiele überzeugen. Wie groß der Werth eines Thalers, wie groß das Gewicht eines Pfundes, wie groß die Länge einer Meile sey, begreift man, wenn man weis, wie viele Groschen einen Thaler, wie viele Unzen ein Pfund, wie viele Ellen eine Meile ausmachen, vorausgesetzt, daß man den Werth eines Groschens, das Gewicht einer Unze, die Länge einer Elle schon kenne: und aus diesem Grunde läßt es sich rechtfertigen, wenn beym Vortrag der Mathematik mit Betrachtung der Zahlen zuerst der Anfang gemacht wird.

2. §.

2. §.

Die Wissenschaft von den Zahlen, und den Gesetzen, wie man zahlen unter einander vergleichen, auch aus bekannten Zahlen andre finden kann, heißt die **Rechenkunst**, oder wie einige lieber wollen, die **Rechenwissenschaft**. Die Gründe, worauf diese Wissenschaft beruhet, sind ihr zum Theil eigen, in wie weit sie aus der Natur der Zahlen, als Zahlen betrachtet, und aus den besondern Gesetzen folgen, nach welchen wir die Zahlen zu bezeichnen gewohnt sind: zum Theil aber sind diese Gründe, und selbst die mancherley Arten, wie man aus bekannten Zahlen andre unbekannte finden kann, so allgemein, daß sie in allen andern mathematischen Wissenschaften ihre Anwendung finden. Einige Schriftsteller haben eben deswegen diese allgemeinen Lehren in einer eigenen Wissenschaft unter dem Namen der **allgemeinen Mathematik** abgehandelt: man kann aber diese Lehren eben so gut in der Rechenkunst, da wo man ihrer zuerst benöthiget ist, erklären; und dieser Lehrvortrag scheint um deswillen einige Vorzüge zu haben, weil es Anfängern leichter wird, von mehr eingeschränkten Begriffen und Grundlehren einer Wissenschaft, sich zu den allgemeinsten Grundwahrheiten durch die Absonderung zu erheben, als in umgekehrter Ordnung zuerst die allgemeinsten Grundlehren recht zu fassen, hiernächst aber allererst davon Anwendungen zu machen.

3. §.

Wenn man mehrere Dinge zusammenzählt, so sind es entweder wirklich Dinge von einerley Art, oder man sieht wenigstens beym Zusammenzählen auf ihre Verschiedenheit nicht. Bey der Frage: wieviel?

wird deswegen allemahl zugleich ausgedruckt, was es für Dinge seyn sollen, deren Anzahl man wissen will. Sind Personen von beyderley Geschlecht in einem Zimmer bey einander, so muß man unstreitig die Frage: wie viele Mannspersonen sind da? anders beantworten, als die Frage: wie viele Personen überhaupt sind gegenwärtig? Es müssen demnach die zusammengezählten Dinge, in so ferne sie eine Zahl ausmachen sollen, von einerley Art seyn.

Oft kommt auch die Grösse der zusammengezählten Dinge in Betrachtung, obgleich eben nicht allemahl; und sodann müssen die zusammengezählten Dinge, welche die Zahl ausmachen sollen, gleich groß seyn. Bey der Frage: wieviel? wird auch dies gemeiniglich ausgedrückt. Wir haben nämlich in allen Sprachen eine Menge von Wörtern, welche nicht allein die Art der Dinge ausdrücken, zu welcher die Sache gehört, sondern zugleich eine bestimmte Grösse derselben. Alle Wörter, welche die verschiedenen Maasse, Gewichte, Münzen, u. s. f. ausdrücken, gehören hieher. So ist eine Elle eine Länge, die ihre bestimmte Grösse hat, ein Pfund ist ein Gewicht von einer bestimmten Schwere; Thaler, Gulden, Groschen, u. s. f. sind Münzen, die ihren bestimmten Werth haben. Frägt man nun: wie viele Pfunde wiegt diese Waare? wie viele Ellen ist dieses Stück Tuch lang? u. s. f. so verstehet es sich von selbst, daß die Pfunde, oder Ellen, welche man zusammenzählen soll, gleich groß seyn müssen.

4 §.

Man sieht aber beym zusammenzählen entweder alle die zusammengezählten Dinge für sich betrachtet als Ganze an; oder man zählt gleiche Theile eines

Ganzen

Ganzen zusammen. Das Ganze, das man entweder selbst, oder dessen Theile man mehrmahl zusammenzählt, heist die **Einheit**. Eine Menge ganzer Einheiten heist eine **ganze Zahl**, und eine Menge gleicher Theile der Einheit wird eine **gebrochene Zahl**, oder ein **Bruch** genennet. Dieser Unterschied ist in der Natur der Zahlen selbst eigentlich nicht gegründet: eine und eben dieselbe Zahl läst sich als eine ganze oder gebrochene Zahl ansehen, nachdem man die zusammengezählten Dinge entweder für sich als Ganze, oder als Theile eines andern Ganzen betrachten will. Die Zahl **zwey Mark**, ist eine ganze Zahl, wenn man ein Mark für sich als ein Ganzes ansieht: die Zahl **zwey Drittheil eines Thalers** ist eine gebrochene Zahl, weil man die zusammengezählten Dinge als Theile eines andern Ganzen, nämlich **eines Thalers**, ansieht. Beyde Zahlen sind an sich einerley, weil ein Mark mit einem Drittheil eines Thalers einerley ist. Vor der Hand wird nur von den ganzen Zahlen die Rede seyn, wenn das Wort **Zahl** schlechthin gebraucht wird.

5 §.

Man kann von **Eins** anfangen fort zu zählen, ohne daß man dabey eine gewisse Art von Einheiten in Gedanken hat: man kann vorwärts und rückwärts zählen, und die Zahl in Gedancken vermehren, oder vermindern. Man kann ein Paar Zahlen vergleichen und prüfen, ob die eine mehr oder weniger Einheiten enthalte, als die andere, so daß man bey diesem Geschäfte die besondere Beschaffenheit der zusammengezählten Einheiten gar nicht in Betrachtung ziehet. Eine Zahl, bey der die besondre Beschaffenheit der zusammengezählten Einheiten gar nicht in Betrachtung kommt, heist eine **abstracte Zahl**; in den gewöhnlichen Rechenbüchern heist sie eine **ungenannte Zahl**. Eine **concrete**, oder **genannte Zahl** ist eine solche, die eine gewisse Menge von Einheiten einer gewissen Art ausdrückt. Die Zahl **drey** überhaupt ist eine ungenannte Zahl, die Zahl **drey Pfund** aber eine genannte Zahl.

6 §.

Will man ein Paar genannte Zahlen mit einander vergleichen; so müssen die Einheiten der einen mit den Einheiten der andern von einerley Art seyn, widrigenfalls findet keine Vergleichung statt. Man kann weder sagen, daß drey Pfund mehr, noch daß sie weniger, als zwey Ellen sind; man kann aber auch sagen: drey Pfunde sind mehr, als zwey Pfunde. Im Gegentheil lassen sich alle ungenannte Zahlen mit einander vergleichen, weil die zusammengezählten Einheiten bey allen ungenannten Zahlen als Dinge von einerley Art anzusehen sind, indem man keine besondre Art derselben in Gedanken hat.

7 §.

Ein Paar Zahlen mit einander vergleichen heist nämlich nichts anders, als eine Prüfung anstellen, ob beyde gleich oder ungleich groß sind. Ueberhaupt aber kann man eine solche Vergleichung mit allen Dingen anstellen, denen man eine **Grösse** zuschreibt, und man hält die Dinge für **gleiche Dinge**, wenn eines in Absicht der Grösse mit dem andern einerley ist, also in Absicht der Grösse an die Stelle des andern gesetzt werden kann. Eins ist dagegen dem andern **ungleich**, wenn beyde in Absicht der Grösse nicht einerley sind. Ein Paar ungenannte Zahlen sind dem-

demnach gleich groß, wenn sie einerley Menge von Einheiten enthalten, und ungleich groß, wenn die eine nicht aus eben so vielen Einheiten bestehet, als die andere. Weil bey den genannten Zahlen die Grösse und übrige Beschaffenheit der zusammengezählten Einheiten selbst mit in Betrachtung kommt; so wird bey diesen nicht allein erfordert, daß einerley Menge von Einheiten in beyden vorhanden sey, sondern es müssen auch überdem die zusammengezählten Einheiten selbst einerley seyn, wenn beyde Zahlen gleich groß seyn sollen. So sind drey Centner und drey Pfunde der Zahl nach einerley, aber nicht dem Gewichte nach; deswegen sind es zwar gleiche Zahlen, als Zahlen betrachtet, aber nicht gleiche genannte Zahlen.

8 §.

Bey der Prüfung, ob ein Paar Grössen einander gleich, oder ungleich sind, verfahren wir allemahl nach gewissen Grundsätzen, die einem jeden bekannt sind, und deswegen nur verdienen, besonders angemerkt zu werden, weil man in dieser Wissenschaft den höchsten Grad der Gewißheit zu erhalten sucht. Sie könnten hier wegbleiben, und dennoch könnte der ganze folgende Vortrag darauf gebauet werden. Allein es hat unstreitig seinen Nutzen, wenn man die Gründe genau kennet, wovon alle Lehren einer Wissenschaft abhängen. Sind diese Gründe von der Beschaffenheit, daß sie Niemand läugnen, und ihre Wahrheit nicht im geringsten in Zweifel ziehen kann; so muß alles, was daraus richtig geschlossen wird, eben so unläugbar seyn, als die Grundsätze selbst sind. Folgenden dreyen Sätzen wird man eine so unläugbare Gewißheit schwerlich absprechen.

9 §.

Eine jede Grösse ist sich selbst gleich. Dies will so viel sagen: Eine Grösse kann nicht zugleich diese, und eine andre seyn, weil es überhaupt nicht möglich ist, daß etwas zugleich seyn, und nicht seyn könne.

Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammen genommen gleich. Dies ist schon eine Folge des vorigen; denn alle Theile zusammen genommen sind dasjenige, was wir das Ganze nennen. Wäre das Ganze nun allen seinen Theilen zusammen genommen ungleich; so wäre es sich selbst ungleich; es würde zugleich dies Ganze, und auch nicht dies Ganze seyn.

Ein Theil, oder einige Theile allein genommen, sind nicht so groß als das Ganze. Denn das Ganze, oder alle Theile zusammen genommen, können mit einem oder einigen Theilen allein genommen der Grösse nach einerley seyn.

10 §.

In der That geben die beyden ersten Sätze ein Paar Kennzeichen der Gleichheit, und der dritte ein Kennzeichen der Ungleichheit ab. Die Begriffe davon, was die Wörter: **gleich** und **ungleich**, sagen wollen, sind viel zu allgemein, als daß es möglich wäre, eine kurze und zugleich so bestimmte Erklärung davon zu geben, daß sie einen jeden in den Stand setzte, die Anwendung davon allemahl ohne Schwierigkeit zu machen, wenn die Frage vorkommt, ob ein Paar Grössen gleich oder ungleich sind? Ja diese Sätze selbst sind noch viel zu allgemein, und es muß noch eine Menge andrer Regeln, die genauer bestimmt sind, daraus hergeleitet werden, wenn man

in

in jedem vorkommenden Fall auf dem kürzesten Wege die Vergleichung anstellen will. Eben dies ist der wichtigste Vorwurf der Mathematischen Wissenschaften; und bey diesem Geschäfte ist man zugleich auf allerhand Hülfsmittel bedacht gewesen, die Weitläufigkeit der Worte zu vermeiden, um die Aufmerksamkeit desto mehr auf die Sache zu lenken. Die bekannten Ziffern 1, 2, 3, u. s. f. geben schon die besten Beyspiele davon ab, daß es nicht allein möglich, sondern in vieler Absicht bequem und nützlich sey, statt der gewöhnlichen Worte viel kürzere geschriebene Zeichen zu gebrauchen. Man bedienet sich in der Mathematik dieses Zeichens (=) statt des Worts **gleich**, und setzt es zwischen den Grössen, deren Gleichheit man andeuten will. Ausdrücke von dieser Art: Ein Pfund = sechzehn Unzen.

Eine Elle = zwey Fuß u. s. f.

bedeuten demnach eben so viel, als wenn man geschrieben hätte: Ein Pfund ist gleich sechzehn Unzen, eine Elle ist gleich zween Fuß.

11 §.

Aus folgenden zween Sätzen:

Eine Elle = zwey Fuß,

zwey Fuß = vier und zwanzig Zoll,

würde man ohne Bedenken diesen dritten Satz als eine Folge herleiten: Eine Elle = vier und zwanzig Zoll. In der That gründet man diesen Schluß auf folgenden allgemeinen Grundsatz:

Wenn zwo Grössen einer und eben derselben dritten gleich sind: so sind sie auch unter sich gleich.

Dies ist ein neues Kennzeichen der Gleichheit, dessen man sich bedienet, gewisse Grössen vermittelst einer dritten zu vergleichen. Man kann hiemit folgenden Satz verbinden:

Wenn zwo Grössen so groß sind, als zwo andre gleiche Grössen, so sind sie unter sich gleich groß.

Dieser letzte dienet in solchen Fällen zur Verkürzung, wo man den vorigen zweymahl brauchen müste.

12 §.

Sind zwo Grössen einander ungleich: so heist allemahl die eine von beyden die **grössere**, und die andre die **kleinere**. Es wird nemlich die eine von beyden einen Theil, der so groß ist, als die andere ganz genommen, und überdem noch etwas mehr enthalten: diese heist die **grössere**, und die andre, welche einem Theil der ersten gleich ist, die **kleinere**. Folgende Grundsätze dienen als Kennzeichen des Grössern und Kleinern.

Jeder Theil des Ganzen allein, oder auch einige Theile des Ganzen allein genommen, sind kleiner, als das Ganze.

Das Ganze ist grösser, als jeder Theil desselben allein, oder einige Theile desselben allein genommen.

13 §.

Die Ungleichheit zwoer Grössen deutet dies Zeichen (>) an, welches man zwischen beyden so setzet, daß die Oefnung gegen die grössere, und die Spitze gegen die kleinere zeigt. Wenn man also schreibt:

Ein Centner > ein Pfund

Ein Pfund < ein Centner;

so ist dies einerley, und bedeutet, daß ein Centner mehr als ein Pfund, oder ein Pfund weniger, als ein Centner sey.

Aus

Aus diesen zweenen Sätzen:

Ein Centner $>$ ein Pfund;

ein Pfund $=$ sechzen Unzen,

wird man wiederum ohne Bedencken den dritten Satz schliessen:

Ein Centner $>$ sechzehn Unzen.

Der Schluß gründet sich auf die allgemeine Regel:

Was grösser ist, als eine von zwoen gleichen Grössen, das ist auch grösser, als die andre

Ist dies allemahl richtig, so wird man auch folgende Regel gelten lassen:

Was kleiner ist, als eine von zwoen gleichen Grössen, das ist auch kleiner, als die andre.

Um so mehr werden auch diese Regeln unläugbar richtig seyn:

Was grösser ist, als die grössere von zwoen ungleichen Grössen, das ist auch grösser, als die kleinere.

Was kleiner ist, als die kleinere von zwoen ungleichen Grössen, das ist auch kleiner, als die grössere.

14 §.

Wir urtheilen in unzähligen besondern Fällen im gemeinen Leben nach diesen Grundregeln, ob wir gleich eben nicht gewohnt sind, sie in der Allgemeinheit auszudrücken, in welcher sie hieher gesetzet sind: aber eben hiedurch werden sie in der ganzen Mathematik brauchbar. Ausser den schon angeführten sind noch mehrere dergleichen allgemeine Grundsätze übrig, die besonders angemerkt zu werden verdienen; und diese werden nach einander vorkommen, so wie die verschiedeschiedenen Methoden werden erklärt werden, wie man aus gegebenen Grössen andre finden kann, die man in der Rechenkunst zuerst auf die Zahlen anwendet. Der deutsche Nahme dieser Wissenschaft ist von dem Wort: rechnen, hergenommen, welches so viel heißt, als aus bekannten Zahlen andre unbekannte vermittelst eigener dazu geschickter Zeichen finden, so daß durch eine regelmässige Zusammenordnung und Veränderung dieser Zeichen nicht eigentlich die gesuchte Zahl selbst, sondern ebenfalls ein Zeichen gefunden wird, das die gesuchte Zahl angiebt. Diese Zeichen werden Ziffern genannt, und man setzt sie alle aus zehn einfachen Ziffern zusammen, deren Bedeutung einem Jeden von Jugend auf bekannt wird, der es lernt, wie man die ausgesprochenen Worte in Schriften bezeichnet. Es sind folgende: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

Das Zeichen 0 ist eigentlich das Zeichen einer leeren Stelle, die vermöge des Gesetzes, nach welchem man eine Ziffer zusammensetzt, keine von den übrigen einfachen Ziffern einnehmen kann.

15 §.

Die Art, wie aus diesen einfachen Ziffern alle übrige zusammengesetzt werden, lernt man am besten verstehen, wenn man auf folgende Umstände acht hat, welche beym gewöhnlichen zählen beobachtet werden. Man zählet fort von Eins bis zehn, und fängt sodann wieder von forne an zu zählen, da denn die ersten zehn Zahlen ihre eigenen Nahmen haben. Nun zählt man weiter **Eins und zehn, zwey und zehn,** welche Ausdrücke verkürzt in unsrer Sprache so lauten:

ten: **eilf**, **zwölf**. Bey den folgenden Ausdrücken, **drey und zehn**, u. s. f. läst man das Wort **und** weg, und zählet so fort, bis man auf **zehn und zehn** oder zweymahl zehn kommt. Zur fernern Abkürzung sagt man **zwanzig** statt zweymahl zehn, **dreyßig** statt dreymahl zehn, u. s. f. bis auf zehnmahl zehn, oder **hundert**, worauf man wiederum von forne an zählt: hundert und eins, u. s. f. bis zweyhundert, dreyhundert, u. s. f. da dann weiter folgende Wörter zur bequemen Verkürzung dienen.

Man spricht aus	durch das Wort
zehn mahl hundert	tausend
tausend mahl tausend	Million
tausend mahl tausend Millionen	Billion
tausend mahl tausend Billionen	Trillion
tausend mahl tausend Trillionen	Quadrillion u. s. w.

Um nun aber dasselbe durch die geschriebenen Ziffern auszudrücken, was man bey den Wörtern beobachtet, hat man folgendes Gesetz angenommen:

Man schreibt die Ziffern von der rechten gegen die linke Hand, und läst jede Ziffer in der folgenden Stelle zehnmahl mehr bedeuten, als in der nächstvorhergehenden. In die Stellen, welche ledig bleiben müssen, setzt man die so genannte Null.

Auf die Art bekömmt jede Ziffer, ausser dem eigenthümlichen Werth, den sie schon ausdrücken würde, wenn sie allein stünde, noch einen andern von der Stelle, die sie unter den übrigen einnimmt.

16 §.

16 §.

Rechnet man also die Stellen von der rechten gegen die linke Hand: so bedeutet die Ziffer 1

		und man schreibt
in der ersten Stelle	Eins	1
= = zweyten =	zehn	10
= = dritten =	hundert	100
= = vierten =	tausend	1000
= = fünften =	zehntausend	10000
= = sechsten =	hunderttausend	100000
= = siebenden =	eine Million	1000000
= = achten =	zehn Millionen	10000000

Hieraus ist leicht abzunehmen, wie es mit den übrigen Ziffern nach eben der Regel zu halten sey. Stünde die Ziffer 2 allenthalben da, wo die Ziffer 1 steht; so wären ihre Werthe diese: zwey, zwanzig, zweyhundert; zweytausend; zwanzigtausend; zweyhunderttausend; zwey Millionen; zwanzig Millionen. Es bestehen demnach alle zusammengesetzte Ziffern aus einfachen Ziffern verschiedener Ordnungen. Die Ziffern in der ersten Stelle bedeuten einfache Einheiten. Die Ziffern in der zweyten Stelle oder der ersten nach den Einern, bedeuten zehnfache Einheiten, und gehören zur ersten Decimal-Ordnung. Eben so gehören die Ziffern in der dritten Stelle, oder der zweyten nach den Einern, zur zweyten Decimal-Ordnung u. s. w. allemahl von der Rechten gegen die Linke gerechnet.

17 §.

Vermuthlich hat man Anfangs auch die geschriebenen Ziffern von der Rechten gegen die Linke zu gelesen: denn die meisten Morgenländer sind überhaupt gewohnt gewesen so zu schreiben, und die gewöhnliche

Mei-

Meinung ist, daß wir diese Ziffern von den Arabern bekommen haben. Wollte man diese Regel in der Aussprache beobachten, so würde es nun weiter keine Schwierigkeit haben, jede geschriebene zusammengesetzte Ziffer auszusprechen. Es würde z. E. die Ziffer:

4275136

so zu lesen seyn: **Sechs und dreyßig und hundert und fünftausend, und siebenzigtausend und zweyhunderttausend, und vier Millionen.**

Es hat aber auch keine grössere Schwierigkeit, die Ordnung umzukehren, und nach der Art, wie wir zu lesen und zu schreiben gewohnt sind, von der Linken gegen die Rechte zu lesen. Hiebey muß man nur zuförderst die Stellen von der Rechten gegen die Linke zählen, damit man wisse, in welcher Stelle die letzte Ziffer zur Linken befindlich sey, indem sie hiedurch ihren Werth bekommt. Damit man sich nun in der Aussprache desto weniger versehe, theile man die ganze Ziffer, von der Rechten gegen die Linke zu, in Classen, so daß jede Classe sechs Ziffern enthalte; da es dann gleichviel ist, wie viel Ziffern in die letzte zur Linken kommen. Man setze oberwärts an der siebenten Ziffer einen Strich (′), an der dreyzehnten zwey Striche (″) u. s. f. so weiß man, wo die Millionen, Billionen, u. s. f. anfangen; da denn die übrige Aussprache sich nach den Regeln des 15 §. leicht ergiebt.

Man hat aber dabey in der Aussprache die öftere Wiederholung eines und eben desselben Worts: Tausend, Million, Billion, u. s. f. vermeiden wollen, die erforderlich seyn würde, wenn man jede einzelne Ziffer für sich so lesen wollte, wie es der Stelle, die sie unter den übrigen einnimmt, gemäß wäre; des-

wegen

wegen spricht man allemahl eine ganze Classe von sechs Ziffern auf einmahl aus, bevor man die Millionen, Billionen u. s. f. nennt. Aber auch bey der Aussprache einer solchen ganzen Classe, würde das Wort: Tausend, oft dreymahl müssen genannt werden: deswegen läst man es, um die Aussprache noch mehr abzukürzen, ebenfalls so lange weg, bis es zum drittenmahl gehöret werden sollte. Weil nun dies allemahl in der Mitte einer jeden Classe von sechs Ziffern geschehen müste; so kann man eine jede Classe durch ein Comma (,) in zwo Hälften theilen, und das Comma durch tausend aussprechen. Hat die höchste Hauptclasse weniger als sechs, und mehr als drey Ziffern, so setzet man das Comma bey der vierten Ziffer. Nun kommt es nur darauf an, daß man eine Ziffer aussprechen könne, die aus dreyen einfachen zusammengesetzt ist, so kann man jede andre aussprechen. Am natürlichsten würde man bey der uns gewöhnlichen Art, von der Linken gegen die Rechte zu lesen, zuerst die **Hunderte**, dann die **Zehner**, und zuletzt die **Einer** aussprechen, so, daß z. E. die Ziffer 365 so gelesen würde: dreyhundert und sechzig und fünf. Allein es ist durch den Redegebrauch eingeführt, daß man die Einer vor den Zehnern ausspricht, und die obige Ziffer so liest: dreyhundert und fünf und sechzig. Hätte man also die Ziffer:

$$75''''840{,}937'''528{,}296''364{,}709'007{,}283$$

welche nach obiger Vorschrift abgetheilt ist; so würde sie so gelesen werden müssen:

Fünf und siebenzig Quadrillionen, achthundert und vierzig tausend, neunhundert und sieben und dreyßig Trillionen, fünfhundert und acht und zwanzig tausend zweyhundert und sechs und neunzig Billionen,

nen, dreyhundert und vier und sechzig tausend sieben hundert und neun Millionen, sieben tausend zweyhundert und drey und achtzig.

18 §.

Die alten Griechen waren gewohnt nach Myriaden zu zählen, und die Zahl 10000 hieß bey ihnen **Myrias**: Für grössere Zahlen aber hatte man nicht so vortheilhaft verkürzte Wörter, wie die im 15 §. erklärten Zahlwörter: eine **Million, Billion,** u. s. f. sind, ob man gleich ohne Schwierigkeit bis 10000 Myriaden zählen konnte. Wollte man die eben genannte Zahl eine Myriade der **zweyten Ordnung** nennen, so könnten 10000 Myriaden der zweyten Ordnung eine Myriade **der dritten** Ordnung heissen u. s. f. Der Mangel der Wörter für so grosse Zahlen hat es wohl vornehmlich veranlasset, daß man zu den Zeiten des **Archimedes** geglaubt hat, es lasse sich keine Zahl angeben, die so groß sey, als die Zahl der Sandkörner auch nur an den Sicilianischen Küsten des Meeres. **Archimedes** ward eben hiedurch bewogen, eine Abhandlung unter dem Titel: ΨΑΜΜΙΤΗΣ, (Arenarius) zu schreiben, worinn er zeigte, daß sich gar wohl die Zahl der Sandkörner angeben lasse, und wenn auch der ganze Weltraum bis an den Fixsternen-Himmel, nach den Abmessungen, die er den damahligen Kenntnissen gemäß zum Grunde setzen konnte, mit Sande angefüllet wäre. In dieser Abhandlung nennt Archimedes die Zahl von 10000 Myriaden eine Einheit der zweyten Periode, so wie er die einfachen Einheiten zur ersten Periode rechnet. Ferner machen 10000 Myriaden Einheiten der zweyten Periode eine Einheit der dritten Periode u. s. f. aus: dabey beziehet er sich auf Bücher, die er an den **Zeuxippus** geschrieben habe, welche aber verlohren gegangen sind.

Dieser Vorstellung gemäß könnte man eine Zahl, um sie nach Archimedes Art auszusprechen, in Classen von acht Ziffern theilen, und jede Hauptclasse in zwey Nebenclassen von vier Ziffern, da dann z. B. folgende Zahl

$$84^{IV}5697,3968'''5432,9032''7637,9245$$

so zu lesen wäre: 84 Einheiten der vierten Ordnung, 5697 Myriaden, 3968 Einheiten der dritten, 5432 Myriaden, 9032 Einheiten der zweyten, 7637 Myriaden, 9245 Einheiten der ersten Periode. **Archimedes** fand, daß die Zahl von tausend **Myriaden der achten Periode** grösser sey, als die Zahl alles Sandes, wenn gleich der ganze Weltraum bis an den Fixsternen-Himmel damit angefüllet wäre: das wäre also nach unsrer Bezeichnung die Eins mit 63 Nullen, oder die Zahl von 1000 **Decillionen.** Die Zahl alles Sandes, der den Raum der ganzen Erdkugel füllte, fand er kleiner als 1000 Einheiten der siebenten Ordnung, also kleiner als 1000 **Octillionen.**

Merkwürdig ist hiebey, daß zwar bey dieser Archimedeischen Art zu zählen ebenfalls das Decimal-Gesetz zum Grunde liegt, daß aber dennoch die so sehr vortheilhafte Art, die Zahlen nach diesem Gesetz durch einfache Ziffern zu bezeichnen, damahls den Griechen noch nicht bekannt gewesen seyn muß, weil Archimedes ihrer gar nicht erwähnt. **Wallisius** (Oper. Math. P. I. Oxon. 1657. Arithm. Cap. IX. p. 59.) erzählt, daß ein Araber, Nahmens *Alsepadi*, in Commentariis ad Tograi poema Lamiato'l Ajam die Erfindung der Zahlzeichen den Indianern zuschreibe. Die Saracenen haben nachher diese Zahlzeichen nach Spanien gebracht, und der unter den Gelehrten des mitt-

lern

lern Zeitalters vornehmlich berühmte Pabst Sylvester II., vorher Gerbert, aus der Gegend von Aurilliac in Auvergne gebürtig, hat bey seinem Aufenthalt in Spanien, wohin er in seinen jüngern Jahren gereiset war, um die Wissenschaften von den Arabern zu lernen, den Gebrauch der Ziffern daselbst kennen gelernt, und bey seiner Rückreise mit nach Frankreich gebracht. Die jetzt gebräuchliche äussere Form der neun einfachen Zahlzeichen ist zwar mit der ehemahligen ältern nicht mehr einerley: indessen ist doch der eigentliche Kunstgriff, nach welchem alle mögliche Zahlen mit neun einfachen Zahlzeichen, wenn die Null hinzu kömmt, auf die Art bezeichnet werden können, daß jede Ziffer in der nächstfolgenden Stelle zehnmahl mehr, als in der nächstvorhergehenden bedeutet, die Hauptsache, deren allgemeinere Bekanntmachung die Europäer dem Pabst Sylvester II. zu dancken haben.

Der II. Abschnitt.

Von der Addition und Subtraction in ganzen Zahlen.

19 §.

Wenn zwey Zahlen ungleich sind; so ist die kleinere in der grössern ganz enthalten, und überdem noch etwas mehr. (12 §.) So ist die Zahl 8 in der Zahl 14 ganz enthalten, und überdem enthält die Zahl 14 noch 6. Dieser Ueberschuß, um welchen eine Grösse eine andere kleinere übertrift, heist die Differenz beyder Grössen, auch wohl das **Complement** der kleinern Grösse zur grössern: und eine Grösse, die zwoen, oder mehrern zusammengenommen gleich ist, wird die **Summe** der letztern genannt. Die Zahl 6 ist die Differenz der Zahlen 14 und 8, und 14 ist die Summe der Zahlen 8 und 6. Zwey oder mehr Grössen zusammen **addiren** heist ihre Summe suchen. Eine kleinere Grösse von der grösseren **subtrahiren** heist ihrer beyder Differenz suchen.

20 §.

Auch bey diesem Geschäfte sind kurze Zeichen eingeführt, wodurch man, statt der gewöhnlichen Worte, die Addition und Subtraction andeutet. Das Zeichen (+) bedeutet die Addition, und man setzt es zwischen beyden Grössen die addirt werden sollen. Diesemnach muß der Ausdruck $16 + 3 = 19$ so verstanden werden: zu 16 addirt 3 giebt 19. Der Bequemlichkeit wegen spricht man das Zeichen (+) durch **mehr**, oder *plus* aus, weil es die eine Grösse um die andere vermehrt. Das Zeichen der Subtraction ist ein Strich (—), welchen man vor derjenigen Grösse setzt, die von der andern subtrahirt werden soll. So heist der Ausdruck: $16 - 3 = 13$, so viel als: von 16 subtrahirt 3 läst 13. Man spricht der Kürze wegen dies Zeichen durch das Wort **weniger**, oder *minus* aus, weil es die grössere Zahl um die kleinere vermindert.

Es kann seyn, daß die Grösse, welche man von einer andern subtrahiren soll, selbst schon eine Summe, oder Differenz andrer Größen ist. In diesem Fall schliest man sie, um Verwirrung zu vermeiden, in eine Parenthese ein. So bedeutet $9 - (3 + 2)$ so viel, als $9 - 5$, und $9 - (3 - 2)$ so viel, als $9 - 1$.

21 §.

Die Addition und Subtraction sind einander so entgegen gesetzt, daß eine die andre aufhebt, und es ist für sich klar, daß $12 + 4 - 4 = 12$ sey. Will man dies allgemein ausdrücken: so giebt es den Grundsatz:

Wenn zu einer Grösse eine und eben dieselbe andre Grösse zugleich addirt und wieder von ihr subtrahirt wird; oder zuerst von ihr subtrahirt, und hernach wieder addirt wird: so leidet die erste Grösse gar keine Aenderung.

22 §.

Wenn zwey Zahlen durch einfache Ziffern ausgedruckt sind, also keine derselben grösser als 9 ist; so kann man leicht die Summe beyder Zahlen in Gedanken finden, und durch die ihr zugehörige Ziffer, nach der Regel des 15 §. ausdrücken.

23 §.

Es sind zwo Zahlen gegeben, man soll beyde zusammen addiren.

Aufl. I. Man schreibe beyde Zahlen von der Rechten gegen die Linke so untereinander, daß die einfachen Ziffern, welche zu einerley Ordnung gehören, untereinander zu stehen kommen, und ziehe der Bequemlichkeit wegen einen Strich darunter, um die gegebenen Zahlen dadurch von der gesuchten Summe abzusondern.

II. Sodann addire man die Ziffern, die zu einerley Ordnung gehören, für sich allein zusammen, und schreibe die einzelnen, nach dem 22 §. gefundenen Summen nach und nach unter einander, wiederum so, wie es die verschiedenen Ordnungen der einfachen Ziffern erfordern, indem man von der Rechten gegen die Linke von den Einheiten der niedern Ordnung, auf die nächst grössere Ordnung fortgeht.

III. Wenn man nun diese einzelnen Summen wiederum als gegebene Zahlen ansieht, und aufs neue, wie vorhin, die einzelnen untereinander stehenden Ziffern summirt: so kann keine dieser einzelnen Summen über 9 steigen, wofern nicht unter den ersten einzelnen Summen die Zahl 9 befindlich ist. Mit Ausnahme der hieher gehörigen besondern Fälle, kommt beym zweyten Summiren in jeder Classe nur eine einfache Ziffer zu stehen, und alle zusammen machen eine zusammengesetzte Ziffer aus, welche die gesuchte Summe ausdrückt.

Exempel.

15683	578989	9999
7437	47947	999
10	16	18
110	120	180
1000	1800	1800
12000	15000	9000
10000	110000	10998
23120	500000	
	626936	

Beweis. Es soll die gesuchte Summe ein Ganzes seyn, welches alle die Theile zusammen genommen enthält, woraus die gegebenen Zahlen zusammen gesetzt sind. Da man nun nacheinander die Einheiten einer jeden Ordnung zusammen zählt: so erhellet, daß die zusammengesetzte Ziffer, welche man zuletzt herausbringt, alle die Theile zusammen genommen ausdrücke, welche in den beyden gegebenen Zahlen enthalten sind. Daß aber die Voraussetzung der dritten

Regel

Regel mit der angezeigten Ausnahme ihre Richtigkeit habe, beweiset das letzte Exempel; denn es kann beym ersten Summiren keine grössere Summe, als 18, also beym zweyten Summiren nicht mehr als 9 in jeder Classe herauskommen: nur in der vierten Columne giebt sich beym zweyten Summiren die Zahl 10, weil 9 in der ersten Partial-Summe war. In diesem Exempel hindert solches dennoch nicht, daß nicht beym zweyten Summiren die Total-Summe schon heraus kommen sollte: wogegen man in andern Fällen zum dritten mahl, ja wohl noch öfter wieder summiren müste, wenn sich nicht die ganze Arbeit nach der gleich folgenden Vorschrift verkürzen liesse.

Practische Verkürzung dieser Auflösung.

In der Ausübung kommt es nicht darauf an, sich an die theoretischen Regeln so genau zu binden, wenn man durch einen kürzern Weg eben das Resultat herausbringen kann. Die kürzern Wege sind hier vielmehr allemahl den Umwegen vorzuziehen. Wenn beym ersten Summiren die einzelnen Summen grösser als 9 sind, und dieserwegen aus zweyen Ziffern bestehen; so kann die niedrigste nicht grösser als 8 seyn, die höchste aber, welche in die folgende Classe kommt, ist allemahl 1. Diese 1 wird beym zweyten Summiren zur ersten Ziffer der folgenden einzelnen Summe addirt. Man kann demnach diese 1 in Gedanken (in mente) behalten, ohne sie hin zu schreiben, und sie zur Summe der beyden Ziffern der folgenden Ordnung sogleich hinzu zählen, da man denn allemahl wiederum nur die niedrigste Ziffer niederschreibt, bis man zur höchsten Classe kommt, woselbst die höchste Summe ganz niedergeschrieben wird. Auf die Art wird Raum auf dem Papier, und Zeit erspar et.

Exempel.

74893064270936	9090909
58429037869	909091
74951493308805	10000000

24 §.

Es sind mehr, als zwey Zahlen, *A, B, C, D*, gegeben, man soll alle in eine Summe bringen.

Aufl. Man addire zuerst A und B; zur Summe A + B addire man die dritte Zahl C, und zu dieser neuen Summe A + B + C die vierte D, so erhält man A + B + C + D.

75436	A
328	B
9836	C
629	D.

Es fällt in die Augen, daß man auf die Art fortfahren könne, es mögen so viel Zahlen, als man will, gegeben seyn. Die Rechnung würde demnach so zu führen seyn:

75436	A
328	
75764	A + B
9836	
85600	A + B + C.
629	
86229	A + B + C + D.

Practische Verkürzung.

Es ist im 22 §. angenommen worden, daß man ohne Schwierigkeit zwey Zahlen, deren keine grösser als 9 ist, in Gedanken zusammen zählen, und die Summe durch die ihr zugehörige Ziffer ausdrücken könne. Mehreres wird in der Theorie nicht erfordert, weil diese alle Operationen der Rechenkunst von den leichtesten und einfachsten herleitet. Wenn man in-

zwischen

zwischen oft rechnet, so gewöhnt man sich leicht daran, mehr als zwey einfache Ziffern, oder Zahlen, deren keine grösser als 9 ist, in Gedanken zusammen zu zählen, da denn freylich, wenn derselben viele sind, die Summe ziemlich groß werden kann. Sie mag aber so groß werden, als sie wolle; so könnte man nun die einzelnen Summen gehörig untereinander setzen, sodann diese Summen von neuen summiren, und hiemit so lange fortfahren, bis sich zuletzt eine zusammengesetzte Ziffer ergiebt, so die ganze Summe ausdrückt. Auf die Art würde man mit dem vorigen Exempel so zu verfahren haben:

$$\begin{array}{r} 75436 \\ 328 \\ 9836 \\ 629 \\ \hline 29 \\ 100 \\ 2100 \\ 14000 \\ 70000 \\ \hline \text{Summe } 86229. \end{array}$$

Aber auch hier kann man die Verkürzung brauchen, daß man in den einzelnen Summen nur die niedrigste Ziffer niederschreibt, und alles das in Gedanken gleich zur folgenden Classe addirt, was bey der zweyten Addition hinzukommen würde. Auf die Art wird das ganze Schema der Rechnung sehr ins Kurze gezogen, das sonst bey grossen und vielen Zahlen sehr weitläuftig gerathen würde, wie davon folgendes Exempel zeugt:

999
1289
998
9999
9999
999
99
93978
197949
79
730
6500
29000
180000
100000
109
1200
15000
100000
200000
316309

Verkürzte Art.

	999
	1289
	998
	9999
	9999
	999
	99
	93978
	197949
Summe	316309

Man hat hier in der erſten Claſſe die Summe 79, deswegen ſchreibt man nur 9 nieder, und behält 7 in mente, zählt dieſe 7 zur Summe 73 der folgenden Claſſe, ſo hat man 80. Man ſchreibt alſo nur die 0 nieder, und zählt 8 zur folgenden Summe 65, ſo hat man 73, womit man eben ſo bis zu Ende umgeht.

Bey einer noch gröſſern Menge gegebener Zahlen, kann es ſeyn, daß die einzelnen Summen jeder Claſſe über hundert, ja noch weiter hinaus gehen, da ſie dann für ſich allein ſchon aus dreyen ja noch mehreren Ziffern beſtehen würden. Weil es hier würklich ſchon beſchwerlich wird, ſo groſſe Summen in Gedancken zuſammen zu zählen, und man ſich leicht dabey verſehen kann; ſo iſt es faſt am beſten, das Exempel zu theilen, und etwa zehn und zehn von den gegebenen Ziffern beſonders zu ſummiren: da ſich denn zuletzt aus dieſen beſondern Summen bequemer die Hauptſumme finden läſt. Will man inzwiſchen bey der vorigen Art bleiben; ſo iſt noch allemahl die Regel zu beobachten, daß man unter jeder Columne nur die niedrigſte Ziffer ihrer Summe niederſchreibt, und die übrigen ſogleich zur folgenden Claſſe rechnet,

wie

wie im nachstehenden Exempel. Hier giebt die erste Columne die Summe 142, also schreibt man 2 nieder, und behält 14 in mente. Die zweyte Columne giebt die Summe 132. Hiezu rechnet man die in mente gebliebenen 14, so erhält man 146, wovon man 6 niederschreibt, und abermahl 14 in mente behält. Die dritte Columne giebt 117, welches mit den in mente gebliebenen 14 zusammen 131 ausmacht. Also schreibt man 1 nieder, und behält 13 in Gedanken. Wenn man so durch alle Classen fortgehet; so ergiebt sich auf einmahl die ganze gesuchte Summe.

999
7899
4999
797
9989
99999
9479
99999
9499
99999
9479
99999
94299
4729
999
9999
563162.

25 §.

Es ist nur noch übrig, der bisherigen Lehre von der Addition ein Kennzeichen der Gleichheit und ein Paar Kennzeichen der Ungleichheit beyzufügen, die aus dem Begrif der Addition unmittelbar folgen. Es sind folgende:

Wenn zwey Grössen einander gleich sind, und man addirt zu ihnen gleiche Grössen; so müssen die Summen gleich groß seyn.

Wenn aber zwey Grössen ungleich sind, und man addirt zur grössern eben so viel, als zur kleinern; so ist die erste Summe grösser, als die zweyte.

Addirt man demnach zur grössern mehr, wie zur kleinern; so wird noch um so mehr die erste Summe grösser, als die zweyte seyn.

26 §.

Wenn von einer Ziffer, die nicht grösser ist, als die möglichst gröste Summe zwoer

einfa=

einfachen Ziffern, (also nicht grösser als 18) eine einfache Ziffer subtrahirt werden soll; so ist es leicht, in Gedanken die Differenz zu finden, und durch die ihr zugehörige Ziffer auszudrücken.

27 §.

Es sind zwey ungleiche Zahlen gegeben, man soll die kleinere von der grössern subtrahiren.

Aufl. I. Man schreibe die kleinere Zahl unter der grössern, so wie bey der Addition, damit die Ziffern von einerlerley Ordnung untereinander zu stehen kommen.

II. Wenn nun in der kleinern Zahl jede einfache Ziffer kleiner ist, als die darüber stehende Ziffer in der grössern Zahl: so zähle man in Gedanken die kleinere von der grössern zurück (26 §.), und setze, was übrig bleibt, darunter. So würde man mit folgenden Exempeln umgehen können.

987468	432789645
736254	320645413
Rest 251214.	Rest 112144232.

III. Sind unter den Ziffern der kleinern Zahl einige grösser, als die drüber stehenden, wie im beygefügten Exempel, wo in der Zahl B, bey den Ziffern der ersten und vierten Decimal-Ordnung dieser Fall statt hat; so darf man nur erwägen, daß die Ziffer A aus folgenden Theilen durch die Addition sich zusammensetzen lasse.

$$\begin{array}{r} 547328\ \text{A} \\ 465296\ \text{B} \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \text{A.} & \left\{ \begin{array}{r} 128 \\ 547200 \end{array} \right. \\ \text{B.} & 465296 \\ \hline \text{Rest:} & 82032 \end{array}$$

Nun

Nun kann man so subtrahiren: 6 von 8 bleibt 2, 9 von 12 bleibt 3. Es ist nämlich eine Einheit der zweyten Decimal-Ordnung einerley mit zehn Einheiten der ersten Decimal-Ordnung. Wenn man demnach eine Einheit der zweyten Ordnung zu den Einheiten der ersten Ordnung rechnet: so werden diese dadurch um zehn Einheiten vermehrt. So kann man nun überhaupt zu einer jeden der einfachen Ziffern in A, die zu klein sind, als daß man davon die untenstehende subtrahiren könnte, eine Einheit zurechnen, die man von der nächsthöhern Ordnung abnimmt, wodurch die nächstniedrige allemahl um 10 vermehrt wird. Da nun die untenstehende nie grösser als 9 ist; so wird man sie allemahl nach §. 26. subtrahiren können. Wann im Exempel bey der vierten Decimal-Ordnung nochmahl der Fall vorkommt; so sieht man leicht, daß man so subtrahiren müsse: 6 von 14 bleibt 8.

IV. Es ist zur Beobachtung dieser Regel eben nicht nöthig, die Zahl A so wie vorhin geschehen ist, in Theile zu vertheilen. Dies ist hier nur deswegen geschehen, um den Grund des in diesem Fall beobachteten Verfahrens desto deutlicher vor Augen zu legen. Man kann sogleich zu einer solchen Ziffer in A, die kleiner ist, als die untenstehende, in Gedanken 10 zurechnen, und sodann die untenstehende subtrahiren. Weil aber hiedurch die in A folgende Ziffer der nächsthöhern Ordnung um Eins vermindert worden; so ist es rathsam, dies durch ein willkührliches Zeichen, z. E. durch einen drüber gesetzten Punkt, zu bemerken, damit man diesen Umstand bey der folgenden Subtraction nicht vergesse. Man drückt sich hier gewöhnlich so aus: Der Punkt zeige an, daß man von

der

der Ziffer Eins geborget habe. Das Schema der Rechnung würde nun so aussehen:

547328	7923264930
465296	98697898
Rest 82032	Rest 7824567032

V. Bey diesem sogenannten Borgen kann der Fall vorkommen, daß die Ziffer, wovon man 1 borgen soll, die 0 ist, und so läst sich davon nichts abnehmen. Folgt nun nach der 0 eine Ziffer; so verfährt man damit, wie vorhin: man borgt davon 1, und zeigt dies durch einen Punkt an, so hat man 10 statt der 0. Von diesen 10 kann man nun wieder 1 zur folgenden Classe borgen; so bleiben es 9, wie in folgenden Exempeln.

10 10	10 10 10
7804307	680209034
5965878	394939269
Rest 1838429	Rest 285269765.

Es ist in der Ausübung nicht nöthig, wie hier geschehen ist, die 10 über der 0 würklich hinzusetzen, und durch einen Punkt anzuzeigen, daß etwas wieder davon weggeborget sey. Man darf nur ein für allemahl diese Regel merken:

Wenn man über eine 0 wegborget, so ist es so gut, als wenn man die 0 in 9 verwandelt hätte.

IV. Ja diese Regel läst sich selbst auf die Fälle erweitern, wenn mehrere Nullen nach einander folgen. Man muß sodann von der Ziffer, die nach der letzten Null folgt, 1 borgen, hiedurch erhält man 10 an die Stelle dieser 0; von diesen 10 borgt man wiederum 1 weg in die nächst niedrigere Classe, so erhält man

man in dieser wiederum 10, und in jener bleiben 9. So geht man fort durch alle Classen der nach einander folgenden Nullen, wie im nachstehenden Exempel:

	•	10	10	10	10	10	•			•	•	10	10	•	
	7	0	0	0	0	0	8	0	0	6	2	0	0	3	4
	1	9	8	6	3	2	7	9	3	8	4	0	2	6	9
Rest:	5	0	1	3	6	8	0	0	6	7	7	9	7	6	5.

Es ist in der Ausübung wiederum nicht nöthig, die Ziffern 10, nebst den Punkten über den Nullen hinzusetzen, welches hier nur mehrerer Deutlichkeit wegen so gemacht ist. Denn die vorige Regel läst sich nun allgemeiner so ausdrücken.

Wenn man über mehrere nach einander folgende Nullen wegborget; so ist es eben so gut, als ob man jede dieser Nullen in 9 verwandelt hätte.

28 §.

Wenn zwo Grössen gleich sind, und man subtrahiret von ihnen gleiche Grössen: so werden die Differenzen oder Reste gleich groß.

Dieser für sich klare Satz giebt abermahl ein Kennzeichen der Gleichheit ab, und man kann damit zugleich folgende zwey Kennzeichen der Ungleichheit verbinden.

Wenn zwey Grössen ungleich sind, und man subtrahirt von der grössern eben so viel, als von der kleinern; so ist der erste Rest grösser, als der zweyte.

Wenn aber zwey Grössen gleich sind, und man subtrahirt von der einen mehr, als von der andern; so wird der erste Rest kleiner, als der zweyte seyn.

Addirt

Addirt man die abgezogene Zahl zum Rest, so muß die grössere Zahl, wovon man jene subtrahirt hat, wieder herauskommen (21 §.). Dies dienet zur Prüfung, ob man richtig subtrahirt habe, oder vielleicht in der Rechnung ein Fehler eingeschlichen sey. Denn kommt die grössere Zahl nicht wieder heraus, und man hat beym Addiren nicht gefehlt; so ist es gewiß, daß man beym Subtrahiren gefehlt habe. Man kann auch den Rest von der grössern Zahl subtrahiren, so muß die abgezogene kleinere Zahl herauskommen, weil diese mit dem Rest zusammen genommen der grössern gleich seyn soll. Auf ähnliche Art läßt sich die Addition prüfen. Hat man nämlich zwey Zahlen zusammen addirt, und man subtrahirt eine derselben von der Summe; so muß die andere zum Rest bleiben. Hat man drey Zahlen zusammen addirt, und man subtrahirt von der Summe die eine derselben; so muß die Summe der beyden übrigen zum Rest kommen. Es erhellet leicht, daß diese Prüfung sich auf so viele zusammen addirte Zahlen, als man will, erstrecke. Wenn eine der summirten Zahlen vom Rest subtrahirt wird; so muß der Rest so groß seyn, als die Summe aller übrigen summirten Zahlen.

29 §.

Wenn A und B ein Paar ungleiche Zahlen bezeichnen, und A die grössere, B die kleinere Zahl ist; so hat man allemahl $A - B + B = A$, oder auch $A + B - B = A$. Dies ist nichts anders als der Satz des 21 §. statt der gewöhnlichen Worte in kurze Zeichen eingekleidet. Der Ausdruck selbst ist so allgemein, daß die Buchstaben auch sonst andre Grössen bezeichnen können, wenn sie nur von einerley Art

sind,

sind, damit man sie addiren, oder eine von der andern subtrahiren kann. Weil dergleichen allgemeine und kurze Arten des Ausdrucks im folgenden oft mit Vortheil werden gebraucht werden; so ist nöthig, was den Gebruch der Additions- und Subtractions-Zeichen betrift, noch folgendes zu bemerken.

Es ist gleichviel, wenn die Summe $B + C$ von A subtrahirt werden soll, ob man dies im allgemeinen so ausdrückt: $A - (B + C)$, oder auf die Art $A - B - C$. Denn die Summe $B + C$ ist von A subtrahirt, wenn man beyde Theile B und C nach einander subtrahirt hat. Wenn dagegen die Differenz $B - C$ von A subtrahirt werden soll; so hat man $A - (B - C) = A - B + C$. Denn es sey $A - (B - C) = D$, so ist $A = D + B - C$, also $A + C = D + B$, und $A - B + C = D$, mithin auch $A - (B - C) = A - B + C$. Der Grund hievon läßt sich auch ganz deutlich so übersehen. Wenn man die Grösse B von A ganz subtrahirt, so nimmt man zu viel weg, weil nur B weniger C weggenommen werden sollte, deswegen muß man C wieder hinzusetzen. Diesemnach ist $15 - (8 - 3) = 15 - 8 + 3 = 15 - 5 = 10$ und eben so $29 - (19 - 7) = (29 - 12) = 29 - 19 + 7 = 17$.

Der III. Abschnitt.

Von der Multiplication mit ganzen Zahlen.

30 §.

Es können alle Zahlen, die man nach dem 23 §. zusammen addirt, gleich groß seyn, wie in dem folgenden Exempel. Darinn wird die Zahl 318 in der

$$\begin{array}{r} 318 \\ 318 \\ \underline{318} \\ 954 \end{array}$$

Summe 954 dreymahl enthalten, oder, welches einerley ist, die Summe 954 dreymal grösser seyn als die Zahl 318. Man könnte dies mit andern Worten auch so ausdrücken: wenn die Zahl 954 in drey gleiche Theile getheilt wird; so ist jeder Theil 318. Nun heist überhaupt ein solcher Theil, der in dem Ganzen genau etliche mahl enthalten ist, ein **aliquoter Theil** des Ganzen, oder ein Maaß des Ganzen, (pars aliquota, mensura, submultiplum) und das Ganze selbst heist ein **vielfaches** (multiplum) eines solchen Theils. Die Wörter: ein **zweyfaches**, oder **doppeltes**, **dreyfaches**, **vierfaches**, u. s. f. duplum, triplum, quadruplum) drücken es specieller aus, wie vielmahl das Ganze in jedem besondern Fall den aliquoten Theil desselben, davon die Rede ist, in sich enthalte. Wenn nun eine Grösse gegeben ist, und man soll ein vielfaches derselben suchen; so erhellet, daß überdem **eine ganze Zahl müsse gegeben seyn, die es ausdrückt, wie vielmahl jene gegebene Grösse in der gesuchten enthalten seyn soll.** Wenn die gegebene Grösse eine Zahl wäre; so würde die andre ganze Zahl ausdrücken, wie vielmahl man jene niederschreiben müste, wenn man das verlangte Vielfache derselben vermittelst der Addition suchen wollte: aber dies würde bey grossen Zahlen eine überaus beschwerliche Sache seyn. Deswegen hat man darauf bedacht seyn müssen, die Arbeit zu verkürzen. Die Methode nun, nach welcher man das vielfache herausbringt, worin die gegebene Grösse so vielmahl enthalten ist, als die Einheit in der gegebenen ganzen Zahl, heist die **Multiplication** mit dieser ganzen Zahl. Die gegebene Grösse, wovon man ein vielfaches

faches machen soll, heist hier das Multiplicandum, auch wohl der Multiplicandus; die ganze Zahl aber, welche ausdrückt, wie vielmahl man jene Grösse nehmen soll, der Multiplicator. Beyde führen auch den gemeinschaftlichen Nahmen Factoren. Das Vielfache selbst, so man durch die Multiplication herausbringt, wird das Product genannt.

31 §.

Für diese Rechnungsart ist ebenfalls ein eigenes Zeichen festgesetzt, dessen man sich statt des Worts: multiplicirt, bedient. Man setzt das liegende Kreuz (×) oder statt dessen nur einen Punkt (.) zwischen beyden Factoren auf folgende Art: 3×4 oder $3 \cdot 4$, und das ist so viel als wenn man schriebe: 3 mit 4 multiplicirt. Wenn das Multiplicandum keine Zahl, sondern irgend eine andre Grösse ist, oder wenigstens durch ein allgemeineres Zeichen, als die gewöhnlichen Ziffern sind, z. E. durch einen Buchstaben ausgedruckt wird: so setzt man den Multiplicator auch wohl voran, ohne sonst ein Zeichen dazwischen zu setzen, z. E. 3 Thaler, 5 Pfund. Soll eine Reihe mehrerer Zahlen, die durch die Addition oder Subtraction mit einander verbunden sind, durch eine gegebene Zahl multiplicirt werden: so schliest man das Multiplicandum in einer Parenthese ein, auf diese Art $(3 + 5 + 9) \times 3$, welches eben so viel ist, als 17×3. Sind beyde Factoren auf diese Art aus mehrern Theilen zusammen gesetzt; so wird jeder für sich in einer Parenthese eingeschlossen, z. E. $(3 + 5)(7 + 4)$ ist so viel, als 8×11; und $(9 - 5)(7 - 2)$ so viel als 4×5.

32 §.

Wenn man gleiche Grössen mit gleichen ganzen Zahlen multiplicirt; so sind die Producte gleich groß, weil gleiches zu gleichen addirt gleiche Summen giebt.

Wenn man aber ungleiche Grössen mit gleichen ganzen Zahlen multiplicirt; so giebt das grössere Multiplicandum ein grösseres Product, als das kleinere, weil das Grössere zum Grössern addirt, eine grössere Summe giebt, als das Kleinere zum Kleinern addirt geben kann (25 §.).

33 §.

Wenn beyde Factoren ganze Zahlen sind; so geben sie einerley Product, man mag die erste mit der zweyten, oder die zweyte mit der ersten multipliciren.

Beweis. Man gehe einmahl von der gewöhnlichen Art, die Zahlen durch Ziffern zu bezeichnen ab, und bezeichne sie mit so vielen bey einander hingesetzten Strichen, als die Zahl Einheiten enthält, daß also z. E. 5 so geschrieben würde: I I I I I. Man schreibe das Multiplicandum auf diese Art ausgedrückt so vielmahl unter sich selbst, als der Multiplicator I enthält, auf folgende Art:

A	I	I	I	I	I	B
	I	I	I	I	I	
	I	I	I	I	I	
C.	I	I	I	I	I	

so ist die Summe aller dieser Striche mit dem Product $5 + 5 + 5 = 5 \times 4$ einerley. Man hat nämlich die Reihe von A nach B so vielmahl genommen, als die Reihe von A nach C Eins enthält. Aber wenn man die Reihe von A nach C so vielmahl nimmt, als

in

in der Reihe von A nach B die 1 stehet, so bekömmt man eben dieselbe Menge, die sich nun so ausdrücken läst: $4+4+4+4+4=4 \times 5$. Es ist klar, daß es hier gar nicht darauf ankomme, wie viele 1 in der Reihe von A nach B stehen, oder wie vielmahl diese Reihe unter sich selbst hingeschrieben sey. Wenn demnach die Anzahl der 1 in der Reihe von A nach B durch den Buchstab n, und die Anzahl der 1 von A nach C herunter, durch den Buchstab m angedeutet wird; so mögen der Einheiten in n und m so viel seyn, als da wollen, und es wird doch immer dieselbe Menge sowohl durch $n \times m$, als auch durch $m \times n$ ausgedrückt werden können. Also ist überhaupt $n \times m = m \times n$, wenn n und m ganze Zahlen sind.

34 §.

Wenn demnach auch mehr als zwey ganze Zahlen in einander zu multipliciren sind; so ist es ebenfalls einerley, in welcher Ordnung man die Multiplication vornimmt. So ist $2 \times 4 \times 7 = 4 \times 2 \times 7 = 4 \times 7 \times 2 = 7 \times 4 \times 2$. Denn da man die Stelle eines jeden Factors mit der Stelle des nachfolgenden oder vorhergehenden verwechseln kann: so kann jeder in die Stelle eines jeden der übrigen kommen.

35 §.

Wenn man gleiche Grössen mit ungleichen ganzen Zahlen multiplicirt; so giebt der grössere Multiplicator ein grösseres Product, als der kleinere. Denn wenn von zweyen gleichen Grössen die eine mehrmahl zu sich selbst addirt wird, als die andre; so muß ohne Zweifel die erste Summe grösser seyn, als die zweyte.

Wenn demnach von zwoen ungleichen Grössen die grössere mit einer grössern ganzen

Zahl multiplicirt wird, als die kleinere: so ist noch um so mehr das erste Product grösser, als das zweyte.

36 §.

Es sind zwo durch einfache Ziffern ausgedrückte Zahlen gegeben, man soll eine mit der andern multipliciren.

Aufl. Man schreibe das Multiplicandum so vielmahl unter sich selbst, als der Multiplicator Eins enthält, und suche die Summe nach dem 24 §.: so ist diese Summe mit dem Product beyder Zahlen in einander einerley. Es dienet einigermassen zur Verkürzung der Rechnung, wenn man die gröste von den beyden Zahlen für das Multiplicandum nimmt, da es einerley ist, welche von beyden dafür gehalten wird (33 §.) Allein dies Verfahren würde doch in der Folge zu weitläuftig seyn; also ist es am besten, ein für allemahl alle mögliche Producte zu suchen, die herauskommen können, wenn die Factoren einfache Ziffern sind, und diese Producte etwa in eine Tabelle zu bringen, daraus man sie jedes mahl leicht herausnehmen kann. Diese Tabelle ergiebt sich von selbst, wenn man die Ziffern von 1 bis 9 nach einander hinschreibt, und darunter ihre dupla setzt, die man erhält, wenn man jede zu sich selbst addirt. Unter diesen duplis setzt man die tripla, indem man jede Zahl zu ihrem duplo addirt, und unter diesen wieder die quadrupla, indem man jede Zahl zu ihrem triplo addirt, u. s. f. bis man auf die noncupla kommt. So entsteht folgende Tabelle, die man der Bequemlichkeit halber in Fächer eintheilen kann, so daß jedes Product sein eigenes Fach bekommt. Auf die Art wird der eine Factor dieses Products gerade über dem-

selben

selben in der obersten Reihe, der andre aber linker Hand im Anfange derselben Reihe stehen, in welcher die Zahl selbst befindlich ist.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Wenn man nun z. E. das Product 8 × 6 finden soll: so suche man den einen Factor 8 in der obersten Reihe, und den andern Factor 6 unter den ersten Ziffern jeder Reihe linker Hand auf, gehe sodann von der 8 gerade herunter bis auf die sechste Reihe, und von der 6 gegen die Rechte zu fort, bis man in das Fach kommt, wo beyde Reihen zusammen treffen. Die Zahl 48, welche in diesem Fache stehet, ist das gesuchte Product.

So muß man wenigstens so lange verfahren, bis man diese Producte durch öftere Uebung im Rechnen von selbst im Gedächtniß behält, oder sich wenigstens die Sache so geläufig gemacht hat, daß man diese Summe leicht, so wie die Summe des 22 §. in Gedanken finden kann. Diese Tafel ist übrigens mit dem **Ein mahl Eins** einerley. Sie heist auch von dem

Erfinder der **Pythagorische Rechentisch**, (abacus Pythagoricus.

37 §.

Bestehet das Multiplicandum aus mehrern Theilen, und man nimmt jeden Theil so vielmahl, als der Multiplicator Eins enthält; so ist dies eben soviel, als wenn man das ganze Multiplicandum eben so vielmahl genommen hätte. Demnach muß die Summe jener einzelnen Producte mit dem letztern ganzen Product einerley seyn. So erhellet, daß $(3 + 5) \times 4 = 3 \times 4 + 5 \times 4$ seyn müsse; so wie $(7+8+5+3+6) \times 9 = 7 \times 9 + 8 \times 9 + 5 \times 9 + 3 \times 9 + 6 \times 9$.

Weil es gleichviel ist, wie groß die Theile des Multiplicandi sind, und weil auch der Multiplicator jede ganze Zahl seyn kann; so nehme man an, daß die Buchstaben A, B, C, D, E, die Theile des Multiplicandi bezeichnen, der Buchstab n aber den Multiplicator. Dies vorausgesetzt wird man verstehen, was ein Ausdruck dieser Art sagen wolle: $(A + B + C + D + E) \times n = A \times n + B \times n + C \times n + D \times n + E \times n$. Es ist der eben vorgetragene Satz statt der sonst gewöhnlichen Worte in allgemeine und kurze mathematische Zeichen eingekleidet.

38. §.

Eine Zahl wird mit 10 multiplicirt, wenn man zur Rechten eine Nulle anhängt. Man multiplicirt diese Zahl mit 100 durch Hinzusetzung zweyer, mit 1000 durch Hinzusetzung dreyer Nullen, u. s. f. Wenn man nämlich 4260 statt 426 schreibt, so wird dadurch der Werth jeder einzelnen Ziffer der Zahl 426 zehnmahl grösser, (16 §.) mithin die Zahl 426 selbst zehnmahl grösser gemacht. (37 §.) Demnach wird der

der Werth jeder Zahl, sie mag aus so vielen Ziffern, als man will, bestehen, 100 mahl, oder 1000mahl grösser, u. s. f. wenn man zwey Nullen, oder drey Nullen u. s. f. zur Rechten anhängt.

Diesemnach ist $7000 \times 4 = 7 \times 1000 \times 4 = 7 \times 4 \times 1000$ (§. 34) $= 28000$, und $7000 \times 400 = 7 \times 1000 \times 4 \times 100$ 2800000 (34 §.) Hieraus folgt die Regel:

Wenn die Factoren einfache Ziffern mit angehängten Nullen sind: so multiplicirt man die einfachen Ziffern nach dem 36 §. und hängt an das Product so viele Nullen, als beyden Factoren zusammen beygefügt waren.

39 §.

Eine zusammengesetzte Ziffer mit einer einfachen zu multipliciren.

Aufl. Man setze den Multiplicator unter dem Multiplicando, wie bey der Addition, und multiplicire nach einander die Ziffern der verschiedenen Ordnungen des Multiplicandi mit dem gegebenen Multiplicator, nach den Regeln des 36 und 38 §. Diese einzelnen Producte setze man gehörig untereinander, so daß die Ziffern von einerley Ordnung untereinander kommen. Alle diese einzelnen Producte bringe man zuletzt in eine Summe; so wird diese das gesuchte Product seyn. (37 §.)

$$\begin{array}{rl} 7854 & A \\ 3 & B \\ \hline 12 & \\ 150 & \\ 2400 & \\ 21000 & \\ \hline 23562 & A \times B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} 97423 & C \\ 5 & D \\ \hline 15 & \\ 100 & \\ 2000 & \\ 35000 & \\ 450000 & \\ \hline 487115 & C \times D. \end{array}$$

Man wird leicht von selbst darauf verfallen, wenn man die beygefügten Exempel ansieht, daß sich hier eben die Verkürzung wie bey der Addition anbringen lasse. (24 §.) Statt jedesmahl das einzelne Product ganz nieder zu schreiben, ist nur nöthig, die niedrigste Ziffer in ihrer gehörigen Stelle hinzusetzen; denn die nächsthöhere kann man in mente behalten, und sogleich zum nächstfolgenden Product hinzurechnen: so ergiebt sich die Summe der einzelnen Producte sogleich von selbst. Auf die Art ist das nachstehende Exempel berechnet.

$$\begin{array}{rl} 9084269352783 & \text{A.} \\ 8 & \text{B.} \\ \hline 72674154822264 & \text{A} \times \text{B.} \end{array}$$

40. §.

Wenn an dem einen, oder auch an beyden Factoren Nullen hängen: so ist es nicht nöthig, diese bey der Multiplication selbst in Betrachtung zu ziehen. Nachdem man aber die Ziffern gehörig in einander multiplicirt hat, setzt man zu dem Product so viele Nullen hinzu, als beyde Factoren zusammen genommen enthalten. Denn so ist z. E. $3450000 \times 7000 = 345 \times 7 \times 10000 \times 1000$. (38 §.) Also wird die Rechnung so geführt:

$$\begin{array}{r} 3450000 \\ 7000 \\ \hline 24150000000. \end{array}$$

41 §.

Zwey Zahlen in einander zu multipliciren, wenn gleich beyde durch zusammengesetzte Ziffern ausgedrückt sind.

Aufl.

Aufl. Man schreibe den Multiplicator unter dem Multiplicando, wie bey der Addition.

Hierauf multiplicire man das ganze Multiplicandum zuerst mit der niedrigsten Ziffer des Multiplicators, und schreibe das Product gehörig unter. (39 §.) Eben diese Multiplication wiederhole man mit der nächsthöhern Ziffer des Multiplicators, (40 §.) und fahre so fort, bis die Multiplication mit allen Ziffern des Multiplicators geschehen ist, und die einzelnen Producte gehörig unter einander gesetzt sind.

Alle diese einzelne Producte bringe man in eine Summe, so hat man das ganze gesuchte Product (37 §.): und man siehet leicht, wie diese Regeln in den nachstehenden Exempeln angewandt sind.

Die den einzelnen Producten im ersten Exempel nach dem 40 §. beygefügten Nullen läßt man der Kürze halber in der Ausübung weg, wie im zweyten Exempel geschehen ist, weil sie die Summen nicht ändern, wenn jedes folgende Product nur gehörig eine Classe weiter gegen die linke Hand eingerückt wird. Auch ist noch anzumerken, daß hier die Regel des 40 §. ebenfalls gelte, dafern dem einen, oder beyden Factoren, Nullen beygefügt sind.

```
     26394             789643254
      9362                 53073
 ---------        --------------
     52788            2368929762
   1583640           5527502778
   7918200         2368929762
 237546000       3948216270
 ---------      ----------------
 247100628      41908736419542
```

Im zweyten Exempel steht statt der Ziffer der zweyten Decimal-Ordnung im Multiplicator ein o.

Es

Es ist klar, daß statt des Products, so eine Ziffer dieser Ordnung in das Multiplicandum multiplicirt geben würde, hier lauter Nullen hingeschrieben werden müsten. Weil diese nun die Summe nicht ändern; so braucht man sie nicht hinzusetzen: man rückt statt dessen nur das Product in die nächstfolgende Ziffer des Multiplicators um eine Classe weiter gegen die linke Hand, weil diese Ziffer nun um zwey Ordnungen höher ist, als die vorige war. Folgten mehrere Nullen im Multiplicator nach einander; so kann man sie aus eben dieser Ursache allemahl übergehen, nur muß alsdenn das Product, welches die nach den Nullen folgende Ziffer giebt, um so viele Classen gegen die linke Hand gerückt werden, als Nullen nach einander folgen.

Daß man gerade mit der niedrigsten Ziffer im Multiplicator die Multiplication anfange, und nach und nach zu den nächsthöhern fortgehe, ist eben nicht nothwendig: genug wenn man nur das ganze Multiplicandum mit allen Theilen des Multiplicators multiplicirt, und hiernächst alle einzelne Producte richtig summirt. Man kann in umgekehrter Ordnung mit der höchsten Ziffer des Multiplicators anfangen, und nach und nach zu den nächstniedrigen fortgehen, wie im folgenden Exempel.

```
    26394
     9362
---------
237546
  79182
  158364
    52788
---------
247100628
```

Bey

Bey diesem Verfahren muß die niedrigste Ziffer des nächstfolgenden partialen Products um eine Classe weiter gegen die Rechte gerückt werden, und die Vergleichung dieser Form des Ansatzes mit der vorigen, nach welcher schon eben das Exempel gerechnet ist, leitet von selbst auf folgende allgemeine Regel: Man setze die niedrigste Ziffer eines jeden partialen Products gerade unter der Ziffer des Multiplicators, womit man dasmahl multiplicirt; so giebt sich alles übrige von selbst.

Der IV. Abschnitt.

Von der Division mit ganzen Zahlen, und dem Ursprung der Brüche.

42 §.

Man kann das bisherige Verfahren auch umkehren. Es lassen sich wenigstens manche Zahlen in mehr oder weniger gleiche Theile eintheilen, so daß jeder Theil wieder eine ganze Zahl ist. Wenn nun bestimmt wird, in wie viele gleiche Theile eine Zahl zu theilen ist: so kann man fragen, wie groß jeder dieser aliquoten Theile werden müsse. So läst sich die Zahl 12 in 2 oder 3, oder 4 gleiche Theile theilen, und im ersten Fall erhält man 6, im zweyten 4, im dritten 3, für die Grösse eines jeden aliquoten Theils, von 12. Die Wörter: Hälfte, Drittel, Viertel, u. s. f. (subduplum, subtriplum, subquadruplum, etc.) bezeichnen dergleichen aliquote Theile des Ganzen, und drücken es zugleich specieller aus, wie vielmahl ein solcher Theil in dem Ganzen enthalten sey. Man kann jede andre Grösse ebenfalls in eine gewisse Menge gleicher Theile eintheilen; nur muß alsdenn eine ganze Zahl gegeben seyn, die es ausdrückt, in wie viele gleiche Theile die Grösse eingetheilt werden soll. Das Verfahren, vermittelst dessen man denjenigen Theil findet, welcher in der gegebenen Grösse so vielmahl enthalten ist, als die gleichfalls gegebene ganze Zahl ausdrückt, heißt die Division der gegebenen Grösse durch die ganze Zahl. Die Grösse, welche man eintheilen soll, heißt das Dividendum, auch der Dividendus; die Zahl, welche ausdrückt, in wie viele gleiche Theile das Dividendum getheilet werden soll, wird der Divisor, und der aliquote Theil des Dividendi, welchen man eigentlich sucht, und welcher im Dividendo so vielmahl enthalten seyn muß, als Eins im Divisor enthalten ist, wird der Quotient genannt. Diese Division wird durch zwey übereinander stehende Punkte (:) bezeichnet, die man zwischen dem Dividendo und Divisor setzt. Auf solche Art wird der Ausdruck $8 : 2 = 4$ bedeuten, daß 8 dividirt durch 2 den Quotienten 4 gebe. Wenn eine ganze Reihe mehrerer Zahlen, die durch die Addition oder Subtraction mit einander verbunden sind, durch eine gegebene Zahl zu dividiren ist; so schliest man das Dividendum in einer Parenthese ein, auf folgende Art: $(7 + 3 + 6) : 4$, welcher Ausdruck eben so viel bedeutet, als $16 : 4$. Wenn der Divisor ein Ausdruck von eben der Art ist; so wird er ebenfalls in einer Parenthese eingeschlossen, z. E. $(6 + 4 + 8) : (2 + 4)$, ist so viel als $18 : 6$.

44 §.

43 §.

Die Multiplication und Division sind wie die Addition und Subtraction einander so entgegen gesetzte Rechnungsarten, daß eine die andre aufhebt. Es ist offenbar, daß $3 \times 2 : 2 = 3$, oder $6 : 2 \times 2 = 6$ sey. Die Hälfte des doppelten Ganzen ist das Ganze selbst, und das halbe Ganze doppelt genommen ist wiederum das Ganze selbst. Ein Drittel des dreyfachen Ganzen ist das Ganze, und das dreyfache von einem Drittel des Ganzen, ist wiederum das Ganze selbst. Ueberhaupt wenn man eine Grösse so oft man will, zu sich selbst addirt, und die Summe wieder in eben so viele gleiche Theile theilt, als man Stücke zusammen addirt hatte: so werden diese Theile die summirten Zahlen selbst seyn. Und wenn eine Grösse in so viele gleiche Theile, als man will, getheilt ist, und man addirt einen Theil davon so vielmahl zu sich selbst, als man Theile hat: so muß die eingetheilte Grösse selbst wieder herauskommen. Dies giebt die allgemeine Regel.

Wenn man eine Grösse mit einer ganzen Zahl multiplicirt, und das Product mit eben der Zahl wieder dividirt; so erhält man das Multiplicandum wieder. Und wenn man eine Grösse mit einer ganzen Zahl dividirt, den Quotienten aber mit dem Divisor wieder multiplicirt; so erhält man das Dividendum wieder.

44 §.

Wenn man gleiche Grössen durch gleiche ganze Zahlen dividirt; so sind die Quotienten gleich.

Wenn

Wenn dagegen von zwoen Grössen die eine grösser als die andre ist, und man dividirt beyde mit gleichen ganzen Zahlen; so giebt das grössere Dividendum den grössern, das kleinere Dividendum aber den kleinern Quotienten.

Ein Dividendum, das zwey- drey- viermahl, und überhaupt *n* mahl grösser ist, muß auch einen Quotienten geben, der zwey- drey- viermahl, oder überhaupt *n* mahl grösser ist, wenn man allemahl denselben Divisor behält.

45. §.

In je mehr gleiche Theile man eine Grösse theilt, desto kleiner werden die Theile, und es ist leicht begreiflich, daß die Theile zweymahl, dreymahl, und überhaupt *n* mahl kleiner werden, wenn man das Ganze in zweymahl, dreymahl, und überhaupt in *n* mahl mehr Theile theilt.

Wenn also zwey Grössen gleich sind, und man dividirt die eine mit einer grössern, die andre mit einer kleinern ganzen Zahl; so giebt der grössere Divisor den kleinern, der kleinere Divisor aber den grössern Quotienten.

46 §.

Bestehet das Dividendum aus mehrern Theilen, die durch die Addition verbunden sind; so ist der Quotient die Summe aller einzelnen Quotienten, die man erhält, wenn man jedes Stück des Dividendi mit der gegebenen ganzen Zahl dividirt.

Beweis. Wenn man annimmt, daß A, B, C, u. s. f. die Theile des Dividendi sind, *n* aber der Divisor ist; so will der vorgetragene Satz so viel sagen, es müsse

(A +

$(A+B+C+\text{etc.}) : n = A : n + B : n + C : n + \text{etc.}$ gefunden werden. Wenn man aber von jedem Theil des Dividendi die Hälfte, oder den dritten, den vierten Theil u. s. f. nimmt; so ist dies offenbar eben so viel, als wenn man vom ganzen Dividendo die Hälfte, oder den dritten, den vierten Theil u. s. f. genommen hätte. Ist $48 = 32 + 16$, so muß $48 : 8 = 32 : 8 + 16 : 8$ gefunden werden, welches man auch so ausdrücken kann $(32 + 16) : 8 = 32 : 8 + 16 : 8$.

47 §.

Eine grössere Zahl durch eine kleinere **dividiren** heißt auch so viel, als **eine dritte Zahl suchen, welche ausdrückt, wie vielmahl die kleinere in der grössern enthalten sey.** Wenigstens ist dieser Begrif mit dem vorigen des 42 §. einerley, wenn von ganzen Zahlen die Rede, und die kleinere Zahl ein aliquoter Theil der grössern ist. Soll man nämlich 18 mit 3 dividiren; so soll eine Zahl gefunden werden, die 3mahl genommen, oder mit 3 multiplicirt, 18 giebt. Weis ich nun, daß 3 in 18 6mahl enthalten ist, so weis ich, daß 6mahl 3, oder 3mahl 6, (33 §.) die Zahl 18 giebt: mithin muß 6 der gesuchte Quotient seyn.

Diesemnach könnte man in allen Fällen eine grössere Zahl mit einer kleinern auf folgende Art dividiren. Man müßte den Divisor vom Dividendo so vielmahl subtrahiren, als es angeht, und die Zahl bemerken, welche ausdrückt, wie vielmahl dies geschehen könne. Diese Zahl würde der Quotient seyn. Aber, dessen zu geschweigen, daß dies in den meisten Fällen ein viel zu mühsames Verfahren seyn würde: so setzt es überdem voraus, daß der Divisor kleiner als das

Dividendum, und zugleich ein aliquoter Theil desselben sey. Dagegen kommen sehr viele Fälle vor, wo weder das eine, noch das andre statt hat, und dieß müssen jetzt genauer erörtert werden.

48 §.

Es sey also zuerst die Einheit selbst das Dividendum, und der Divisor eine ganze Zahl, z. E. 3; so muß der Quotient der dritte Theil der Einheit seyn. Demnach kann der Quotient keine Zahl seyn, die aus der vorigen ganzen Einheit zusammen gesetzt ist. Es sey ferner die Zahl 2 das Dividendum, und der Divisor bleibe 3; so muß der Quotient der dritte Theil der Zahl 2 seyn, und diesen dritten Theil erhält man so: Es ist die Zahl $2 = 1 + 1$. Wenn man nun von jeder Einheit den dritten Theil nimmt; so werden beyde Drittheile zusammen genommen den dritten Theil des Ganzen ausmachen (46 §.). Also beträgt in diesem Falle der Quotient 2 Drittheile des Ganzen, und es ist wiederum offenbar, daß dieser Quotient aus der vorigen Einheit ganz genommen sich nicht zusammen setzen lasse. Daher kann in solchen Fällen der Quotient keine ganze Zahl seyn. Aber dieser Quotient läßt sich auf ähnliche Art aus einem aliquoten Theil der Einheit zusammen setzen, wie man sonst ganze Zahlen aus der ganzen Einheit zusammen setzt. Wollte man demnach diesen aliquoten Theil für sich als ein Ganzes betrachten; so könnte er als eine neue, von der vorigen unterschiedene, Einheit angesehen werden: und insoferne wäre auch der Quotient als eine ganze Zahl anzusehen, nur daß hier die zusammengezählten Einheiten von den vorigen unterschieden seyn würden. Sieht man aber die

zusam-

zusammengezählten Stücke als Theile des vorigen Ganzen an; so wird der Quotient eine Menge gleicher Theile dieses Ganzen ausdrücken, und in dieser Absicht ein Bruch seyn. (4 §.)

49 §.

Man könnte also in Fällen von dieser Art so verfahren: Es müßte durch ein besonderes Wort, z. E. Hälfte, Drittel, Viertel, u. s. f. der aliquote Theil der Einheit angedeutet werden, welcher in dem Bruch etliche mahl enthalten ist: und so könnte man durch eine vorangesetzte Ziffer anzeigen, wie vielmahl derselbe in dem Bruch enthalten sey. Aber man hat es bequemer gefunden, statt dieser Wörter folgendes Zeichen zu gebrauchen. Man ziehet unter der 1 einen Strich, und setzt unter demselben die Ziffer, welche andeutet, in wie viele gleiche Theile die Einheit einzutheilen sey, um diesen aliquoten Theil zu erhalten. Auf die Art bedeuten die Ausdrücke $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, u. s. f. eben so viel, als die Wörter Hälfte, Drittel, Viertel, u. s. f. Nun läßt sich jeder Bruch, den man aus einem solchen aliquoten Theil der Einheit zusammen setzt, so ausdrücken: Man schreibt statt der 1 über dem Strich die Ziffer, welche ausdrückt, wie vielmahl dieser aliquote Theil des Ganzen zusammen zu zählen sey, unter dem Strich aber die Zahl, welche anzeigt, was es für Stücke des Ganzen sind, die den Bruch ausmachen. So bedeuten die Ausdrücke: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, eben so viel als 2 Drittel, 3 Viertel.

50 §.

Von dieser Art die Brüche zu bezeichnen hat man mehr als einen Vortheil. Einmal sind die Ausdrücke kürzer, als wenn man die vorhin angezeigten Wörter gebrauchen wollte. Fürs zweyte behalten die

Brüche die Natur ungenannter Zahlen, und jeder Bruch läst sich mit einer ganzen Zahl vergleichen, wenn man voraus setzt, daß die Einheit, deren Theile der Bruch zusammenzählt, einerley sey mit der Einheit, woraus die ganze Zahl zusammen gesetzt ist. Uebrigens erhellet, daß sich jeder Bruch durch zwo ganze Zahlen ausdrücken lasse. Die eine davon zeigt an, in wie viele gleiche Theile die Einheit eingetheilt sey, und sie heißt der **Nenner** des Bruchs: die andre drückt aus, wie vielmahl derjenige aliquote Theil der Einheit, welcher durch diese Theilung herauskommt, in dem Bruch enthalten sey, und man nennt sie den **Zähler** des Bruchs. Es ist nicht nothwendig, daß der Zähler des Bruchs kleiner als sein Nenner sey. Man nennt inzwischen diejenigen **eigentliche, ächte** oder **wahre** Brüche, deren Zähler kleiner als der Nenner ist, die übrigen werden **uneigentliche** oder **unächte** Brüche genannt.

51 §.

Jeder Quotient zwoer ganzen Zahlen ineinander ist mit einem Bruch einerley, dessen Zähler das Dividendum und dessen Nenner der Divisor ist.

Beweis. Wenn das Dividendum kleiner, als der Divisor ist: so erhellet die Richtigkeit des Satzes schon aus dem 48 §. Die dortigen Schlüsse lassen sich aber leicht allgemeiner machen. Das Dividendum mag so groß seyn, als es wolle, so kann man es allemahl in die einzelnen Einheiten zergliedern, daraus es bestehet. Wenn man nun jede Einheit mit dem Divisor theilt; so werden alle diese Quotienten nicht nur gleich (44 §.), sondern es werden auch lauter

ter aliquote Theile der Einheit. Die Summe aller dieser Quotienten ist der Quotient selbst, den das Dividendum in den Divisor getheilt geben muß. (46 §.) Aber eben diese Summe aller Quotienten ist ein Bruch, dessen Nenner ausdrückt, in wie viele aliquote Theile die Einheit getheilt worden; und dies war der Divisor: der Zähler aber, wieviele solcher aliquoten Theile die Summe ausmachen, und eben so viele Einheiten enthielte das Dividendum. Man soll z. E. 5 durch 3 dividiren: so ist $5:3. = 1:3 + 1:3 + 1:3 + 1:3 + 1:3$. Aber $1:3 = \frac{1}{3}$ (53 §.) Also wird $5:3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.

52 §.

Umgekehrt: Jeder Bruch ist mit einem Quotienten einerley, der gefunden wird, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt.

Beweis. Der Nenner des Bruchs drückt aus, es soll die Einheit in so viele gleiche Theile getheilt werden, als derselbe Eins enthält. So vielmahl nun der Zähler Eins enthält, so viele der vorhin genannten Theile machen den Bruch aus. Eben dies erhält man, wenn man jede Einheit des Zählers mit dem Nenner dividirt (48 §.), und alle Quotienten zusammen nimmt, deren so viele sind, als Einheiten im Zähler. Aber diese Summe ist einerley mit dem Quotienten, den die Division des ganzen Zählers mit dem Nenner, giebt. (46 §.) Also ist der Bruch selbst mit diesem Quotienten einerley. Z. E. der Bruch $\frac{5}{3}$ drückt aus, man soll den dritten Theil der Einheit 5mahl nehmen. Aber der dritte Theil der Einheit ist $= \frac{1}{3} = 1:3$. Also ist $\frac{5}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1:3 + 1:3 + 1:3 + 1:3 + 1:3 = 5:3$.

53 §.

Hieraus folgt eine sehr bequeme Art, die Division zu bezeichnen, der man sich sonst häufig statt der beyden Punkte (:) bedient. Man schreibe nämlich jeden Quotienten wie einen Bruch, dessen Zähler das Dividendum, und dessen Nenner der Divisor ist. Ueberhaupt wird man in der Folge Brüche statt Quotienten, und Quotienten statt Brüche setzen können, so lange Dividendum und Divisor, oder Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, und dieses voraus gesetzt, wird man sich leicht von der Richtigkeit folgender Sätze überzeugen.

Jeder uneigentliche Bruch ist entweder selbst eine ganze Zahl, wenn nämlich der Nenner dem Zähler gleich, oder ein aliquoter Theil desselben ist, oder er enthält eine ganze Zahl mit einem eigentlichen Bruch. In dem letzten Fall drückt der Quotient, den die Division des Zählers durch den Nenner giebt, aus, wie vielmahl der ganze Divisor, und überdem ein aliquoter Theil desselben, im Dividendo enthalten sey.

54 §.

Eine ganze Zahl bestehet höchstens aus zwoen Ziffern, und der Divisor ist eine einfache Ziffer, man soll den Quotienten finden.

Aufl. I. Fall. Wenn das Dividendum unter den Producten im Ein mahl Eins vorkommt, und der Divisor einer von den beyden Factoren ist, welche durch die Multiplication dies Dividendum hervorbringen: so ist der Quotient allemahl der andre Factor. Deswegen suche man das Dividendum in der Tabelle des 36 §. in einem solchen Fache auf, wo einer von den beyden Factoren, die dies Product durch

die

die Multiplication hervorbringen, mit dem gegebenen Divisor einerley ist; so wird der andere Factor der gesuchte Quotient seyn (43 §.) Auf solche Art wird 8 : 4 den Quotienten 2, und 56 : 7 den Quotienten 8 geben.

Man ist wenigstens so lange genöthigt, diese Tabelle zu gebrauchen, bis man das Einmahl Eins sich geläufig gemacht hat. Ist dies geschehen; so darf man nur die Producte des Divisors in die einfachen Ziffern in Gedanken durchlaufen; so wird man bald auf das gegebene Dividendum kommen, und dann ist der Quotient diejenige Zahl: die durch die Multiplication in den Divisor das Dividendum hervorbringt.

II. Fall. Kommt das Dividendum unter den Producten im Einmahl Eins nicht vor, oder, wenn dies gleich wäre, giebt es keinen unter den beyden Factoren desselben, der mit dem Divisor einerley wäre; so vergleiche man den Divisor mit der höchsten Ziffer des Dividendi: und in dem Fall, wenn der Divisor grösser als diese höchste Ziffer des Dividendi ist; so nehme man das nächst kleinere Product, welches obige Eigenschaften hat, und dividire es nach der vorigen Regel, addire aber zum Quotienten einen Bruch, dessen Zähler der Ueberschuß des gegebenen Dividendi über das dividirte Product, und dessen Nenner der Divisor ist. (46. 48 §.) Soll man also z. E. 79 durch 8 dividiren; so wird die Rechnung am bequemsten so geführt: Man schreibt das Dividendum 79 nieder, und unter demselben den Divisor 8; ziehet aber keinen Strich unter diesen Zahlen, wie bey den übrigen Rechnungsarten; sondern zur Seiten, damit man den Quotienten auf der andern

79	$9\frac{7}{8}$
8	
72	
—	
7	

Seite des Strichs setzen könne, welches hier bequemer ist. Nun findet sich, daß 9 mahl 8 zwar nur 72, aber 10 mahl 8 schon 80 giebt, deswegen ist 9 ein Theil des Quotienten. Diesen setzt man an der obgedachten Stelle hin, und multiplicirt den Divisor 8 in den Quotienten 9. Das Product 72 schreibt man unter den gegebenen Zahlen gehörig unter, und subtrahirt es vom Dividendo, so bleibt 7 zum Rest, also kommt zum Quotienten der Bruch $\frac{7}{8}$ hinzu, daß man demnach den Quotienten eigentlich so schreiben müste: $9 + \frac{7}{8}$. Aber man ist gewohnt, hier das Zeichen + wegzulassen, und den Bruch unmittelbar anzuhängen.

89 | $9\frac{8}{9}$
9
81
8

50 | $7\frac{1}{7}$
7
49
1

Auf eben die Art findet man, daß 89 durch 9 dividirt, den Quotienten $9\frac{8}{9}$ und 50 durch 7 dividirt den Quotienten $7\frac{1}{7}$ giebt. In dem Fall, wenn kein Rest bleibt, pflegte man sich so auszudrücken: **Der Divisor gehe im Dividendo auf.**

III. Fall. Wenn der Divisor kleiner als die höchste Ziffer im Dividendo, und die niedrigste Ziffer des letztern die 0 ist; so suche man, wie vielmahl der Divisor in dieser höchsten Ziffer des Dividendi enthalten ist; setze zu der so gefundenen Zahl rechter Hand eine Null hinzu, und nehme diese Zahl für den Quotienten an? Wofern der Divisor in der höchsten Ziffer des Dividendi aufgeht, so ist die gefundene Zahl schon der Quotient, weil sie nach der Regel des 38 §. mit dem Divisor multiplicirt das Dividendum giebt. z. E.

60	20	80	40	90	30
3)		2)		3)	
60		80		90	
0		0		0	

Geht die Division nicht auf, so muß auch der Rest noch mit eben dem Divisor dividirt, und was herauskommt, zum vorigen Quotienten addirt werden, wie in folgenden Exempeln:

70	30	80	20
2)	5	3)	$6\frac{2}{3}$
60	35 Quot.	60	$26\frac{2}{3}$ Quot.
10		20	
2)		3)	
10		18	
0		2	

Das Verfahren gründet sich, wie man leicht siehet, auf den im 46 §. bewiesenen Satz.

IV. Fall. Wenn zwar der Divisor kleiner, als die höchste Ziffer des Dividendi, des letztern niedrigste Ziffer aber nicht die 0 ist, so sucht man den ersten Theil des Quotienten wie im vorigen Fall, nicht anders, als wenn des Dividendi niedrigste Ziffer die 0 wäre, zieht aber das Product des Quotienten in den Divisor nun vom ganzen Dividendo ab, und verfährt mit dem Rest wie vorhin. z. E.

65	20	75	10	99	20
3)	$1\frac{2}{3}$	4)	$8\frac{3}{4}$	4)	$4\frac{3}{4}$
60	$21\frac{2}{3}$ Quot.	40	$18\frac{3}{4}$ Quot.	80	$24\frac{3}{4}$ Qt.
5		35		19	
3		4		4	
2		32		16	
		3		3	

Wenn man richtig verfährt, so muß nothwendig die höchste Ziffer des ersten Restes kleiner als der Divisor, mithin der zweyte Theil des Quotienten kleiner als 10 seyn. Allemahl also ist der erste Theil des Quotienten eine Ziffer, die zu den Zehnern gehört, so wie der zweyte Theil eine Ziffer ist, die Einer bezeichnet.

55 §.

Wenn die gegebenen Zahlen noch Ziffern von eben der Art sind, wie im vorigen §., dem Dividendo aber Nullen beygefügt sind; so findet man den Quotienten auf folgende Art: Ohne die Nullen anfangs in Betrachtung zu ziehen, dividirt man die Ziffern in einander, wie im vorigen §. Dafern nun der Divisor im Dividendo aufgeht, also der gefundene Quotient eine ganze Zahl, ohne angehängten Bruch, ist; so hängt man an demselben so viele Nullen, als dem Dividendo beygefügt waren. Auf diese Art rechnet man leicht folgende Exempel.

```
 24000|                 560000|
 6)   |4000                 7 |80000
 24000|                 560000|
 -----                  ------
   0                       0
```

Wenn dagegen der Divisor im Dividendo nicht aufgeht; so kann man ebenfalls, ohne Rücksicht auf die Nullen, den Theil des Quotienten, welcher eine ganze Zahl wird, nach der II. III. oder VIten Regel des 54 §. suchen. Diesem fügt man so viele Nullen bey, als am Dividendo hängen. Hierauf multiplicirt man denselben in den Divisor, und subtrahirt das Product vom Dividendo, da denn der Rest noch ebenfalls mit eben demselben Divisore dividirt werden

muß.

muß. Es soll z. E. 270 durch 6 dividirt werden: so giebt in der beygefügten Berechnung die erste Division 40, und läßt zum Rest 30, also müßte zum Quotienten 40 noch der Bruch $\frac{30}{6}$ hinzukommen. Dividirt man aber 30 nochmahl durch 6; so erhält man 5 zum Quotienten, und es gehet alles auf. Addirt man nun beyde gefundene Theile; so wird der ganze Quotient 45.

$$\begin{array}{r|r}
270 & 40 \\
6 & \underline{5} \\
\underline{240} & 45 \\
30 & \\
6 & \\
\underline{30} & \\
0 &
\end{array}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß auf diese Art der Quotient allemahl richtig gefunden werde, weil nemlich $270 - 240 = 30$ herauskommt: so ist $270 = 240 + 30$ und $270 : 6 = 240 : 6 + 30 : 6 = 40 + 5 = 45$.

Noch ein hieher gehöriges Exempel wäre, wenn 690000 mit 7 dividirt werden sollte. Obgleich in diesem Fall mehrmahl nach einander ein Rest bleibt, so hindert das doch nicht, daß man nicht eben so fort dividiren, und alle Theile des Quotienten nach einander finden könnte, bis zuletzt ein Rest bleibt, der kleiner als der Divisor ist, wie die nachstehende Rechnung ausweiset.

$$\begin{array}{r|l}
690000 & 90000 \\
7 & 8000 \\
\underline{630000} & 500 \\
60000 & 70 \\
7 & \underline{1\frac{3}{7}} \\
\underline{56000} & 98571\frac{3}{7}\ \text{Quot.} \\
4000 & \\
7 & \\
\underline{3500} & \\
500 & \\
7 & \\
\underline{490} & \\
10 & \\
\underline{7} & \\
3 &
\end{array}$$

56 §.

Wenn das Dividendum und der Divisor vor der Division mit einer und eben derselben ganzen Zahl multiplicirt oder addirt werden; so findet man eben denselben Quotienten, der gefunden wäre, wenn man das ungeänderte Dividendum mit dem ungeänderten Divisor getheilt hätte.

Beweis. Soll man 16 mit 4 dividiren, so ist der Quotient 4, oder es ist $\frac{16}{4} = 4$. Macht man das Dividendum nochmahl so groß, so wird der Quotient nochmahl so groß, und man findet $\frac{32}{4} = 8$: (44 §.) wird überdem der Divisor nochmahl so groß gemacht, und nun statt 4 mit 8 dividirt; so bleibt der Quotient nur halb so groß, (45 §.) und man erhält wieder $\frac{32}{8} = 4$ (43 §.) Halbirt man dagegen das Dividendum 16, so wird nur ein halb so grosser Quotient $\frac{8}{4} = 2$ gefunden; (44 §.) und wenn ferner auch der Divisor 4 halbirt wird, so muß der Quotient wieder nochmahl so groß, (45 §.) also $\frac{8}{2} = 4$ werden. (43 §.) So kann man sich in besondern Fällen von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugen: allgemeiner läßt sich die Sache so übersehen.

Es sey D das Dividendum, d der Divisor, Q der Quotient, so ist $\frac{D}{d} = Q$, und $D = d \times Q$. (43 §.) Man nehme statt dessen n D für das Dividendum, so wie $n\,d$ für den Divisor an, und setze es werde $\frac{n\,D}{n\,d} = K$ gefunden; so ist $n\,D = n\,d\,.\,K$, (43 §.) also auch $D = d\,.\,K$. (44 §.) Dieser Werth von D

muß

muß dem vorigen gleich seyn, (11 §.) also ist $d \times K = d \times Q$, und das giebt $K = Q$, oder $\frac{n \cdot D}{n \cdot d} = \frac{D}{d}$.

Wäre von der Division die Zahl D sowohl, als auch d, mit n dividirt worden; so setze man, es sey $D : n = Y$, $d : n = Z$ gefunden: so ist $D = n \cdot Y$ und $d = n \cdot Z$, also $\frac{D}{d} = \frac{n \cdot Y}{n \cdot Z}$, folglich auch $\frac{D}{d} = \frac{Y}{Z}$ vermöge des zuerst bewiesenen Satzes. Demnach ist auch $\frac{D : n}{d : n} = \frac{D}{d}$.

57 §.

Eine Zahl mit angehängten Nullen wird durch 10 dividirt, wenn man eine Null weglöscht, durch 100, wenn man 2 Nullen weglöscht: man dividirt sie mit 1000 durch Hinwegstreichung dreyer Nullen, u. s. f. denn dadurch wird der Werth aller Ziffern, welche die Zahl ausdrücken, zehnmahl, 100mahl, 1000mahl u. s. f. kleiner, (15. 16 §.) mithin die Zahl selbst eben so vielmahl kleiner gemacht. (46 §.) Wenn demnach der Divisor eine einfache Ziffer mit beygefügten Nullen ist, und das Dividendum bestehet aus nicht mehr als zwoen Ziffern, welchen eben so viele, oder noch mehr Nullen beygefügt sind, als der Divisor enthält: so kann man aus beyden gegebenen Zahlen so viele Nullen wegwerfen, als im Divisor vorhanden sind, hiernächst aber nach den Regeln des 54 oder 55 §. die Division anstellen. Ein Exempel davon wäre, wenn 590000 durch 8000 dividirt werden sollte. Man lasse hier gleich anfangs

drey

drey Nullen aus beyden Zahlen weg; so bleiben 950 durch 8 zu dividiren. Nun giebt in der beygefügten Berechnung die erste Division 70, und läst zum Rest 30. Dividirt man diesen Rest nochmahl mit 8; so erhält man zum Quotienten 3, und es bleibt zum Rest 6. Deswegen kommt zum letzten Theil des Quotienten noch der Bruch $\frac{6}{8}$ hinzu. Weil man nun leicht wahrnimmt, daß Zähler und Nenner dieses Bruchs sich durch 2 dividiren lassen; so dividirt man würklich damit, und nimmt den Bruch $\frac{3}{4}$ statt $\frac{6}{8}$. (52. 56 §.)

$$\begin{array}{r|l} 590 & 70 \\ 8 & 3\frac{3}{4} \\ 560 & \\ \hline 30 & \\ 8 & \\ 24 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

58 §.

Aus den beyden hier angeführten Stellen erhellet nemlich so viel, daß ein und eben derselbe **Bruch** sich auf unzählich viele andere verschiedene Arten ausdrücken lasse, wenn man seinen Zähler und Nenner mit einerley ganzen Zahl multiplicirt, oder dividirt. Aber durch die Division erhält man nicht allemahl ganze Zahlen zu Quotienten, so daß man dadurch auf Brüche kommen kann, deren Zähler und Nenner selbst wieder Brüche, oder ganze Zahlen mit angehängten Brüchen sind. Brüche von dieser Art heissen irreguläre, oder auch wohl **gebrochene Brüche**, so wie diejenigen, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, reguläre Brüche heissen. Wenn es angeht, vermeidet man gerne die gebrochenen Brüche. Allemahl aber, wenn man bey der Division auf Brüche kommt, deren Zähler und Nenner sich durch eine und

eben

eben dieselbe ganze Zahl ohne Rest dividiren lassen; so nimmt man diese Division würklich vor, wenigstens, wenn sich leicht eine ganze Zahl, die in beyden aufgehet, finden läßt. Auf solche Art erhält man kleinere ganze Zahlen, die eben den Bruch ausdrücken, und dies ist in der Ausübung am bequemsten. Es wird unten eine Regel vorkommen, nach welcher man eine solche Zahl allemahl suchen kann, dafern es mit einer ganzen Zahl angehet.

59 §.

Das Dividendum ist aus so vielen einfachen Ziffern, als man will, zusammengesetzt, und der Divisor eine einfache Ziffer, man soll den Quotienten finden.

Aufl. I. Man vertheile in Gedanken das Dividendum in diejenigen Theile, welche die zu verschiedenen Decimal-Ordnungen gehörigen Ziffern desselben ausdrücken. Ist der Divisor grösser, als die erste Ziffer des Dividendi, so rechne man zum höchsten Theil des leztern zwey Ziffern, im Gegentheil aber nur eine.

II. Nun verfahre man mit den verschiedenen Stücken des Dividendi nach einander eben so, wie mit den zweenen Theilen des Dividendi nach der IVten Regel des 54 §. und nachher im 55 §. ist verfahren worden, und zwar so, wie auch am angeführten Ort geschehen ist, daß man mit dem höchsten Theil anfängt, und auf die nächst niedrigen nach einander fortgeht. Im folgenden Exempel geht man so zu Werke:

3 in 80000 dividirt giebt 20000. Das Product dieses Quotienten in den Divisor ist 60000, und dies vom ganzen Dividendo abgezogen, läßt zum Rest 27642, welcher noch durch 3 zu dividiren ist. Man dividirt also 3 in 27000, weil die erste Ziffer des Dividendi kleiner als 3 ist, so erhält man 9000, und das Product dieses Quotienten in den Divisor ist 27000, welches vom Dividendo abgezogen, den Rest 642 giebt. Nun dividirt man also 600 mit 3, welches 200 giebt, und das Product 600 = 200 × 3 vom Dividendo abgezogen, läßt 42.

87642	20000
3	9000
60000	200
27642	10
3	4
27000	29214
642	
3	
600	
42	
3	
30	
12	
3	
12	
0	

Demnach sind 42 durch 3 zu dividiren, welches 10 giebt, und das Product 10 × 3 abgezogen läßt 12. Dieser Rest aufs neue durch 3 dividirt giebt den letzten Theil 4.

Hier fällt nun sogleich in die Augen, daß es nicht nöthig gewesen wäre, die Theile des Quotienten mit den gehörigen Nullen untereinander hin zu setzen, und sie zuletzt erst zu addiren. Man kann die Ziffern ohne die Nullen beyzufügen allemahl in einer Reihe bey einander hinsetzen: denn im kurz vorhin berechneten Exempel ist leicht zu übersehen, daß auf solche Art der Quotient 29214 sich sogleich von selbst würde ergeben haben. Es muß jedesmahl ein Rest bleiben, der kleiner ist, als der Divisor wäre,

wenn

wenn man ihm so viele Nullen beyfügte, als der zuletzt gefundene Theil des Quotienten enthält: widrigenfalls hätte man die dasmahl gefundene Ziffer des Quotienten zu klein genommen. Wird also hierin nicht gefehlt, so ist die folgende Ziffer des Quotienten nothwendig allemahl um eine Decimalordnung niedriger, als die nächstvorhergehende. Aber auch bey der übrigen Rechnung ist es nicht nöthig, die Nullen den Producten des Divisors in die Theile des Quotienten, beyzufügen, wenn man nur die Ziffern allemahl in die gehörige Stelle setzt. Denn es fällt in die Augen, daß bey jeder Subtraction mit den Ziffern des Dividendi, unter welchen die Nullen zu stehen kommen, weiter keine Veränderung vorgehe, als daß man sie unter dem gezogenen Strich herunter setzt. Dies kann aber geschehen, ohne daß die Nullen wirklich hingeschrieben sind. Ja weil selbst das Abschreiben dieser Ziffern Zeit wegnimmt, und man bey jeder folgenden Operation nur die nächstniedrige Ziffer des Dividendi gebraucht; so ist nur nöthig, nachdem das Product des jedesmahl gefundenen Theils vom Quotienten in den Divisor, ohne die dazu gehörigen Nullen, unter den Ziffern des Dividendi von eben der Ordnung hingeschrieben, und von denselben abgezogen worden, die nächst folgende Ziffer des Dividendi herunter, und rechter Hand, neben dem übriggebliebenen Rest zu setzen. Bey den nachstehenden Exempeln sind diese Verkürzungen angebracht.

```
5830963 | 832994 5/7.
7 . . . . .
56. . . . .
 23 . . . .
  7 . . . .
 21 . . . .
  20 . . .
   7 . . .
  14 . . .
   69 . .
    7 . .
   63 . .
    66 .
     7
    63
     33
      7
     28
      5
```

```
462804 | 115701.
4 : . . . .
 6 . . . .
 4 . . . .
 22 . . .
  4 . . .
 20 . .
  28 .
   4 .
  28 .
     4
     4
     0
```

Im zweyten Exempel kommen einige besondre Fälle vor, die einige Erläuterung verdienen, weil man bey denselben ohne Noth Umwege nehmen würde, wenn man sich ganz genau an die vorigen Regeln halten wollte. Zuerst giebt 4 durch 4 dividirt, den Quotienten 1. Das Product aus diesem Quotienten in den Divisor, ist auch 4, daher braucht man es nicht nochmahl niederzuschreiben; sondern man kann nur gleich den Divisor selbst subtrahiren. Ferner giebt 6 durch 4 dividirt auch 1, also kann man wie vorhin verfah-

verfahren, und es überhaupt allemahl so machen, wenn der gefundene Theil des Quotienten 1 ist.

Die vierte Ziffer des Quotienten 7 erhielte man durch die Division von 28 durch 4. Das Product 7 × 4 ist 28, und wenn man dies subtrahirt, bleibt nichts übrig. Die folgende Ziffer des Dividendi ist auch 0; wenn man also gleich diese herunter setzt, so kann man doch mit 4 noch nicht dividiren: deswegen ist diese Classe ganz übergangen, und dafür in der zugehörigen Stelle des Quotienten 0 geschrieben, und zwar aus folgender Ursache. Die folgende Ziffer im Dividendo ist um zwey Ordnungen niedriger, als die vorige 8 war, darum muß der zugehörige Theil des Quotienten ebenfalls um zwey Ordnungen niedriger werden, (55 §.) und dies erhält man durch die demselben vorangesetzte 0. Beym gewöhnlichen Rechnen würde man sagen: 4 in 0 hat man 0 mahl, und dies ist ein gutes Hülfsmittel, es hier nicht zu versehen. Wenn an der Stelle der 0 zwar eine Ziffer, aber eine solche stünde, die kleiner als der Divisor wäre; so würde aus einer ähnlichen Ursache in die zugehörige Stelle des Quotienten eine 0 kommen, wie in dem beygefügten Exempel. Man sagt auch hier: 9 in 3 hat man 0 mahl. Es ist dies eigentlich der Fall, da im übrig gebliebenen Stück des Dividendi die höchste Ziffer des Dividendi kleiner als der Divisor ist, und daher würde sich, wenn man völlig nach der Regel dieses §. verfahren wollte, alles von selbst ergeben. Weil dies aber bequeme practische Verkürzungen sind; so war es nicht undienlich, sie besonders anzumerken.

7234	$803\frac{7}{9}$
9 · ·	
72 · ·	
34	
9	
27	
7	

Wenn der Divisor zwar eine einfache Ziffer ist, aber an derselben Nullen hängen, und am Ende des Dividendi befinden sich eben so viele, oder mehrere nach einander; so läst man in beyden so viel weg, als im Divisor stehen, und kann übrigens nach den Regeln des vorigen §. verfahren (56. 57 §.)

60. §.

Das Dividendum sowohl, als der Divisor sind zusammengesetzte Ziffern, jedoch ist der Divisor kleiner, als das Dividendum: man soll den Quotienten finden.

Aufl. I. Fall. Wenn beyde gegebene Zahlen gleichviel Ziffern haben, so kann die höchste Ziffer des Divisors nicht grösser seyn, als die höchste Ziffer des Dividendi: denn widrigenfalls wäre der Divisor selbst grösser, als das Dividendum, und von dem Fall ist jetzt die Rede nicht. Demnach suche man anfangs den Quotienten eben so, als wenn in beyden Zahlen alle nach der höchsten folgende Ziffern Nullen wären. Weil aber solchergestalt der Divisor kleiner angenommen wird, als er würklich ist; so kann dies Verfahren den Quotienten zu groß geben. Ob dieser Fall eintreffe oder nicht, das zeigt sich gleich durch die schon bekannte Probe, wenn man nun den ganzen Divisor mit dem Quotienten multiplicirt. Denn wird dies Product grösser, als das Dividendum; so muß man so lange den Quotienten um **Eins** vermindern, bis das erwähnte Product entweder eben so groß, oder kleiner als das Dividendum herauskommt. Im letzten Fall zieht man dies Product vom Dividendo ab, da dann der Rest kleiner als der Divisor seyn muß, weil sonst der Quotient zu klein ange-

angenommen wäre. Folgende Exempel werden dies erläutern.

534 | $2\frac{102}{216}$ | $\frac{51}{108}$.
216 |
432
———
102

7843269 |
1942683 | $4\frac{72537}{1942683}$.
7770732
———
72537

II. **Fall.** **Wenn das Dividendum eine Ziffer mehr hat, als der Divisor, und die höchste** Ziffer des Divisors grösser, als die höchste Ziffer des Dividendi ist; so suche man wiederum den Quotienten eben so, als wenn im Divisor alle Ziffern nach der höchsten, und im Dividendo alle Ziffern nach den beyden höchsten, Nullen wären. Aus dem vorhin schon angeführten Grunde kann auch dies Verfahren den Quotienten zu groß geben, welches sich gleich entdeckt, wenn hiernächst der ganze Divisor mit dem angenommenen Quotienten multiplicirt wird. Findet man dies Product grösser als das Dividendum, so muß der Quotient so lange um Eins vermindert werden, bis das erwehnte Product eben so groß, oder kleiner als das Dividendum herauskommt. Im letzten Fall zieht man es vom Dividendo ab, und bemerket nur noch dies, daß der Rest aus der schon bekannten Ursache kleiner als der Divisor seyn muß, weil widrigenfalls der Quotient zu klein angenommen wäre. Ein Paar hieher gehörige Exempel sind folgende:

3847 | $9\frac{40}{423}$.
423 |
3807
———
40

478973 | $8\frac{19117}{57932}$.
57932 |
459856
———
19117

Weder in dem jetzigen noch in dem zuerst betrachteten Fall kann der Quotient, soweit er eine ganze Zahl ist, grösser als 9 gefunden werden: der ganze Quotient, auch mit dem dazu gehörigen Bruch, wenn die Division nicht aufgeht, ist allemahl kleiner als 10.

III. Fall. Wäre die höchste Ziffer des Divisors nicht grösser, als die höchste Ziffer des Dividendi, wenn letzteres eine Ziffer mehr hat, als der **Divisor**; so würde man den Quotienten auf folgende Art finden. Man nehme so viele von den höchsten Ziffern des Dividendi, als der Divisor enthält, allein, und sehe nach, ob diese Ziffern, wenn die letzte fehlte, eine Zahl ausmachen würden, die grösser wäre, als der Divisor. Hat es damit diese Bewandniß; so dividire man diese Ziffern nicht anders, als wenn die letzte fehlte, nach der ersten Regel, setze aber zu demselben rechter Hand eine Null. Darauf multiplicire man, wie gewöhnlich den Divisor mit dem solchergestalt gefundenen Quotienten, und ziehe das Product vom Dividendo ab; so bleibt ein Rest, der nochmahl dividirt werden kann, also noch einen Theil des Quotienten giebt, welcher zum vorigen addirt werden muß. z. E.

897342	30	5402371	20
26309	$4\frac{2836}{26309}$.	184626	$8\frac{48217}{184626}$.
789270	$34\frac{2836}{26309}$.	3692520	$29\frac{48217}{184626}$.
108072		1709851	
26309		184626	
105236		1661634	
2836		48217	

Es könnten aber wohl eben so viele von den höchsten Ziffern des Dividendi für sich allein eine Zahl aus-

ausmachen, die kleiner wäre, als der Divisor, und in diesem Fall wird der Quotient nach der IIten Regel gefunden, wie in folgenden Exempeln.

7713 | $9\frac{765}{772}$.	36845208 | $9\frac{3684492}{3684524}$.
772 |	3684524 |
6948 |	33160716 |
765	3684492

IV. Fall. Die Zahl der Ziffern des Dividendi übertreffe nun die Zahl der Ziffern des Divisors um soviele, als man will; so bedarf es dennoch nicht mehrerer Regeln, als derjenigen, nach welchen in den bisher betrachteten dreyen Fällen der Quotient ist gefunden worden. Allemahl nehme man anfangs von den höchsten Ziffern des Dividendi eben soviele, oder eine mehr ab, als der Divisor enthält; das letzte nemlich, wenn eben soviel Ziffern als im Divisor sind, für sich allein eine Zahl ausmachen würden, die kleiner wäre, als der Divisor. Diese vom Dividendo abgenommenen höchsten Ziffern dividire man nach den Regeln des Isten oder IIten Falles, und setze zum Quotienten soviele Nullen, als im Dividendo nach den höchsten Ziffern folgen, die man, um den Quotienten zu finden, nöthig gehabt hat. Darauf multiplicire man den so gefundenen Quotienten mit dem Divisor, und ziehe das Product vom ganzen Dividendo ab. Den übrig gebliebenen Rest dividire man, wie zuvor, mit eben dem Divisor, und fahre so lange damit fort, bis man auf einen Rest kommt, der kleiner, als der Divisor ist: da man denn zu den gefundenen und in eine Summe gebrachten Theilen des Quotienten noch einen Bruch setzt, dessen Zähler der letzte Rest, und dessen Nenner der Divisor ist. Dafern übrigens statt einiger der letzten Ziffern in den gegebenen Zahlen Nullen stehen; so löscht man, bevor die Rechnung angefangen wird, in beyden so viele weg, bis man in einer von beyden an die niedrigste Ziffer kommt. (56. 57 §.)

Das beygefügte Exempel ist so berechnet: 2 in 7 dividirt, würde 3 geben, und so erhielte man zum Quotienten 300. Aber das Product $278 \times 300 = 83400$ ist grösser als das Dividendum, deswegen nimmt man nur 200. Das Product $278 \times 200 = 55600$ vom Dividendo abgezogen, giebt den Rest 23334. Unter diesen schreibt man den Divisorem so, daß seine höchste Ziffer unter der nächst höchsten des Restes kommt, weil $233 < 278$ ist, nach der dritten Regel.

78934	200
278	80
55600	$3\frac{260}{278}$
23334	$283\frac{260}{278}$
278	
22240	
1094	
278	
834	
260	

Nun würde 2 in 23 dividirt, den Quotienten 9 geben, er ist aber wegen der vorhin schon vorgekommenen Ursache zu groß, also wird der zweyte Theil des Quotienten 80, das Product 278×80 vom vorigen Rest abgezogen, giebt den neuen Rest 1094. Man schreibt unter demselben den Divisor, wie vorhin, weil $109 < 278$ ist: Ob nun gleich 2 in 10 dividirt den Quotienten 5 geben könnte; so darf man ihn hier doch nicht grösser als 3 nehmen, da denn das Product $278 \times 3 = 834$ vom vorigen Rest abgezogen, den letzten Rest 260 giebt, welcher schon kleiner als der Divisor ist.

Man kann hier alle die practischen Vortheile anbringen, deren im vorigen 59 §. Erwehnung geschehen ist. Einmal hat man nicht nöthig den Theilen des Quotienten die ihnen zugehörigen Nullen beyzufügen, und diese Theile am Ende allererst in eine Summe zu bringen. Man kann diese Theile nach einander in einer

Reihe

Reihe sogleich hinschreiben, weil der folgende Theil nothwendig allemahl eine Ziffer der nächst niedrigen Ordnung ist, wofern man nur die gleich folgende Erinnerung nicht aus der acht läßt. Ferner ist es nicht nothwendig, den Producten des Divisors in die Theile des Quotienten die ihnen zukommenden Nullen beyzufügen, wenn man nur die Ziffern derselben allemahl gehörig unter diejenigen Ziffern des Dividendi setzt, die mit ihnen zu einerley Ordnung gehören; um die Subtraction richtig vorzunehmen. Weil überdem die Ziffern des Dividendi, unter welchen die Nullen stehen müsten, wenn man sie beyfügen wollte, durch die Subtraction dieser Producte weiter keine Veränderung leiden, als daß man sie unter den gezogenen Strich herunter setzt, und bey jeder folgenden Operation gewöhnlich nur die nächst niedrige Ziffer des Dividendi eine Aenderung leidet: so ist nur nöthig, daß man die Ziffern des Products von den drüber stehenden Ziffern des Dividendi abziehe, dabey aber vor allen Dingen bemerke, daß der solchergestalt herauskommende Rest kleiner, als der Divisor seyn müsse, denn sonst hätte man den Quotienten zu klein angenommen. Hat es mit diesem allen seine Richtigkeit, so kann man die nächste Ziffer des Dividendi herunter, und rechter Hand neben dem Rest unter den Strich setzen, um die folgende Ziffer des Quotienten eben so zu finden. Auf diese Art ist die Berechnung folgender Exempel verkürzt worden, die man nun leicht nachrechnen wird.

Im ersten von diesen beyden Exempeln bleibt nach der Subtraction des Products aus dem ersten Theil des Quotienten in den Divisor, der Rest 1945. Wenn man hiezu die nächst folgende Ziffer des Dividendi nimmt; so hat man die Zahl 19456, und diese ist noch kleiner als der Divisor. Also muß man noch eine Ziffer zunehmen, und dafür eine 0 im Quotienten hinzuschreiben, denn der folgende Theil des Quotienten wird nun um zwey Ordnungen niedriger, als der vorige war.

```
5949826437 | 90295 18002/65893.
65893....  |
593037.... |
 194564 .. |
  65893 .. |
 131786 .. |
  627783 .
   65893 .
  593037 .
   347467
    65893
   329465
    18002
```

```
68523308702 47 | 10021705 98202/683749.
683749.......  |
 1484087 ....  |
  683749 ....  |
 1367498 ....  |
  1165890 ...
   683749 ...
   4821412 ..
    683749 ..
   4786243 ..
     3516947
      683749
     3418745
       98202
```

Im zweyten Exempel ist der erste Rest 1484, welcher nur aus 4 Ziffern bestehet. Da nun der Divisor noch grösser bleibt, wenn man gleich zwey der folgenden Ziffern zunimmt: so kommen dafür zwey Nullen im Quotienten. Weil man nemlich noch die dritte Ziffer zunehmen muß; so wird der folgende Theil des Quotienten um drey Ordnungen niedriger als der vorige war. So lange der Rest, nachdem schon die folgende Ziffer des Dividendi ist beygefügt worden, kleiner als der Divisor bleibt, sagt man allemahl: man habe den Divisor im Dividendo Nullmal, und schreibt dafür eine Null zum Quotienten hinzu; und das ist eine vortheilhafte Maxime zu verhüten, daß man keine Null im Quotienten vergesse. Wenn man ohne practische Verkürzung blos nach den dreyen ersten Regeln dieses §. rechnet, den Theilen des Quotienten die ihnen zugehörigen Nullen beyfügt, und sie, wie es die Regeln der Addition erfordern, untereinander setzt; so fällt die Ursache, warum man vorhin beschriebener massen verfahren muß, desto deutlicher in die Augen.

61 §.

Die Division dient der Multiplication zur Probe: denn wenn man das Product durch den einen Factor dividirt; so muß der andre der Quotient werden, widrigenfalls ist bey der Multiplication gewiß ein Fehler vorgegangen, dafern man anders richtig dividirt hat. Umgekehrt dient also auch die Multiplication zur Probe der Division: wenn man den Quotienten, dafern er eine ganze Zahl ohne angehängten Bruch ist, mit dem Divisor multiplicirt; so muß das Dividendum wieder herauskommen. Geschieht dies nicht, und man ist versichert, daß man richtig multiplicirt habe; so ist gewiß beym Dividiren ein Fehler vorgegangen. (43 §.) Dafern aber der Quotient einen Bruch bey sich hat; so muß das Product aus dem Divisor in den ganzen Theil des Quotienten das Dividendum weniger den letzten Rest geben. **Wenn man also den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, und zu diesem Product den Rest addirt; so muß die Summe das Dividendum seyn.**

Weil aus dieser eben erwehnten Eigenschaft der Zahlen, welche bey der Division vorkommen, im folgenden Abschnitt eine Menge interessanter Lehren muß hergeleitet werden; so ist nöthig, daß man sich gewöhne, den zuletzt beygefügten Satz vermittelst allgemeiner Zeichen in einen kurzen Ausdruck zu bringen. Wenn nemlich ohne eine Zahl von bestimmter Grösse für das Dividendum und den Divisor anzunehmen, der Buchstab A im allgemeinen das Dividendum, B den Divisor, Q den Quotienten, R den Rest bezeichnet, so hat man $A = Q \times B + R$, und $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$.

Der V. Abschnitt.

Von dem Unterschied der Prim-Zahlen, und zusammengesetzten Zahlen.

62 §.

Zwey oder mehr Brüche zu addiren, die insgesammt gleiche Nenner haben.

Aufl. Man addire alle Zähler zusammen, und behalte den Nenner bey: die Summe ist ein Bruch, dessen

dessen Zähler die Summe aller Zähler, und dessen Nenner mit dem gemeinschaftlichen Nenner der gegebenen Brüche einerley ist. Wird auf solche Art ein uneigentlicher Bruch gefunden, so kann die darin enthaltene ganze Zahl dadurch gesucht werden, daß man den Zähler des gefundenen Bruchs durch seinen Nenner dividirt (52. §.)

Beweis. Die Richtigkeit der Regel ist für sich einleuchtend, wenn man statt des Nenners den Nahmen der Brüche durch ein sonst gebräuchliches Wort, wie im 49 §., ausdrückt. Daß 2 Neuntel und 5 Neuntel zusammen 7 Neuntel machen, ist eben so klar, als es ist, daß 2 Thaler und 5 Thaler zusammen 7 Thaler ausmachen. Wenn man aber auch die Brüche als ungenannte Zahlen betrachten will, so weis man, daß $\frac{2}{9}$ 2 =: 9 und $\frac{5}{9} = 5 : 9$, oder jeder Bruch ein Quotient sey, der durch Division des Zählers mit dem Nenner gefunden wird. (52 §.) Es ist aber $2 : 9 + 5 : 9 = 7 : 9$, (46 §.) also auch $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$ (51 §.)

63 §.

Einen kleinern Bruch vom grössern, der einen eben so grossen Nenner, als der vorige hat, zu subtrahiren.

Aufl. Der Zähler des kleinern Bruchs muß kleiner seyn, als der Zähler des grössern: man subtrahire also jenen von diesen, so hat man den Zähler des gesuchten Bruchs, und sein Nenner ist mit dem Nenner der gegebenen Brüche einerley.

Beweis Es ist wiederum für sich klar, daß 5 Neuntel weniger 2 Neuntel den Rest von 3 Neuntel übrig lassen muß. Sonst folgt auch ganz allgemein der Beweis daraus, weil der Rest die Zahl

ist,

ist, welche zur kleinern addirt eine Summe geben muß, die der grössern gleich ist. (29 §.) Wäre also ganz allgemein der grössere Bruch $\frac{A}{C}$

der kleinere Bruch $\frac{B}{C}$

so ist der Rest $\frac{A-B}{C}$.

Denn man addire $\frac{B}{C}$

so ist die Summe $\frac{A-B+B}{C}$ (62 §.)

$= \frac{A}{C}$ vermöge des 21 §.

64 §.

1. Nicht allein die Summe zwoer oder mehrerer ganzer Zahlen, sondern auch die Differenz zwoer ganzer Zahlen ist allemahl eine ganze Zahl.

2. Ein Product zwoer ganzer Zahlen in einander ist einerley mit der Summe, die man findet, wenn einer von den Factoren so vielmahl zu sich selbst addirt wird, als der andre Eins enthält: demnach ist ein solches Product allemahl auch eine ganze Zahl.

3. Die Summe einer ganzen Zahl und eines eigentlichen Bruchs oder auch eines solchen uneigentlichen Bruchs, der sich auf keine ganze Zahl bringen läßt, ist keine ganze Zahl.

4. Wird von einer grössern Zahl, die aus einer ganzen Zahl und einem eigentlichen Bruch besteht, eine ganze Zahl subtrahirt, so ist der Rest keine ganze Zahl.

5. Wird

5. Wird von einer ganzen Zahl eine kleinere subtrahirt, die aus einer ganzen Zahl und einem eigentlichen Bruch besteht, so ist der Rest ebenfalls keine ganze Zahl.

Die ersten vier Sätze sind für sich klar. Die Richtigkeit des 5ten erhellet so. Wenn man einen eigentlichen Bruch von Eins subtrahiren soll, so ist der Rest kleiner als Eins, also ebenfalls ein eigentlicher Bruch. Es ist aber z. E. $7 - 4\frac{2}{3} = 6 + 1 - 4\frac{2}{3} = 2 + (1 - \frac{2}{3}) = 2\frac{1}{3}$; oder wenn man das allgemein ausdrücken wollte, $A - \left(B + \frac{n}{m}\right) = A - 1 + 1 - B - \frac{n}{m} = A - (B + 1) + \left(1 - \frac{n}{m}\right)$. Wenn nun A, B, n, m, ganze Zahlen sind, und $B < A$, $n < m$ ist; so ist $A - (B + 1)$ entweder $= 0$ oder eine ganze Zahl, und $1 - \frac{n}{m}$ ist ein eigentlicher Bruch.

65 §.

Wenn eine kleinere ganze Zahl in einer grössern aufgeht, so heißt diese kleinere Zahl, oder der Divisor ein Maaß der grössern Zahl; und wenn eben der Divisor in mehreren verschiedenen ganzen Zahlen aufgeht; so heißt er ein gemeinschaftliches Maaß aller dieser Zahlen. Ein solches Maaß ist die Zahl 3 für die Zahlen 9, 15, 18, 21, u. s. f. Die grössere Zahl, worin eine kleinere aufgeht, ist ein Product dieser kleinern Zahl in den Quotienten, und man drückt sich gewöhnlich darüber so aus: das Product sey aus den Factoren zusammengesetzt.

Eins geht in allen ganzen Zahlen und selbst in die Null auf: auch geht jede Zahl in sich selbst auf. Eine ganze Zahl, worin ausser der Eins, und ausser der Zahl selbst, keine kleinere ganze Zahl aufgeht, heißt eine einfache Zahl, oder eine Primzahl, und wenn eine Zahl durch die Multiplication zweyer oder mehrerer Primzahlen in einander entstanden ist, so betrachtet man diese Zahlen als einfache Factoren, das Product aber, als wäre es aus diesen einfachen Factoren zusammengesetzt. Beyspiele von Primzahlen sind folgende: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, u. s. f.

Zahlen dieser Art heissen auch absolute Primzahlen, weil es wohl seyn könnte, daß von zweyen oder mehreren Zahlen zwar jede für sich noch mit einer kleinern Zahl aufgienge, ohne daß für diese Zahlen ein gemeinschaftliches Maaß, Eins ausgenommen, angegeben werden könnte. Dergleichen Zahlen wären 8 und 9: jene geht in 2 oder 4, diese in 3 auf, aber für beyde giebt es kein gemeines Maaß.

66 §.

Zahlen, die kein gemeinschaftliches Maaß haben, heissen unter sich Primzahlen. Von zwoen oder mehrern Primzahlen unter sich könnte also wohl jede für sich einen oder mehrere Maaße haben, womit sie aufgienge.

1.) Zwey oder mehrere absolute Primzahlen sind allemahl auch unter sich Primzahlen: aber nicht umgekehrt.

2.) Wenn unter mehreren Zahlen nur eine absolute Primzahl befindlich ist; so sind sie alle unter sich Primzahlen.

67 §.

Wenn zwey Zahlen ein gemeines Maaß haben; so hat ihre Summe sowohl, als auch ihre Differenz eben das Maaß.

Beweis. Weil 4 in 12 und in 36 aufgehet, so muß auch 4 in 48 aufgehen: denn $\frac{12}{4}$ ist eine ganze Zahl, und $\frac{36}{4}$ ebenfalls; also muß die Summe $\frac{12}{4} + \frac{36}{4}$ eine ganze Zahl seyn. (64 §. n. 1.) Eben diese Summe ist $= \frac{12 + 36}{4}$ (62 §.), also ist $\frac{12 + 36}{4}$ eine ganze Zahl, und das heißt, die Zahl 4 muß in 12 + 36 aufgehen, weil sie in 12 und in 36 für sich aufgeht.

Ferner ist der Rest $\frac{36}{4} - \frac{12}{4} = \frac{36 - 12}{4}$, (63 §.) und eben diese Differenz ist eine ganze Zahl: (64 §. n. 1.) also muß 4 in 36 — 12 aufgehen, wenn 4 in 36 und in 12 aufgeht.

Hätten also mehr als zwey Zahlen, soviel man will, ein gemeines Maaß, so muß die Summe aller eben das Maaß haben. Denn wenn A, B, C, D, u. s. f. Zahlen sind, die das Maas n haben, so hat A + B das Maaß n, mithin vermöge des bewiesenen auch A + B + C, und eben deswegen auch A + B + C + D, u. s. f.

68 §.

Hätte von zweyen Zahlen die eine ein Maaß, was in der andern nicht aufgeht, so würde eben das Maaß weder in der Summe, noch in der Differenz jener beyden Zahlen aufgehen.

Beweis. Wenn gleich 4 in 36 aber nicht in 15 aufgeht, so kann 4 nicht in 36 + 15 aufgehen. Denn $\frac{36}{4}$ ist zwar eine ganze Zahl, aber $\frac{15}{4}$ ist keine ganze Zahl, und eben deswegen kann $\frac{36}{4} + \frac{15}{4} = \frac{36+15}{4}$ keine ganze Zahl seyn, (64. n. 2.) oder 4 kann in 36 + 15 nicht aufgehen. Aus dem 64 §. n. 3 erhellet ferner, daß auch 4 nicht in 36 − 15 aufgehe, weil $\frac{36 - 15}{4}$ keine ganze Zahl ist. Wenn der Divisor zwar nicht in der grössern, wohl aber in der kleinern Zahl aufgienge, so würde er eben so wenig in der Differenz beyder Zahlen aufgehen: denn $\frac{39}{4} - \frac{16}{4} = \frac{39 - 16}{4}$ kann vermöge des 64 §. n. 4. keine ganze Zahl seyn, weil 4 zwar in 16 aber nicht in 39 aufgeht.

69 §.

Wenn eine Summe zweyer Zahlen, mit einer von beyden ein gemeines Maaß hat; so hat die andre Zahl eben das Maaß: und wenn ein Maaß der Summe kein Maaß der einen von beyden summirten Zahlen ist, so ist es auch kein Maaß der andern Zahl.

Beweis. Um die Sache allgemein zu übersehen, setze man, die eine Zahl sey A, die andre B, nnd ihre Summe A + B = S, so ist auch B = S − A. Wenn nun eine Zahl *n* in S und in A aufgeht; so muß sie auch in B aufgehen, (67 §.) weil B die Differenz der Zahlen S und A ist. Wenn dagegen die Zahl *n* in S aufgeht, und in A dividirt nicht aufgeht, so kann auch *n* in B nicht aufgehen. (68 §.)

70. §.

70 §.

Wenn man zwey oder mehr Zahlen, A, B, C, u. s. f. mit einer und eben derselben dritten Zahl n dividirt, die in keiner von allen aufgeht; so geht derselbe Divisor in der Summe der dividirten Zahlen nur alsdenn auf, wenn er in der Summe der Reste aufgeht.

Beweis. Man nehme an, A mit n dividirt gebe den Quotienten Q mit dem Rest R, B mit n dividirt gebe den Quotienten q mit dem Rest r, C mit n dividirt gebe den Quotienten K mit dem Rest ϱ, u. s. f. so hat man vermöge des 61 §.

$$\frac{A}{n} = Q + \frac{R}{n}$$

$$\frac{B}{n} = q + \frac{r}{n}$$

$$\frac{C}{n} = K + \frac{\varrho}{n} \text{ u. s. f.}$$

also $$\frac{A+B+C}{n} = Q+q+K+\frac{R+r+\varrho}{n}.$$

Weil nun Q, q, K, ganze Zahlen sind, so ist $\frac{A+B+C}{n}$ nur alsdenn eine ganze Zahl, wenn $\frac{R+r+\varrho}{n}$ eine ganze Zahl ist. (64 §. n. 1. 2.)

71 §.

Wenn zwey Zahlen ungleich groß sind, und mit einer und eben derselben dritten Zahl dividirt werden, die in keiner von beyden aufgeht; so geht eben der Divisor in der Differenz beyder dividirten Zahlen nur alsdenn auf, wenn beyde Reste gleich groß sind.

Beweis. Man lasse den Buchstaben eben die Bedeutung, die sie im vorigen §. hatten, und nehme an, daß $A > B$, also $\frac{A}{n} > \frac{B}{n}$ sey; so hat man $\frac{A-B}{n} = Q - q + \frac{R-r}{n}$, oder $\frac{A-B}{n} = Q - q - 1 + 1 + \frac{R-r}{n}$, oder auch $\frac{A-B}{n} = Q - (q+1) + \frac{n+R-r}{n}$. Weil nun $Q + \frac{R}{n} > q + \frac{r}{n}$ ist, so muß auch $\frac{R}{n} > \frac{r}{n}$, mithin auch $R > r$, seyn, wenn $Q = q$ ist. Alsdenn aber wird $\frac{A-B}{n} = \frac{R-r}{n}$, und $\frac{R-r}{n}$ ist ein eigentlicher Bruch, weil $R < n$, also noch um so mehr $R - r < n$ ist: mithin kann in diesem Fall n in $A - B$ nicht aufgehen.

Die Voraussetzung $Q < q$ kann nicht bestehen, denn wenn auch q nur Eins grösser als Q wäre, so müste $\frac{R}{n} > 1 + \frac{r}{n}$ seyn, welches darum nicht seyn kann, weil $\frac{R}{n}$ ein eigentlicher Bruch ist.

In dem Fall $Q > q$ ist allemahl $Q - q$ eine ganze Zahl, doch könnte wohl $R < r$ seyn. Deswegen muß man folgende zwey Fälle unterscheiden.

1.) Wenn $R > r$ ist, so ist $\frac{R-r}{n}$ ein eigentli-
cher

cher Bruch; also geht der Divisor n in $A - B$ nicht auf, weil $\frac{A - B}{n} = Q - q + \frac{R - r}{n}$ war.

2.) Wenn $R < r$ ist, so ist $n + R - r < n$, weil von n mehr abgezogen wird, als vorher dazu addirt war. Demnach ist $\frac{n + R - r}{n}$ ein eigentlicher Bruch, und weil $\frac{A - B}{n} = Q - (q + 1) + \frac{n + R - r}{n}$ war, so ist auch in diesem Fall $\frac{A - B}{n}$ keine ganze Zahl, oder n geht in $A - B$ nicht auf.

Sieht man nun auf alle Fälle zurück, so erhellet, daß n in $A - B$ nicht aufgehen könne, es mag $R > r$, oder $R < r$ seyn: nur in dem einzigen Fall, wenn die Reste gleich sind, mithin $R - r = 0$, also auch $\frac{R - r}{n} = 0$, und $\frac{n + R - r}{n} = 1$ ist, hat man $\frac{A - B}{n} = Q - q =$ einer ganzen Zahl, also muß in diesem Fall der Divisor n in $A - B$ aufgehen.

72 §.

Eine Zahl, welche in einem Factor eines Products aufgeht, muß auch im Product aufgehen.

Beweis. Man kann den Factor, worin die erwähnte Zahl aufgeht, für das Multiplicandum annehmen, so ist das Product eine Summe sovieler Zahlen als der andre Factor Eins enthält, und alle diese Zahlen sind dem Multiplicando gleich. Geht also der Divisor im Multiplicando auf, so muß er auch im Product aufgehen. (67 §.)

73 §.

Wenn man beyde Factoren eines Products mit einer dritten Zahl dividirt, die in keiner von beyden aufgeht; so geht eben diese dritte Zahl in dem Product nur alsdenn auf, wenn sie in dem Product der Reste aufgeht.

Beweis. Es sey A der eine, B der andre Factor des Products, und n eine Zahl, die in beyden nicht aufgeht. Wenn nun, wie im 70 §.

$$\frac{A}{n} = Q + \frac{R}{n}$$

$$\frac{B}{n} = q + \frac{r}{n}$$ angenommen wird,

so ist auch $A = Q \times n + R$

$B = q \times n + r$, und man erhält $A \times B = (Q \times n + R)\, q \times n + (Q \times n + R) \times r$ (37 §.) also auch $A \times B = (Q \times n + R)\, q \times n + Q \times n \times r + R \times r$. Man dividire auf beyden Seiten mit n, so findet man $\frac{A \times B}{n} = (Q \times n + R) \times q + Q \times r + \frac{R \times r}{n}$. Weil nun $(Q \times n + R) \times q$ und $Q \times r$ ganze Zahlen sind; so ist $\frac{A \times B}{n}$ nur alsdenn eine ganze Zahl, wenn $\frac{R \times r}{n}$ eine ganze Zahl ist, oder n geht nur alsdenn in $A \times B$ auf, wenn n in $R \times r$ aufgeht. (64 §. n. 1. 2.)

74 §.

Zahlen, die durch 2 theilbar sind, heissen grade Zahlen, die übrigen, welche durch 2 getheilt 1 zum Rest lassen, nennt man ungrade Zahlen. Die Zahl 2 ist eine grade Zahl, und zugleich eine Primzahl.

zahl. 65 §.) Alle übrige Primzahlen sind ungrade Zahlen, denn jede grade Zahl, 2 ausgenommen, hat wenigstens den Factor 2. Es giebt auch viele ungrade Zahlen, die keine Primzahlen sind, z. E. 9, 15, u. s. f. Daher gilt der Satz nicht umgekehrt. Jede grade Zahl läst sich durch $2m$, und jede ungrade Zahl durch $2m+1$ ausdrücken, was auch m für eine ganze Zahl bedeute, und hieraus schliest man leicht folgende Sätze.

I. Die Summe sowohl, als die Differenz zwoer graden nicht nur, sondern auch zwoer ungraden Zahlen, ist eine grade Zahl (67. 70 §.), so wie die Summe und Differenz einer graden und ungraden Zahl, eine ungrade ist (68 §.)

II. Das Product zwoer graden Zahlen sowohl, als auch das Product einer graden Zahl in eine ungrade, ist eine grade Zahl (72 §.). Aber das Product zwoer ungraden Zahlen in einander, ist eine ungrade Zahl (73 §.)

75 §.

Wenn zwo Zahlen A und B ungleich sind, und die kleinere B in der größten A aufgeht; so ist die kleinere B das gröste gemeinschaftliche Maaß beyder Zahlen A und B.

Dieser Satz ist für sich klar.

Wenn aber die kleinere B in der grössern A nicht aufgeht; so kann das gröste gemeinschaftliche Maaß beyder Zahlen nicht grösser seyn, als der Rest R, der übrig bleibt, wenn man die grössere A mit der kleinern B dividirt.

Beweis. Es sey Q der Quotient, soweit er eine ganze Zahl wird, wenn man A durch B dividirt; so

 ist

ist $A = Q \times B + R$. Wenn nun m das größe gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen A und B ist, so geht m in A und im $Q \times B$ auf (72 §.) folglich muß m auch im R aufgehen (69 §.) und deswegen kann m nicht grösser, als R seyn.

76 §.

Wenn der Rest *R* in der kleinern Zahl *B* aufgeht; so ist *R* das gröste gemeinschaftliche Maaß der Zahlen *A* und *B*.

Beweis. Weil $A = Q \times B + R$ ist; so folgt die Richtigkeit des Satzes aus dem 67. 72. und 75 §., denn R geht in sich selbst auf.

77 §.

Das gröste gemeine Maaß des Divisors *B* und des Restes *R* ist zugleich das gröste gemeine Maaß des Divisors *B* und des Dividendi *A*.

Beweis. Wenn m das gröste gemeine Maaß von B und R ist, so ist m auch ein gemeines Maaß von B und A. Wenn aber B und A ein gemeines Maaß M hätten, das noch grösser, als m wäre, so wäre eben dasselbe auch ein Maaß von R, (69 §.) mithin hätten B und R das gemeine Maaß M, welches noch grösser als m ist, und es wäre m noch nicht das gröste gemeine Maaß von B und R.

78 §.

Wenn eine kleinere Zahl grösser ist, als die Hälfte der grössern, so kann die kleinere in der grössern nicht aufgehen. Hat man A mit B richtig dividirt, und den Rest R erhalten, so ist zwar nothwendig $R < B$: wenn aber $R > \frac{1}{2} B$ wäre, so könnte R in B nicht aufgehen, mithin muß in diesem Fall das gröste gemeine Maaß von B und R, also auch das gröste gemeine

meine Maaß von B und A kleiner als R seyn. Man ziehe den Rest vom Divisor ab, und setze $B - R = C$, so ist C das Complement des Restes zum Divisor, (19 §.) und man hat $B = R + C$, also auch $R = B - C$. Wie nun allemahl

$$A = Q \times B + R \quad \text{seyn muß,}$$

so ist auch $A = Q \times B + B - C$.

Wenn demnach das Complement C des Restes zum Divisor im Divisor B aufgeht, so geht eben das Complement auch im Dividendo A auf.

79 §.

Wenn der Rest R nicht selbst das gröste gemeine Maaß des Divisors B und des Dividendi A ist; so kann dasselbe nicht grösser seyn, als das Complement C des Restes zum Divisor.

Beweis. Weil $A = Q \times B + B - C$ war, (78 §.) so ist auch $A + C = Q \times B + B$. Nun sey m das gröste gemeine Maaß von B und A, so geht m in $Q \times B + B$ auf, also auch in $A + C$. Weil ferner der Voraussetzung gemäß m in A aufgeht, so muß auch m in C aufgehen, (69 §.) mithin kann m nicht grösser als C seyn.

80 §.

Es sind zwo ungleiche Zahlen gegeben, man soll ihr gröstes gemeinschaftliches Maaß suchen.

Aufl. I. Man dividire die grössere Zahl durch die kleinere. Wenn alles aufgeht, so ist die kleinere selbst das gröste gemeinschaftliche Maaß (75 §.) z. E. man hat die Zahlen 12 und 36; so geht 12 in 36 auf, also ist 12 das gröste gemeinschaftliche Maaß von 12 und 36.

II. Wenn die kleinere Zahl in der grössern nicht aufgeht; so dividire man die kleinere Zahl mit dem Rest. Geht nun alles auf; so ist dieser Rest das gesuchte gröste Maaß. (76 §.) Z. E. man hat die Zahlen 12 und 28, wo 28 durch 12 dividirt, den Rest 4 läst: da nun 4 in 12 aufgeht, so ist 4 das gesuchte Maaß.

III. Wenn der Rest in der kleinern Zahl nicht aufgeht; so kann das gesuchte Maaß nicht grösser seyn, als das Complement dieses Restes zur kleinern Zahl. (79 §.) Wenn demnach dieser Rest grösser, als die Hälfte der kleinern Zahl ist: so subtrahire man ihn von der kleinern Zahl, und dividire die kleinere Zahl mit dem gefundenen Complement. Wofern nun alles aufgehet; so ist dieses Complement das gesuchte Maaß. (78. 79 §.) Z. E. man hat die Zahlen 12 und 32, wo 32 durch 12 dividirt den Rest 8 läst. Dieser ist grösser, als die Hälfte von 12, also subtrahire man ihn: so wird das Complement 4, aber 4 in 12 gehet auf, also ist 4 das gesuchte Maaß.

Man hätte eben dieses Maaß auch so finden können. Weil 8 in 12 nicht aufgeht; so ist das gröste gemeinschaftliche Maaß von 8 und 12 zugleich das gröste Maaß von 32 und 12 nach der I. und II. Regel. Weil nun 8 in 12 dividirt, zum Rest 4 läst, und 4 in 8 aufgeht; so ist 4 das gesuchte Maaß. Aber, daß der Versuch der Division von 12 durch 8 vergeblich seyn würde, konnte man zum voraus wissen.

Hieraus folgt nun die gewöhnliche allgemeine Regel:

Man dividire die gröste Zahl durch die kleinste. Bleibt ein Rest; so dividire man damit den vorigen Divisor: bleibt wieder ein Rest; so dividire man damit abermahl den letzten Divisor, und fahre so fort, bis alles auf-

aufgeht: so wird der letzte Divisor das gesuchte gemeinschaftliche Maaß seyn.

Diese Regel giebt gewiß richtig das gesuchte Maaß, aber man kann oft einige Divisionen ersparen, wenn man nach der III. Regel nicht mit dem Rest, dafern er grösser, als die Hälfte des letzten Divisors ist; sondern mit seiner Ergänzung zum letzten Divisor aufs neue dividirt. Es sollen z. E. 28829 und 104775 die gegebenen Zahlen seyn. Die erste Division giebt den Rest 18288, und man sieht leicht, daß derselbe grösser, als die Hälfte von 28829 sey. Deswegen dividirt man mit dem Complement 10541 in den vorigen Divisor; so bleibt der Rest 7747, der abermahl grösser, als die Hälfte des Divisors ist. Die abermahlige Division durch sein Complement 2794 giebt 2159 zum Rest, und sein Complement ist 635.

Die neue Division durch dies Complement läßt 254 zum Rest. Weil dieser Rest kleiner, als die Hälfte vom letzten Divisor 635 ist; so dividirt man mit diesem Rest selbst in den letzten Divisor, und es bleibt zum Rest 127. Dieser ist grade die Hälfte von 254: demnach ist 127 das gesuchte gemeinschaftliche Maaß.

104775 | 3
28829
86487
―――
18288
―――
10541 Compl.

28829 | 2
10541
21082
―――
7747
―――
2794 Compl.

10541 | 3
2794
8382
―――
2159
―――
635 Compl.

2794 | 4
635
2540
―――
254

635 | 2
254
508
―――
127

Wenn

Wenn bey diesem Verfahren zuletzt 1 zum Rest kommt; so ist es ein Beweis, daß die gegebenen Zahlen kein andres gemeinschaftliches Maaß, als die Einheit haben, also Primzahlen unter sich sind. (66 §.)

81 §.

Wenn man zwo Zahlen durch ihr gemeinschaftliches gröstes Maaß dividirt: so sind die Quotienten Primzahlen unter sich.

Beweis. Es sey m das gröste gemeinschaftliche Maaß der Zahlen A und B, und $\frac{A}{m} = Q$, $\frac{B}{m} = q$; so ist $A = Q \times m$ und $B = q \times m$. Wären nun Q und q keine Primzahlen unter sich; so müsten sie noch ein andres gemeines Maaß n haben. Es sey demnach $\frac{Q}{n} = K$ und $\frac{q}{n} = k$; so wäre $Q = K \times n$, und $q = k \times n$, also $A = K \times n \times m$ und $B = k \times n \times m$. Demnach hätten A und B das gemeine Maaß $n \times m$, welches grösser als m ist, wider die Voraussetzung.

82 §.

Wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ einem andern Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ gleich ist, und man multiplicirt den Zähler eines jeden mit dem Nenner des andern; so sind die Producte $a \times \beta$ und $\alpha \times b$, gleich groß.

Beweis. Es ist vermöge des 58 §. $\frac{a \times \beta}{b \times \beta} = \frac{a}{b}$, und $\frac{\alpha \times b}{\beta \times b} = \frac{\alpha}{\beta}$. Nun wird vorausgesetzt, daß $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$ sey: demnach ist auch $\frac{a \times \beta}{b \times \beta} = \frac{\alpha \times b}{\beta \times b}$ (11 §.) Ferner ist $b \times \beta = \beta \times b$, (33 §.) folglich kann man mit diesen gleichen Producten auf beyden Seiten multipliciren, und man erhält $a \times \beta = \alpha \times b$.

Wenn demnach ein Bruch $\frac{a}{b}$ einem andern Bruche $\frac{\alpha}{\beta}$ gleich, und der Nenner des letztern kleiner, eben so groß, oder grösser, als der Nenner des erstern ist; so muß auch der Zähler des letztern im ersten Fall kleiner, im zweyten Fall eben so groß und im dritten Fall grösser, als der Zähler des erstern seyn. Denn es ist vermöge des bewiesenen Satzes $a \times \beta = \alpha \times b$. Wenn also 1.) $\beta < b$ ist, so giebt das $a > \alpha$ (45 §.) oder $\alpha < a$. Wäre 2.) $\beta = b$, so müßte $a = \alpha$ seyn. (44 §.) Wenn dagegen 3.) $\beta > b$ ist, so erhält man $a < \alpha$ (45 §.) oder $\alpha > a$.

83 §.

Wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ einem andern durch grössere Zahlen ausgedrückten Bruch $\frac{A}{B}$ gleich ist; so müssen die Quotienten des grössern Zählers durch den kleinern, und des grössern Nenners durch den kleinern dividirt, gleiche Zahlen seyn.

Und dafern der Bruch $\frac{a}{b}$ nicht mehr durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden kann;

kann; so müssen die Quotienten auch ganze Zahlen seyn.

Beweis I. Weil $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ seyn soll; so folgt aus dem 82 §., daß $A \times b = a \times B$ sey. Man dividire auf beyden Seiten mit dem Product $a \times b = b \times a$; so erhält man $\frac{A \times b}{a \times b} = \frac{a \times B}{a \times b}$, also auch $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$. (58 §.)

II. Wären nun a und b die kleinsten Zahlen, wodurch sich der Bruch $\frac{a}{b}$ ausdrücken läßt, die Quotienten $\frac{A}{a}$ und $\frac{B}{b}$ aber keine ganze Zahlen; so müßte A durch a dividirt einen Rest R, und B durch b dividirt einen Rest r lassen. Wenn demnach Q und q die Theile der Quotienten sind, welche ganze Zahlen werden, so hat man $\frac{A}{a} = Q + \frac{R}{a}$ und $\frac{B}{b} = q + \frac{r}{b}$. Es ist aber $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ vermöge des ersten Satzes; allein so muß $Q + \frac{R}{a} = q + \frac{r}{b}$ seyn. Da nun $\frac{R}{a}$ und $\frac{r}{b}$ eigentliche Brüche sind, weil $R < a$ und $r < b$ ist, so kann die Gleichheit nicht bestehen, dafern nicht $Q = q$ ist. Denn da Q und q ganze Zahlen sind, so ist auch ihre Differenz, wofern sie ungleich sind, eine ganze Zahl. Man setze also, es sey d ihre Differenz und $Q = q + d$: so hat man

$q + d$

$q + d + \frac{R}{a} = q + \frac{r}{b}$, folglich $d + \frac{R}{a} = \frac{r}{b}$.
Aber es ist nothwendig $d > \frac{r}{b}$, also noch um so mehr, $d + \frac{R}{a} > \frac{r}{b}$, welches mit dem vorigen nicht bestehen kann. Demnach muß $d = 0$, oder $Q = q$, und $\frac{R}{a} = \frac{r}{b}$ seyn. Daraus folgt vermöge des ersten Satzes $\frac{R}{r} = \frac{a}{b}$: also liesse sich der Bruch $\frac{a}{b}$ noch durch kleinere Zahlen ausdrücken, welches der Voraussetzung entgegen ist.

Wollte man $Q < q$, und $q = Q + D$ annehmen, so hätte man $Q + \frac{R}{a} = Q + D + \frac{r}{b}$, also $\frac{R}{a} = D + \frac{r}{b}$, welches wiederum nicht möglich ist, weil wenigstens $D = 1$ seyn müste. Also ist man wiederum genöthiget, $D = 0$ anzunehmen, woraus das übrige, wie vorhin folgt.

Diesemnach können keine Reste bleiben, wofern a und b die kleisten Zahlen sind, welche den Bruch $\frac{a}{b}$ ausdrücken können.

84 §.

Einen Bruch $\frac{A}{B}$ ohne seine Grösse zu ändern, durch seine kleinsten Zahlen auszudrücken.

Aufl.

Aufl. Man suche das gröste gemeinschaftliche Maaß des Zählers und Nenners, und dividire beyde mit demselben. Wenn alsdenn a und b die Quotienten sind; so ist $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, (58 §.) und die Zahlen a und b sind die kleinsten ganzen Zahlen; welche einen Bruch von eben dem Werth ausdrücken können.

Beweis. Wenn a und b noch nicht die kleinsten Zahlen sind, die den Bruch $\frac{a}{b}$ ausdrücken können; so setze man, daß α und β diese kleinsten Zahlen sind, so daß $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$ ist. Aber nun muß $\frac{a}{\alpha}$ = einer ganzen Zahl $n = \frac{b}{\beta}$ seyn, (83 §.) und es wäre $a = n\alpha$, $b = n\beta$. Demnach hätten a und b noch ein gemeinschaftliches Maaß n, und wären keine Primzahlen unter sich, welches dem 81 §. entgegen ist.

85 §.

Zwey Brüche, die ungleiche Zähler und ungleiche Nenner haben, können nicht gleich groß seyn, wenn Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche unter sich Primzahlen sind.

Beweis. Derjenige von diesen beyden gleichen Brüchen, der den grössern Nenner hätte, müste auch den grössern Zähler haben, (82 §.) also wäre er noch nicht durch seine kleinsten Zahlen ausgedrückt, und sein Zähler und Nenner könnten nicht unter sich Primzahlen seyn. (84 §.)

86 §.

86 §.

Wenn man zwey oder mehr absolute Primzahlen in einander multiplicirt, und dadurch ein Product zuwege gebracht hat; so kann man durch die Multiplication zweyer oder mehrerer anderer Primzahlen, die insgesammt von den vorigen verschieden sind, nicht eben dasselbe Product zuwege bringen.

Beweis. Man nehme an, daß die Buchstaben $a, b, c, \ldots f, g,$ und α absolute Primzahlen bedeuten, die insgesamt von einander verschieden sind: überdem sey N entweder selbst eine Primzahl, oder ein Product mehrerer von allen vorigen verschiedener Primzahlen in einander. Wäre nun das Product $a \times b = \alpha \times N$, so könnte man mit dem Product $a \times \alpha = \alpha \times a$ auf beyden Seiten dividiren, und es müßte $\frac{a \times b}{a \times \alpha} = \frac{\alpha \times N}{\alpha \times a}$ seyn, also auch $\frac{b}{\alpha} = \frac{N}{a}$. (58 §.) Weil aber a, b, α, absolute Primzahlen sind, so sind Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche unter sich Primzahlen. Demnach können vermöge des 85 §. diese Brüche nur in dem Fall gleich groß seyn, wenn $a = \alpha$ ist, folglich muß $N = b$ seyn, und so ist der Satz für zwey in einander multiplicirte Primzahlen bewiesen.

Man nehme ferner $a.\, b.\, c = \alpha.\, N$ an, und dividire auf beyden Seiten mit $a.\, \alpha = \alpha.\, a$, so erhält man $\frac{b.\, c}{\alpha} = \frac{N}{a}$, welches wiederum nicht angehet, wofern nicht $a = \alpha$, und $N = b.\, c$ ist. Vermöge des vorhin angeführten Beweises aber kann man nun N nicht durch die Multiplication zweer oder mehrerer anderer von b und c verschiedener Primzahlen zuwege bringen, also das Product $a. b. c.$ ebenfalls nicht.

Auf ähnliche Art kann man allgemein beweisen: wofern der Satz für eine gewisse Anzahl von Factoren wahr ist, daß er noch wahr seyn müsse, wenn ein Factor mehr vorhanden ist. Man nehme nemlich an, es sey $b. c \ldots f. g. h = P$, und setze voraus, man könne dies Product nicht zuwege bringen, wenn man andre Primzahlen in einander multiplicirt, die insgesamt von den vorigen verschieden sind. Ferner sey $a . P = \alpha . N$, so kann man auf beyden Seiten mit $a . \alpha = \alpha . a$ dividiren, und man erhält $\frac{P}{\alpha} = \frac{N}{a}$. Dies ist vermöge des 85 §. nur möglich, wenn $a = \alpha$, also auch $N = P = b. c. d. \ldots g. h$ ist, und vermöge der Voraussetzung läßt sich dies Product durch keine andre von den vorigen verschiedene in einander multiplicirte Primzahlen ausdrücken: mithin das Product $a . P = a. b. c. d. \ldots g. h.$, welches einen Factor mehr hat, ebenfalls nicht.

Weil nun der Satz für zweene Factoren richtig ist; so gilt er auch für drey, wie auch besonders erwiesen ist, folglich für vier, also für fünf, u. s. f. für jede Anzahl derselben.

87 §.

Jede Zahl, wofern sie keine Primzahl ist, muß sich in zweene oder mehrere Factoren zerfällen lassen. (65 §.) So lange einer oder der andre dieser Factoren noch keine Primzahl ist, kann er aufs neue in zweene oder mehr Factoren zerfället werden, bis man endlich auf solche Factoren kommt, die insgesamt sammt Primzahlen sind. Demnach ist jede Zahl, wofern sie nicht selbst eine Primzahl ist, aus einer bestimmten Anzahl einfacher Factoren zusammengesetzt. Denn die angenommene Zahl ist selbst von bestimmter Grösse, wenn sie also Factoren hat, und zwar solche, wovon der Voraussetzung gemäß keiner kleiner als 2 ist, so kann dies auch nur eine bestimmte Anzahl seyn: ein Product so vieler Factoren, daß ihre Anzahl grösser wäre, als jede bestimmte Zahl, wäre selbst grösser, als jede Zahl, die sich angeben liesse. Wenn man nun alle Factoren der angenommenen Zahl gefunden hat; so sind diese Factoren um deswillen schon einfache, weil widrigenfalls die Zahl noch mehr Factoren hätte, welches nicht seyn kann.

88 §.

Wenn eine kleinere Zahl in einer grössern aufgehen soll, so muß die kleinere Zahl, falls sie eine Primzahl ist, einer von den einfachen Factoren der grössern Zahl seyn; und wofern die kleinere Zahl selbst aus einfachen Factoren zusammen gesetzt ist, so müssen alle ihre einfachen Factoren unter den Factoren der grössern Zahl vorkommen; widrigenfalls kann die kleinere Zahl in der grössern nicht aufgehen.

Beweis. Es sey die grössere Zahl $A = a.\,b.\,c.\,d.\,..\,g.\,h.$, die kleinere $= \alpha$ eine Primzahl. Wäre nun $\frac{a.\,b.\,c.\,d.\,..\,g.\,h.}{\alpha}$ = einer ganzen Zahl N, so hätte man $a.\,b.\,c.\,d.\,..\,g.\,h. = \alpha.\,N$, welches nicht seyn kann, wofern nicht $\alpha = a$, und $N = b.\,c.\,d.\,..\,g.\,h.$ ist. (86 §.) Wäre die kleinere Zahl

$B = \alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \ldots\ \eta.\ \vartheta.$, so kann aus eben dem Grunde nicht $\frac{a.\ b.\ c.\ d.\ \ldots\ g.\ h.}{\alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \ldots\ \eta.}$ = einer ganzen Zahl N seyn, weil sonst $a.\ b.\ c.\ d.\ \ldots\ g.\ h. = \alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \ldots\ \eta.\ N$ wäre, und das kann nicht seyn, ohne nur in dem Fall $\alpha = a$, und $\beta.\ \gamma.\ \ldots\ \eta\ N = b.\ c.\ d.\ \ldots\ g.\ h.$ Diesemnach muß auch $\beta = b$ seyn, und $\gamma.\ \ldots\ \eta.\ N = c.\ d.\ \ldots\ g.\ h.$; also ferner $\gamma = c$, und jeder folgende Factor des Divisors so groß, als einer von den Factoren des Dividendi.

Dieserwegen können auch zwo oder mehr Zahlen kein gemeinschaftliches Maaß haben, wofern nicht einer oder mehr von den einfachen Factoren, worin sich eine dieser Zahlen zerfällen läßt, unter den Factoren wieder vorkommen, aus welchen sich die übrigen Zahlen durch die Multiplication zusammensetzen lassen. Derjenige einfache Factor, welcher allen Zahlen gemein ist, oder das Product aller gemeinschaftlichen einfachen Factoren, wenn mehr vorhanden sind, ist das gröste gemeinschaftliche Maaß dieser Zahlen.

89 §.

Wenn man die Summe aller einzelnen Ziffern einer Zahl, ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit ihrer Ordnungen mit 3 oder auch mit 9 dividirt; so geht die eine oder die andere dieser Zahlen in der Zahl selbst, welche die Ziffern in ihrer Zusammensetzung ausdrücken, nur alsdenn auf, wenn sie in jener Summe der Ziffern als Einern betrachtet aufgeht.

Beweis. Jedes Glied der Reihe 1, 10, 100 1000, u. s. f. durch 9, also auch durch 3 dividirt,

läßt

läßt 1 zum Rest: folglich läßt jedes Glied der Reihe 2, 20, 200, 2000, u. s. f. durch 9 oder durch 3 dividirt 2 zum Rest. Denn 20 = 10 + 10, und jeder Theil durch 9 oder 3 dividirt läßt 1 zum Rest, also läßt das ganze 2 zum Rest. Wenn sonst eine von den übrigen einfachen Ziffern, die kleiner als 9 sind, eine Reihe Nullen bey sich hat; wie z. E. 700, und man dividirt sie mit 9 so muß ein Rest bleiben, der dieser Zahl selbst als einen schlechten Einer betrachtet gleich ist. Denn es ist 700 = 7 mahl 100, und jedes 100 mit 9 dividirt läßt 1 zum Rest, also muß das ganze 7 zum Rest lassen. Dividirt man hingegen eine Zahl dieser Art mit 3 so geht entweder 3 darin auf, wie in 300, 600; oder es bleibt derselbe Rest, der gefunden würde, wenn nach der Ziffer des Dividendi keine Nullen folgten. Die Zahl 7 mit 3 dividirt läßt 1 zum Rest, also müssen 70, 700, 7000, u. s. f. mit 3 dividirt auch 1 zum Rest lassen. Die Zahl 8 mit 3 dividirt läßt 2 zum Rest, und eben der Rest muß bleiben, wenn man 80, 800, 8000 mit 3 dividirt.

Jede Zahl wie 375 zerfällt von selbst in so viele Theile verschiedener Decimalordnungen, als sie Ziffern hat; es ist nemlich 375 = 300 + 70 + 5. Wenn nun die Zahl 9 in jedem dieser Theile aufgienge; so würde sie auch in der Zahl selbst, als in der Summe aufgehen. (67 §.) Dieser Fall aber kann nur eintreten, wenn jede Ziffer selbst die 9 wäre. Im entgegen gesetzten Fall, wenn einige unter den Ziffern, woraus die Zahl besteht, mit der 9 einerley sind, oder die Ziffer 9 unter denselben gar nicht vorkommt, ist die Summe der Reste einerley mit der Summe derjenigen Ziffern, die von 9 verschieden sind. Wenn also 9 in der Summe dieser Reste aufgeht, so geht 9 auch in der Zahl selbst auf, welche die Ziffern in ihrer Zusammensetzung ausdrucken, widrigenfalls aber nicht. (70 §.)

Die Zahl 3 würde in jedem von den Theilen verschiedener Decimalordnungen aufgehen, worin eine Zahl, die über 10 hinaus geht, von selbst zerfällt, wenn unter den Ziffern, welche die Zahl ausdrücken, keine vorkämen, die von 3, 6 und 9 verschieden wären: in allen andern Fällen ist die Summe der Reste einerley mit der Summe der Ziffern, die von 3, 6, und 9 verschieden sind. Demnach geht die Zahl 3 nur alsdenn in der Zahl selbst auf, welche alle Ziffern in ihrer Zusammensetzung ausdrücken, wenn sie in der Summe dieser Ziffern als Einern betrachtet aufgeht. (70 §.)

90 §.

1.) Jede Zahl, die zur Rechten eine, zwo, drey und mehrere Nullen hat, geht mit 10, 100, 1000, u. s. f. auf; und daraus folgt:

2.) Jede Zahl, die am Ende eine Null hat, ist durch 2 und auch durch 5 theilbar, (72 §.) also ist sie wegen der ersten Ursache eine grade Zahl.

3.) Ferner jede Zahl, die am Ende eine grade Ziffer hat, ist eine grade Zahl; und eine Zahl, die am Ende eine ungrade Ziffer hat, ist selbst ungrade. Denn jene ist die Summe zwoer graden, diese die Summe einer graden und ungraden Zahl; also folgt der Satz aus dem 74 §.

4.) Zahlen, deren Endziffer ungrade ist, können mit keiner graden Zahl theilbar seyn, denn sonst wären sie auch mit 2 theilbar, (72 §.) welches nicht seyn kann, weil sie ungrade sind.

5.) Alle

5.) Alle grade Zahlen, die mit 3 oder 9 dividirt aufgehen, sind auch mit 6 theilbar.

6.) Alle Zahlen, deren Endziffer 5 ist, gehen in 5 auf, vermöge n. 2. und 67 §. Ist die Endziffer einer Zahl von 0 und von 5 verschieden; so geht 5 in der Zahl nicht auf. (68 §.) Also kann in eben der Zahl auch kein Product aufgehen, das den Factor 5 hat.

7.) Wenn eine Zahl die Endziffer 5 hat, und in einer graden Zahl multiplicirt wird; so ist 0 die Endziffer des Products. Denn das Product ist mit 5 theilbar; (n. 6.) also kann nur 0 oder 5 die Endziffer seyn. Eben dies Product ist eine grade Zahl, also hat es zur Endziffer die Null.

8.) Wird eine Zahl von eben der Art mit einer ungraden Zahl multiplicirt, so ist das Product zwar auch mit 5 theilbar, aber eine ungrade Zahl; (74 §.) demnach hat es die Endziffer 5.

9. Alle Zahlen, welche am Ende zwo Nullen haben, sind mit 4 theilbar, weil sie mit 100 theilbar sind. Demnach sind auch solche Zahlen mit 4 theilbar, deren zwo Endziffern in 4 aufgehen: diejenigen aber sind nicht mit 4 theilbar, deren zwo Endziffern mit 4 dividirt nicht aufgehen. Ferner geht eine Zahl, wovon beyde Endziffern Nullen sind, auch mit 25 auf, also gehen nur diejenigen Zahlen mit 25 auf, deren zwo Endziffern, wenn es nicht zwo Nullen sind, mit 25 aufgehen.

10.) Alle Zahlen, die am Ende drey Nullen haben, sind mit 8 und mit 125 theilbar: demnach sind nur solche Zahlen, deren drey Endziffern, wenn es nicht drey Nullen sind, mit 8 oder mit 125 aufgehen, mit eben diesen beyden Zahlen theilbar.

§. 91.

Diese und andere Kennzeichen der Theilbarkeit lassen sich oft vortheilhaft anwenden, um einen Bruch nach und nach auf kleinere Zahlen zu bringen: auch findet man auf diesem Wege zuweilen das größte gemeine Maaß zweyer Zahlen kürzer, als wenn man sich allein an die Regeln des 80 §. hält, wovon das folgende Exempel eine Probe giebt.

$$\frac{6081075}{17775450} \overset{25}{\Big|} \frac{243243}{711018} \overset{9}{\Big|} \frac{27027}{79002} \overset{9}{\Big|} \frac{3003}{8778} \overset{3}{\Big|} \frac{1001}{2926}.$$

Bey dem zuletzt gefundenen Bruch kann man noch die Divisionen mit 7 und mit 11 versuchen. Zwar läßt sich aus der Art, wie die Zahlen aus Ziffern verschiedener Decimalordnungen zusammen gesetzt werden, auch für die Divisoren 7 und 11 ein ähnliches Kennzeichen der Theilbarkeit herleiten: allein die Anwendung dieser Kennzeichen ist weitläuftiger, als wenn man die Divisionen mit 7 oder 11 selbst versucht. Im vorigen Exempel findet man

$$\frac{1001}{2926} \overset{11}{\Big|} \frac{91}{266} \overset{7}{\Big|} \frac{13}{38},$$

und weil 13 schon eine Primzahl ist, so haben beyde gleich anfangs gegebene Zahlen keine andre gemeinschaftliche Factoren, als die bisher gebrauchten, und das Product aller dieser Factoren in einander ist das größte gemeine Maaß beyder Zahlen. (88 §.) In Fällen, wenn man noch zweifelhaft ist, ob die beyden zuletzt herausgebrachten Zahlen schon unter sich Primzahlen sind, versuche man nach den Regeln des 80 §., ob man für sie noch ein gemeines Maaß findet. Man hat solchergestalt wenigstens den Vortheil, daß man diese Regeln auf kleinere Zahlen anwendet, als die anfangs gegebenen waren.

92 §.

Es sind drey oder mehr Zahlen gegeben, man soll ihr gröstes gemeines Maaß suchen.

Aufl. 1. Man versuche zuerst, wieweit sich die Kennzeichen der Theilbarkeit des 89 und 90 §. anwenden lassen, um wenigstens einige Factoren zu finden, die allen gemein sind. Dabey bemerke man, daß die Sache gewöhnlich erleichtert wird, wenn man die Zahlen nach ihrer Grösse ordnet, und die gemeinschaftlichen Theiler der beyden kleinsten auch nach und nach bey den grössern versucht, wie in dem folgenden Exempel, wo 1890, 2835, 3780, die gegebenen Zahlen sind:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} & \underbrace{}_{5} & \underbrace{}_{9} & \underbrace{}_{3} & \underbrace{}_{7} \\ 1890 & 378 & 42 & 14 & 2 \\ 2835 & 567 & 63 & 21 & 3 \\ 3780 & 756 & 84 & 28 & 4 \end{array}$$

Das gesuchte Maaß ist $5 \times 9 \times 3 \times 7 = 945$.

2.) Wenn es noch zweifelhaft bleibt, ob die zuletzt herauskommenden Zahlen schon unter sich Primzahlen sind, oder überhaupt keines von diesen Kennzeichen der Theilbarkeit bey den gegebenen Zahlen seine Anwendung findet; so wende man die Regeln des 80 §. auf folgende Art an. Nachdem man die gegebenen Zahlen A, B, C, D, nach ihrer Grösse geordnet hat, suche man zuerst das gröste Maaß für die beyden kleinsten A und B. Dies Maaß sey M, also $A = M.a$, $B = M.b$, da dann a und b unter sich Primzahlen sind; so können

$$A = Ma,\ B = Mb,\ \text{und}\ C$$

keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, der nicht zugleich in M aufgeht. Denn alle Factoren, welche diese drey Zahlen gemein haben, müssen Factoren von M seyn, (88 §.) weil M das Product der Factoren ist, die A und B gemein haben.

Demnach suche man das gröste gemeine Maaß von M und C: wenn m dies Maaß, und $C = m.c$ ist, so ist m für alle drey Zahlen A, B, C, das gröste gemeine Maaß.

Nun können wiederum
$A = M.a$, $B = M.b$, $C = m.c$, und D keinen gemeinen Divisor haben, wenn derselbe nicht zugleich in m aufgeht, weil alle Factoren, welche diese vier Zahlen gemein haben, Factoren von m seyn müssen: denn m ist das Product aller Factoren, die A, B, C, gemein haben. Diesemnach suche man aufs neue das gröste gemeine Maaß der Zahlen m und D, so ist solches zugleich das gröste gemeine Maaß der vier Zahlen A, B, C, D.

Dies Verfahren läßt sich für so viel Zahlen als man will fortsetzen: hat man für eine gewisse Anzahl derselben das gröste gemeine Maaß schon gefunden, und es kommt noch eine hinzu; so sucht man für diese und das schon gefundene Maaß der übrigen aufs neue das gröste gemeine Maaß, so ist selbiges für alle vorige und die noch hinzugekommene Zahl das gröste gemeine Maaß.

Wenn die Zahlen

598, 2093, 23023, 437437,

gegeben sind, so findet man für die beyden ersten das gröste Maaß 299, und eben dieses Maaß geht auch in der dritten und vierten Zahl auf, also ist 299 für alle vier Zahlen das gröste gemeine Maaß.

Mit

Mit den Zahlen 144, 168, 234, 306, könnte man so umgehen

	2	3
144	72	24
168	84	28
234	117	39
306	153	51

Die letzten vier Zahlen haben kein gemeines Maaß mehr; denn wenn gleich 24 und 28, noch 4 zum gemeinen Maaß haben, so sind doch 4 und 39, so wie 4 und 51 schon unter sich Primzahlen, also ist 6 das gröste gemeine Maaß für alle vier Zahlen.

Der VI. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit Brüchen.

93 §.

Es sind zweene oder auch mehrere Brüche gegeben, deren Nenner verschieden sind; man soll diese Brüche so verändern, daß sie alle gleiche Nenner bekommen, ohne die Grösse der Brüche selbst zu ändern, oder wie man in der Rechenkunst zu reden gewohnt ist: man soll alle auf einerley Benennung bringen.

Aufl. Dieser Aufgabe kann auf mancherley Art ein Genüge geschehen, und es kommt nur darauf an, daß man eine Zahl suche, die sich durch jeden der gegebenen Nenner ohne Rest dividiren läst. Hätte man die beyden Brüche $\frac{7}{12}$ und $\frac{5}{8}$; so läst sich die Zahl 72 sowohl durch 12, als durch 8 theilen. Wenn man nun mit dem Quotienten, welchen die Division

Division der Zahl 72 mit einem jeden der beyden Nenner giebt, auch den zu diesem Nenner gehörigen Zähler multiplicirt; so erhält man statt der vorigen zweene andre ihnen gleiche Brüche, die beyde den Nenner 72 haben. Man findet nemlich $72 : 12 = 6$ und $72 : 8 = 9$; ferner $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 6}{12 \times 6} = \frac{42}{72}$, und $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 9}{8 \times 9} = \frac{45}{72}$. (58 §.) Aber man hätte auch eine kleinere Zahl für den gemeinen Nenner erwählen, und eben das erhalten können, weil beyde Nenner 12 und 8 auch in 24 aufgehen: auch ist es aus den bisher vorgetragenen Lehren von den Brüchen schon bekannt, daß es gewöhnlich am vortheilhaftesten sey, die Brüche durch so kleine Zahlen auszudrücken, als die übrigen Umstände zulassen: deswegen sucht man so kleine Zahlen für die Brüche zu erhalten, als bey gleichen Nennern angehet.

Ohne Zweifel ist in jedem Fall das Product aller Nenner in einander eine solche Zahl, die durch jeden Nenner theilbar ist, wie im vorigen Fall die Zahl $12 \times 8 = 96$ seyn würde. Wenn man also auf jenen Vortheil, den man bey kleinern Zahlen erhält, nicht Rücksicht nehmen wollte; so könnte man in allen Fällen bey zweenen Brüchen das Product beyder Nenner in einander für den gemeinen Nenner behalten, mithin **eines jeden Bruchs Zähler und Nenner mit dem Nenner des andern multipliciren.** Nach dieser Regel erhält man $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 8}{12 \times 8} = \frac{56}{96}$ und $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 12}{8 \times 12} = \frac{60}{96}$, wo beyde neue Brüche den Nenner 96 haben.

Wenn

Wenn aber die beyden Nenner ein gemeines Maaß haben; so kann man allemahl mit einem kleinern Nenner eben das erhalten.

Man schreibe nemlich die Nenner, nachdem man ihr gröstes gemeines Maaß nach dem 80 §. gesucht, bey einander hin, dividire sie mit dem gefundenen Maaß, und schreibe die Quotienten darunter: so wird das Product des gebrauchten Maaßes, und der beyden Quotienten in einander, der gesuchte kleinste gemeine Nenner seyn.

Wenn man nun die neuen Brüche selbst sucht; so ist es am bequemsten, die Rechnung so zu führen. Man schreibt die Brüche unter einander, und macht zur Seite zwo Columnen; oben, über der ersten setzt man den gefundenen gemeinen Nenner, und in dieser Columne neben jeden Bruch den Quotienten seines Nenners in den gemeinen Nenner; in der zweyten Columne schreibt man denn die Producte dieser Quotienten in die Zähler der zugehörigen Brüche: so hat man die neuen Zähler gefunden. Auf die Art sind folgende Exempel berechnet.

					24	
gegebene Nenner	12	8		$\frac{7}{12}$	2	14
gemeines Maaß	4)					
Quot.	3	2		$\frac{5}{8}$	3	15

gemeiner Nenner = 4 × 3 × 2 = 24

* * *

					8	
gegebene Nenner	8	4		$\frac{5}{8}$	1	5
gemeines Maaß	4)					
Quot.	2	1		$\frac{3}{4}$	2	6

gemeiner Nenner = 4 × 2 = 8

gegebe-

					36	
gegebene Nenner	12	9		$\frac{5}{12}$	3	15
gemeines Maaß	3)					
Quot.	4	3		$\frac{2}{9}$	4	8

gemeiner Nenner $= 3 \times 4 \times 3 = 36$.

Man siehet hieraus leicht, daß man das Product beyder Nenner zum gemeinen Nenner behalten müsse, wenn diese Nenner Primzahlen unter sich sind: auch übersiehet man eben so leicht den Grund des ganzen Verfahrens. Denn man nimmt für den gemeinen Nenner ein Product an, worin alle Factoren eines jeden der gegebenen Nenner vorkommen; also muß dies Product durch jeden der beyden Special-Nenner theilbar seyn. Es giebt aber auch keine kleinere Zahl, welche eben die Dienste leisten könnte, weil eine Zahl, die hier brauchbar seyn soll, alle Factoren eines jeden der Special-Nenner enthalten muß. (88 §.)

Es ist nicht schwer, die Anwendung hievon auch auf die Fälle zu machen, wenn mehr als zweene Brüche auf einerley Benennung gebracht werden sollen. Man hat wiederum eine Zahl zu suchen, die durch jeden gegebenen Nenner theilbar ist: wenn diese gefunden ist, so kann man sie zum gemeinen Nenner annehmen, und mit jedem Bruch wie vorhin umgehen. Ob nun gleich das Product aller Nenner in einander jedesmahl eine Zahl von dieser Beschaffenheit ist; so giebt es doch in allen den Fällen auch kleinere mit jedem Nenner theilbare Zahlen, wenn alle Nenner, oder wenigstens einige ein gemeines Maaß haben, da dann folgende Regeln dienen, den kleinsten General-Nenner zu finden:

I. Man

I. Man schreibe die Nenner alle nach einander hin, und wenn sie insgesammt ein gemeines Maaß haben; so dividire man sie damit, und setze die Quotienten darunter. Dafern sie nicht alle ein gemeines Maaß haben; so dividire man mit dem Maaße, so die meisten gemein haben, setze die Quotienten, und zugleich die Zahlen, welche nicht haben dividirt werden können, ungeändert wieder bey einander hin.

II. Mit diesen Quotienten, und ungeänderten Zahlen gehe man wie vorhin um. Man dividire mit dem Maaße, welches die meisten gemein haben, und lasse die Zahlen ungeändert, die sich damit nicht theilen lassen. Die solchergestalt gebrauchten Maaße werden jederzeit bey der Seite bemerket.

III. Wenn man nun auf solche Zahlen gekommen ist, worunter keine weiter ein gemeines Maaß haben; so multiplicire man alle zuletzt herausgebrachten Zahlen, und alle gebrauchten Maaße in einander: das Product wird der gesuchte kleinste General-Nenner seyn. Folgende Exempel werden diese Regeln erläutern:

	63	42	84
21)	3	2	4
2)	3	1	2

	252	
$\frac{13}{63}$	4	52
$\frac{9}{42}$	6	54
$\frac{11}{84}$	3	33

gemeiner Nenner $21 \times 2 \times 3 \times 2 = 252$.

§ 12

	8	12	6	9	5
3)					
	8	4	2	3	5
2)					
	4	2	1	3	5
2)					
	2	1	1	3	5

	360	
$\frac{3}{8}$	45	135
$\frac{7}{12}$	30	210
$\frac{5}{6}$	60	300
$\frac{2}{9}$	40	80
$\frac{4}{5}$	72	288

gemeiner Nenner $= 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 360$.

Die Zahl, welche diesen Regeln gemäß für den gemeinen Nenner angenommen wird, ist wiederum ein Product, worin alle Factoren eines jeden der gegebenen Special-Nenner, aber auch nicht mehr Factoren vorkommen: demnach geht jeder Special-Nenner darin auf, und es giebt keine kleinere Zahl, worin jeder Special-Nenner aufgehen könnte. (88 §.)

Wenn unter den Nennern gar keine vorhanden sind, die ein gemeines Maaß haben; so muß man das Product aller Nenner selbst für den gemeinen Nenner behalten. In diesem Fall also **muß eines jeden Bruchs Zähler und Nenner mit dem Product aller übrigen Nenner multiplicirt werden**, welches die gemeine Regel ist.

Man sehe von dieser Aufgabe von **Clausbergs** demonstrativische Rechenkunst 655-662 §.

94. §.

Es sind zweene oder mehr Brüche gegeben, die ungleiche Nenner haben, man soll alle zusammen addiren.

Aufl. Man bringe sie alle auf einerley Benennung, addire darauf alle Zähler, und behalte den gemeinschaftlichen Nenner; so hat man die Summe. (62 §.)

(62 §.) Giebt dies einen uneigentlichen Bruch; so ist es gemeiniglich am bequemsten, durch die Division des Nenners in den Zähler die darin enthaltene ganze Zahl zu suchen, und den Bruch durch diese ganze Zahl, mit dem überdem darin enthaltenen eigentlichen Bruch auszudrücken. Die eigentlichen Brüche, welche herauskommen, drückt man durch ihre kleinsten Zahlen aus.

Exempel.

	252	
$\frac{13}{63}$	4	52
$\frac{9}{42}$	6	54
$\frac{11}{84}$	3	33

Sum. $\frac{139}{252}$

	360	
$\frac{3}{8}$	45	135
$\frac{7}{12}$	30	210
$\frac{5}{6}$	60	300
$\frac{2}{9}$	40	80
$\frac{4}{5}$	72	288

Sum. $\frac{1013}{360}$

oder $2\frac{293}{360}$

	210	
$\frac{2}{3}$	70	140
$\frac{4}{5}$	42	168
$\frac{6}{7}$	30	180
$\frac{1}{2}$	105	105

Sum. $\frac{593}{210}$

oder $2\frac{173}{210}$

95 §.

Ein eigentlicher Bruch wird zu einer ganzen Zahl selten anders addirt, als dadurch, daß man ihn an der ganzen Zahl unmittelbar anhängt. Will man inzwischen den uneigentlichen Bruch haben, der eine ganze Zahl nebst einem Bruch enthält, der letzte mag nun ein eigentlicher oder uneigentlicher Bruch seyn; so kann man die ganze Zahl als einen Bruch ansehen, dessen Nenner 1 ist. Alsdenn läßt sich dieser Bruch mit dem andern auf einerley Benennung bringen, und die Summe kann nach dem vorigen §. gefunden werden. So wird $3 + \frac{5}{8} = \frac{24}{8} + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}$.

Eine ganze Zahl mit einem daran hängenden eigentlichen Bruch heist auch eine **vermischte Zahl**, wie $3\frac{5}{8}$, und ein uneigentlicher Bruch ist allemahl einer solchen vermischten Zahl gleich, die gefunden wird, wenn man den Zähler des Bruchs durch den Nenner dividirt. (53 §.) Jenes Verfahren stellt den uneigentlichen Bruch wieder her, dessen Zähler das Dividendum, und dessen Nenner der Divisor war. Wie nun die ganze Zahl, welche die Division giebt, mit dem Divisor, oder hier mit dem Nenner, multiplicirt, wenn der Rest dazu addirt wird, das Dividendum herstellen muß, welches hier der Zähler wird; so übersiehet man leicht, wie dies Verfahren mit dem 61 §. zusammenhängt. Practische Schriftsteller nennen es: eine vermischte Zahl **einrichten**, wenn der uneigentliche Bruch verlangt wird, welcher mit der vermischten Zahl einerley Werth hat. Weil derselbe Nenner bleibt, so darf man nur ein für allemahl bemerken, daß der Zähler gefunden wird, **wenn man die ganze Zahl und den Nenner in einander multiplicirt**, zum Product aber den Zähler des eigentlichen Bruchs addirt.

96 §.

Einen kleinern Bruch vom grössern zu subtrahiren, wenn beyde ungleiche Nenner haben.

Aufl. Man bringe beyde auf einerley Benennung, so muß nun des kleinern Bruchs Zähler kleiner seyn, als der Zähler des grössern, und man kann nach der Regel des 63 §. subtrahiren. Wenn Zähler und Nenner des so gefundenen Restes noch ein gemeines

meines Maaß haben, so dividirt man damit, um den Rest durch seine kleinsten Zahlen auszudrücken.

Exempel.

$$\begin{array}{c|c|c} & \overset{24}{\smile} & \\ \frac{5}{8} & 3 & 15 \\ & & \\ \frac{7}{12} & 2 & 14 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\text{Rest } \frac{1}{24}} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} & \overset{36}{\smile} & \\ \frac{5}{12} & 3 & 15 \\ & & \\ \frac{2}{9} & 4 & 8 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\text{Rest } \frac{7}{36}} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} & \overset{12}{\smile} & \\ \frac{11}{12} & 1 & 11 \\ & & \\ \frac{2}{3} & 4 & 8 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\text{Rest } \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.} \end{array}$$

Wenn man einen Bruch von einer ganzen Zahl subtrahiren soll; so siehet man die ganze Zahl wiederum als einen Bruch an, dessen Nenner 1 ist, und verfährt wie vorhin. Z. E. $7 - \frac{8}{5} = \frac{35}{5} - \frac{8}{5} = \frac{27}{5} = 5 + \frac{2}{5}$. Ist es ein eigentlicher Bruch, den man subtrahiren soll; so weiß man, daß derselbe allemahl kleiner als 1 sey. Man darf demnach von der ganzen Zahl nur 1 abrechnen, den Bruch von 1 subtrahiren, und den Ueberschuß zu der um 1 verminderten ganzen Zahl wieder addiren. Z. E. $5 - \frac{7}{9} = 4 + \frac{9}{9} - \frac{7}{9} = 4 + \frac{2}{9}$. Man kann auch dem uneigentlichen Bruch die Form einer vermischten Zahl geben, und die Rechnung auf folgende Art führen.

$$\begin{array}{c} \dot{7} \\ 1\frac{3}{5} \\ \hline 5\frac{2}{5} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \dot{5} \\ \frac{7}{9} \\ \hline 4\frac{2}{9}. \end{array}$$

97 §.

Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.

Aufl. Man muß den Bruch so vielmahl zu sich selbst addiren, als die ganze Zahl anzeiget: (30 §.) also darf man nur den Zähler so vielmahl addiren, und den Nenner behalten. (62 §.) Aber das ist eben so viel, als wenn man den Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt. (30 §.) Folglich ergiebt sich die Regel:

Man multiplicire den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl, und lasse den Nenner ungeändert: so ist der neue Bruch das gesuchte Product.

z. E. $\frac{5}{8} \times 7 = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$
$\frac{7}{9} \times 3 = \frac{21}{9} = 2\frac{1}{3}$

Eine andre Auflösung.

Eben dies Product kann man auch noch auf eine andre Art erhalten. Denn man betrachte zuerst einen Bruch, dessen Zähler 1 ist, z. E. $\frac{1}{16}$; so fällt in die Augen, daß man einen Bruch erhalte, der doppelt so groß als der vorige ist, wenn man den Nenner halbirt, und $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{16}$ nimmt. Eben der Bruch wird viermahl grösser, wenn man den Nenner viermahl kleiner macht, und $\frac{1}{4}$ statt $\frac{1}{16}$ nimmt. Es fällt eben so leicht in die Augen, daß $\frac{1}{2}$ achtmahl grösser, als $\frac{1}{16}$ sey. Ein Bruch von dieser Art wird also mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man seinen Nenner mit der ganzen Zahl dividirt, ohne den Zähler zu ändern. Wenn man nun dabey in Betrachtung ziehet, daß jeder Bruch, dessen Zähler > 1 ist, die Summe so vieler Brüche von jener Art sey, als der Zähler 1 enthält; so folgt daraus, daß diese Art, einen Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren, sich allgemein auf alle Brüche erstrecke. Denn es ist z. E. $\frac{3}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$. Also $\frac{3}{16} \times 4 = (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}) \times 4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (48 §.) $= \frac{3}{4}$. Dies giebt die Regel:

Das Product eines Bruchs durch eine ganze Zahl wird auch gefunden, wenn man den Nenner

Nenner des Bruchs durch die ganze Zahl dividirt, und den Zähler nicht ändert.

Es ist übrigens diese Regel eine Folge der ersten. Wenn nemlich nach der ersten Regel $\frac{3}{16} \times 4 = \frac{3 \times 4}{16}$, so ist nach dem 58 §. auch $\frac{3 \times 4}{16} = \frac{3 \times 4 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{4}$, also $\frac{3}{16} \times 4 = \frac{3}{4}$. Man sieht leicht, daß dies alles nicht auf die bestimmte Grösse der zu Beyspielen gebrauchten Brüche eingeschränkt sey; sondern allemahl seine Richtigkeit habe, was auch für Brüche vorkommen.

Weil man allemahl gerne einen Bruch durch seine kleinsten Zahlen ausdrückt; so ist es vortheilhafter, einen Bruch mit einer ganzen Zahl nach der letzten Regel zu multipliciren, als wenn man es nach der ersten bewerkstelliget, dafern nur der Nenner des Bruchs sich durch die ganze Zahl ohne Rest dividiren läst: wiedrigenfalls würde im Nenner des Products ebenfalls ein Bruch kommen, und das Product ein gebrochener Bruch werden (58 §.) Ob nun gleich Brüche von dieser Art, wenn sie nach der letzten Regel herauskommen, die Aufgabe eben so gut auflösen, wie die regulären Brüche, welche die erste Regel giebt; so vermeidet man sie doch gern in der Ausübung, weil der eigentliche Werth dieser Brüche nicht so unmittelbar in die Angen fällt, wie bey jenen regulären Brüchen.

98 §.

Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren.

Aufl. Wenn zweene Brüche gleiche Nenner und ungleiche Zähler haben; so ist ohne Zweifel der kleinere Bruch halb so groß als der grössere, wenn sein Zähler halb so groß ist, als der Zähler des letzten, und dies nicht allein: der erste wird der dritte, vierte, fünfte Theil, u. s. w. des zweyten seyn, wenn sein Zähler der dritte, vierte, fünfte Theil, u. s. f. von dem Zähler des zweyten ist; oder welches einerley ist, wenn sein Zähler der Quotient ist, den man durch die Division des grössern Zählers mit 3. 4. 5. u. s. f. findet. (42 §.) Dies folgt aus dem 92 §. und giebt die Regel:

Man dividire den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl, und lasse den Nenner ungeändert; so ist der neue Bruch der gesuchte Quotient.

Demnach erhält man $\frac{12}{17} : 3 = \frac{4}{17}$; $\frac{15}{16} : 5 = \frac{3}{16}$; $\frac{7}{4} : 3 = \frac{2\frac{1}{3}}{4}$. Das letzte Exempel ergiebt, daß man nach dieser Regel wiederum einen irregulären Bruch finde, wenn der Zähler durch die ganze Zahl nicht theilbar ist. Aber man kann den Quotienten auch auf eine andre Art erhalten, bey welcher nie irreguläre Brüche vorkommen.

Eine andere Auflösung.

Wenn nemlich der Zähler des Bruchs 1 ist, und man nimmt seinen Nenner doppelt so groß als vorher; so ist der Bruch die Hälfte des vorigen: denn es ist $\frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} : 2$; $\frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} : 2$. Man sieht leicht, daß aus dem Bruch der dritte Theil des vorigen werde, wenn man den Nenner mit 3 multiplicirt,

plicirt, daß also $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} : 3$ sey, und $\frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{12} = \frac{1}{4} : 3$. (45 §.) Man erhält auf die Art allemahl denjenigen aliquoten Theil des Bruchs, den die ganze Zahl anzeigt, und der Bruch wird auf solche Art durch die ganze Zahl dividirt. Aber hieraus folgt die allgemeine Regel:

Man multiplicire den Nenner des gegebenen Bruchs mit der ganzen Zahl, und lasse den Zähler ungeändert; so ist der neue Bruch der gesuchte Quotient.

Denn jeder Bruch ist die Summe so vieler Brüche von eben dem Nenner, mit dem Zähler 1, als in jedem Zähler 1 enthalten ist. So ist $\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, also $\frac{3}{8} : 2 = (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) : 2 = \frac{3}{8 \times 2}$ (46. 92 §.) $= \frac{3}{16}$.

Eben diese Regel ist auch eine Folge der vorigen, vermöge welcher $\frac{3}{8} : 2 = \frac{3 : 2}{8}$ gefunden wird. Aber $\frac{3 : 2}{8} = \frac{3 : 2 \times 2}{8 \times 2}$ (58 §.) $= \frac{3}{8 \times 2}$, also auch $\frac{3}{8} : 2 = \frac{3}{8 \times 2}$. Eben so wird $\frac{7}{4} : 3 = \frac{7}{12}$, $\frac{5}{9} : 4 = \frac{5}{36}$, $\frac{15}{16} : 8 = \frac{15}{128}$.

99 §.

Eine Grösse mit einem **Bruch multipliciren** heist eine andre Grösse finden, worin derjenige aliquote Theil dieser Grösse, welchen der Nenner des Bruchs anzeigt, so vielmahl enthalten ist, als der Zähler des Bruchs **Eins** enthält. Vermöge des Sprachgebrauchs sind nemlich folgende Redensarten einerley. Eine Grösse $\frac{1}{2}$ **mahl nehmen**, oder sie durch 2 theilen, ihre Hälfte nehmen: eine Grösse $\frac{1}{3}$ mahl nehmen, oder sie durch 3 theilen, u. s. f. Weil nun bey ganzen Zahlen die Redensart: eine Grösse n mahl nehmen, so viel heist, als sie mit der ganzen Zahl n multipliciren; so nennt man das auch mit einem Bruch von der Art, wie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, u. s. f. multipliciren, wenn man das Multiplicandum eigentlich mit der ganzen Zahl 3, 4, 5, u. s. f. theilen soll. Eben so bedeutet die Redensart: eine Grösse $\frac{2}{3}$ mahl nehmen, eigentlich dies: man soll ein Drittheil derselben 2 mahl nehmen. Wenn also $\frac{1}{3}$ mahl nehmen eigentlich durch 3 theilen heist; so ist $\frac{2}{3}$ mahl nehmen so viel, als durch 3 theilen, und was heraus kommt, mit 2 multipliciren; und $\frac{5}{8}$ mahl nehmen heist durch 8 theilen, und was heraus kommt, mit 5 multipliciren.

Bey der Multiplication mit einer ganzen Zahl ist 1 im Multiplicator so vielmahl enthalten, als das Multiplicandum im Product, und das Product ist so viel mahl grösser, als das Multiplicandum. Bey der Multiplication mit einem Bruch ist derjenige aliquote Theil der Einheit, welchen des Multiplicators Nenner anzeigt, im Multiplicator so vielmahl enthalten, als ein ähnlicher aliquoter Theil des Multiplicandi im Product; und wenn der Multiplicator ein eigentlicher Bruch ist, so ist das Product kleiner, als das Multiplicandum. Die Bezeichnung bleibt eben so, wie im 31 §; denn dies Verfahren ist eine wahre Multiplication, nicht des Multiplicandi selbst, sondern desjenigen Theils davon, der des Multiplicators Nenner angiebt. Uebrigens sind eben die Redensarten gewöhnlich, wie in dem Fall, wenn der Multiplicator eine ganze Zahl ist;

ist; man kann z. E. sagen: das Multiplicandum sey $\frac{2}{3}$ mahl, $\frac{3}{4}$ mahl, $\frac{7}{8}$ mahl im Product enthalten, wenn einer der Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ der Multiplicator ist. Dies will sagen: des Multiplicandi dritter Theil ist 2 mahl, oder dessen vierter Theil ist 3 mahl, oder desselben achter Theil ist 7 mahl im Product enthalten.

War der Quotient zwoer ganzen Zahlen in einander eine ganze Zahl, so drückte er aus, wie vielmahl der Divisor im Dividendo, enthalten sey. Nun kann man eben so reden, wenn gleich der Quotient ein eigentlicher oder uneigentlicher Bruch ist, der sich nicht auf eine ganze Zahl bringen läßt. So kann man z. E. sagen: 4 sey $\frac{3}{4}$ mahl in 3, und 5 sey $2\frac{2}{5}$ mahl in 12 enthalten; das heißt: in der Zahl 3 ist der vierte Theil von 4 dreymahl, und in der Zahl 12 ist die Zahl 5 zweymahl ganz und überdem noch ihr fünfter Theil zweymahl enthalten.

100 §.

Eine ganze Zahl mit einem Bruch zu multipliciren.

Aufl. Der im vorigen §. erklärte Sinn der Redensart, was es heisse: mit einem Bruch multipliciren, würde auf folgende Regel leiten.

1.) Man dividire die ganze Zahl mit des Bruchs Nenner, und multiplicire, was herauskommt, mit dem Zähler, wie folget.

$$\begin{array}{rr|l} & 18 & 6 \\ 3) & & \\ \times\frac{2}{3} & & 2 \\ \hline \text{Prod.} & & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{rr|l} & 72 & 8 \\ 9) & & \\ \times\frac{8}{9} & & 8 \\ \hline \text{Prod.} & & 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 57 & 7\tfrac{1}{8} \\ 8) & \\ \times\tfrac{7}{8} & 7 \\ \hline \text{Prod.} & 49\tfrac{7}{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & \tfrac{1}{2} \\ 8) & \\ \times\tfrac{5}{8} & 5 \\ \hline \text{Prod.} & \tfrac{5}{2} = 2\tfrac{1}{2} \end{array}$$

Die Anwendung dieser Regel ist allemahl am vortheilhaftesten, wenn die Division aufgeht. Sonst kann man auch die Ordnung der beyden Operationen umkehren nach der folgenden Regel.

II. Man multiplicire die ganze Zahl mit des Bruchs Zähler, und dividire das Product durch den Nenner; so ist das gesuchte Product gefunden.

Beweis. Nach der ersten Regel wäre überhaupt $A \times \frac{n}{m} = \frac{A}{m} \times n$, und es ist $\frac{A}{m} \times n = \frac{A \times n}{m}$, (97 §.) also auch $A \times \frac{n}{m} = \frac{A \times n}{m}$.

Exempel.

$$\begin{array}{r|l} 57 & \\ \times\tfrac{7}{8} & \text{Prod.} \\ \hline 399 & 49\tfrac{7}{8} \\ 8) & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & \\ \times\tfrac{5}{8} & \text{Prod.} \\ \hline 20 & 2\tfrac{1}{2} \\ 8) & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 237 & \\ \times\tfrac{12}{13} & \\ \hline 474 & \\ 237 & \\ \hline & \text{Prod.} \\ 2844 & 218\tfrac{10}{13} \\ 13) & \end{array}$$

Der Vortheil, wenn man in Fällen dieser Art nach der zweyten Regel rechnet, bestehet darin, daß kein Bruch zum Vorschein kommt, bevor die Rechnung ganz zu Ende gebracht ist.

101 §.

Eine ganze Zahl und ein Bruch geben einerley Product, wenn man jene mit diesem, oder diesen mit jener multiplicirt.

Beweis.

Beweis. Es ist $4 \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{3}$ (100 §.) $= \frac{2 \times 4}{3}$ (33 §.) und $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{2 \times 4}{3}$. (97 §.) Also $4 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 4$ (11 §. Der Beweis ist an die Grösse der gebrauchten Zahlen nicht gebunden, also allgemein.

102 §.

Gleiche Grössen durch gleiche Brüche multiplicirt geben gleiche Producte.

Bey gleichen Multiplicandis giebt der grössere Bruch ein grösseres Product, als der kleinere.

Das grössere Multiplicandum mit einem grössern Bruch multiplicirt, giebt ein grösseres Product, als wenn man das kleinere mit dem kleinern Bruch multiplicirt.

Beweis. Wenn die Multiplicatores nicht Brüche von gleicher Benennung sind; so bringe man sie auf gleiche Nenner. (93 §.) Nun werden gleiche Multiplicatores auch gleiche Zähler, der grössere aber wird einen grössern Zähler haben, als der kleinere, und denn folgen obige Sätze aus dem 97. 44. 32. und 35 §.

103 §.

Eine Grösse mit einem Bruch dividiren heist eine neue Grösse suchen, wovon derjenige aliquote Theil, welchen des Divisors Nenner anzeigt, im Dividendo so vielmahl enthalten ist, als der Zähler des Divisors **Eins** enthält. Soll man die Zahl 24 mit $\frac{3}{4}$ dividiren; so soll eine Zahl gefunden werden, wovon der vierte Theil 3 mahl in 24 enthalten ist. Wenn also 24 mit 3 dividirt, und die Zahl 8 gefunden wird; so hat man noch nicht den gesuchten Quotienten, sondern allererst den vierten Theil desselben, mithin muß die so gefundene Zahl 8 noch mit 4 multiplicirt werden, so erhält man die Zahl 32, wovon der vierte Theil 3 mahl in 24 enthalten ist.

104 §.

Die Division mit einem Bruch ist der Multiplication mit demselben Bruch eben so entgegen gesetzt, wie in dem Fall, wenn eine Grösse mit einer und eben derselben ganzen Zahl beydes zugleich multiplicirt und wieder dividirt wird, diese Rechnungsarten einander aufheben. (43 §.) Derjenige Theil des Quotienten, welchen des Divisors Nenner anzeigt, muß im Dividendo so vielmahl enthalten seyn, als in des Divisors Zähler Eins enthalten ist; das heist, **der Quotient mit dem Divisor multiplicirt, muß das Dividendum herstellen,** auch wenn der Divisor ein Bruch ist.

Ferner: hat man mit einem Bruch multiplicirt, so ist derjenige Theil des Multiplicandi, welchen des Multiplicators Nenner anzeigt, im Product so vielmahl enthalten, als **Eins** im Zähler des Multiplicators enthalten ist. Wird also das Product mit dem Zähler des Multiplicators dividirt; so hat man denjenigen Theil des Multiplicandi, welchen des Multiplicators Nenner anzeigt: und wenn derselbe mit diesem Nenner multiplicirt wird; so ist das Multiplicandum hergestellt: das heist, **das Product mit dem Multiplicator dividirt muß das Multiplicandum herstellen,** auch wenn der Multiplicator ein Bruch ist.

105 §.

105 §.

Eine ganze Zahl mit einem Bruch zu dividiren.

Aufl. I. Man dividire die ganze Zahl mit dem Zähler des Divisors, und multiplicire, was heraus kommt mit dem Nenner desselben. (103 §.)

$$\begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \frac{2}{3}) & 3 \\ \hline \text{Quot. } 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 9 \\ \frac{3}{4}) & 4 \\ \hline \text{Quot. } 36 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 1\frac{2}{3} \\ \frac{3}{7}) & 7 \\ \hline & 4\frac{2}{3} \\ & 7 \\ \hline \text{Quot. } 11\frac{2}{3} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 29 & 5\frac{4}{5} \\ \frac{5}{8}) & 8 \\ \hline & 6\frac{2}{5} \\ & 40 \\ \hline \text{Quot. } 46\frac{2}{5} & \end{array}$$

Wenn die Division nicht aufgeht, wie in den beyden letzten Exempeln, so ist es vortheilhafter, daß man die Ordnung der beyden Operationen umkehre.

II. Man multiplicire nemlich zuerst die ganze Zahl mit des Bruchs Nenner, und dividire, was herauskommt, mit des Bruchs Zähler; so ist der gesuchte Quotient gefunden.

Beweis. Nach der ersten Regel ist $A : \frac{n}{m} = \frac{A}{n} \times m$, und $\frac{A}{n} \times m = \frac{A \times m}{n}$, (97 §.) also auch $A : \frac{n}{m} = \frac{A \times m}{n}$.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \frac{3}{7} \\ \hline 35 \,| \\ 3) \,|\, 11\frac{2}{3} \text{ Quot.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 29 \\ \frac{5}{8}) \\ \hline 232 \,| \\ 5 \,|\, 46\frac{2}{5} \end{array}$$

106 §.

106 §.

Eine ganze Zahl mit einem Bruch dividiren, heist auch, eine Zahl suchen, welche ausdrückt, wie vielmahl der Divisor im Dividendo enthalten sey. Wie vielmahl ein Bruch, wie $\frac{3}{4}$ in einer ganzen Zahl 27 enthalten sey, übersiehet man leicht, wenn man die ganze Zahl in einen Bruch von eben dem Nenner verwandelt, und so frägt: wie vielmahl ist $\frac{3}{4}$ in $\frac{108}{4}$ enthalten? Die Antwort ist $\frac{108}{3}$ mahl oder 36 mahl. Also weiß man, daß 36 mahl $\frac{3}{4}$, oder $\frac{3}{4}$ mahl 36 (101 §.) die Zahl 27 giebt: mithin muß 36 der Quotient seyn.

107 §.

Gleiche Grössen durch gleiche Brüche dividirt geben gleiche Quotienten, und das grössere Dividendum giebt einen grössern Quotienten als das kleinere, bey gleichen Divisoren. Bey gleichen Dividendis aber giebt der grössere gebrochene Divisor einen kleinern, und der kleinere einen grössern Quotienten.

Beweis. Wenn die Brüche auf gleiche Benennung gebracht sind; so folgt alles leicht aus dem 103. 44. 45. 32. §.

108 §.

Einen Bruch mit einem andern Bruch zu multipliciren.

Auflösung.

Man muß das Multiplicandum mit dem Nenner des gebrochenen Multiplicators dividiren, und was herauskommt, mit dem Zähler desselben multipliciren (99 §.). Man dividire also das Multiplicandum nach der ersten Regel des 98 §., und multiplicire,

cire, was herauskommt, nach der zweyten Regel des 97 §. Das heißt:

I. Man dividire kreuzweise des Multiplicandi Zähler mit des Multiplicators Nenner, und jenes Nenner durch dieses Zähler: so ist der erste Quotient der Zähler, und der zweyte Quotient der Nenner des gesuchten Products z. E.

$$\begin{array}{r} 3)\ 27 \\ 2)\ 28 \\ \times \frac{2}{3} \\ \hline \text{Prod. } \frac{9}{14} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8)\ 32 \\ 7)\ 35 \\ \times \frac{7}{8} \\ \hline \text{Prod. } \frac{4}{5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5)\ 15 \\ 2)\ 16 \\ \times \frac{2}{5} \\ \hline \text{Prod. } \frac{3}{8} \end{array}$$

Wenn die Divisionen nicht aufgehen, so giebt dies Verfahren einen gebrochenen Bruch, der allemal mit Beobachtung folgender Regeln vermieden werden kann.

II. Wenn die Division des Zählers zwar aufgeht, aber die Division des Nenners nicht aufgehen würde; so behalte man diesen Nenner: multiplicire aber, was nach der Division des Zählers herauskommt, mit des Multiplicators Zähler, wie in den nachstehenden Exempeln geschehen ist.

$$8)\ \frac{32}{37} \times \frac{7}{8} \quad \begin{array}{|r} 4 \\ 7 \\ \hline 28 \end{array} \qquad \text{Prod. } \frac{28}{37} \qquad\qquad 4)\ \frac{28}{29} \times \frac{3}{4} \quad \begin{array}{|r} 7 \\ 3 \\ \hline 21 \end{array} \qquad \text{Prod. } \frac{21}{29}$$

Beweis. Man dividirt $\frac{28}{29}$ mit 4, wenn man den Zähler damit dividirt, und $\frac{28:4}{29}$ erhält. (98 §. 1. Aufl.) Den so gefundenen Bruch multiplicirt man mit 3, wenn man seinen Zähler mit 3 multiplicirt,

plicirt, also $\frac{28:4 \times 3}{29}$ erhält, (97 §. 1. Aufl.) und dies ist das gesuchte Product. (99 §.)

III. Würde die Division des Zählers nicht, wohl aber die Division des Nenners aufgehen; so behalte man den Zähler unverändert: multiplicire aber, was nach der Division des Nenners herauskommt, mit des Multiplicators Nenner, wie in folgenden Exempeln.

$$\begin{array}{r|l} 7)\ \frac{33}{35} & 5 \\ \times \frac{7}{8} & 8 \\ \hline \text{Prod. } \frac{33}{40} & 40 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9)\ \frac{56}{81} & 9 \\ \times \frac{9}{13} & 13 \\ \hline \text{Prod. } \frac{56}{117} & 117 \end{array}$$

Beweis. Man dividirt $\frac{33}{35}$ mit dem Nenner des Bruchs $\frac{7}{8}$, wenn man den Nenner des ersten mit 8 multiplicirt, und $\frac{33}{35 \times 8}$ erhält. (98 §. 2. Aufl.) Den so gefundenen Bruch multiplicirt man mit 7, wenn man seinen Nenner mit 7 dividirt, also $\frac{33}{35 \times 8 : 7}$ erhält, (97 §. 2. Aufl.) und dies ist das gesuchte Product. (99 §.) Ferner ist $35 \times 8 : 7 = \frac{35 \times 8}{7} = \frac{35}{7} \times 8$ (97 §. 1 Aufl.) also wird mit Beybehaltung des Zählers der Nenner richtig gefunden.

IV. Wenn keine von beyden Divisionen aufgeht; so multiplicire man beyde Zähler und beyde Nenner in einander: jenes Product ist alsdenn der Zähler, und dieses der Nenner des gesuchten Bruchs.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \hline 28 \\ \times\frac{5}{9} \\ \hline \text{Prod.}\ \frac{115}{252} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 137 & \\ \hline 259 & \\ \times\frac{23}{24} & \\ \hline 411 & 1036 \\ 274 & 518 \\ \hline \text{Prod.}\ \frac{3151}{6216} & 6216 \end{array}$$

Beweis. Der Bruch $\frac{23}{28}$ wird mit 9 dividirt, wenn man seinen Nenner multiplicirt, und $\frac{23}{28 \times 9}$ erhält. (98 §. 2 Aufl.) Der so gefundene Bruch wird mit 5 multiplicirt, wenn man seinen Zähler multiplicirt, und $\frac{23 \times 5}{28 \times 9}$ erhält, (97 §. 1. Aufl.) und das ist das gesuchte Product. (99 §.)

109 §.

Zweene Brüche geben mit veränderten Ordnung der Factoren einerley Product.

Beweis. Es ist $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}$, und $\frac{C}{D} \times \frac{A}{B} = \frac{C \times A}{D \times B}$; (108 §.) überdem aber $A \times C = C \times A$, und $B \times D = D \times B$, wenn die Buchstaben ganze Zahlen bedeuten: (33 §.) also $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \times \frac{A}{B}$.

Ein Product so vieler Factoren, als man will, es mögen ganze oder gebrochene Zahlen, oder beyde Arten durch einander seyn, ändert sich also nicht, wenn man die Ordnung der Factoren ändert.

116 §.

Einen Bruch mit einem andern zu dividiren.

Aufl. Man muß das Dividendum mit des Divisors Zähler dividiren, und was herauskommt, mit dem Nenner des Divisors multipliciren. (103 §.) Demnach dividire man mit des Divisors Zähler nach der ersten Regel des 98 §., und multiplicire, was herauskommt, mit des Divisors Nenner nach der zweyten Regel des 97 §. Das heißt:

I.) Man dividire gradezu des Dividendi Zähler mit des Divisors Zähler, und des Dividendi Nenner mit des Divisors Nenner; so giebt die erste Division den Zähler, und die zweyte den Nenner des gesuchten Quotienten.

$$\begin{array}{rc|l} 3) & 21 & \\ & \overline{} & \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \text{ Quot.} \\ 8) & 32 & \\ & \frac{3}{8}) & \end{array} \qquad \begin{array}{rc|l} 5) & 95 & \\ & \overline{} & \frac{19}{16} = 1\frac{3}{16} \text{ Quot.} \\ 6) & 96 & \\ & \frac{5}{6}) & \end{array}$$

Wenn die Divisionen nicht aufgehen, so giebt dies Verfahren wiederum einen gebrochnen Bruch, den man mit Beobachtung folgender Regeln vermeidet.

II. Wenn zwar die Division des Zählers aber nicht die Division des Nenners aufgeht; so behalte man diesen Nenner: multiplicire aber, was nach der Division des Zählers herauskommt, mit des Divisors Nenner.

$$\begin{array}{rc|l} 4) & \frac{12}{17} & 3 \\ & & \underline{9} \\ & \frac{4}{9}) & \frac{27}{17} = 1\frac{10}{17} \text{ Quot.} \end{array} \qquad \begin{array}{rc|l} 9) & \frac{27}{38} & 3 \\ & & \underline{13} \\ & \frac{9}{13} & \frac{39}{38} \text{ Quot.} \end{array}$$

Beweis

Beweis. Man dividirt $\frac{12}{17}$ mit 4, wenn man den Zähler mit 4 dividirt, und $\frac{12:4}{17}$ erhält. (98 §. 1. Aufl.) Den so gefundenen Bruch multiplicirt man mit 9, wenn man seinen Zähler damit multiplicirt, (97 §. 1. Aufl.) und $\frac{12:4 \times 9}{17}$ erhält; also ist der Quotient $\frac{12}{17} : \frac{4}{9}$ richtig gefunden. (103 §.)

III. Wenn dagegen die Division des Zählers einen Rest lassen würde, die Division des Nenners aber aufgeht, so behalte man den Zähler, und multiplicire, was nach der Division des Nenners herauskommt, mit des Divisors Zähler.

8) $\frac{17}{24}$ | Quot.
$\frac{5}{8}$) | $\frac{17}{15} = 1\frac{2}{15}$.
3
×5
15

12) $\frac{25}{36}$ | Quot.
$\frac{7}{12}$) | $\frac{25}{21} = 1\frac{4}{21}$.
3
7
21

Beweis. Man dividirt $\frac{17}{24}$ mit 5, wenn man den Nenner damit multiplicirt, und $\frac{17}{24 \times 5}$ erhält. (98 §. 2 Aufl.) Den so gefundenen Bruch multiplicirt man mit 8, wenn man den Nenner damit dividirt, und $\frac{17}{24 \times 5 : 8}$ erhält. (97 §. 2 Aufl.) Ferner ist $24 \times 5 : 8 = \frac{24 \times 5}{8} = \frac{24}{8} \times 5$, (97 §. 1. Aufl.) also ist der Quotient $\frac{17}{24} : \frac{5}{8}$ richtig gefunden. (103 §.)

IV. Wenn keine von beyden Divisionen aufgeht; so multiplicire man kreuzweise des Dividendi Zähler mit des Divisors Nenner, und des Dividendi Nenner mit des Divisors Zähler: jenes Product giebt den Zähler und dieses den Nenner des gesuchten Quotienten.

$\frac{3}{4}$ | Quot.
$\frac{2}{9}) | \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}.$

$\frac{11}{12}$ | Quot.
$\frac{6}{7}) | \frac{77}{72} = 1\frac{5}{72}.$

Beweis. Der Bruch $\frac{3}{4}$ wird mit 2 dividirt, wenn man seinen Nenner damit multiplicirt, und $\frac{3}{4 \times 2}$ erhält. (98 §. 2. Aufl.) Der so gefundene Bruch wird mit 9 multiplicirt, wenn man damit seinen Zähler multiplicirt, und $\frac{3 \times 9}{4 \times 2}$ erhält. (97 §. 1 Aufl.) Demnach ist der Quotient $\frac{3}{4} : \frac{2}{9}$ richtig gefunden. (103 §.)

111 §.

Einen Bruch mit einem Bruch dividiren heist auch, eine Zahl suchen, welche ausdrückt, wie vielmahl der Divisor im Dividendo enthalten sey. Die Antwore auf die Frage: wie vielmahl ist $\frac{2}{9}$ in $\frac{3}{4}$ enthalten? findet man leicht, wenn man beyde Brüche auf gleiche Benennung bringt, und so frägt: wie vielmahl ist $\frac{8}{36}$ in $\frac{27}{36}$ enthalten? Die Antwort ist $\frac{27}{8}$ mahl. Also weiß man, daß $\frac{27}{8}$ macht $\frac{2}{9}$ oder $\frac{2}{9}$ mahl $\frac{27}{8}$ (109 §.) die Zahl $\frac{3}{4}$ giebt das heist der 9te Theil von $\frac{27}{8}$ **zweymahl** genommen giebt $\frac{3}{4}$: mithin ist $\frac{27}{8}$ mit dem Quotienten $\frac{3}{4} : \frac{2}{9}$ einerley. (103 §.)

Man kann also überhaupt sagen, eine Zahl mit einer andern **dividiren** heisse **untersuchen**, wie viel-

vielmahl die letzte in der ersten enthalten sey. (47. 103 §.)

112 §.

Wenn Zähler und Nenner eines Bruchs durch einen und eben denselben andern Bruch multiplicirt oder dividirt werden; so ändert dies die Grösse des Bruchs nicht.

Beweis. Vermöge der II. Aufl. im 107 §. ist $\frac{28}{29} \times \frac{3}{4} = \frac{28:4 \times 3}{29} = \frac{28 \times \frac{3}{4}}{29}$; und vermöge der 3ten Aufl. im 110 §. ist $\frac{28}{29} : \frac{3}{4} = \frac{28}{29 : 4 \times 3} = \frac{28}{29 \times \frac{3}{4}}$. Multiplicirt man also Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerley neuen Bruch; so wird dadurch der Bruch selbst mit dem neuen Bruch beydes zugleich multiplicirt, und wieder dividirt, mithin bleibt sein Werth ungeändert. (103 §.)

Ferner vermöge der II. Aufl. im 110 §. ist $\frac{12}{17} : \frac{4}{9} = \frac{12 : 4 \times 9}{17} = \frac{12 : \frac{4}{9}}{17}$, und vermöge der 3ten Aufl. im 107 ist $\frac{12}{17} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{17 : 4 \times 9} = \frac{12}{17 : \frac{4}{9}}$. Dividirt man also Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerley neuen Bruch; so wird dadurch der Bruch selbst mit dem neuen Bruch beydes zugleich dividirt und wieder multiplicirt, mithin bleibt sein Werth ebenfalls ungeändert. (103 §.)

113 §.

Ein irregulärer, oder gebrochner Bruch von dieser Art $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}}$, ist mit dem Quotienten

$\frac{5}{8} : \frac{3}{7}$ einerley, und umgekehrt, der Quotient mit dem Bruch.

Beweis. Denn $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}} = \dfrac{5:8}{3:7}$ (52 §.) und $\frac{5}{8} : \frac{3}{7} = \dfrac{5 \times 7}{8 \times 3} = \dfrac{5 \times 7}{3 \times 8}$ (33 §.) $= \frac{5}{3} : \frac{8}{7} = \dfrac{5:8}{3:7}$ (110 §.); also $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}} = \frac{5}{8} : \frac{3}{7}$ (11 §.)

114 §.

Die Sätze des 37 und 46 §. sind ganz allgemein, und finden ihre Anwendung, wenn gleich der Multiplicator oder Divisor Brüche sind. Denn es ist $(A + B) \times \frac{n}{m} = \frac{(A + B) \times n}{m} = \frac{n \,.\, A + n B}{m}$, (37 §.) also auch $(A + B) \times \frac{n}{m} = \frac{n}{m} A + \frac{n}{m} B$ (46 §.) Ferner ist $(A + B) : \frac{n}{m} = \frac{(A + B) \times m)}{n}$ (103 §.) $= \frac{m}{n} A + \frac{m}{n} B$, also $(A + B) : \frac{n}{m} = A : \frac{n}{m} + B : \frac{n}{m}$. Diesemnach ist allemahl $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$, und $(A + B) : C = A : C + B : C$, man mag durch C eine ganze Zahl oder einen Bruch verstehen. Die Buchstaben A und B können eine noch allgemeinere Bedeutung haben, und jede zwo gleichartige Grössen, welche man will, bezeichnen.

Wenn demnach im folgenden allgemeine Ausdrücke dieser Art vorkommen: $(A - B) \times C$, oder $(A - B) : C$; so hat man auch $(A - B) \times C = A \times C$

$- B$

$- B \times C$, und $(A - B) : C = A : C - B : C$. Denn es sey $A - B = D$, so ist $A = B + D$, mithin $A \times C = B \times C + D \times C$, und $A \times C - B \times C = D \times C$. Weil nun $D = A - B$ war, so ist $A \times C - B \times C = (A - B) \times C$. Ferner ist $A : C = B : C + D : C$, also $A : C - B : C = D : C$ oder $A : C - B : C = (A - B) : C$.

115 §.

Aus dem bisherigen ist nun leicht abzunehmen, wie man die Regeln der vier Rechnungsarten anzuwenden habe, wenn unter den gegebenen Zahlen vermischte vorkommen, die aus ganzen Zahlen mit angehängten Brüchen bestehen. Man kann solche Zahlen nach dem 95 §. auf uneigentliche Brüche bringen, und mit ihnen in der Rechnung sodann nach den Regeln der Bruchrechnung umgehen. Aber dies Verfahren ist nicht allemahl das kürzeste.

Beym addiren ist es gemeiniglich am bequemsten, wenn man zuerst die angehängten Brüche summirt, die Summe, dafern ein uneigentlicher Bruch herauskommt, auf die darin enthaltne ganze Zahl bringt, und den übrig bleibenden Bruch unter der Columne der Brüche schreibt, hierauf aber die herausgebrachte ganze Zahl mit zu den ganzen Zahlen summirt.

Exempel.

	72	
$7\frac{7}{8}$	9	63
$5\frac{2}{3}$	24	48
$3\frac{7}{9}$	8	56
Sum. $17\frac{23}{72}$		167
		72)
		144
		23

$$\begin{array}{r} 8 \quad 3 \quad 9 \\ 3) \overline{} \\ 8 \quad 1 \quad 3 \end{array}$$

(gem. Nen. 3. 8. 3 = 27.)

Auch beym Subtrahiren kann man zuerst die Rechnung mit den angehängten Brüchen vornehmen, und sodann zu den ganzen Zahlen fortgehen. Wenn hier die Zahl, welche man subtrahiren muß, einen grössern Bruch bey sich hat, als die, wovon man sie subtrahiren soll: so darf man nur von der ganzen Zahl Eins borgen, und dagegen zu dem anhängenden Bruch Eins zurechnen, wodurch denn die ganze Zahl um 1 vermindert wird. Z. E.

$$\begin{array}{rl} & 27\tfrac{3}{8} \\ & 15\tfrac{7}{8} \\ \hline \text{Rest} & 11\tfrac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|r} & \overset{96}{\smile} & \\ 136\tfrac{1}{2}\tfrac{7}{4} & 4 & 68 \\ 95\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{2} & 3 & 63 \\ \hline 41\tfrac{5}{96} & & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & 24 & 32 \\ 8) & & \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

geg. N. 8 . 3 . 4 . = 96

Wenn bey der Multiplication an den Factoren Brüche hängen, so kann man jeden Theil des einen Factors mit jedem Theil des andern multipliciren, und zuletzt diese Producte addiren. (114 §.) Oder man kann auch beyde Factoren zuerst auf uneigentliche Brüche bringen, wie man es am bequemsten findet. Z. E.

$$\begin{array}{rl|r|r} 8 & \tfrac{5}{8} & & \\ 7 & \tfrac{2}{3} & \overset{24}{\smile} & \\ \hline & \tfrac{5}{12} & 2 & 10 \\ 5 & \tfrac{1}{3} & 8 & 8 \\ 4 & \tfrac{3}{8} & 3 & 9 \\ 56 & & & \\ \hline 66 & \tfrac{1}{8} & & 27 \\ & & & \underline{24} \\ & & & 3 \end{array} \quad 1\tfrac{3}{24}\,\Big|\,\tfrac{1}{8}.$$

$$\begin{array}{rrrr} & 12 & 8 & 3 \\ 4) & & & \\ \hline & 3 & 2 & 3 \\ 3) & & & \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

gegeb. Nenner 4 . 3 . 2 = 24.

Man

Man kann auch so rechnen.

Es ist $8\frac{5}{8} \times 7\frac{2}{3} = \frac{69}{8} \times \frac{23}{3}$.

$$\begin{array}{r} 69 \\ 23 \\ \hline 207 \\ 138 \\ \hline 1587 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ 3 \\ \hline 24 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1587 & 66\frac{1}{8}\ \text{Prob.} \\ 24. & \\ 144. & \\ \hline 147 & \\ 24 & \\ 144 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Wenn der Divisor eine ganze Zahl ohne Bruch, und das Dividendum eine vermischte Zahl ist; so ist es vortheilhaft, jeden Theil der vermischten Zahl für sich zu dividiren, wenn der Divisor in dem ersten Theil des Dividendi, so weit es eine ganze Zahl ist, aufgehet. Z. E.

$$\begin{array}{r|l} 256\frac{7}{9} & 32\frac{7}{72}. \\ 8) & \end{array}$$

In andern Fällen kann man das Dividendum auf einen uneigentlichen Bruch bringen, oder auch theilweise rechnen, wie man es bequem findet. z. E.

$$\begin{array}{r|r|r|r} & & 56 & \\ 729\frac{5}{8} & 104\frac{1}{7} & 8 & 8 \\ 7) & \frac{5}{56} & 1 & 5 \\ \hline \text{Quot.} & 104\frac{13}{56} & & 13 \end{array}$$

oder auch so:

$$729\frac{5}{8} = \frac{5837}{8} \Big| \frac{\overset{2}{5837}}{56)} \Big| 104\frac{13}{56}.$$
$$7)$$

Wenn dagegen der Divisor eine vermischte Zahl ist; so muß man ihn allemahl auf einen uneigentlichen Bruch bringen, und da ist es gemeiniglich am kürzesten, wenn man auch das Dividendum auf einen uneigentlichen Bruch bringet, besonders wenn die angehängten Brüche schon einerley Benennung haben, worauf man sie auch jedesmahl leicht bringen kann. Z. E.

$48\frac{2}{3} : 6\frac{4}{5} = \frac{146}{3} : \frac{34}{5}$

$$\begin{array}{r} 146 \\ 5 \\ \hline 730 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34 \\ 3 \\ \hline 102 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 730 & 7\frac{8}{51} \\ 102 & \text{Quot.} \\ 714 & \\ \hline 16 & \end{array}$$

Der VII. Abschnitt.

Von den Decimal-Brüchen insbesondere.

116 §.

Ein uneigentlicher Bruch von dieser Art $\frac{583268957}{100000}$ läst sich ohne weitläuftige Rechnung auf folgende Art in die darin enthaltene ganze und ächte gebrochne Zahl auflösen. Man darf nur erwägen, daß dieser Ausdruck eben so viel sey, als $\frac{583200000}{100000} + \frac{68957}{100000}$; so hat man $5832\ \frac{68957}{100000}$. Die Regel würde diese seyn.

Man zertheile den Zähler in zwey Stücke, so daß das niedrigste Stück so viele Ziffern bekommt, als im Nenner Nullen sind; so wird dies letztere Stück der Zähler des anzuhängenden Bruchs von eben dem Nenner, das andre Stück aber die ganze Zahl seyn, die nebst dem vorigen wahren Bruch in dem uneigentlichen enthalten ist.

Man

Man pflegte daher in den gewöhnlichen Rechenbüchern wohl die Regel zu geben: man solle so viele Ziffern des Dividendi, als der Divisor Nullen hat, durch einen Strich, etwa auf die Art 5832|68957, rechter Hand abschneiden; so sey die Division geschehen. Man hat alsdenn nicht nöthig, den Bruch $\frac{68957}{100000}$ besonders hinzuschreiben, da man ohnehin weis, daß die abgeschnittene Zahl sein Zähler, und die Einheit mit so vielen Nullen, als man Ziffern abgeschnitten hat, sein Nenner werde.

Diese Art der Bezeichnung behält man mit vieler Bequemlichkeit in der Mathematik bey, nur daß man statt des Strichs hier ein Comma (,) oder einen Punkt (.) braucht, und auf folgende Art 5832,68957 den anhängenden Bruch von der voranstehenden ganzen Zahl unterscheidet. Ob zwar der Punkt auch gebraucht wird, die Multiplication zu bezeichnen; so ist doch daher keine Verwirrung zu besorgen, wenn man bey Zahlen, woran dergleichen Brüche hängen, die Multiplication nie anders, als mit dem Zeichen $\times$ andeutet.

117 §.

Auf solche Art hat man nie nöthig, den Nenner eines an einer ganzen Zahl hängenden eigentlichen Bruchs ausdrücklich hinzuschreiben, wenn dieser Nenner die 1 ist mit einer Reihe daran hängender Nullen, der Zähler des Bruchs aber aus eben so vielen Ziffern bestehet, als der Nenner Nullen enthält. Ein Ausdruck von dieser Art 24,5737894 wird allemahl den Quotienten bedeuten, der durch die Division dieser ganzen Zahl, ohne das Comma in Betracht zu ziehen, würde gefunden werden, wenn der Divisor die 1 wäre, mit so vielen beygefügten Nullen,

als

als nach dem Comma Ziffern folgen, deren im gegenwärtigen Fall sieben seyn würden. Also ergiebt sich von selbst, daß diese Zahl eben so viel sey, als $24\frac{5737894}{10000000}$. Das Comma steht wenn man den Nenner weg läßt, allemahl bey der Ziffer, welche die **Einer** bedeutet. Man siehet leicht, daß die Werthe der Ziffern, welche nach dem Comma gegen die rechte Hand zu folgen, nach eben dem Decimal-Gesetz abnehmen, nach welchem die Werthe der Ziffern wachsen, die von dem Ort der Einer gegen die Linke fortgehen. Jede gegen die rechte Hand folgende Ziffer hat einen zehnmahl kleinern Werth, als sie in der nächst vorhergehenden Stelle würde gehabt haben. So bedeutet jede Ziffer nach dem Ort der Einer,

in der ersten Stelle	Zehntheile,
in der zweyten =	Hunderttheile,
in der dritten =	Tausendtheile u. s. f.

von der Einheit. Man nehme nur die letzte Zahl zum Exempel, so ergiebt sich die Richtigkeit folgender Ausdrücke von selbst.

$$24,5 = 24\tfrac{5}{10}$$
$$24,57 = 24\tfrac{57}{100} = 24 + \tfrac{5}{10} + \tfrac{7}{100}$$
$$24,573 = 24\tfrac{573}{1000} = 24 + \tfrac{5}{10} + \tfrac{7}{100} + \tfrac{3}{1000}$$

u. s. f.

Es zerlegen sich demnach solche Brüche von selbst in solche Theile, deren Zähler einfache Ziffern, und deren Nenner folgende Zahlen sind: 10, 100, 1000, 10000 u. s. f. so daß jeder folgende Nenner zehnmahl grösser, als der vorhergehende ist. Man nennt sie **Decimal-Brüche.**

118 §.

Es lassen sich demnach die Ziffern, woraus ein Decimal-Bruch besteht, auf ähnliche Art, wie die Ziffern

Ziffern einer ganzen Zahl, in Ziffern verschiedener, aber **abnehmender Decimal-Ordnungen** eintheilen, so wie die Ziffern einer ganzen Zahl zu verschiedenen **wachsenden Decimal-Ordnungen** gerechnet werden. Die Ziffer nach dem Ort der Einer gehöret zur **ersten abnehmenden Ordnung**, die zweyte zur **zweyten** u. s. f.

119 §.

Will man einen solchen Bruch, dergleichen im 114 §. der Zahl 24 beygefügt ist, für sich allein hinschreiben, ohne ihn an eine ganze Zahl anzuhängen; so scheint es, daß man sich obiger Verkürzung nicht bedienen, und den Nenner nicht weglassen könne. Allein da in diesem Fall keine ganze Zahl vorhanden ist, so ist nur nöthig, daß man in der Stelle, wo sonst die niedrigste Ziffer dieser ganzen Zahl stehen müste, eine 0 hinschreibe, und das Zeichen der Einer dabey setze. Diesemnach ist $0,5737894 = \frac{5737894}{10000000}$, und diese Betrachtung läst sich leicht allgemeiner auch auf solche Brüche anwenden, die von den bisherigen nur darin unterschieden sind, daß ihr Zähler aus weniger Ziffern bestehet, als im Nenner Nullen vorkommen, wenn man auf folgende Umstände acht hat.

120 §.

Eine auf gewöhnliche Art geschriebene ganze Zahl wird nicht verändert, wenn man linker Hand so viele Nullen, als man will, beyfüget. So ist 0000743 eben so viel als 743, denn hiedurch ändert sich die Stelle der Einer nicht, wovon die Werthe der übrigen Stellen abhängen. Ist dies gewiß, so kann man dem Zähler eines Bruchs von dieser Art $\frac{743}{10000000}$ allemahl so viele Nullen voransetzen, daß

die

die Anzahl der Ziffern und Nullen zusammengenommen mit der Anzahl der Nullen im Nenner einerley werde, und so ist dieser Fall auf den vorigen gebracht. Man kann nun den Nenner weglassen, und die Ausdrücke $\frac{743}{10000000}$; $\frac{0000743}{10000000}$; 0,0000743 (119 §.), werden einerley seyn, und einerley Zahl bedeuten. Ueberhaupt also wird die niedrigste Ziffer des Zählers von der Stelle der Einer um so viele Stellen wegzurücken seyn, als der Nenner Nullen enthält; da dann nach dieser Regel auch folgende Ausdrücke: 0,0000000052 und $\frac{52}{10000000000}$, imgleichen 0,00300705 und $\frac{300705}{100000000}$, einerley Zahl bezeichnen.

121 §.

Würde man an einer ganzen Zahl rechter Hand Nullen anhängen, so würde hierdurch allerdings der Werth aller ihrer Ziffern, und der ganzen Zahl selbst geändert werden. (15. 16. §.) Wenn man aber die Stelle der Einer mit einem Zeichen bemerkt, und hiedurch fest setzt, das dies ein für allemahl die Stelle der Einer bleiben soll; so ändert auch diese Beyfügung der Nullen die Zahl gar nicht. Schreibt man nemlich nun rechter Hand eine oder mehr Nullen hinzu, so ist es so gut, als wenn man hiedurch zwar mit 10 oder 100 u. s. f. multiplicirt, aber zugleich mit eben der Zahl wieder dividirt. Es ergiebt sich nemlich nun von selbst, daß z. E. 135,00000 $= \frac{13500000}{100000}$ (117 §.) $= 135$ sey. Eben dies erstreckt sich auf jede nach den bisherigen Regeln ausgedrückte Zahl. Wenn der Ort der Einer mit einem Zeichen ein für allemahl bemerket ist; so kann man am Ende rechter Hand so viele Nullen, als man will, anhängen, ohne daß dadurch die Zahl geändert wird. So ist

auch

auch z. E. 0,0024 = 0,00240000 = $\frac{24}{10000}$ = $\frac{240000}{100000000}$.

122 §.

Zwo oder mehr Zahlen, unter welchen Decimal-Brüche vorkommen, zu dividiren.

Aufl. Man schreibe die Zahlen wiederum so untereinander, daß diejenigen einfachen Ziffern, welche zu einerley Ordnung gehören, untereinander kommen. Dieses erhält man leicht, wenn man von jeder folgenden Zahl die Ziffer, so die Einer ausdrückt, zuerst unter der Classe der Einer der vorhergehenden Zahl setzt: denn so ergeben sich die übrigen sowohl gegen die Linke als auch gegen die rechte Hand von selbst.

Hierauf addire man alle Zahlen nach den Regeln des 23 und 24 §, und bezeichne in der Summe die Ziffer mit dem Zeichen der Einer, welche in der Columme der Einer zu stehen kömmt.

Exempel.

738,2400 A		473,683
25,9836 B		0,06423
324,3000 C		0,7043
1088,5236.	Summe.	474,45153

Beweis. Jeder Ausdruck von dieser Art ist ein uneigentlicher Bruch, dessen Zähler die Zahl selbst seyn würde, wenn das Zeichen (,) wegbliebe, der Nenner aber die 1 mit so viel Nullen, als nach diesem Zeichen einzelne Ziffern folgen. Wenn nun gleich in den Zahlen, welche man summiren soll, die Anzahl der Decimal-Stellen und also die Benennung ungleich ist: so kann man doch diese dadurch in allen gleich machen, wenn man rechter Hand an jeder Zahl

so

so viele Nullen anhängt, bis alle gleich viel Decimalstellen haben (121 §), und so sind dies lauter Brüche von gleicher Benennung. Deswegen summirt man nur ihre Zähler, und behält den gemeinschaftlichen Nenner in der Summe dadurch bey, daß man so viel Decimal-Stellen rechter Hand abschneidet, als der gemeinschaftliche Nenner Nullen hat (94 §.) Man siehet leicht, daß es zum würklichen summiren nicht erfordert werde, die Nullen den Zahlen, wie A und C, beyzufügen: deswegen können sie allemahl, wie im zweyten Exempel, wegbleiben.

123 §.

Zwo Zahlen sind noch von der Art, wie im vorigen §, und es wird verlangt, die kleinere von der grössern zu subtrahiren.

Aufl. Man schreibe die Zahlen wie vorhin untereinander, und subtrahire nach den Regeln des 27 §. Im Rest setze man bey der Ziffer das Zeichen der Einer, welche in der Columne der Einer der gegebenen Zahlen zu stehen kommt.

Exempel.

782,37408	534,7372000
513,732	239,4307287.
Rest 268,64208	Rest 295,3064717.

Beweis. Die Regeln beruhen auf eben den Gründen, wie im vorig. §. bey der Addition, wenn man hiemit den 96 §. vergleichet. Wenn die Zahl, welche man subtrahiren soll, mehr Decimal-Stellen enthält, als die andere: so fällt es gleich in die Augen, wie die Regeln des Borgens hier angewandt werden müssen, wenn man durch Beyfügung der Nullen die Anzahl der Decimal-Stellen gleich macht. Eben deswegen sind hier die Nullen im zweyten Exem-

Exempel nur beygefügt, da man sonst, wenn man im Rechnen geübt ist, auch hier nicht nöthig hat, sie hinzuschreiben.

124 §.

Zwo Zahlen von eben der Art in einander zu multipliciren.

Aufl. I. Man setze die Zahlen, wie es bey der Multiplication ganzer Zahlen gewöhnlich ist, untereinander, und verfahre nach den Regeln des 41 §., ohne daß man während des Rechnens die Zahlen selbst anders als ganze Zahlen ansiehet. Am Ende der Rechnung setze man das Zeichen der Einer so, daß rechter Hand desselben so viele Decimalstellen folgen, als in beyden Factoren zusammen vorhanden sind.

Exempel.

```
   73,5483             0,00324
     3,724             0,0000032
 ---------            ----------
   2941932                  648
  1470966                  972
 5148381         ---------------
2206449          0,000000010368 Prod.
---------
273,8938692 Prod.
```

Wenn im Product nicht so viele Ziffern herauskommen, als nach der Regel Decimal-Stellen in demselben seyn sollen: so schreibt man nach dem 120 §. linker Hand so viele Nullen nach einander hin, bis man in allen so viel Ziffern hat, als die Regel erfordert, und überdem noch eine Null für die Stelle der Einer, wie im zweyten Exempel geschehen ist.

Beweis. Es sind hier nemlich zweene Brüche zu multipliciren, deswegen ist das Product ihrer Zähler des Products Zähler, und das Product ihrer Nenner des Products Nenner. (108 §.) Da nun der Nenner eines jeden Factors so viele Nullen hat, als dieser Factor Decimalstellen enthält; so bekommt das Product der Nenner so viele Nullen, als die Anzahl der Decimalstellen beyder Factoren zusammen ausmacht, und dieser Nenner wird dadurch ausgedrückt, daß man im Product eben so viele Decimal-Stellen abschneidet. (117 §.)

II. Ob es gleich an sich nicht nothwendig ist, so hat es doch zuweilen sonst seinen Nutzen, wenn man beyde Factoren wie beym addiren, (122 §.) so unter einander setzt, daß die Einer, mithin auch die übrigen zu einerley Decimal-Ordnung gehörigen Ziffern, unter einander kommen. Alsdenn kann mit der Ziffer des Multiplicators, die in der Stelle der Einer steht, die Multiplication angefangen werden, und die niedrigste Ziffer dieses ersten partialen Products kann grade unter der niedrigsten Ziffer des Multiplicandi ihre Stelle erhalten. So wie nun jedes folgende Product in eine nach der linken folgende Ziffer des Multiplicators um eine Stelle weiter gegen die Linke gerückt werden muß; so rückt man auch jedes folgende Product in eine nach der Rechten folgende um eine Decimal-Ordnung niedrigere Ziffer des Multiplicators um eine Stelle weiter gegen die Rechte. Solchergestalt kommen alle Ziffern, die zu einerley Decimalordnung gehören, in einerley Columne, und das erste Exempel des vorigen §. läßt sich so berechnen.

73,5483
3,724

220,6449
51,48381
1,470966
2941932

Prod. 273,8938692

III. Wenn der Multiplicator Eins ist mit einer Reihe daran hängender Nullen; so verrücke man das Comma von der Stelle der einer im Multiplicando um soviele Stellen weiter nach der Rechten, als im Multiplicator Nullen sind, so ist die Multiplication geschehen. Wären im Multiplicando nicht soviel Decimalstellen, als im Multiplicator Nullen sind; so müste man dem erstern soviele Nullen beyfügen, bis die Zahl der Ziffern und Nullen nach der Stelle der Einer so groß wäre, als die Zahl der Nullen im Multiplicator. Man findet nemlich nach der 1sten Regel $6,3754 \times 1000 = 6375,4000 = 6375,4$, und $7,23 \times 10000 = 72300,00 = 72300$.

125 §.

Eine Zahl, woran Decimal-Stellen hängen, durch eine kleinere dergleichen Zahl zu dividiren.

Aufl. I. Wenn im Dividendo mehr Decimal-Stellen, als im Divisor vorhanden sind; so verfahre man auch hier völlig nach den Regeln des 60 §, und sehe bey der ganzen Rechnung die Zahlen nicht anders als ganze Zahlen an.

II. Bleibt zuletzt kein Rest, so schneidet man im Quotienten so viele Decimal-Stellen ab, als das Dividendum mehr, denn der Divisor enthält, wie im ersten Exempel, so hat man den ganzen Quotienten.

III. Bleibt aber ein Rest, den man nach den gewöhnlichen Regeln nicht weiter dividiren kan; so bestimmt man zwar die Decimal-Stellen des bisher gefundenen Quotienten nach voriger Regel, addirt aber dazu einen Bruch, dessen Zähler der Rest ist, sein Nenner aber ein Product aus dem Divisor in die 1 mit so vielen Nullen, als der erste Theil des Quotienten Decimal-Stellen hat.

Exempel.

```
37,2224 | 5,816.
  6,4...|
 320... |
 -----
  522..
   64..
  512..
  -----
   102.
    64.
  -----
    384
     64
    384
   ----
      0
```

```
2,334 | 1,45 14/1600.
1,6 . |
-----
  73.
  16.
  64.
 ----
   94
   16
   80
 ----
   14
```

Beweis. Man soll hier einen Bruch durch den andern dividiren: also ist der Quotient ein Bruch, dessen Zähler und Nenner sich durch die Division der beyden Zähler und Nenner des Dividendi und Divisors in einander ergeben (110 §). Aber der Quotient der Zähler ist die nach der 1 Regel gefundene Zahl selbst; der Quotient der Nenner ist die 1 mit so viel Nullen, als das Dividendum mehr Decimal-

Stellen

Stellen hat, denn der Divisor; und dieser wird durch das Abschneiden eben so vieler Decimal-Stellen in Quotienten ausgedrückt, wenn alles aufgeht. Ist dies nicht, so wird der Zähler des Quotienten selbst eine ganze Zahl mit dem Bruch, welchen die Division nach den Regeln des 60 § giebt, sein Nenner aber noch der vorhin gedachte. Demnach muß die ganze Zahl des Zählers so viele Decimalstellen bekommen, als die Regel ausdrückt; der Bruch, als der zweite Theil des Zählers, aber muß mit dem vorhin gedachten Nenner noch dividirt, oder, welches dasselbe ist, sein Nenner damit multiplicirt werden.

Dieser Beweis wird völlig erläutert, wenn man sich die Berechnung des vorigen Exempels so vorstellt.

$$\tfrac{2334}{1000} : \tfrac{16}{10} = \frac{2334 : 16}{100} = \frac{145\tfrac{14}{16}}{100} = 1{,}45\tfrac{14}{1600}.$$

IV. Wenn der Divisor eben so viel, oder mehr Decimal-Stellen, als das Dividendum enthält; so kann man vermöge des 121 § so viele Nullen rechter Hand anhängen, als man für nöthig findet. Eben dies Verfahren kann man allemahl anbringen, wenn man den Quotienten in mehrern Decimal-Stellen ausgedrückt verlanget, als die III Regel geben würde. Man schreibt zum Dividendo so viele Nullen hinzu, als man für gut findet, (diese können auch, weil es einerley ist, dem letzten Rest beygefüget werden). Es läßt sich nemlich allemahl zum voraus absehen, wie viele Decimal-Stellen man im Quotienten erhalten wird, weil es jederzeit so viele sind, als im Dividendo mehr denn im Divisor vorkommen. Je mehr Decimal-Stellen man im Quotienten berechnet, desto genauer erhält man denselben, und zuweilen völlig genau, wenn alles aufgehet. Dies erfolgt bey dem letzten Exempel würklich, wenn man dem Dividendo drey Nullen beyfügt, wie nachstehende Berechnung zeiget.

```
2,334000 | 1,45875.
1,6.....
 73....
 16....
 64....
  94...
  16...
  80...
  140..
   16..
  128..
   120.
    16.
   112.
     80
     16
     80
      0
```

In andern Fällen aber erhält man den Quotienten nie völlig genau in Decimal-Theilen, so lange noch ein Rest bleibt.

Dieser Rest, als der Zähler des noch anzuhängenden Bruchs, ist nie grösser als der Divisor, (wenn hier nach der 1sten Regel die Zahlen noch als ganze Zahlen angesehen werden). Für jede folgende Decimalstelle

malstelle des Quotienten wird der Nenner des anzuhängenden Bruchs zehnmahl grösser, also wird dieser Bruch viel kleiner, als er vorher war. Er ist nemlich nie so groß, als eine ganze Einheit von eben der Ordnung seyn würde, wozu die letzte Decimal-Ziffer des Quotienten gehöret. Wenn man demnach mit der Division so lange fortfährt, bis man auf so kleine Decimal-Ziffern kommt, die man in der Ausübung aus der Acht lassen kann: so ist man auch um so mehr berechtiget, den letzten noch anzuhängenden Bruch wegzulassen.

V. Wenn der Divisor **Eins** ist mit einer Reihe anhängender Nullen, so ist die Division geschehen, wenn man im Dividendo das Comma um so viele Stellen gegen die Linke rückt, als im Divisor Nullen sind. Wären also im Dividendo vor dem Comma nicht so viele Ziffern befindlich, als Nullen im Divisor sind; so müste man so viele Nullen, als nöthig, voransetzen, und überdem noch eine Null in die Stelle der Einer des Quotienten setzen. Es ist nemlich $4336{,}25 : 1000 = 433625 ; 100000$ (65 §.) $= 4{,}33625$, (116 §.) und $2{,}4 : 1000 = 24 : 10000 = 0{,}0024$. (120 §.)

126 §.

Einen eigentlichen Bruch durch Decimal-Brüche auszudrücken.

Aufl. Man bemerke die niedrigste Ziffer des Zählers mit dem Zeichen der Einer, dafern der Zähler nicht schon selbst Decimal-Stellen enthält: so erhält man die Freyheit, rechter Hand so viele Nullen, als man will, anzuhängen, ohne daß sich die Grösse des Zählers ändert. (121 §.) Hierauf dividire man den Zähler durch den Nenner nach den Regeln des vorig. §.; so wird man den Quotienten, welcher mit dem Werthe des Bruches einerley ist, entweder genau, oder doch wenigstens so nahe, als man will, in Decimal-Theilen enthalten.

Exempel.

$$\frac{1.0}{2} \,\Big|\, 0{,}5 \qquad \frac{4{,}0}{5} \,\Big|\, 0{,}8 \qquad \frac{3.00}{4}$$

1.0 | 0,5
2
10
0

4,0 | 0,8
5
40
0

3.00
4
28
20
4
20
0

2,000 | 0,666 $\frac{2}{3000}$.
3 . .
18 . .
20 .
3 .
18 .
20
3
18
2

7,000 | 0,777 $\frac{7}{9000}$.
9 . .
63 . .
70 .
9 .
63 .
70
9
63
7

Es fällt sogleich in die Augen, daß in den beyden letzten Exempeln nothwendig allemahl ein Rest bleiben müßte, woraus also erhellet, daß sich nicht jeder Bruch genau in zehntheilichten Brüchen ausdrücken lasse. Wenn man demnach in solchen Fällen die Einheit in 10, oder 100, oder 1000 Theile u. s. f. ein-

eintheilt, so daß die Anzahl der Theile ein Multiplum der 10 mit sich selbst ist, und man macht auch diese Anzahl der Theile so groß, wie man will; so wird doch nie eine bestimmte Menge derselben zusammen genommen eben so viel von der Einheit ausmachen, als der gegebene Bruch. Im ersten Exempel erhält man nie zwey Drittheile, und im zweyten nie sieben Neuntheile der Einheit. Je mehr Decimalstellen man inzwischen berechnet, desto genauer wird der Werth des Bruchs in Decimal-Theilen ausgedrückt, und der Irrthum, den man mit Weglassung des noch anzuhängenden Bruchs begehet, kann kleiner werden, als jede Grösse, die sich angeben läßt. Dies letztere werden folgende Sätze deutlicher ins Licht setzen.

127 §.

Wenn zwo gleichartige Grössen A und e ungleich, und so sehr als man will, unterschieden sind; so kann man die kleinere e so oft zu sich selbst addiren, daß die Summe endlich grösser als A wird: oder welches einerley ist, man kann e mit einer so grossen ganzen Zahl m multipliciren, daß das Product me grösser als A wird, e sey so klein, als man wolle, dafern e nur noch eine Grösse, und mit A von einerley Art ist.

128 §.

Wenn demnach eine Grösse A mit einer ganzen Zahl m dividirt wird; so kann man diese Zahl m allemahl so groß nehmen, daß der Quotient $\frac{A}{m}$ kleiner wird, als jede andere mit A gleichartige Grösse e, die sich angeben läßt, die letztere sey so klein als sie will.

Beweis. Es sey e eine Grösse, so klein, als man will: so nehme man e so vielmahl, daß die Summe oder das Product $me > A$ wird. (127 §.) Ist dies geschehen, so hat man $e > \frac{A}{m}$, (44 §.) oder $\frac{A}{m} < e$.

129 §.

Diese beyden letzten Sätze lassen sich leicht auf den 125 und 126 §. anwenden. Der dem Quotienten beyzufügende Bruch ist allemahl ein gebrochner Bruch, dessen Zähler kleiner als 1, dessen Nenner aber ein Product ist, welches entstehet, wenn die Zahl 10 mehrmahl nach einander wieder mit 10 multiplicirt wird; und dies Product kann so groß werden, als man will. Wenn also der Zähler dieses gebrochnen Bruchs A ist, und sein Nenner m; so ist m entweder 10, oder 100, oder 1000 u. s. f. Verlangt man nun, dieser Bruch soll kleiner werden alls e, wo e z. E. ein Milliontheilchen, Billiontheilchen u. s. f. des Ganzen bedeuten kann: so darf man nur so lange fortrechnen, bis $m >$ als eine Million, Billion u. s. f. wird, oder welches einerley ist, bis $me > 1$ wird. Ist dies geschehen, so ist auch $me > A$, weil $A < 1$ seyn muß, folglich $\frac{A}{m} < e$.

130 §.

Wenn man mit solchen Brüchen, die nicht völlig genau in Decimal-Theilen ausgedrückt sind, dahin denn alle nach den Regeln des 125 und 126 §. berechnete Quotienten gehören, wenn der letzte noch anzuhängende Bruch weggelassen ist, aufs neue Rechnungen vornimmt; so können die Resultate nicht ge-

nau

nau herauskommen. Sie werden mehr oder weniger unrichtig seyn, nachdem man jene Quotienten mehr oder weniger genau berechnet hat. Ob man nun gleich in der Anwendung mit diesen nicht ganz genau richtigen Resultaten in den meisten Fällen zufrieden seyn kann; so muß man dennoch die Prüfung, wie weit sie richtig sind, anstellen, und die Grösse des Irrthums schätzen können.

Bey der Addition zwoer Zahlen von dieser Art kann die letzte Ziffer schon unrichtig seyn, wenn an den summirten Zahlen gleichviel Decimalstellen hängen. Z. E.

$\frac{2}{3} = 0.666666$ rc.	$\frac{7}{9} = 0.777777$ rc.
$\frac{1}{3} = 0.333333$ rc.	$\frac{2}{3} = 0.666666$ rc.
$1 = 0.999999$ rc.	$\frac{13}{9} = 1.444443$ rc.

Im ersten Exempel sind alle Ziffern der Summe richtig, im zweyten aber ist die niedrigste Ziffer zu klein, wovon die Ursache leicht in die Augen fällt. Hätte man nämlich in jeder von beyden summirten Zahlen noch eine Ziffer mehr genommen; so wäre in der siebenden Decimal-Stelle die Summe 13 geworden, und dies hätte die sechste Decimal-Stelle der Summe um Eins vergrössert. Im ersten Exempel wäre dies nicht geschehen.

Aus einer ähnlichen Ursache kann bey der Subtraction die letzte Ziffer im Rest zu groß herauskommen. So findet man durch die Subtraction

$\frac{13}{9} = 1{,}444444$ rc.	$\frac{7}{9} = 0{,}777777$ rc.
$\frac{7}{9} = 0{,}777777$ rc.	$\frac{1}{3} = 0{,}333333$ rc.
$\frac{2}{3} = 0{,}666667$ rc.	$\frac{4}{9} = 0{,}444444$ rc.

Aber im ersten Exempel ist die letzte Ziffer des Restes um 1 zu groß, weil beym Subtrahiren in der siebenden Decimal-Stelle, wenn sie ausgedrückt wäre, von der Ziffer 4 in der sechsten Stelle 1 wäre, weggeborgt worden. Im zweyten Exempel fällt diese Ursache weg, und kommen alle Ziffern des Restes richtig heraus.

131. §.

Bey der Multiplication zwoer Zahlen von der Art, wie im vorigen §., verfahre man nach der IIten Regel des 124 §.; so läßt sich die Prüfung ebenfalls ohne Schwierigkeit anstellen, wie weit die Ziffern des Products richtig sind. Z. E.

$$\begin{array}{rl}
\frac{2}{3} = 0{,}666666 & \\
\frac{1}{3} = 0{,}333333 & \\
\hline
0{,}1999998 & \\
199999 & 8 \\
19999 & 98 \\
1999 & 998 \\
199 & 9998 \\
19 & 99998 \\
\hline
\frac{2}{9} = 0{,}2222217 & 77778
\end{array}$$

Es ergiebt sich leicht, daß hier aufs höchste nur die sechs höchsten Ziffern richtig seyn können, und die siebende gewiß schon zu klein sey. Denn die siebende Ziffer 8 des ersten einzelnen Products ist aus einer ähnlichen Ursache schon zu klein, die bey der Addition im vorigen §. statt hatte. Es würde nemlich die Ziffer nicht 8, sondern 9 geworden seyn, wenn im Multiplicando nur noch eine Stelle mehr genommen wäre. Die Ziffern, welche im Product nach der siebenden folgen, werden um so weniger richtig seyn, weil immer mehr Ziffern in den einzelnen

Producten

Producten fehlen, die einen Einfluß in die Summe haben würden.

Die siebende Ziffer des Products aber ist nicht allein aus der Ursache zu klein; weil die siebende im ersten einzelnen Product zu klein ist; sondern auch deswegen, weil in der siebenden Columne unten noch eine Ziffer fehlt, die hinzu gekommen seyn würde, wenn man im Multiplicator eine Ziffer mehr genommen hätte; dies wäre im gegenwärtigen Fall die 1 gewesen.

Endlich drittens erhellet, wenn alles vollständig wäre, daß bey der Addition der achten Columne, auch mehr würde in mente geblieben, und hierdurch ebenfalls die Summe der siebenden Columne vermehrt worden seyn.

Diese drey Umstände zusammengenommen ergeben, daß wenn alles vollständig wäre, zur siebenden Columne so viel hätte hinzukommen können, daß auch hier bey der Addition ein mehreres in mente geblieben, und hiedurch auch die sechste Ziffer der Summe grösser geworden wäre, wie es denn leicht erhellet, daß im Exempel die Ziffer 2 statt 1 hätte herauskommen müssen.

Wenn man diese Sache genauer ansiehet; so nimmt man leicht wahr, daß es unnöthig sey, die nach der siebenden Decimalstelle folgenden Ziffern in den einzelnen Producten hinzuschreiben, die im Exempel durch einen Strich von den übrigen abgesondert sind. Man kann sie füglich alle weglassen, und man wird doch das Product bis auf die zwo letzten Ziffern richtig herausbringen. Dies ist der Grund von der

so

so genannten abgekürzten Multiplication, und man nimmt ohne Schwierigkeit wahr, wie sich dies Verfahren in jedem andern ähnlichen Fall anbringen lasse. Z. E.

$$
\begin{array}{r}
7\frac{3}{7} = 7,\cancel{4}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{1}4 \\
3\frac{4}{7} = 3,5\cancel{7}\cancel{1}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{5} \\
\hline
22,2857142 \\
3,71428570 \\
51999997 \\
742857 \\
297140 \\
14856 \\
5936 \\
370 \\
\hline
26\frac{26}{49} = 26,53061146
\end{array}
$$

Man multiplicire hier nemlich mit jeder nächstfolgenden Ziffer des Multiplicators, nach den Zehntheilen, eine Ziffer weniger im Multiplicando, als mit der nächst vorhergehenden. Nachdem man mit 3 und mit 5 multiplicirt hat, sage man: 7 mahl 1 ist 7, und streiche 7 und 1 durch: Ferner fange man die folgenden einzelnen Producte so an: 1 mahl 7 ist 7; 4 mahl 5 ist 20; 2 mahl 8 ist 16; 8 mahl 2 ist 16; 5 mahl 4 ist 20; auch durchstreiche man jedesmahl die Ziffern, womit man die Multiplication anfängt, so weis man gleich, mit welchen Ziffern die folgende Multiplication anfangen muß. In dem gefundenen Product aber sind die drey letzten Ziffern noch zweifelhaft. Denn in der siebenden Columne nach der Stelle der Einer konnte nicht allein die oberste Ziffer zu klein seyn, sondern es fehlt auch noch unten eine Ziffer:

also

also kann man nur die fünf ersten Decimalstellen für richtig annehmen. Wieviel übrigens der Fehler aufs höchste betragen könne, wenn man die sechs ersten Decimalstellen für richtig annimmt, das läßt sich in jedem Fall so übersehen. Gesetzt daß auch in der achten Decimalstelle eines jeden von beyden Factoren die Ziffer 9 stehen müste, so betrüge der Fehler 0,00000027 + 0,00000063, also höchstens 0,0000009, und das würde hier die sechste Decimalstelle nur um 1 vergrössern.

132 §.

Wenn man eine Zahl von dieser Art $26\frac{26}{49}$ = 26,5306122 durch eine andre ähnliche $7\frac{3}{4}$ = 7,4285714 dividiren soll, so kann man eine ähnliche **Verkürzung** anbringen. Man läst nemlich bey jeder folgenden Operation von den Ziffern des Divisors die niedrigste weg, da sich dann der Quotient auf folgende Art ergiebt.

```
26 25/49 = 26,5306122 |
  7 3/7  =  7,4285714 | 3,5714287 = 3 4/7.
           22,2857142 |
           ---------- |
            4,2448980 |
            7,428571
            3,7142855
            ---------
             5306125
             7,42857
             5199999
             -------
              106126
              7,4285
              ------
               31841
               7,428
               29712
               -----
                2129
                7,42
                1484
                ----
                 645
                 7,4
                 592
                 ---
                  53
                   7
                  49
                  --
                   4
```

Der Grund dieses Verfahrens ergiebt sich leicht, wenn man damit die im vorigen §. beschriebene verkürzte Art zu multipliciren vergleicht. Bey Berechnung der einzelnen Producte läßt man aus dem einen Factor nach und nach immer die niedrigste Ziffer weg: also kann man hier das Dividendum als ein Product

ansehen,

ansehen, das durch die Multiplication des Quotienten in den Divisor auf eben die Art entstanden wäre, indem man in dem Factor, der hier den Divisor abgiebt, von den niedrigsten Ziffern eine nach der andern bey der Multiplication weggelassen hätte, welches durch die Vergleichung dieser Berechnung mit der Rechnung des vorigen § deutlich wird. Uebrigens ist voraus zu sehen, daß eben so, wie in dem berechneten Exempel, auch in andern Fällen, die letzte Ziffer des Quotienten um etwas zu groß heraus kommen müsse, weil der Divisor nach und nach immer kleiner, als er würklich ist, angenommen wird.

Der VIII. Abschnitt.

Von den vier Rechnungs-Arten in genannten Zahlen.

133 §.

Es ist eigentlich kein Geschäfte der theoretischen Rechenkunst, die Anwendung der bisherigen Rechnungs-Regeln zu zeigen. Wer diese Anwendung machen will, muß verschiedene Kenntnisse von der Beschaffenheit der Sachen selbst besitzen, die man durch Zahlen auszudrücken gewohnt ist. Manche derselben lernt man gar nicht kennen, wofern man sich nicht mit denjenigen Wissenschaften bekannt macht, die davon besondern Unterricht geben, dahin denn vorzüglich alle Theile der Mathematik gehören. Mit vielen hieher gehörigen Kenntnissen wird man versehen, wenn man sich mit den mannigfaltigen Gewerben und Handthierungen des gemeinen Lebens bekannt macht, und einige dieser Kenntnisse haben sich so nothwendig gemacht, daß fast niemand derselben entbehren kann; daher man auch unvermerkt bey den täglichen Geschäften des gemeinen Lebens davon wenigstens einigermassen unterrichtet wird. Es gehören hieher vorzüglich die Werthe der Münzen, die verschiedene Beschaffenheit der Maasse, der Gewichte, und dergleichen mehr, und man kann ohne alle weitere Schwierigkeit die bisher vorgetragenen Rechnungsregeln darauf anwenden: nur muß man wissen, in wie viele Theile eine Münze von einem bekannten Werthe, ein bekanntes Maaß und Gewicht, u. s. f. gewöhnlich eingetheilt wird, und was diese Theile für Nahmen führen. Diese Eintheilungen und Nahmen sind völlig willkührlich, und eben daher ist die grosse Verschiedenheit entstanden, die hiebey obwaltet. Bey den folgenden Exempeln werden die nachstehenden Eintheilungen gebraucht werden. Ein Thaler gilt 24 Groschen, und ein Groschen 12 Pfennige. Ein Centner hält 110 Pfund, ein Pfund 16 Unzen, eine Unze 8 Drachmen, eine Drachma 3 Scrupel, ein Scrupel 20 Gran. Eine Ruthe hat 12 Fuß, ein Fuß 12 Zoll, ein Zoll 12 Linien, eine Linie 12 Scrupel. Weil es beym Rechnen weit bequemer ist; so theilen die Mathematiker die Maaße gern in 10 Theile, und rechnen 10 Fuß auf eine Ruthe, 10 Zoll auf einen Fuß, 10 Linien auf einen Zoll, und 10 Scrupel auf eine Linie.

134 §.

Man ist nicht gewohnt, eine Summe Geldes in lauter Pfennigen, oder Groschen auszudrücken, so

wie

wie man ein Gewicht nicht in lauter Granen, eine Länge nicht in lauter Zollen, Linien, oder Scrupel ausdrückt; es müste denn seyn, daß man hiezu eine besondere Ursache hätte. In den allermeisten Fällen drückt man eine Summe kleiner Theile, die einen grössern Theil mehrmahl enthält, durch diese grössern Theile aus. Wenn man demnach beym Rechnen auf eine Anzahl dergleichen kleiner Theile kommt, die mehr solche Theile enthält, als auf das nächst grössere Maaß, Gewicht, und auf die nächst grössere Münze u. s. f. gerechnet werden; so drückt man eine solche Zahl gewöhnlich durch die nächst grössere Einheit aus. Weiß man die Anzahl der Theile, die das nächst grössere Maaß, Gewicht, u. d. gl. ausmachen, so darf man nur mit dieser Zahl dividiren: der Quotient wird ausdrücken, wie viele Einheiten der grösseren Art in der dividirten Zahl, welche den kleinern Nahmen hat, enthalten sind: da dann der Rest die noch übrigen Theile der kleinern Art angiebt, (47 §.) und den kleinern Nahmen behält, wofern man es nicht besser findet, dem Quotienten einen Bruch beyzufügen, damit der ganze Quotient den grössern Nahmen erhalte.

Wenn 1 Gr. = $\frac{1}{24}$ Thl.
so sind 327 Gr. = $\frac{327}{24}$ Thl. = $13\frac{15}{24}$ oder $13\frac{5}{8}$ Thl. = 13 Thl. 15 Gr.

Wenn 1 Pf. = $\frac{1}{110}$ Cent.
so sind 4634 Pf. = $\frac{4634}{110}$ Cent. = $42\frac{14}{110}$ oder $42\frac{7}{55}$ Cent. = 42 Cent. 14 Pf.

Wenn 1 Fuß = $\frac{1}{12}$ Ruth.
so sind 519 Fuß = $\frac{519}{12}$ Ruth. = $43\frac{3}{12}$ oder $43\frac{1}{4}$ Ruth. = 43 Ruth. 3 Fuß.

Wenn aber 1 Fuß = $\frac{1}{10}$ Ruth.

so sind 519 Fuß = 51, 9 R. = 51 R. 9 F.

Dies Verfahren nennet man **eine genannte Zahl auf eine andere Benennung, oder einen andern Nahmen zu bringen**, und in den angeführten Exempeln sind solche Zahlen, die den kleinern Namen hatten, **auf grössere Namen gebracht.**

135 §.

Soll man umgekehrt eine Zahl, die den grössern Nahmen hat, **auf einen kleinern Nahmen bringen**, d. i. eine Anzahl der grössern Theile durch die darin enthaltenen kleinern Theile ausdrücken: so ergiebt sich von selbst, daß man für jeden grössern Theil so viele kleinere rechnen müsse, als diesen grössern Theil ausmachen. Diesemnach muß man mit der Anzahl dieser Theile multipliciren. (30 §.) Man darf also nur auf eine ähnliche Art, wie vorhin, 24 Gr. statt 1 Thl., 110 Pf. statt 1 Cent. u. s. f. schreiben: so ergiebt sich die übrige Rechnung von selbst.

Wenn 1 Thl. = 24 Gr.; so sind 13 Thl. 15 Gr. = 13 × 24 Gr. + 15 Gr. = 327 Gr.

Wenn 1 Centner = 110 Pf.; so sind 42 C. 14 Pf. = 42 × 110 Pf. + 14 Pf. = 4634 Pf.

Wenn 1 Ruthe = 12 Fuß; so sind 43 R. 3 F. = 43 × 12 F. + 3 F. = 519 F.

Wenn aber 1 R. = 10 F.; so sind 51 R. 9 F. = 51, 9 R. = 51, 9 × 10 F. = 519 F.

136 §.

Es erstreckt sich eben dies Verfahren auch auf **gebrochene genannte Zahlen**, man mag einen solchen Bruch auf einen **grössern** oder auf einen **kleinern** Nahmen bringen sollen. Weis man, wie viele Theile, die den kleinern Nahmen haben, **Eins** von der

der grössern Art ausmachen, so wird der Bruch mit der Zahl, die dies anzeigt, im ersten Fall dividirt, im zweyten Fall multiplicirt.

Es sind nemlich

$\frac{7}{8}$ Gr. = $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{24}$ Thl. = $\frac{7}{192}$ Thl.
$\frac{5}{6}$ Pf. = $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{110}$ C. = $\frac{1}{132}$ C.
$\frac{4}{9}$ F. = $\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{12}$ R. = $\frac{1}{27}$ R.

oder wenn 10 Fuß eine Ruthe machen
0,27 Fuß = 0,027 Ruth.

Umgekehrt ist $\frac{3}{5}$ Thl. = $\frac{3}{5} \cdot 24$ Gr. = $\frac{72}{5}$ Gr. = $14\frac{2}{5}$ Gr. und $\frac{2}{5}$ Gr. = $\frac{2}{5} \cdot 12$ Pf. = $\frac{24}{5}$ Pf. = $4\frac{4}{5}$ Pf.

Ferner $\frac{7}{8}$ C. = $\frac{7}{8} \cdot 110$ Pf. = $\frac{770}{8}$ Pf. = $96\frac{1}{4}$ Pf. und $\frac{1}{4}$ Pf. = $\frac{1}{4} \cdot 16$ Unzen = 4 Unzen.

Eben so $\frac{4}{9}$ Ruth. = $\frac{4}{9} \cdot 12$ Fuß = $\frac{48}{9}$ F. = $5\frac{1}{3}$ F. und $\frac{1}{3}$ F. = $\frac{1}{3} \cdot 12$ Zoll = 4 Zoll;

oder in Decimal-Theilen:
$\frac{4}{9}$ R. = 0.444 rc. R. = 4|F. 4 Z. 4 L. rc.

137 §.

Genannte Zahlen zu addiren.

Aufl. Man schreibe diejenigen alle in einer Columne untereinander, die einerley Nahmen haben, und addire jede Columne besonders.

Man fange aber mit derjenigen Columne an, die den kleinsten Nahmen hat, und bringe die Summe gleich auf den nächst grössern Nahmen. Die herausgebrachte Zahl, welche den nächst grössern Nahmen hat, addire man mit zur nächst grössern Columne, und schreibe den Rest, welcher den kleinern Nahmen behält, unter der gleichnahmigen Columne.

Exempel.

7 C.	86 Pf.	14 Unz.	7 Dr.	19 Gran
4	93	9	5	54
2	74	12	4	
	255	37	17	73
	110	16	8	60
	220	32	16	13 Gran.
15 C.	35 Pf.	5 Unz.	1 Dr.	

48 Thl.	21 Gr.	9 Pf.
29	14	5
7	19	7
	55	21
	24	12
	48	9 Pf.
86 Thl.	7 Gr.	

138 §.

Eine kleinere genannte Zahl von einer grössern zu subtrahiren.

Aufl. Man schreibe die Zahlen, welche einerley Nahmen haben, wie vorhin untereinander, und subtrahire jeden Theil der kleinern Zahl von dem gleichnamigen der grössern.

Dafern dieser gleichnamige Theil der grössern Zahl kleiner ist, als diejenige Zahl, welche man davon nach der ersten Regel subtrahiren soll; so borge man von dem Theil, welcher den nächst grössern Nahmen hat, Eins weg und rechne dafür so viele Einheiten zur nächst kleinern Columne, als diese geborgte Einheit ausmachen.

Exem-

Exempel.

		12	
15 Ruth.	9 Fuß	3 Zoll	7 Lin.
8	4	10	3
7 R.	4 F.	5 Z.	4 L.

	24	12
28 Thl.	14 Gr.	3 Pf.
19	21	8
8 Thl.	16 Gr.	7 Pf.

	109	16
97 Cent.	0	0
24 C.	73 Pf.	3 U.
72 C.	36 Pf.	13 U.

139 §.

Eine genannte Zahl mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire nach einander die verschiedenen Theile der genannten Zahl, und zwar mache man bey dem Theil, welcher den kleinsten Nahmen hat, den Anfang, und gehe sodann zu den nächst grössern Theilen fort. Allemahl aber bringe man das gefundene Product auf die nächst grössere Benennung, wie bey der Addition.

Exempel.

7 Thl.	16 Gr.	5 Pf.
27	27	27
189	112	
18	32	
	11	

443		135	
24	18 Thl.	12	11 Gr.
203		15	
24		12	
192		3 Pf.	

207 Thl.	11 Gr.	3 Pf.

17 Pf.	14 U.	3 Dr.
94	94	94
68	56	
153	126	
84	35	

1351		282	
16.	84 Pf.	8.	35 U.
128.		24.	
71		42	
16		8	
64		40	

1682 Pf.	7 U.	2 Dr.

140 §.

Eine genannte Zahl mit einer ganzen Zahl zu dividiren.

Aufl.

Aufl. Man dividire nach einander die Theile der genannten Zahl so, daß man mit demjenigen Theil anfängt, welcher den höchsten Nahmen hat, und sodann auf die nächst niedrigern fort gehet.

Die Reste bringe man allemahl auf die nächst kleinern Nahmen (135 §.), und rechne sie jedesmahl zum nächst kleinern Theil des Dividendi.

Exempel.

113 Pf.	9 U.	3 Dr.
7	16	32
43 | 16 Pf.	25 | 3 U.	35 | 5 Dr.
7	7	7
42	21	35
1	4	0
mult. 16 U.	mult. 8	
	32	

Quot. 16 Pf. 3 U. 5 Dr.

127 Thl.	18 Gr.	11 Pf.
38	312	312
114 | 3 Thl.	330 | 8 Gr.	323 | $8\frac{1}{2}$ Pf.
13	38	38
mult. 24	304	304
52	26	19
26	mult. 12	
312 Gr.	52	
	26	
	312 Pf.	

Quot. 3 Thl. 8 Gr. $8\frac{1}{2}$ Pf.

141 §.

Eine Zahl wird mit einem Bruch multiplicirt, wenn man sie in den Zähler desselben multiplicirt, und was herauskommt, mit dem Nenner dividirt: man dividirt eine Zahl mit einem Bruch, wenn man sie mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt, und was herauskommt, mit dem Zähler desselben dividirt. (99. 103 §.) Also wird man die beyden letzten Aufgaben auch auflösen können, wenn der Multiplicator, oder Divisor, Brüche sind.

Exempel.

38 Pf.	15 U.	5 Dr.
7	7	mult. $\frac{7}{9}$
266	105	
6	4	
272 | Pf.	109 | 6 Pf.	35 | 4 U.
div. 9 | 30 Pf.	16 |	8 |
	96	32
2		
9	13 U.	3 Dr.
	32 | 5 U.	9
2		$\frac{1}{3}$ Dr.
16	45	
32 U.	9	
	45	
	0	

Prod. 30 Pf. 5 U. $\frac{1}{3}$ Dr.

17 Thl.

17 Thl.		5 Gr.		7 Pf.	
8		8		div. $\frac{5}{8}$	
136		40			
1		4			
		44	1 Thl.	56	4 Gr.
		24		12	
137 Thl.		20 Gr.		48	
				8 Pf.	

137	Thl.	20 Gr		8 Pf.	
5.	27 Thl.	48	13 Gr.	36	
10.		68		44	
37		5:		5	$8\frac{4}{5}$ Pf.
5		18		40	
35		5		4	
2		15			
24		3			
48 Gr.		12			
		36 Pf.			

Quot. 27 Thl. 13 Gr. $8\frac{4}{5}$ Pf.

142 §.

Die bisherigen Rechnungs-Regeln sind zulänglich, in allen Fällen, wenn aus gegebenen Zahlen andere unbekannte Zahlen gesucht werden sollen, die unbekannten Zahlen zu finden: sie lehren die einfachen Operationen dieser Wissenschaft, die man aber in vorkommenden Fällen bald so, bald anders mit einander verbinden muß, um die gesuchten Zahlen herauszubringen. Sie machen eigentlich die allerersten Anfangsgründe dieser Wissenschaft, die so genannte Elemen-

Elementar-Rechenkunst, aus. Bey verwickelten Rechnungsfragen muß man genauer wissen, wie man mit den gegebenen Zahlen umzugehen habe, welche Rechnungsarten man mit ihnen vornehmen, und in welcher Ordnung dieses geschehen müsse. In den meisten gewöhnlichen Rechenbüchern wird dies alles nur in speciellen Exempeln gewiesen, und dies ist auch nach der Absicht, weswegen diese Bücher aufgesetzt sind, ziemlich zulänglich; dafern anders die Regeln selbst nur deutlich vorgetragen, und die Gründe derselben einigermassen auseinander gesetzt werden. Allein, wenn die Rechenkunst als ein Theil der Mathematik betrachtet, und in allen ihren übrigen Theilen hiernächst mit Vortheil angewandt werden soll: so ist nöthig, über die mancherley Arten, wie man die Zahlen mit einander vergleichen, und aus gegebenen Zahlen andere suchen kann, nunmehro so allgemeine Betrachtungen anzustellen, daß man dadurch in den Stand gesetzet wird, in jedem vorkommenden Fall selbst zu beurtheilen, welche von den mannigfaltigen Regeln anzuwenden sey, die in den gewöhnlichen Anweisungen zur Rechenkunst unter so vielerley Nahmen vorgetragen werden. Ja, diese Untersuchungen müssen so allgemein gemacht werden, daß sie sich auch da anwenden lassen, wo man mit Vergleichungen anderer Grössen zu thun hat, die man eben nicht als Zahlen betrachtet.

Der

Der IX. Abschnitt.

Von den arithmetischen Verhältnissen, Proportionen und Progreſſionen.

143 §.

Zwo ungleiche Grössen sind allemahl um eine gewisse Differenz unterschieden, und ein Paar andere Grössen von eben der Art können um eben diese Differenz unterschieden seyn. Es ist z. E. $8-5=3$, und $7-4=3$. Man kann also sagen: 8 übertreffe 5 um eben so viel, um wieviel 7 die Zahl 4 übertrift, und dies kann man kurz so ausdrücken: $8-5=7-4$. Vier Grössen von dieser Art, da nemlich die erste von der zweyten um eben die Differenz unterschieden ist, wie die dritte von der vierten, heissen: **Arithmetische Proportional-Grössen.** Auf die Frage: um wie viel 8 von 5 unterschieden sey? muß man eben so antworten, als auf die Frage: um wie viel 7 von 4 unterschieden sey? und diese Beziehung zwoer Grössen gegen einander, vermöge welcher sie um eine gewisse Differenz unterschieden sind, nennt man ihr **Arithmetisches Verhältniß** gegen einander. Die Grössen selbst heissen die **Glieder** (termini) des Verhältnisses. Es ist demnach einerley, ob man sagt, ein Paar Grössen A und B sind von einander um eine eben so grosse Differenz unterschieden, wie ein Paar andere Grössen C und D; oder ob man sagt, das Arithmetische Verhältniß der beyden ersten sey dem Arithmetischen Verhältniß der beyden letzten gegen einander gleich. Diese Gleich

heit

heit zweyer Arithmetischen Verhältnisse heist eine Arithmetische Proportion, und ihre Glieder sind die Grössen selbst, welche die Proportion ausmachen.

144 §.

Das Arithmetische Verhältniß zwoer Grössen gegen einander wird am natürlichsten durch das zwischen beyden gesetzte Zeichen der Subtraction angezeiget, da denn das Zeichen der Gleichheit zwischen beyden gleichen Verhältnissen die Arithmetische Proportion ausdrückt, wie im vorig. §. $8 - 5 = 7 - 4$. In den Schriften der Ausländer findet man die Arithmetische Proportion auch so bezeichnet: $8 . 5 \because 7 . 4$, aber die vorige Art wird in der Folge beybehalten werden.

Weil man hier eben nicht besonders darauf siehet, welches von den beyden Gliedern des Verhältnisses das grössere, und welches das kleinere sey; sondern eigentlich nur ausdrücken will, daß die beyden ersten Grössen von einander um eben so viel, wie die beyden letzten unterschieden sind: so ist es gleichgültig, ob man das grössere, oder das kleinere Glied eines Verhältnisses voransetzet. Man kann auch schreiben $5 - 8 = 4 - 7$, und man kann den Ausdruck so erklären: um wie viel 5 kleiner als 8 ist, um so viel ist auch 4 kleiner als 7.

Das erste und dritte, imgleichen das zweyte und vierte Glied einer arithmetischen Proportion, werden ihre gleichnahmigen Glieder genannt: also ist es gleichviel, ob die beyden ersten gleichnahmigen Glieder grösser, oder ob sie kleiner als die beyden letzten sind.

145 §.

145 §.

Die Differenz zwoer Zahlen von einander wird auch der Nahme ihres arithmetischen Verhältnisses genannt; und dieserwegen kann man folgende zwo Regeln festsetzen.

Wenn zwey arithmetische Verhältnisse gleiche Nahmen haben: so sind die Verhältnisse gleich.

Umgekehrt:

Wenn zwey arithmetische Verhältnisse gleich groß sind: so haben sie gleiche Nahmen.

Wenn demnach D den Nahmen des Verhältnisses bedeutet: so siehet man leicht, daß der allgemeine Ausdruck:

$$(A+D) - A = (B+D) - B$$

oder auch

$$A-(A+D) = B-(B+D)$$

eine jede arithmetische Proportion bezeichnen könne.

146 §.

In jeder arithmetischen Proportion $A-B=C-D$ ist die Summe der beyden mittlern Glieder so groß, als die Summe der beyden äussern.

Auch umgekehrt: wenn die Summe zwoer Grössen $A+D$ einer andern Summe $B+C$ gleich ist; so sind die beyden Theile der einen Summe zwischen den beyden Theilen der andern mittlere Proportional-Grössen.

Beweis des 1. S. Es sey $A-B=C-D$, so ist $A+D-B=C$, und $A+D=B+C$. (25 §.)

Bew. d. 2. S. Wenn umgekehrt $A+D=B+C$ ist, so hat man $A+D-B=C$, und $A-B=C-D$. (28 §.)

147 §.

Es sind drey Grössen gegeben, man soll zu ihnen die vierte arithmetische Proportional-Grösse finden.

Aufl. Man addire die zweyte zur dritten, und subtrahire von der Summe die erste; so ist der Rest die gesuchte Grösse.

Beweis. Wenn A, B, C, die gegebenen Grössen sind, und X die gesuchte ist; soll die Proportion wahr seyn, $A - B = C - X$. Demnach ist $A + X = B + C$ (146 §.), also $X = B + C - A$. (28 §.)

Exempel.

Es sind die Zahlen 17, 30, 126 gegeben; so giebt die Rechnung die Zahl 139, man hat also $17 - 30 = 126 - 139$.

$$\begin{array}{r} 126 \\ 30 \\ \hline 156 \\ 17 \\ \hline 139 \end{array}$$

Man siehet leicht, daß die Summe der beyden letzten Zahlen grösser, als die erste seyn müsse, sonst würde man nicht subtrahiren können. In der Folge wird zwar der Begrif von der Subtraction erweitert werden, so daß man auch in diesem Fall in einem gewissen Verstande noch subtrahiren kann: allein diese Untersuchung bleibt zur Zeit noch ausgesetzt.

148 §.

Wenn die beyden mittlern Glieder einer arithmetischen Proportion gleich groß sind; so heist sie eine **stetige Proportion**, (continua) von der Art wäre die Proportion $5 - 8 = 8 - 11$.

Eine Proportion von dieser Art hat also nur drey verschiedene Glieder, und das zweyte, welches hier das **mittlere** heist, kommt eigentlich zweymahl vor.

Die

Die Summe ihrer äussern Glieder ist doppelt so groß, als das mittlere, (146 §.) und aus den beyden ersten wird das dritte gefunden, wenn man das zweyte verdoppelt, und vom Product das erste subtrahirt. (147 §.) Das doppelte zweyte Glied muß also grösser als das erste seyn, aus der im 147 §. schon angeführten Ursache.

149 §.

Wenn A und B die beyden ersten Glieder der stetigen arithmetischen Proportion sind; so erhält man auch das dritte, wenn man zum zweyten B den Nahmen des Verhältnisses $B - A = D$ addirt, dafern B grösser als A ist, im Gegentheil aber, wenn man die Differenz $A - B$ von B subtrahirt. Im ersten Fall werden die drey Grössen diese seyn: A, $A + D$, $A + 2D$. Man kann sodann die Differenz D zum dritten Gliede aufs neue addiren: so erhält man vier **stetige arithmetische Proportional-Grössen**, A, $A + D$, $A + 2D$, $A + 3D$, (quatuor continue arithmetice proportionales) da dann die zweyte und dritte die beyden mittlern **stetigen arithmetischen Proportional-Grössen** genannt werden.

Es erhellet, daß man auf ähnliche Art fünf, sechs und mehr stetige arithmetische Proportional-Grössen zuwege bringen könne, wenn man die Differenz jedesmahl wieder zum letzten Gliede addirt. Man erhält auf solche Art eine Reihe von Grössen, worin jedes Glied zum nächst vorhergehenden einerley arithmetisches Verhältniß hat, und man nennt sie eine **arithmetische Progression**. Wäre das zweyte Glied kleiner, als das erste; so müste man die Differenz allemahl subtrahiren, und man erhält sodann eine abnehmende, so wie im ersten Falle eine wachsende arithmetische Progression. Dergleichen Progressionen würden folgende seyn;

4	7	10	13	16	19	22	25	u. s. w.
223	213	203	193	183	173	u. s. w.		

§. 150.

Es sind zwo Grössen gegeben, man soll zwischen ihnen eine oder auch mehr mittlere arithmetische Proportional-Grössen suchen.

Aufl. I. Man addire beyde Grössen zusammen und dividire die Summe durch 2, so hat man eine mittlere arithmetische Proportional-Grösse zwischen den gegebenen.

So findet man zwischen 123 und 175 die mittlere Zahl 149.

$$\begin{array}{r} 123 \\ 175 \\ \hline 298 \\ 2, \\ \hline 149 \end{array}$$

Beweis. Wenn A und C die gegebenen Grössen sind, und X die gesuchte ist; so soll die Proportion richtig seyn: $A - X = X - C$. Demnach wird $2X = A + C$ (148 §.) und $X = \frac{1}{2}(A + C)$.

II. Wenn A das erste Glied und D die Differenz der Glieder ist: so muß das gesuchte zweyte Glied $X = A + D$ seyn. Demnach wird das dritte Glied $= A + 2D$; aber dies ist das gegebene C, also hat man $A + 2D = C$. Hieraus folgt, $2D = C - A$, und $D = \frac{1}{2}(C - A)$. Dies zum ersten gegebenen Gliede A addirt, muß also das gesuchte zweyte $X = A + \frac{1}{2}(C - A)$ geben, und hieraus folgt die Regel:

Man addire die halbe Differenz der gegebenen Grössen zum ersten Gliede: so ist die Summe die gesuchte mittlere Grösse.

Wenn wie vorhin $A = 123$, $C = 175$ ist: so giebt die nebenstehende Rechnung ebenfalls $X = 149$.

C	175
A	123
$C - A$	52
	2,
$\frac{1}{2}(C - A)$	26
	149

Sollte aber das erste Glied A grösser als das letzte gegebene B seyn; so muß man die halbe Differenz der gegebenen Grössen $\frac{1}{2}(A - C)$ vom ersten Gliede A subtrahiren. Denn ist D die Differenz der Glieder: so ist in diesem Fall $X = A - D$, und $C = A - 2D$. (149 §.) Hieraus folgt, $C + 2D = A$, und $2D = A - C$, also $D = \frac{1}{2}(A - C)$ und $X = A - \frac{1}{2}(A - C)$.

Wenn $A = 396$, und $C = 217$ ist: so giebt die beygefügte Rechnung $X = 306\frac{1}{2}$.

A	396
C	217
	179
	2,
$\frac{1}{2}(A - C)$	$89\frac{1}{2}$
X	$306\frac{1}{2}$

III. Soll man zwischen zwoen Grössen mehr als eine mittlere arithmetische Proportional-Grösse suchen; so kommt es nur darauf an, die erste davon zu finden, weil sich durchaus die übrigen von selbst ergeben. Diese ist allemahl das zweyte Glied der Progression, wenn sie durch die mittlere Glieder vollständig gemacht ist, und es folgt nach dem ersten Gliede immer ein Glied mehr, als man mittlere Glieder sucht, weil das letzte hinzukommt.

Es sey A das erste, B das zweyte, V das letzte Glied, D die Differenz der Glieder, und man setze, daß n Glieder nach dem ersten folgen sollen: so ist $B = A + D$ und $V = A + nD$ (149 §.) vorausgesetzt, daß die Progression wachse. Also wird $nD = V - A$, und $D = \frac{1}{n}(V - A)$ dies giebt $B = A + \frac{1}{n}(V - A)$. Hiezu D addirt giebt das dritte, und abermahl D addirt giebt das vierte, u. f. f. bis man auf V kommt. Dies giebt die Regel:

Man dividire die Differenz des ersten und letzten Gliedes durch die Zahl der Glieder, die nach dem ersten in der Progression folgen sollen, also durch eine Zahl, die um 1 grösser ist, als die Anzahl der gesuchten mittlern Grössen. Der Quotient zum ersten Gliede addirt giebt das erste der mittlern Glieder, woraus die übrigen nach dem 149 §. folgen.

Wenn zwischen 4 und 25 sechs mittlere Glieder gesucht werden sollen; so giebt die neben stehende Rechnung das erste gesuchte = 7 und die sechs gesuchten sind:

7 10 13 16 19 22

$$\begin{array}{rr} V & 25 \\ A & 4 \\ \hline V-A & 21 \\ n & 7, \\ \hline \frac{1}{n}(V-A) & 3 \\ \hline B & 7 \end{array}$$

Wenn V < A ist: so muß die Progression abnehmen. **Man dividirt also nun die Differnz dieser Grössen** $A - V$ **noch mit eben der Zahl, wie vorhin, und subtrahirt den Quotienten vom ersten Gliede** A, **um das zweyte Glied der Progression, oder das erste gesuchte mittlere zu erhalten.**

Denn es ist nun $B = A - D$ und $V = A - nD$ (164 §.) Also $nD + V = A$, und $nD = A - V$, folglich $D = \frac{1}{n}(A - V)$ und $B = A - \frac{1}{n}(A - V)$.

Soll man zwischen 413 und 341 sieben mittlere arithmetische Proportionalzahlen suchen; so giebt die beygefügte Berechnung die erste gesuchte = 404, und alle sieben gesuchte sind: 404, 395, 386, 377, 368, 359, 350.

$$\begin{array}{rr} A & 413 \\ V & 341 \\ \hline A-V & 72 \\ & 8) \\ \hline \frac{1}{n}(A-V) & 9 \\ \hline B & 404 \end{array}$$

151 §.

Wenn man die halbe Differenz zwoer Grössen zu ihrer halben Summe addirt, so wird die grössere von beyden gefunden: wenn man aber die halbe Differenz von der halben Summe subtrahirt, so findet man die kleinere.

Beweis. Wenn A und C diese Grössen sind, und $A > C$ ist; so ist $\frac{1}{2}(A+C)$ zwischen beyden die mittlere arithmetische Proportionalzahl; (150 §. n. I.) also A, $\frac{1}{2}(A+C)$, C eine stetige arithmetische Proportion. Wird nun die Differenz der Glieder $= D$ gesetzt, so ist $D = \frac{1}{2}(A-C)$, (150 §. n. II.) also $A = \frac{1}{2}(A+C) + D$, und $C = \frac{1}{2}(A+C) - D$, oder $A = \frac{1}{2}(A+C) + \frac{1}{2}(A-C)$, und $C = \frac{1}{2}(A+C) - \frac{1}{2}(A-C)$.

152 §.

Die Summe des ersten und letzten Gliedes der arithmetischen Progression ist so groß, als die Summe zweyer andern Glieder *P* und Q derselben Progression, wenn vor dem einen *P* bis zum ersten *A* so viele Glieder voran gehen, als nach dem andern Q bis zum letzten Gliede V folgen.

Die Summe aller Glieder der Progreßion aber wird gefunden, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl aller Glieder multiplicirt.

Beweis des 1 S. Wenn vor P bis zum ersten Gliede r Glieder voran gehen, so ist P das $(r+1)$te Glied, das erste A mitgezählt, und man hat $P = A + r \cdot D$. Wenn ferner nach P bis Q noch m Glieder folgen Q mitgezählt, so ist Q das $(r+1+m)$te Glied, und man findet $Q = A +$

$(r+m)$ D. Wenn endlich nach Q bis zum letzten Gliede V wiederum r Glieder folgen das letzte V mitgezählt, so ist die Anzahl aller Glieder der Progression $= 2r + 1 + m$, und $V = A + (2r + m) D$, mithin $A + V = 2A + (2r+m) D$. Es war aber

$$P = A + rD$$
$$Q = A + (r+m) D,$$

folglich ist $P + Q = 2A + (2r + m) D$, und $A + V = P + Q$.

Beweis des 2. S. Wenn die Anzahl aller Glieder eine grade Zahl ist, so giebt es halb so viel Paar solcher Glieder wie P und Q, die unter den übrigen Gliedern eine solche Stelle einnehmen, daß vor dem einen P so viele Glieder bis zum ersten vorangehen; als nach dem andern Q bis zum letzten V folgen: jedes Paar dieser Glieder ist $= A + V$. Nun sey die Anzahl aller Glieder $n = 2k$; so ist die Summe aller dieser Paare $= k . (A + V)$, und diese ist einerley mit der Summe aller Glieder der Progression. Wird diese Summe demnach $= S$ gesetzt, so ist $S = \frac{1}{2} n . (A + V)$.

Wenn dagegen n als die Anzahl aller Glieder ungrade ist, so sey $n = 2k + 1$. Zählt man nun die Paare der Glieder wie P und Q die unter den übrigen eine solche Stelle haben, daß vor dem einen bis zum ersten so viele Glieder voran gehen, als nach dem andern bis zum letzten Gliede folgen, so ist die Anzahl dieser Paare $= k$, und ihre Summe $= k (A + V)$. Das ist aber noch nicht die Summe aller Glieder der Progression, weil noch das mittelste Glied fehlt. Vor diesem mittelsten gehen k Glieder voran bis zum ersten, also ist es das $(k+1)$te Glied, und wenn man es $= M$ setzt, so hat man

M = A

$M = A + k . D$. Die Zahl aller Glieder ist $= 2k + 1$, also $V = A + 2k . D$, und $A + V = 2A + 2kD = 2M$, wie dem ersten Satz gemäß ist, mithin $M = \frac{1}{2}(A + V)$. Das giebt $S = k(A + V) + M = k(A + V) + \frac{1}{2}(A + V)$, oder $S = (k + \frac{1}{2})(A + V)$, mithin wie vorhin $S = \frac{1}{2} n (A + V.)$

Der X. Abschnitt.

Von den geometrischen Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

153 §.

Die Grösse einer Zahl, oder sonst einer Sache A gegen eine andre B so bestimmt, daß man übersiehet, wie vielmahl entweder B ganz, oder ein aliquoter Theil von B in A enthalten sey, heißt das **geometrische Verhältniß** von *A* gegen *B*, und die Zahlen oder die Grössen selbst, wovon die eine solchergestalt mit der andern verglichen wird, heissen **die Glieder des Verhältnisses**. Man betrachte eins davon als das **vorhergehende**, das andre als das **nachfolgende Glied**, und die Ordnung ist an sich willkührlich, denn man kann fragen: wie groß 12 gegen 4, man kann umgekehrt fragen: wie groß 4 gegen 12 sey? Die Zahl, welche die Grösse des vorhergehenden Gliedes gegen die nachfolgende angiebt, heißt **der Exponent des Verhältnisses**; und wenn beyde Glieder des Verhältnisses Zahlen sind, so ist dieser **Exponent** einerley mit dem **Quotienten**, der gefunden wird, wenn man das vorhergehende Glied mit dem nachfolgenden dividirt. (47. 111 §.) Die alten Geometer haben allemahl das geometrische Verhältniß verstanden, wenn sie das Wort **Verhältniß** (ratio) allein gebrauchen, und es wird auch hier in der Folge allemahl das geometrische Verhältniß verstanden werden, wenn gleich das Beywort, geometrisch, der Kürze wegen wegbleiben wird.

154 §.

Nimmt man an, daß A und B ein Paar Zahlen bezeichnen, so kann das Verhältniß von A zu B am natürlichsten durch das zwischen beyden gesetzte Divisionszeichen (:) auf die Art bezeichnet werden, daß man A : B schreibt. Wenn alsdenn das nachfolgende Glied B bekannt, und der Exponent des Verhältnisses $A : B = m$ ebenfalls gegeben ist; so ist zugleich die Grösse des vorhergehenden Gliedes $A = mB$ bekannt. Wenn gleich A und B ein Paar grade Linien, oder sonst ein Paar andre Grössen von einerley Art sind, und man kann auf irgend eine Art finden, wie vielmahl die eine B entweder ganz, oder ein aliquoter Theil von ihr in der andern A enthalten sey; so läßt sich dies Verfahren ebenfalls als eine **Division** betrachten. Man muß würklich A in so viele gleiche Theile theilen, als m Eins enthält, wenn m eine ganze Zahl ist, die anzeigt, wie vielmahl B in A enthalten sey; oder in so viele gleiche Theile, als der Zähler des Bruchs $\frac{n}{m}$ Eins enthält, wenn derselbe ausdrückt, wie vielmahl $\frac{1}{m}$ B in A enthalten sey. Hiedurch wird der allgemeine Ge-

Gebrauch des Divisionszeichens, um ein Verhältniß zu bezeichnen, auch für die Fälle völlig gerechtfertiget, wenn zwar die Glieder des Verhältnisses keine Zahlen sind, aber doch entweder das nachfolgende Glied selbst, oder wenigstens ein aliquoter Theil desselben im vorhergehenden Gliede bey der so angestellten Division aufgeht.

155 §.

Bey dieser Art, die Vergleichung anzustellen, liegt die Voraussetzung zum Grunde, daß beyde Glieder des Verhältnisses ein **gemeinschaftliches Maaß** haben, oder daß sich ein aliquoter Theil des einen angeben lasse, der zugleich ein aliquoter Theil des andern ist. Grössen von dieser Art heissen **commensurable Grössen**, und so sind alle Zahlen beschaffen, die sich durch eine bestimmte Anzahl Ziffern ausdrücken lassen. Alle ganze Zahlen haben die Einheit selbst zum gemeinschaftlichen Maaß; und wenn man ein Paar Brüche auf einerley Benennung gebracht hat, so zeigt der gemeine Nenner denjenigen aliquoten Theil der Einheit an, der das gemeine Maaß beyder Brüche abgiebt. Aber man darf nicht voraussetzen, daß jede zwo grade Linien, und sonst überhaupt zwo Grössen, wenn sie von einerley Art sind, ein gemeinschaftliches Maaß haben, das sich eben so bestimmt angeben liesse. In der Folge wird bewiesen werden, daß zuweilen das Gegentheil statt finde, so daß gar kein aliquoter Theil der einen Grösse bestimmt angegeben werden kann, der zugleich ein aliquoter Theil der andern wäre. Da dann solche Grössen, die kein gemeinschaftliches Maaß haben, **incommensurable Grössen** heissen.

156 §.

In dem Fall, wenn die Glieder des Verhältnisses A : B commensurable Grössen sind, kann eine Zahl angegeben werden, die es ausdrückt, wie vielmahl entweder B selbst, oder ein aliquoter Theil von B in A enthalten sey: in eben diesem Fall also kann das Verfahren, vermittelst dessen man den Exponenten des Verhältnisses A : B findet, als eine Division angesehen, und der Exponent selbst als ein Quotient betrachtet, auch in eben dem Fall der Exponent oder der Quotient A : B wie ein Bruch $\frac{A}{B}$ ausgedrückt werden. Wenn nemlich $A : B = \frac{n}{m}$ ist, so ist es völlig gleichgültig, ob man $\frac{A}{B}$, oder den Bruch $\frac{n}{m}$ schreibt. Denn A und B mögen ein Paar grade Linien, ein Paar Gewichte, oder was man sonst will, bezeichnen, wenn es nur Grössen von einerley Art sind; so ist doch der Quotient A : B allemahl eine Zahl, diejenige nemlich, welche angiebt wie vielmahl entweder B selbst, oder ein aliquoter Theil von B in A enthalten sey. Ein Verhältniß dieser Art heißt ein **rationales Verhältniß**; und jede Zahl, die sich bestimmt angeben läßt, nennt man eine **rationale Zahl**, in wieweit sie die Grösse des vorhergehenden Gliedes in einem Verhältniß gegen das nachfolgende damit commensurable Glied bestimmt und völlig genau auszudrücken, dienen kann.

257 §.

Es sey also A eine grade Linie, die man den bisherigen Schlüssen gemäß mit B vergleichen soll; so wird

wird das erste seyn, daß man nachsiehet, ob B selbst etlichemahl in A enthalten sey, ohne daß ein Rest bleibt? Gesetzt es sey B in A zweymahl enthalten, überdem aber enthalte A noch einen Ueberschuß über 2B; so kann man sich diesen Ueberschuß als einen Rest vorstellen, den die Division der Linie *A* mit *B* übrig läßt. Nun wird man weiter prüfen, ob vielleicht $\frac{1}{2}$B, oder $\frac{1}{3}$B, oder $\frac{1}{4}$B, oder $\frac{1}{5}$B, u. s. w. in A aufgehe? So lange keiner dieser aliquoten Theile der Linie B zugleich ein Maaß von A ist; so lange wird die Division nicht aufgehen, es wird vielmehr allemahl ein Rest bleiben, und dieser Rest ist in jedem Fall kleiner als der eben dasmahl gebrauchte Divisor. Man nehme an, es sey gefunden worden, daß $\frac{1}{m}$B $n$mahl und überdem noch der Ueberschuß R in A enthalten sey; so ist R als der Rest anzusehen, der übrig bleibt, wenn man A mit $\frac{1}{m}$B dividirt. Man hat alsdenn $A = \frac{n}{m} B + R$ und $R < \frac{1}{m} B$. Wird ferner die Ergänzung des Restes zum Divisor $\frac{1}{m} B - R = S$ gesetzt; so ist auch $S < \frac{1}{m} B$, und $A + S = \frac{n}{m} B + R + S$, oder $A + S = \frac{n+1}{m} B$, also auch $A = \frac{n+1}{m} B - S$. Demnach hat man $\frac{A}{B} = \frac{n}{m} + \frac{R}{B}$, und zugleich $\frac{A}{B} = \frac{n+1}{m} - \frac{S}{B}$, also $\frac{A}{B} > \frac{n}{m}$ und zugleich $\frac{A}{B} < \frac{n+1}{m}$. Wenn demnach B nicht selbst in A aufgeht, so kann man wenigstens ein Paar Brüche von einerley Nenner angeben, deren Zähler nur um Eins verschieden sind, wovon zwar der eine noch kleiner, der andre aber schon grösser ist, als der Exponent des Verhältnisses A : B.

158 §.

Wären A und B incommensurable Grössen, so würde $\frac{1}{m}$ B in A nie aufgehen, wie groß auch die Zahl m angenommen würde: demnach liesse sich auf diesem Wege kein Bruch finden, der ganz genau den Exponenten des Verhältnisses A : B ausdrückte. Indessen würde doch jeder von den nach Anleitung des vorigen §. gefundenen beyden Brüchen, $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$, dem gesuchten Exponenten so nahe kommen, daß der Unterschied kleiner wäre, als $\frac{1}{m}$: denn es ist $\frac{R}{B} < \frac{1}{m}$ und $\frac{S}{B} < \frac{1}{m}$. Weil man nun die Zahl m so groß annehmen kann, daß der Bruch $\frac{1}{m}$ kleiner wird, als jeder noch so kleine Bruch, der sich angeben läßt; (128 §.) so können zugleich die Quotienten $\frac{R}{B}$, $\frac{S}{B}$ kleiner werden, als jede gegebene Zahl. Diesemnach läßt sich der Exponent des Verhältnisses einer Grösse zur andern, wenn gleich beyde Grössen incommensurabel sind, so genau angeben, daß der Fehler kleiner ist, als jeder noch so kleiner gegebene Bruch.

159 §.

Je grösser die Zahl m angenommen wird, desto grösser wird auch n: nimmt man m nochmahl so groß an, als vorher, so wird auch n wenigstens nochmahl so groß; und wenn $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m}$B kleiner als der vorige Rest ist, so wird die Zahl n mehr als nochmahl so groß. Indessen kann der so gefundene Bruch $\frac{n}{m}$ nie völlig $= \frac{A}{B}$ werden, so lange für m eine Zahl von bestimmter Grösse angenommen wird: auch bleibt allemahl $\frac{n+1}{m} > \frac{A}{B}$, ob sich gleich der Bruch $\frac{n+1}{m}$ ebenfalls dem Quotienten A : B desto mehr nähert, je grösser m angenommen wird. Demnach kann man sich die Sache am besten so vorstellen: der Exponent des Verhältnisses A : B, oder der Quotient, der Bruch $\frac{A}{B}$, sey der **letzte unter allen Quotienten**, die gefunden werden, wenn man die Zahl m ohne Aufhören grösser nimmt, und jedesmahl A mit $\frac{1}{m}$B dividirt: eigentlich ist dieser Quotient die **Gränze, welcher sich die Brüche** $\frac{n}{m}$ **und** $\frac{n+1}{m}$ **alsdenn ohne Aufhören nähern,** die sie aber nie völlig erreichen.

160 §.

Ein solches Verhältniß, dessen Glieder incommensurable Grössen sind, heißt ein **irrationales Verhältniß**, und der Expoment desselben wird um deßwillen eine **Irrationalzahl** genannt, weil derselbe allemahl ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner

ner in bestimmten Zahlen nie völlig so angegeben werden können, daß dieser Bruch die Grösse des vorhergehenden Gliedes gegen das nachfolgende ganz genau ausdrückte. Wenn indessen den bisherigen Schlüssen gemäß der Quotient $\frac{A}{B} = \frac{n}{m} + \frac{R}{B} = \frac{n+1}{m} - \frac{S}{B}$ gefunden, und die Näherung so weit getrieben ist, daß $\frac{R}{B}$, oder $\frac{S}{B}$ kleiner ist, als ein gegebener sehr kleiner Theil der Einheit; so ist $\frac{n}{m}$ eine Rationalzahl und $\frac{R}{B}$ der noch unbekannte irrationale Theil des Quotienten. Der letztere kann, wenn man es nöthig findet, noch kleiner, und der rationale Theil dem Quotienten $\frac{A}{B}$ noch näher gebracht werden. Diese Schlüsse rechfertigen es also hinlänglich, daß jedes Verhältniß wie ein Quotient $A : B$, oder wie ein Bruch $\frac{A}{B}$, bezeichnet werden könne, wenn das vorhergehende Glied als das Dividendum, oder der Zähler, das nachfolgende aber als der Divisor, oder der Nenner, angesehen wird.

161 §.

Wenn eine gegebene Zahl μ kleiner ist, als der Exponent eines Irrational-Verhältnisses $A : B$, so kann der rationale Theil vom Exponenten des Verhältnisses $A : B$ grösser werden, als die gegebene Zahl.

Beweis.

Beweis. Weil $\mu < \frac{A}{B}$ angenommen wird, so sey $\mu + \nu = \frac{A}{B}$, und man nehme die Zahl m so groß an, daß $\frac{1}{m} < \nu$ werde. Wenn man nun vermittelst der Division $A = \frac{n}{m} B + R$ gefunden hat, so ist $R < \frac{1}{m} B$, also $\frac{R}{B} < \frac{1}{m}$, mithin auch $\frac{R}{B} < \nu$. Ferner ist $\frac{A}{B} = \frac{n}{m} + \frac{R}{B}$, und $\frac{n}{m}$ der rationale Theil vom Exponenten des Verhältnisses $A : B$; vermöge der Voraussetzung ist überdem $\frac{A}{B} = \mu + \nu$, also $\frac{n}{m} + \frac{R}{B} = \mu + \nu$. Weil aber $\nu > \frac{R}{B}$ war, so erhält man $\frac{n}{m} > \mu$. (28 §.)

162 §.

Wenn eine Grösse A gegen B eben so groß ist, als eine dritte C gegen die vierte D; oder wenn die zweyte B in der ersten A eben so vielmahl enthalten ist, als die vierte D in der dritten C; so ist das Verhältniß A : B eben so groß, als das Verhältniß C : D; und diese Gleichheit zweyer Verhältnisse heißt eine **geometrische Proportion**, oder aus den im 153 §. angeführten Ursachen schlechthin eine **Proportion**. Die Grössen A, B, C, D, heissen die **Glieder** der Proportion, oder auch **geometrische Proportionalgrössen**, und das erste und dritte, so wie das zweyte und vierte, werden **gleichnahmi-**

ge Glieder der Proportion genannt: jenes sind die beyden vorhergehenden, und dieses die beyden nachfolgenden Glieder der beyden gleichen Verhältnisse, welche die Proportion ausmachen. Am natürlichsten bezeichnet also der Ausdruck $A : B = C : D$ eine geometrische Proportion, denn dies zeigt an, es sey das Verhältniß $A : B$ dem Verhältniß $C : D$ gleich; auch kann man so schreiben $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ (154. 157 §.) In den Schriften der Ausländer wird diese Proportion so bezeichnet $A : B :: C : D$.

163 §.

Wenn man zwo Grössen B und D mit einerley ganzen Zahl m dividirt; so heissen die Quotienten $\frac{1}{m}B$ und $\frac{1}{m}D$ **ähnliche aliquote Theile** (aequae-submultipla) von B und D. Will man nun wissen, ob vier Grössen A, B, C, D in geometrischer Proportion sind, so prüft man, ob ähnliche aliquote Theile der beyden nachfolgenden Glieder in den damit zusammen gehörigen vorhergehenden Gliedern gleich vielmahl enthalten sind. In dem Fall, wenn $\frac{1}{m}B$ in A und $\frac{1}{m}D$ in C aufgeht, und solchergestalt einerley Zahl n gefunden wird, hat man $\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$ und $\frac{C}{D} = \frac{n}{m}$, mithin $A : B = C : D$. Nun sind die beyden vorhergehenden Glieder $A = \frac{n}{m}B$, $C = \frac{n}{m}D$ **ähnliche** multipla von ähnlichen aliquoten Theilen der beyden nachfolgenden Glieder, und beyde Verhältnisse sind rational. Wären diese Verhältnisse irrational, so könnten die Divisionen nie auf-

aufgehen: indessen läßt sich für incommensurable Grössen ein ganz ähnliches Kennzeichen der Proportionalität festsetzen, welches an sich ganz allgemein ist, und jedesmahl seine Anwendung findet, wenn geprüft werden soll, ob vier Grössen in geometrischer Proportion sind, oder nicht.

164 §.

Wenn ähnliche aliquote Theile $\frac{1}{m}B$ und $\frac{1}{m}D$ der beyden nachfolgenden Glieder zweyer Verhältnisse $A:B$, und $C:D$, in den damit zusammen gehörigen vorhergehenden Gliedern A und C allemahl gleichvielmahl enthalten sind, wie klein auch jene aliquoten Theile genommen werden, mit Beobachtung dessen, daß die jedesmahligen Reste kleiner als die dasmahl gebrauchten Divisoren seyn müssen; so sind beyde Verhältnisse gleich groß, gesetzt daß auch die Divisionen nie aufgehen.

Beweis. Vermöge der Voraussetzung ist $\frac{1}{m}$D in C $n$mahl enthalten, wenn $\frac{1}{m}$B in A $n$mahl enthalten ist, wie groß auch m angenommen wird. Weil aber die Divisionen nie aufgehen; so sey $A = \frac{n}{m}B + R$, und $C = \frac{n}{m}D + r$, allemahl aber $R < \frac{1}{m}B$, und $r < \frac{1}{m}D$; mithin $\frac{A-R}{B} = \frac{n}{m} = \frac{C-r}{D}$.

Wäre nun die Zahl $\frac{C}{D} < \frac{A}{B}$, so könnte man die Zahl m so groß nehmen, daß der rationale Theil des Quotienten $\frac{A}{B}$ grösser als $\frac{C}{D}$ würde: (161 §).

Alsdenn wäre $\frac{A-R}{B} > \frac{C}{D}$, und vermöge der Voraussetzung bleibt allemahl $\frac{A-R}{B} = \frac{C-r}{D}$, mithin wäre nun $\frac{C-r}{D} > \frac{C}{D}$, welches unmöglich ist.

Wäre dagegen $\frac{C}{D} > \frac{A}{B}$, so könnte man wiederum die Zahl m so groß nehmen, daß der rationale Theil des Quotienten $\frac{C}{D}$ grösser als $\frac{A}{B}$ würde. (161 §.) Alsdenn hätte man $\frac{C-r}{D} > \frac{A}{B}$, und zugleich $\frac{C-r}{D} = \frac{A-R}{B}$, mithin wäre $\frac{A-R}{B} > \frac{A}{B}$, welches ebenfalls unmöglich ist.

Weil nun vermöge dieser Schlüsse weder $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, noch $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$ seyn kann, so ist $A:B = C:D$.

165 §.

Wenn das Verhältniß $A:B$ dem Verhältniß $C:D$ gleich ist, und man alsdenn von B und D ähnliche aliquote Theile nimmt, so müssen diese in A und C gleichvielmahl enthalten seyn, die Divisionen mögen aufgehen, oder nicht, wenn nur richtig so dividirt wird, daß die Reste kleiner als die Divisoren bleiben.

Beweis.

Beweis. Es sey $A : B = C : D$, und $A = \frac{n}{m}B + R$, so ist $\frac{A}{B} = \frac{n}{m} + \frac{R}{B}$. Ferner ist vermöge der Voraussetzung $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, also auch $\frac{C}{D} = \frac{n}{m} + \frac{R}{B}$. Ueberdem ist $R < \frac{1}{m}B$, also sey $R = \frac{1}{m}B - S$, und man erhält $\frac{C}{D} = \frac{n}{m} + \frac{1}{m} - \frac{S}{B}$. Weil nun $S < \frac{1}{m}B$ ist, so ist $\frac{S}{B} < \frac{1}{m}$, und $\frac{1}{m} - \frac{S}{B} < \frac{1}{m}$. Wird also $\left(\frac{1}{m} - \frac{S}{B}\right) D = r$ gesetzt, so hat man auch $\frac{C}{D} = \frac{n}{m} + \frac{r}{D}$, also $C = \frac{n}{m}D + r$, und $r < \frac{1}{m}D$.

166 §.

1.) Wenn das Verhältniß $A : B = C : D$ und überdem $B = D$ ist; so muß $A = C$ seyn: denn ein Paar ungleiche Grössen können gegen einerley dritte nicht einerley Verhältniß haben.

2.) Wenn dagegen $B > D$ oder $B < D$ ist, so hat man im ersten Fall auch $A > C$, im letzten Fall aber $A < C$.

Beweis. Es ist allemahl $A = \frac{n}{m}B + R$, $C = \frac{n}{m}D + r$, und $R < \frac{1}{m}B$, $r < \frac{1}{m}D$, wie groß auch m genommen wird. (165 §.) Ist nun $B > D$, so sey $B = D + E$, und man hat $A = \frac{n}{m}D + \frac{n}{m}E + R$: allemahl aber kann $\frac{1}{m}D < \frac{n}{m}E$ werden.

Denn wäre für einen gewissen Werth m noch $\frac{1}{m}$D $> \frac{n}{m}$E, so nehme man m nochmahl so groß an: alsdenn muß auch n wenigstens nochmahl so groß werden, (159 §.) mithin wird $\frac{n}{m}$ E wenigstens nicht kleiner, wogegen $\frac{1}{m}$D halb so groß wird, als vorher. Fährt man demnach so fort die Zahl m zu verdoppeln, so wird endlich $\frac{1}{m}$ D $<$ $\frac{n}{m}$ E, also auch $r < \frac{n}{m}$E. Alsdenn ist $\frac{n}{m}$D + $\frac{n}{m}$ E + R $> \frac{n}{m}$D + r, mithin A $>$ C.

Wäre B $<$ D, so könnte man B + E = D setzen, und man hätte A = $\frac{n}{m}$ B + R, C = $\frac{n}{m}$ B + $\frac{n}{m}$ E + r. Nun aber kann m so groß genommen werden, daß $\frac{1}{m}$ B $<$ $\frac{n}{m}$ E wird, so ist auch R $<$ $\frac{n}{m}$E, mithin A $<$ C.

167 §.

Wenn die Proportion $A : B = C : D$ richtig ist, so hat man auch in umgekehrter Ordnung $B : A = D : C$.

Beweis. Weil nemlich A = $\frac{n}{m}$B + R, C = $\frac{n}{m}$D + r, und R $<$ $\frac{1}{m}$B, und $r < \frac{1}{m}$D seyn muß, was auch m für eine Zahl bezeichnet; (165 §.) so ist B = $\frac{m}{n}$(A − R) und D = $\frac{m}{n}$(C − r), also

$\frac{B}{A-R}$

$\frac{B}{A-R} = \frac{m}{n} = \frac{D}{C-r}$. Ferner sey $\frac{1}{m}B - R = S$, und $\frac{1}{m}D - r = s$, so ist $A + S = \frac{n+1}{m}B$, und $C + s = \frac{n+1}{m}D$, mithin $\frac{B}{A+S} = \frac{m}{n+1} = \frac{D}{C+s}$. Nun sey $B : A = D : E$, so muß entweder $E < C$ oder $E > C$ seyn, wofern nicht $E = C$ seyn kann.

Es sey $E < C$, so ist $\frac{E}{D} < \frac{C}{D}$, und man kann die Zahl m so groß nehmen, daß der rationale Theil des Quotienten $\frac{C}{D}$ grösser als $\frac{E}{D}$ wird. (161 §.) Dies sey geschehen, also nunmehro $\frac{n}{m} > \frac{E}{D}$, oder $\frac{C-r}{D} > \frac{E}{D}$, so ist $C - r > E$, also $\frac{D}{C-r} < \frac{D}{E}$. Aber vermöge der Voraussetzung ist $\frac{D}{E} = \frac{B}{A}$, also wäre $\frac{D}{C-r} < \frac{B}{A}$, mithin auch $\frac{B}{A-R} < \frac{B}{A}$, welches nicht seyn kann.

Wäre $E > C$, so setze man, es sey $E = C + d$, und nehme nun m so groß an, daß $\frac{1}{m}D < d$ wird; so ist auch $s < \frac{1}{m}D$, also $s < d$, folglich $C + s < C + d$, oder $C + s < E$, und $\frac{D}{C+s} > \frac{D}{E}$. Aber vermöge der Voraussetzung ist $\frac{D}{E} = \frac{B}{A}$, also $\frac{D}{C+s}$

$\frac{D}{C+s} > \frac{B}{A}$. Weiter ist $\frac{B}{A+s} = \frac{D}{C+s}$, mithin wäre $\frac{B}{A+S} > \frac{B}{A}$, welches unmöglich ist.

Weil nun weder $E < C$, noch $E > C$ seyn kann, so ist $E = C$, folglich auch $B : A = D : C$.

Diesemnach ist es gleichgültig, ob man einen Ausdruck dieser Art $A : B = C : D$ so versteht: *A* mit *B* dividirt giebt eben soviel als *C* mit *D* dividirt; oder umgekehrt: *B* mit *A* dividirt giebt eben soviel, als *D* mit *C* dividirt: denn eins ist eine Folge vom andern. Dividirt man B und D mit den ähnlichen aliquoten Theilen $\frac{1}{m}A$ und $\frac{1}{m}C$, und findet man alsdenn $B = \frac{n}{m}A + R$, so daß $R < \frac{1}{m}A$ ist; so wird zugleich $D = \frac{n}{m}C + r$ gefunden, und $r < \frac{1}{m}C$.

168 §.

Aus einer jeden Proportion $A : B = C : D$, wenn alle vier Glieder von einerley Art sind, folgt auch (*terminos antecedentes et consequentes summando*) $A + C : B + D = A : B$ oder $= D : C$.

Beweis. Weil allemahl beydes zugleich $A = \frac{n}{m}B + R$ und $C = \frac{n}{m}D + r$ seyn muß, wie groß auch *m* angenommen wird; (165 §.) so ist $A + C = \frac{n}{m}(B + D) + R + r$, und $R + r < \frac{1}{m}(B + D)$ weil $R < \frac{1}{m}B$, und $r < \frac{1}{m}D$

bleibt

bleibt. Diesemnach ist vermöge des 164 §. auch $A+C:B+D=A:B$ oder $=C:D$.

Wenn demnach auch drey, vier und mehr Verhältnisse gleichartiger Grössen gleich groß sind, und man summirt alle vorhergehende, so wie alle nachfolgende Glieder; so verhalten sich die Summen wie jedes Paar der zusammen gehörigen summirten Theile. Es sey

$$A : B = m : n$$
$$C : D = m : n$$
$$E : F = m : n$$
$$G : H = m : n \text{ u. s. f.}$$

so ist $A:B=C:D$, also $A+C:B+D=m:n$ mithin $A+C+E:B+D+F=m:n$, also auch $A+C+E+G:B+D+F+H=m:n$, u. s. f. Von jeder Anzahl solcher Proportionen gilt der Schluß auf die nächstfolgende um Eins grössere Anzahl.

169 §.

Wenn alle vier Glieder der Proportion $A:B=C:D$ **von einerley Art sind, und überdem** $B>D$, **also auch** $A>C$ **ist; so folgt auch,** *(antecedentes et consequentes differentiando)* **es sey** $A-C:B-D=C:D$ **oder** $=A:B$.

Beweis. Man setze $A-C=F$, $B-D=G$, so ist $A=F+C$, $B=G+D$; also vermöge der Voraussetzung $F+C:G+D=C:D$. Weil es aber möglich seyn muß, eine Grösse anzugeben, die sich gegen G, wie C zu D verhält, so sey $E:G=C:D$, und man erhält $E+C:G+D=C:D$, (168 §.) also auch $E+C:G+D=F+C:G+D$. Demnach muß $E+C=F+C$ seyn, (166 §.) folglich auch $E=F=A-C$, und man erhält $A-C:B-D=C:D$ oder $=A:B$.

170 §.

Wenn man zwo Grössen A und B, die von einerley Art sind, mit einerley rationalen oder irrationalen Zahl multiplicirt, oder dividirt; so verhalten sich die Producte wie die Multiplicanda, und die Quotienten, wie die Dividenda.

Beweis. 1.) Es ist $A : B = A : B$, also $2A : 2B = A : B$, (168 §.) mithin aus eben dem Grunde $3A : 3B = A : B$, u. s. f. Es sey n eine ganze Zahl und $nA : nB = A : B$, so folgt aus dieser Proportion allemahl auch $(n+1)A : (n+1)B = A : B$. (168 §.) Aber die Proportion $nA : nB = A : B$ ist wahr, wenn n die Zahl 2 oder 3 bezeichnet, also ist sie für jede andre ganze Zahl 4, 5, 6, 7, u. s. f. ebenfalls richtig.

2.) Wenn also auch m eine ganze Zahl bezeichnet, so ist $\frac{A}{m} : \frac{B}{m} = m \cdot \frac{A}{m} : m \cdot \frac{B}{m}$, (n. 1.) oder $\frac{A}{m} : \frac{B}{m} = A : B$.

3.) Ferner ist $n \cdot \frac{A}{m} : n \cdot \frac{B}{m} = \frac{A}{m} : \frac{B}{m}$ (n. 1.) und $\frac{A}{m} : \frac{B}{m} = A : B$, (n. 2.) also $\frac{n}{m} A : \frac{n}{m} B = A : B$.

4.) Wenn $\frac{P}{Q}$ eine Irrationalzahl bezeichnet, oder welches einerley ist, wenn P und Q incommensurable Grössen sind; so findet man allemahl $P = \frac{n}{m} Q + R$, so daß $R < \frac{1}{m} Q$ ist, wie groß auch m

ange=

angenommen wird, mithin $\frac{P}{Q} = \frac{n}{m} + \frac{R}{Q}$, und $\frac{R}{Q} < \frac{1}{m}$. Man setze $\frac{P}{Q} . A = F$, $\frac{P}{Q} . B = G$, und nehme $A : B = F : E$ an, so ist überdem $\frac{n}{m} A : \frac{n}{m} B = F : E$ und $\frac{n+1}{m} A : \frac{n+1}{m} B = F : E$; (n. 3.) auch ist $F > \frac{n}{m} A$, und $F < \frac{n+1}{m} A$; also $E > \frac{n}{m} B$ und $E < \frac{n+1}{m} B$ (166 §.) mithin allemahl $E = \frac{n}{m} B + \varrho$, so daß $\varrho < \frac{1}{m} B$ ist. Aber auch $G = \frac{n}{m} B + r$ und allemahl $r < \frac{1}{m} B$, also $E : B = G : B$ (164 §.) und $E = G$, (166 §.) mithin $A : B = F : G$, oder $A : B = \frac{P}{Q} . A : \frac{P}{Q} . B$.

5.) Hätte man A und B mit $\frac{P}{Q}$ dividirt, es mag $\frac{P}{Q}$ eine rationale oder irrationale Zahl seyn; so setze man $A : \frac{P}{Q} = F$, $B : \frac{P}{Q} = G$; so hat man $A = \frac{P}{Q} . F$, und $B = \frac{P}{Q} . G$, also $A : B = F : G$, (n. 5.), oder $A : B = \left(A : \frac{P}{Q}\right) : \left(B : \frac{P}{Q}\right)$.

171 §.

Dividirt man ungleiche Grössen *A* und *B* mit einerley dritten Grösse *V*, die mit jenen von einerley Art ist, so verhalten sich die Quotienten ebenfalls wie die Dividenda.

Beweis. Die Quotienten sind nun Zahlen, und wenn man $\frac{A}{V} = \alpha$, $\frac{B}{V} = \beta$ setzt; so hat man $A = \alpha . V$, $B = \beta . V$, mithin $V = \frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$. Daraus folgt $A = \frac{\alpha}{\beta} . B$, und $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$, oder $A : B = \alpha : \beta$.

172 §.

Wenn alle vier Glieder einer Proportion $A : B = C : D$ von einerley Art sind, so kann man die beyden mittlern Glieder verwechseln, und es ist auch (*permutando*) $A : C = B : D$ eine richtige Proportion.

Beweis. Wenn $\frac{A}{B} = \frac{P}{Q}$ ist, so ist auch $\frac{C}{D} = \frac{P}{Q}$ (165 §.) also $A = \frac{P}{Q} . B$, und $C = \frac{P}{Q} . D$. Es ist aber $\frac{P}{Q} . B : \frac{P}{Q} . D = B : D$, der Bruch $\frac{P}{Q}$ mag rational oder irrational seyn, (170 §.) also auch $A : C = B : D$.

173 §.

Multiplicirt man gleiche Grössen mit ungleichen rationalen, oder irrationalen Zahlen α und β, so verhalten sich die Producte, wie die Multiplicatoren.

Beweis.

Beweis. Es sey $\alpha \cdot A = P$, und $\beta \cdot A = p$, so ist $\alpha = \frac{P}{A}$, und $\beta = \frac{p}{A}$. Ferner hat man $P : p = \frac{P}{A} : \frac{p}{A}$ (171 §.) also $P : p = \alpha : \beta$, oder $\alpha \cdot A : \beta \cdot A = \alpha : \beta$.

174 §.

Dividirt man gleiche Grössen mit ungleichen rationalen oder irrationalen Zahlen d und δ, oder auch mit ungleichen Grössen, die mit den Dividendis von einerley Art sind; so verhalten sich die Quotienten umgekehrt, wie die Divisoren.

Beweis. Es sey $\frac{D}{d} = Q$, und $\frac{D}{\delta} = q$; so ist $D = d \cdot Q$, und $D = \delta \cdot q$. Daraus folgt $d \cdot Q = \delta \cdot q$, und $Q = \frac{\delta}{d} \cdot q$, also $\frac{Q}{q} = \frac{\delta}{d}$, oder $Q : q = \delta : d$.

Wenn die Divisoren Zahlen sind, so sind die Quotienten mit den Dividendis von einerley Art. Sind dagegen die Divisoren mit den Dividendis von einerley Art, so sind die Quotienten Zahlen. Setzt man nun $\frac{D}{d} = \alpha$, $\frac{D}{\delta} = \beta$, so hat man wiederum $D = \alpha \cdot d = \beta \cdot \delta$, also $d = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \delta$, und $\frac{d}{\delta} = \frac{\beta}{\alpha}$, oder $d : \delta = \beta : \alpha$.

175 §.

Es sind drey Grössen A, B, C, gegeben, man soll zu ihnen die vierte Proportionalgrösse finden.

Aufl. 1.) Die gesuchte vierte Grösse sey D, so muß D mit C von einerley Art seyn, und überdem wird erfordert, daß $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ sey (164. 165 §.), also ist $D = \frac{B}{A} . C$. Demnach dividire man die zweyte Grösse mit der ersten, und multiplicire die dritte Grösse mit dem gefundenen Quotienten, so hat man die gesuchte vierte Grösse.

2.) Wofern alle drey gegebene Grössen von einerley Art sind, so hat man auch $\frac{C}{A} = \frac{D}{B}$ (172 §.) also $D = \frac{C}{A} . B$. Demnach kann auch die dritte mit der ersten dividirt, und die zweyte mit dem gefundenen Quotienten multiplicirt werden.

3.) Weil $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ Zahlen sind; so hat man auch $D = \frac{B \times C}{A}$ nach der ersten Regel, und nach der zweyten Regel $D = \frac{C \times B}{A}$. Wenn alle drey Grössen von einerley Art sind, so ist es gleichgültig, ob man $\frac{B \times C}{A}$, oder $\frac{C \times B}{A}$ schreibt: Das Product der beyden mittlern Grössen mit der

erſten

ersten dividirt giebt nun die gesuchte vierte Grösse.

Wenn eine neue Grösse V mit A und B von einerley Art ist, so sind $\frac{A}{V}$, $\frac{B}{V}$ Zahlen, die sich eben so, wie A : B verhalten. Wenn also $\frac{A}{V} = \alpha$, $\frac{B}{V} = \beta$ gesetzt wird, so hat man auch $\alpha : \beta = C : D$, und $D = \frac{\beta . C}{\alpha}$. Nun sind $\alpha . V$, $\beta . V$, als genannte Zahlen anzusehen, wobey der Nahme, oder die Grösse der Einheit V während der Rechnung selbst nicht in Betrachtung kommt. Ist nun C mit A und B nicht von einerley Art, und man setzt $\frac{C}{u} = \gamma$, also $C = \gamma . u$, so hat man $\alpha : \beta = \gamma . u : D$, und $D = \frac{\beta}{\alpha} . \gamma . u = \frac{\beta . \gamma}{\alpha} . u = \frac{\gamma . \beta}{\alpha} . u = \frac{\gamma}{\alpha} . \beta . u$. Wie nun $\gamma . u$ als eine genannte Zahl anzusehen ist, so wird auch die vierte Grösse eine genannte Zahl, die mit der dritten einerley Nahmen hat. Während der Rechnung kommt dieser Nahme wiederum nicht in Betrachtung: demnach sind die gegebenen Regeln von allgemeinen Gebrauch, so bald die gegebenen Grössen als genannte Zahlen ausgedrückt sind, so wie es für sich klar ist, daß sie bey abstracten Zahlen allemahl ihre Anwendung finden.

4.) Wenn $A = 1$ ist, so hat man $D = B \times C$, und wenn alle drey Grössen von einerley Art sind, auch $D = C \times B$: also ist jedes Product die vierte Proportionalgrösse zu **Eins** dem Multiplicator und

dem

dem Multiplicando, oder zu Eins und beyden Factoren, in welcher Ordnung man will, wenn alle drey Grössen von einerley Art sind. Allemahl aber ist das Product mit derjenigen Grösse von einerley Art, die man für das Multiplicandum annimmt, so wie die Einheit mit dem Multiplicator von einerley Art seyn muß. Im Grunde ist alsdenn der Multiplicator doch eine Zahl, und man hat eigentlich $D = \frac{B}{1} . C$, und wenn C mit B von einerley Art ist, auch $D = \frac{C}{1} . B$.

5.) Ist $B = 1$, so hat man $D = \frac{1}{A} . C = \frac{C}{A}$; also ist jeder Quotient die vierte Proportionalgrösse zum Divisor der Einheit und dem Dividendo. Der Quotient ist mit dem Dividendo von einerley Art, die Einheit aber mit dem Divisor. Wie aber eigentlich $D = \frac{C}{A : 1}$, und $A : 1$ eine Zahl ist, so siehet man wohl, daß auch diese Vorstellung mit dem gewöhnlichen Begrif der Division überein komme. Sind Divisor und Dividendum von einerley Art, so ist $D = \frac{C}{A} . 1$ eine Zahl, so wie auch den Schlüssen des 156 und 157 §. gemäß in diesem Fall eine Zahl als Quotient gefunden wird.

176 §.

In jeder geometrischen Proportion ist das Product der beyden mittlern Glieder in einander dem Product der beyden äussern gleich.

Auch

Auch umgekehrt: Wenn zwey Producte gleich groß sind; so sind die beyden Factoren des einen Products zwischen den beyden Factoren des andern mittlere Proportionalgrössen.

Beweis. 1.) Wenn $A : B = C : D$, und V mit A und B von einerley Art und eine solche Einheit ist, womit man A und B vergleichen kann; so hat man auch $\frac{A}{V} : \frac{B}{V} = C : D$, und $D = \frac{(B:V) \times C}{A:V}$, also $\frac{A}{V} . D = \frac{B}{V} . C$. Wären alle vier Grössen von einerley Art, so hätte man auch $A : C = B : D$, und $\frac{A}{V} : \frac{C}{V} = B : D$, also $D = \frac{(C:V) . B}{A:V}$, mithin auch $\frac{A}{V} . D = \frac{C}{V} . B$.

2.) Wofern P und Q die Factoren eines Products $P \times Q$ sind, so muß man sich unter einem von beyden Factoren die Einheit als Divisor vorstellen, so daß $P \times Q$ eigentlich $= \frac{P}{1} . Q$ oder $= \frac{Q}{1} . P$ ist. Ein solches Product kann einem andern $F \times G$ nur alsdenn gleich seyn, wenn wenigstens ein Factor des einen mit einem Factor des andern von einerley Art ist. Wäre also Q mit G von einerley Art, und $P \times Q = F \times G$, so kann diese Gleichheit bestehen, wenn gleich P, F, Q oder G von ganz verschiedener Art sind. Denn eigentlich will der Ausdruck sagen, es sey $\frac{P}{V} \times Q = \frac{F}{u} . G$, da dann V und u Einheiten

heiten mit P und F von einerley Art seyn müssen, und so hat man $Q = \frac{F : u}{P : V} . G$, mithin $\frac{Q}{G} = \frac{F : u}{P : V}$, oder $\frac{F}{n} : \frac{P}{V} = Q : G$. Sind alle vier Factoren von einerley Art, also $V = u$, so ist $F : P = Q : G$.

177 §.

Wenn man die Glieder zweyer oder auch mehrerer Proportionen, wie sie in der Ordnung folgen, mit einander multiplicirt; so sind die Producte wiederum in geometrischer Proportion.

Auch sind die Quotienten einander proportional, wenn man die Glieder einer Proportion nach der Ordnung mit den Gliedern einer andern Proportion, wie sie auf einander folgen, dividirt.

Beweis. Zwey dergleichen Proportionen kann man allgemein so ausdrücken:

$$A : nA = B : nB$$
$$C : mC = D : mD$$

wenn die Buchstaben n und m die Exponenten der Verhältnisse jedes der nachfolgenden Glieder zum vorhergehenden bezeichnen. Die Producte sind alsdenn

$A \times C,\ n . m . A \times C,\ B \times D,\ n . m . B \times D,$

die Quotienten aber

$$\frac{A}{C},\ \frac{n}{m} . \frac{A}{C},\ \frac{B}{D},\ \frac{n}{m} . \frac{B}{D}$$

und so ist gleich für sich klar, daß jene Producte und diese Quotienten in geometrischer Proportion stehen. (164 §.)

Wenn

Wenn aber der erste Satz für zwey Proportionen gilt, so folgt eben daraus, daß er auch für drey gelte: denn die Glieder der beyden ersten in einander multiplicirt geben eine Proportion, und diese einander proportionalen Producte mit den Gliedern der dritten Proportion multiplicirt, geben abermahl proportionale Producte. Wenn überhaupt der Satz für eine gewisse Anzahl von Proportionen wahr ist, so erhellet, daß er noch gelte, wenn die Anzahl der Proportionen um Eins grösser ist: also gilt er für jede Anzahl von Proportionen.

§. 178.

Wenn die beyden mittlern Glieder einer geometrischen Proportion gleich groß sind; so heißt sie eine stetige **Proportion** (proportio continua). Eine solche Proportion hat nur drey verschiedene Glieder, und das mittlere Glied kommt zweymahl vor.

Sind A und B zwo gegebene Grössen, so findet man zu ihnen die dritte stetige Proportionalgrösse $C = \frac{B}{A} . B$ (175 §. n. 1.) oder auch $C = \frac{B \times B}{A}$, (175 §. n. 3.) und das dritte Glied der stetigen Geometrischen Proportion mit dem ersten Gliede multiplicirt giebt ein eben so grosses Product, als gefunden wird, wenn man das mittlere Glied mit sich selbst multiplicirt.

179 §.

Man setze die Zahl $\frac{B}{A} = m$, so ist $B = mA$, und m des Verhältnisses B : A Exponent. Ferner wird $C = mB = mmA$; wenn also A das erste Glied, und m der Exponent des Verhältnisses des zweyten Gliedes zum ersten ist, so sind A, mA, mmA die allgemeinsten Ausdrücke für **drey stetige geometrische Proportionalgrössen**. Wird nun das dritte Glied aufs neue mit dem Exponenten multiplicirt; so sind A, mA, mmA, mmmA, **vier stetige geometrische Proportionalgrössen**, da dann die zweyte und dritte die beyden mittlern heissen.

Wird die letzte von vier stetigen geometrischen Proportionalgrössen aufs neue mit dem Exponenten

$$m = \frac{B}{A}$$

multiplicirt, so erhält man fünf dergleichen stetige Proportionalgrössen, und man siehet leicht, daß eben so sechs und mehr stetige Proportionalgrössen zuwege gebracht werden, wenn man jedesmahl das letzte Glied aufs neue mit dem Exponenten multiplicirt. Auf solche Art erhält man eine Reihe von Grössen, worin jedes Glied zum nächstvorhergehenden einerley geometrisches Verhältniß hat, und eine solche Reihe heißt eine **geometrische Progression**. Wenn der Exponent eine ganze Zahl oder ein uneigentlicher Bruch ist, so wird es eine **wachsende oder steigende Progression**; eine **abnehmende** aber, wenn der Exponent ein eigentlicher Bruch ist.

180 §.

Ein Product zweener gleich grosser Factoren in einander, wenn beyde als Zahlen betrachtet werden, heist die **Quadratzahl** eines jeden dieser Factoren, und ein jeder Factor heißt die **Quadratwurzel** dieses Products. Ein Product dreyer gleich grosser Factoren in einander wird die **Cubiczahl** eines jeden Factors genannt, und jeder von den dreyen gleichen Factoren heist die **Cubicwurzel** dieses Products.

Man

Man schreibt die Quadratzahl von einer gegebenen Wurzel auf folgende Art. Oben rechter Hand an der gegebenen Wurzel, z. E. 5, setzt man die Ziffer 2 etwas kleiner als die Ziffern der Wurzel, so daß 5^2 eben so viel ist, als $5 \times 5 = 25$. Diese kleinere Ziffer 2 zeigt nämlich an, es sey ein Product zweener gleich grosser Factoren gemeint, wovon jeder so groß ist, als die dabey stehende Wurzel. Auf ähnliche Art bezeichnet 5^3 die Cubiczahl von 5, und man kann überhaupt jedes Product mehrerer Factoren so bezeichnen, wenn sie alle gleich groß sind; 7^6 ist so viel als $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$. Solche Producte heissen überhaupt **Potenzen** oder **Dignitäten** des Factors, der durch wiederholte Multiplication mit sich selbst das Product hervorbringt; jede Potenz hat den Nahmen von der Anzahl ihrer gleichen Factoren, und die kleine Ziffer, welche die Anzahl der Factoren ausdrückt, heißt der **Exponent der Potenz**. Demnach ist 7^6 die sechste Dignität von 7, und 6 ist der Exponent dieser Potenz.

Jeden von den gleichen Factoren, deren Product in einander eine Potenz dieses Factors hieß, nennt man die Wurzel dieser Potenz, und das Zeichen $\sqrt{}$, welches nichts anders als ein etwas verzogner Buchstab *r* ist, bezeichnet allemahl eine Wurzel von der Zahl als eine Potenz betrachtet, der man es voransetzt. Soll es die Quadratwurzel seyn, so wird das Zeichen $\sqrt{}$ allein, ohne weitern Zusatz voran gesetzt: soll es aber die Cubicwurzel bezeichnen, so schreibt man $\sqrt[3]{}$, und eben so bezeichnen $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[6]{}$, u. s. f. eine Wurzel der vierten, fünften, sechsten Potenz, und die kleine Ziffern über dem Zeichen $\sqrt{}$ heißt der

Wurzel-Exponent. Demnach ist $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 9$. Der Ausdruck $\sqrt[4]{2401}$ bezeichnet jeden von den vier gleichen Factoren, worin sich die Zahl 2401 zerfällen läßt, also ist $\sqrt[4]{3401} = 7$, denn man findet $7^4 = 2401$. Diejenigen Potenzen, wovon die Exponenten grösser als 3 sind, heissen überhaupt **höhere Potenzen**. und die allgemeinen Lehren von diesen höhern Potenzen bleiben den folgenden Theilen dieses Lehrbuchs vorbehalten.

181 §.

Wenn A das erste Glied, und m der Exponent des Verhältnisses des zweyten Gliedes einer geometrischen Progression zum ersten Gliede ist; so können alle folgende Glieder ganz allgemein so ausgedrückt werden:

$$A, mA, m^2A, m^3A, m^4A, m^5A, m^6A, \text{u. s. f.}$$

Jedes Glied der Progression ist ein Product des ersten Gliedes mit einer Potenz des Exponenten des Verhältnisses des zweyten Gliedes zum ersten, und der Exponent dieser Potenz ist für jedes Glied einerley mit der Anzahl aller Glieder, die vor diesem Gliede vorhergehen, also um Eins kleiner als die Anzahl aller Glieder der Progression rückwärts bis zum ersten, das erste und letzte mitgezählt. Ist V das letzte Glied, und n die Anzahl aller Glieder, das erste und letzte mit eingeschlossen, so ist $V = m^{n-1} \cdot A$. Wenn das erste Glied $A = 1$ ist, so ist die Progression eine Reihe der Potenzen des zweyten Gliedes, wie sie in der Ordnung nach einander folgen.

Jede Quadratzahl ist die dritte stetige geometrische Proportionalgrösse zu Eins und der Quadratwurzel, und jede Cubiczahl die vierte stetige geometrische Proportionalgrösse zu Eins und der Cubicwurzel.

182 §.

In einer stetigen Proportion von drey Gliedern ist das Product des ersten und dritten Gliedes in einander der Quadratzahl des mittlern Gliedes gleich: und wenn vier Grössen in einer stetigen Proportion fortgehen, so ist das Product des letzten Gliedes mit der Quadratzahl des ersten so groß, als die Cubiczahl des ersten von den beyden mittlern Gliedern. Wenn nemlich A, B, C, drey stetige Proportionalgrössen sind, und $\frac{B}{A} = m$ gesetzt wird, so ist $B = mA$, $C = m^2A$, also $B^2 = mAmA = m^2 . A^2$, und $A \times C = m^2A^2$, also $A \times C = B^2$. Sind A, B, C, D, vier stetige Proportionalgrössen, und es bleibt $\frac{B}{A} = m$, so ist $B = mA$, $C = m^2A$, $D = m^3A$; also $B^3 = mAmAmA = m^3A^3$, und $D \times A^2 = m^3A^3$, also $D \times A^2 = B^3$.

183 §.

Das Product des ersten und letzten Gliedes der geometrischen Progreßion in einander ist so groß, als das Product zweyer andern Glieder *P* und *Q*, derselben Progreßion, wenn vor dem einen *P* bis zum ersten *A* so viele Glieder vorangehen, als nach dem andern *Q* bis zum letzten *V* folgen.

Auch verhält sich die Differenz des zweyten und ersten Gliedes zum ersten Gliede, wie die Differenz des letzten und ersten Gliedes zur Summe aller Glieder weniger das letzte.

Beweis des 1. S. Wenn vor P bis zum ersten Gliede, r Glieder vorangehen, so ist P das $(r+1)$te Glied, das erste A mitgezählt, und man hat $P = m^r A$. Wenn ferner nach P bis Q noch n Glieder folgen, Q mitgezählt, so ist Q das $(r+1+n)$te Glied, also $Q = m^{r+n}.A$. Wenn endlich nach Q bis zum letzten Gliede V wiederum r Glieder folgen, das letzte mitgezählt; so ist die Anzahl aller Glieder der Progression $= 2r+1+n$, und $V = m^{2r+n}.A$, also $A \times V = m^{2r+n}.A^2$. Es wird aber auch $P \times Q = m^{2r+n}A^2$ gefunden, demnach ist $P \times Q = A \times V$.

Beweis des 2 S. Es sey S die Summe aller Glieder der Progression, vom ersten Gliede A bis zum letzten $V = m^{n-1}.A$, wenn die Zahl aller Glieder $= n$ ist, so hat man $S - V = A + mA + m^2A \ldots . m^{n-3}.A + m^{n-2}.A$; $S - A = mA + m^2A + m^3A \ldots . + m^{n-2}.A + m^{n-1}.A$.

Man multiplicire die erste Reihe $S - V$ mit m, so findet man das Product $= S - A$, mithin erhält man $m(S-V) = S - A$. Man subtrahire auf beyden Seiten $S - V$, so findet man $(m-1)(S-V) = S - A - (S-V) = V - A$, (29 §.) und das giebt $m - 1 : 1 = V - A : S - V$, oder auch $mA - A : A = V - A : S - V$.

Der

Der XI. Abschnitt.

Die Regeln, nach welchen man aus jeder Zahl die Quadratwurzel findet.

184 §.

Wenn zwo Zahlen gleich sind, so sind ihre Quadrat- und Cubiczahlen gleich, auch ist die Quadrat und Cubiczahl einer grössern Zahl grösser, als die Quadrat- und Cubiczahl der kleinern. (32. 35 §.) Demnach sind auch Quadrat- und Cubicwurzeln aus gleichen Zahlen gleich groß, und die Quadrat- und Cubicwurzel einer grössern Zahl ist grösser, als die Quadrat- und Cubiczahl einer kleinern Zahl.

Die Quadrat- und Cubiczahl einer ganzen Zahl ist ebenfalls eine ganze Zahl und grösser als die Wurzel. Die Quadrat- und Cubiczahl eines Bruchs ist ein solcher Bruch, dessen Zähler und Nenner Quadrat- und Cubiczahlen vom Zähler und Nenner der Wurzel sind; demnach sind die Quadrat- und Cubiczahl eines uneigentlichen Bruchs wiederum uneigentliche Brüche, und grösser als ihre Wurzel: dagegen ist die Quadrat- und Cubiczahl eines eigentlichen Bruchs ebenfalls ein eigentlicher Bruch, und kleiner als die Wurzel. (108 §.)

Die Quadrat- oder Cubiczahl eines Products ist das Product aus den Quadrat- oder Cubiczahlen der Factoren. Denn es ist $(abc)^2 = abc \cdot abc = a^2 b^2 c^2$, und $(abc)^3 = abc \cdot abc \cdot abc = a^3 b^3 c^3$: man über-sieht leicht, daß in der Quadratzahl eines jeden Products so vieler Factoren als man will, jeder Factor zweymahl, und in der Cubiczahl jeder Factor dreymahl vorkommen müsse, daß also die Regel allgemein sey.

Das Product zweyer und mehrerer Potenzen von einerley Wurzel in einander ist eine Potenz von eben der Wurzel, und ihr Exponent ist die Summe der Exponenten der Factoren. Es ist nemlich $a^2 . a^3 = aaaaa = a^5$, also $b^7 . b^5 = b^{12}$ u. s. f.

285 §.

Die Quadrat und Cubicwurzel aus einem Product ist das Product der Quadrat- oder Cubicwurzeln aller Factoren in einander: und die Quadrat- oder Cubicwurzel aus einem Bruch ist ein neuer Bruch, dessen Zähler und Nenner Quadrat- oder Cubicwurzeln des Zählers und Nenners der Quadrat- oder Cubiczahl sind.

Wenn nemlich $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} = P$ gesetzt wird, so ist $abc = P^2$, also $\sqrt{abc} = P$, mithin $\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$. Setzt man dagegen $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c} = P$, so ist $abc = P^3$, also $\sqrt[3]{abc} = P$, mithin $\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}$.

Ferner, wenn $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = Q$ gesetzt wird, so ist $\frac{a}{b} = Q^2$, also $Q = \sqrt{\frac{a}{b}}$, und $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Wird

Wird aber $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = Q$ gesetzt, so ist $\frac{a}{b} = Q^3$,

mithin $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = Q$, und $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

Jede Quadratwurzel ist die mittlere Proportionalgrösse zwischen Eins und der Quadratzahl, und jede Cubicwurzel ist die erste von zwoen mittlern stetigen Proportionalgrössen zwischen Eins und der Cubiczahl.

186 §.

Wenn der Nenner eines uneigentlichen Bruchs in seinem Zähler nicht aufgeht; und man macht die Quadrat- oder Cubiczahl des Bruchs; so kann auch der Nenner der Quadrat- oder Cubiczahl in ihrem Zähler nicht aufgehen.

Beweis. Wenn $A > B$, mithin $\frac{A}{B}$ ein uneigentlicher Bruch ist, Zähler und Nenner aber noch gemeine Maasse haben; so sey m ihr gröstes Maaß, und $A = ma$, $B = mb$: alsdenn hat man auch $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$. Wofern überdem a und b nicht vielleicht selbst absolute Primzahlen sind, so besteht nicht allein a, sondern auch b, aus einer bestimmten Anzahl einfacher Factoren, die insgesammt absolute Primzahlen sind: beyde Zahlen a und b aber haben keinen einfachen Factor mehr gemein, weil sie der Voraussetzung gemäß schon die kleinsten Zahlen sind, die den Bruch ausdrücken können, und der Nenner im Zähler nicht aufgehen soll. Nun ist $\frac{a^2}{b^2}$ die Quadratzahl und $\frac{a^3}{b^3}$ die Cubiczahl von $\frac{a}{b}$, a^2 aber enthält jeden Factor von a zweymahl, a^3 enthält jeden dieser Factoren dreymahl, sonst keine andre Factoren; ferner b^2 enthält jeden Factor von b zweymahl, und b^3 jeden dieser Factoren dreymahl, sonst wiederum keine andern Factoren: demnach kann weder b^2 in a^2, noch auch b^3 in a^3 aufgehen, oder: weder die Quadratzahl, noch die Cubiczahl des Bruchs $\frac{a}{b}$ kann eine ganze Zahl seyn. Wofern aber $\frac{a^2}{b^2}$ und $\frac{a^3}{b^3}$ keine ganze Zahlen seyn können, so können auch $\frac{A^2}{B^2}$ und $\frac{A^3}{B^3}$ keine ganze Zahlen seyn, denn es ist $\frac{A^2}{B^2} = \frac{m^2a^2}{m^2b^2} = \frac{a^2}{b^2}$, und $\frac{A^3}{B^3} = \frac{m^3a^3}{m^3b^3} = \frac{a^3}{b^3}$.

187 §.

Wenn die Quadrat- oder Cubicwurzel einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist; so kann sie auch kein rationaler Bruch seyn.

Beweis. Wäre die Wurzel ein ächter rationaler Bruch, so wäre die Zahl selbst auch ein ächter Bruch, (184 §. n. 2.) also keine ganze Zahl, wie doch vorausgesetzt wird. Wäre die Wurzel ein unächter Bruch, der sich auf keine ganze Zahl bringen liesse, so müste wiederum die Zahl selbst ein

Bruch von eben der Art, (186 §.) mithin keine ganze Zahl seyn. Ist aber die Wurzel weder ein ächter noch ein unächter Bruch; so giebt es gar keinen rationalen Bruch, der die Wurzel genau ausdrücken könnte.

Wenn eine Zahl keine Rationalzahl ist, so muß es eine Irratioalzahl seyn. Die Quadrat- oder Cubicwurzel aus einer ganzen Zahl, wenn sie keine ganze Zahl ist, kann keine Rationalzahl seyn, also ist eine solche **Wurzel eine Irrationalzahl.** Wie nun von jeder Irrationalzahl ein rationaler Theil angegeben werden kann, dessen Unterschied von der Irrationalzahl kleiner ist, als jeder gegebene noch so kleine Theil der Einheit; so muß es auch möglich seyn, einen rationalen Theil einer irrationalen Quadrat- oder Cubicwurzel anzugeben, dessen Unterscheid von der gesuchten Wurzel kleiner ist, als jeder gegebene noch so kleine Theil der Einheit.

188 §.

Solche ganze Zahlen, deren Quadrat- und Cubicwurzeln ganze Zahlen sind, heissen **vollkommene Quadrat- und Cubiczahlen**, die übrigen aber werden **unvollkommene Quadrat- und Cubiczahlen** genannt. Die Quadrate aller einfachen Ziffern kommen im **Einmahl Eins** vor, und es sind folgende:

Ziffern	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Wem also das Einmahl Eins geläufig ist, der wird leicht in Gedanken die Wurzel finden, wenn eine von diesen neun Quadratzahlen vorkommt. Uebrigens erhellet hieraus von selbst, **daß das Quadrat** einer

ner einfachen Ziffer höchstens aus zwoen Ziffern bestehe.

198 §.

1.) Jede Zahl, sie mag aus einer, oder aus mehrern Ziffern bestehen, wenn an derselben zur Rechten Nullen hängen, ist das Product einer Zahl, welche diese Ziffern für sich allein ausdrücken würden, in eine Potenz der Zahl 10, und der Exponent dieser Potenz ist mit der Anzahl der anhängenden Nullen einerley. So ist $30000 = 3 \times 10^4$, $64000000 = 64 \times 10^6$, und man kann Producte dieser Art noch kürzer so schreiben: $30000 = \overset{4}{3}$, $64000000 = \overset{6}{64}$. Solchergestalt wird die Anzahl der anzuhängenden Nullen durch eine kleine Ziffer angezeigt, die man grade über der niedrigsten Ziffer des übrigen Theils der Zahl hinschreibt. Eben diese kleine oben über geschriebene Ziffer zeigt also an, zu welcher Decimalordnung die Ziffer gehöre, worüber sie stehet, und man kann sie in solcher Rücksicht **den Exponenten der Ordnung dieser Ziffer** nennen.

2.) Das Quadrat einer Zahl dieser Art, woran rechter Hand Nullen hängen, ist die Quadratzahl der Ziffern mit doppelt so vielen Nullen, als der Wurzel beygefügt waren; und umgekehrt: Wenn an einer vollkommenen Quadratzahl eine grade Anzahl von Nullen hängt, so ist ihre Quadratwurzel die Wurzel der Ziffern mit halb so vielen Nullen. Demnach ist $800^2 = 640000$, und $\sqrt{\overset{6}{25}} = \overset{3}{5} = 5000$.

3.) Das Product zwoer Ziffern, die zu verschiedenen Decimal-Ordnungen gehören, hat zum Exponenten der Ordnung seiner niedrigsten Ziffer die

Summe der Exponenten der Factoren, und der Exponent der Ordnung des Quotienten zwoer Ziffern, wovon die niedrigsten zu verschiedenen Decimalordnungen gehören, wird gefunden, wenn man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendi subtrahirt.

4.) Die Zahl $\overset{n}{1}$ ist die kleinste unter allen Zahlen, die $n + 1$ Ziffern haben, wenn man die Nullen als Ziffern mitzählt: eben die Zahl $\overset{n}{1}$ aber ist grösser als jede andre, die aus n Ziffern bestehet.

109 §.

Wenn eine Zahl aus zweenen Theilen bestehet, so ist ihre Quadratzahl aus dem Quadrat des ersten Theils dem doppelten Product des ersten Theils in dem zweyten, und dem Quadrat des zweyten Theils zusammengesetzt.

Beweis. Es sey a der erste, b der zweyte Theil der Zahl, also die Zahl selbst $= a + b$, so ist die Quadratzahl $(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b)$. Wenn man nun gehörig multiplicirt, so findet man

$$\begin{array}{rrr}
 & a & + b \\
 & a & + b \\
\hline
 & ab & + b^2 \\
a^2 + & ab & \\
\hline
(a+b)^2 = a^2 + & 2ab & + b^2
\end{array}$$

2.) Die Quadratzahl der Differenz zwoer ungleicher Zahlen a und b ist der Ueberschuß der Summe der Quadrate beyder Zahlen über ihrem doppelten Product.

Beweis.

Beweis. Es sey $a - b = d$, also $a = b + d$, so ist $a^2 = b^2 + 2bd + d^2$ (n. 1.) also $a^2 + b^2 = 2b^2 + 2bd + d^2$. Ferner ist $2bd = 2b(a - b) = 2ab - 2bb$, (114 §.) also $a^2 + b^2 = 2ab + d^2$, und d^2 oder $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

3.) Wenn man die Summe zwoer ungleicher Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt, so ist das Product so groß, als die Differenz ihrer Quadratzahlen.

Beweis. Es ist $(a + b)(a - b) = (a + b)a - (a + b)b$, (144 §.) und $(a + b)a = a^2 + ab$, so wie $(a + b)b = ab + bb$: (114 §.) also $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

191 §.

Die vollkommene Quadratzahl einer jeden rationalen Wurzel bestehet wenigstens aus doppelt so vielen Ziffern weniger Eins, als die Wurzel enthält: aber auch nie aus mehr denn doppelt so vielen Ziffern, als die Wurzel ausmachen.

Beweis. Die rationale Wurzel einer vollkommenen Quadratzahl ist eine ganze Zahl, und diese mag aus so vielen Ziffern, wie sie wolle, bestehen; so kann man sie doch in zweene Theile zerfällen, davon der erste ihre höchste Ziffer, und der zweyte die übrigen alle enthält, wie z. E. $324 = 300 + 24$. Wenn nun die Wurzel $n + 1$ Ziffern hat, so gehört die höchste Ziffer zur Ordnung n, und ihr Quadrat zur Ordnung $2n$, also hat es wenigstens $2n + 1 = 2(n + 1) - 1$ Ziffern, die Nullen als Ziffern mitgezählt. Weil nun, um die Quadratzahl der ganzen Wurzel zu erhalten, noch das doppelte Product des ersten Theils der Wurzel in den zweyten Theil,

mit

mit dem Quadrat des zweyten Theils, zu jenem Quadrat des ersten Theils hinzukommen muß; so erhellet, daß die Anzahl der Ziffern des Quadrats der ganzen Wurzel zwar grösser, als $2n + 1$, aber nie kleiner seyn könne.

Das Quadrat der höchsten Ziffer für sich könnte wohl 2 Ziffern haben, aber auch nie mehr, (188 §.) also kann das Quadrat des höchsten Theils der Wurzel $2n + 2 = 2(n + 1)$ Ziffern haben, die Nullen als Ziffern mitgezählt. Wenn aber gleich die übrigen Theile des Quadrats der ganzen Wurzel hinzu kommen, so kann dasselbe doch nie mehr als $2(n + 1)$ Ziffern erhalten. Denn die kleinste von allen Zahlen, die aus $2(n + 1) + 1$ Ziffern bestehen, ist $\overset{2(n+1)}{1}$, wenn man die Nullen als Ziffern mitzählt, und ihre Quadratwurzel ist $\overset{n+1}{1}$, und diese Wurzel hat $n + 2$ Ziffern, mithin ist sie grösser als die angenommene Wurzel, die nur $n + 1$ Ziffern haben sollte.

Man übersiehet das Schließende des Beweises am deutlichsten, wenn man ihn auf einen besondern Fall anwendet. Die Quadratzahl von $324 = 300 + 24$ hat wenigstens $2 \times 3 - 1 = 5$ Ziffern, denn es ist schon $300^2 = 90000$, und zum Quadrat gehören noch die Theile $2 \times 300 \times 24 + 24^2$. Aber mehr als 6 Ziffern kann die Quadratzahl von 324 nicht haben: denn die kleinste von allen Zahlen, die 7 Ziffern haben, ist 1000000 und ihre Wurzel ist 1000, welche grösser ist, als jede Zahl von drey Ziffern, also grösser als 324.

192 §.

Wenn man eine vollkommene Quadratzahl, die aus so vielen Ziffern, als man will, bestehen

bestehen kann, von der rechten gegen die Lincke in Classen theilt, und jeder Classe zwo Ziffern, mithin der höchsten Classe nur eine Ziffer giebt, wenn die Zahl aller Ziffern ungrade ist; so besteht die Quadratwurzel aus so vielen Ziffern, als man Classen gemacht hat.

Beweis. Wenn die Zahl der Ziffern, welche die Quadratzahl ausmachen, grade und $= 2m$ ist, so ist die Zahl der Classen $= m$. Hätte nun die Wurzel weniger als m Ziffern, wäre die Zahl dieser Ziffern $= m - n$, so wäre die Zahl der Ziffern des Quadrats nicht grösser, als $2m - 2n$, also hätte man nicht mehr als $m - n$ Classen. Hätte dagegen die Wurzel mehr als m Ziffern, wäre die Zahl dieser Ziffern $= m + n$; so wäre die Zahl der Ziffern des Quadrats nicht kleiner als $2(m+n) - 1 = 2m + 2n - 1 = 2m + 2(n-1) + 1$, folglich hätte man $m + n$ Classen, und beydes ist der Voraussetzung entgegen.

Ist die Zahl der Ziffern der Quadratzahl ungrade $= 2m + 1$, so ist die Zahl der Classen $= m + 1$. Wäre nun die Zahl der Ziffern der Wurzeln kleiner, wäre sie $= m + 1 - n$, so wäre die Zahl der Ziffern des Quadrats nicht grösser als $2(m+1) - 2n$, und man hätte nicht mehr als $m + 1 - n$ Classen. Wäre dagegen die Zahl der Ziffern der Wurzel grösser als $m + 1$, wäre sie $= m + 1 + n$; so wäre die Zahl der Ziffern des Quadrats nicht kleiner als $2(m+1+n) - 1$, also nicht kleiner als $2m + 2n + 1$, und man hätte nicht weniger, als $m + 1 + n$ Classen, beydes wiederum gegen die Voraussetzung.

193 §.

Wird die Quadratwurzel einer Zahl um Eins vermehrt, so wächst die Quadratzahl um die doppelte vorige Wurzel und Eins.

Beweis. Es ist $(R + 1)^2 = R^2 + 2R + 1$: (190 §.) weil nun R^2 die Quadratzahl von R ist, so wächst dies Quadrat um $2R + 1$, wenn R um Eins wächst.

Weil $2R + 1$ allemahl eine ungrade Zahl ist, so kann man die Quadrate aller ganzen Zahlen, wie sie in natürlicher Ordnung folgen, leicht machen, wenn nur die ungraden Zahlen in natürlicher Ordnung zusammen addirt werden. Denn es ist

$$\begin{aligned}
1^2 &= 1 \\
2^2 &= 1 + 2 + 1 = 1 + 3 = 4 \\
3^2 &= 4 + 4 + 1 = 4 + 5 = 9 \\
4^2 &= 9 + 6 + 1 = 9 + 7 = 16 \\
5^2 &= 16 + 8 + 1 = 16 + 9 = 25 \\
6^2 &= 25 + 10 + 1 = 25 + 11 = 36 \\
7^2 &= 36 + 12 + 1 = 36 + 13 = 49
\end{aligned}$$

u. s. f.

Wenn eine Zahl, wie 58 keine vollkommene Quadratzahl ist, und man subtrahirt davon diejenige unter den kleinern vollkommenen Quadratzahlen, welche jener am nächsten kommt; welches im gegenwärtigen Fall 49 wäre; so ist der Rest kleiner, als die doppelte Wurzel der subtrahirten Quadratzahl um Eins vermehrt, hier also $58 - 49 < 2\sqrt{49} + 1$, oder < 15. Auch ist die Wurzel der nächst kleinern vollkommenen Quadratzahl derjenige rationale Theil der Wurzel aus der unvollkommenen Quadratzahl, welcher sich in ganzen Zahlen ausdrücken läßt. Weil

$7^2 < 58$, und $8^2 > 58$ ist, so folgt, daß $\sqrt{58} = 7 +$ einen Bruch sey, der kleiner als 1 ist.

194 §.

Wenn man eine, zwey oder mehr von den höhern Classen einer Quadratzahl Q allein für sich als eine Quadratzahl betrachtet, und daraus die Wurzel sucht; so sind die Ziffern dieser Wurzel einerley mit so viel von den höhern Ziffern der Quadratwurzel aus Q, als man Classen genommen hat.

Beweis. Wenn man m höhere Classen abgenommen hat, und die Zahl Q aus $m + n$ Classen besteht; so machen die m höhern Classen eine Zahl aus, wovon die niedrigste Ziffer zur Ordnung $2n$ gehört. Es sey also diese Zahl $= \overset{2n}{A}$, der übrige Theil der Quadratzahl $= B$, so ist $Q = \overset{2n}{A} + B$. Die Quadratwurzel aus Q hat $m + n$ Ziffern, und wenn man von den höhern Ziffern dieser Wurzel eben so viele abnimmt, als man von den höhern Classen der Quadratzahl abgenommen hat; so machen diese eine Zahl aus, wovon die niedrigste zur Ordnung n gehört. Man setze diese Zahl $= \overset{n}{R}$, den übrigen Theil der Quadratwurzel $= r$, so ist $\sqrt{Q} = \overset{n}{R} + r$, und $Q = \overset{2n}{R^2} + 2\overset{n}{R}\,.\,r + r^2$. Demnach ist $\overset{2n}{R^2}$ ganz in dem höhern Theil $\overset{2n}{A}$ des Quadrats Q enthalten: wenn aber die Zahl $\overset{n}{R}$ nur um eine Einheit der Ordnung n vermehrt wird, so ist $\overset{2n}{(R + 1)^2} > Q$.

Denn

Denn es ist $\overset{n}{1} > r$, weil die Zahl r nur n Ziffern hat, (189 §. n. 4.) also $\overset{n}{R} + \overset{n}{1} > \overset{n}{R} + r$, oder $\overset{n}{(R+1)} > \overset{n}{R} + r$, mithin $\overset{2n}{(R+1)^2} > (\overset{n}{R} + r)^2$, oder $\overset{2n}{(R+1)^2} > Q$.

Nun sey a die Quadratwurzel aus A, so weit sich diese in ganzen Zahlen angeben läßt, so ist a^2 diejenige unter den kleinern vollkommenen Quadratzahlen, welche der Zahl A am nächsten kommt, und a kann nicht grösser als R seyn. Denn wäre a nur um Eins grösser, also $a = R + 1$, so wäre $\overset{2n}{a^2} = \overset{2n}{(R+1)^2} > Q$, welches der Voraussetzung entgegen ist, weil $\overset{2n}{a^2}$ nicht grösser als $\overset{2n}{A}$ und $\overset{2n}{A} < Q$ ist. Ferner sey $A - a^2 = \delta$; so ist $A = a^2 + \delta$, $\overset{2n}{A} = \overset{2n}{a^2} + \overset{2n}{\delta}$, und $\delta < 2a + 1$, also $a^2 + \delta < (a+1)^2$, oder $\overset{2n}{a^2} + \overset{2n}{\delta} < \overset{2n}{(a+1)^2}$, und $\overset{2n}{a^2} + \overset{2n}{\delta} + B = Q$. Aber $\overset{2n}{R^2}$ ist ganz in $\overset{2n}{a^2} + \overset{2n}{\delta}$ enthalten, mithin ist $\overset{2n}{R^2}$ nicht grösser, als $\overset{2n}{a^2} + \overset{2n}{\delta}$, also $\overset{2n}{R^2} < \overset{2n}{(a+1)^2}$, folglich $R < a + 1$ oder $a > R - 1$. Weil nun auch $a < R + 1$ seyn muste, und a sowohl als R eine ganze Zahl ist, so muß $a = R$ seyn.

Um diesen allgemeinen Schlüssen desto leichter zu folgen, setze man, es sey $Q = 45|52|87|56|25$, so kann man $Q = 4500000000 + 52875625$ annehmen, alsdenn hat man $A = 45$, $B = 52875625$,

$m = 1$, $n = 4$, und R ist die erste Ziffer der Quadratwurzel aus Q, die zusammen aus 5 Ziffern besteht. Die höchste Ziffer R gehört zur vierten Decimalordnung, und der übrige Theil r der Wurzel besteht aus 4 Ziffern. Also ist $\overset{4}{1} > r$, mithin $(R + \overset{4}{1}) > \overset{4}{R} + r$, und $(R + \overset{8}{1})^2 > (\overset{4}{R} + r)^2$, oder $(R + \overset{8}{1})^2 > Q$. Nun ist $A = 45$, also $a = 6$, $a^2 = 36$, (188 §.) und $\delta = 9$, $2a + 1 = 13$. Wäre a um Eins grösser als R, so wäre $\overset{8}{a^2} = (R + \overset{8}{1})^2$, also $\overset{8}{a^2} > Q$, welches nicht seyn kann, weil $\overset{8}{a^2} + \overset{8}{\delta} + B = Q$ ist. Ferner ist $\overset{8}{R^2}$ nicht grösser als $\overset{8}{a^2} + \overset{8}{\delta}$, weil jene Zahl in dieser ganz enthalten ist: also $\overset{8}{R^2} < (a + \overset{8}{1})^2$, oder $R < a + 1$, also $a > R - 1$. Weil nun auch $a < R + 1$ war, so hat man in diesem Beyspiel $6 = R$, oder 6 ist die höchste Ziffer der Wurzel aus Q.

Wenn also die höchste Classe für sich allein eine vollkommene Quadratzahl ist; so ist ihre Wurzel, die man leicht aus dem Einmahl Eins findet, (188 §.) die höchste Ziffer der Wurzel: im entgegen gesetzten Fall ist diese höchste Ziffer der Wurzel die Quadratwurzel aus der nächstkleinern von den neun vollkommenen Quadratzahlen, die im Einmahl Eins vorkommen.

Setze man $A = 4552$, so wäre $B = 875625$, $m = 2$, $n = 3$, und R enthielte die zwey höchsten Ziffern der Wurzel, r aber die 3 übrigen. Die Quadratwurzel aus A, so weit sie sich in ganzen Zahlen angeben läßt, enthält 2 Ziffern, und eben diese sind die

die 2 höchsten Ziffern der Quadratwurzel aus Q. Durch die Multiplication findet man $67^2 = 3489$, $68^2 = 4624$, also ist nunmehro $a = 67$, $a^2 = 4489$, $\delta = A - a^2 = 4552 - 4489 = 63$, und $67 = R$ sind die zwey höchsten Ziffern der Quadratwurzel aus der Zahl Q.

195 §.

Eine ganze Zahl bestehet aus drey, höchstens vier Ziffern, man soll ihre Quadratwurzel finden.

Aufl. Die Quadratzahl dem 192 §. gemäß eingetheilt erhält zwey Classen, also hat die Wurzel zwey Ziffern, und die höchste Ziffer der Wurzel, die hier also ein Zehner ist, wird den Schlüssen des 194 §. gemäß leicht gefunden. Die gegebene Quadratzahl sey 44|89, so ist 44 zwar keine vollkommene Quadratzahl, aber die nächstkleinere ist 36, also die höchste Ziffer der Wurzel 6. Wenn nun β die zweyte niedrigste Ziffer der Wurzel ist, so rechnet man leicht auf folgende Art weiter.

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad\;\; \alpha \quad\;\; \beta \\
 & 44|89|60 + 7 \\
\overset{2}{\alpha}^2 = & 36|00 \\
\hline
 & 8\,89 = 2\overset{1}{\alpha} \,.\, \beta + \beta^2 \\
2\overset{1}{\alpha} = & 1\,20) \\
2\overset{1}{\alpha}\beta = & 8\,40 = 2\overset{1}{\alpha}\beta \\
\hline
 & 49 = \beta^2
\end{array}
$$

Die Wurzel ist $\overset{1}{\alpha} + \beta$, und $\alpha = 6$, $\overset{1}{\alpha} = 60$; man mache also $\overset{2}{\alpha}^2 = 3600$, und ziehe dies Quadrat des ersten Theils der Wurzel von der gegebenen

Quadratzahl ab, so bleibt der Rest $889 = 2\overset{1}{\alpha}.\beta + \beta^2$. Wenn man diesen Rest mit $2\overset{1}{\alpha} = 120$ dividirt; so könnte der Quotient wohl grösser als β gefunden werden, weil eben dieser Rest grösser als $2\overset{1}{\alpha}.\beta$ ist: aber die Probe muß ergeben, ob der so gefundene Quotient würklich $= \beta$ oder grösser als β sey. Man nehme nämlich den Quotienten $= \beta$ an, suche das Product $2\overset{1}{\alpha}.\beta$, und ziehe es vom vorigen Rest ab; so muß ein neuer Rest bleiben, der $= \beta^2$ ist. In dem gewählten Exempel ist 12 in 88 7mahl enthalten: wenn also $\beta = 7$ angenommen wird, so ist $2\overset{1}{\alpha}.\beta = 840$, und der neue Rest $49 = \beta^2$, mithin ist würklich $\beta = 7$, und die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{4489} = 67$.

Die Rechnung läßt sich theils etwas abkürzen, theils bey weiterer Anwendung noch etwas bequemer führen, wenn man folgende Betrachtungen anstellet: Weil die Ziffern des Quadrats der höchsten Ziffer der Wurzel in die höchste Classe kommen; so kann man es, ohne die Nullen beyzufügen, in der höchsten Classe unterschreiben, von derselben abziehen, und dem Rest alsdenn die beyden Ziffern der folgenden Classe beyfügen.

Das duplum des ersten Theils der Wurzel hat eine Null weniger, als das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel, also kann man es, ohne die Null beyzufügen, so unter den Rest setzen, daß die niedrigste Ziffer dieses doppelten ersten Theils der Wurzel mit der höchsten Ziffer der zweyten Classe in eine Columne kommt. Ist dies geschehen, so dividirt man, um den zweyten Theil der Wurzel zu finden,

so,

ſo, als wenn die niedrigſte Ziffer der zweyten Claſſe noch nicht da ſtünde, in die übrigen höhern Ziffern des Reſtes.

Bey der anzuſtellenden Probe kann man gleich das Quadrat der niedrigſten Ziffer der Wurzel machen, die niedrigſte Ziffer deſſelben unter der niedrigſten Ziffer des Reſtes ſetzen, die höchſte in mente behalten, und wenn man das Product $2\alpha . \beta$ macht, die in mente behaltene Ziffer dazu addiren, ſo erhält man die Summe $2\alpha . \beta + \beta^2$, die nun vom Reſt abgezogen nichts übrig laſſen muß, wofern die gegebene Zahl eine vollkommene Quadratzahl iſt. Mit Beobachtung dieſer Regeln wird man der zur Seite geſetzten Rechnung leicht nachfolgen.

```
44|89|67
36|   | 1
  8 89
  1 2
  889
  ---
   0
```

Wenn bey dieſer Rechnung ein Reſt bleibt, der gröſſer iſt als die doppelt gefundene Wurzel um Eins vermehrt; ſo iſt es ein Beweis, daß man den zweyten Theil der Wurzel zu klein genommen habe, und daß die niedrigſte Ziffer derſelben noch wenigſtens um Eins gröſſer ſey. Bleibt dagegen ein Reſt, der kleiner iſt, als die doppelte gefundene Wurzel um Eins vermehrt; ſo hat die gegebene Zahl keine Quadratwurzel unter den ganzen Zahlen: denn die ſchon gefundene Wurzel iſt zu klein, und wenn man ſie um Eins vermehrte, ſo wäre ſie zu groß. Demnach hat in eben dem Fall die gegebene Zahl auch keine Wurzel unter den rationalen Brüchen, (187 §.) ſondern die geſuchte Wurzel iſt eine Irrationalzahl. Indeſſen iſt derjenige Theil der Wurzel gefunden, der ſich in ganzen Zahlen angeben läßt, und der Fehler beträgt keine völlige Einheit.

196 §.

Alle Ziffern der Quadratwurzel einer Zahl bis auf die niedrigste sind gegeben, man soll die niedrigste Ziffer finden.

Aufl. Diejenige Zahl, welche die schon gefundenen Ziffern der Wurzel für sich allein ausmachen würden, bezeichne man, wie im 194 §., mit R, so ist $\overset{1}{R}$ der schon gefundene Theil der Wurzel, und was dort *r* hies, das ist hier eine einfache Ziffer. Diese sey $= \beta$, so ist die ganze Wurzel $\overset{1}{R} + \beta$, und die gegebene Quadratzahl $Q = (\overset{1}{R} + \beta)^2$ und $\overset{2}{R}{}^2 + 2\overset{1}{R}\beta + \beta^2$, wozu vielleicht noch ein Ueberschuß über $(\overset{1}{R} + \beta)^2$ kommt, der aber kleiner als $2(\overset{1}{R} + \beta) + 1$ ist. Diesemnach kann aus dem schon bekannten Theil der Wurzel die noch fehlende niedrigste Ziffer eben so gefunden werden, wie im 195 §. aus dem ersten Theil der Wurzel der zweyte gefunden ward, wenn die Wurzel nur zwey Ziffern hätte.

Wäre $Q = 45|42|76$, so hätte die Wurzel drey Ziffern, und man weis aus dem 194 §., daß die beyden höchsten Ziffern der Wurzel aus Q einerley sind mit den beyden Ziffern der Quadratwurzel aus 4542, und diese findet man den Regeln des 195 §. gemäß $= 67$. Mithin ist in diesem Beyspiel $R = 670$, und die dritte Ziffer findet man leicht vermittelst der nachstehenden Rechnung.

$$\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad\quad \overset{1}{R} + \beta \\
 & 45|42|76|670 + 4 \\
R^2 = & 44|89|00| \\
\hline
 & \quad \overset{1}{5376} = 2\overset{1}{R}\beta + \beta^2 \\
2\overset{1}{R} = & 1340, \\
 & 5376 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

197 §.

Aus jeder gegebenen Zahl, sie mag so viel Ziffern, wie man will, enthalten, die Quadratwurzel zu finden, so weit ihr rationaler Theil sich durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt.

Aufl. Nachdem die gegebene Zahl gehörig in Classen ist eingetheilt worden, suche man aus den beyden höchsten Classen nach dem 195 §. die beyden Ziffern, welche die Quadratwurzel ausmachen würden, wenn die gegebene Zahl aus diesen beyden Classen allein bestünde; so sind das zugleich die beyden höchsten Ziffern der gesuchten Wurzel. (194 §.)

Hiezu nehme man ferner die dritte Classe, und suche die dritte Ziffer der Wurzel nach den Regeln des 196 §. nicht anders, als wenn die drey höhern Classen allein die gegebene Quadratzahl ausmachten, so hat man die drey höchsten Ziffern der gesuchten Wurzel. (194 §.)

Weiter nehme man die vierte Classe hinzu, und suche nach den Regeln des 196 §. die vierte Ziffer der Wurzel nicht anders, als wenn die gegebene Zahl aus den vier höhern Classen allein bestünde; so hat man die vier höhern Ziffern der gesuchten Wurzel. (194 §.)

Setzt man so die Rechnung für alle fogende Classen fort, so findet man alle Ziffern der gesuchten Wurzel; weil die im 194 §. vorgetragenen Schlüsse jedesmahl beweisen, daß die so gefundene folgende Ziffer, welches die letzte der Wurzel seyn würde, wenn die gegebene Zahl nur so viel Classen hätte, als man bis dahin in Rechnung angenommen hat, zugleich die nächstfolgende Ziffer der gesuchten Wurzel sey.

Exempel.

$$
\begin{array}{rl}
Q = & 45|52|87|56|25 \;\Big|\; 67475 \\
\alpha^2 & \underline{36} \\
 & 952 \\
2\overset{1}{\alpha} = & 12 \\
 & \underline{889} = 2\overset{1}{\alpha}.\beta + \beta^2 \\
 & 6387 \\
2\overset{1}{R} = & 134 \\
 & \underline{5376} = 2\overset{1}{R}\beta + \beta^2 \\
 & 101156 \\
2\overset{1}{R} = & 1348 \\
 & \underline{94409} = 2\overset{1}{R}\beta + \beta \\
 & 674725 \\
2\overset{1}{R} = & 13494 \\
 & \underline{674725} = 2\overset{1}{R}\beta + \beta^2. \\
 & 0
\end{array}
$$

Bliebe ein Rest übrig, so müßte er kleiner seyn, als die doppelte gefundene Wurzel um Eins vermehrt. Ob übrigens vielleicht ein Rechnungsfehler eingeschlichen sey, prüft man durch eine ähnliche Probe, wie bey der Division: wenn nemlich die gefundene Wurzel quadrirt und der etwa übrig gebliebene Rest hinzu addirt wird, so muß die gegebene Zahl gefunden werden.

189 §.

198 §.

Die Ausziehung der Quadratwurzeln wird erleichtert, wenn man Tafeln zur Hand hat, worin die Quadratzahlen für solche Wurzeln, die aus drey bis vier Ziffern bestehen, berechnet sind. Im folgenden wird eine Sammlung Mathematischer Tafeln, welche unter dem Nahmen der Trigonometrischen Tafeln am meisten bekannt sind, ausführlicher beschrieben werden, wovon man mehrere theils vollständigere theils nicht so vollständige Ausgaben hat. In der Wolffischen Ausgabe der Trigonometrischen Tafeln sind die Quadratzahlen für die Wurzeln von 1 bis 1000 berechnet; auch stehet diese erste Chiliade in H. Lamberts Zusätzen zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen; Berlin 1770. Hat man dergleichen Tafeln zur Hand, so findet man in denselben ohne alle Rechnung die Wurzel selbst, oder doch ihren rationalen Theil in ganzen Zahlen, so lange die gegebene Quadratzahl nicht mehr als 6 Ziffern hat. In andern Fällen, wenn die Quadratzahl mehr als 6 Ziffern hat, kann man dennoch die Rechnung verkürzen, wenn man, nachdem die gegebene Quadratzahl gehörig in Classen eingetheilt ist, von den Ziffern der drey höchsten Classen die nächst kleinere Quadratzahl, welche man in den Tafeln findet, abziehet, und ihre Wurzel für den schon bekannten Theil der gesuchten Wurzel annimmt. Mit der übrigen Rechnung wird alsdenn nach den Regeln des vorigen §. verfahren. Wäre die Zahl 75|25|56|25 gegeben, so könnte man die Quadratzahl $751689 = 867^2$ aus den Tafeln nehmen, und übrigens so rechnen.

```
75|25|56|25 | 8675
75 16 89    |
-----------
    8 6725
    1 734)
    8 6725
------------
         0
```

§. 199.

Die Quadratwurzel aus einem Bruch wird gefunden, wenn man sowohl aus dem Zähler als auch aus dem Nenner die Quadratwurzel sucht; und von einer Zahl, welche aus der 1 mit einer graden Anzahl daran hängender Nullen besteht, ist die Quadratwurzel eben die 1 mit halb so vielen daran hängenden Nullen. Wendet man dies auf die Decimalbrüche an; so erhellet leicht, daß die Quadratwurzel aus einer Zahl, woran eine grade Anzahl von Decimalstellen hängt, gefunden sey, wenn man die Quadratwurzel aus der Zahl selbst, die Decimalstellen mit als ganze Zahlen betrachter, gefunden hat, und hiernächst von der Wurzel rechter Hand halb so viel Decimalstellen abschneidet, als die gegebene Quadratzahl enthält. Diesemnach findet man $\sqrt{75,255625} = \sqrt{\frac{75255625}{1000000}} = \frac{8675}{1000} = 8,675$.

Wäre die Anzahl der Decimalstellen in der Quadratzahl ungrade, so wird dieser Fall auf den vorigen gebracht, wenn man rechter Hand noch eine Null anhängt, weil dies die Zahl selbst nicht ändert. Zwar könnte man auch ohne dies Hülfsmittel zu brauchen, bey der allgemeinen Regel bleiben, und die Quadratwurzel des Zählers und Nenners für sich suchen, hiernächst aber, wenn man es gut fände, den so gefundenen Bruch auf eine ganze Zahl mit anhängengenden Decimalbrüchen bringen: allein das gesuchte wird auf jenem Wege kürzer gefunden. Die Quadratwurzel aus 4,489 wäre $=\sqrt{\frac{4489}{1000}}$, und man müste aus Zähler und Nenner die Quadratwurzel suchen, da dann die Wurzel des Nenners irrational wäre. Statt dessen findet man vortheilhafter $\sqrt{4,4890}=\sqrt{\frac{44890}{10000}}=\frac{1}{100}\sqrt{44890}=2,11+$. Ob nun gleich solchergestalt die Wurzel des Zählers irrational wird, wenn gleich die Wurzel des vorigen Zählers rational war, weil $\sqrt{10}$ irrational ist; so kann doch in diesen und allen andern Fällen der rationale Theil der Wurzel der eigentlich gesuchten irrationalen Wurzel viel näher, ja jedesmahl so nahe gebracht werden, daß der Unterscheid kleiner wird, als jeder noch so kleine Theil der Einheit, der sich angeben läßt.

200 §.

Wenn nemlich die unvollkommene Quadratzahl nicht vielleicht ohnehin schon zum Theil in Decimalbrüchen gegeben ist; so bemerke man die Stelle der Einer mit dem gewöhnlichen Zeichen, damit der Werth der Zahl unverändert bleibe, wenn man gleich so viele Nullen, als jedesmahl nöthig sind, beyfüget. Aus der schon angeführten Ursache fügt man die Nullen Paarweise bey, wofern nicht vorher schon nach der Stelle der Einer vielleicht eine ungrade Zahl von Decimalstellen folgte: wozu eine Null kommen muß, bevor man die übrigen Paarweise beyfügt, damit man in allen fällen eine grade Zahl von Decimalstellen in der Quadratzahl erhalte. Für jedes neue Paar Nullen, die man jedesmahl, wie leicht zu übersehen ist, nur dem letzten Rest beyzufügen nöthig hat, findet man eine Decimalstelle der

Wurzel mehr, und druckt sie solchergestalt in Theilen der Einheit aus, die zehnmal kleiner sind, als diejenigen waren, wodurch die Wurzel vorher schon ausgedruckt war. Demnach können diese Theile kleiner werden, als jeder gegebene noch so kleine Theil der Einheit. Diesen Schlüssen gemäß sind folgende Exempel berechnet.

```
4,|48|90 | 2,11872603
4 45 21  |
---------
3 6900
  422
3 3824
--------
 307600
  4236
 296569
--------
 1103100
  42374
  847484
--------
  255616
   42374
  254244
--------
    1372
     423
    1269
    ----
     103
```

Die letzten drey Ziffern sind in diesem Exempel nach Art einer abgekürzten Division berechnet, und man nimmt leicht den Grund wahr, worauf diese Verkürzung beruhet. Bey jeder folgenden Operation erhält der Divisor eine Ziffer mehr, alle vorhergehende Ziffern des Divisors bis auf die letzte bleiben einerley,

auch

auch kann eben diese letzte Ziffer bey der folgenden Operation, wenn eine neue hinzu kommt, nur um Eins grösser werden. Wenn demnach die Anzahl der schon gefundenen Ziffern der Wurzel mehr als die Hälfte der Anzahl ausmacht, welche man überhaupt zu suchen nöthig findet; so lassen sich die übrigen Ziffern der Wurzel nach Art einer abgekürzten Division finden.

Auf eben diese Art kann man folgende Quadratwurzeln suchen.

$\sqrt{2} = 1,41421356$	$\sqrt{11} = 3,3166248$
$\sqrt{3} = 1,7320507$	$\sqrt{13} = 3,6055513$
$\sqrt{5} = 2,2360679$	$\sqrt{14} = 3,7416574$
$\sqrt{6} = 2,4494897$	$\sqrt{15} = 3,8729833$
$\sqrt{7} = 2,64575131$	$\sqrt{17} = 4,1231056$
$\sqrt{10} = 3,1622776625$	$\sqrt{19} = 4,3588989$

201 §.

Die Quadratwurzeln zusammengesetzter Zahlen, die sich in Factoren zerfällen lassen, findet man durch Multiplication der Wurzeln ihrer Factoren in einander, wenn diese schon gefunden sind, deswegen hat man auch $\sqrt{6} = \sqrt{2}.\sqrt{3}$, $\sqrt{14} = \sqrt{2}.\sqrt{7}$, u. s. f. Vornemlich alsdenn wird dies eine Abkürzung der Rechnung, wenn die Wurzel aus dem einen Factor rational ist, wie in folgenden Beyspielen.

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2,82842712$$
$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 2,4641014$$
$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4,24264068$$
$$\sqrt{1000} = 10\sqrt{10} = 31,622776625$$
$$\sqrt{100000} = 100\sqrt{10} = 316,22776625$$
$$\sqrt{44890} = 67\sqrt{10} = 211,8726033875$$

Wenn keiner von den Factoren eine rationale Wurzel hat, so findet man vermittelst der abgekürzten

Multi-

Multiplication die Wurzel des Products in soviel Ziffern bis auf die zwey letzten richtig, als man Ziffern für die Wurzeln der Factoren berechnet hat, wie in dem folgenden Exempel.

$$\begin{array}{rrl}
\text{Es ist} & \sqrt{10} = & 3,16227766 \\
& \sqrt{2} = & 1,41421356 \\
\hline
& & 3,16227766 \\
& & 1,264911064 \\
& & \quad 31622776 \\
& & \quad 12649110 \\
& & \qquad 632455 \\
& & \qquad 31622 \\
& & \qquad\; 9486 \\
& & \qquad\; 1581 \\
& & \qquad\;\; 189 \\
\hline
\text{also} & \sqrt{20} = & 4,47213594
\end{array}$$

Uebrigens kann man jeden Bruch, auch wenn es kein Decimalbruch ist, so verändern, daß die Quadratwurzel seines Nenners rational wird, welches wiederum für die Rechnung bequemer ist, wenn die Quadratwurzel aus einem Bruch verlangt wird: denn man hat allemahl $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{bb}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$, also $\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}$. Diesemnach findet man

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,70710678$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,5773502$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0,8164966$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0{,}4472136$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = 0{,}63245553$$

202 §.

Wofern der Fall vorkommt, daß man aus einer Wurzel, die für sich schon irrational ist, von neuen eine Quadratwurzel suchen soll; so kann man die Rechnung nur auf das bekannte Stück der gegebenen Irrationalzahl anwenden. Es sey R die gegebene Irrationalzahl, m ihr bekannter rationaler Theil, und x der unbekannte irrationale Theil, so ist $\sqrt{R} = \sqrt{(m+x)}$, oder $\sqrt{R} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{x}{m}\right)}$. Man setze $\sqrt{\left(1 + \frac{x}{m}\right)} = 1 + e$, so ist $\sqrt{R} = \sqrt{m} + e\sqrt{m}$, und $1 + \frac{x}{m} = 1 + 2e + e^2$, also ferner $(2+e)e = \frac{x}{m}$, und $e = \frac{x}{(2+e)m} = \frac{\frac{1}{2}x}{(1+\frac{1}{2}e)m}$. Diesemnach ist $e < \frac{x}{2m}$, und weil $\frac{1}{1+\frac{1}{2}e} = 1 - \frac{\frac{1}{2}e}{1+\frac{1}{2}e}$ gefunden wird, so hat man auch $e = \frac{\frac{1}{2}x}{m}\left(1 - \frac{\frac{1}{2}e}{1+\frac{1}{2}e}\right)$, also $e > \frac{\frac{1}{2}x}{m}\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2m}\right)$, oder $e > \frac{x}{2m} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{4m^2}$.

Kann man nun voraussetzen, daß x in Vergleichung mit m sehr klein sey, so gehört die höchste Ziffer des Quadrats der Zahl $\frac{x}{2m}$ zu einer viel niedrigern Decimalordnung, als die höchste Ziffer der Zahl $\frac{x}{2m}$ selbst; also werden die höhern Ziffern der Zahlen $\frac{x}{2m}$ und $\frac{x}{2m} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4m^2}$ nicht verschieden seyn, und um so mehr muß die höchste Ziffer der Zahl e mit der höchsten Ziffer der Zahl $\frac{x}{2m}$ zu einerley Decimalordnung gehören. Weil nun $\sqrt{R} = \sqrt{m} + e\sqrt{m}$ war; so erhellet, daß die höhern Ziffern der Zahl $\sqrt{m}$ mit den höhern Ziffern der Zahl $\sqrt{R}$ bis auf diejenige übereinkommen, die mit der höchsten Ziffer der Zahl $e\sqrt{m}$ zu einerley Decimalordnung gehört. Aber diese höchste Ziffer der Zahl $e\sqrt{m}$ gehört mit der höchsten Ziffer der Zahl $\frac{x}{2m}\sqrt{m}$ zu einerley Decimalordnung: demnach berechne man $\sqrt{m}$ auf so viele Ziffern, bis die letzte mit der höchsten Ziffer der Zahl $\frac{x}{2m}\sqrt{m}$ zu einerley Decimalordnung gehört, so hat man $\sqrt{R}$ in eben so vielen Ziffern richtig gefunden. Weiter zu rechnen wäre überflüßig, weil die folgenden Ziffern der Zahl $\sqrt{m}$ mit den Ziffern der Zahl $\sqrt{R}$ nicht mehr überein kommen.

Ein Beyspiel hievon wäre, wenn man die Quadratwurzel aus $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{\sqrt{2}}$ suchen sollte. Im 200 §. ist $\sqrt{2} = 1,41421356$ gefunden, und wenn man diese Zahl $= m$ setzt, so gehört die höchste Ziffer von x zur neunten abnehmenden Decimalordnung

nung, also gehört die höchste Ziffer der Zahl $\frac{x}{2m}\sqrt{m}$ in diesem Exempel gewiß zu keiner höhern Decimalordnung, und wenn man $\sqrt{1,41421356}$ bis auf die achte Decimalstelle sucht, so hat man $\sqrt{\sqrt{2}}$ auf eben so viele Decimalstellen richtig gefunden. Die Rechnung selbst giebt folgendes.

```
1,41|42|13|56| 1,18920711
1 39 24
  2 18 13
    23 6)
  2 13 21
      4 92 56
      2 378)
      4 75 64
        16 920000
         2 37840)
        16 648849
           27115100
           2378414)1
             3330959
             237841 4)
```

Wollte man mehr Ziffern der Zahl $\sqrt{\sqrt{2}}$ richtig finden; so müste man vorher mehr Decimalstellen der Zahl $\sqrt{2}$ suchen.

Der XII. Abschnitt.

Die Regeln,

nach welchen man aus jeder Zahl die Cubicwurzel findet.

203 §.

Wenn man die Quadratzahlen der ersten neun Wurzeln unter den ganzen Zahlen mit den Wurzeln wieder multiplicirt, so findet man für die ersten neun Wurzeln unter den ganzen Zahlen folgende Cubiczahlen.

Ziffern	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubiczahlen	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Wer oft rechnet, behält diese neun Cubiczahlen leicht, und erinnert sich benöthigten Falles der Wurzel: sonst muß man sich dieser kleinen Tafel bedienen, um die Wurzel daraus zu nehmen, wenn eine von diesen neun Cubiczahlen vorkommt, und ihre Wurzel verlangt wird. Aus Vergleichung dieser neun ersten vollkommenen Cubiczahlen erhellet übrigens die Richtigkeit des folgenden Satzes.

Die Cubiczahl kann höchstens nur aus dreyen Ziffern bestehen, wenn die Wurzel eine einfache Ziffer ist; die Cubiczahl von 10 aber hat schon vier Ziffern.

Die Cubiczahl von einer Wurzel, die rechter Hand eine Reihe Nullen hat, ist die Cubiczahl der Ziffern mit dreymahl so vielen Nullen, als die Wurzel am Ende hatte. Wenn demnach umgekehrt an einer

einer vollkommenen Cubiczahl eine durch 3 theilbare Zahl von Nullen hängt, so ist ihre Wurzel gefunden, wenn man der Cubicwurzel der Ziffern den dritten Theil der Nullen der Cubiczahl beyfügt.

204 §.

Wenn die Wurzel aus zweenen Theilen bestehet, so enthält die Cubiczahl folgende Stücke: die Cubiczahl des ersten Theils, das dreyfache Product der Quadratzahl des ersten Theils in den zweyten, das dreyfache Product des ersten Theils mit dem Quadrat des zweyten, und die Cubiczahl des zweyten Theils.

Beweis. Wenn a und b die Theile der Wurzel sind, so ist die Quadratzahl $a^2 + 2ab + b^2$, (190 §.) und diese mit der Wurzel multiplicirt giebt folgendes.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline + \quad a^2b + 2ab^2 \quad b^3 \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \quad\quad \\ \hline (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

250 §.

Die vollkommene Cubiczahl einer jeden rationalen Wurzel bestehet wenigstens aus dreymahl sovielen Ziffern weniger zwey, als die Wurzel enthält; aber auch nie aus mehr denn dreymahl sovielen Ziffern, als die Wurzel ausmachen.

Beweis. Wenn die Wurzel $n + 1$ Ziffern hat, so gehört ihre höchste Ziffer zur Ordnung n, und ihre Cubiczahl zur Ordnung $3n$; also hat diese Cubiczahl wenigstens $3n + 1 = 3(n+1) - 2$ Ziffern, die Nullen als Ziffern mitgezählt. Weil nun, um die Cubiczahl der ganzen Wurzel zu erhalten, noch die dreyfachen Producte und überdem die Cubiczahl des zweyten Theils hinzukommen, so erhellet, daß die Anzahl der Ziffern der Cubiczahl der ganzen Wurzel zwar grösser als $3n + 1$, aber nie kleiner seyn könne.

Die Cubiczahl der höchsten Ziffer für sich könnte wohl 3 Ziffern haben, aber nie mehr, (203 §.) also kann das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel $3n + 3 = 3(n+1)$ Ziffern haben, wenn die Nullen als Ziffern mitgezählt werden, und mehr kann auch die Cubiczahl der ganzen Wurzel nicht erhalten, wenn gleich die übrigen Theile dazu kommen. Denn die kleinste unter allen Zahlen, die aus $3(n+1) + 1$ Ziffern bestehen, ist $\overset{3(n+1)}{1}$, die Nullen als Ziffern mitgezählt, und ihre Cubicwurzel ist $\overset{n+1}{1}$; aber diese Wurzel besteht aus $n + 2$ Ziffern, und ist grösser, als die angenommene Wurzel, die nur $n + 1$ Ziffern haben sollte. Demnach hat die Cubiczahl nie mehr, als $3(n+1)$ Ziffern.

206 §.

Wenn man eine vollkommene Cubiczahl von der Rechten gegen die Linke in Classen theilt, und jeder Classe drey Ziffern, mithin der höchsten Classe eine oder zwo Ziffern giebt, wenn die Zahl aller Ziffern nicht durch 3 theilbar ist; so besteht die Cubicwurzel aus so vielen Ziffern, als man Classen gemacht hat.

Beweis. Wenn die Zahl der Ziffern, welche die Cubiczahl ausmachen, durch 3 theilbar und $= 3m$

ist,

ist, so ist die Anzahl der Classen $= m$. Hätte nun die Cubicwurzel weniger als m Ziffern, wäre die Zahl dieser Ziffern $= m - n$; so wäre die Anzahl der Ziffern der Cubiczahl nicht grösser als $3m - 3n$, also hätte man nicht mehr, als $m - n$ Classen. Hätte dagegen die Wurzel mehr als m Ziffern, wäre die Zahl dieser Ziffern $= m + n$; so wäre die Anzahl der Ziffern der Cubiczahl nicht kleiner als $3(m + n) - 2 = 3m + 3n - 2 = 3m + 3(n - 1) + 1$. Demnach hätte man $m + n$ Classen, und beydes widerspricht der Voraussetzung.

Ist die Anzahl der Ziffern der Cubiczahl nicht durch 3 theilbar, so sey sie $= 3m + \mu$, und $\mu < 3$, mithin die Anzahl der Classen $= m + 1$. Wäre nun die Anzahl der Ziffern der Wurzeln kleiner, wäre sie $= m + 1 - n$, so wäre die Zahl der Ziffern der Cubiczahl nicht grösser, als $3(m + 1) - 3n$, und man hätte nicht mehr als $m + 1 - n$ Classen. Wäre dagegen die Zahl der Ziffern der Wurzel grösser als $m + 1$, wäre sie $= m + 1 + n$; so wäre die Zahl der Ziffern der Cubiczahl nicht kleiner als $3(m + 1 + n) - 2$, also nicht kleiner als $3m + 3n + 1$, und man hätte nicht weniger als $m + 1 + n$ Classen, beydes wiederum gegen die angenommene Voraussetzung.

207 §.

Wird die Wurzel um Eins vermehrt, so wächst die Cubiczahl um die dreyfache Summe der vorigen Wurzel und ihrer Quadratzahl, und überdem noch um Eins.

Beweis. Denn es ist $(R + 1)^3 = R^3 + 3R^2 + 3R + 1$. (204 §.) Weil nun R^3 die Cubiczahl von R ist, so wächst diese Cubiczahl um $3(R + R^2) + 1$, wenn R um Eins wächst.

Wenn eine Zahl, wie 287 keine vollkommene Cubiczahl ist, und man subtrahirt davon diejenige unter den kleinern vollkommenen Cubiczahlen, welche jener am nächsten kommt; welches im gegenwärtigen Fall $216 = 6^3$ wäre; so ist der Rest kleiner, als die Summe, welche gefunden wird, wenn man zur dreyfachen Summe der Cubicwurzel von der subtrahirten Cubiczahl und des Quadrats dieser Wurzel noch Eins addirt. In dem angenommenen Beyspiel ist $287 - 216 < 3(\sqrt[3]{216} + (\sqrt[3]{216})^2) + 1$, oder $287 - 216 = 71 < 127$. Auch ist die Cubicwurzel aus der nächstkleinern vollkommenen Cubiczahl derjenige rationale Theil der Wurzel aus der unvollkommenen Cubiczahl, welcher sich in ganzen Zahlen ausdrücken läßt. Weil $6^3 < 287$, und $7^3 > 287$ ist, so folgt, daß $\sqrt[3]{287} = 6 +$ einen Bruch sey, der kleiner als 1 ist.

208 §.

Wenn man eine, zwey oder mehr von den höhern Classen einer gehörig eingetheilten Cubiczahl C allein für sich als eine Cubiczahl betrachtet, und daraus die Wurzel sucht; so sind die Ziffern dieser Wurzel einerley mit so viel von den höhern Ziffern der Cubicwurzel aus C, als man Classen genommen hat.

Beweis. Wenn man m höhere Classen abgenommen hat, und die Zahl C aus $m + n$ Classen bestehet, so machen diese m höhern Classen eine Zahl aus, wovon die niedrigste Ziffer zur Ordnung $3n$ gehört. Es sey also diese Zahl $= \overset{3n}{A}$, und der übrige Theil der Cubiczahl $= B$, so ist $C = \overset{3n}{A} + B$. Die

Cubic=

Cubicwurzel aus C hat $m + n$ Ziffern, und wenn man von den höhern Ziffern dieser Wurzel eben so viele abnimmt, als man von den höhern Classer der Cubiczahl abgenommen hat; so machen diese eine Zahl aus, wovon die niedrigste Ziffer zur Ordnung n gehört. Man setze diese Zahl $= \overset{n}{R}$, den übrigen Theil der Cubicwurzel $= r$, so ist $\sqrt[3]{C} = \overset{n}{R} + r$, und $C = \overset{3n}{R^3} + 3\overset{2n}{R^2} \cdot r + 3\overset{n}{R} \cdot r^2 + r^3$. Demnach ist $\overset{3n}{R^3}$ ganz in dem höhern Theil $\overset{3n}{A}$ der Cubiczahl C enthalten; wenn aber die Zahl $\overset{n}{R}$ nur um eine Einheit der Ordnung n vermehrt wird, so ist $\overset{3n}{(R+1)^3} > C$. Denn es ist $\overset{n}{1} > r$, weil die Zahl r nur n Ziffern hat, (189 §. n. 4.) also $\overset{n}{R} + \overset{n}{1} > \overset{n}{R} + r$, oder $\overset{n}{(R+1)} > \overset{n}{R} + r$, mithin $\overset{3n}{(R+1)^3} > \overset{n}{(R+r)^3}$, oder $\overset{3n}{(R+1)^3} > C$.

Nun sey a die Cubicwurzel aus A, so weit sich diese in ganzen Zahlen angeben läßt, so ist a^3 diejenige unter den kleinern vollkommenen Cubiczahlen, welche der Zahl A am nächsten kommt, und A kann nicht grösser als R seyn. Denn wäre a nur um Eins grösser als R, also $a = R + 1$; so wäre $\overset{3n}{a^3} = \overset{3n}{(R+1)^3} > C$, welches der Voraussetzung entgegen ist, weil $\overset{3n}{a^3}$ nicht grösser, als $\overset{3n}{A}$, und $\overset{3n}{A} < C$ ist. Ferner sey $A - a^3 = \delta$; so ist $A = a^3 + \delta$, $\overset{3n}{A} = \overset{3n}{a^3} + \overset{3n}{\delta}$, und $\delta < 3(a + a^2) + 1$, also $a^3 + \delta < (a + 1)^3$, oder $\overset{3n}{a^3} + \overset{3n}{\delta} < \overset{3n}{(a + 1)^3}$, und $\overset{3n}{a^3} + \overset{3n}{\delta} + B = C$. Aber $\overset{3n}{R^3}$ ist ganz in $\overset{3n}{a^3} + \overset{3n}{\delta}$ enthalten, mithin ist $\overset{3n}{R^3}$ nicht grösser als $\overset{3n}{a^3} + \overset{3n}{\delta}$, also $\overset{3n}{R^3} < \overset{3n}{(a + 1)^3}$, und $R < a + 1$, oder $a > R - 1$. Weil nun auch $a < R + 1$ seyn muste, und a sowohl als R eine ganze Zahl ist, so muß $a = R$ seyn.

Wenn demnach die höchste Classe für sich allein eine vollkommene Cubiczahl ist; so ist ihre Wurzel, die man aus der Tafel des 203 §. findet, die höchste Ziffer der gesuchten Wurzel: im entgegen gesetzten Fall ist diese höchste Ziffer der Wurzel einerley mit der Cubicwurzel aus der nächstkleinern von den neun ersten vollkommenen Cubiczahlen, welche in der Tafel des 203 §. enthalten sind.

209 §.

Eine ganze Zahl besteht höchstens aus vier bis sechs Ziffern, man soll ihre Cubicwurzel finden.

Aufl. Wenn man eine solche Zahl dem 206 §. gemäß in Classen theilt, so erhält sie zwey Classen; ihre Wurzel hat also zwey Ziffern, und die höchste Ziffer der Wurzel erhält man aus der Tafel des 203 §. Die gegebene Cubiczahl sey 421|875, so ist 421 zwar keine vollkommene Cubiczahl, aber die nächstkleinere ist 343, also die höchste Ziffer der Wurzel 7. Wenn nun β die zweyte Ziffer der Wurzel ist, so rechnet man leicht auf folgende Art weiter.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & \quad\alpha \qquad \beta \\
\beta & 421|875 & 70 + 5 \\
\overset{3}{\alpha}{}^3 = & 343\,000 & \\
\hline
 & 78\,875 & = 3\overset{2}{\alpha}{}^2\beta + 3\overset{1}{\alpha}\beta^2 + \beta^3 \\
3\overset{2}{\alpha}{}^2 = & 14\,700) & \\
3\alpha^2\beta = & 73\,500 & \\
3\alpha\beta^2 = & 5\,250 & \\
\beta^3 = & 125 & \\
\hline
 & 78875 & = 3\overset{2}{\alpha}{}^2\beta + 3\overset{1}{\alpha}\beta^2 + \beta^3 \\
\hline
 & \text{Rest } 0 &
\end{array}
$$

Die Wurzel ist $\overset{1}{\alpha} + \beta$, und $\alpha = 7$, $\overset{1}{\alpha} = 70$: man mache also $\overset{3}{\alpha}{}^3 = 343000$, und ziehe diese Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel von der gegebenen Cubiczahl ab; so bleibt der Rest $78875 = 3\overset{2}{\alpha}{}^2\beta + 3\overset{1}{\alpha}\beta^2 + \beta^3$. Wenn man diesen Rest mit $3\overset{2}{\alpha}{}^2 = 14700$ dividirt; so könnte der Quotient wohl grösser als β gefunden werden, weil eben dieser Rest grösser ist als $3\overset{2}{\alpha}{}^2 . \beta$: aber die Probe muß ergeben, ob der so gefundene Quotient würklich $= \beta$, oder grösser als β sey. Man nehme nemlich den Quotienten $= \beta$ an, suche die dreyfachen Producte eines jeden Theils der Wurzel in das Quadrat des andern, und die Cubiczahl des für den zweyten Theil angenommenen Quotienten. Kommt die Summe dieser dreyen Theile grösser heraus, als der vorhin gefundene Rest ist; so vermindere man die für β angenommene Ziffer so lange, bis die Summe jener dreyen Theile den Rest nicht mehr übertrift, und ziehe eben diese Summe vom vorigen Rest ab. Wenn nichts

nichts übrig bleibt, so ist die gegebene Zahl eine vollkommene Cubiczahl, und die gesuchte Wurzel gefunden.

Das dreyfache Quadrat des ersten Theils der Wurzel hat eine Null weniger als die Cubiczahl des höchsten Theils der Wurzel: also kann man es, ohne die Nullen beyzufügen, so unter den Rest setzen, daß die niedrigste Ziffer dieses dreyfachen Quadrats vom ersten Theil der Wurzel mit der höchsten Ziffer der zweyten Classe in eine Columne kommt. Ist dies geschehen, so dividirt man um die zweyte Ziffer der Wurzel zu erhalten so, als wenn die beyden lezten Ziffern der zweyten Classe noch nicht da stünden, in die übrigen höhern Ziffern des Restes. Das erste von den dreyfachen Producten hat zwey Nullen, also kommen die Ziffern desselben unter den Ziffern des Divisors zu stehen: das zweyte von den dreyfachen Producten hat nur eine Null, die Cubiczahl des zweyten Theils gar keine Null am Ende. Demnach schreibt man diese drey Theile auch ohne die anzuhängenden Nullen leicht so unter einander, daß ihre Summe richtig gefunden wird.

Wofern nach geschehener Subtraction dieser Summe ein Rest bleibt, so muß derselbe kleiner seyn als die dreyfache Summe der gefundenen Wurzel und ihrer Quadratzahl, wenn zu dieser Summe noch Eins addirt wird: widrigenfalls hätte man die zweyte Ziffer der Wurzel zu klein angenommen, und man müßte sie so lange um Eins vermehren, bis der Rest kleiner würde, als die angezeigte Summe. In allen Fällen, wenn ein solcher Rest übrig bleibt, hat die gegebene Zahl keine Cubicwurzel unter den ganzen Zahlen; denn die schon gefundene Wurzel ist zu klein,

und

und wenn man sie noch um Eins vermehrt, so ist sie zu groß. Demnach hat in allen solchen Fällen die Zahl auch keine Cubicwurzel unter den rationalen Brüchen, (187 §.) und die Wurzel ist irrational: wiewohl vermittelst des beschriebenen Verfahrens derjenige rationale Theil der Wurzel gefunden ist, der sich in ganzen Zahlen angeben läßt, so daß der Fehler noch keine völlige Einheit beträgt.

210 §.

Alle Ziffern einer Cubicwurzel einer Zahl bis auf die niedrigste sind gegeben: man soll die niedrigste finden.

Aufl. Diejenige Zahl, welche die schon bekannten Ziffern der Wurzel für sich allein ausmachen würden, bezeichne man, wie im 208 §. mit R, so ist $\overset{1}{R}$ der schon bekannte Theil der Wurzel, und was dort r hies, das ist hier eine einfache Ziffer. Diese sey β; so ist die ganze Wurzel $= \overset{1}{R} + \beta$, und die gegebene Cubiczahl $C = (\overset{1}{R} + \beta)^3 = \overset{3}{R}^2 + 3\overset{2}{R}^2\beta + 3\overset{1}{R}\beta^2 + \beta^3$, wozu vielleicht noch ein Ueberschuß über $(\overset{1}{R} + \beta)^3$ kommt, der aber kleiner ist, als $3(\overset{1}{R} + \beta)^2 + 3(\overset{1}{R} + \beta) + 1$. Diesemnach kann aus dem schon bekannten Theil der Wurzel die noch fehlende niedrigste Ziffer eben so gefunden werden, wie im 209 §. aus der ersten Ziffer die zweyte gefunden ward, wenn die Wurzel nur zwey Ziffern hatte.

Wäre $C = 432|081|216$, so hätte die Wurzel drey Ziffern, und man weis aus dem 208 §, daß die

die beyden höchsten Ziffern einerley sind mit den beyden Ziffern der Cubicwurzel aus 432|081, und diese findet man den Regeln des 209 §. gemäß = 75. Demnach ist in diesem Beyspiel $\overset{1}{R} = 750$, und die dritte giebt nachstehende Rechnung.

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad \overset{1}{R} \quad \beta \\
432|081|216 & |\,750 + 6 \\
\overset{3}{R}{}^3 = 421|875|000 & \\
\hline
10\,206\,216 & = 3\overset{2}{R}{}^2\beta + 3\overset{1}{R}\beta^2 + \beta^3 \\
3\overset{2}{R}{}^2 = 1\,687\,500) & \\
3\overset{2}{R}{}^2\beta = 10\,125\,000 & \\
3\overset{1}{R}\beta^2 = \quad 81\,000 & \\
\beta^3 = \quad 216 & \\
\hline
10206216 & = 3\overset{2}{R}{}^2\beta + 3\overset{1}{R}\beta^2 + \beta^3 \\
\hline
\text{Rest } 0 &
\end{array}
$$

211 §.

Aus jeder gegebenen Zahl, sie mag soviele Ziffern, als man will, enthalten, die Cubicwurzel zu finden, so weit als ihr rationaler Theil in ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann.

Aufl. Nachdem die gegebene Zahl gehörig in Classen ist eingetheilt worden, suche man aus den beyden höchsten Classen nach den Regeln des 209 §. die beyden Ziffern, welche die Cubicwurzel ausmachen würden, wenn die gegebene Zahl aus diesen beyden Classen allein bestünde; so sind das zugleich die beyden höchsten Ziffern der gesuchten Wurzel, (208 §.)

Hiezu

Hiezu nehme man ferner die dritte Classe, und suche die dritte Ziffer der Wurzel nach Anleitung des 210 §, nicht anders, als wenn die drey höhern Classen allein die gegebene Cubiczahl ausmachten; so hat man die drey höchsten Ziffern der gesuchten Wurzel. (208 §.)

Weiter nehme man die vierte Classe hinzu, und suche nach den Regeln des 210 §. die vierte Ziffer der Wurzel nicht anders, als wenn die gegebene Zahl aus den vier höhern Classen allein bestünde; so hat man die vier höhern Ziffern der Wurzel. (208 §.)

Setzt man eben so die Rechnung für alle folgende Classen fort, so findet man nach einander alle Ziffern der gesuchten Wurzel: weil die im 208 §. vorgetragenen Schlüsse beweisen, daß die jedesmahl so gefundene folgende Ziffer, welches die letzte der Wurzel seyn würde, wenn die gegebene Zahl nur so viel Classen hätte, als man bis dahin in Rechnung gezogen hat, zugleich die nächstfolgende Ziffer der gesuchten Wurzel sey.

Bliebe ein Rest übrig, so müste er kleiner seyn, als die dreyfache Summe der gefundenen Wurzel und ihre Quadratzahl, wenn noch Eins dazu addirt wird; auch prüft man die Richtigkeit der Rechnung dadurch, daß man von der gefundenen Wurzel die Cubiczahl macht, und den Rest hinzu addirt: solchergestalt muß die gegebene Zahl gefunden werden.

212 §.

Je mehr Ziffern die gesuchte Wurzel hat, desto weitläuftiger muß die Rechnung werden, wenn man alle Ziffern auf diesem Wege sucht: deswegen leisten die

die im 198 §. bereits angeführten Quadrat= und Cubictafeln dabey vorzügliche Dienste, um die Rechnung zu verkürzen. In den Lambertschen Tafeln hat man die ersten tausend Cubiczahlen mit ihren Wurzeln, und kann die Wurzel nur daraus abschreiben, wenn die gegebene Zahl nicht mehr als neun Ziffern hat. In andern Fällen subtrahirt man von den drey höchsten Classen die nächstkleinere aus den Tafeln genommene Cubiczahl, nimmt die Wurzel daraus für die drey ersten Ziffern der gesuchten Wurzel an, und sucht die noch fehlenden nach den Regeln des vor. §. wie in dem folgenden Exempel.

```
144|125|083|907|
143 877 824     | 5243
-----------
    247 259 907
     82 372 8)
    247 118 4
        141 48
            27
    -----------
    247 259 907
    -----------
         Rest 0
```

In diesem und ähnlichen Fällen hat man zugleich beym Gebrauch der Tafeln den Vortheil, daß man auch das Quadrat der ersten drey Ziffern der Wurzel daraus abschreiben, und solchergestalt die Mühe, es vermittelst der Multiplication zu suchen, ersparen kann.

213 §.

Die Cubicwurzel eines Bruchs ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner die Cubicwurzel aus dem Zähler und Nenner der Cubiczahl ist: und von einer

Zahl,

Zahl, die aus der 1 mit einer durch 3 theilbaren Anzahl daran hängender Nullen bestehet, ist die Cubicwurzel eben die 1 mit dem dritten Theil der Nullen. Also ist die Cubicwurzel aus einer Zahl, woran eine durch 3 theilbare Anzahl von Decimalstellen hängt, gefunden, wenn man die Cubicwurzel aus der Zahl selbst, die Decimalstellen als ganze Zahlen betrachtet gefunden hat, und von der Wurzel den dritten Theil soviel Decimalstellen abschneidet, als die Cubiczahl enthält. Diesemnach findet man $\sqrt[3]{432,081216}$ $= \sqrt[3]{\frac{432081216}{1000000}} = \frac{756}{100} = 7,56$.

Wäre die Zahl der Decimalstellen der Cubiczahl nicht mit 3 theilbar, so wird dieser Fall auf den vorigen gebracht, wenn man eine oder zwo Nullen anhängt, weil solches die Zahl nicht ändert. Das ist wiederum ein ähnlicher Vortheil bey Ausziehung der Cubicwurzel, wie die Hinzusetzung einer Null bey Ausziehung der Quadratwurzel, wenn die Zahl der Decimalstellen, die an der Quadratzahl hängen, ungrade ist. Eigentlich wäre $\sqrt[3]{56,4327} = \sqrt[3]{\frac{564327}{10000}}$, und man müste nun beyde Cubicwurzeln suchen, damit man eine mit der andern dividiren könnte. Allein es ist auch $\sqrt[3]{\frac{564327}{10000}} = \sqrt[3]{\frac{56432700}{1000000}} =$
$\frac{\sqrt[3]{56432700}}{100} = \sqrt[3]{56,432700}$.

214 §.

Eben dies Hülfsmittel dient, aus einer unvollkommenen Cubiczahl die Wurzel durch Näherung so genau, als man will, zu finden, Wenn die unvollkommene Cubiczahl nicht vielleicht ohnehin schon zum Theil in Decimalbrüchen gegeben ist; so bemerke man die Stelle der Einer mit dem gewöhnlichen Zeichen, damit der Werth der Zahl unverändert bleibe, wenn man gleich so viele Nullen, als jedesmahl nöthig sind, beyfüget. Mit Ausnahme des Falles, wenn die Cubiczahl schon eine durch drey nicht theilbare Zahl von Decimalstellen enthält, welchen man der Regel des vorigen §. gemäß eine oder zwo Nullen beyfüget, muß die Anzahl der hinzugesetzten Nullen wegen der schon bekannten Ursachen durch 3 theilbar seyn: für jede drey Nullen, die man nur dem jedesmaligen Rest beyzufügen nöthig hat, erhält man alsdenn eine Decimalstelle der Wurzel, und man kann jedesmahl zum voraus wissen, wieviele Nullen man anhängen müsse, um die Wurzel bis auf eine gewisse Decimalstelle richtig zu erhalten. Diesen Regeln gemäß ist die Rechnung im nachstehenden Exempel angestellet.

2,000 000 | 1,259921

1 953 125 |

46 875000

4 6875)

42 1875

30375

729

42491979

4383021000.

4755243)

42797187

305937

729

4282778799

100242201000

476204403)

952408806

151188

8

95242392488

4999808512000

47621952192)

3779761

4762198998961

237609513039

Probe.

$1,259921^3 = 1,999999762390486961$

Rest 237609513039

Summe 2,000000000000000000

Je mehr Ziffern der Wurzel schon gefunden sind, desto grösser ist der schon gefundene Theil der Wurzel in Vergleichung mit dem nächstfolgenden, deswegen wird das dreyfache Product des Quadrats vom ersten Theil der Wurzel in den zweyten in Vergleichung mit den übrigen beyden Theilen immer grösser: auch bleiben desto mehr Ziffern vom dreyfachen Quadrat des schon gefundenen Theils der Wurzel bey der folgenden Operation dieselben, die sie schon bey der vorigen waren. Wenn man dies bemerkt; so übersiehet man leicht, daß einige von den letzten Ziffern der Wurzel eben so nach Art einer abgekürzten Division gefunden werden können, wie im 200 §. einige der letzten Ziffern der Quadratwurzel vermittelst einer solchen Abkürzung der Rechnung sind gefunden worden.

215 §.

Sind die Cubicwurzeln solcher Primzahlen schon bekannt, die in einander multiplicirt eine gegebene Cubiczahl als ein Product zuwege bringen, so findet man die Cubicwurzel des Products, wenn man die Cubicwurzeln der Factoren in einander multiplicirt. Die Rechnung wird dadurch vorzüglich alsdenn abgekürzt, wenn der eine Factor eine rationale Wurzel hat, wie in folgenden Exempeln.

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \times 8} = 2\sqrt[3]{2} = 2{,}519842$$
$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \times 27} = 3\sqrt[3]{2} = 3{,}779763$$
$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2 \times 64} = 4\sqrt[3]{2} = 5{,}039684$$
$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2 \times 125} = 5\sqrt[3]{2} = 6{,}299605$$
$$\sqrt[3]{432} = \sqrt[3]{2 \times 216} = 6\sqrt[3]{2} = 7{,}559526$$

Ferner

Ferner ist zu bemerken, daß der bey Ausziehung der Quadratwurzel aus Brüchen oben im 201 §. angezeigte Vortheil auch alsdenn seine Anwendung finde, wenn die Cubicwurzel aus einem Bruch gesucht wird. Allemahl läßt sich der Bruch so verändern, daß die Cubicwurzel des Nenners rational wird; denn es ist $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$, also $\sqrt[3]{\frac{1}{b}} = \frac{\sqrt[3]{b^2}}{b}$. Diesemnach findet man $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt[3]{48}}{4}$, u. s. f. Die Cubicwurzeln der Brüche könnten demnach eben so, wie ihre Quadratwurzeln, durch eine blosse Division gefunden werden, wenn die Cubicwurzeln aller ganzen Zahlen bekannt wären.

Soll man aus einer Irrationalzahl die Cubicwurzel suchen; so sey m ihr bekannter rationaler Theil, x der unbekannte irrationale Theil, und R die aus beyden zusammengesetzte Irrationalzahl, also $R = m + x$, und $\sqrt[3]{R} = \sqrt[3]{(m+x)} = \sqrt[3]{m} \,.\, \sqrt[3]{\left(1 + \frac{x}{m}\right)}$. Der rationale Theil m komme der Irrationalzahl R so nahe, daß $\frac{x}{m}$ schon ein sehr kleiner Bruch ist; so übertrift nicht allein $1 + \frac{x}{m}$, sondern auch $\sqrt[3]{\left(1 + \frac{x}{m}\right)}$ die Einheit sehr wenig, und wenn man $\sqrt[3]{\left(1 + \frac{x}{m}\right)} = 1 + e$ setzt, so hat man $\sqrt[3]{R} = (1 + e)\sqrt[3]{m}$.

Die Voraussetzung $\sqrt[3]{\left(1+\frac{x}{m}\right)} = 1 + e$ giebt $1 + \frac{x}{m} = 1 + 3e + 3e^2 + e^3$, also $\frac{x}{m} = (3 + 3e + e^2)e$, und $e = \frac{x}{(3+3e+e^2)m}$. Demnach ist $e < \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{m}$, und weil $\frac{1}{1+e+\frac{1}{3}e^2} = 1 - \frac{e+\frac{1}{3}e^2}{1+e+\frac{1}{3}e^2}$ gefunden wird, so ist auch $e = \frac{\frac{1}{3}x}{m}\left(1 - \frac{e+\frac{1}{3}e^2}{1+e+\frac{1}{3}e^2}\right)$, folglich $e > \frac{\frac{1}{3}x}{m}\left(1 - \frac{\frac{1}{3}x}{m} + \frac{\frac{1}{27}\cdot x^2}{m^2}\right)$, oder $e > \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{m} - \frac{1}{9} \cdot \frac{x^2}{m^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{x^3}{m^3}$. Weil nun $\sqrt[3]{R} = \sqrt[3]{m} + e\sqrt[3]{m}$ war, so müssen die höhern Ziffern der Cubicwurzel aus m mit den höhern Ziffern der Cubicwurzel aus R bis auf diejenige übereinkommen, welche mit der höchsten Ziffer der Zahl $e\sqrt[3]{m}$ zu einerley Decimalordnung gehört. Aber e ist zwischen den beyden Zahlen $\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{m}$ und $\frac{1}{3}\ \frac{x}{m} - \frac{1}{9}\ \frac{x^2}{m^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{x^3}{m^3}$ enthalten, die in den höchsten Ziffern um deswillen mit einander übereinkommen, weil $\frac{x}{m}$ ein sehr kleiner Bruch ist: also muß auch die höchste Ziffer der Zahl $e\sqrt[3]{m}$ mit der höchsten Ziffer der Zahl $\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{m} \sqrt[3]{m}$ zu einerley Decimalordnung gehören.

Demnach

Demnach suche man $\sqrt[3]{m}$ auf soviele Ziffern bis die niedrigste mit der höchsten Ziffer der Zahl $\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{m} \sqrt[3]{m}$ zu einerley Decimalordnung gehört; so ist man versichert, daß auch $\sqrt[3]{R}$ auf eben soviel Ziffern richtig gefunden sey. Aber weiter zu rechnen würde überflüssig seyn, weil die folgenden Ziffern der Zahl $\sqrt[3]{m}$ mit den Ziffern der Zahl $\sqrt[3]{R}$ nicht mehr übereinkommen.

216 §.

Es sind zwo Zahlen gegeben: man soll zwischen beyden eine oder auch zwo mittlere stetige Geometrische Proportional-Zahlen finden.

Aufl. I.) Man multiplicire die erste Zahl mit der zweyten, und ziehe aus dem Product die Quadratwurzel, so hat man zwischen beyden eine mittlere stetige Proportionalzahl gefunden. (182 §.) Zwischen 2 und 32 ist $\sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8$ die mittlere Zahl.

II. Werden dagegen zwo mittlere Zahlen verlangt, so multiplicire man die zweyte Zahl mit der Quadratzahl der ersten, und ziehe aus dem Product die Cubicwurzel, so hat man die erste der beyden gesuchten Zahlen, (182 §.) und man findet die zweyte, wenn die Quadratzahl der eben gefundenen mit der ersten gegebenen Zahl dividirt. (178 §.) Zwischen 2 und 128 ist die erste mittlere Zahl $= \sqrt[3]{4 \times 128} = \sqrt[3]{512} = 8$, und die zweyte $= \frac{64}{2} = 32$.

Der XIII. Abschnitt.

Von der Zusammensetzung und Theilung der Verhältnisse, als dem Ursprung der Logarithmen.

217 §.

Man kann ein Paar Verhältnisse auf ähnliche Art mit einander vergleichen, wie oben im IX. Abschnitt ein Paar einzelne Grössen mit einander sind verglichen worden. Denn da ein Verhältniß grösser oder kleiner als das andre seyn kann, so kann man auch fragen, wie groß das eine in Vergleichung mit dem andern sey? ob es nemlich nochmahl so groß, oder dreymahl so groß, oder halb so groß sey, als das andre Verhältniß. Wenn man eine solche Vergleichung zwischen zweyen einzelnen Grössen anstellet; so prüfet man: ob entweder die eine ganz, oder doch ein aliquoter Theil von ihr in der andern etlichemahl enthalten sey? Eben so muß man bey Vergleichung der Verhältnisse verfahren: vor allen Dingen aber muß man sich eine richtige Vorstellung davon machen, wie sich ein Verhältniß aus seinen Theilen zusammen setzen lasse, und einige ganz bekannte Beyspiele werden die Sache am besten aufklären.

218 §.

Auf die Frage: wieviel gilt ein Thaler? kann man kurz antworten: ein Thaler gilt 24 Groschen, und das heißt angeben, 1 Thaler verhalte sich zum Ggr. wie 24 : 1. Eben dies Verhältniß des Thalers zum Gro=

Groschen liesse sich durch eine Art von Umweg so angeben: 3 Mark machen einen Thaler, und 8 Groschen ein Mark. Es folgt daraus, wie man leicht siehet, die vorige kürzere Vergleichung des Thalers mit dem Groschen, vermöge der 24 Ggr. einen Thlr. machen: indessen liegen in der letzten Antwort folgende zwo Proportionen:

Thlr. : Mark = 3 : 1
Mark : Ggr. = 8 : 1,

und beyde Verhältnisse des Thalers zum Mark, und des Marks zum Groschen kann man als Theile betrachten, die zusammen das ganze Verhältniß des Thalers zum Groschen ausmachen. Diesemnach sind auch die Verhältnisse 3 : 1 und 8 : 1 als Theile anzusehen, die zusammen das ganze Verhältniß 24 : 1 ausmachen: der Groschen 8mahl, und dies octuplum wieder dreymahl genommen giebt den Thaler. Oder umgekehrt: vom Thaler $\frac{1}{3}$, und wieder $\frac{1}{8}$ von diesem $\frac{1}{3}$ Thaler genommen giebt den Groschen.

Auf ähnliche Art liesse sich das Verhältniß des Thalers zum Groschen in mehr Verhältnisse als Theile eintheilen: denn ein Thaler gilt auch $1\frac{1}{2}$ Gulden, 1 Gulden gilt 2 Mark und 1 Mark gilt 8 Groschen. Das heißt in Proportionen gebracht

Thlr. : Guld. = $1\frac{1}{2}$: 1
Guld. : Mark = 2 : 1
Mark : Ggr. = 8 : 1,

und das ist noch immer eben so viel gesagt, als wenn es kurz und gut hiesse, der Thaler gilt 24 Ggr., denn der Groschen 8mahl, dies octuplum 2mahl, und dies doppelte octuplum $1\frac{1}{2}$ mahl genommen ist wiederum der Groschen 24mahl: demnach stellt man sich solchergestalt die drey Verhältnisse als Theile vor, die zusammen genommen das ganze Verhältniß des Thalers zum Groschen ausmachen. Auch sind in Zahlen ausgedrückt die drey Verhältnisse $1\frac{1}{2} : 1$, $2 : 1$, $8 : 1$ als Theile des ganzen Verhältnisses $24 : 1$ zu betrachten.

291 §.

Wenn also überhaupt mehrere Proportionen dieser Art vorkommen

$$\begin{aligned} A : B &= m : n \\ B : C &= p : q \\ C : D &= r : s \\ D : E &= t : u \\ E : F &= x : y \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

so ist das Verhältniß
$A : C$ aus $m : n$ und $p : q$
$A : D$ aus $m : n$, $p : q$, und $r : s$
$A : E$ aus $m : n$, $p : q$, $r : s$, $t : u$
$A : F$ aus $m : n$, $p : q$, $r : s$, $t : u$, $x : y$,
als Theilen zusammengesetzt: und die Verhältnisse, welche als Theile des Ganzen betrachtet werden, siehet man zugleich als einfache Verhältnisse an. Dabey ist folgende Art der Bezeichnung gewöhnlich: man schreibt

$$A : C = \left\{\begin{matrix} m : n \\ p : q \end{matrix}\right\},$$

$$A : D = \left\{\begin{matrix} m : n \\ p : q \\ r : s \end{matrix}\right\},$$

$$A : E = \left\{\begin{matrix} m : n \\ p : q \\ r : s \\ t : u \end{matrix}\right\},$$

$$A : F = \left\{\begin{matrix} m & : & n \\ p & : & q \\ r & : & s \\ t & : & u \\ x & : & y \end{matrix}\right\},$$

und zeigt dadurch an, daß die Verhältnisse A : C, A : D, u. s. f. aus den hinter dem Gleichheitszeichen befindlichen Verhältnissen als Theilen zusammen gesetzt sind.

Uebrigens ist hiebey vor allen Dingen zu bemerken, daß auf die Grösse der einzelnen Glieder hier gar nichts ankomme, weil ein und eben dasselbe Verhältniß sich auf unzählig viele verschiedene Arten ausdrücken läßt. Wäre

$$A : C = \left\{\begin{matrix} 4 & : & 5 \\ 7 & : & 23 \end{matrix}\right\},$$

so wäre auch $A : C = \left\{\begin{matrix} 8 & : & 10 \\ 21 & : & 69 \end{matrix}\right\}$:

Die Rede ist hier bloß von der Grösse der **Verhältnisse**, nicht von der Grösse **ihrer einzelnen Glieder.**

220 §.

Wenn man alle vorhergehende und alle nachfolgende Glieder mehrerer Verhältnisse in in einander multiplicirt; so ist das Verhältniß der Producte zusammengesetzt aus den Verhältnissen der einzelnen Factoren gegen einander.

Beweis. Es sey zuerst das Verhältniß A : C aus zweyen andern $m : n$ und $p : q$ zusammengesetzt; so kann man zwischen A und C eine dritte Grösse setzen, so, daß man

$m : n = A : B$

und $p : q = B : C$ erhält. Alsdenn

ist

ist $B = \frac{n}{m} . A$ (175 §.) und $C = \frac{q}{p} . B$, also

$C = \frac{q . n}{p . m} . A$, und das giebt $A : C = m . p : n . q$.

Wäre $A : D$ aus dreyen Verhältnissen $m : n$, $p : q$, $r : s$ zusammen gesetzt; so könnte man

$m . p : n . q = A : C$

und $r : s = C : D$ annehmen.

Nun wäre vermöge des bewiesenen

$$A : C = \begin{matrix} m : n \\ p : q \end{matrix}$$

und weil $C : D = r : s$; so wäre nicht allein $A : D = \left\{\begin{matrix} m : n \\ p : q \\ r : s \end{matrix}\right\}$, sondern auch $A : D = m . p . r : n . q . s$. Eben so erhellet, wenn der Satz für eine gewisse Zahl von Verhältnissen wahr ist, daß er zugleich für die nächstfolgende um Eins grössere Anzahl von Verhältnissen wahr sey. Wenn nemlich $A : C$ aus sovielen Verhältnissen, wie man will, zusammen gesetzt, und dies Verhältniß mit dem Verhältniß der Producte der einzelnen Glieder in einander einerley ist; wenn ferner noch ein Verhältniß $r : s$ zu den vorigen hinzu kommt; so kann man $r : s = C : D$ annehmen, und man findet dem 175 §. gemäß $D = \frac{s}{r} . C$. Ist nun $C = \frac{n \ldots q}{m \ldots p} . A$, so wird $D = \frac{s}{r} . C = \frac{n \ldots q . s}{m \ldots p . r} . A$, also $A : D = m \ldots p . r : n \ldots q . s$; auch ist $A : D$ aus allen den Verhältnissen zusammengesetzt, woraus $A : C$ zusammen gesetzt war, und überdem noch aus

$r : s$.

r : s. Diesemnach ist der Satz allemahl wahr, die Zahl der einfachen Verhältnisse sey so groß, wie man will.

221 §.

Wenn alle einfache Verhältnisse, woraus ein andres zusammen gesetzt ist, gleich groß sind; so heist das zusammengesetzte ein vervielfachtes Verhältniß, (ratio multiplicata) und man siehet die gleichen einfachen Verhältnisse als soviele gleiche Theile des zusammen gesetzten an, wovon jeder im zusammengesetzten Verhältniß so vielmahl enthalten ist, als gleiche Verhältnisse vorhanden sind, die das zusammengesetzte ausmachen. Wenn eine Ruthe 12 Fuß, ein Fuß 12 Zoll, ein Zoll 12 Linien, eine Linie 12 Scrupel hält, so ist

Ruthe : Fuß = 12 : 1
Fuß : Zoll = 12 : 1
Zoll : Linie = 12 : 1
Linie : Scrp. = 12 : 1,

und es sind die Verhältnisse der Ruthe zum Zoll, zur Linie, zum Scrupel vervielfachte Verhältnisse des einfachen 12 : 1. Letzteres ist im ersten zweymahl, im zweyten dreymahl, im dritten viermahl enthalten. Jedes aus dergleichen gleich grossen Verhältnissen als seinen Theilen zusammengesetzte Verhältniß erhält den besondern Nahmen von der Anzahl der gleich grossen Verhältnisse, die darin enthalten sind: es heist eine ratio duplicata, triplicata, quadruplicata des einfachen Verhältnisses, nachdem letzteres im ersten zwey- drey- vier- und mehrmahl enthalten ist. Jedes einfache heißt in Ansehung des ganzen aus mehrern eben so grossen zusammengesetzten Verhältnisses eine ratio submultiplicata; und daraus ergiebt sich von selbst,

was

was die Nahmen: ratio subduplicata, subtriplicata, subquadruplicata u. s. f. sagen wollen. Die ratio subduplicata ist die Hälfte, die subtriplicata der dritte Theil, die subquadruplicata der vierte Theil des ganzen Verhältnisses.

Diesemnach ist das Verhältniß zweyer Quadratzahlen doppelt so groß, das Verhältniß zweyer Cubiczahlen dreymahl so groß, als das Verhältniß ihrer Wurzeln. (220 §.) Ueberhaupt ist das Verhältniß zweyer Potenzen, die einerley Exponenten haben, aus dem Verhältniß der Wurzeln so vielmahl genommen zusammen gesetzt, so vielmahl der Exponent der Potenzen Eins enthält. Auch ist das Verhältniß eines jeden Gliedes der Geometrischen Progression zum ersten Gliede aus dem Verhältniß des zweyten Gliedes zum ersten so vielmahl genommen zusammen gesetzt, wievielmahl die Zahl der Glieder, die nach dem ersten folgen, Eins enthält.

222 §.

Das erste Glied einer geometrischen Progression sey A, und m der Exponent des Verhältnisses des zweyten Gliedes zum ersten; so hat man folgenden allgemeinen Ausdruck der Progression. (181 §.)

$A . mA . m^2A . m^3A . m^4A . m^5A . m^6A . m^7A \ldots$

Demnach sind die Verhältnisse

$$m^2A : A = m^2 : 1$$
$$m^3A : A = m^3 : 1$$
$$m^4A : A = m^4 : 1$$
$$m^5A : A = m^5 : 1 \quad \text{u. s. f.}$$

nach der Ordnung zweymahl, dreymahl, viermahl, fünfmahl grösser, als das Verhältniß $mA : A$ oder $m : 1$. Hieraus wird begreiflich, wie es möglich sey, eine Zahl anzugeben, welche ausdrückt, wie

groß

groß ein Verhältniß in Vergleichung mit einem andern Verhältnisse sey, wenn man die Grösse des letztern als bekannt annimmt, völlig auf ähnliche Art, wie die Grösse einer einzelnen Sache gegen eine andre vermittelst einer Zahl ausgedrückt werden konnte. So wäre das Verhältniß $m^5 : 1$ 5mahl grösser als $m : 1$, und umgekehrt $m : 1$ wäre $\frac{1}{5}$ des Verhältnisses $m^5 : 1$. Weil ferner $m^2 : 1$ 2mahl, $m^3 : 1$ 3mahl grösser als $m : 1$ ist; so wäre auch $m^2 : 1$ $\frac{2}{5}$ des Verhältnisses $m^5 : 1$ und $m^3 : 1$ wäre $\frac{3}{5}$ des Verhältnisses $m^5 : 1$. Wollte man diese Vergleichungen eines Verhältnisses mit dem andern so bezeichnen:

$$m : 1 = \tfrac{1}{5}\,(m^5 : 1)$$
$$m^2 : 1 = \tfrac{2}{5}\,(m^5 : 1)$$
$$m^3 : 1 = \tfrac{3}{5}\,(m^5 : 1)$$
$$m^7 : 1 = \tfrac{7}{5}\,(m^5 : 1)$$
$$m^{10} : 1 = \tfrac{10}{5}\,(m^5 : 1) = 2 \,.\, (m^5 : 1),$$

so wäre das zweydeutig, weil man es so verstehen könnte: die Zahl m^{10}, oder der Quotient $m^{10} : 1 = m^{10}A : A$ sey 2mahl grösser, als die Zahl m^5 oder der Quotient $m^5 : 1 = m^5 A : A$, welches falsch ist. Man will auf die eben angezeigte Art nicht die **Exponenten der Verhältnisse** als einzelne Zahlen betrachtet, sondern die Verhältnisse als **Verhältnisse** mit einander vergleichen. Um also diese Zweydeutigkeit zu vermeiden, nennt man die Zahl, welche die Grösse eines Verhältnisses in Vergleichung mit einem andern als bekannt angenommenen Verhältnisse ausdrückt, den **Logarithmen** jenes Verhältnisses, und bezeichnet ihn mit dem Buchstaben l, der dem dazu gehörigen Verhältniß vorangesetzt wird. Wenn demnach das Verhältniß $m^5 : 1$ als bekannt angenommen wird, so ist

$$l(m\ :1) = \tfrac{1}{5}$$
$$l(m^2\ :1) = \tfrac{2}{5}$$
$$l(m^3\ :1) = \tfrac{3}{5}$$
$$l(m^7\ :1) = \tfrac{7}{5}$$
$$l(m^{10}:1) = \tfrac{10}{5} = 2, \text{ u. s. f.}$$

223 §.

Mit dieser Sache verhält es sich eben so, wie mit allen andern Messungen. (152 §.) Die Frage: **Wie groß ein Verhältniß sey?** hat einen ganz andern Sinn, als wenn man frägt: wie groß das vorhergehende Glied eines Verhältnisses in Vergleichung mit dem nachfolgenden sey? Die letzte Frage beantwortet der Exponent des Verhältnisses: jene Frage aber läßt sich nicht beantworten, wofern man nicht das Verhältniß mit einem andern Verhältnisse vergleicht, dessen Grösse sonst als bekannt anzusehen ist. Völlig in eben dem Sinn nimmt man die Länge einer Ruthe, eines Fusses, als sonst bekannte Maasse an, wenn man die Grösse einer Länge dadurch angiebt, daß man sagt: die Länge sey so und so viele Ruthen oder Fusse lang. Allemahl muß das Maaß mit der dadurch auszumessenden Grösse von einerley Art seyn: wenn man also die Grösse eines Verhältnisses messen will, so muß das angenommene Maaß von eben der Art, es muß selbst ein Verhältniß seyn, und der Logarithme eines Verhältnisses ist die Zahl, welche ausdrückt, wievielmahl entweder das Maaß selbst, oder ein aliquoter Theil desselben in jenem Verhältnisse enthalten sey.

224 §.

Der Logarithme des Verhältnisses einer Zahl zu Eins heißt auch der **Logarithme dieser Zahl.**

Man setze eine willkührlich gewählte geometrische Progression zum Grunde, die von Eins anfängt, und zähle die Glieder, die nach dem ersten folgen, auf folgende Art:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024....

Sobald nun festgesetzt ist, welches Verhältniß für das Maaß angenommen werden soll, womit man alle übrigen vergleichen will; sobald sind auch die Logarithmen aller Zahlen bestimmt. Man nehme z. B. 32 : 1 als ein Maaß für alle übrige Verhältnisse an; so ist

$$l(2 : 1) = l2 = \tfrac{1}{5}$$
$$l(4 : 1) = l4 = \tfrac{2}{5}$$
$$l(8 : 1) = l8 = \tfrac{3}{5}$$
$$l(16 : 1) = l16 = \tfrac{4}{5}$$
$$l(32 : 1) = l32 = 1$$
$$l(64 : 1) = l64 = \tfrac{6}{5}$$
$$l(512 : 1) = l512 = \tfrac{9}{5}$$
$$l(1024 : 1) = l1024 = 2 \text{ u. s. f.}$$

Aendert man dasjenige Verhältniß, welches als das Maaß angenommen war, um alle übrige Verhältnisse damit zu vergleichen; so ändert man zugleich die Logarithmen aller Zahlen. Dagegen sind die Logarithmen aller übrigen Zahlen bestimmt, sobald diejenige Zahl bestimmt ist, deren Logarithme = 1 seyn soll. Den Log. 32 = 1 setzen, heißt das Verhältniß 32 : 1 für das Maaß annehmen, um alle übrige Verhältnisse damit zu vergleichen. Weil übrigens jedes Maaß als eine Einheit anzusehen ist, womit man alle andere Grössen von eben der Art vergleicht, so kann hier dasjenige Verhältniß, welches man für das Maaß annimmt, um alle übrige Verhältnisse damit zu vergleichen, das einfache Verhältniß heissen.

225 §.

Jede Reihe von Logarithmen mit ihren zugehörigen Zahlen, die aus einem angenommenen Verhältniß ihren Ursprung hat, heißt ein **Logarithmisches System**; die Zahl, deren Logarithme = 1 gesetzt ist, heist die *basis* des Systems, und ihr Verhältniß zur Einheit kann auch das **Fundamental-Verhältniß** des Systems heissen. Aendert man die basin des Systems, so wird dadurch das ganze Logarithmen-System geändert.

In einerley Logarithmen-System gehören gleiche Logarithmen zu gleichen Verhältnissen: denn gleiche Verhältnisse sind auch gegen das Fundamentalverhältniß des Systems gleich groß, und lassen sich entweder aus dem Grundverhältniß selbst, oder einerley aliquoten Theil desselben gleich vielmahl genommen zusammen setzen. Demnach müssen die Zahlen gleich seyn, welche die Grösse dieser Verhältnisse gegen das Grundverhältniß ausdrücken.

Zu gleichen Logarithmen gehören in einerley System auch gleiche Verhältnisse, denn wenn zwey Verhältnisse gleiche Logarithmen haben, so sind sie gegen das Grundverhältniß des Systems gleich groß, also müssen sie auch für sich gleich groß seyn.

In einerley Logarithmen-System gehören also auch gleiche Logarithmen zu gleichen Zahlen, und gleiche Zahlen zu gleichen Logarithmen.

226 §.

226 §.

In einerley System ist der Logarithme des Products zweyer Zahlen die Summe der Logarithmen der Factoren.

Beweis. Die Logarithmen zweyer Zahlen A und B können ganze Zahlen oder Brüche seyn, und wenn im letzten Fall diese Brüche ungleiche Nenner haben, so kann man sie, ohne ihre Grösse zu ändern, auf gleiche Nenner bringen. Es sey also $lA = \frac{n}{m}$, $lB = \frac{\nu}{m}$, die basis des Systems $= b$, so ist eigentlich $l(A : 1) = \frac{n}{m}$, $l(B : 1) = \frac{\nu}{m}$. Ferner sey $l\alpha = \frac{1}{m}$, oder $l(\alpha : 1) = \frac{1}{m}$, so ist $b : 1$ aus dem Verhältniß $\alpha : 1$ $m$mahl genommen zusammengesetzt, und man kann sich das ganze Logarithmen-System auf folgende Art vorstellen:

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{m} & 1 & \frac{n}{m} & \frac{\nu}{m} \\ 1 . \alpha . \beta \ldots . & b \ldots . & A \ldots . & B \ldots ; \end{array}$$

Weil diese Zahlen in geometrischer Progression sind, wovon das erste Glied $= 1$, das zweyte $= \alpha$ ist; so ist $b = \alpha^m$, $A = \alpha^n$, $B = \alpha^\nu$, also $A \times B = \alpha^{n+\nu}$. (184 §.) Diesemnach ist das Verhältniß $A \times B : 1$ aus dem Verhältniß $\alpha : 1$ $(n + \nu)$mahl genommen zusammen gesetzt. Aber $\alpha : 1$ ist $= \frac{1}{m}$ des Verhältnisses $b : 1$, mithin ist $A \times B : 1 = \frac{n+\nu}{m}$ des Verhältnisses $b : 1$, das heist, der Log. $(A \times B : 1)$ oder $l. A \times B$ ist $= \frac{n+\nu}{m}$.

Der Fall, wenn beyde Logarithmen ganze Zahlen sind, ist in dem Beweise mit enthalten, weil alsdenn m in n und ν aufgeht: auch wenn der eine Logarithme eine ganze Zahl, der andre ein Bruch wäre, so liesse sich die ganze Zahl in einen Bruch mit dem leztern von einerley Nenner verwandeln.

227 §.

In einerley Logarithmen-System wird der Logarithme des Quotienten gefunden, wenn man den Logarithmen des Divisors vom Logarithmen des Dividendi subtrahirt.

Beweis. Es sey $\frac{A}{B} = Q$, so ist $A = B \cdot Q$, also $lA = lB + lQ$, (226 §.) mithin $lQ = lA - lB$, oder $l\frac{A}{B} = lA - lB$.

In jedem Logarithmen-System ist $l1 = 0$. Denn es ist $1 = \frac{a}{a}$, was auch a für eine Zahl bezeichnet; also ist $l1 = la - la = 0$. Das will sagen: ein Verhältniß, wovon beyde Glieder gleich groß sind, hat in Vergleichung eines jeden andern Verhältnisses, worin das Vorhergehende Glied das nachfolgende übertrift, gar keine Grösse.

Weil Brüche und Quotienten einerley sind, so wird der Logarithme eines uneigentlichen Bruchs gefunden, wenn man den Logarithmen des Nenners vom Logarithmen des Zählers subtrahirt.

228 §.

Der Logarithme einer Potenz wird gefunden, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt. Denn es ist $lA^2 = l.A \times A = lA + lA = 2lA$, also $lA^3 = lA^2 + lA = 2lA$

$= 2lA + lA = 3lA$. Ueberhaupt ist $lA^{n+1} = lA^n + lA$: ist also überdem $lA^n = nlA$, so ist $lA^{n+1} = (n+1)lA$. Es ist aber $lA^n = nlA$ für $n = 2$, $n = 3$, also auch für $n = 4$, $n = 5$, u. s. f. weil der Schluß von jeder Potenz auf die nächstfolgende gilt.

Der Logarithme der Wurzel aus einer gegebenen Zahl wird gefunden, wenn man den Logarithmen dieser Zahl mit dem Wurzel-Exponenten dividirt. Es sey nemlich $\sqrt[m]{A} = R$, so ist $A = R^m$, also $lA = mlR$, und $lR = \frac{1}{m} lA$, oder $l\sqrt[m]{A} = \frac{1}{m} lA$.

229 §.

Heinrich Brigg, vormahls (in den Jahren 1619 bis 1630) Professor der Geometrie zu Oxford, hat ein Logarithmen-System berechnet, welches unter dem Nahmen des Briggischen, oder gemeinen Logarithmen-Systems bekannt ist; nachdem vorher ein Schottländischer Freyherr, Johann Neper, den Gebrauch der Logarithmen in der Mathematik einzuführen versucht, und im Jahr 1614 seine Descriptionem mirifici canonis logarithmorum heraus gegeben hatte. Weitere Nachrichten hievon, so wie auch umständlichere Untersuchungen über diese in der Mathematik sehr interessante Lehre, werden in den folgenden Theilen dieses Lehrbuchs vorkommen: hier genügt es, vorläufig zu wissen, daß die Zahl 10 die basis des Briggischen Systems sey, mithin ist

$l10 = 1$	$l10000 = 4$
$l100 = 2$	$l100000 = 5$
$l1000 - 3$	$l1000000 = 6$ u. s. f.

Die Logarithmen der übrigen ganzen Zahlen, die zwischen den Gliedern dieser Progression fehlen, haben Brigg und andre, welche damahls mit diesen Untertersuchungen beschäftiget waren, zum Theil durch sehr mühsame Rechnungen suchen müssen, und man hat allererst in neuern Zeiten durch Hülfe der höhern Mathematik kürzere Methoden gefunden; indessen kam es nur darauf an, die Logarithmen der Primzahlen zu finden, weil die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen durch eine leichte Addition der Logarithmen ihrer Factoren gefunden werden konnten. Für angehende Mathematiker genügt es, zu wissen, daß man vermittelst folgender Rechnungsschlüsse die Logarithmen der Primzahlen habe finden können.

230 §.

Der Ausdruck $\sqrt[m]{A^n}$ bezeichnet die Wurzel der Ordnung m aus A^n, so wie der Ausdruck $(\sqrt[m]{A})^n$ die Potenz der Ordnung n von der Wurzel der Ordnung m aus A bezeichnet. Beyde Ausdrücke bezeichnen einerley Zahl, wenn A einerley ist: denn es ist $\sqrt[m]{A^n} = \sqrt[m]{A} . \sqrt[m]{A} . \sqrt[m]{A} \ldots$ wenn der Factor $\sqrt[m]{A}$ sovielmahl nach einander hingesetzt wird, als die Zahl n Eins enthält; also ist $\sqrt[m]{A^n} = (\sqrt[m]{A})^n$. Ferner ist $l\sqrt[m]{A^n} = \frac{1}{m}\, lA^n = \frac{n}{m}\, lA$ (228 §.); wenn also A der basi des Logarithmen-Systems b gleich genommen wird, so ist $l\sqrt[m]{b^n} = \frac{n}{m}$, weil $lb = 1$ ist. Nun sey N eine ganze Zahl, und $lN = \frac{n}{m}$, so ist $lN = l\sqrt[m]{b^n}$; folglich $N = \sqrt[m]{b^n}$.

Wenn $m = 1$ ist, so ist $\sqrt[1]{A}$ soviel als A, denn die erste Potenz A^1 einer Zahl ist die Zahl selbst, also

ist

ist auch die Wurzel der ersten Ordnung aus einer Zahl mit der Zahl selbst einerley. Wäre demnach $lN =$ einer ganzen Zahl n, so wäre $N = b^n$.

Im Briggischen Logarithmen-System ist $b = 10$, daher gehören die Logarithmen 2, 3, 4, 5. u. s. f. zu den Potenzen 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, u. s. f. Die Logarithmen aller Zahlen von 2 bis 9 sind kleiner als 1, folglich sind es eigentliche Brüche, wofern sie anders in Rationalzahlen angegeben werden können. Die Logarithmen aller übrigen Zahlen, die in jener Reihe der Potenzen von 10 nicht vorkommen, müssen aus einer ganzen Zahl mit einem eigentlichen Bruch bestehen, soweit man sie in Rationalzahlen angeben kann; und einer solchen vermischten Zahl ist alsdenn allemahl auch ein unächter Bruch äquipollent. Wenn demnach die Zahl N keine Potenz von 10 ist, und man soll den Logarithmen dieser Zahl suchen; so setze man, es sey $lN = \frac{n}{m}$: alsdenn muß $n < m$ oder $n > m$ seyn, nachdem N kleiner oder grösser als als 10 ist. Ferner muß nun im Briggischen System $N = \sqrt[m]{10^n}$ seyn, und die Auflösung der Aufgabe kommt darauf an, daß man finde, wie groß die **Exponenten n und m seyn müssen, damit die gegebene Zahl N einer Wurzel der Ordnung m aus einer Potenz der Ordnung n von der Zahl 10 gleich werde.**

Aus 10^n läßt sich keine andre rationale Wurzel ausziehen, wofern diese Wurzel nicht selbst entweder $= 10$, oder eine Potenz von 10 ist, und eine solche Wurzel soll die Zahl N nicht seyn. Demnach können n und m nicht in bestimmten ganzen Zahlen angegeben werden, und eben deswegen kann $\frac{n}{m}$ kein rationaler Bruch seyn, wenn N eine rationale ganze

Zahl ist. Wäre dagegen N eine Irrationalzahl, so wäre es nicht unmöglich für n und m ein Paar Zahlen zu finden, die der Voraussetzung $N = \sqrt[m]{10^n}$ ein Genüge leisten.

Es sey M eine andre Irrationalzahl, welche die vorige N um eine Differenz ν übertrift, die in Vergleichung mit N sehr klein ist, so hat man $M = N + \nu = N\left(1 + \frac{\nu}{N}\right)$, also $lM = lN + l\left(1 + \frac{\nu}{N}\right)$. (226 §.) Weil nun $l\left(1 + \frac{\nu}{N}\right)$ verschwinden würde, wenn $\nu = 0$ würde, (227 §.) und weil $l\left(1 + \frac{\nu}{N}\right)$ allererst $= 1$ werden könnte, wenn $\nu = 9N$ würde; so muß auch $l\left(1 + \frac{\nu}{N}\right)$ ein sehr kleiner Bruch seyn, wenn es $\frac{\nu}{N}$ ist. Kann man alsdenn die Logarithmen von M und N in Decimalbrüchen ausdrücken, so müssen desto mehrere von den höhern Ziffern dieser Logarithmen mit einander übereinkommen, je kleiner ν in Vergleichung mit N ist. Fällt überdem alsdenn zwischen N und M eine Rationalzahl, die grösser als N und kleiner als M ist, so müssen die ersten höhern Ziffern des Logarithmen dieser Rationalzahl mit denjenigen Ziffern einerley seyn, worin lM und lN mit einander übereinkommen.

231 §.

Die mittlere Geometrische Proportionalzahl zwischen 1 und 10 ist 3,162277 ... (216 §.) und $l\,3{,}162277 \ldots = \frac{1}{2} = 0{,}5$. (228 §.) Zwischen

1 und 3,162277 . . . fallen die Zahlen 2, 3; zwischen 3,162277 . . . und 10 aber die Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9. Wenn aufs neue zwischen 1 und 3,162277 . . . . oder zwischen der zuletzt erwähnten Zahl und der Zahl 10, eine mittlere Geometrische Proportionalzahl mit ihrem zugehörigen Logarithmen gesucht wird; so muß jene noch etwas kleiner als 2, diese etwas grösser, als 5 seyn: Man übersiehet leicht, daß die solchergestalt gesuchten mittlern Geometrischen Proportionalzahlen einer jeden von den acht zwischen 1 und 10 fallenden ganzen Zahlen, die man zuerst wählen will, nach Gefallen näher gebracht werden können. Wollte man, daß diese mittlern Zahlen der Zahl 5 nach und nach näher kommen sollten, so müste man zwischen der zuletzt gefundenen mittlern Zahl, die etwas grösser als 5 war, und zwischen der Zahl 3,162277 wiederum eine mittlere Zahl suchen, da dann zugleich die Logarithmen der so gefundenen mittlern Zahlen sich dem Logarithmen der Zahl 5 nähern müssen. Um also wenigstens einige der ersten Ziffern des Logarithmen der Zahl 5 zu finden, müste man folgende Rechnung anstellen. Wenn

A=1,0000000000	lA =0,0000000000	so sey
B=10,0000000000	lB =1,0000000000	$C=\sqrt{A.B}$
und es wird		Ferner sey
C=3,1622776625	lC =0,5000000000	$D=\sqrt{B.C}$
D=5,6234132540	lD =0,7500000000	$E=\sqrt{C.D}$
E=4,2169650366	lE =0,6250000000	$F=\sqrt{D.E}$
F=4,8696752538	lF =0,6875000000	$G=\sqrt{D.F}$
G=5,2329911489	lG =0,7187500000	$H=\sqrt{F.G}$
H=5,0480657187	lH =0,7031250000	$I=\sqrt{F.H}$
I =4,9580682447	lI =0,6953125000	$K=\sqrt{H.I}$
K=5,0028646130	lK =0,6992187500	$L=\sqrt{I.K}$
L=4,9804160639	lL =0,6972656250	$M=\sqrt{K.L}$
M=4,9916277198	lM =0,6982421875	$N=\sqrt{K.M}$
N=4,9972430000	lN =0,6987304687	$O=\sqrt{K.N}$
O=5,0000530165	lO =0,6989746094	$P=\sqrt{N.O}$
P =4,9986478107	lP =0,6988525390	$Q=\sqrt{P.O}$
Q=4,9993503641	lQ =0,6989135742	$R=\sqrt{Q.O}$
R=4,9997016759	lR =0,6989440918	$S=\sqrt{R.O}$
S =4,9998773430	lS =0,6989593506	$T=\sqrt{S.O}$
T=4,9999651789	lT =0,6989669799	$V=\sqrt{T.O}$
V=5,0000090974	lV =0,6989707946	$W=\sqrt{T.V}$
W=4,9999871380	lW =0,6989688873	$X=\sqrt{W.V}$
X=4,9999981176	lX =0,6989698410	$Y=\sqrt{X.V}$
Y=5,0000036074	lY =0,6989703178	$Z=\sqrt{X.Y}$
Z=5,0000008624	lZ =0,6989700794	$a=\sqrt{X.Z}$
a =4,9999994899	l*a* =0,6989699602	$b=\sqrt{a.Z}$
b =5,0000001761	l*b* =0,6989700198	$c=\sqrt{a.b}$
c =4,9999998329	l*c* =0,6989699900	$d=\sqrt{c.b}$
d =5,0000000145	l*d* =0,6989700049	$e=\sqrt{c.d}$
e =4,9999999236	l*e* =0,6989699974	$f=\sqrt{e.d}$
f =4,9999999691	l*f* =0,6989700012	

Vermöge

Vermöge dieser Rechnung findet man die Zahl $d > 5$ und $f < 5$, die Logarithmen dieser beyden Zahlen kommen aber in den ersten acht Decimalstellen mit einander überein: also müssen eben diese Ziffern zugleich die ersten acht Decimalstellen des Logarithmen der Zahl 5 seyn. Es ist nemlich $l5 > lf$, also $l5 > 0{,}6989700012$, und $l5 < ld$, also $l5 < 0{,}6989700049$; mithin $l5 = 0{,}69897000 + \ldots$

Vergleicht man diese Rechnung mit den Schlüssen des 230 §. so erhellet, wenn man $N = 5$, und $b = 10$ setzt, daß beynahe $n = 69897$ und $m = 100000$ angenommen werden könne, oder es sey beynahe $5 = \sqrt[100000]{10^{69897}}$. Denn wenn $\frac{n}{m}$ den *log*. 5 bezeichnet, so ist $\frac{n}{m} = \frac{69897000}{100000000} = \frac{69897}{100000}$.

232 §.

Aus den Logarithmen der Primzahlen werden die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen durch eine leichte Addition der Logarithmen ihrer Factoren gefunden; deswegen wäre es nur vornemlich nöthig, die Logarithmen der Primzahlen zu suchen, wenn man Tafeln berechnen wollte, welche die Logarithmen aller Zahlen, wie sie in natürlicher Ordnung folgen, enthalten sollten. Unter den Logarithmen der Primzahlen ergiebt sich nun schon der *log*. 2 durch eine leichte Subtraction, weil $2 = \frac{10}{5}$, also $l2 = l10 - l5$ ist. (227 §.) Demnach erhält man

$$\begin{array}{rl} l10 & = 1{,}00000000 \\ l5 & = 0{,}69897000 \\ \hline l2 & = 0{,}30103000; \end{array}$$

auch

auch daraus weiter

$$l4 = 0{,}60206000$$
$$l8 = 0{,}9030900.$$

Der $l3$ kann gefunden werden, wenn man zwischen 2 und 4 eine mittlere geometrische Proportionalzahl sucht, und dann mit der Rechnung eben so fortfährt, wie vorhin im 231 §., bis man auf ein Paar Zahlen kommt, davon eine die Zahl 3 übertrift, die andre aber kleiner als 3 ist, und deren Logarithmen in so vielen Decimalstellen überein kommen, als man für den Log. der Zahl 3 zu suchen nöthig findet. Dies Verfahren giebt

$$l3 = 0{,}4771212$$
also $$l6 = 0{,}7781512$$
$$l9 = 0{,}9542424.$$

Nun fehlt unter den Zahlen, die zwischen 1 und 10 fallen, nur die Zahl 7, und man findet aus den Logarithmen der Zahlen 6 und 8 vermittelst des eben beschriebenen Verfahrens

$$l7 = 0{,}8450980.$$

Aus diesen zehn Logarithmen erhält man leicht eine grosse Menge andrer durch die Addition für solche Zahlen, die aus jenen durch die Multiplication entstehen können. Man findet nemlich

$$l12 = l6 + l2 = 1{,}0791812$$
$$l14 = l7 + l2 = 1{,}1461280$$
$$l15 = l5 + l3 = 1{,}1760913$$
$$l16 = l8 + l2 = 1{,}2041200 = 2l4$$
$$l18 = l9 + l2 = 1{,}2552725$$
$$l20 = l10 + l2 = 1{,}3010300$$

Aber für die Zahlen 11, 13, 17, 19, müssen die Logarithmen nach Anleitung des 231 §. besonders gesucht werden, und man erhält

$l11$

$l11 = 1{,}0413927$
$l13 = 1{,}1139433$
$l17 = 1{,}2304489$
$l19 = 1{,}2787536$

Unter den Zahlen zwischen 20 und 30 kommen nur die beyden Primzahlen 23 und 29 vor, der übrigen ihre Logarithmen erhält man durch die Addition der Logarithmen ihrer Factoren. Solchergestalt läßt sich nun vollständig übersehen, wie es möglich gewesen sey, für die Zahlen, wie sie in natürlicher Ordnung auf einander folgen, die Logarithmen ein für allemahl zu berechnen und in Tafeln zu bringen.

233 §.

In solchen Sammlungen Mathematischer Tafeln, wovon schon im 198 §. einige Nachrichten vorgekommen sind, finden sich auch dergleichen Logarithmen-Tafeln, und wer sich in mathematischen Rechnungen üben will, muß mit einer oder der andern Ausgabe dieser Tafeln versehen seyn. Neper hat zwar die ersten Logarithmen-Tafeln berechnet, (229 §.) allein von der Einrichtung dieser Tafeln kann allererst im folgenden weitere Nachricht gegeben werden. Das Nepersche System ist von dem Briggischen verschieden, auch hat Neper nicht für die Zahlen, wie sie in natürlicher Ordnung folgen, sondern für die Verhältnisse gewisser Linien gegen einander, die allererst im folgenden unter dem Nahmen der trigonometrischen Linien beschrieben werden können, seine Logarithmen berechnet. Statt der Neperschen sind die Briggischen Tafeln zum Gebrauch eingeführt, und man kann bey der ersten Uebung in diesen Rechnungen fertig werden, wenn man nur eine von den kleinern Ausgaben dieser Tafeln zur Hand hat,

hat, worin die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 enthalten sind. Ausser Nepern und Briggs hat sich auch ein holländischer Mathematiker in Goude, Adrian Vlacq, durch Fortsetzung der Berechnung, welche Briggs nicht hatte endigen können, verdient gemacht: von diesem hat man kleinere Ausgaben der Logarithmen und übrigen Mathematischen Tafeln, welche im folgenden unter dem Nahmen der Trigonometrischen Tafeln noch weiter müssen beschrieben werden. Auch gehört hieher die im 198 §. schon angeführte Wolfische Ausgabe, die so wie die Vlacqsche mehrmahls ist neu aufgelegt worden. Zum geschickten und geläufigen Gebrauch solcher Tafeln wird das folgende eine nähere Anleitung geben.

234 §.

Jeder Logarithme besteht aus einer ganzen Zahl mit einer Reihe daran hängender Decimalbrüche, die Logarithmen der ersten neun Zahlen ausgenommen, welche in der Stelle der Einer eine Null haben. Die ganze Zahl heißt die Charakteristik, oder Kennziffer des Logarithmen, und dies um deswillen, weil man an derselben sogleich erkennen kann, aus wievielen Ziffern die Zahl bestehen müsse, welche diesem Logarithmen zugehört. Die Zahl besteht nemlich aus einer Ziffer mehr, als die Kennziffer ihres Logarithmen Eins enthält. Für die Zahlen von 1 bis 9 ist die Kennziffer 0, von 10 bis 99 ist sie 1, von 100 bis 999 ist sie 2, von 1000 bis 9999 ist sie 3, u. s. f. (229 §.) Also ergiebt sich die Kennziffer des Logarithmen einer jeden ganzen Zahl sehr leicht von selbst, und das ist die

Ursache, weswegen in einigen Ausgaben der Logarithmentafeln zur Ersparung des Platzes die Kennziffer weggelassen ist, indem man sie benöthigsten Falles beym Gebrauch des Logarithmen leicht hinzusetzen kann.

235 §.

Eines jeden uneigentlichen Bruchs Logarithme wird gefunden, wenn man den Logarithmen des Nenners vom Logarithmen des Zählers subtrahirt: (227 §.) aber eine ganze Zahl mit anhängenden Decimalstellen ist ein uneigentlicher Bruch, dessen Nenner eine Potenz der Zahl 10 ist, mithin ist der Logarithme des Nenners allemahl für sich bekannt. Derselbe ist eine ganze Zahl, die sovielmahl Eins enthält, als im Nenner Nullen sind, und eben soviele Decimalstellen müssen in der gegebenen Zahl nach der Stelle der Einer folgen. Man sehe also die Zahl mit allen Decimalstellen als eine ganze Zahl an, und vermindere die Kennziffer des Logarithmen dieser ganzen Zahl um soviele Einheiten, als Decimalstellen nach dem Zeichen der Einer folgen, so hat man den gesuchten Logarithmen. Es ist nemlich

$$l4{,}738 = l\tfrac{4738}{1000} = l4738 - l1000$$

und $$l4738 = 3{,}6755951$$
$$l1000 = 3{,}0000000$$

also $$l4{,}738 = 0{,}6755951.$$

Eben so findet man $l47{,}38 = 1{,}6755951$; $l473{,}8 = 2{,}6755951$; und überhaupt bleiben alle Decimalstellen des Logarithmen einer Zahl einerley, wenn die Ziffern der Zahl einerley bleiben, es mag die niedrigste Ziffer, oder eine von den übrigen diejenige seyn, welche die Stelle der Einer einnimmt:

die

die Kennziffer des Logarithmen ist allemahl um Eins kleiner, als die Anzahl der Ziffern, welche den grössern Theil der Zahl, so weit sie eine ganze Zahl ist, ausmachen.

236 §.

Wenn man von einem Paar Zahlen, die zwar grösser als 1000 sind, aber nicht über 10000 hinausgehen, und nur um Eins unterschieden sind, z. E. 1728 und 1729 die, die Logarithmen aus den Tafeln nimmt, und den kleinern vom grössern subtrahirt; wenn man ferner den Logarithmen der kleinern Zahl 1728 auch von dem Logarithmen der nächstfolgenden von ihr um 2 unterschiedenen Zahl 1730 subtrahirt: so findet man, daß die Differenz der den beyden letzten um 2 unterschiedenen Zahlen zugehörigen Logarithmen ebenfalls fast doppelt so groß sey, als die Differenz der beyden ersten um 1 unterschiedenen Zahlen zugehörigen Logarithmen. Es ist nemlich

$l1029 = 3{,}0124154$	$l1030 = 3{,}0128372$
$l1028 = 3{,}0119931$	$l1028 = 3{,}0119931$
Differenz 0,0004223	Differenz 0,0008441

Die letzte Differenz ist nur um etwas weniges kleiner als $2 \times 0{,}0004223 = 0{,}0008446$. Hieraus ist zu schliessen, daß **die Differenzen solcher Zahlen, die nicht einmahl völlig, oder höchstens um Eins unterschieden sind, den Differenzen ihrer Logarithmen ziemlich genau proportional seyn werden.** Je kleiner die Zahlen selbst sind, desto unrichtiger wird diese Voraussetzung, wie die Probe zeigt, wenn man einen ähnlichen Versuch, wie vorhin, mit kleinern Zahlen macht. Je grösser aber die Zahlen sind, desto näher kommt diese Voraussetzung der Wahrheit, wie man aus folgenden Proben abnehmen kann:

$l9986 = 3{,}9993916$	$l9986 = 3{,}9993916$
$l9985 = 3{,}9993481$	$l9984 = 3{,}9993046$
Differenz 0,0000435	Differenz 0,0000870

Die letzte Differenz scheint zwar schon genau doppelt so groß zu seyn, als die erste; inzwischen ist dies nur in Zehnmilliontheilen zu verstehen, so weit sich nemlich die Differenzen aus den Zahlen finden lassen, welche die Logarithmen noch lange nicht vollständig, sondern nur bis auf die siebente Decimalstelle richtig ausdrücken. Wären die Logarithmen auf mehr als sieben Decimalstellen berechnet; so würde sich auch hier die Abweichung von der Voraussetzung in kleinern Decimaltheilen ergeben.

237 §.

Den Logarithmen einer Zahl, die mehr denn vier, aber nicht über 7 oder höchstens 8 Ziffern enthält, durch Hülfe der Tafeln zu finden.

Aufl. Weil die Decimalstellen des Logarithmen einerley bleiben müssen, wenn man gleich, ohne die Ziffern, welche die Zahl ausdrücken, selbst zu ändern, das Zeichen verrückt, welches die Stelle der Einer angiebt; so setze man das Zeichen der Einer bey der vierten von den höchsten Ziffern, damit die übrigen, welche nach der vierten Ziffer folgen, Decimaltheile werden. Solchergestalt erhält man eine Zahl, die grösser als 1000 und kleiner als 10000 ist, und es muß unter den zwischen 1000 und 10000 fallenden ganzen Zahlen ein Paar geben, die nur um Eins unterschieden sind, zwischen welchen die so getheilte gegebene Zahl als zwischen zwoen Gränzen enthalten ist. Wäre die Zahl 4738425 gegeben, so nehme man an, die Zahl 4738,425 sey die gegebene, und man siehet leicht, daß diese Zahl zwischen 4738 und 4739 als zwoen Gränzen enthalten sey. Ferner hat man aus den Tafeln

$l4739 = 3,6756867$
$l4738 = 3,6755951$
Differenz $0,0000916$

Die gegebene Zahl 4738,425 übertrift die kleinere um den Decimalbruch 0,425; also kann man vermöge der im 236 §. gerechtfertigten Voraussetzung ansetzen:

$1 : 0,425 = 0,0000916$: vierten Zahl

0,4255	
0,0000366	4
18	32
4	580
0,0000389	3

Die so gefundene vierte Zahl muß wenigstens sehr nahe den Ueberschuß des Logarithmen der Zahl 4738,425 über den Logarithmen der Zahl 4738 ausmachen; also addirt man

zum $l4738 = 3,6755951$
den Ueberschuß $0,0000389$

so ist $l4738,425 = 3,6756330$

Hiemit hat man zugleich

$l4,738425 = 0,6756330$
$l\,4738425 = 6,6756330,$

so wie den Logarithmen jeder andern Zahl gefunden, die aus eben den Ziffern besteht, wenn gleich das Zeichen der **Einer** bey einer der übrigen Ziffern stünde.

Zwey

Zwey zunächst auf einander folgende Logarithmen, deren Kennziffer 3 ist, sind nur in den drey oder höchstens vier letzten Decimalstellen verschieden. Es ist $l1001 = 3,0004341$ nur um 0,0004341 grösser als $l1000 = 3$; und wenn man
vom $l4346 = 3,6380897$
den $l4345 = \underline{3,6379898}$ subtrahirt;
so ist der Rest = 0,0000999, welcher sich nur bis auf die drey letzten Decimalstellen erstreckt. Aus dieser Bemerkung läßt sich abnehmen, daß der Gebrauch der eben vorgetragenen Regel auf Zahlen eingeschränkt sey, die nicht über acht Ziffern enthalten. Wollte man den Log. 4738,42564 eben so suchen; so würde die Rechnung folgendes geben:

1 : 0,42564 = 0,0000916 : viert. Z.

0,42563	
0,0000366	4
18	32
4	580
	5496
	2748
0,0000389	= dem Ueber-

schuß des Log. 4738,42563 über den Log. 4738. Aber dieser Ueberschuß ist bis auf die siebente Decimalstelle nicht von dem vorhin gefundenen unterschieden, als man den Log. der Zahl 4738,425 suchte. Was nach der siebenten Decimalstelle folgt, ist alles unvollständig, weil man die Differenz der Logarithmen für die nächstgrössere und nächstkleinere Zahl aus den Tafeln nur bis auf die siebente Decimalstelle finden kann. Die höchste Ziffer dieser Differenz kann nur höchstens in die Stelle der Zehntausendtheile kommen, und in dem berechneten Exempel gehört sie würklich nur zu den Hunderttausendtheilen. Wenn nun die gegebene Zahl ausser den vier höchsten Ziffern noch vier andre hat, die man als Decimaltheile betrachtet, so gehört die niedrigste zu den Zehntausendtheilen; und wenn damit die höchste Ziffer jener Differenz multiplicirt wird, so giebt das zum Product Hundertmillionen-Theile: also kann die höchste Ziffer dieses Products nur höchstens noch in die siebente Decimalstelle kommen. Kömmt zur gegebenen Zahl die neunte Ziffer hinzu, so kann das Product dieser Ziffer in die höchste Ziffer jener Differenz höchstens Tausendmillionen-Theile geben, und die höchste Ziffer kömmt höchstens in die achte Decimalstelle. Demnach müssen die Logarithmen auf mehr denn sieben Decimalstellen berechnet seyn, wenn der Gebrauch dieses Verfahrens nicht auf Zahlen von höchstens acht Ziffern eingeschränkt seyn sollte.

Weil alle Logarithmen in den Tafeln in Zehnmilliontheilen ausgedrückt sind; so weis man ein für allemahl, daß die Ziffern, welche dadurch gefunden werden, daß man die nächkleinern Logarithmen vom nächstgrössern abzieht, Zehnmilliontheile bedeuten: deswegen bedarf es dessen nicht, daß man die Nullen bis zur Stelle der **Einer** voran setze: man kann mit der so gefundenen Differenz während der Rechnung eben so umgehen, als wenn es eine ganze Zahl wäre: Was alsdenn die Rechnung zur vierten Zahl unter der Form einer ganzen Zahl giebt, davon weis man ohnehin, daß es Zehnmilliontheile sind, die man zu Decimalstellen des nächstkleinern Logarithmen, als wenn auch das ganze Zahlen wären, zu addirt: denn auf die Kennziffer Rücksicht zu nehmen, hat man

alsdenn

alsdenn allererst nöthig, wenn die Rechnung geendiget ist, da man sie denn leicht voransetzt.

238 §.

Die Zahl zu finden, welche einem gegebenen Logarithmen zugehört, wenn die Kennziffer die Zahl 6, höchstens die Zahl 7, nicht übertrift.

Aufl. Die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 1000 kommen in den Tafeln mehr als einmahl vor mit verschiedenen Kennziffern. Denn es ist

$$l30 = l3 + l10,$$
$$l300 = l3 + l100,$$
$$l3000 = l3 + l1000;$$

ferner $l230 = l23 + l10,$
$$l2300 = l23 + l100;$$

endlich auch $l2430 = l243 + l10.$

Es verhält sich mit allen Zahlen, die aus einer, zwoen oder dreyen Ziffern bestehen, eben so: Demnach müssen alle Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 1000 auch unter der Kennziffer 3, zwischen 1000 und 10000, wieder vorkommen. Man suche also den gegebenen Logarithmen, ohne seine Kennziffer in Betrachtung zu ziehen, unter den Logarithmen auf, die 3 zur Kennziffer haben: findet man ihn unter denselben, so gehört ihm die dabey stehende Zahl zu, wenn man in demselben den Ort der Einer so bestimmt, wie es die Kennziffer des Logarithmen erfordert. Man schneidet nemlich von den höchsten Ziffern eine mehr ab, als die Kennziffer Eins enthält, so gehört die niedrigste von den abgeschnittenen Ziffern zu den Einern, und die folgenden sind Decimalstellen. Wäre dagegen die Kennziffer grösser als 3, so müste man der in den Tafeln neben dem Logarithmen stehenden Zahl rechter Hand so viele Nullen beyfügen, bis die Nullen mit den Ziffern zusammen so viele Stellen ausmachen, als die Kennziffer vermöge der Regel verlangt.

Den Logarithmen 1,8741918 findet man unter der Kennziffer 3 bey der Zahl 7485, also ist die zugehörige Zahl 74,85. Denn es ist

$$l7485 = 3,8741918$$
$$l100 = 2,0000000$$

also $l74,85 = 1,8741918$ (227 §.)

Wäre aber der Logarithme 6,8741918 gegeben, so wäre die zugehörige Zahl 7485000. Denn es ist

$$l7485 = 3,8741918$$
$$l1000 = 3,0000000$$

also $l7485000 = 6,8741918$ (226 §.)

Wofern man in den Tafeln keinen Logarithmen findet, wovon alle 7 Decimalstellen des gegebenen Logarithmen durchgängig überein kommen; so wird man doch unter der Kennziffer 3 ein Paar zunächst nach einander folgende Logarithmen antreffen, wovon der eine noch kleiner, der andre schon grösser ist, als der gegebene. Man nehme also die zum nächstkleinern Logarithmen gehörige Zahl, und suche noch drey bis vier dazu gehörige Ziffern so, daß man das Verfahren des 237 §. nur umgekehrt anwendet. Der gegebene Logarithme sey 2,5639462; so ist

der nächstgrössere $l3664 = 5639555$
der nächstkleinere $l3663 = 5638369$

die Differenz 1186.

Von gegebenen Logarithmen = 5639462
subtrahirt man auch den nächstkleinern 5638369

so ist die Differenz 1093.

Bey

Bey jener Differenz sind die zugehörigen Zahlen um Eins unterschieden, wenn 3 die Kennziffer ist: also kann man ansetzen

1186 : 1092 = 1 : vierten Zahl

1186 | 10674 | 0,9216	Ueberschuß der dem gegebenen Logarithmen zugehörigen Zahl über die Zahl 3663.
2560	
1186	
2372	
1880	
1186	
6940	
1186	

Wäre nun 3 die Kennziffer des gegebenen Logarithmen, so wäre 3663,9216 die gesuchte Zahl: weil aber 2 die Kennziffer ist; so ist die gesuchte Zahl 366,39216. Wäre 6 die Kennziffer, so gehörte zu diesem Logarithmen die Zahl 3663921,6. Wäre dagegen die 9 Kennziffer, so müste die dem Logarithmen zugehörige Zahl zehn Ziffern haben. Allein man kann nicht voraussetzen, daß nun 3663921600 die gesuchte Zahl sey; und dies noch weniger, wenn man aus andern Gründen weis, daß selbst der gegebene Logarithme nicht vollständig sey. Allemahl sind die Differenzen unvollständig, aus welchen man den Ueberschuß der dem gegebenen Logarithmen zugehörigen Zahl über diejenige sucht, die dem nächstkleinern Logarithmen zugehören würde, wenn seine Kennziffer 3 wäre; und es ist überflüssig, mehr als vier Ziffern für diesen Ueberschuß zu suchen.

239 §.

Durch den Gebrauch der Logarithmen lassen sich viele solche Rechnungen ansehnlich verkürzen, wobey es darauf ankommt, daß etwas grosse Zahlen in einander multiplicirt und dividirt werden sollen, (226. 227 §.) vornemlich alsdenn, wenn man mit etwas vollständigen Logarithmen-Tafeln versehen ist. Auch kürzen die Logarithmen die Rechnung ab, wenn man eine gegebene Zahl auf eine verlangte Potenz erheben, oder aus derselben eine Wurzel einer gegebenen Ordnung finden soll. (228 §.) Indessen bleibt doch der Gebrauch solcher Tafeln dabey allemahl eingeschränkt, worin die Logarithmen nur bis auf die siebente Decimalstelle angegeben sind, weil man die gesuchten Resultate, wenn sie mehr als sieben höchstens acht Ziffern enthalten, nicht genau finden kann. (238 §.) Es kommt nemlich in allen solchen Fällen darauf an, daß man statt der Zahlen selbst mit ihren Logarithmen rechnet, und solchergestalt einen Logarithmen findet, dessen zugehörige Zahl, die man nach den Regeln des 238 §. suchen muß, diejenige ist, welche gefunden werden sollte. Demnach ist dieser Gebrauch der Logarithmen auf die Fälle eingeschränkt, wenn entweder die gesuchte Zahl nicht mehr als acht Ziffern enthält, oder doch die ersten 7 bis 8 Ziffern der gesuchten Zahl die vorgelegte Aufgabe scharf genug auflösen. Ein Beyspiel hievon wäre, wenn man die im 214 §. schon gefundene Cubicwurzel aus 2 vermittelst der Logarithmen suchen wollte. Es ist

$l2 = 0{,}3010300$

3)

$l\sqrt[3]{2} = 0{,}1003433$

$l1259 = \phantom{0{,}}1000257$

Differenz 3176

$l1260 = 1003705$

$l1259 = 1000257$

3448

3448 : 3176 = 1 : viert. Zahl

3448 | 0,921

31032

7280

3448

6896

3840

3448

also $\sqrt[3]{2} = 1{,}259921$, wie im 214 §. gefunden ward.

240 §.

Das erste und letzte Glied einer geometrischen Progression sind gegeben, nebst der Anzahl der Glieder, die nach dem ersten folgen sollen: man soll das erste von den fehlenden mittlern Gliedern finden.

Aufl. Wenn A das erste, B das zweyte, V das letzte Glied der Progression, m der Exponent des Verhältnisses des zweyten Gliedes zum ersten, und n die Anzahl der nach dem ersten folgenden Glieder ist; so hat man $V = m^n A$, (181 §.) und das zweyte Glied $B = mA$. Demnach ist $m^n A \times A^{n-1}$

$= A^{n-1}.V$, oder $m^n A^n = A^{n-1}V$: und wenn man auf beyden Seiten die Wurzel der Ordnung n nimmt; so findet man das zweyte $B = m\,A = \sqrt[n]{A^{n-1}V}$, also auch $B = \sqrt[n]{\left(A^n \cdot \frac{V}{A}\right)} = A\sqrt{\frac{V}{A}}$, und $lB = lA + l\sqrt[n]{(V:A)}$, oder $lB = lA + \frac{1}{n}(lV - lA)$.

Soll man das erste von 99 mittlern geometrischen Proportionalgliedern zwischen den Zahlen 7 und 8436 finden; so kann man die Rechnung auf folgende Art führen. Es ist $A = 7$, $V = 8436$, $n = 100$, also

$$
\begin{array}{rcr}
lV & = & 3{,}9261366 \\
lA & = & 0{,}8450980 \\
\hline
lV - lA & = & 3{,}0810386 \\
\frac{1}{n}lV - lA & = & 0{,}0308104 \\
\hline
lB & = & 0{,}8759084 \\
l7514 & = & 8758712 \\
\hline
 & & \text{Diff. } 372 \\
l7515 & = & 8759290 \\
l7514 & = & 8758712 \\
\hline
 & & \text{Diff. } 578
\end{array}
$$

$578 : 372 = 1 :$ vierten Zahl

$$
\begin{array}{r|l}
578 & 0{,}643 \\
3468 & \\
\hline
2520 & \\
578 & \\
2312 & \\
\hline
2080 & \\
578 &
\end{array}
$$

also $B = 7{,}514643$.

Der

Der XIV. Abschnitt.

Die Regel Detri mit ihren Anwendungen.

241 §.

Die Regel des 175 §, nach welcher man zu dreyen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl sucht, heißt die Regel Detri, eigentlich regula de tribus numeris: auch heißt sie wegen ihres mannigfaltigen und sehr ausgebreiteten Nutzens die güldene Regel. Sie findet allemahl ihre Anwendung, wenn ein Paar Grössen von einer gewissen Art sich eben so wie ein Paar andre Grössen verhalten, die übrigens zu eben der Art gehören, oder auch von andrer Art seyn können; da dann drey von diesen Grössen gegeben seyn müssen, wenn die vierte gesucht wird.

242 §.

Eine Rechnungsfrage, die zur Regel Detri gehört, richtig in Ansatz zu bringen, und hiernächst die gesuchte vierte Zahl, oder das sogenannte Facit zu finden.

Aufl. I. Unter den dreyen gegebenen Zahlen müssen zwey seyn, die einerley Nahmen haben, oder wenigstens von einerley Art sind, so daß man sie auf einerley Nahmen bringen kann: die dritte von den gegebenen Zahlen muß mit der gesuchten von einerley Art seyn. Wenn die Rechnungsfrage folgende wäre, 1 Ließpf. von einer gewissen Waare kostet 3 Thlr., was kostet also ein Centner von eben der Waare? so sind die Zahlen 1 Ließpf. und 1 Centner von einerley Art, und können auf einerley Nahmen von Pfunden gebracht werden: es ist eben soviel, als wenn man fragte: 16 Pf. kosten 3 Thlr, wieviel also 110 Pf.? Die gesuchte Zahl ist eine Anzahl Thaler als der Preis eines Centners, und damit ist die Zahl 3 Thaler, als der Preis eines Ließpfundes, von einerley Art.

Eine von den beyden Zahlen, die von einerley Art sind, ist gewöhnlich mit der gesuchten durch die Frage: **Wieviel?** oder ein ähnliches Fragwort verbunden, und diese Zahl heißt die **Fragzahl** des Exempels: man kann, um sie von den übrigen zu unterscheiden, das Fragzeichen (?) dabey setzen. Will man nun den Ansatz machen, daß es am besten einleuchte: ob die Rechnungsfrage würklich zur Regel Detri gehöre, so ist folgende Regel zu beobachten:

Man setze die Fragzahl in die Mitte, was mit ihr von einerley Art ist, voran, und was mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist, in die dritte Stelle.

Das vorhin angeführte Exempel würde demnach so stehen:

1 LPf. : Centn. = 3 Thlr. : ges. Anz. Thlr.
od. 16 Pf. : 110 Pf. = 3 Thlr. : ges. Anz. Thlr.

Sovielmahl nun die erste Zahl in der zweyten enthalten ist, sovielmahl muß die dritte in der vierten enthalten seyn, widrigenfalls würde die Rechnungsfrage nicht zur Regel Detri gehören. Daß dies der Natur der Rechnungsfrage gemäß sey, davon muß man sich überzeugt haben, bevor man nach der Regel des 175 §. die vierte Zahl sucht. In jenem Exempel muß wirklich der Preis des LPf. im Preise des Centners sovielmahl als 1 LPf. in 1 Centn. enthalten seyn,

seyn, und überhaupt verhält sich die Waare wie der dafür zu zahlende Preis.

Daß die Fragzahl in die mittlere Stelle gesetzt werde, ist an sich nicht nothwendig, ob sie gleich in diese Stelle gehört, wenn man die Proportion, welche in der Rechnungsfrage liegt, den Grundbegriffen des 162 §. gemäß ausdrücken will. Man kann aber auch das Exempel so niederschreiben, wie es an sich lautet, wenn es auf gewöhnliche Art folgendergestalt ausgedrückt wird

1 Pf. kostet 3 Thlr., was kostet 1 Centn.?

und aus Vergleichung dieses Ansatzes mit dem vorigen ergiebt sich, daß nur die Ordnung der zweyten und dritten Zahl verwechselt sey. Weil nun die Multiplication der beyden Zahlen in der zweyten und dritten Stelle einerley giebt, der Ansatz mag auf die erste, oder die zweyte Art gemacht seyn, so kann man auch bey der letzten Art des Ansatzes bleiben.

Man setzt alsdenn die Fragzahl in die dritte Stelle, was mit ihr von einerley Art ist, in die erste Stelle, und was mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist, in die Mitte.

Nun muß die erste Zahl in der dritten sovielmahl enthalten seyn, als die zweyte in der gesuchten, und ob sich dies so verhalte, das muß man aus der Natur der Rechnungsfrage beurtheilen.

II. Soweit vom richtigen Ansatz. Um nun auch die Rechnung selbst mit Vortheil zu führen, sehe man vorher nach, ob vielleicht die erste und dritte, oder auch die erste und zweyte Zahl ein gemeines Maaß haben: mit demselben dividire man zuförderst,

und

und brauche hiernächst bey Anwendung der Regel des 175 §. die Quotienten statt der dividirten Zahlen. Denn vermöge des 170 §. bleiben die Quotienten in demselben Verhältniß, also erhellet, daß man die erste und die mit ihr gleichartige Fragzahl so gegen einander verkleinern könne, ohne daß solches die gesuchte Zahl ändert. Weil ferner vermöge des 175 §. n. 3. während der Rechnung der Nahme der Zahlen nicht in Betrachtung kommt; so wird auch die gesuchte vierte Zahl nicht geändert, wenn man die erste und zweyte nach der gemeinen Art des Ansatzes in die Mitte gesetzte Zahl, falls beyde ein gemeines Maaß haben, damit dividirt, und alsdenn die Quotienten bey Anwendung der Regel des 175 §. braucht. Das ganze Exempel kommt alsdenn so zu stehen:

1 LPf. — 8 Thlr. — 1 Centner?
16 Pf 8) 110 Pf.
8) 1 2)
2 Fac. 55 Thlr.
2)
1

Wenn unter den gegebenen Zahlen Brüche oder gemischte Zahlen, die selbst nichts anders als uneigentliche Brüche sind, vorkommen; so kann man, vermöge der angeführten Gründe, wenn man wiederum den 170 §. vergleicht, die Brüche aus der Rechnung wegschaffen, und statt derselben in allen Fällen drey ganze Zahlen erhalten, womit alsdenn nach der Regel des 175 §. verfahren werden muß. Wenn in der zweyten oder dritten Stelle ein Bruch stehet, so multiplicire man ihn und zugleich die Zahl in der ersten Stelle mit dem Nenner jenes Bruchs.

Stehe

Steht in der ersten Stelle ein Bruch, so multiplicire man auch diesen und zugleich die zweyte oder dritte Zahl mit eben des Bruchs Nenner. Ein Beyspiel giebt folgende Rechnung

$73\frac{5}{8}$ Pf. —	$239\frac{2}{3}$ Thlr. —	1 Pf.?
× 8	× 3	× 8
589	719	8
× 3	8	
1767	5752	
	1767)	Fac. $3\frac{451}{1767}$ Thlr.

Wenn die erste Zahl mit der ihr gleichartigen Fragzahl nicht einerley Nahmen hat, auch wohl eine oder die andre dieser Zahlen, vielleicht alle beyde aus Theilen bestehen, die verschiedene Nahmen haben, so kann man alle auf einerley und zwar auf den kleinsten Nahmen bringen. Die zweyte mit der gesuchten gleichartige Zahl kann man unverändert lassen, oder wie man will, auf einen andern Nahmen bringen, da denn die gesuchte Zahl allemahl unter eben dem Nahmen heraus kommt. Ein Exempel hiezu wäre das folgende.

3 Ct. 36 Pf. —	125 Mk. 12 ßl. —	12 Ct. 7 Pf.?
110	16	110
36	12	127
330	750	12
366	125	1327
	2012 ßl.	

Hat man so die zweyte Zahl auf Schillinge gebracht, so giebt sich das Facit in ßl., die man wieder auf Mark, oder welchen Nahmen man sonst will, bringen kann. Statt dessen aber kann man die 125

Mk.

Mk. 12 ßl. mit 1372 nach den Regeln des 139 §. multipliciren, und das Product dem 140 §. gemäß mit 366 dividiren.

Bey Anwendungen der Regel Detri in der Geometrie und in andern Theilen der Mathematik wird oft die Rechnung vortheilhaft verkürzt, wenn man statt der Zahlen selbst mit ihren Logarithmen rechnet. Proben davon werden im folgenden vorkommen: hier genügt es zu wissen, daß man die Logarithmen der zweyten und dritten Zahl zusammen addiren, und von der Summe den Logarithmen der ersten Zahl subtrahiren müsse, um den Logarithmen der vierten Zahl zu finden.

Von andern Vortheilen, die man sonst noch bey der Regel Detri anbringen kann, geben die practischen Schriftsteller mehr Nachricht. Man sehe meines Bruders Fr. Christian Lorenz Karstens Rechenkunst, Bützow und Wismar 1775, 2te Abth. 2 Abschnitt, v. Clausbergs demonstrativische Rechenkunst, L. J. Schmids Rechenkunst. Leipzig 1774. u. a. m.

243 §.

Die im vor. §. gewählten Beyspiele zur Regel Detri gehören zur Kauf- und Waaren-Rechnung: die Fragzahl war Waare, und man suchte den dafür zu zahlenden Preis. Es kann umgekehrt die Fragzahl eine Summe Geldes seyn, und man sucht, wieviel Waare dafür eingekauft werden kann, wie im folgenden Exempel. Für 3 Thlr. 7 ßl. kauft man 1 LPf., wieviel also für 100 Thlr.?

Der

Der Ansatz ist

3 Thlr. 7 ßl. — 1 LPf. — 100 Thlr.?

× 48	× 48	
144	4800	Fac.
7	151)	$31\frac{110}{151}$ LPf.

Eine andre Anwendung der Regel Detri ist die sogenannte Zinß-Rechnung, und die hieher gehörigen Rechnungsfragen sind von zweyerley Art.

1.) Die Fragzahl ist Capital, man sucht die dazu gehörige Zinse.

2.) Die Fragzahl ist Zinse, man sucht das dazu gehörige Capital.

Gewöhnlich versteht man alsdenn eines Jahres Zinse, und die Zinse selbst drückt man unter dem Nahmen der Procente durch die Zahl der Thaler aus, welche vom 100 jährlich bezahlt werden müssen.

Bey dem 5pCZinsenfuß ist die jährliche Zinse der 20ste Theil des Capitals, also auch ohne Ansatz nach der Regel Detri die Rechnung leicht gemacht. Folgende zwey Rechnungsfragen löset man leicht auf, wenn die Zinse $4\frac{1}{2}$ pC. betragen soll.

10ø Thlr. — $4\frac{1}{2}$ Thlr. jährl. Zinse — 271ø Thlr.?

20	9	9	
		2439	Fac.
		20)	$121\frac{19}{20}$ Thl.

$4\frac{1}{2}$ Thl. Zinß — 100 Thl. Capit. — 315 Thl. Zinß?

9	200	9)
9) 1		35
		200
		Fac. 7000 Thlr.

Eine andre Art hieher gehöriger Rechnungsfragen ist folgende; Man weis die einjährige Zinse eines Capitals, und will wissen

1.) entweder, wie hoch die Zinse in längerer oder kürzerer Zeit als Jahresfrist anläuft?

2.) oder, wie lange das Capital stehen muß, damit die Zinse bis auf eine gegebene Summe angeschwollen sey?

Aber auch diese sind so leicht aufzulösen, daß es kaum eines Ansatzes nach der Regel Detri bedarf. Im ersten Fall wird die einjährige Zinse mit der gegebenen Zahl von Jahren multiplicirt, und im andern Fall wird die gegebene Summe mit der einjährigen Zinse dividirt. Wenn indessen von einem Zinßtragenden Capital in mehrern nach einander folgenden Jahren die Zinsen nicht sind bezahlt worden, und die Frage wird so vorgelegt: **wie hoch nach Verlauf so und so vieler Zeit die ganze Summe an Capital und Zinsen angewachsen sey?** so treten zwey verschiedene Fälle ein, wovon jeder auf eine eigene Auflösung der Frage leitet.

244 §.

An sich wächst jedes Capital, wenn am Ende eines jeden Jahres einjährige Zinsen hinzu kommen, in arithmetischer Proportion. Aus 100 werden

bey 5 pC. Zinsen			bey 6 pC. Zinsen		
in 1	Jahr	105	in 1	Jahr	106
— 2	—	110	— 2	—	112
— 3	—	115	— 3	—	118
— 4	—	120	— 4	—	124
— 5	—	125	— 5	—	130
in n	Jahren	$100 + 5n$	in n	Jahren	$100 + 6n$.

Wer

Wer aber am Ende eines jeden Jahres die Zinse von seinem Capital richtig erhielte, der könnte die Zinse wieder zu Capital machen, und am Ende des zweyten Jahres ausser der Capitalmässigen Zinse des zweyten Jahres schon Zinsen von den Zinsen des ersten Jahres einnehmen. Wenn dies von Jahr zu Jahr so fortgienge, so würde das Capital in geometrischer Progression wachsen. Es wäre eben so viel, als wenn der Eigener am Ende eines jeden Jahres sein Capital mit der einjährigen Zinse bezahlt erhielte, und die ganze Summe wieder zu Capital machte. Nun wächst das Capital in jedem Jahr in dem Verhältniß $100 : 105 = 1 : \frac{105}{100} = 1 : 1,05$. Wenn überhaupt die Zinse npC. beträgt, so ist dies Verhältniß $100 : 100 + n = 1 : \frac{100+n}{100}$. Hier genügt es, die Anwendung auf den fünf pC. Zinsenfuß zu machen, und so erhellet, daß für jedes folgende Jahr mit 1,05 multiplicirt werden müsse, um die Summe des Capitals mit den bis dahin angeschwollenen Zinses-Zinsen zu erhalten.

Will man die hieher gehörigen Rechnungsfragen nach der Regel Detri in Ansatz bringen, so muß man folgende Zahlen im voraus suchen. Aus 100 werden

in 1 Jahr 105

in 2 Jahren $\frac{105^2}{100} = 110,25$

in 3 Jahren $\frac{105^3}{100^2} = 115,7625$

in 4 Jähren $\frac{105^4}{100^3} = 121,550625$

in 5 Jahren $\frac{105^5}{100^4} = 127{,}62815625$

in n Jahren $\frac{105^n}{100^{n-1}}$.

Das will eben so viel sagen, als wenn man setzte: Es werden

100	in 1 Jahr	105
100^2	in 2 Jahren	105^2
100^3	in 3 Jahren	105^3
100^4	in 4 Jahren	105^4
100^5	in 5 Jahren	105^5
100^n	in n Jahren	105

Es sey nun die Frage vorgelegt: Wie hoch ist ein Capital von 1000 Thalern nach 20 Jahren durch seine Zinsen und Zinses-Zinsen zu 5 pC. gerechnet, angewachsen? Der Ansatz wäre

100^{20} — in 20 Jahr 105^{20} — 1000 Thl. in 20 J.?

und vermittelst der Logarithmen findet man

$$
\begin{array}{rl}
l105 = & 2{,}0211893 \\
l105^{20} = & 40{,}4237860 \\
l1000 = & 3{,} \\
\hline
 & 43{,}4237860 \\
l100^{20} = & 40{,} \\
\hline
\text{Logar. der gesuchten Zahl} & 3{,}4237860 \\
l2653 = & 3{,}4237372 \\
\hline
 & \text{Diff. } 488 \\
l2654 = & 3{,}4239009 \\
l2653 = & 3{,}4237372 \\
\hline
 & \text{Diff. } 1637
\end{array}
$$

1367

1637 : 488 = 1 : viert. Zahl

```
 1637|0,298
 3274|
-----
 16060
  1637
 14733
-----
  1327
   1637
```

also die gesuchte Zahl 2653,298 Thlr.

245 §.

Ein Capital, das man nach Verlauf einiger Monathe oder Jahre allererst heben kann, ist nicht so viel werth, als ein für sich eben so grosses Capital, das man gleich jetzt baar in Empfang nimmt: denn mit dem letztern können während der noch übrigen Monate oder Jahre bis zur Verfallzeit des ersten wenigstens die gewöhnlichen Zinsen, vielleicht auch Zinses-Zinsen gewonnen werden. Wer also ein Capital vor der Verfallzeit baar in Empfang nimmt, kann sich ohne Schaden gefallen lassen, daß wegen der frühern Zahlung von dem baaren Capital ein Theil gekürzt werde, welchen man den **Rabatt**, in den Rechten das **Interusurium** nennt. Was nach abgezogenen Rabatt von dem baaren Capital übrig ist, heißt der **gegenwärtige Werth** des nach Verlauf einiger Zeit allererst fälligen Capitals; und wenn man den gegenwärtigen Werth eines solchen Capitals suchen will, so kommt alles darauf an, ob man voraussetzen darf: der Empfänger könne bis zur Verfallzeit nicht allein Zinsen, sondern auch Zinses-Zinsen mit dem baaren Capital gewinnen?

oder ob man keine Zinses-Zinsen in Rechnung bringen müssen. Allemahl muß man, um den gegenwärtigen Werth des nach Verlauf einiger Zeit fälligen Capitals zu finden, den gesuchten gegenwärtigen Werth als ein Capital ansehen, das, wenn es sich bis zur Verfallzeit um seine Zinsen (vielleicht auch die Zinses-Zinsen) vergrösserte, die Summe alsdenn das zur Verfallzeit zahlbare Capital ausmachte: und das ist der Grund der Rabatt- oder Interusurien-Rechnung. Man frägt nur umgekehrt: **Wie groß war das gegebene Capital so und so viele Jahre oder Monathe vor der Verfallzeit?**

Wofern nun einfache Zinsen zu 5 pC. in Rechnung kommen; so weis man

105	waren	vor 1	Jahr	100
110	—	vor 2	Jahren	100
115	—	vor 3	——	100
$100+5n$	—	vor n	——	100.

Demnach wird die Frage: Was ist der gegenwärtige Werth von 1500 Thlr. in 3 Jahr vor der Verfallzeit? so beantwortet

115 — vor 3 Jahr 100 — 1500 Thlr. vor 3 Jahr?
150000 | Fac. 1304 Thl.
115)

115 — vor 3 Jahr 100 — 1500 Thlr. vor 3 Jahr?
5) 5) 20
23 20 30000 | Fac. $1304\frac{8}{23}$ Thlr.
23)

Sollen aber auch Zinses-Zinsen in Rechnung kommen, so wird angesetzt

105³

105^3 — vor 3 Jahr 100^3 — 1500 Thlr. vor 3 Jahr?

$$l1500 + l100^3 = 9{,}1760913$$
$$l105 = 2{,}0211893$$
$$l105^3 = 6{,}0635679$$

log. der gesuchten Zahl 3,1125234

$$l1295 = 3{,}1122698$$

Diff. 2536

$$l1296 = 3{,}1126050$$
$$l1295 = 3{,}1122698$$

Diff. 3352

3352 : 2536 = 1 : viert. Zahl

```
 3352|
23464| 0,756
-----
 1896
  3352
 16760
 -----
  2190
  3352
```

also die gesuchte Zahl 1295,756 Thlr.

246 §.

Wenn eine Summe Geldes, oder sonst etwas, dessen Grösse sich durch Zahl und Maaß bestimmen läßt, unter mehr Personen gleich vertheilt werden soll; so wird der Antheil eines jeden gefunden, wenn man die gegebene Summe mit der Anzahl der Personen dividirt. **Wenn dagegen die Theile ungleich seyn sollen;** so müssen überdem noch so viele Zahlen gegeben seyn, als man Theile finden soll, **und diese Zahlen müssen sich gegen einander so, wie die gesuchten Theile verhalten.** Es sey S die gegebene Summe, welche man in drey

Theile P, Q, R, vertheilen soll, die sich wie die Zahlen, p, q, r, verhalten. Man setze $p+q+r = s$, so ist vermöge der Voraussetzung

$$p : q = P : Q$$
$$q : r = Q : R$$

also auch

$$p : P = q : Q$$
$$q : Q = r : R, \text{ (172 §.)}$$

und die Verhältnisse $p : P$, $q : Q$, $r : R$ sind gleich groß. Demnach ist

$$s : S = p : P$$
$$s : S = q : Q$$
$$s : S = r : R. \text{ (168 §).}$$

In diesen Proportionen sind die drey ersten Glieder gegeben, also kann man in einer jeden das vierte Glied finden. Wenn auch die Summe S in vier und mehr dergleichen Theile zu theilen wäre, die sich wie eben so viele gegebene Zahlen verhalten sollten; so würde allemahl das Verhältniß der Summe s dieser Zahlen zur andern gegebenen eben so einzutheilenden Summe S dem Verhältniß zweyer zusammengehöriger Theile gleich seyn.

Auf diesen Gründen beruhet die **Gesellschaftsrechnung**, die alsdenn diesen Nahmen führt, wenn eine Summe Geldes, oder etwas dergleichen, dessen Werth sich schätzen läßt, unter mehrere Personen ungleich vertheilt werden soll. Bey Compagnie-Handlungen, Concursen, Erbtheilungen, Havereyen, u. s. f. wird nach derselben Gewinnst und Verlust vertheilt. Eben diese Gesellschaftsrechnung kommt auch unter dem Nahmen der **Vermischungsrechnung** bey den practischen Schriftstellern vor: und dieser Nahme ist daher entstanden, weil man eben die Regeln auch in solchen Fällen anwendet,

wenn

wenn eine Masse aus Vermischung mehrerer Massen von verschiedener Art entstanden ist, und man will wiederum eine gewisse Menge der vermischten Masse von eben der Art zuwege bringen, so daß die unter einander gemischten Theile sich der Menge, oder dem Gewicht nach gegen einander eben so, wie in jener Masse verhalten.

Vier Personen A, B, C, D, legen zu einer Handlung folgende Summen, 9600 Thlr., 6000 Thlr., 4800 Thlr., 3600. Thlr., und sie gewinnen zusammen 5000 Thlr.: die Frage ist, wieviel jedem nach Proportion seiner Einlage von dem Gewinnst gebühre?

Die jedem gebührenden Theile des Gewinnstes müssen sich, wie die eingelegten Summen verhalten, und weil es nur auf das Verhältniß dieser Zahlen ankommt; so kann man sie, wenn sie alle ein gemeines Maaß haben, vor Anwendung der Gesellschaftsregel, damit dividiren, um die Rechnung abzukürzen, da denn die ganze Rechnung so zu stehen kommt.

	12		
A	96øø	8	
B	60øø	5	
C	48øø	4	
D	36øø	3	
		20	

2ø — 8 — 500ø Thlr.?
2) 2) 2
1 4 Fac. 2000 Thlr.

20 — 5 — 5000 Thlr.?
5) 5) 4)
4 1 Fac. 1250 —

20 — 4 — 5000 Thlr.?
4) 4) 5)
5 1 Fac. 1000 —

2ø — 3 — 500ø Thlr.?
2) 2)
1 250 Fac. 750 —

Summe 5000 Thlr.

 Kom-

Kommen Brüche unter den gegebenen Zahlen vor, so kann man sie vorher insgesammt auf ihren kleinsten General-Nenner bringen, und hiernächst alle Zahlen mit diesem General-Nenner multipliciren, so kommen lauter ganze Zahlen, die gegen einander in eben dem Verhältniß stehen.

247 §.

Der Werth einer jeden Sache, als Kaufmannswaare betrachtet, ist für jede Menge von eben der Waare bestimmt, wenn der Preis einer solchen Menge von ihr bekannt ist, die man durch **Eins** angiebt. Weis man, wieviel ein Pfund davon kostet; so weis man, daß *n* Pfund *n*mahl soviel kosten. Getreyde mißt man mit Scheffeln, flüssige Sachen, als Wein, Bier und dergleichen mehr, mit Kannen, Tonnen, Aamen u. s. w. Der Preis verschiedener Waaren ist verschieden, wenn einerley Menge von beyderley Waare mit ungleicher Geldsumme bezahlt werden muß. Man verstehe also durch den **Preis** einer Waare, die Geldsumme, welche für so viel Waare bezahlt werden muß, als man bey Ausmessung ihrer Menge oder Grösse für **Eins** annimmt, z. E. für ein Pfund, einen Scheffel, eine Kanne von dieser Waare. Wenn alsdenn die Menge der Waare nach Maaß oder Gewicht ausgedrückt $= M$ gesetzt wird, und ihr Preis $= p$, der Werth der ganzen Menge M eben dieser Waare $= P$; so ist $P = M \cdot p$. Wenn z. E. 1 Maaß Wein 8 gGr. kostet, und man will den Werth von 40 Maaß eben des Weins wissen, so ist dieser Werth $= P$, und $p = 8$ gGr., so wie $M = 40$ Maaß, und man hat $P = M \cdot p = 40$ mahl 8 gGr.

Aus

Aus dem Werth der ganzen Menge Waare wird also der Preis gefunden, wenn man den Werth der ganzen Menge mit der Zahl dividirt, welche diese Menge in Pfunden oder andern Maassen ausdrückt. Das heißt kürzer, es ist $p = \frac{P}{M}$. Wenn 40 Maaß Wein 40 Mark oder $13\frac{1}{3}$ Thlr. kosten, so ist der Preis von 1 Maaß Wein $= \frac{13\frac{1}{3}\text{ Thlr.}}{40}$.

248 §.

Man kann Weine von verschiedener Güte, also auch von verschiedenen Preisen, mit einander vermischen, und solchergestalt einen Wein von mittlerer Güte zuwege bringen. Der Preis von einem Maaß dieses Weins ist nun grösser als der Preis von einem Maaß des schlechtern, und geringer, als der Preis von einem Maaß des bessern Weins. Der Werth der ganzen Menge des vermischten Weins ist die Summe der Werthe der Menge des bessern und des schlechtern Weins, woraus der vermischte entstanden ist. Sind also die Preise von einem Maaß des schlechtern und des bessern Weins bekannt; so wird der Preis des vermischten nach der Regel des 347 §. leicht gefunden. Wenn M Maaß Wein zu dem Preise p und N Maaß Wein zu dem Preise q mit einander vermischt werden; so hat man M + N Maaß Wein, und ihr Werth ist $M \cdot p + N \cdot q$. Also ist der Preis einer Kanne dieses Mittelweins $= \frac{M \cdot p + N \cdot q}{M + N}$.

249 §.

Hätte man M + N Maaß Mittelwein aus M Maaß bessern und N Maaß schlechtern Weins gemacht,

macht, und man wollte ein andermahl mehr oder weniger Mittelwein zu eben dem Preise machen; so könnte man leicht nach der **Vermischungsregel** (346 §.) finden, wieviel Maaß von jeder Art in die Vermischung gebracht werden müste, um den verlangten Mittelwein zu erhalten: denn das Verhältniß der Theile M : N wäre gegeben. Wenn dagegen das Verhältniß der Theile noch nicht bekannt, statt dessen aber mit den Preisen des bessern und schlechtern Weins, auch der Mittelpreis gegeben wäre: so müste man vorher suchen, wieviel Maaß des bessern mit so und soviel Maaß des schlechtern Weins vermischt werden müssen, um einen Wein zu dem verlangten Mittelpreise zuwege zu bringen. Diese Schlüsse finden in vielen andern Fällen ihre Anwendung, weil man auch Metalle und sonst mancherley andre Massen von verschiedenem Gehalt unter einander mischen kann, um eine Masse von einem verlangten Mittelgehalt zuwege zu bringen. Die Regel, nach welcher man alsdenn rechnen muß, um das Verhältniß der Menge der Massen des bessern und schlechtern Gehalts zu finden, welche nach der Vermischung einer Masse des verlangten Mittelgehalts zuwege bringen, heißt die **Alligationsregel**.

Wenn die Buchstaben M, N, p, q, dieselbe Bedeutung, wie im vor. §. behalten, und der gegebene Mittelpreis $= m$ gesetzt wird; so ist $\frac{M \,.\, p + N \,.\, q}{M + N} = m$, also $M \,.\, p + N \,.\, q = M \,.\, m + N \,.\, m$, und daraus folgt

$$Mp - Mm = N \,.\, m - N \,.\, q$$

oder $$M(p - m) = N(m - q)$$

und

und man erhält $M : N = m - q : p - m$. Das giebt folgende Regeln:

1.) Man schreibe den schlechtern Preis unter dem bessern, zur Seite aber den mittlern Preis zwischen beyden zur Linken. Rechter Hand ziehe man von oben herunter einen Strich, um die gesuchten Zahlen auf die andre Seite desselben zu bringen.

2.) Den Ueberschuß des mittlern Preises über den schlechtern setze man oben bey dem bessern Preis: den Ueberschuß des bessern Preises über den mittlern aber setze man unten bey dem schlechtern Preis.

3.) Diese beyden rechter Hand des Strichs stehenden Zahlen zeigen nun, wieviel man von jeder der beyden Sorten nehmen müsse, die ihnen linker Hand des Strichs gegen über stehen.

Soll man aus Weinen das Maaß zu 18 gGr. und zu 5 gGr. einen Mittelwein das Maaß zu 14 gGr. machen, so stehet die Rechnung wie folget.

	18 gGr.	auf 9 Maaß des bessern
14 gGr.)		nimmt man
	5 gGr.	4 Maaß des schlechtern.

so hat man 13 Maaß Mittelwein.

Will man nun 40 Maaß Mittelwein haben, so giebt die Vermischungsregel folgendes.

13 Maaß M. W. — 9 Maaß gut. W. — 40 Maaß M. W.?
40
13) 360 | Facit $27\frac{9}{13}$ Maaß.

13 Maaß M. W. — 4 Maaß schl. W. — 40 Maaß M. W.?
40
13) 160 | Facit $12\frac{4}{13}$ Maaß.

Summe 40 Maaß Mittel-Wein.

Wer

Wer es weiß, daß 15löthiges, 14= 13= 12löthiges Silber, feines mit schlechterm Metall so vermischtes Silber ist, daß jede Mark, oder jedes halbe Pfund, des vermischten Silbers 15, 14, 13, 12 Loth fein Silber hält, der löset leicht dergleichen Rechnungsfragen auf, wovon die folgende eine Probe giebt.

Aus 15löthigen und $8\frac{1}{2}$löthigem Silber soll man 14löthiges machen: wieviel muß man von jeder Art in den Tiegel setzen? Man siehet wohl, daß 15 Lt. und $8\frac{1}{2}$ Lt. der Gehalt des bessern und schlechtern Silbers, der verlangte Mittelgehalt aber 14 Lt. sey: also setzt man an:

		2	auf
	15 Lt.	$5\frac{1}{2}$	11 Theile 15löthiges
14 Lt.)			kommen
	$8\frac{1}{2}$ Lt.	1	2 Theile $8\frac{1}{2}$löthiges Silber.

250 §.

Alle Rechnungsfragen, wobey es darauf ankommt, **daß man eine genannte Zahl auf einen andern Nahmen bringen** soll, können ebenfalls nach der Regel Detri in Ansatz gebracht werden, obgleich die im 134. 135 und 136 §. betrachteten Fälle, als die leichtesten und bekanntesten Reductions=Rechnungsfragen, auch ohne ihren Zusammenhang mit der Regel Detri zu zeigen, ihre Auflösung finden konnten. Die Frage: 327 gGr. wieviel sinds Thaler? giebt folgenden Ansatz:

24 gGr. — 1 Thlr, — 327 gGr.?

Denn 1 Thlr., als der Werth von 24 gGr. muß in dem gesuchten Werth von 327 gGr. sovielmahl enthalten seyn, als 24 gGr. in 327 gGr. enthalten sind. Die Frage: $\frac{5}{7}$ Thlr. wieviel sind es gGr.? giebt also den Ansatz

1 Thlr. — 24 gGr. — $\frac{5}{7}$ Thlr.?

Man

Man sucht nemlich den Werth von $\frac{5}{7}$ Thlr. in gGr. ausgedrückt, und kennt den Werth eines Thalers in Groschen. Alle Reductionsrechnungsfragen können demnach so angesehen werden, als diejenigen, die zur Kauf- und Waaren-Rechnung gehören, weil man den Werth einer genannten Zahl unter einem andern Nahmen wissen will. Die zweyte Zahl im Ansatz ist der Werth der ersten, und die gesuchte vierte Zahl der Werth der dritten im Ansatz, oder der Fragzahl.

Die beyden ersten Zahlen im Ansatz müssen, so wie die Fragzahl gegeben seyn, das heißt, man muß den Werth irgend einer andern Zahl, die mit der Fragzahl einerley Nahmen hat, unter dem Nahmen der gesuchten Zahl wissen: und es genügt allemahl, wenn man weis, wie viele Stücke unter dem einen Nahmen **Eins** unter dem andern Nahmen ausmachen. Man könnte die Zahl, welche das angiebt, die **Reductionszahl** nennen, und diese Zahl kann eine ganze oder gebrochene Zahl seyn. Weis man, daß eine Hamburger Elle $\frac{5}{6}$ Brabander Ellen ausmache, so kann man leicht Hamburger Ellen auf Brabander Ellen bringen und umgekehrt: denn man weis zugleich, daß eine Brabander Elle $\frac{6}{5}$ Hamburger Ellen ausmache.

Wenn diese Reductionszahl ein Bruch ist, so zeigt derselbe zugleich an, wie viele Stücke man unter jedem Nahmen nehmen muß, um an Werth gleichviel zu erhalten. Weis man

1 Hamb. Elle = $\frac{5}{6}$ Brab. Ell.

so weis man auch, es sey

6 Hamb. Ell. = 5 Brab. Ell.

Es muß nemlich auf beyden Seiten mit dem Nenner

dort

der Reductionszahl multiplicirt werden, so erhält man den **Reductionssatz**, und derselbe dient vornemlich, alle Rechnungsfragen dieser Art in einen bequemen Ansatz nach der Regel Detri zu bringen, so daß in den beyden ersten Stellen des Ansatzes kein Bruch zu stehen kommt.

251 §.

Der Reductionssatz giebt das Verhältniß zweyer an sich gleichartiger Grössen an, die nur bey ungleicher Grösse verschiedene Nahmen haben. Sind 6 Hamb. Ell. = 5 Brab. Ellen, so ist das Verhältniß der Hamb. Elle : Brab. Elle = 5 : 6; und umgekehrt, wenn man sonst wüste, es verhalte sich

die Hamb. Elle : Brab. Elle = 5 : 6;

so gäbe das den Reductionssatz 5 Brab. Ellen = 6 Hamb. Ellen. (176 §.) In der Mathematik und Naturlehre ist es vorzüglich interessant, die Verhältnisse der mancherley in verschiedenen Ländern üblichen Längenmaaße und Gewichte unter einander zu kennen; so wie es für die Kaufmännische Rechenkunst interessant ist, die Verhältnisse der mancherley Münzen gegen einander zu kennen, die in verschiedenen Ländern und Handelsplätzen üblich sind. Die Gründe der Münzvergleichungsrechnungen sind in meines Bruders oben im 242 §. schon angeführten **Rechenkunst**, im *V* und *IX* **Abschnitt der** *II* **Abtheilung** so gut aus einander gesetzt, daß der Vortrag jeden befriedigen wird, der Vergnügen daran findet, oder sonst genöthiget ist, sich in Rechnungen dieser Art zu üben. Hier werde ich noch vornemlich zum Gebrauch in der Mathematik und Naturlehre die Gründe der **Maaß- und Gewichtsvergleichungs-Rechnung vortragen.**

Der

Der XV. Abschnitt.

Anwendung der Regel Detri auf die Maaß- und Gewichts-Vergleichung.

252 §.

Weil niemand die Reductionszahl, oder den Reductionssatz bey Vergleichung zweyer Maasse oder Gewichte wissen kann, der nicht entweder die Maasse selbst zur Hand hat, und selbst die Vergleichung mit ihnen anstellet, oder doch sonst die Resultate kennt, wenn andre solche Vergleichungen angestellet haben; so hat man Vergleichungstafeln nöthig, welche die Vergleichungszahlen ein für allemahl angeben. Einer der vornehmsten Schriftsteller, bey welchem man die nöthigen hieher gehörigen Nachrichten recht vollständig findet, ist Jürgen Elert Kruse, im ersten Theil seines Allgemeinen und besonders Hamburgischen Contoristen. Hamburg 1766. Dem ersten Theil dieses Buchs ist ein Verzeichniß derjenigen Bücher beygefügt, welche der Verfasser bey Ausarbeitung seines Werks zu Rath gezogen hat: auch hat derselbe die nöthigen Nachrichten, welche jene Schriftsteller nicht enthalten, durch Briefwechsel und sonst zu erhalten gesucht, und darauf viele Jahre gesammelt. Aus der Vergleichungstafel der Fußmaasse, welche dem ersten Theil dieses Werks unter der VIIten Nummer beygefügt ist, setze ich hier folgenden Auszug her.

Tafel zur Vergleichung der Fuß-Maasse.

Aachen	1285
Amsterdamm	1255
Anspach	1320
Antwerpen	1266
Augsburg	$1282\frac{18}{23}$*
Augsb. Landsch.	1309*
Basel	1322
Bayern	....
Berlin	1373
Bern	1300
Bologna	$1682\frac{2}{5}$*
Braunschweig	1265
Bremen	1282
Breslau	1260
Brüssel	1290
Calenberg	1296
Carlsruhe	1241
Cleve	1310
Cöln	1220
Dännemark	1391,3
Danzig	1271,5*
Dresden	1255
Emden	1313
Erfurt	1251
Florenz, Bauelle	2430*
Frankfurth am Mayn	1270
Giessen	1320
Gotha	1275
Gröningen	1295
Halle	1320
Hamburg	1270

Hannover	129.
Holstein	1323
Königsberg	1364
Leiden	1390
Leipzig	
London	1351,6
gemeine Fuß	1350*
Lübeck	1290
Mecklenburg	1290
Nürnberg	$1346\frac{3}{4}$*
Paris königl. Fuß	1440
6 machen 1 Toise.	
Pommern	1295
Prag	1338
Rheinländischer	1391,3*
Riga	1215
Römischer Palme	990*
alte Röm Fuß	1320*
Rostock	1282
Schweden	$1316\frac{1}{2}$*
Schweiz	1330
Spanien	1253
Strasburg	1282,75
Stettin	1253
Turin	1432
Ulm	1281
Utrecht	1210
Venedig	1540*
Wien	1420
Wittenberg	1255
Zürch	1330

253 §.

Bey dieser Vergleichungstafel wird die Länge des Pariser oder königl. Französischen Fußmaasses als bekannt zum Grunde gesetzt; und bey diesem Fußmaaß ist die Eintheilung in 12 Zoll, des Zolles in 12 Linien, wie beym Rheinländischen, also des ganzen Fusses in 144 Linien gewöhnlich: nur wird die französische Linie nicht, wie die Rheinländische, abermahl in 12, sondern nur in 10 kleinere gleiche Theile getheilt, die gemeiniglich Puncte heissen. Diesemnach machen 1440 Puncte die Länge des Pariser Fusses aus, und in solchen Puncten des Pariser Fusses ist die Länge eines jeden andern in der Tabelle angeführten Fusses angegeben. Wenn also bey dem Rheinländischen Fuß die Zahl 1391,3 steht, so will das sagen, der Rheinländische Fuß sey 1391,3 Puncte des französischen Fusses lang. Wie nun diesen Gründen gemäß die in der Tabelle aufgeführten Zahlen sich gegen einander, wie die daneben stehenden Fußmaasse verhalten; so erhält man für zwey dergleichen Fußmaasse den Reductionssatz, wenn man in der Proportion, welche die Tabelle zwischen zweyen Fußmassen und den daneben stehenden Zahlen angiebt, die beyden mittlern und äussern Glieder mit einander multiplicirt. Es ist nemlich vermöge der Tabelle

Hamb. Fuß : Lübeck. Fuß = 127ø : 129ø,

also 127 Lübeck. Fuß = 129 Hamb. Fuß: (176 §.)

und wenn man die Reductionszahl haben will,

1 Lübeck. Fuß = $\frac{129}{127}$ Hamb. Fuß

oder 1 Hamb. Fuß = $\frac{127}{129}$ Lübeck. Fuß

Uebrigens ist nicht undienlich, hier zu bemerken, daß alle kleinere Längenmaasse der alten Griechen und

Römer, eben so wie das Fußmaaß, von den Abmessungen der Glieder des menschlichen Körpers hergenommen sind. Eine **Mannslänge**, ein Klafter (orgyia) fasset 6 Fuß, oder 4 Ellenbogen (cubitus), so wie 1 Ellenbogen $1\frac{1}{2}$ Fuß. Eine **Spanne**, oder **Handlänge** (spithama auch palmus major) fasset 12 Fingerbreiten, so wie ein Fuß 12 Daumenbreiten oder Zolle: wenn nun 4 Fingerbreiten soviel als 3 Daumenbreiten sind, so fasset ein Fuß 16 Fingerbreiten, oder $1\frac{1}{3}$ Spannen. Ferner eine **Handbreite** (palmus minor) fasset 4 Fingerbreiten, also 1 Fuß 4 Handbreiten, und eine Spanne 3 Handbreiten.

254 §.

Zu den Schriften, aus welchen die Zahlen in der Vergleichungstafel zum Theil genommen sind, gehört unter andern *Io. Casp. Eisenschmidii* de ponderibus et mensuris veterum Romanorum, Graecorum, Hebraeorum, nec non de valore pecuniae veteris, disquisitio. Argentorati, (die zweyte Ausgabe ist von 1737.) Sect. III. de mensuris intervallorum, pag. 91 - 121. Weil der Verfasser dieser Schrift die Vergleichungen theils selbst angestellet, theils sonst seine Nachrichten aus zuverlässigen jedesmahl von ihm angezeigten Quellen geschöpft hat; so habe ich die daraus genommenen Zahlen in der vorhin mitgetheilten Tafel mit einem Sternchen bezeichnet.

Im ersten Bande der Abhandlungen der königl. Schwedischen Academie der Wissenschaften befindet sich ein Aufsatz vom Herrn Celsius: **Vergleichung zwischen dem schwedischen Fuß und den davon unterschiedenen ausländischen Maassen,** woraus ich die Resultate um deswillen noch hersetze, weil

weil H. Celsius selbst die Vergleichungen angestellet hat. Die Länge der ausländischen Fußmaaße ist in Tausendtheilen des schwedischen Fusses angezeigt, der eine halbe schwedische Elle beträgt.

Schwedischer Fuß	1000
Fußmaaß in Bononien	1285
Die Elle in Florenz von Tuch	1962
von Erdreich	1842
Eine Spanne in Genua	836
Ein Fuß in London	1026,9
— — in Paris	1094,3
Rheinländischer Fuß	1075
Ein geometrischer Fuß in Rimini	1831
In Rom auf dem Campidolio (vordem Capitolio) ist in der Mauer ein weisser Marmelstein eingefasset, worauf mit einigen groben Strichen folgende Maasse eingehauen stehen:	
Römischer Fuß	993
Griechischer Fuß	1034
Baumeister-Ruthe	7534
$\frac{1}{10}$ einer solchen Ruthe oder Spanne	$753\frac{1}{2}$
Eine Kaufmanns-Ruthe	8395
Eine Kaufmanns-Elle	2856
In Venedig hat niemand dem Herrn Celsius ein öffentliches Original des Fußmaasses zeigen können: von einigen Stücken ein Mittel genommen fand er es	1170
Die russische Elle oder Arschine hält in Tausendtheilen der schwedischen Elle	1178

255 §.

Bey den Gewichtsvergleichungen ist zu merken, daß das Handlungsgewicht, welches bey solchen

Waaren, die eben nicht in hohem Preise stehen, gebraucht wird, an den meisten Orten vom Gold- Silber- und Edelsteinengewicht auch vom Apothekergewicht unterschieden sey. Ein Pfund Handlungs-Gewicht wird in 32 Loth, ein Loth in 4 Quentchen, ein Quentchen in 4 Pfenniggewichte getheilt.

Fast in ganz Deutschland bedient man sich beym Golde und Silber des **Cöllnischen Markgewichts**, wovon eine Mark $\frac{1}{2}$ Pfund Cöllnisch wiegt. Beym Silber wird diese Mark in 16 Loth oder 8 Unzen, ein Loth in 4 Quentchen, 1 Quentchen in 4 Pfenniggewichte, also eine Mark in 256 Pfenniggewichte getheilt. Ein solches Pfenniggewicht theilt man noch in 15 Gran, mithin die Unze in 480 Gran, die Mark in 3840, und das Pfund Cöllnisch in 7680 Gran. Beym Münzwesen aber wird eben dies Pfenniggewicht in 256 kleinere gleiche Theile getheilt, die **Richtpfenningstheile** heissen: also wiegt eine Mark Cöllnisch 65536 Richtpfenningstheile, eine Unze Cöllnisch wiegt 8192, ein Loth 4096, und ein Quentchen 1024, 1 Gran aber $17\frac{1}{15}$ solcher Richtpfenningstheile. Auch wird der Pfenning in 2 Heller getheilt, da dann 1 Heller 128 Richtpfenningstheile wiegt. Beym Münzwesen wird ein Loth auch in 18 Grän getheilt, und 1 Grän wiegt $227\frac{5}{9}$ Richtpfenningstheile.

Beym Golde theilt man die Mark in 24 Karat, und 1 Karat in 12 Grän, also wiegt 1 Loth $1\frac{1}{2}$ Karat, und die Unze 3 Karat, oder 36 Grän; mithin die ganze Mark 288 Grän, und ein Karat wiegt $2730\frac{2}{3}$ Richtpfenningstheile. Ueberdem sind bey den goldenen Münzen die sogenannten Ducaten-Aeß-

chen

chen gewöhnlich, und 1 Pfenning wiegt 17 Aeßchen, also 1 Quentchen 68 Aeßchen, 1 Loth 272 Aeßchen, eine Unze 544 Aeßchen, 1 Mark 4352 Aeßchen.

In Engelland, Frankreich, Holland, und mehrern andern Orten, ist beym Golde, Silber und Edelsteinen das so genannte Troygewicht üblich, welches doch in diesen dreyen Ländern nicht von gleicher Schwere ist. Ein Pfund holländisch Troygewicht hat eigentlich 12 Unzen, ob man gleich in Holland wohl 16 Unzen darauf rechnet: hievon gehen 8 Unzen auf 1 Mark Troy, und 1 Pfund wiegt $1\frac{1}{2}$ Mark. Weiter wird die Unze in 20 Engels, und ein Engel in 33 Aß, oder statt dessen in 24 Grän getheilt, weswegen 3 Gräne so viel als 4 Aß ausmachen, und 1 Mark wiegt 5120 Aß oder 3840 Grän, eine Unze 640 Aß oder 480 Troysche Gräne.

Die Cöllnische Unze wiegt 19 solcher Engels, wovon 20 eine Unze holländisch Troy wägen, (man sehe **Eisenschmid** a. a. O. pag. 10.) also ist

1 Cölln. Unze : 1 Unz. holl. Troy = 19 : 20.

und 19 Unz. holl. Troy sind = 20 Cölln. Unzen, mithin auch 19 Mk. holl. Troy = 20 Mk. Cölln.

Diesemnach wiegt die Cöllnische Unze $\frac{19}{20} \cdot 640 = 19 \cdot 32 = 608$ Aß holl. Troy, und 1 Cöllnisches Pfenning-Gewicht von 15 Gran Cöllnisch, oder 17 Ducaten-Aeßchen wiegt $\frac{608}{32} = 19$ Aß holl. Troy.

256 §.

Ein Pfund Englisch Troygewicht wird eingetheilt in 12 Unzen, oder $1\frac{1}{2}$ Mark, die Unze in 20 Pennys, 1 Penny in 24 Grane, also eine Mk. von 8 Unzen in 3840 Gran, und 1 Unze wiegt 480 Gran. Ausser diesem Troygewicht wird in Engelland ein andres Gewicht bey der übrigen Handlung gebraucht, welches Avoir du pois heißt, und leichter als Troygewicht ist. Noch wird daselbst das so genannte Königsgewicht bey einigen Waaren gebraucht, und $1\frac{1}{2}$ Pf. Avoir du pois sind 1 Pfund Königsgewicht.

Auf ein Apotheker Pfund werden, wie auf 1 Pfund Troygewicht, 12 Unzen gerechnet, die Unze wird in 8 Drachmen oder Quentchen, ein Drachme in 3 Scrupel, 1 Scrupel in 20 Gran, also die Unze in 24 Scrupel oder 480 Gran getheilt.

In Frankreich ist beym Golde und Silber ebenfalls ein so genanntes Markgewicht von 8 Unzen üblich: die Unze davon wird bis auf Scrupel wie das Apothekergewicht eingetheilt, nemlich in 8 Gros oder Drachmes, und 1 Gros in 3 Denier oder Scruples. Dagegen wird ein Denier oder Scrupel nicht in 20 Gran, wie beym Apothekergewicht, sondern in 24 Grains getheilt, also wiegt die Pariser Unze 576 Grains, und die Pariser Mark wiegt 4608 Grains.

257 §.

Eisenschmidt a. a. O. pag. 10 sqq. versichert, er habe auf eingezogene Erkundigung erfahren, daß das Pariser Apothekergewicht mit dem dortigen Silbergewicht einerley sey, nur werde beym medicinischen Gebrauch die Unze in 480 Gran getheilt. Die deutsche Apotheker-Unze findet er fast grade so schwer, als die Venetianische Unze, und muthmasset, dies rühere daher, weil man vormahls fast alle ausländische Waaren, und besonders auch die ausländischen Arzeneyen über Venedig in Deutschland erhalten haben: übrigens theilt er folgende Vergleichungen mit.

1 Unze

	Paris. Grains.
1 Unze englisch Troy Gewicht wiegt	$585\frac{1}{7}$
1 Unze englisch Avoir du pois	534
1 Unze holländisch Troy	$579\frac{1}{5}$
1 Unze spanisch Silber-Gewicht	$540\frac{1}{4}$
1 Unze in Venedig	$562\frac{1}{2}$
1 Unze in Neapel	503
1 Unze in Florenz und Pisa	537
1 Unze in Siena	526
1 Unze in Genua	494
1 Unze in Spanien	$540\frac{1}{4}$
1 Unze in Lion	$591\frac{1}{4}$
1 deutsche Apotheker-Unze	562
1 Unze Nürnberger Silber-Gewicht	$599\frac{5}{8}$
1 Unze Ausburger Silber-Gewicht	$554\frac{3}{8}$
1 Unze Cöllnisch	$550\frac{1}{4}$

Die Vergleichung der vier zuletzt aufgeführten Gewichte mit der Pariser Unze von 576 grains hat **Eisenschmidt** selbst angestellet.

Setzt man nach dieser Vergleichung zum Grunde, es sey

1 Apoth. Unze : 1 Cölln. Unze $= 562 : 550\frac{1}{4}$
$= 2248 : 2201$

so sind 2201 Apoth. Unze $=$ 2248 Cölln. Unz. und die Regel Detri giebt

2248 Cölln. Unz. — 2201 Ap. Unz. — 1 Cölln. Unz.?

480
176080
8804
1056480 | Facit 470 Gran Apoth.
2248) | Gewicht sehr nahe.

1 Loth Cöllnisch wiegt also 235 Gran Apoth. Gewicht, und weil die Apoth. Unze 480 Gran wiegt; so ist

Die Apoth. Unze : Cölln. Unze $= 48\cancel{0} : 47\cancel{0}$ und 47 Apoth. Unzen sind 48 Cölln. Unzen.

258 §.

Die IV. und V Tafel in Krusens Contoristen vergleicht das Gold- und Silbergewicht der berühmtesten Handelsplätze, so wie das übrige Handelsgewicht mit dem holländischen Troygewicht so, daß jedesmahl angezeigt wird, wie viele Troysche Aß holl. Gewicht eben so schwer sind als ein Pfund, eine Mk., oder eine Unze eines andern Gewichts. Ich setze folgende daher genommene Vergleichungen hieher, die man mit den Eisenschmidtschen zusammenhalten und prüfen kann, wieweit sie übereinstimmen.

Apoth. Gewicht	in holl. Assen.
1 Pfund deutsches wiegt	7452
—— englisches —	7766
—— französisches —	7641
—— hannöversches	7595
—— holländisches —	7680
—— schwedisches —	7416

Ferner in	wiegt	holländ. Aß.
Holland	1 Mark	5120
	1 Unze	640
Augsburg	1 Mark	4912
Basel	——	4864
Berlin	——	4875
Braunschweig	——	4858
Cölln	——	4864

in

in	wiegt	holl. Aß
Dänemark	1 Mark	4888
Danzig	——	3974
England	1 Pf. Troy	7766
	1 Unze Troy	647 1/6
Florenz, Pisa u. Livorno	1 Pfund	7060
	1 Unze	588 1/3
Frankreich	1 Mark	5094
	1 Unze	636 3/4
Genf	1 Mark	5094
Genua	1 Pfund	6612
	1 Unze	551
Lissabon	1 Mark	4776
	1 Unze	597
Magdeburg	1 Mark	4874
Neapolis	1 Pfund	6677
	1 Unze	556 1/2
Nürnberg	1 Mark	4972
Polen	——	4198
Regensburg	——	5111
Riga	——	4351
Rom	1 Pfund	7090
	1 Unze	590 5/6
Rußland	1 Pfund	8512
	Solotnik	88 2/3
Schweden	1 Mark	4384
Siena	1 Pfund	6982
	1 Unze	581 5/8
Spanien	1 Mark Silb.	4796
	1 Unze	599 1/2
Strasburg	1 Mark	4906
	1 Unze	613 1/4
Turin	1 Mark	5120

in	wiegt	holl. Aß.
Venedig	1 Pfund	7456
	1 Mark	4970
	1 Unze	$621\frac{1}{4}$
Wien	1 Mark	5837
Zürch	1 Mark	4876

Bremen, Erfurt, Frankfurth am Mayn, Hamburg, Hannover, Leipzig, Lübeck, haben Cöllnisches Silbergewicht.

Vom Herrn Brander in Augsburg ist mir ein halber Bogen mitgetheilt worden, worauf eine in Kupfer gestochene Tabelle befindlich ist, unter dem Titel: Silbergewichts-Verhältnisse, wie solche aus genauester Abwaag und Collationirung derselben mit den im Augsburgischen Bau-Amt befindlichen exact congruirenden Silbergewichts-Einsätzen de annis 1515 und 1650 befunden und berechnet worden durch G. F. Brander im Jahr 1753, woraus ich folgende Bestimmungen mittheile.

1 Mark Troy enthält 162 Engels
1 Mark Cöllnisch enthält 152 Engels
6 Mark Cöllnisch thun 5 Mark Wiennisch
1 Mark Wiennisch hält 1 M. 3 Lt. 0 Qu. $0\frac{15}{27}$ Pf. Augsburg.
1 Mark Augsburg. hält 1 M. 0 Lt. 0 Qu. $2\frac{3}{8}$ Pf. Cöllnisch.
1 Mark Cöllnisch hält 0 M. 15 Lt. 2 Qu. $2\frac{5}{8}$ Pf. Nürnbergisch.
1 Mark Nürnberg. hält 1 M. 0 Lt. 1 Qu. $1\frac{40}{67}$ Pf. Cöllnisch.
1 Mark Parisisch hält 1 M. 0 Lt. 2 Qu. $1\frac{3}{4}$ Pf. Augsburg.

259 §.

259 §.

Diamanten und andre Edelsteine werden in so genannten Karaten gewogen, und ein Karat wird in 4 Gran getheilt. Nach einer Stelle in Krusens Contoristen unter dem Artikel: Hamburg, 165 S. ist das Perlen- und Diamanten-Gewicht an allen Orten in Europa gleich, und nach der Krusischen Vergleichungstafel wägen 95 Mark holl. Troy soviel als 113770 Karate Diamantengewicht: also sind 19 Mark Troy = 22754 Karate = 20 Mark Cöllnisch; oder 160 Unzen Cöllnisch = 22754 Karate, und 80 Unzen Cöllnisch = 11377 Karate, mithin 1 Unze Cöllnisch = 142,2125 Karate. Vermöge einer Probe, die Eisenschmidt selbst angestellet hat, und wovon er a. a. O. pag. 18. Nachricht giebt, wäre die Cöllnische Unze $142\frac{1}{3}$ solcher Karate schwer, mithin würde die Unze holl. Troy $\frac{20}{19} . 142\frac{1}{3}$ oder $149\frac{47}{57}$ Karat wägen. Nach einer andern Probe haben 2383 Karat ein Pariser Pfund von 16 Unzen gewogen, also die Pariser Unze $148\frac{15}{16}$ Karat. Setzt man nun mit Eisenschmidt

$$1 \text{ Unz. holl. Tr. } 1 \text{ Unz. fr. Tr.} = 579\tfrac{1}{5} : 576$$
$$= 2896 : 2880$$
$$= 181 : 180,$$

mithin 180 Unz. holl. = 181 Unz. franz., so findet man die Unz. holl. Tr. $= \frac{181}{180} . 148\frac{15}{16} = \frac{181}{180} . \frac{2383}{16}$ $= 149\frac{2203}{2880} = 149{,}765$ Karat. Nach beyden Proben wiegt also die Unze holl. Troy nicht völlig 150 Karat Diamantengewicht: auch selbst die vorhin aus der Krusischen Tafel angeführten Zahlen 19 Mark oder 152 Unzen holl. Troy = 22754 Karat geben, 1 Unze Troy = $149\frac{53}{76}$ Karat. Indeß wird doch unter dem Artikel: Amsterdam, 40 S. gemeldet,

meldet, daß bey dem Juwelen- und Perlengewichte das Pfund von 2 Mark Troy zu 2400 Karate, und die Mark zu 1200 Karate gerechnet werde: also wäre doch 1 Unze 150 Karat schwer. Ferner wird unter dem Artikel: **London**, 231 S. Die Unze Englisch Troy zu 150 Karat in Perlen- und Edelstein-Gewicht angegeben; und unter dem Artikel: **Frankreich**, 132 S. heißt es, Edelsteine werden bey Onces (französisch Troy oder Mark-Gewicht) von 144 Carats oder 576 Grains gewogen, und 1 Carat hat 4 Grains. Diesemnach wäre das Edelsteingewicht nicht an allen Orten gleich.

260 §.

Herr von Clausberg theilt am Ende des dritten Theils seiner demonstrativischen Rechenkunst 1102. 1103 S. eine Vergleichung der Europäischen Handels-Gewichte mit, die man um deswillen für zuverlässig halten muß, weil er die Untersuchung mit den Gewichten in natura selbst angestellet hat. E. E. Rath der Stadt Leipzig hatte dem Commercio zum Besten die Gewichte der vornehmsten Europäischen Handelsplätze mit nicht geringer Mühe und Aufwand angeschaft, und Herr **von Clausberg** erhielt die Erlaubniß, eine Untersuchung solcher Gewichte anzustellen, um sie zum Nutzen des Publici bekannt zu machen. Er verglich alle übrige mit dem Leipziger Pfunde von 32 Loth, das Loth zu 16 Pfenniggewichte, und 1 Pfenniggewicht zu 15 Gran, also das Pfund zu 7680 Gran gerechnet. Nach Krusens Contoristen wiegt 1 Pfund Cöllnisch Handelsgewicht 9728 Troysche Aß holl., also $\frac{1}{2}$ Pf. Cöllnisch Handelsgewicht 4864 Aß. Weil nun 1 Mark Cöllnisch

Silber-

Silbergewicht eben so viele Aß holl. Troy wiegt; so ist das Cöllnische Handelsgewicht mit dem Cöllnischen Silbergewicht einerley. Herr von Clausberg giebt das Cöllnische Pfund eben so schwer als das Leipziger Pfund an, nach H. Kruse aber wiegt 1 Leipziger Pfund Handelsgewicht 9716 Aß holl. Tr., also wäre es 12 Aß leichter als das Cöllnische Pfund, welches 9728 Aß wiegt. Im ersten Theil des Contoristen auf der 208 S. rechtfertiget Herr Kruse seine Voraussetzung aus folgenden Gründen.

Das Braunschweiger Pfund soll dem Leipziger Pfunde gleich seyn, und jenes findet Herr Kruse 9716 Aß schwer.

Das Amsterdammer Pfund hat 8125 Gran gewogen, und Herr Kruse findet es 10279 Aß schwer. (in der Tabelle 416 S. stehen 10280 Aß). Setzt man nun an

8125 Gran — 10279 Aß — 7680 Gran

so ist das Facit 9716 Aß.

Das Nürnberger Pfund hat gewogen 8385 Gran, und wird angegeben zu 10608 Aß; thut 7680 Gran = 9716 Aß.

Das Danziger Pfund hat gewogen 7163 Gran, (7063 ist beym Kruse ein Druckfehler) und wird angegeben zu 9062 Aß; thut 7680 Gran = 9716 Aß.

Folgende Vergleichungstafel giebt die darin aufgeführten Gewichte nach von Clausberg in Granen des Leipziger Pfundes, und nach Kruse in Assen des holl. Troygewichts an.

261 §.

Tafel zur Vergleichung der Handelsgewichte.

1 Pf. in	wiegt in Granen	in Aß.
Amsterdam	8125	10280
Antwerpen	7710	9790
Archangel	6705	8512
Aachen	7710	9754
Augsburger groß Gewicht	8088	10220
= = = klein Gewicht	7776	9836
Bologna	5958	7537
Botzen	8241	10426
Brüssel	7710	9790
Breßlau	6667	8434
Braunschweig	7680	9716
Berlin	7697	9750
Bremen	8100	10380
Bautzen	7130	9020
Bourdeaux	8085	10228
Constantinopel	20865	26396
Cracau	6660	8426
Cadix	7560	9592
Cölln am Rhein	7680	9728
Copenhagen	7716	10388
Danzig	7163	9062
Florenz	5581	7273
Frankfurth am Mayn	7683	9720
Frankfurth an der Oder	====	9750
Genua	5208	7140 schw. Gew. 6720 leicht Gew.
Genf	9075	11462 groß Gew. 9552 klein Gew.
Hamburg	7980	10080
Königsberg alt Gewicht	6255	7913
neu Gewicht	7695	9750
London	7434	9439 A. du pois 14158 Königsg.
Lissabon	7552	9552
Livorno	5605	7131

1 Pf.

Lucca	5488	7746
Lion	6885	8840
Lübeck	7950	10059
Leipzig	7680	9716
Lüneburg	8000	10127
Lindau	7555	9558
Malaga	7560	9592
Marseille	6803	8359
München	9225	11671
Memmingen	8422	10655
Magdeburg	7695	9750
Neapolis	6983	6677
Nürnberg	8385	10608
Paris	8065	10188
Petersburg	6723	8512
Prag	8450	10690
Rom	5581	7345
Riga	6878	8701
Regensburg	9225	11671
St. Gallen gr. Gewicht	9615	12164
klein Gewicht	7650	9678
Strasburg	7755	10188 schw. Gew. 9811 leicht Gew.
Schaffhausen	7560	9564
Salzburg	9210	11652
Ulm	7710	9754
Venedig groß Gewicht	7845	9955
klein Gewicht	4959	6300
Verona groß Gewicht	8100	10350
klein Gewicht	5448	6924
Wien	9240	11690
Warschau klein Gewicht	6215	7863
Zürch	8693	10972 schw. Gew. 9753 leicht Gew.
Zittau	7695	9735

Wenn man mehr Zahlen in dieser Tafel prüfet, so bestätiget sich die Voraussetzung nicht durchgängig, daß das Leipziger Pfund, welches von Clausberg gebraucht hat, um 12 Aß leichter als das Cöllnische gewesen sey, und 9716 Aß gewogen habe: denn die Verhältnisse der von Clausbergischen Zahlen treffen mit den Krusischen nicht immer zusammen. Nach von Clausberg ist

das Paris. Pfund : Cölln. Pfund = 8065 : 7680
= 1,0501 : 1,

ferner das Cölln. Pf. : Londner Pf. = 7680 : 7434
= 1,0331 : 1,

dagegen ist nach **Kruse**

Paris. Pfund : Cölln. Pfund = 10188 : 9728
= 1,0473 : 1,

ferner Cölln. Pf. : Avoir du pois = 9728 : 9439
= 1,0306 : 1.

Die Krusischen Zahlen treffen in diesen beyden Beyspielen mit den Eisenschmidtschen und andern Bestimmungen besser zusammen.

Der XVI. Abschnitt.

Die umgekehrte Regel Detri, auch eine kurze Erklärung der zusammen gesetzten Regel Detri.

262 §.

Bey allen bisher vermittelst der Regel Detri aufgelöseten Rechnungsfragen waren die gleichnahmigen Glieder der gehörig geordneten Proportion in einer ähnlichen Verbindung, als Waare und Preis, Capital und Zins, u. s. f. Eine doppelte, ein 3, 4, 5mahl grössere Fragzahl muste auch ein doppeltes, ein 3, 4, 5mahl grösseres Facit geben: hingegen

hingegen muste eine 2, 3, 4 und überhaupt $n$mahl kleinere Fragzahl auch ein eben so vielmahl kleineres Facit geben. Allein es sind nicht allemahl zwo Grössen zwoen andern, auf welche sie sonst eine ähnliche Beziehung haben, in **einerley Ordnung**, sondern zuweilen in **umgekehrter Ordnung** proportional. Wofern nach der Natur der Rechnungsfrage die gesuchte Zahl 2mahl, 3mahl, oder überhaupt $n$mahl **kleiner** seyn muß, wenn die Fragzahl so vielmahl **grösser**, oder umgekehrt jene gesuchte Zahl in eben dem Verhältniß **grösser** seyn muß, in welchem die Fragzahl **kleiner** angenommen wird; so können die drey gegebenen Zahlen mit der gesuchten in der bisher beobachteten Ordnung keine Proportion ausmachen, wie das folgende leichte Beyspiel deutlich machen wird.

Mit einem gewissen Festungsbau können 120 Mann in 6 Monathen fertig werden: wieviel Mann hat man nöthig, um mit eben dem Bau in 2 Monath fertig zu werden?

Wollte man ansetzen:

6 Monath — 120 Mann — 2 Monath?

so wäre die Proportion eigentlich diese:

6 Monath : 2 Monath = 120 Mann : ges. Zahl.

Weil nun das zweyte Glied dreymahl kleiner als das erste ist, so würde auch die gesuchte Zahl dreymahl kleiner als das damit gleichnahmige Glied der Proportion herauskommen; man würde 40 Mann finden, welches offenbar eine falsche Auflösung wäre, weil desto mehr Mann angestellet werden müssen, je kürzer die Zeit seyn soll, worin man zu Stande kommen will. Verwechselt man dagegen die Stellen der Fragzahl und der damit gleichnahmigen Zahl unter einander; setzt man die Fragzahl in die erste, die mit ihr gleichnahmige in die dritte Stelle, so machen die drey gegebenen Zahlen mit der gesuchten in dieser Ordnung eine richtige Proportion, und der Ansatz des vorigen Exempels stehet so:

2 Monath? — 120 Mann — 6 Monath

$$\frac{2)}{1} \qquad \frac{3}{\text{Fac. } 360 \text{ Mann.}} \qquad \frac{2)}{3}$$

Weil die Fragzahl nun der Divisor wird, so giebt die doppelte Fragzahl ein halb so grosses, die 3, 4mahl grössere Fragzahl ein 3, 4mahl kleineres Facit, und umgekehrt die kleinere Fragzahl ein in eben dem Verhältniß grösseres Facit.

Von Rechnungsfragen dieser Art sagt man, sie gehören zur **umgekehrten Regel Detri**; die Umkehrung aber betrift nur die Ordnung des Ansatzes, bey der Rechnung selbst. Bleibt die Regel des 175. §. die Grundregel.

263 §.

Man kann, wenn man will, alle Reductions-Rechnungsfragen auch zur umgekehrten Regel Detri rechnen, nachdem man sich die Sache so, oder anders vorstellet. Einerley Länge, einerley Gewicht, einerley Geldsumme, wird unter einem doppelt so grossen Nahmen durch eine halb so grosse Zahl ausgedrückt, uud umgekehrt unter einem halb so grossen Nahmen durch eine doppelt so grosse Zahl. Demnach kann man sich eine Rechnungsfrage dieser Art:

100 Gulden wieviel sind es Mark?

so vorstellen: 1 Gulden ist in der gegebenen Summe 100mahl enthalten, wievielmahl also 1 Mark? oder: 1 Gulden giebt 100 Stück, wieviel also 1 Mk.?

Je

Je kleiner der neue Nahme ist, unter welchem eine Zahl von eben dem Werth gesucht wird desto grösser, und je grösser der neue Nahme ist, desto kleiner muß die gesuchte Zahl seyn. Deswegen muß man ansetzen:

1 Mk.? — 100 Stück — 1 Gulden
2   2 Mk.

Fac. 200 Stück in Marken.

Eben so die Frage: 13 Brab. Ellen, wieviel sinds Hamb. Ellen? kann man so ansetzen

1 Hamb. Elle? — 13 Stück — 1 Brab. Elle
5   6   6

78 | Fac. $15\frac{3}{5}$ Hamb. Ellen.
5)

Es ist indessen wohl so vortheilhaft, wenn man sich bey Auflösung solcher Maaß- und Gewichts-Vergleichungs-Rechnungsfragen an die vorige im 247 §. gebrauchte Art des Ansatzes nach der **ordentlichen Regel Detri** gewöhnt.

264 §.

Wenn mehr als 3 Zahlen gegeben sind, und man soll eine neue Zahl finden; so gehört zwar das Exempel nicht zur **einfachen Regel Detri**: oft aber läßt es sich in zwey oder mehr Rechnungsfragen zergliedern, wovon jede für sich zur Regel Detri gehört, so daß man die Regel Detri mehr als einmahl anwenden muß, um das Facit zu finden. Von der Art wäre folgende Rechnungsfrage:

Wieviel Zinse zu 6 p. C. pro anno geben 51 Thlr. in 7 Monath?

Eigentlich hat man 5 Zahlen, und man soll eine sechste suchen, denn der Sinn ist: 100 Thlr. geben in 1 Jahr (oder in 12 Monath) 6 Thlr. Zinse, wieviel also 51 Thlr. in 7 Monath?

Man könnte zweymahl so ansetzen

100 Thlr. — 6 Thlr. Zinß in 1 Jahr — 51 Thlr.?

Fac. $\frac{51 \times 6}{100}$ Thlr. Zinß in 1 Jahr.

1 Jahr — $\frac{51 \times 6}{100}$ Thlr. Zinß — 7 Monath?

oder 12 Monath Fac. $\frac{51 \times 7 \times 6}{100 \times 12}$ Thlr. Zinß.

Weil die nöthigen Rechnungen noch nicht angestellet sind, sondern nur durch allgemeine Zeichen ausgedrückt ist, in welcher Ordnung man rechnen könne, um das Facit zu finden; so übersiehet man leicht, daß der zwiefache Ansatz sich auf folgende Art in einen einzigen zusammen ziehen lasse.

$$\begin{array}{lcl} 100 \text{ Thlr.} & — \; 6 \text{ Thlr. Zinß} \; — & 51 \text{ Thlr.?} \\ \text{in } 12 \text{ Monath} & & \text{in } 7 \text{ Monath} \\ \hline 100 \times 12 & & 51 \times 7 \end{array}$$

Die Producte der beyden Zahlen in der ersten und dritten Stelle machen mit der Zahl in der mittlern Stelle drey Zahlen aus, womit man nach der Regel des 175 §. umgehen kann, um das Facit zu finden.

In einem Exempel dieser Art giebt es zwey zusammengehörige Fragzahlen, die man in der dritten Stelle unter einander setzt; ferner zwey andre die mit den Fragzahlen von einerley Art sind, und in der ersten Stelle unter einander gesetzt werden. Die fünfte Zahl, welche man in der Mitte setzt, muß mit der gesuchten von einerley Art seyn. Vergleicht man hiemit die Lehren des 218 und 219 §., so erhellet, daß das Verhältniß der mit der gesuchten gleichartigen Zahl zu dieser gesuchten zusammengesetzt sey aus den Verhältnissen der beyden mit den Frag-

zahlen

zahlen gleichartigen Zahlen zu diesen Fragzahlen. Denn in der Aufgabe liegen eigentlich folgende zwo Proportionen:

100 Thlr. : 51 Thlr. = 6 Thlr. : $\frac{51 \times 6}{100}$ Thlr. jährliche Zinse.

12 Mon. : 7 Mon. = $\frac{51 \times 6}{100}$ Thlr. : ges. 7 monathlichen Zinse.

265 §.

Die Regel, nach welcher man beyde Proportionen in einen Ansatz zusammen ziehet, heißt die **Regel quinque**, und es lassen sich in andern noch mehr zusammen gesetzten Fällen ähnliche Verkürzungen anbringen. Wenn in der Rechnungsfrage **zwey oder mehr Fragzahlen** vorkommen, und in der Frage eben so viele Proportionen liegen, die man im Ansatz in eine zusammen ziehet, so nennt man das überhaupt die **zusammengesetzte Regel Detri**. Enthält aber die Aufgabe nur eine Fragzahl und dabey mehr Verhältnisse, so daß das Verhältniß der Fragzahl zur gesuchten aus jenen Verhältnissen zusammen gesetzt ist; so lassen sich ebenfalls die mehrern in der Aufgabe enthaltenen Proportionen unter dem Nahmen der **Regel multiplex**, oder **Kettenregel** in einen einzigen Ansatz vortheilhaft zusammenziehen. Eine Probe davon giebt folgende Rechnungsfrage:

Wenn 5 Brabander Ellen 6 Danziger Ellen machen, und 7 Danziger Ellen 8 fl. kosten; wieviel kosten alsdenn 17 Brabander Ellen?

Die Fragzahl: 15 Brab. Ellen, muß zuförderst auf einen andern Nahmen von Danziger Ellen gebracht werden durch den Ansatz

5 Brab. Ell. — 6 Danz. Ell. — 17 Brab. Ell.?

Fac. $\frac{6 \times 17}{5}$ Danz. Ellen.

Alsdenn kann man weiter setzen

7 Danz. Ellen — 8 fl. — $\frac{6 \times 17}{5}$ Danz. Ellen?

Fac. $\frac{8 \times 6 \times 17}{5 \times 7}$ fl.

Das Facit im ersten Ansatz wird die Fragzahl im zweyten Ansatz, und wenn man das Facit nicht in fl. sondern in Thalern zu $1\frac{1}{2}$ fl. verlangte, so käme der dritte Ansatz hinzu: worin

3 fl. — 2 Thlr. — $\frac{8 \times 6 \times 17}{5 \times 7}$ fl.?

Fac. $\frac{3 \times 8 \times 6 \times 17}{5 \times 7 \times 3}$ Thlr.

Eben das Facit wird gefunden, wenn man folgende Regeln beobachtet.

1.) Man mache zwey Columnen neben einander, setze den Nahmen der gesuchten Zahl mit dem Fragzeichen voran oben in der linken Columne, und ihm gegen über in der rechten Columne die Fragzahl.

2.) Wiederum linker Hand setze man von den gegebenen Zahlen diejenige, welche mit der Fragzahl von einerley Art ist, so daß sie mit ihr unter einerley Nahmen ausgedrückt werden kann, wenn sie etwa nicht eben den Nahmen schon hat, und rechter Hand gegen über diejenige Zahl, welche in der Aufgabe damit verglichen oder sonst damit verbunden ist. Was mit eben dieser zur Rechten geschriebenen Zahl von einerley Art ist, setze man aufs neue zur Linken, und gegen über zur Rechten die in der Aufgabe damit verglichene oder sonst verbundene Zahl. Solchergestalt fahre man fort, bis zuletzt zur Rechten eine Zahl kommt, die mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist.

3.) Hiernächst multiplicire man alle Zahlen einer jeden Columne in einander, und dividire das Product aller Zahlen in der rechten Columne durch das Product aller Zahlen in der Linken, so giebt der Quotient das gesuchte Facit.

Das

Das vorhin gegebene Exempel kommt nach diesen Regeln so zu stehen.

	Wieviel Tahler?	— 17 Brab. Ellen	
	wenn 5 Brab. Ell.	— 6 Danz. Ellen	(3
	7 Danz. Ell.	— 8 fl.	
3)	3 fl.	— 2 Thlr.	
	35	102	
	3	16	
	105	612	
		102	
	105)	1632	Fac. $15\frac{19}{35}$ Thlr.

Zweyerley Rechnungsvortheile sind dabey in acht zu nehmen. Einmahl wenn in der einen Columne ein Bruch oder eine gemischte Zahl vorkommt; so schaffe man den Bruch oder die gemischte Zahl dadurch weg, daß man mit dem dazu gehörigen Nenner multiplicirt, und eben diesen Nenner zugleich der andern Columne als Factor zur Seite schreibt. Nachdem so alle Brüche sind weggeschaft worden, sehe man nach, ob nicht unter den Zahlen in der einen Columne solche vorkommen, die mit den in der andern Columne befindlichen Zahlen ein gemeines Maaß haben. Diese Zahlen hebe man mit den gemeinen Maassen gegen einander auf, schreibe die Quotienten zur Seite, und brauche sie statt der dividirten Zahlen als Factoren bey der Multiplication aller zu einer jeden Columne gehörigen Zahlen in einander. Weil übrigens bey solchen Exempeln, die zur **Regel** quinque oder noch mehr zusammen gesetzten Regel Detri gehören, zwey ganz ähnliche Columnen im Ansatz kommen, und das Verhältniß der

Zahl in der mittlern Stelle zur gesuchten aus den Verhältnissen der Zahlen in jenen Columnen eben so zusammen gesetzt ist; so lassen sich die erwähnten Rechnungsvortheile dabey ebenfalls anbringen. Mehr hieher gehörige practische Anweisungen mit allerley Exempeln und umständlichen Anwendungen auf die Münz= und Wechsel=Rechnung findet man in meines Bruders Franz Christian Lorenz Karstens Rechenkunst 2te Abtheilung im achten und neunten Abschnitt.

Der
Geometrie erster Theil.
Die ebene Geometrie.

Der I. Abschnitt.
Von den ersten Grundwahrheiten der Geometrie, und insbesondere von graden Linien und Winkeln.

1 §.

Die Eigenschaft der Grösse kommt den körperlichen Dingen im eigentlichen Verstande zu, insofern diese einen gewissen Raum einnehmen. Ob nemlich ein Körper grösser oder kleiner, als der andre sey, beurtheilen wir daher, daß der eine bald mehr, bald weniger Raum, als der andre einnimmt, oder wie man auch zu reden gewohnt ist, der eine bald mehr, bald weniger ausgedehnt ist, als der andre. Von diesem Raum aber, den ein Körper ausfüllt, haben wir schwerlich einen andern, als blos sinnlichen Begriff: wenigstens genügt es hier, wenn man sich allein an den sinnlichen Begriff hält. Wäre ein gewisser Körper, z. E. ein Würfel, in zerschmolzenes Wachs, oder etwas dergleichen, ganz eingetaucht: so würde das Wachs beym Erkälten sich rund um an den Körper anhängen. Man setze, der Körper könnte, nachdem das Wachs erkältet, aus demselben herausgebracht werden, ohne daß die Rinde, so ihn allenthalben umgiebt, zerbrochen würde: so würde innerhalb des Wachses eine Höhlung bleiben, mit dem herausgeschaften Würfel von einerley Gestalt und Grösse. Und diese Höhlung ist der Raum, den der Würfel einnahm, da er noch im Wachs verschlossen war. Eben so einen Raum nimmt der Würfel allenthalben ein, wo man ihn auch hinbringt, und die Grösse und Gestalt dieses Raums ist mit der Grösse und Gestalt des Würfels allemahl einerley. Man kann sich leicht auf ähnliche Art eine Vorstellung von dem Raum machen, den jeder andre Körper ausfüllt.

2 §.

Die Grösse, welche eigentlich den körperlichen Dingen allein eigen ist, nennt man eine **ausgedehnte Grösse**, weil der Körper desto grösser oder kleiner ist, je mehr oder weniger er ausgedehnt ist. Die Grösse seiner Ausdehnung ist mit der Grösse des Raums, den der Körper ausfüllt, allemahl einerley: (1 §.) deswegen heist auch wohl der Raum selbst eine ausgedehnte Grösse.

3 §.

Die **Geometrie** ist eine Wissenschaft von der Art und Weise, wie man eine ausgedehnte Grösse mit der andern vergleichen, und aus gegebenen Grössen von dieser Art, andre von eben der Art finden kann. Sie ist eine Wissenschaft von einem ungemein grossen Umfange, und der Nahme drückt den Vorwurf derselben nicht in seiner völligen Allgemeinheit aus. Das griechische Wort γῆ bedeutet nicht allein die ganze Erde, sondern auch oft eine Landschaft, ein Stück Feld, und der Name μέτρον bedeutet ein Maaß. Also würde man den griechischen Nahmen Geo-

Geometrie füglich durch das deutsche Wort: **Feldmeßkunst** übersetzen können. In der That stehen auch viele noch in den Gedanken, daß Geometrie und Feldmeßkunst einerley Wissenschaft sey, und vor Zeiten, bevor die Wissenschaft zu ihrer Vollkommenheit gebracht worden, war es auch wirklich so: die Regeln, nach welchen sich ein Feld aufmessen läst, machten wahrscheinlicher Weise die erste Geometrie aus. Die Nothwendigkeit hat die Menschen dahin gebracht, auf solche Regeln zu denken, und man schreibt ihre Erfindung gemeiniglich den alten Egyptern zu. Aber die Griechen haben schon lange vor Christi Geburt dieser Wissenschaft eine ganz andre Gestalt gegeben, und ihre Lehren so allgemein gemacht, daß man sie nunmehro allenthalben anwenden kann, wo sich eine ausgedehnte Grösse mit einer andern vergleichen läßt. So viel man weis, ist der unter den Geometern so berühmte **Euclides** der erste, welcher die zu seiner Zeit bekannt gewesenen geometrischen Lehren gesammlet, und einen Lehrbegriff der Geometrie verfasset hat, der noch bis auf den heutigen Tag das Muster aller übrigen Lehrbücher dieser Wissenschaft ist. **Euclides** lebte etwa 300 Jahre vor Christi Geburt, und sein Lehrbuch ist unter dem Titel: Euclidis Elementa, bekannt. Man hat davon viele theils ältere theils neuere Ausgaben, die man aus Herrn Prof. Scheibels **Anleitung zur mathematischen Bücherkenntniß, Breßlau** 1769 – 1775 kennen lernen kann. Die beste unter den neuern Handausgaben hat Herr **Georg Friedr. Bärmann**, ehemaliger Prof. der Mathematik zu Wittenberg veranstaltet. Die erste Ausgabe ist von 1743, die zweyte von 1769, beyde unter dem Titel:

Elemen-

Elementorum Euclidis Libri XV ad Graeci Contextus fidem recensiti et ad Vsum Tironum accommodati. Lipsiae Sumtu Io. Frider. Gleditschii.

4 §.

Wenn man sich von dem leeren Raum, den ein Körper ausfüllte, da er in demselben befindlich war, etwa eine solche Vorstellung macht, wie im 1 §: so siehet man leicht, daß dieser leere Raum zwar eigentlich kein Körper heissen könne, ob er gleich einige Eigenschaften des Körpers, der ihn ausfüllte, behält, nemlich Gestalt und Grösse. Die übrigen Eigenschaften des Körpers kommen in der Geometrie gar nicht in Betrachtung, und das ist die Ursache, weswegen dieser leere Raum ein **geometrischer Körper** heißt. Es ist hier gleich viel, ob man sich diesen Raum mit irgend einem Körper angefüllt vorstellt, oder nicht.

5 §.

Jeder Körper hat gewisse Gränzen, die ihn von allen Seiten umgeben, und diese äusserste Gränze desselben, die ihn von allen Seiten umgiebt, heist seine **Oberfläche**. Man kann sich auch einzelne Theile einer solchen Oberfläche allein vorstellen, dergleichen z. E. die sechs Seitenflächen eines Würfels sind. Dann aber hat eine solche Fläche wiederum ihre Gränzen, und diese Gränzen der Oberflächen heissen **geometrische Linien**. Auch hier kann man sich einzelne Theile von der Gränze vorstellen, die eine solche Fläche von allen Seiten umgiebt, die ebenfalls Linien sind: jede Seitenfläche eines Würfels ist von vier solchen Linien eingeschlossen.

Auch

6 §.

Auch eine jede Linie hat ihre Gränzen, wo sie anfängt und aufhört, und die Gränzen einer Linie heissen **geometrische Puncte**. Man kann sich jede Linie, wo man will, getheilt vorstellen, und die Gränze, wo beyde Stücke zusammen hängen, wird ein Punct seyn. Also kann man sich in einer Linie unzählig viele Puncte vorstellen, nur muß man sich hier die Vorstellung nicht machen, als ob eine solche Linie etwa aus einer Menge aneinander gelegter Puncte bestehe. Wenn eine Linie, die sich von A nach B erstreckt, bey C in zwey Stücke AC und CB getheilt wird; so fängt das Stück AC in A an, und endiget sich in C: aber C ist nicht allein der Endpunkt von AC, sondern zugleich der Anfangspunkt von CB. Die beyden Stücke AC und CB hängen in dem Punkt C zusammen. 1 Fig.

7 §.

Wenn die Theile einer Grösse so mit einander zusammenhängen, daß da, wo der eine aufhört, zugleich der andre anfängt, und zwischen beyden nichts vorhanden ist, das zu dieser Grösse nicht gehört: so heist sie eine **stetige Grösse**, (quantitas continua). So sind alle ausgedehnte Grössen beschaffen, die man in der Geometrie betrachtet, wie das vorige Exempel von der Linie zeiget. Die in der Welt wirklich vorhandenen Körper sind nicht von der Beschaffenheit, welches bey einigen deutlich in die Augen fällt. In dem Innern eines Schwammes z. E. befinden sich unzählig viele Löcher, die mit der Materie des Schwammes nicht ausgefüllt sind, und zwischen einem Paar nach einander folgenden Theilchen befindet

sich

sich häufig Luft, Wasser, und dergleichen fremde Materie, die zu dem Schwamm selbst nicht gehört.

8 §.

Man theilt die Linien in verschiedene Classen, und unterscheidet vornemlich **grade** und **krumme Linien** von einander. Eine **grade Linie** erstreckt sich von ihrem Anfangs- bis zum Endpunkt in **einerley Richtung** fort, alle ihre Theile haben einerley Lage, und jeder noch so kleine Theil der graden Linie ist selbst eine grade Linie. Eine **krumme Linie** hat gar keine gradlinichte Theile: wenn zwischen zweenen Punkten in einer krummen Linie auch eine grade Linie liegt; so ist diese von dem zwischen eben diesen Punkten liegenden Stück der krummen Linie allemahl unterschieden, die beyden Punkte mögen so nahe an einander liegen, als man will.

9 §.

Man nimmt in der Geometrie die Voraussetzung an, daß es allemahl möglich sey, **von einem gegebenen Punkt** *A* **bis zum andern** *C* **eine grade**
1 Fig. **Linie zu ziehen, und diese grade Linie** *AC* **vorwärts nach** *B*, **oder auch rückwärts nach** *D*, **so weit, als man will, zu verlängern.** Eigentlich lassen sich keine blos geometrische Linien sinnlich darstellen, so wenig als man geometrische Punkte sinnlich vorstellen kann. Allein ein Tüpfelchen, das man mit Dinte oder etwas dergleichen, vermittelst einer spitzigen Feder auf dem Papier macht, ist eine sinnliche Abbildung des Punkts; und ein Strich, den man mit einer zarten Feder ziehet, ist eine sinnliche Abbildung einer Linie. Man siehet das Tüpfelchen als etwas an, das gar keine Ausdehnung hat, und bey dem Strich betrachtet man blos die Ausdehnung

nach

nach der Länge. Deswegen kann man solche Bilder der Puncte und Linien so ansehen, als wenn es wirklich geometrische Puncte und Linien wären. Bewegte sich ein wahrer geometrischer Punct von A nach C; so würde der Weg, durch welchen er gegangen wäre, eine Linie seyn: und wenn der Punct während seiner Bewegung seine Richtung nie änderte; so wäre sein Weg eine grade Linie. Deswegen kann man sich die Vorstellung machen, daß eine Linie entstehe, indem ein Punct von einem Ort zum andern fortgeht: und wenn dieser Punct, indem er fortgeht, seine Richtung nicht ändert; so wird sein Weg eine grade Linie seyn.

10 §.

Wenn die Oberfläche eines geometrischen Körpers so beschaffen ist, daß jede grade Linie, die man zwischen zweenen auf dieser Oberfläche angenommenen Punkten ziehen kann, ganz in diese Oberfläche fällt; so heißt sie eine **ebene Fläche**, auch schlechthin eine **Ebene**. Eine **krumme Fläche** aber ist eine solche, worauf sich kein Theil, der eben wäre; angeben läßt. Ein zarter nicht sehr langer Faden wird grade, wenn man ihn ausspannt. Wenn man auf einem ebenen Tische zwischen zweenen angenommenen Puncten einen solchen Faden spannt: so wird er sich allenthalben an dem Tische anschliessen, wo auch die Puncte auf dem Tische angenommen werden. Hierauf gründet sich die Art, wie man vermittelst des **Lineals** auf einer ebenen Fläche von einem Punct zum andern eine grade Linie zieht. Weil das Lineal selbst eben, und an seiner Schärfe grade ist; so wird die Schärfe an der Ebene allenthalben anschliessen, wenn man sie an zweenen Puncten auf dieser Ebene anlegt, und nun kann man eine spitzige Feder, oder etwas dergleichen, an der Schärfe des Lineals von einem Puncte zum andern fortführen.

11 §.

Ueberhaupt wird in der Geometrie anfangs zum Grunde gesetzt, daß alle Linien und Puncte, die in Betrachtung kommen werden, auf einer und eben derselben Ebene liegen: und diejenigen Lehren von den ausgedehnten Grössen, welche sich in dieser Voraussetzung erweisen lassen, machen den ersten Haupttheil der Geometrie aus, welcher den Nahmen der **ebenen Geometrie** (Geometria plana) führet.

12 §.

1 Fig. **Wenn man durch zwey Puncte *A* und *C* eine grade Linie *DB* gelegt hat: so ist dadurch die Lage dieser Linie völlig bestimmt,** und man kann durch eben die Puncte A und C keine andre grade Linie legen, die von der vorigen der Lage nach unterschieden wäre, obgleich sie länger oder kürzer seyn könnte. Wenn man durch eben die Puncte A und C noch andre grade Linien ziehet; so fallen sie insgesammt mit der ersten zusammen.

13 §.

Man kann von einem und eben demselben Punct
2 Fig. A ein Paar unterschiedene grade Linien AB und AC fortziehen, so daß beyde in dem gemeinschaftlichen Anfangspunct A zusammenstossen: alsdenn bleibt der zwischen beyden liegende Flächenraum gegen die Endpuncte B und C zu zwar noch unbegränzt; doch ist derselbe da, wo beyde grade Linien ihren gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben, in bestimmte Gränzen eingeschlossen. Dieser zwischen zween nach verschiedenen Richtungen AB und AC aus einerley Anfangs-

punct

punct A fortgezogenen graden Linien liegende gegen die Endpuncte derselben noch unbegränzte Flächenraum heißt ein gradlinichter ebener **Winkel**, oder schlecht hin ein **Winkel**, weil in der ebenen Geometrie von keinen andern Winkeln die Rede seyn wird. Der Punct A, worin beyde Linien zusammenstossen, heißt die **Spitze**, und die beyden graden Linien AB und AC die **Seiten** oder **Schenkel** des Winkels.

14 §.

Verlängert man die beyden Schenkel AB und AC 3 Fig. eines Winkels durch die Spitze A nach der entgegengesetzten Seite, bis E und D: so erhält man zwo grade Linien, BE und CD, die sich bey A durchschneiden, und es erhellet leicht, **daß zwo grade Linien sich nicht in mehrern als in dem einen Punct** *A* **schneiden können.** Wenn beyde grade Linien ausser A noch einen andern Punct F gemein hätten; so würde die eine mit der andern völlig zusammen fallen müssen, (12 §.) und es wären nicht zwo der Lage nach unterschiedene Linien. Uebrigens theilt jede grade Linie, wie CD, die Ebene, worauf sie verzeichnet ist, in zwey Stücke, die zu beyden Seiten dieser Linie CD liegen: **und wenn ein Punct** *B* **auf der einen, ein andrer Punct** *E* **aber auf der andern Seite der Linie** *CD* **liegt; so muß die grade Linie** *BE* **die vorige** *CD* **gewiß irgendwo schneiden.**

15 §.

Allemahl, wenn eine grade Linie CD die andre BE schneidet, entstehen um den Durchschnittspunkt A herum vier unterschiedene Winkel, die man mit Buchstaben so bezeichnen muß, daß einer mit dem andern nicht verwechselt werde. Dies erhält man

am besten dadurch, wenn man jeden Winkel mit dreyen Buchstaben bezeichnet, davon einer an der Spitze, und zweene an den Schenkeln gesetzt werden. Im Schreiben aber, und in der Aussprache, setzt man allemahl denjenigen Buchstaben in der Mitte, welcher an der Spitze stehet. Wenn nun gleich noch weit mehr als vier Winkel in eben der Spitze A zusammenstossen; so wird doch keiner mit den übrigen verwechselt werden. Wenn z. E. der Winkel, welcher in der Zeichnung rechter Hand liegt, verstanden werden soll; so nennt man ihn BAC, oder auch CAB: derjenige, welcher ihm linker Hand grade gegen über liegt, heist DAE, oder EAD u. s. f. Wenn eben die
2 Fig. Spitze A nur zu einem Winkel gehöret, wie in der zwoten Figur; so ist es hinlänglich den Winkel mit dem einzigen Buchstaben A, der an seiner Spitze stehet, anzudeuten, weil nun daher keine Verwirrung zu besorgen ist. Oft ist es auch bequem, einen klei-
3 Fig. nen Buchstaben, wie x, y u. s. f. in der Oefnung zwischen den Schenkeln zu setzen, und dadurch die Winkel zu unterscheiden.

16 §.

Wenn eine ausgedehnte Grösse so auf eine andre gelegt werden kann, daß die Gränzen der einen mit den Gränzen der andern zusammen fallen: so sagt man, sie **passen auf einander**. Sind es geometrische Körper (oder wenigstens nicht blos Linien, Winkel, und ebene Flächen), und man kann den einen in den andern so hineinschieben, daß beyde völlig zwischen einerley Gränzen enthalten sind, wie wenn man im 1 §. den dort als ein Beyspiel erwähnten Würfel wiederum in die Hölung innerhalb des Wachses brächte: so sagt man besser, daß sie **in einander passen**.

Es

Es ist am leichtesten, diesen Gedanken auf grade Linien und Winkel anzuwenden. Die Gränzen einer graden Linie sind ihre beyden Endpuncte: kann man demnach die grade Linie CD auf AB so auflegen, daß wenn der Punct C auf A, und CD auf AB liegt, auch D in B fällt; so paßt CD auf AB. Die Spitze eines Winkels nebst seinen beyden Schenkeln machen seine Gränzen aus: kann man demnach den Winkel EDF in den Winkel BAC so hineinschieben, daß wenn die Spitze D auf der Spitze A, und der eine Schenkel DF auf AC liegt, auch der andre Schenkel DE auf AB fällt; so paßt der Winkel EDF auf dem Winkel BAC. 4Fig. 5Fig.

In Ansehung der Winkel ist folgendes aber noch anzumerken. Es kann der Winkel EDF auf dem Winkel BAC passen, obgleich weder DE auf AB, noch DF auf AC paßt. Es hängt nemlich die Grösse des Winkels gar nicht von der Grösse seiner Schenkel ab, sondern allein von der Grösse der Oefnung zwischen den Schenkeln. Wenn man sich bey A etwa ein Gewinde vorstellt, um welches sich der Schenkel AB umdrehen läßt; so wächst der Winkel BAC, wenn man BA von AC weg gegen AG zu drehet, und der Winkel BAC wird kleiner, wenn man BA von AG weg gegen AC zu drehet. Aber wenn gleich AB länger oder kürzer würde, ohne sich um A zu drehen; so würde die Grösse des Winkels BAC ungeändert bleiben.

17 §.

Ausgedehnte Grössen, die auf und in einander passen, sind gleich groß. Grade Linien also und gradlinichte Winkel, die auf einander passen, sind von gleicher Grösse.

18 §.

Ueberhaupt zu sagen, läßt sich dieser Satz nicht umkehren: es ist falsch, daß alle ausgedehnte Grössen, die gleich groß sind, auch auf einander passen müssen. Wenn aber blos von graden Linien und Winkeln die Rede ist; so ist der Satz auch umgekehrt allgemein wahr, welches folgende Sätze beweisen:

4Fig. Wenn eine grade Linie CE auf eine ander AB nicht paßt; so ist CE entweder kleiner oder grösser, als AB. Legt man nemlich C auf A, und CE auf AB, so deckt CE entweder nur einen Theil von AB, da dann CE $<$ AB ist, (12 §. Rechenk.) oder E fällt über B hinaus, und so deckt ein Theil von CE die ganze Linie AB, daß also nun CE $>$ AB ist, (12 §. Rechenk.)

Wenn ein Winkel EDF in einen andern GAC nicht paßt; so ist wiederum EDF entweder kleiner oder grösser, als GAC. Legt man D auf A, und DF auf AC; so fällt DE entweder zwischen AC und AG,
5.6F. und so ist EDF $<$ GAC: oder DE fällt über AG hinaus, in AH, wie in der 6 Figur, da dann EDF $>$ GAC ist.

Gleich grosse grade Linien und gleich grosse gradlinichte Winkel müssen also nothwendig auf einander passen; denn paßte die eine Linie nicht auf der andern, und der eine Winkel nicht auf dem andern: so wäre die eine Linie entweder kleiner, oder grösser, und der eine Winkel entweder kleiner, oder grösser, als der andre, welches nicht seyn kann, da beyde gleich groß seyn sollen.

19 §.

7Fig. Wenn man einen Schenkel AD eines Winkels ADC durch seine Spitze D nach B verlängert, so kommen zweene Winkel, CDA und CDB, heraus, die

die eine gemeinschaftliche Spitze D und einen gemeinschaftlichen Schenkel DC haben, deren übrige Schenkel DA und DB aber in grader Linie liegen. Solche Winkel heissen **Neben-Winkel**, (contigui, deinceps positi,) und jeder Winkel hat einen solchen Nebenwinkel. Ein Winkel ADE, der eben so groß, als sein Nebenwinkel ist, heißt ein **rechter Winkel**, (angulus rectus) und man braucht nun die Redensart: die grade Linie DE stehe auf AB **grade**, oder **senkrecht**, oder **lothrecht**, (recta DE alteri AB est perpendicularis, normalis). Wenn beyde Nebenwinkel CDA, CDB, ungleich sind; so sagt man, daß CD auf AB **schief** stehe, und die Winkel ADC und BDC heissen **schiefe Winkel**. Man ist gewohnt, statt des Worts **rechter Winkel**, der Kürze wegen, den Buchstaben R zu brauchen, und wenn man z. E. setzt ADE = R: so heißt dies so viel, es sey ADE ein rechter Winkel.

20 §.

Alle rechte Winkel sind gleich groß.

Beweis. Es sey ADE = R, und ADC = R, aber ADC > ADE. Man verlängere AD nach B, so muß vermöge der Natur des rechten Winkels ADE = BDE seyn, und aus eben dem Grunde ADC = BDC. Weil aber ADC > ADE angenommen ist, so müste BDC > BDE seyn, welches unmöglich ist, denn ein Theil kann nicht grösser als das ganze seyn. 7 Fig.

Aus einerley Punct D einer graden Linie kann man also nicht zwey verschiedene grade Linien DE, DC, so ziehen, daß beyde zugleich auf AB senkrecht sind.

21 §.

8 Fig. Wenn in der 8 Fig. EFG und EFH ein Paar gleich grosse Nebenwinkel, mithin rechte Winkel sind, und man nimmt an, daß die Linie EF sich um F gegen FG zu drehe; so wächst der Winkel EFH: wenn dies so lange fortgehet, bis EF in GF fällt; so ist nun der Winkel EFH um das Stück EFG angewachsen, folglich der Winkel GFH = EFG + EFH = R + R = 2 R. Das will so viel sagen: ein **Winkel, dessen Schenkel in grader Linie liegen, ist doppelt so groß, als ein rechter Winkel; oder ein rechter Winkel ist die Hälfte eines solchen Winkels, dessen Schenkel in grader Linie liegen.**

Jede bestimmte Lage zwoer grader Linien gegen einander, die von einem gemeinschaftlichen Punct aus sich nach verschiedenen Richtungen erstrecken, macht das aus, was in der Geometrie ein **gradlinichter Winkel** heißt: (13 §.) und dahin gehört ohne Zweifel der besondre Fall, wenn beyde Linien von dem gemeinschaftlichen Punct aus nach grade entgegengesetzten Richtungen fortlaufen. Wenn es also gleich scheinen mögte, daß GFH kein Winkel heissen könne; so ist doch allerdings der geometrische Begrif vom Winkel so allgemein, daß die erwähnte Lage zweyer grader Linien gegen einander als ein besondrer Fall darunter enthalten ist.

Wenn sich die Linie FE noch weiter herunter drehet, und nun unter FG in Fe fällt; so enthält der erhabene **Winkel** HFe nicht allein HFG; sondern überdem noch GFe, und ist folglich grösser, als zweene rechte Winkel.

22 §.

22 §.

Zweene Nebenwinkel auf einer graden Linie, wie *ADC* und *CDB*, oder auch mehrere so an einander liegende Winkel, daß alle eine gemeinschaftliche Spitze, und jede zweene an einander gränzende einen Schenkel gemein haben, wenn ihre äussern Schenkel in grader Linie liegen, betragen zusammen so viel, als zweene rechte Winkel. 7 Fig.

Beweis. Weil ADB = 2 R (21 §.), und ADC + CDB = ADB, (9 §. Rechenk.) so ist ADC + CDB = 2 R.

Auch umgekehrt: wenn mehrere auf die eben beschriebene Art an einander gränzende Winkel zusammen zwey rechte Winkel ausmachen, so liegen die äussern Schenkel in grader Linie. Denn widrigenfalls müste ihre Summe mehr oder weniger als zwey rechte Winkel betragen.

23 §.

Wenn von einem Punct *A* nach allen Seiten so viel grade Linien *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, *AF*, als man will, in einer Ebene fortlaufen; so machen alle um den Punct *A* herumliegende Winkel die Summe von vier rechten Winkeln aus. 9 Fig.

Beweis. Man kann eine dieser Linien, welche man will, z. E. FA, durch A nach G verlängern: so fallen diese Winkel um A herum zum Theil auf der einen, zum Theil auf der andern Seite von FG. Aber die Summe derer, die auf jeder Seite liegen, beträgt zweene rechte Winkel: (22 §.) also machen sie alle die Summe von vier rechten Winkeln aus.

24 §.

Alle Winkel lassen sich nun in drey Classen bringen: Denn jeder Winkel ist entweder ein rechter, oder ein schiefer Winkel, und der schiefe ist entweder kleiner oder grösser als ein rechter Winkel. Solche Winkel, die kleiner sind, als rechte Winkel, heissen **spitze Winkel** (acuti), und Winkel, die grösser sind, als rechte Winkel, werden **stumpfe Winkel** (obtusi) genannt. Die stumpfen Winkel kann man wieder eintheilen in solche, die kleiner, eben so groß, oder grösser als zweene rechte Winkel sind, und die erste Art könnte man **hohle**, (concavos) die letzte Art **erhabene Winkel** (convexos) nennen.

7 Fig. Von zweenen ungleichen Nebenwinkeln CDB, und CDA auf einer graden Linie AB ist also allemahl der eine spitz, und der andre stumpf. Denn es wird einer z. E. CDB $< \frac{1}{2}$ ADB, und der andre CDA $> \frac{1}{2}$ ADB seyn. Also ist CDB $<$ R, und CDA $>$ R (21 §.) folglich CDB ein spitzer, CDA aber ein stumpfer Winkel.

25 §.

7 Fig. Ein Winkel CDA, der mit einem andern CDB zusammen genommen zweene rechte Winkel ausmacht, heist des Winkels CDB **Ergänzung** oder **Complement zu zween rechten Winkeln.** Man findet dieses Complement leicht für jeden gegebenen Winkel CDB, der kleiner, als zweene rechte Winkel ist, wenn man den einen Schenkel BD durch die Spitze D bis A verlängert: denn so erhält man den Nebenwinkel CDA, welcher die gesuchte Ergänzung ist. (22 §.)

3 Fig. Jedem hohlen Winkel BAC (oder x) stehet ein erhabener Winkel auf der andern Seite entgegen, der

mit

mit ihm 4 rechte Winkel ausmacht. (23 §.) Man kann also den erhabenen Winkel des hohlen Winkels Ergänzung oder Complement zu 4 rechten Winkeln nennen, und umgekehrt.

Ein Winkel EDC, der mit einem spitzen Winkel CDB einen rechten Winkel ausmacht, kann auf ähnliche Art des Winkels CDB Ergänzung oder Complement zum rechten Winkel heissen. 7 Fig.

26 §.

Wenn eine grade Linie *BE* eine andre *CD* in *A* schneidet: so sind die an der Spitze *A* entgegengesetzten Winkel *BAC* und *DAE*, oder die Scheitelwinkel, wie man sie gewöhnlich nennt, gleich groß. 3 Fig.

Beweis. Weil DAB + BAC = 2R und DAB + DAE = 2R: (22 §.) so ist DAB + BAC = DAB + DAE, folglich BAC = DAE (28 §. Rech.)

Wenn also einer von den vier Winkeln um A ein rechter Winkel ist: so ist jeder der übrigen auch ein rechter Winkel, und überhaupt bestimmt die Grösse des einen allemahl die Grösse der drey übrigen. Denn es ist BAC = DAE und BAD = 2R − BAC = EAC.

Umgekehrt: Wenn *CD* eine grade Linie, und ein Winkel *CAB* auf der einen Seite so groß ist, als ein andrer Winkel *DAE* an der andern Seite, jenem an der gemeinschaftlichen Spitze grade entgegen gesetzt; so liegen auch die Schenkel *AB* und *AE* in grader Linie.

Denn es ist DAB + BAC = 2R, (21 §.) und der Voraussetzung gemäß DAE = BAC; also auch DAB + DAE = 2R, und AE liegt mit AB in grader Linie. (22 §.)

Der II. Abschnitt.

Vom Umfange der ebenen Figuren überhaupt, und insbesondere von der Kreislinie.

27 §.

10 F. Wenn man zwischen einem Puncte B, in dem einem Schenkel AB, und einem andern Punct C in dem andern Schenkel AC des gradlinichten Winkels BAC, eine grade Linie BC ziehet; so erhält man eine ebene Fläche, die von allen Seiten durch drey grade Linien AB, BC, AC, begränzt ist. Auf ähnliche Art läst sich eine Ebene durch so viel Linien,
11 F. als man will, einschliessen, wie AB CD EF, und es ist nicht nothwendig, daß die Linie AB, BC, u. s. f. grade sind; es können einige derselben krumme, es können auch alle diese Linien krumme Linien seyn. Eine ebene Fläche die von allen Seiten begränzt ist, heist eine **ebene Figur**, oder hier schlechthin eine **Figur**, weil in der ebenen Geometrie nie von andern Figuren die Rede ist: die Linien, welche die Figur umschliessen, heissen ihre **Seitenlinien**, und alle Seitenlinien zusammen machen den **Umfang** der Figur aus.

28 §.

Eine einzige grade Linie allein, oder auch zwo grade Linien allein, können keine Figur umschliessen: es kann aber gar wohl eine einzige krumme Linie den Umfang einer Figur ausmachen. Sind alle Seitenlinien einer Figur grade Linien; so heist sie eine **gradlinichte Figur**: und wenn eine

oder

oder mehr krumme Linien ihren Umfang ausmachen; so nennt man sie eine **krummlinichte Figur. Vermischtlinichte Figuren** sind diejenigen, deren Umfang zum Theil aus graden und zum Theil aus krummen Linien bestehet.

Der ganze Umfang einer gradlinichten Figur ist selbst eine Linie, die aber weder in die Classe der graden noch krummen Linien gehört. Man kann sie eine **gebrochene Linie** nennen, und hieher gehören überhaupt alle Linien, die aus graden Stücken, unter welchen Winkeln man will, zusammengesetzt sind.

Eine ähnliche Bewandniß hat es mit dem Umfange einer vermischtlinichten Figur. Sowohl dieser Umfang, als auch jede andre Linie, die aus graden und krummen Stücken zusammengesetzt ist, kann eine **vermischte Linie** heissen.

29 §.

Die Anzahl der Seiten einer Figur ist mit der Anzahl ihrer Winkel allemahl einerley. Wenn nemlich eine grade Linie AB mit einer krummen in einem Puncte B, oder ein Paar krumme Linie EF und ED, in einem Puncte E zusammen stossen: so heissen auch ABC, und DEF ebene **Winkel**. Nun schließt jede Seitenlinie AB mit der nächstfolgenden BC einen Winkel ein, und die letzte AF einen mit der nächstletzten FE, überdem aber noch einen andern mit der ersten AB: woraus sich dann ergiebt, daß jede Figur so viele Winkel als Seitenlinien habe. Diese Winkel der Figur können zum Theil hohle, zum Theil erhabene Winkel seyn; auch können alle Winkel der Figur hohle Winkel seyn, wenn man nemlich diejenigen Winkel als zur Figur gehörige Winkel ansiehet, die dem innern der Figur zugekehret sind. **Eine solche** 11 F.

Figur

Figur aber ist unmöglich, die keine andre als erhabene dem innern der Figur zugekehrte Winkel hätte.

30 §.

Deswegen theilt man alle Figuren nach der Anzahl ihrer Winkel, oder Seitenlinien, in Classen ein, und giebt ihnen Nahmen, die von der Anzahl ihrer Winkel, oder auch ihrer Seitenlinien hergenommen sind: woraus man leicht abnehmen wird, was dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Figuren, oder Dreyecke, Vierecke, Fünfecke u. s. f. sind. Figuren, die mehr als vier Seitenlinien haben, pflegt man überhaupt Vielecke oder Polygone zu nennen. Man nennt sie schlechthin Dreyecke, Vierecke, oder Polygone, wenn sie gradlinichte Figuren sind: sonst aber drückt man durch die Beywörter: vermischtlinicht oder krummlinicht, zugleich die Beschaffenheit ihrer Seitenlinien aus.

Alle drey Winkel eines gradlinichten Dreyecks sind hohle, oder auswärts laufende Winkel: und es ist kein gradlinichtes Dreyeck möglich, das einen erhabenen einwärts laufenden Winkel hätte.

Unter den Winkeln eines Vierecks kann nur einer zwey rechte Winkel übertreffen. Denn man verlängere die Schenkel EA, EC des Winkels AEC (66 Fig.) rückwärts durch die Spitze E nach F und G; so erhellet, daß der vierte Winkelpunct B eines Vierecks zwischen den Schenkeln des Winkels GEF liegen müsse, wenn der erhabene Winkel AEC ein Winkel des Vierecks werden soll: die übrigen drey Winkel sind alsdenn nothwendig hohle Winkel.

31 §.

31 §.

Wenn ein Punct P innerhalb der Gränzen einer Figur liegt, und man ziehet durch denselben eine grade Linie GH: so wird diese Linie, wenn man sie nach beyden Seiten gehörig verlängert, den Umfang der Figur wenigstens in zweenen Puncten schneiden. Denn sie muß sowohl auf der einen, als auch auf der andern Seite, den Umfang der Figur einmahl erreichen und sodann durch denselben durchgehen. 11 F.

Ist also die Figur gradlinicht: so schneidet GH wenigstens zwo von ihren Seitenlinien (14 §.) Und wenn die Figur ein gradlinichtes Dreyeck ist, wie in der 10 Figur, GH aber durch die Spitze A eines 10 F. Winkels in diesem Dreyeck läuft: so schneidet GH verlängert gewiß die dem Winkel A gegen überstehende Seite.

32 §.

Die grade Linie AB ist unter allen übrigen Linien ACB, ADEB, die man zwischen eben den Puncten A und B ziehen kann, die kürzeste. Durch die **Entfernung** eines Orts vom andern verstehet man gewöhnlich den kürzesten Weg, den man nehmen muß, um von einem Ort nach dem andern zu kommen: deswegen ist die **Entfernung eines Puncts vom andern** mit der graden Linie zwischen beyden Puncten einerley. 12 F.

Wenn von A nach B mehrere andre Linien ACB, ADEB u. s. f. auf einer Seite der graden Linie AB so gezogen sind, daß sie insgesammt gegen AB die hohle Seite kehren, und einander nicht schneiden, auch keine derselben entgegengesetzte Wendungen macht, wie AFGB: so sind diese Linien alle ungleich, und

desto

desto grösser, je weiter sie von der graden Linie AB abweichen. So ist hier ADEB > ACB.

Demnach sind in jedem Dreyeck ABC zwo Seitenlinien AB, BC, zusammengenommen grösser als die dritte AC.

33 §.

13 F. Eine **Kreislinie** ist eine krumme Linie, wie AFBDE, die eine Ebene so umschließt, daß alle Puncte in derselben von einem gewissen Punct C in dieser Ebene gleich weit entfernt sind. Dieser Punct C heist des Kreises **Mittelpunct**, und die ebene Figur, welche von der Kreislinie begränzt wird, die **Kreisfläche**. Dieser Kreisfläche Umfang oder **Peripherie** ist also die Kreislinie, und jedes Stück von dieser Kreislinie, wie AFB, heißt ein **Kreisbogen**.

Jede grade Linie, die man vom Mittelpunct C nach einen Punct D des Umfangs zieht, heißt ein **Halbmesser** des Kreises (radius): **also sind alle Halbmesser eines und eben desselben Kreises gleich groß.** (33 §.) Das Stück der Kreisfläche AFBC, so zwischen zweenen Halbmessern AC, BC und dem dazwischen fallenden **Bogen** AFB enthalten ist, wird ein **Ausschnitt** des Kreises (sector) genannt.

13 F. Eine grade Linie AB von einem Punct A in der Kreislinie zum andern B, heißt eine **Sehne**; und die beyden Stücke der Kreislinie AFB, AEDB, werden als Bogen angesehen, **die der Sehne** *AB* **zugehören.** Das Stück der Kreisfläche zwischen der Sehne AB und einem ihrer Bogen AFB, oder AEDB, wird ein **Abschnitt** (segmentum) des Kreises genannt.

Eine

Eine Sehne wie AD, die durch den Mittelpunct C geht, heist des Kreises Durchmesser. Jeder solcher Durchmesser ist doppelt so groß, als des Kreises Halbmesser; und eben deswegen sind auch alle Durchmesser eines und eben desselben Kreises gleich groß.

34 §.

Man nimmt es in der Geometrie als eine mögliche Voraussetzung an, wenn der Mittelpunct *C*, und der Halbmesser *CA* eines Kreises gegeben sind, daß man aus diesem Mittelpunct mit diesem Halbmesser den Kreis beschreiben könne.

Würde die grade Linie CA um den Punct C rund herum gedrehet, bis sie wieder in die vorige Lage gekommen: so würde ihr äusserster Punct A eine Linie beschreiben, (9 §.) worin alle Puncte von C gleich weit entfernt seyn müsten, weil A von C immer gleich weit entfernt bleibt. Dies würde also die Kreislinie seyn, und die Ebene, worüber CA fortgeführet ist, die Kreisfläche. (34 §.) Auf diese Betrachtung gründet sich die Art, wie man in der Ausübung vermittelst des bekannten Cirkel-Instruments die Kreislinie verzeichnet. 13 F.

35 §.

Jeder Punct G, dessen Entfernung GC vom Mittelpunct des Kreises kleiner ist, als des Kreises Halbmesser, liegt innerhalb der Kreisfläche: und jeder Punct H, dessen Entfernung HC vom Mittelpunct grösser als der Halbmesser ist, liegt ausserhalb der Kreisfläche. Denn CG verlängert trift die Peripherie in D, und G liegt auf dem Halbmesser, der allemahl ganz in der Kreisfläche liegt. Wenn aber CH grösser als der Halbmesser CD ist: so geht die 13 F.

Kreislinie durch D, und H bleibt ausserhalb dieser Gränze der Kreisfläche liegen.

Jede grade Linie MN also, die durch einen Punct G gezogen ist, dessen Entfernung vom Mittelpunct kleiner, als der Halbmesser ist, muß die Kreislinie wewenigstens in zweenen Puncten schneiden. (31 §.) Eben dies gilt demnach auch vom Durchmesser eines Kreises.

36 §.

13F. Ein Durchmesser AD aber kann die Kreislinie auch nicht in mehr denn zweenen Puncten A und D schneiden. Wäre H ein dritter Durchschnittspunct: so müste $CD = CH$ seyn, (34 §.) welches falsch ist. Auf einer Seite des Puncts C können in der graden Linie AD nicht zweene unterschiedene Puncte D und H in gleicher Entfernung liegen. (18 §.)

Dafern C der Mittelpunct eines Kreises AFBE ist: so kann kein andrer Punct G in der Kreisfläche von allen Puncten des Umfangs gleich weit entfernt seyn. Denn die grade Linie durch C und G ist ein Durchmesser, und schneidet die Kreislinie nur in A und D. Es wird aber $CA = CD$ (34 §.) und $GA > CA$, also auch $GA > CD$; und weil $CD > GD$, so ist $GA > GD$. Jeder Kreis hat also nur einen, nicht mehrere Mittelpuncte.

Das Stück GA ist unter allen graden Linien, die man von G bis an die Kreislinie ziehen kann, die größte, und GD unter allen die kleinste. Es sey GE eine solche Linie: so ziehe man CE, und es ist $CG + CE > GE$ (32 §.), oder $CG + CA > GE$, d. i. $GA > GE$. Weil aber $CE < CG + GE$ und $CE = CD$; so ist $CD < CG + GE$, folglich $CD - CG < GE$ (28 §. R.), oder $GD < GE$.

37 §.

37 §.

Jeder Durchmesser *AD* theilt die Kreis- 13 F.
fläche sowohl, als die Kreislinie in zwey glei-
che Stücke, die man Halbkreise nennet.

Beweis. Man stelle sich vor, es werde AFBD
um AD herum gedrehet, und das Stück AFBD auf
AED gelegt, so daß die Linie AD ungeändert bleibt:
so fällt jeder Punct B auf einen zugehörigen Punct E.
Denn man ziehe BC, und es sey DCE = DCB: so
fällt CB in CE, und B in E. (18 §.) Also paßt der
Bogen AFBD auf dem Bogen AED, und die Flä-
che ACDBF auf der Fläche ACDE (16 §.), und so-
wohl beyde Bogen, als auch beyde Flächen sind gleich
groß. (17 §.)

Wenn demnach eine Kreislinie bey A und D in
zweene gleiche Theile getheilt ist, und man ziehet AD:
so ist AD ein Durchmesser. Denn wäre dies nicht,
so müste der Mittelpunct ausser AD irgendwo in c
liegen, und denn könnte man die grade Linie Ac zie-
hen, welche nun ein Durchmesser wäre, der die Kreis-
linie nochmahl in d schneiden würde. Denn aber
wäre der Bogen AEd nicht allein, sondern auch der
Bogen AED der halben Peripherie des Kreises gleich,
welches beydes zugleich nicht seyn kann.

38 §.

Wenn auf einer Linie AE irgendwo ein Punct B 14 F.
gegeben ist: so kann man vermittelst der Kreislinie
allemahl ein Stück von dieser Linie abschneiden, das
in dem gegebenen Punct B anfängt, und eben so groß
ist, als eine andre gegebene Linie F. Denn man
nehme B für den Mittelpunct, die Linie F aber für
den Halbmesser, und verzeichne eine Kreislinie:
(36 §.) so schneidet diese die grade Linie AE nur in

zweenen Puncten C und D, (38 §.), und nun ist sowohl BC als auch BD = F. (34 §.)

Auf eben die Art addirt man eine grade Linie F zu einer gegebenen AB, oder subtrahirt jene von dieser, wenn F < AB ist. Denn es wird AC = AB + BC = AB + F, und AD = AB — BD = AB — F.

Setzt man voraus, daß AB unverändert bleibe, aber F = BC = BD wachse oder abnehme; so ändern sich auch AC und AD. Wenn F wächst, so wächst AC, aber AD wird kleiner: wird F = AB angenommen, so fällt D in A, und es wird AD = o. Wäre F > AB, so würde der bisher mit D bezeichnete Durchschnittspunct nicht mehr rechter Hand, sondern linker Hand des Puncts A in δ fallen: bey dem allen aber bleibt Aδ noch die Differenz der Linien AB und Bδ, nur daß Aδ eine Lage hat, die der Lage der Linie AB entgegengesetzt ist.

Diese Schlüsse erläutern es, in welchem Verstande eine **Subtraction** auch in dem Fall möglich sey, wenn das, was man subtrahiren soll, grösser ist, als das, wovon man es subtrahiren soll. Man stelle sich vor, ein Punct habe sich von A nach B um 4 Fuß vorwärts bewegt, von B aber wieder 5 Fuß rückwärts, und man wollte wissen, wie weit nun nach beyden Bewegungen dieser Punct von A entfernt sey? so ist offenbar, daß derselbe um einen Fuß aber **nicht vorwärts**, sondern **rückwärts** von A entfernt sey. Vorwärts und rückwärts gehen sind **entgegen gesetzte** Bewegungen, die vorwärts und rückwärts zurück gelegten Wege sind **entgegengesetzte Linien**.

39 §.

Entgegengesetzte Grössen heissen in der Mathematik überhaupt solche, die zwar für sich unter einem

nem gemeinschaftlichen Hauptbegrif stehen, wovon aber die eine allemahl um eben so viel abnimmt, als die andre wächst, und umgekehrt. Das, was von zwoen entgegen gesetzten Grössen herauskommt, nachdem die eine um die andre ist vermindert worden, könnte man ihr Resultat nennen: aber man nennt es zu nicht geringer Verkürzung vieler Untersuchungen über die Aenderungen, welche mit geometrischen und andern Grössen nach gewissen Gesetzen vorgehen, die **Summe der entgegen gesetzten Grössen**, wenn gleich diese so genannte **Summe** durch eine arithmetische Subtraction gefunden werden muß. Auch ist die geometrische Construction, vermöge der die arithmetische Differenz AD zwoer grader Linien AB und BD gefunden wird, von derjenigen in der Hauptsache nicht verschieden, wodurch man ihre arithmetische Summe AC findet, (38 §.) wodurch also jener Sprachgebrauch noch mehr gerechtfertigt wird. **Entgegen gesetzte Grössen addiren** heißt also dasjenige Stück der grössern angeben, um welches sie die kleinere ihr entgegen gesetzte übertrift. Man kann solches die allgemeine **geometrische Addition** nennen, um sie von der **arithmetischen**, die allemahl in einer Vermehrung besteht, zu unterscheiden.

Wenn vorausgesetzt wird, daß von dem Hauptbegrif die Rede sey, den zwo entgegen gesetzte Grössen gemein haben; so kann man jede derselben durch Verneinung der ihr entgegengesetzten anzeigen: denn durch Verneinung der einen wird nothwendig die andre gesetzt. Um einen Punct auf der graden Linie AB anzugeben, der um den Abstand = F von B entfernt ist, und nicht auf der Seite von B liegt, wo E angenommen ist, muß man die Entfernung BD = F von B nach A zu nehmen. Diejenige von zwoen entgegen gesetzten Grössen, welche man durch Verneinung der andern anzeigt, heißt eine **negative**, oder **verneinte**, eigentlich eine **verneint ausgedrückte Grösse**. Die ihr entgegengesetzte, welche man ohne Verneinung anzeigt, nennt man eine **positive** oder bejahte, eigentlich eine **positiv ausgedrückte Grösse**. Das bejahte oder verneinte liegt nur im Ausdruck, der die Grösse bezeichnet, nicht in der Natur der Grösse selbst. Eine **nicht rechter Hand** von B auf der graden Linie AE angenommene Entfernung von so und so viel Fuß, liegt **lincker Hand** von B, und umgekehrt.

Der **positiv** angenommenen Grösse, das ist, derjenigen, die man ohne Verneinung ausdrücken will, setzt man das Zeichen (+), der entgegen gesetzten verneinten Grösse aber das Zeichen (−) voran: diese Zeichen dienen alsdenn statt der Worte, wodurch man die entgegen gesetzte Beziehung der einen gegen die andre sonst ausdrücken müste. An sich ist es gleichgültig, welche von zwoen entgegen gesetzten Grössen man positiv oder negativ ausdrücken will: nur muß man die einmahl angenommene Voraussetzung nicht ändern, so lange man mit Auflösung einer und eben derselben Aufgabe beschäftiget ist. Werden also diejenigen auf der graden Linie AE abgeschnittenen Stücke, welche sich von A oder B aus nach der Rechten erstrecken, mit + bezeichnet, so müssen diejenigen, welche von A oder B aus sich nach der Linken erstrecken, mit − bezeichnet werden. Diesen Vorstellungen gemäß muß man folgende Sätze als **Grundregeln der allgemeinen geometrischen Addition** ein für allemahl anmerken.

1.) Die

1.) Die geometrische Summe zwoer positiven, oder auch zwoer negativen Grössen ist mit ihrer arithmetischen Summe einerley, jene ist positiv, diese negativ. Es ist nemlich

$$AB + BC = + AC$$
$$- BA - A\delta = - B\delta$$

2.) Die geometrische Summe entgegen gesetzter Grössen ist der Ueberschuß der grössern über die kleinere, und dieser Ueberschuß behält mit der grössern einerley Zeichen. Denn es ist

$$AB - BD = + AD$$
$$AB - B\delta = - A\delta$$
$$- BA + AD = - BD$$
$$- BA + AC = + BC.$$

40 §.

Die arithmetische Addition findet aus den gegebenen Theilen das Ganze, und umgekehrt wird vermittelst der arithmetischen Subtraction aus dem gegebenen Ganzen und einem Theil desselben der andre Theil gefunden, der mit dem gegebenen zusammen genommen das Ganze ausmacht. Hier kann man sich die geometrische Summe entgegen gesetzter Grössen auch als ein Ganzes vorstellen: nur ist es alsdenn kein Ganzes in dem Sinn, wie dies Wort verstanden wird, wenn vermöge des Grundsatzes im 9 §. der Rechenkunst jeder Theil kleiner seyn muß als das Ganze. Was man sich hier als einen Theil des Ganzen vorstellet, kann an sich grösser als das Ganze seyn, wenn das Ganze aus Theilen bestehet, die einander entgegen gesetzt sind: daher wird begreiflich, was es mit der allgemeinen geometrischen Subtraction für eine Bewandniß habe. Man stellt sich die Grösse, wovon man subtrahiren soll, im allgemeinsten Sinn als ein Ganzes vor, und was man subtrahiren soll, als einen gegebenen Theil dieses Ganzen, da dann das gesuchte derjenige Theil seyn muß, der mit dem gegebenen zusammen genommen das Ganze ausmacht. Wie nun die allgemeine geometrische Addition zuweilen im arithmetischen Sinn eine Verminderung ist, so wird die allgemeine geometrische Subtraction zuweilen im arithmetischen Sinn eine Vermehrung. Vom positiven Ganzen AB den negativen Theil — CB subtrahiren, heißt den positiven Theil AC finden, welcher mit — CB zusammen genommen, oder um CB vermindert, das Ganze AB ausmacht: demnach muß der gesuchte Theil das Ganze AB nothwendig übertreffen, und zwar um eben so viel, als derselbe durch Hinzusetzung des negativen Theils — CB vermindert wird. Diesen Vorstellungen gemäß muß man folgende Sätze als Grundregeln der allgemeinen geometrischen Subtraction festsetzen.

1.) **Eine positive Grösse von einer positiven, und eine negative Grösse von einer negativen subtrahirt, giebt im ersten Fall eine positive, im letzten Fall eine negative Differenz, die mit der arithmetischen Differenz beyder Grössen einerley ist, so lange das Subtrahendum das, wovon man es subtrahiren soll, nicht übertrift. Im entgegen gesetzten Fall ist das, was man sucht, der Ueberschuß des grössern über das kleinere mit dem entgegen gesetzten Zeichen.**

Von + AC	Von — BA
subtr. + BC	subtr. — DA
giebt + AB	giebt — BD

Von

Von $+ AB$	Von $- CB$
subtr. $+ BE = B\delta$	subtr. $- B\delta = BE$
giebt $- A\delta$	giebt $+ CE$

2.) **Von einer Grösse eine andre ihr entgegen gesetzte subtrahiren, heißt jene um eine solche Grösse vermehren, die dem Subtrahendo für sich gleich, demselben aber entgegen gesetzt ist.**

Den negativen Theil $- CB$ von AB subtrahiren heist nemlich AB als ein Ganzes ansehen, das durch die geometrische Addition des gesuchten Theils, den ich X nennen will, und des gegebenen $- CB$, entstanden ist: also soll $AB = X - CB$ seyn, und das giebt $X = AB + CB = + AC$.

Den positiven Theil $+ AD$ von $- BD$ subtrahiren, heißt $- BD$ als ein Ganzes ansehen, das durch die geometrische Addition des gesuchten Theils X und des gegebenen $+ AD$ entstanden ist: demnach soll $- BD = X + AD$ seyn, und das giebt $X = - BD - AD = -(BD + DA) = - BA$.

Die alten Geometer haben die Begriffe von den entgegen gesetzten Grössen in ihren Schriften nicht gebraucht: eben deswegen hatten sie keine Veranlassung, die Begriffe von dem, was **addiren** und **subtrahiren** heißt, in einem so sehr allgemeinen Sinn zu nehmen, wie hier die Sache ist vorstellig gemacht worden. Es sind dies Vorstellungsarten, wozu die neuern Geometer vornemlich seit der Zeit sind veranlasset worden, da man angefangen hat, die höhere Rechenkunst auf die Geometrie anzuwenden, ja beyde Wissenschaften gewissermassen auf eine solche Art mit einander zu verbinden, daß daraus eine **allgemeine mathematische Erfindungs-**

kunst geworden ist, die in den folgenden Theilen dieses Lehrbuchs unter dem Nahmen der allgemeinen Mathematischen Analysis wird vorgetragen werden. Die Geometrie selbst wird hier zwar vornemlich nach Art der Alten abgehandelt werden: dabey aber hat es doch seinen mannigfaltigen Nutzen, wenn der angehende Geometer zugleich auf dasjenige aufmerksam gemacht wird, wodurch die neuere Mathematische Erfindungskunst mit den ihr eigenen Kunstgriffen ist bereichert worden.

41 §.

14F. Wenn ein Punct P innerhalb, und ein andrer Q ausserhalb der Fläche einer Figur GDHC liegt, und der Umfang einer andern Figur LMNO durch die Puncte P und Q läuft: so schneiden sich die Peripherien beyder Figuren wenigstens in zweenen Puncten, und der einen Figur Umfang fällt zum Theil innerhalb, zum Theil ausserhalb der andern Figur. Ein Punct P, welcher den Umfang der Figur beschreibt, indem er durch LMNO fortgeht, muß wenigstens zweymahl durch die Peripherie der Figur GDHC durchgehen; einmahl wenn er von P durch L und M nach Q gehet, und das andere mahl, wenn er von Q durch N und O nach P zurück kommt.

Wenn demnach zwo Kreislinien einander schneiden; so giebt es ebenfalls wenigstens zweene Durchschnittspuncte.

42 §.

15F. Zwo Kreislinien, die aus den Mittelpuncten *A* und *B* beschrieben sind, schneiden einander, wenn nicht allein die Entfernung *AB* ihrer Mittelpuncte kleiner als die Summe ihrer Halbmesser, sondern auch jeder Halbmesser

messer kleiner ist, als die Summe der Distanz der Mittelpuncte und des Halbmessers des andern Kreises.

Beweis. Jeder Kreis schneidet die grade Linie AB zweymahl, und nicht mehr, (36 §.) der eine in F und G, der andre in E und H: alsdenn aber ist HE des um A beschriebenen Kreises Durchmesser, und dieser Durchmesser liegt ganz in der Fläche des dazu gehörigen Kreises. Ferner ist vermöge der Voraussetzung $AB < AE + BF$, also $AB - BF < AE$, oder $AF < AE$: mithin liegt F in der Fläche des um A beschriebenen Kreises. Ueberdem $AE < AB + BG$, vermöge der Voraussetzung, oder $AG > AE$: folglich liegt G ausserhalb des Kreises CEDH (35 §.) und beyde Kreise schneiden einander (41 §.).

43 §.

Kreislinien und Kreisflächen sind gleich groß, wenn ihre Halbmesser gleich groß sind. 16F.

Beweis. Wenn man die eine Kreisfläche so auf die andre legt, daß beyde Mittelpuncte zusammenfallen; so fällt in die Augen, daß auch beyde Peripherien auf einander fallen müssen. Sind CA, FD ein Paar Halbmesser: so sey der Winkel $EFD = BCA$. Man lege F auf C und FD auf CA: so fällt D in A, und FE in CB, imgleichen E in B (18 §). Demnach fällt jeder Punct der einen Peripherie auf einen zugehörigen Punct der andern, und die Kreislinien sowohl, als die Kreisflächen passen auf einander (16 §.).

44 §.

Kreislinien, die mit verschiedenen Halbmessern CA, CE aus einerley Mittelpunct C beschrieben sind, heissen **Concentrische Kreise**, so wie alle Kreise, 17F.

die

die verschiedene Mittelpuncte haben **Eccentrische Kreise** genannt werden.

Concentrische Kreislinien können einander nicht schneiden, auch sonst in keinem einzigen Punct zusammenstossen. Widrigenfalls würde die grade Linie von dem gemeinschaftlichen Punct bis zum Mittelpunct gezogen, sowohl des einen, als auch des andern Kreises Halbmesser seyn, und beyde Kreislinien würden völlig zusammen fallen (43 §).

Kreisflächen sind ungleich groß, wenn die Halbmesser ungleich sind, und der kleinere Halbmesser giebt einen kleinern Kreis, als der grössere. Gleiche Kreise haben also gleiche Halbmesser und Durchmesser.

Wenn ein Paar Kreislinien einander schneiden, oder sonst auf irgend eine Art zusammenstossen; so sind es Eccentrische Kreislinien.

45 §.

15 F. **Wenn eine aus dem Mittelpunct *B* beschriebene Kreislinie durch zweene Puncte *C* und *D* einer andern um *A* beschriebenen Kreislinie läuft; so schneiden beyde Kreise einander.**

Beweis. Man ziehe die Halbmesser AC, AD, BC, BD, so ist $AC + BC = AD + BD$, mithin kann weder ACB nach ADB eine grade Linie seyn, weil im ersten Fall $AC + CB < AD + BD$, im andern Fall $AD + BD < AC + BC$ seyn müste (32 §.). Wird also die grade Linie AB gezogen, so ist ABC ein Dreyeck, worin $AB < AC + BC$, und $AC < AB + BC$, so wie $BC < AB + AC$ ist: demnach schneiden die Kreise einander (42 §.).

46 §.

Eine Kreislinie berühret die andre, wenn beyde zwar zusammen stossen, übrigens aber der eine Kreis entweder ganz ausserhalb oder ganz innerhalb des andern fällt. Im ersten Fall berührt einer den andern von aussen, im andern Fall von innen.

Dergleichen Kreislinien sind also allemahl Eccentrisch (44 §), und die Berührung kann nur in einem Puncte geschehen. Denn gäbe es in beyden zweene gemeinschaftliche Puncte; so schnitten die Kreise einander. (45 §.)

47 §.

Zweene Kreise berühren einander von aussen, wenn die Entfernung ihrer Mittelpuncte so groß ist, als die Summe ihrer Halbmesser. 18 F.

Beweis. Wenn A und B die Mittelpuncte sind, so schneidet der aus A beschriebene Kreis die grade Linie AB in zweenen Puncten C und E (36 §.). Alsdenn ist $BC = AB - AC$, und wenn des um B beschriebenen Kreises Halbmesser $= r$ gesetzt wird; so ist vermöge der Voraussetzung $AC + r = AB$, also auch $r = AB - AC$, folglich $BC = r$, und der um B beschriebene Kreis geht durch C. Aber ausser C haben sie keinen Punct gemein. Denn es sey H noch ein andrer Punct in beyden Kreislinien ausserhalb der Linie AB: so kan man AH und BH ziehen, und es wird AHB ein Dreyeck, worin $AH + BH > AB$ ist (32 §.) Also wäre die Summe der Halbmesser grösser, als die Entfernung der Mittelpuncte, gegen die Voraussetzung. Uebrigens liegt jeder Punct F des um B beschriebenen Kreises ausserhalb des andern; weil $AF + BF > AB$, oder $AF + BF > AC + BC$, und $BF = BC$, mithin $AF > AC$ ist.

48 §.

Zweene Kreise berühren einander von innen, wenn die Entfernung ihrer Mittelpuncte 19 F.

so

so groß ist, als die Differenz ihrer Halbmesser.

Beweis. Die grade Linie durch die Mittelpuncte A und B wird von dem aus A beschriebenen Kreise wiederum in C und E geschnitten, und alsdenn ist BC = AC − AB. Wenn also des um B beschriebenen Kreises Halbmesser = r gesetzt wird, so ist vermöge der Voraussetzung AC − r = AB, also auch AB + r = AC, und r = AC − AB; folglich BC = r, und der um B beschriebene Kreis geht durch C. Ausser C können beyde Kreise keinen Punct H gemein haben, weil sonst AB + BH grösser als AH, also AB > AH − BH wäre, gegen die Voraussetzung. Uebrigens liegt jeder Punct F des um B mit dem kleinern Halbmesser beschriebenen Kreises innerhalb der Fläche des andern; weil AF < AB + BF, und BF = BC, also AF < AB + BC, oder AF < AC ist.

49 §.

18. Die Mittelpuncte *A* und *B* zweener Kreise,
19F. die einander berühren, liegen mit dem Berührungspunct in grader Linie.

Beweis. Wenn H der Berührungspunct wäre, und AB verlängert nicht durch H liefe; so könnte man AH und BH ziehen, und dadurch ein Dreyeck ABH zuwege bringen. Alsdenn wäre die Entfernung der Mittelpuncte AB kleiner als die Summe der Halbmesser AH + BH; auch wäre jeder Halbmesser AH kleiner als die Summe der Entfernung der Mittelpuncte AB und des andern Halbmessers: mithin schnitten die Kreise einander, (42 §.) gegen die Voraussetzung.

50 §.

50 §.

Die Kreislinie ist unter allen krummen Linien die einzige, welche **Euclides** bey der Auflösung geometrischer Aufgaben gebraucht hat. Die alten griechischen Geometer glaubten Anfangs, daß keine andre krumme Linie verdiene, in der Geometrie aufgenommen zu werden, und hielten dafür, daß keine Aufgabe geometrisch aufgelöset sey, bey der man andere krumme Linien, als die Kreislinie, zu Hülfe genommen habe. Ihnen kamen aber bald solche Aufgaben vor, die sie vermittelst der graden und Kreislinien allein nicht auflösen konnten, und sie wurden dadurch bewogen, auch über die Eigenschaften einiger andrer krummen Linien Untersuchungen anzustellen. Jetzt nennt man denjenigen Theil der Geometrie, worin mit dem **Euclides** keine andre krumme Linie, als die Kreislinie bey der Auflösung der Aufgaben gebraucht wird, die **Elementar-Geometrie**. Der Inbegrif aller übrigen Lehren von den ausgedehnten Grössen die sich aus den Eigenschaften der graden Linie und Kreislinie allein nicht herleiten lassen, macht die **höhere Geometrie** aus.

Der III. Abschnitt.

Von den Dreyecken und Parallel-Linien.

51 §.

Was eine grade Linie in einer Ebene für eine Lage habe, läßt sich nicht angeben, wofern nicht ausserdem die Lage einer andern graden Linie in derselben Ebene als bekannt angenommen wird. Wenn dage-

dagegen vorausgesetzt wird; daß die Lage einer gewissen graden Linie EB sonst bekannt sey; so hat man
3 Fig. von der **Lage** einer solchen graden Linie DC, welche die vorige schneidet, einen bestimmten Begrif, wenn man weiß, **wie groß der Winkel** *EAD* **sey, unter welchem** *CD* **gegen die Linie** *EB*, **deren Lage bekannt war, geneigt ist.**

Wenn ausserdem auch in der Linie EB die Stelle des Puncts A bekannt ist, worin EB von DC geschnitten wird; so ist zugleich die Stelle völlig bekannt, welche die Linie DC in der Ebene einnimmt.

52 §.

Zwo grade Linien, wie *EB*, *DC* **die einander schneiden, haben nicht einerley Lage.** Denn hätten sie einerley Lage, und liefen sie überdem durch einerley Punct A; so müßten sie völlig zusammen fallen.

Zwo verschiedene grade Linien also, die in einerley Ebene einerley Lage haben; können einander nicht schneiden. Denn schnitten sie einander, so hätten sie nicht einerley Lage.

53 §.

42 F. **Zwo grade Linien,** *AB*, *CD*, **die in einerley Ebene eine und eben dieselbe dritte grade Linie** *EF* **in** *G* **und** *H* **unter einerley Winkel** *EGB* = *EHD* **so schneiden, daß beyder Winkel Oefnungen nach einerley Endpunct der Linie** *EF* **liegen, haben einerley Lage.** Denn AB und CD haben gewiß gegen EF also auch für sich einerley Lage, weil EF in der Ebene, worin sie mit AC und CD liegt, ihre bestimmte Lage hat. Es kommt nemlich, wenn allein von der Lage der Linie

AB

AB die Rede ist, auf die Stelle des Puncts G in EF nicht an, worin AB und EF einander schneiden; dieser Durchschnittspunct kann in EF seine Stelle haben, wo man will: wofern nur der Winkel EGB derselbe bleibt, so bleibt auch die Lage der Linie AB dieselbe.

54 §.

Wenn dagegen die Winkel *EGb*, *EHD*, ungleich sind, unter welchen zwo grade Linien *ab*, *CD*, gegen eine dritte *EF* geneigt sind, vorausgesetzt, daß allemahl solche Winkel verstanden werden, wovon die Oefnungen gegen einerley Endpunct der Linie EF liegen; **so haben *ab*, und *CD* nicht einerley Lage.** Denn soviel ist für sich klar, daß *ab* und CD gegen EF nicht einerley Lage haben. Aber jede grade Linie wie EF hat in der Ebene, worin sie mit den übrigen liegt, ihre bestimmte Lage: wenn also ein Paar grade Linien *ab*, CD gegen EF nicht einerley Lage haben, so haben sie auch für sich nicht einerley Lage in derselben Ebene.

55 §.

Zwo grade Linien *AB*, *CD*, die in einerley Ebene einerley Lage haben, müssen jede dritte grade Linie, *EF*, die von beyden geschnitten wird, unter einerley Winkel *EGB*, *EHD* schneiden. Denn wären diese Winkel in irgend einem Fall verschieden, so hätten AB und CD nicht einerley Lage. (54 §.).

56 §.

Wenn im gradlinichten Dreyeck *ABC* eine Seite *BC* nach *D* verlängert wird; so ist der äussere Winkel *ACD* der Summe beyder in 26F

Dreyeck ihm gegenüber stehenden Winkel *ABC + BAC* gleich.

Beweis. Jeder Winkel im Dreyeck, also auch ABC, ist kleiner als 2R, also muß es möglich seyn, durch C eine grade Linie CF so zu ziehen, daß der Winkel DCF = ABC werde. Wäre DCF < ABC, so könnte sich CF um C gegen CA und CB zu drehen, und solchergestalt würde DCF bis zu 2R wachsen: also muß CF in eine solche Lage kommen können, daß DCF = ABC wird. Es sey also DCF = ABC, so haben CF und BA einerley Lage, (53 §.) mithin können CF und BA einander nicht schneiden, (52 §.) also muß DCF < DCA seyn. Denn wäre DCF = DCA, so fiele CF mit CA zusammen (18 §.) und AB würde von CF geschnitten. Wäre DCF > DCA, so fiele CF in die Fläche des Dreyecks ABC, und AB würde von CF geschnitten. (31 §.) Diesemnach ist DCF < DCA. Wenn nun AC nach G und FC nach H verlängert wird; so ist der Winkel HCG = BAC, weil CF und AB einerley Lage haben. (55 §.) Ueberdem ist HCG = ACF, (26 §.) also auch ACF = BAC. Vorhin war DCF = ABC, mithin ist ACF + DCF = BAC + ABC, oder ACD = BAC + ABC.

57 §.

In jedem gradlinichten Dreyeck ist die Summe aller dreyer Winkel zweenen rechten Winkeln gleich.

26F. Beweis. Wenn eine Seite BC des Dreyecks ABC nach D verlängert wird, so ist ACD + ACB = 2R (22 §.) und ACD = ABC + BAC, also ABC + BAC + ACB = 2R.

Die

Die drey Winkel eines Dreyecks zusammen betragen soviel, als die drey Winkel eines jeden andern Dreyecks zusammen genommen: und wenn zwey Dreyecke einen gleichen Winkel haben, so ist die Summe der beyden übrigen in dem einen so groß, als in dem andern. Sind zwey Winkel des einen Dreyecks so groß, als zwey Winkel des andern; so ist der dritte Winkel in beyden gleichfalls von einerley Grösse.

Wenn ein Winkel eines Dreyecks ein rechter, 24F. oder ein stumpfer Winkel ist; so ist jeder von den übrigen beyden ein spitzer Winkel. Durch einerley Punct C können also nicht zwo verschiedene grade Linien CD, CF so gezogen werden, daß sie auf einer und eben derselben dritten AB senkrecht stehen.

58 §.

Es ist ein Winkel *BAC* gegeben nebst zwoen graden Linien *D* und *E*; man soll aus diesen dreyen Stücken ein solches Dreyeck machen, welches den Winkel *BAC* enthält, und worin die beyden Seiten, die den Winkel *BAC* einschliessen, so groß als die gegebenen Linien *D* und *E* sind. 10F.

Aufl. Man schneide von der Spitze des Winkels A angerechnet auf dem einen Schenkel ein Stück AB = D, und auf dem andern ein Stück AC = E ab, (40 §.) und ziehe die grade Linie BC: (9 §.) so hat man das verlangte Dreyeck ABC.

Weil die Kreise, welche man braucht die Puncte B und C zu finden, die Schenkel des Winkels auch in *b* und *c* schneiden, (38 §.) und der Winkel BAC = *bAc* ist: (26 §.) so kann man auch *bc* ziehen, und das Dreyeck Abc thut der Aufgabe ebenfalls ein Genüge.

59 §.

Wenn die gegebenen Seiten D und E gleich groß sind: so werden auch AB und AC gleich groß, und man erhält ein Dreyeck, das zwo gleiche Seiten hat. Ein Dreyeck von dieser Art heist ein **gleichschenklichtes Dreyeck** (aequicrurum, isosceles): die beiden gleichen Seiten desselben heissen die gleichen **Schenkel**, und man sieht gewöhnlich die dritte, den vorigen ungleiche, Seite als die **Grundlinie** des Dreyecks an.

Wenn alle drey Seiten eines Dreyecks gleich groß sind: so heist es ein **gleichseitiges Dreyeck** (aequilaterum, isopleuron). Die übrigen Dreyecke, die lauter ungleiche Seiten haben, heissen **ungleichseitige Dreyecke** (scalena).

60 §.

20 F. **Wenn zwey Dreyecke ABC und DEF einen gleichen Winkel haben, so daß $B = E$ ist, und zwo gleiche Seiten $AB = DE$, $BC = EF$, die den gleichen Winkel einschliessen; so sind die Flächen dieser Dreyecke nicht allein, sondern auch die übrigen Seiten und die Winkel gleich groß, die den gleichen Seiten gegen über stehen.**

Beweis. Man lege das Dreyeck DEF auf ABC so, daß E auf B, und EF auf BC falle: so muß F auf C, ED auf BA, und D auf A fallen. (18 §.) Folglich fällt DF in AC zusammen, (12 §.) und das Dreyeck DEF paßt auf ABC, DF auf AC, der Winkel D auf A, und F auf C.

Also

Also sind die beyden Dreyecke ABC und Abc in der zehnten Figur nicht der Grösse, sondern nur der Lage nach unterschieden. 10 F.

61 §.

In jedem gleichschenklichten Dreyeck *ABC* sind die Winkel, an der Grundlinie *ABC* und *ACB* gleich groß, die den gleichen Schenkeln *AB* und *AC* entgegen stehen. 21 F.

Beweis. Man verlängere die gleichen Schenkel AB und AC unter der Grundlinie, nehme auf AB unter BC einen beliebigen Punct D, und mache AE = AD: (40 §.) so ist auch BD = CE. (28 §. R.) Nun hat man in den Dreyecken ABE und ACD den Winkel A = A, die Seite AB = AC, und AE = AD; folglich ist BE = DC und ABE = ACD, wie auch AEB = ADC. (60 §.) Dieserwegen hat man ferner in den Dreyecken BDC und BEC, ausser den eben erwiesenen Sätzen AEB = ADC, und BE = DC, noch CE = BD. Also ist der Winkel CBE = BCD, (60 §.), und weil ABE = ACD war: so wird ABE − CBE = ACD − BCD, (28 §. Rechenk.) oder ABC = ACB.

Im gleichseitigen Dreyeck sind demnach alle drey Winkel gleich groß. Denn wäre auch AB = BC; so wäre A = ACB, folglich auch A = ABC. Weil übrigens alle drey Winkel zusammen zwey rechte Winkel ausmachen, (57 §.) so ist jeder Winkel im gleichseitigen Dreyeck = $\frac{2}{3}$R.

62 §.

Wenn *ABC* ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, und einer von den gleichen Schenkeln *AB* durch die Spitze *A* des der Grundlinie gegenüberstehenden Winkels nach *E* verlängert 23 F.

wird; so ist der äussere Winkel *EAC* doppelt so groß, als jeder von den Winkeln an der Grundlinie *BC*.

Beweis. Es ist $EAC = ABC + ACB$, (56 §.) und $ABC = ACB$, folglich $EAC = 2ABC = 2ACB$.

Umgekehrt also ist jeder Winkel an der Grundlinie halb so groß, als der äussere Winkel an der Spitze der Grundlinie gegen über.

63 §.

Zweene Winkel, welche im Dreyeck zwoen ungleichen Seiten gegenüber stehen, sind ungleich groß, und zwar stehet der grössere Winkel der grössern Seite, der kleinere aber der kleinern entgegen.

Beweis. Wenn im Dreyeck ABC die Seite
28F. $AC > AB$ ist; so sey $AD = AB$, (12 §. Rech.) und man ziehe BD: so ist der Winkel $ABD = ADB$. (61 §.) Aber $ABC > ABD$, also $ABC > ADB$. Da nun $ADB > C$, (56 §.) so ist $ABC > C$. (13 §. Rechenk.)

Wenn also ein Dreyeck zweene gleiche Winkel hat, so hat es auch zwo gleiche gegen über stehende Seiten. Denn wenn die Seiten ungleich wären, so wären vermöge des bewiesenen Satzes die gegenüber stehenden Winkel ungleich.

Ein Dreyeck, das drey gleich grosse Winkel hat, ist gleichseitig. Sind aber zweene Winkel im Dreyeck ungleich groß; so steht dem grössern Winkel die grössere Seite, und dem kleinern Winkel die kleinere Seite entgegen. Denn ist der Winkel $ABC > C$: so kann nicht $AC = AB$ seyn, weil sonst $ABC = C$ wäre. (61 §.) Es kann auch nicht $AC < AB$ seyn, weil sonst $ABC < C$ seyn müste, wie eben

eben bewiesen ist. Also muß AC > AB seyn, wenn ABC > C ist.

Ist D ein Punct in der Kreisfläche, der vom Mittelpunct C unterschieden ist, und man ziehet durch C und D den Durchmesser EF; so sind alle grade Linien DA, DG die man auf einer Seite des Durchmessers von D nach den Umfang des Kreises ziehen kann, ungleich groß: und wenn der Bogen GF < AF ist; so ist DG > DA. Denn man ziehe CA, CG, und AG: so ist CAG = CGA. (61 §.) Aber DAG > CAG, also DAG > CGA. Ueberdem CGA > DGA, also DAG > DGA, und DG > DA. 25F.

64 §.

Wenn zwo Seiten *AB* und *AC* eines Dreyecks *ABC* so groß sind, als zwo Seiten eines andern Dreyecks *DEF*, nemlich *AB* = *DE*, und *AC* = *DF*, überdem aber der Winkel *BAC*, den jene einschliessen, grösser, als der Winkel *EDF*, den die letztern einschliessen: so ist auch die dritte Seite *BC* des ersten Dreyecks grösser, als die dritte Seite *EF* des letztern. 29. 30. 31F.

Beweis. Wenn an DE in dem Punct D ein Winkel EDG = BAC angesetzt würde: so müste DF zwischen DE und DG fallen, weil EDG > EDF seyn soll. Man nehme DG = AC = DF, und ziehe EG: so wird EG = BC, (54 §.) und man hat drey Fälle zu unterscheiden.

1) Es kann die Linie EG mit EF zusammenfallen, wie in der 29 Fig. und dann ist für sich klar daß EG > EF, folglich BC > EF sey. 29F.

2) Es kann EG unter EF fallen, wie in der 30 Fig. Ziehet man sodann noch FG; so ist EG + DG > EF + DF, (34 §.) und überdem DG = DF: also ist EG > EF wie vorhin. 30F.

 3) Es

31 F. 3) Es kann EG über EF fallen, wie in der 31 F. Ziehet man wiederum FG; so ist DFG = DGF, (61 §.) und weil DGF > EGF, so ist auch DFG > EGF. Es ist ferner EFG > DFG, also EFG > EGF, und EG > EF, (63 §.) folglich BC > EF.

Wenn also zwo Seiten eines Dreyecks ABC so groß sind, als zwo Seiten eines andern DEF, nemlich AB = DE und AC = DF; die dritte Seite BC des ersten aber grösser ist, als die dritte EF des zweyten: so ist der Winkel BAC, welcher der grössern BC gegenübersteht, grösser als der Winkel EDF, welcher der kleinern entgegen steht. Denn wäre BAC = EDF; so müßte BC = EF seyn: (60 §.) und wäre BAC < EDF; so müßte BC < EF seyn, wie eben bewiesen worden, welches beydes wider die Voraussetzung ist. Also ist BAC > EDF, wenn BC > EF ist.

65 §.

30 F. **Wenn die drey Seiten eines Dreyecks *ABC* so groß sind, als die drey Seiten eines andern *DEF*, nämlich *AB* = *DE*, *BC* = *EF*, *AC* = *DF*: so sind die Dreyecke selbst gleich groß, und die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüber stehen.**

Beweis. Weil AB = DE, AC = DF, und überdem BC = EF angenommen wird; so ist der Winkel BAC = EDF. Denn wäre BAC > EDF, oder BAC < EDF: so wäre im ersten Falle BC > EF, und im zweyten Falle BC < EF, (64 §.) welches beydes der Voraussetzung entgegen ist. Also ist BAC = EDF, folglich das Dreyeck ABC = DEF, auch die Winkel B = E, C = F. (60 §.)

Legt

Legt man das eine Dreyeck DEF auf das andre so, daß E auf B, und EF auf BC fällt; so passen die Dreyecke auf einander. Deswegen kann man auf einer Seite einer graden Linie BC als einer Grundlinie nicht zwey unterschiedene Dreyecke setzen, wenn auch die übrigen beyden Seiten gleich groß seyn, und die gleichen Seiten an einerley Endpunct der Grundlinie BC liegen sollen. Diese letzte Einschränkung ist deswegen nöthig, weil DEF auf ABC nicht nothwendig passen würde, wenn man DEF verkehrt auf ABC so legte, daß F in B, und E in C fiele. Denn die Winkel B und C sind ungleich, wenn AB und AC ungleich sind, (63 §.) also sind in eben dem Fall auch B und F ungleiche Winkel.

66 §.

Ein Kreis *CFDG* kann einen andern *CEDH* nicht in mehr als zweenen Puncten schneiden, und diese Puncte liegen auf verschiedenen Seiten der graden Linie *AB*, welche durch beyder Kreise Mittelpuncte *A* und *B* gehet. 15F.

Beweis. In der Linie AB kann kein Durchschnittspunct liegen, weil Kreise, die durch einen Punct dieser Linie gehen, einander nur berühren. (47. 48 §.) Wenn nun ein Durchschnittspunct ausser AB in C liegt: so kann auf eben der Seite von AB kein andrer Durchschnittspunct liegen. Wäre *c* ein solcher Durchschnittspunct; so hätte man zwey Dreyecke ABC und AB*c*, worin AC = A*c*, und BC = B*c* seyn müßte, (34 §.) und diese Dreyecke fielen nicht zusammen, welches dem 65 §. entgegen ist. Nun ist aber gewiß noch ein Durchschnittspunct da, (41 §.) also muß dieser auf der andern Seite von AB liegen: und wenn dies D ist; so fällt auf dieser Seite, vermöge des vorigen, wiederum kein neuer Durchschnittspunct. Demnach kann es überhaupt nicht mehr als zweene Durchschnittspuncte geben.

67 §.

15F. **Es sind drey grade Linien α, β, γ gegeben, man soll an der gegebenen Linie *AG* ein Dreyeck setzen, dessen eine Seite $= \alpha$ ist, und sich auf dieser Linie von *A* nach *G* erstrecket. Von den übrigen beyden Seiten aber soll die, so durch *A* gehet $= \beta$, und die, so durch das andre Ende der Grundlinie gehet $= \gamma$ seyn, vorausgesetzt, daß jede zweene dieser Linien, α, β, γ zusammen grösser als die dritte sind.**

Aufl. Man mache AB $= \alpha$, (40 §.) und verzeichne mit dem Halbmesser $= \beta$ aus dem Mittelpunct A, mit dem Halbmesser $= \gamma$ aber aus B einen Kreis: so werden beyde Kreislinien einander schneiden, und es wird auf jeder Seite von AB ein Durchschnittspunct fallen. Sind C und D diese Puncte: so kann man AC und BC, oder auch AD und BD ziehen, und man hat in beyden Fällen ein Dreyeck ABC, oder ADB, wie es verlangt worden.

Beweis. Daß AC oder AD $= \beta$, und BC oder BD $= \gamma$ sey, erhellet aus dem 34 §, und daß beyde Kreise einander gewiß schneiden, wenn jede zwo von den gegebenen Linien α, β, γ, zusammen grösser, als die dritte sind, ergiebt sich aus dem 42 §.

Wenn zwo von den gegebenen Seiten β und γ gleich groß sind: so erhält man auf der gegebenen Grundlinie AB ein gleichschenklichtes Dreyeck, da denn jeder Schenkel β oder γ grösser, als die halbe Grundlinie seyn muß. Sind aber alle drey gegebene Seiten gleich groß: so wird das Dreyeck gleichseitig,

welches

welches man also auf einer jeden gegebenen Grundlinie leicht verzeichnet.

68 §.

Durch einen gegebenen Punct *C*, der in der graden Linie *AB* liegt, eine andere grade Linie auf *AB* senkrecht zu ziehen. 32 F.

Aufl. Man schneide auf beyden Seiten von C ein Paar Stücke CD = CE ab (40 §.) und setze auf DE ein gleichschenklichtes Dreyeck DEF: so ist die durch C und F gezogene grade Linie auf AB senkrecht.

In der Ausübung ist es nicht nothwendig, die beyden Kreise mit den Halbmessern DF und EF, welche zur Verzeichnung nöthig sind, (67 §.) ganz zu zeichnen: es dienen schon ein paar kleine Bogen davon, den Durchschnittspunct F zu finden, den man eigentlich sucht. Dies ist auch bey den folgenden Aufgaben zu merken, wo ähnliche Verzeichnungen vorkommen.

Beweis. Weil CD = CE, DF = EF, und CF = CF ist, so ist DCF = ECF (65 §.) also CF auf AB senkrecht (19 §.).

Eine grade Linie, welche die Grundlinie des gleichschenklichten Dreyecks halbirt, und durch des entgegen gesetzten Winkels Spitze geht, steht nicht allein auf der Grundlinie senkrecht, sondern halbirt auch den Winkel an der Spitze und die ganze Fläche des Dreyecks.

Wenn ein Durchmesser EF (25 Fig.) die Sehne AB des Kreises in D halbirt, so steht dieser Durchmesser auf der Sehne senkrecht, und halbirt den Winkel ACB des der Sehne zugehörigen Ausschnitts ACBE.

69 §.

33F. **Einen gegebenen Winkel *ABC* zu halbiren.**

Aufl. Man nehme auf beyden Schenkeln ein Paar gleiche Stücke BD = BE, und setze auf DE ein gleichschenklichtes Dreyeck DFE: so halbirt BF den Winkel ABC. Weil nemlich BD = BE, DF = EF, BF = BF: so ist DBF = EBF (65 §.).

70 §.

34F. **Eine grade Linie *AB* mit einer andern senkrecht zu halbiren.**

Aufl. Man setze auf AB ein gleichschenklichtes Dreyeck ACB, und halbire den der Grundlinie AB über stehenden Winkel ACB: (69 §.) so steht die Linie CE, die den Winkel ACB halbirt, auf AB senkrecht, und halbirt AB.

Beweis. Es ist der Winkel ACD = BCD, überdem AC = BC, und CD = CD; also AD = BD und ADC = BDC (60 §.) folglich auch CD auf AB senkrecht (19 §.).

Eine grade Linie, die den Winkel an der Spitze des gleichschenklichten Dreyecks halbirt, halbirt auch die Grundlinie senkrecht, und halbirt überdem das ganze Dreyeck.

Umgekehrt: eine grade Linie DE, welche die Grundlinie AB des gleichschenklichten Dreyecks ABC (24 Fig.) senkrecht halbirt, geht durch die Spitze D. Denn sonst könnte man auch CD ziehen, und alsdenn wären DC, DE, beyde auf AB senkrecht, (68 §.) welches nicht seyn kann (20 §.).

Ein Durchmesser EF des Kreises, der eine Sehne AB (25 Fig.) senkrecht halbirt, geht durch des Kreises Mittelpunct: und wenn der Durchmesser

den

den Winkel ACB halbirt, so halbirt er auch die Sehne AB senkrecht.

Wenn also zweene Kreise einander in C und D (15 Fig.) schneiden, so wird die gemeinschaftliche Sehne CD von der graden Linie AB durch die Mittelpuncte senkrecht halbirt. Denn es ist AC = AD, BC = BD, und AB = AB, also der Winkel BAC = BAD, (65 §.) woraus das übrige folgt.

71 §.

Durch einen gegebenen Punct *A* einer graden Linie *AB* eine andre grade Linie zu ziehen, die mit *AB* einen gegebenen Winkel = *C* einschliest. 35F.

Aufl. Man nehme auf jeden Schenkel des gegebenen Winkels C einen Punct, D auf dem einen und E auf dem andern und ziehe DE. Man mache AF = CD, und setze auf AF ein Dreyeck AFG, so daß die Seite durch A = CE, und die Seite durch F = DE wird: (67 §.) so wird der Winkel A = C (65 §.).

Da es gleichviel ist, wo man die Puncte D und E in den Schenkeln des Winkels C nehmen will: so kann man mit einem beliebigen Halbmesser aus C einen Bogen schlagen, der diese Schenkel in D und E schneidet. Mit eben dem Halbmesser schlage man aus A einen Bogen, der AB in F schneidet. Schlägt man nun mit dem Halbmesser DE aus F einen Bogen, der den vorigen in G schneidet: so kann man durch A und G, die Linie AG ziehen, welche sodann mit AB den verlangten Winkel ausmacht. Die Dreyecke CDE und AFG werden alsdenn gleichschenklichte Dreyecke.

72 §.

36F. **Eine grade Linie *AB* kann eine Kreislinie nicht in mehr denn zweenen Puncte schneiden, auch wenn sie nicht durch den Mittelpunct gehet.**

Beweis. Die grade Linie AB schneide den Kreis DKE in den beyden Puncten D und E: ist nun F ein dritter Durchschnittspunct, und $DG = \frac{1}{2} DE$, $DH = \frac{1}{2} DF$; so müssen die Puncte G und H nothwendig unterschieden seyn. Weil nun vermöge der Voraussetzung nicht nur DE, sondern auch DF eine Sehne des Kreises seyn soll; so müste sowohl CG als auch CH auf AB senkrecht seyn, (68 §.) welches dem 57 §. entgegen ist, weil das Dreyeck GCH nicht bey G und überdem bey H einen rechten Winkel haben kann.

Von einem Punct C, der ausser einer graden Linie AB liegt, kann man nach AB nicht mehr, als zwo gleich große grade Linien CD, CE ziehen. Denn wäre auch CF = CE: so schnitte ein Kreis aus dem Mittelpuncte C mit dem Halbmesser CE beschrieben, die grade Linie AB in mehr denn zweenen Puncten.

73 §.

37F. **Durch einen Punct *C*, der ausser einer graden Linie *AB* liegt, nach *AB* eine senkrechte Linie zu ziehen.**

Aufl. Auf der andern Seite von AB, wo C nicht liegt, nehme man einen beliebigen Punct F, und ziehe die Linie CF, welche AB in H schneiden wird. (14 §.) Aus dem Mittelpunct C beschreibe man mit dem Halbmesser CF einen Kreis: dieser schneidet AB, weil $CH < CF$ ist, (37 §.) und zwar nur in zweenen Puncten. (72 §.) Sind nun D und E diese Puncte: so ziehe man CD, CE, und halbire den

Winkel

Winkel DCE. (69 §.) Die Linie CG, welche diesen Winkel halbirt, steht auf AB senkrecht (70 §.).

Eine grade Linie CG von der Spitze C des gleichschenklichten Dreyecks CDE auf die Grundlinie DE senkrecht gezogen halbirt die Grundlinie; denn wenn DH = HE wäre, so stünde CH ebenfalls auf DE senkrecht, (68 §.) welches dem 57 §. widerspricht. Ein auf der Sehne DE senkrechter Durchmesser des Kreises halbirt also die Sehne.

Wenn eine Linie CH auf AB schief stehet, und also mit ihr auf der einen Seite einen spitzen Winkel CHB, auf der andern einen stumpfen Winkel CHD macht, und man zieht von einem Punct C der Linie CH auf AB eine senkrechte Linie: so muß sie auf der Seite des spitzgen Winkels CHB fallen. Denn fiele sie auf der Seite des stumpfen Winkels in C*g*: so hätte das Dreyeck CH*g* bey *g* einen rechten und bey H einen stumpfen Winkel, welches nicht seyn kann. (57 §.)

74 §.

Durch einen Endpunct *A* einer gegebenen graden Linie *AB* eine andre darauf senkrecht zu ziehen. 44F.

Aufl. Man nehme AD von willkührlicher Grösse, und setze über AD als einer Grundlinie das gleichschenklichte Dreyeck ACD. Aus dem Mittelpunct C mit dem Halbmesser CA verzeichne man einen Kreis, so wird derselbe auch durch D gehen. Durch C und D ziehe man einen Durchmesser dieses Kreises, und hiernächst AE, so steht AE auf AB senkrecht.

Beweis. Es ist ACD = 2CAE, und ACE = 2CAD; (62 §.) also ACD + ACE = 2(CAE + CAD).

+ CAD). Aber ACD + ACE = 2R, (22 §.) folglich CAE + CAD, oder DAE = R.

75 §.

Rechtwinklichte Dreyecke (rectangula, orthogonia) heissen diejenigen, welche einen rechten Winkel haben: alle übrige werden schiefwinklichte Dreyecke (obliquangula) genannt. Ist ein winkel stumpf, so heist es ein stumpfwinklichtes (obtusangulum, amblygonium,) und wenn alle drey Winkel spitze sind, ein spitzwinklichtes Dreyeck (acutangulum, oxygonium). Im rechtwinklichten Dreyeck, wird die Seite, welche dem rechten Winkel entgegen stehet, die Hypothenuse genannt, die übrigen Seiten aber, welche den rechten Winkel einschliessen, heissen die Catheti oder Perpendiculär-Seiten, wovon man gemeiniglich eine als die Grundlinie des Dreyecks ansieht.

Im rechtwinklichten Dreyecke ist also die Hypothenuse, und im stumpfwinklichten Dreyecke diejenige Seite die gröste, welche dem stumpfen Winkel gegenüber stehet (62 §.).

76 §.

38F. **Unter allen graden Linien, die man von einem Punct *C*, der ausser der graden Linie *AB* liegt, nach einem Punct in dieser Linie ziehen kann, ist die senkrechte Linie *CD* die kleinste.**

Und wenn *E* und *F* ein paar Puncte sind, die in *AB* auf eben der Seite der Normallinie *CD* liegen: so ist allemahl die grade Linie *CF* > *CE*, wenn *DE* > *DE* ist.

DF

Beweis. Eine jede solcher Linien, wie CE, CF ist im rechtwinklichten Dreyecke CDE oder CDF die Hypothenuse, und CD eine Perpendiculär-Seite.

Des-

Deswegen ist allemahl $CE > CD$, oder $CF > CD$. (75 §.) Wenn aber F und E auf einer Seite des Perpendiculs CD liegen, und es ist $DF > DE$: so ist allemahl der Winkel $CEF > CDE$. (56 §.) Also CEF ein stumpfer Winkel, und $CF > CE$ (75 §.)

Man kann also von C nach AB auf einer Seite der Normallinie CD nicht zwo unterschiedene gleich grosse grade Linien ziehen.

Ein Kreis mit dem Halbmesser CE beschrieben schneidet AB, weil $CD < CE$ ist, und zwar einmahl in E, aber der andre Durchschnittspunct G fällt nothwendig auf der andern Seite der Normallinie CD, weil $CG = CE$ nicht mit CE auf einer Seite liegen, kann.

77 §.

Wenn *CDE* **ein gleichschenklichtes Dreyeck, und** *CD = CE* **ist: so ist jede grade Linie** *CH* **von der Spitze** *C* **nach der Grundlinie** *DE* **innerhalb des Dreyecks kleiner, als die Schenkel. Jede Linie** *CF* **aber nach der verlängerten Grundlinie ausserhalb des Dreyecks, ist grösser, als die Schenkel** *CD, CE,* **sind.** 36F.

Beweis. Die senkrechte Linie CG auf DE fällt nothwendig innerhalb des Dreyecks, (74 §.) und es ist $CG < CD$. (76 §.) Da also allemahl $CHE > R$, wenn CH auf DE schief stehet; so ist $CH < CE$. Eben so ist allemahl $CEB > R$, (56 §.) also $CF > CE$.

Wenn also ein Kreis die grade Linie AB in D und E schneidet; so fällt das Stück DE ganz innerhalb des Kreises. Demnach liegt jede Sehne ganz innerhalb der Kreisfläche.

78 §.

39F. Wenn zwey Dreyecke *ABC*, *DEF* einen gleichen Winkel haben, so daß $B = E$ ist, und zwo gleiche Seiten, die den gleichen Winkel nicht einschliessen, nemlich $AB = DE$, $AC = DF$; wenn überdem die dem gleichen Winkel gegenüberstehende Seite AC, *DF* grösser ist, als die anliegende Seite AB, *DE*: so sind die ganzen Dreyecke ABC, *DEF* gleich groß, und die übrigen Seiten, nebst den Winkeln, die den gleichen Seiten gegenüberstehen.

Beweis. Unter den angenommenen Bedingungen ist auch EF = BC. Denn es sey nicht EF, sondern EG oder Eg = BC: so ist DG oder Dg = AC. (60 §.) Also im ersten Falle auch DG = DF, und DGF ein gleichschenklichtes Dreyeck, mithin DE > DG, (77 §.) oder AB > AC wider die Voraussetzung. Wäre Eg = BC; so wäre DFg ein gleichschenklichtes Dreyeck und DE > DF, oder wiederum AB > AC. Demnach muß BC = EF seyn: also ist auch A = EDF, C = DFE, und das Dreyeck ABC = DEF (65 §.).

Wenn also rechtwinklichte dreyecke zwo gleiche Seiten haben, die den rechten Winkel nicht einschliessen; so passen sie auf einander, und die übrigen Seiten und Winkel sind von gleicher Grösse. Denn die dem rechten Winkel entgegen stehende Hypothenuse ist grösser als die anliegende Perpendiculärseite. (75 §.).

79 §.

40. 41F. **Es ist ein Winkel *B* gegeben nebst zwoen graden Linien *E* und *F*, man soll ein Dreyeck verzeichnen, worin zwo Seiten, die den Win**

kel

kel *B* nicht einschliessen, so groß als die gegebenen Linien *E*, *F* sind.

Aufl. Man nehme auf dem einen Schenkel des Winkels B das Stück BA = der einen gegebenen Linie E, und aus dem Mittelpunct A beschreibe man mit einem Halbmesser, welcher der andern gegebenen Linie F gleich ist, einen Kreis, dieser wird den andern Schenkel BC des Winkels B schneiden, dafern AC grösser ist, als die Normallinie, die von A auf BC fällt.

Wenn nun F > E ist, wie in der 40 Figur; so fallen die Durchschnittspuncte C und D der graden Linie BC und des Kreises auf entgegengesetzten Seiten von AB. Sie können nicht auf einer Seite fallen, wie in der 41 Figur, weil sonst AD < AB, (77 §.) d. i. F < E seyn würde. Wenn also F > E ist, so muß man von A nach dem Durchschnittspunct C, welcher auf der Seite des gegebenen Winkels fällt, AC ziehen, und ABC wird das verlangte Dreyeck seyn. 40F.

Wenn F < E ist, wie in der 41 Figur; so fallen beyde Durchschnittspuncte D und C auf einer Seite von AB. Sie können nicht auf verschiedenen Seiten fallen, wie in der 40 Figur, weil sonst AB < AD, (77 §.) oder E < F wäre, gegen die Voraussetzung. Zieht man demnach AD oder AC; so hat sowohl das Dreyeck ABD, als auch ABC die verlangten Eigenschaften. Also kann man auf die Gleichheit zweyer Dreyecke, die einen gleichen Winkel, und zwo gleiche Seiten haben, die den gleichen Winkel nicht einschliessen, und auf die Gleichheit ihrer übrigen Seiten und Winkel, nur allein in dem Falle schliessen, wenn die dem gleichen Winkel gegenüberstehende Seite grösser, als die anliegende ist. (78 §.) 41F.

Je kleiner F ist, desto näher kommen die Durchschnittspuncte D und C einander, denn desto näher müssen AD und AC der Normallinie AG rücken. Wäre F der Normallinie gleich; so würde der Kreis die Linie BC nicht mehr schneiden, sondern nur durch einen Punct G derselben durchgehen.

Wäre F kleiner, als die Normallinie von A auf BC; so könnte der Kreis die Linie BC gar nicht mehr treffen, (76 §.) und aus den gegebenen Stücken liesse sich kein Dreyeck verzeichnen.

80 §.

42F. Zwo grade Linien AB, CD, die auf einer Ebene eine solche Lage gegen einander haben, daß sie nicht zusammenstossen können, sie mögen auf beyden Seiten, so weit man will, verlängert werden, heissen **parallele Linien**: und um kurz auszudrücken, daß eine grade Linie AB mit der andern CD parallel sey, braucht man wohl das Zeichen (#) auf folgende Art: AB # CD.

Grade Linien, die in einerley Ebene einerley Lage haben, sind parallele Linien, weil sie bey einerley Lage nicht zusammen stossen und einander schneiden können. (52 §.)

Zwo grade Linien also, die auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel.

81 §.

42F. **Durch einen gegebenen Punct *G* mit einer gegebenen graden Linie *CD* eine Parallelinie zu ziehen.**

Aufl. Man nehme in CD einen Punct H, und ziehe durch G und H die grade Linie EF. Durch G ziehe man AB, unter dem Winkel EGB, oder AGF = EHD; so ist AB mit CD parallel: denn AB und CD

CD haben nun einerley Lage, (53 §.) und sind um deswillen parallel. (80 §.)

Die Winkel AGF, und EHD, pflegte man die **Wechselswinkel** zu nennen, so wie EGB der äussere, und EHD der innere heißt. Wenn also zwo grade Linien AB, CD, von einer dritten EF geschnitten werden, so ist die Gleichheit des äussern und innern Winkels, oder die Gleichheit der Wechselswinkel, ein Kennzeichen der parallelen Lage der graden Linien AB und CD.

Die Winkel EHD und BGF können alle beyde innere Winkel heissen: zu BGF gehört alsdenn der äussere Winkel DHF. Wenn übrigens EHD + BGF = 2R wäre; so ist auch BGF + AGF = 2R, (22 §.) also EHD + BGF = BGF + AGF, mithin EHD = AGF. **Wenn demnach zwo grade Linien *AB* und *CD* eine dritte *EF* so schneiden, daß die beyden innern Winkel zwey rechte Winkel ausmachen, so sind *AB* und *CD* parallel.**

Es ist gleichgültig, ob man die beyden innern Winkel an der einen oder der andern Seite von EF versteht. Denn es ist AGF + BGF = 2R, und CHE + DHE = 2R, (22 §.) also AGF + BGF + CHE + DHE = 4R. Wenn demnach EHD + BGF = 2R ist; so hat man auch AGF + CHE = 2R, und umgekehrt.

82 §.

Wenn zwo grade Linien *AB*, *CD*, die in einerley Ebene einerley Lage haben, mit einer dritten *EF* in *G* und *H* geschnitten werden; so sind nicht allein jeder äussere dem zugehörigen innern, und beyde Wechselswinkel gleich; sondern es ist auch überdem an jeder Seite die 42 F.

Summe der beyden innern Winkel zweenen rechten Winkeln gleich.

Beweis. Daß EGB oder AGF = EHD sey, wenn AB und CD einerley Lage haben, ist aus dem 55 §. bekannt. Ueberdem aber ist BGF + AGF = 2 R, also BGF + EHD = 2 R, und eben deswegen auch AGF + CHE = 2 R. (81 §.)

83 §.

42 F. Werden dagegen zwo grade Linien *ab* und *CD*, die in einerley Ebene nicht einerley Lage haben, mit einer dritten *EF* in *G* und *H* geschnitten; so ist auf der einen Seite der äussere Winkel grösser, auf der andern Seite kleiner, als der gegenüberstehende innere: auch ist auf der Seite, wo der äussere Winkel den innern übertrift, die Summe der beyden innern Winkel kleiner, an der andern Seite dagegen grösser als zweene rechte Winkel.

Beweis. Der äussere Winkel EG*b* ist nun dem gegenüberstehenden Winkel EHD ungleich, denn sonst hätten *ab* und CD einerley Lage. (53 §.) Ferner ist allemahl EG*b* + EG*a* = EHD + EHC = 2 R: wenn also EG*b* > EHD ist, so ist dagegen EG*a* < EHC, und umgekehrt. Es sey also EG*b* > EHD, so ist EHD + *b*GF < EG*b* + *b*GF, folglich EHD + *b*GF < 2 R. Ueberdem ist alsdenn EG*a* < EHC, also EHC + *a*GF > EG*a* + *a*GF, oder EHC + *a*GF > 2 R.

84 §.

42 F. Wenn eine Seitenlinie *GH* und ein anliegender Winkel *GHD* gegeben sind; so kann man aus beyden ein solches Dreyeck verzeichnen, worin der Winkel, welcher der gegebenen

nen Seite *GH* gegenüber steht, kleiner ist, als jeder gegebene Winkel.

Beweis. In demjenigen Schenkel HL des gegebenen Winkels, dessen Länge nicht bestimmt ist, nehme man einen Punct M, wo man will, an, und ziehe GM; man nehme hiernächst MN = MG, und ziehe GN, so ist GNH = $\frac{1}{2}$GMH; (62 §.) man nehme aufs neue NO = NG, und ziehe GO, so ist GON = $\frac{1}{2}$GNH, also GON = $\frac{1}{2^2}$. GMH: weiter nehme man OP = OG und ziehe GP, so ist GPH = $\frac{1}{2}$GOH, also GPH = $\frac{1}{2^3}$GMH. Fährt man so fort, so wird jedesmahl der Winkel an der Spitze im folgenden Dreyeck halb so groß, als er im vorigen war. Im folgenden vierten Dreyeck, GNH für das erste gezählt, wird dieser Winkel = $\frac{1}{2^4}$GMH, und nach *n*mahliger Wiederhohlung desselben Verfahrens = $\frac{1}{2^n}$GMH: die Zahl 2^n aber kann so groß werden, daß $\frac{1}{2^n}$GMH kleiner wird, als jeder Winkel, der sich angeben läßt, er sey so klein, als er wolle. (128 §. Rechenk.)

85 §.

Zwo grade Linien *ab*, *CD*, die in einerley Ebene nicht einerley Lage haben, schneiden einander nach der Seite verlängert, wo die Summe der innern Winkel, wenn man beyde mit einer dritten *EF* schneidet, kleiner als die Summe zweener rechten Winkel ist.

Beweis. Die innern Winkel, deren Summe $< 2R$ ist, liegen an der Seite, wo der äussere Winkel EGb grösser ist, als der innere gegenüberstehende. EHD, (83 §.) Es sey also $EGb > EHD$ und man mache $EGB = EHD$, so haben AB und CD einerley Lage, und es ist $EHD + BGF = 2R$. (82 §.) Weil nun $EHD + bGF < 2R$ ist, so ist $EHD + bGF < EHD + BGF$, und $bGF < BGF$, mithin liegt Gb zwischen den Schenkeln des Winkels BGF, und $BGb = BGF - bGF$ ist ein gegebener Winkel. Man nehme GH und den anliegenden Winkel GHD als gegebene Stücke an, und zeichne über GH ein Dreyeck, worin der Winkel GOH der Seitenlinie GH gegenüber kleiner als BGb ist; (84 §.) so ist überdem $GOH = BGO$, (28 §.) also $BGO < BGb$. Es ist aber $HGO + BGO = bGF + BGb$, also nun $HGO > bGF$, mithin liegt Gb zwischen den Schenkeln des Winkels HGO in der Fläche des Dreyecks HGO, und Gb verlängert schneidet HO. (31 §.)

86 §.

Parallele Linien haben in einerley Ebene einerley Lage.

Beweis. Denn parallele Linien liegen in einerley Ebene, so daß sie nicht zusammen laufen, und einander schneiden können. (80 §.) Hätten sie aber nicht einerley Lage, so würden sie verlängert einander schneiden, (85 §.) welches jenem widerspricht: also haben parallele Linien in einerley Ebene einerley Lage.

Wenn demnach zwo parallele Linien von einer dritten geschnitten werden; so sind nicht allein der äussere und innere Winkel, so wie beyde Wechselswinkel gleich groß, sondern auch die Summe der

beyden

beyden innern Winkel ist zweenen rechten Winkeln gleich. (82 §.

Der Satz des 85 §. ist beym **Euclides** ein Grundsatz, den er ohne Beweis annimmt, und sowohl seine Ausleger, als auch andre Schriftsteller haben versucht, davon einen scharfen Beweis zu geben, wovon man in des H. Prof. **Klügels** Abhandlung: Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, Gott. 1763, Nachrichten findet. Statt eines ehemals von mir gebrauchten Verfahrens, dessen auch H. Klügel erwehnt hat, halte ich nun das hier gebrauchte für vollkommen befriedigend. Die Sätze des 52. 53. 54 §. beruhen auf sehr einfachen, und dabey doch so natürlich klaren Begriffen, daß ich dafür halte, niemand werde sich ein Bedenken machen, sie als Grundsätze gelten zu lassen.

87 §.

Zwo grade Linien *AB* und *CD*, die mit einer dritten *EF* parallel laufen, sind auch unter sich parallel. 43F.

Eine grade Linie *ab* aber, die eine von zwoen Parallelen *AB* schneidet, muß, wenn man sie verlängert, auch die andre *CD* mit der vorigen unter einerley Winkel schneiden. 42F.

Beweis. Weil AB und CD mit EF (43 Fig.) einerley Lage haben, wenn AB und CD mit EF parallel sind, (86 §.) so haben AB und CD auch für sich einerley Lage, wie schon für sich klar ist. Wären AB und *ab* mit CD (42 F.) aber nicht unter sich parallel; so müßten AB und *ab* einander irgendwo in G schneiden. Man nehme H in CD, und ziehe EF durch G und H; so müßte nun EGB = EHD seyn, weil AB ⫲ CD seyn soll, und überdem EGb = EHD, weil zugleich ab ⌗ CD seyn soll: mithin wäre EGB = EGb, welches nicht seyn kann.

Würde von den beyden Parallellinien AB und CD die eine AB von einer dritten graden Linie ab geschnitten, ohne daß ab auch CD schnitte; so wären ab und CD parallel, (80 §.) und hätten einerley Lage: (86 §.) mithin müßte vermöge des vorigen Satzes auch ab mit AB parallel seyn, und ab könnte AB ebenfalls nicht schneiden. Diesemnach wird CD von ab und zwar so geschnitten, daß beyde mit einander einen Winkel von eben der Grösse, wie AB und ab einschliessen. (86 §.)

88 §.

42F. **Wenn die Schenkel** GE, DK, **und** GB, DL, **zweener Winkel** EGB **und** KDL, **die in Ansehung der Spitzen** G **und** D **nach einer Seite zu liegen, parallel sind, so sind die Winkel gleich groß.**

Beweis. Weil GB mit DL parallel ist, und GB von GE geschnitten wird; so wird auch DL von GE geschnitten, wenn man diese beyden Schenkel durch D und G nach H verlängert. (87 §.) Wenn nun H der Durchschnittspunct ist, so hat man EGB = EHD, und KDL = EHD, (86 §.) mithin auch EGB = KDL.

89 §.

20F. **Wenn zwey Dreyecke** ABC, DEF **gleiche Winkel haben** $B = E$, $A = D$, **also auch** $C = F$ **(57 §.) und überdem eine gleiche Seite, die zwischen gleichen Winkeln liegt** $BC = EF$: **so passen die Dreyecke auf einander, und**

die

die Seiten sind gleich groß, die den gleichen Winkeln gegenüberstehen.

Beweis. Die Seite EF paßt auf BC, der Winkel E auf B und F auf C. (18 §.) Also fällt ED mit BA und FD mit CA zusammen, und alsdenn liegt D in beyden Linien BA und CA zugleich, mithin fällt auch D mit A zusammen. Folglich passen die Dreyecke auf einder, und es ist auch AC = DF, AB = DE.

90 §.

Wenn zwey bey *B* und *E* rechtwinklichte Dreyecke *ABC*, *DEF* eine gleiche Perpendiculärseite haben, nemlich *BC* = *EF*, und ungleiche anliegende spitze Winkel *ACB*, *DFE*; so sind die entgegengesetzten Seiten *AB* und *DE* auch ungleich, und zwar stehet die grössere Seite dem grössern Winkel entgegen. 49F.

Beweis. Es sey ACB > F, und man mache GCB = F: so muß CG zwischen CA und CB fallen, weil GCB < ACB ist, und CG muß AB zwischen A und B schneiden, so daß AB > GB wird. Es ist aber GB = DE, (89 §.) also auch AB > DE.

91 §.

Es ist eine grade Linie *BC* nebst zweenen Winkeln α und β gegeben, die beyde zusammen kleiner, als zweene rechte sind; man soll ein Dreyeck verzeichnen, worin eine Seite = *BC*, ein Winkel = α, und ein andrer = β ist. 50. 51F.

Aufl. Dies läst sich auf zweyerley Art bewerkstelligen. Denn man kann das Dreyeck so verzeichnen, daß beyde Winkel α und β an der Seite BC anliegen: man kann es auch so verzeichnen, daß einer

von

von diesen beyden Winkeln der Seite BC gegenüberstehet.

50F. Setzt man an BC bey B den Winkel $ABC = \alpha$, und bey C den Winkel $ACB = \beta$: so schneiden AB und AC einander, oberhalb BC, (85 §.) und es ergiebt sich ein Dreyeck ABC, welches die verlangten Eigenschaften hat.

51F. Soll β der Seite BC gegenüber stehen: so verfahre man so: Nachdem $ABC = \alpha$ gemacht worden, mache man $ABD = \beta$ und verlängere BC durch B nach E: so erhält man den Winkel $EBD = \gamma$, welcher mit $\alpha + \beta$ zweene rechte Winkel ausmacht. (22 §.) Man mache nun $BCA = \gamma$: so werden BA und CA zusammen stossen, weil $\alpha + \gamma < 2R$, und man wird ein Dreyeck ABC erhalten, worin $A = 2R - (\alpha + \gamma,)$ (57 §.) also $A = \beta$ ist.

92 §.

Weil die Entfernung eines Orts vom andern überhaupt der kürzeste Weg ist, der von einem Ort zum andern führt, (33 §.) so ist die Entfernug eines
38F. Puncts C von einer graden Linie AB mit der graden Linie CD einerley, die sich von C auf AB senkrecht
52F. ziehen läst. (76 §.) Wie weit eine grade Linie AB in irgend einem ihrer Puncte E von einer andern CD entfernt sey, wird also durch die Grösse der von E nach CD gezogenen Normallinie EF bestimmt.

93 §.

52F. **Wenn zwo Entfernungen *EF*, *GH* einer graden Linie *AB* von einer andern *CD* gleich groß sind: so sind die Linien *AB*, *CD* parallel. Wenn dagegen zwo Entfernungen *AD*, *BC* (54 Fig.) einer graden Linie *DC* von der andern ungleich sind, so läuft *DC* mit *AB* nach der**

der Seite verlängert zusammen, wo die Entfernung die kleinere ist.

Beweis. 1.) Ziehet man EH, so ist EHG = FEH, weil EF # GH ist. Ueberdem wird vorausgesetzt, es sey EF = GH, und es ist EH = EH. Demnach ist in den Dreyecken EFH und EGH (60 §.) der Winkel EGH = EFH = R = GHF, und AB # CD (80 §.).

2.) Man verlängere BC, nehme BE = AD, und ziehe DE, so ist DE # AB: (vermöge n. 1.) 54. F.
also BAD + ADE = 2R, (86 §.) und weil BAD = R, so ist auch ADE = R, mithin ADC < R, und DC muß mit AB nach C und B verlängert zusammen laufen. (85 §.).

Parallele Linien sind also durchgängig gleichweit von einander entfernt. Denn wenn nur zwo Entfernungen der einen von der andern ungleich wären, so wären die Linien nicht parallel.

Nicht parallele Linien *AB*, *DC* **nähern sich einander immer mehr je näher sie ihrem Durchschnittspunct** *F* **kommen.** Wenn nemlich DA, CB, zwo Entfernungen sind; so ist ADC, so wie BCF = DCE < R, und die lothrechte Linie DE auf BC fällt so, daß BE > BC wird. Alsdenn aber ist BE = AD, also AD > BC. Auf der andern Seite des Durchschnittspuncts F, wachsen die Entfernungen, *bc*, *ad*, wieder wie sie vorher abnahmen.

94 §.

Alle Puncte *E*, *G*, *L*, **u. s. f. die von einer** 52F.
graden Linie *CD* **gleichweit entfernt sind, liegen in grader Linie.**

Beweis.

Beweis. Es sey EF = GH = LK, und jede dieser graden Linien sey auf CD senkrecht; so ist die grade Linie durch E und G mit CD parallel, (93 §.) und schneidet KL (87 §.) in einem solchen Punct, der von CD eben so weit, als E und G entfernt ist: also muß L der Durchschnittspunct seyn, oder L muß in der verlängerten Linie EG liegen.

Der IV. Abschnitt.

Von den Vierecken, und insbesondre den Parallelogrammen.

95 §.

53F. Ein Viereck ABCD, worin jede zwo entgegen gesetzte Seiten, AB und CD, imgleichen AD und BC, parallel sind, heißt ein **Parallelogramm**. Wenn dagegen nur zwo entgegen gesetzte Seiten im Viereck parallel sind; so heißt die Figur ein **Trapezium**: und wenn keine Seite mit einer andern parallel ist, ein **Trapezoides** oder schlechthin ein Viereck.

53F. Weil man durch zweene Puncte A, B, einer von zwoen Parallellinien AB, DC, in jeder Lage gegen AB wiederum zwo andre Parallelinien AD, BC, ziehen kann, welche CD ebenfalls schneiden, (88 §.) so wird solchergestalt ein Parallelogramm verzeichnet.

96 §.

Eine grade Linie, die zwischen den Spitzen zweener Winkel einer gradlinichten Figur, und überdem ganz in der Fläche der Figur liegt, heißt eine **Diagonallinie** der Figur.

Jedes

Jedes Viereck läßt sich vermittelst einer solchen Diagonallinie in zwey Dreyecke theilen, auch alsdenn, wenn es einen erhabenen Winkel hat, wie ABCE in der 66 Fig. Denn die grade Linie BE zwischen den Spitzen des erhabenen und des ihm gegenüber liegenden hohlen Winkels liegt um deßwillen in der Fläche des Vierecks, weil die übrigen beyden Winkel nothwendig hohle Winkel sind. (30 §.)

Alle sechs Winkel dieser beyden Dreyecke sind zusammen so groß, als die Summe der vier Winkel des Vierecks: mithin machen alle vier **Winkel eines jeden Vierecks die Summe von vier rechten Winkeln** aus. (57 §.).

97 §.

Wenn *AD* **und** *BC*, **ein Paar gleich grosse** 53F.
Parallellinien sind, und man ziehet auf jeder Seite die Endpuncte mit den graden Linien *AB* **und** *CD* **zusammen; so wird das Viereck** *ABCD* **ein Parallelogramm.**

Beweis. Man ziehe die Diagonallinie BD; so ist in den Dreyecken ABD und BCD der Winkel ADB = DBC, (86 §.) die Seite AD = BC, und BD = BD, also der Winkel ABD = BDC: (60 §.) folglich AB mit CD parallel. (80 §.).

98 §.

In einem Parallelogramm *ABCD* **ist jeder** 53F.
Winkel dem gegenüberstehenden gleich; und umgekehrt: ein Viereck, worin jeder Winkel so groß ist als der gegenüberstehende ist ein Parallelogramm.

Beweis. Es ist A + ADC = 2R = A + ABC (86 §.) also ADC = ABC. Ferner A + ADC = 2R = ADC + C (86 §.) also auch A = C

(28 §.

(28 §. Rech.) In jedem Viereck aber ist $A + ABC + C + ADC = 4R$ (96 §.) wenn also $A = C$ und $ABC = ADC$ ist, so hat man $2A + 2ABC = 4R$, und $A + ABC = 2R$, folglich auch $A + ADC = 2R$, und es ist $AD \# BC$; so wie $AB \# CD$.

99 §.

In jedem Parallelogramm sind die entgegengesetzten Seiten gleich; und umgekehrt: ein Viereck, worin jede zwo entgegengesetzte Seiten gleich sind, ist ein Parallelogramm.

53F. **Beweis.** Wenn ABCD ein Parallelogramm ist, und man ziehet die Diagonallinie BD; so ist in den Dreyecken ABD, und CBD der Winkel $ADB = DBC$, und $ABD = BDC$. (86 §.) Da nun auch $BD = BD$ ist; so ist $AB = CD$, und $AD = BC$. (89 §.) Wenn aber in dem Viereck ABCD die Seite $AB = CD$ und $AD = BC$ ist; so ist überdem $BD = BD$. Folglich in den Dreyecken ABD, und BDC der Winkel $ADB = DBC$, also $AD \# BC$, überdem $ABD = BDC$, (65 §.) mithin auch $AB \# CD$. (80 §.).

Jedes Parallelogramm wird vermittelst der Diagonallinie in zwey Dreyecke getheilt, die gleich grosse Seiten und Winkel, also auch eine gleiche Fläche haben: und wenn in einem Parallelogramm ABCD zwo Seiten AB, CD, die einen Winkel A einschliessen, gleich groß sind; so sind alle Seiten gleich groß.

100 §.

Wenn ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter Winkel ist, so sind die übrigen alle auch rechte Winkel, und das Parallelogramm heißt alsdenn ein **Rechteck.** Wofern dagegen ein Winkel des Parallelorallelogramms schief ist; so sind die übrigen alle auch schief, (99 §.) zwey einander entgegen gesetzte sind spitze und die übrigen beyden stumpfe Winkel.

Ein **Quadrat** ist ein gleichseitiges und rechtwinklichtes, ein **Rhombus** aber ein gleichseitiges und schiefwinklichtes Parallelogramm. Das ungleichseitige und schiefwinklichte Parallelogramm heißt auch wohl ein **Rhomboides.**

101 §.

Es ist ein Winkel *DAB* nebst zwoen Seiten *E* und *F* gegeben, man soll aus diesen Stücken ein Parallelogramm verzeichnen. 53 F.

Aufl. Man nehme auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels AB = E, und auf dem andern AD = F. Mit dem Halbmesser AD verzeichne man aus B, und mit dem Halbmesser AB aus D Kreise. Diese werden sich schneiden, weil ABD ein Dreyeck ist: (42 §.) der eine Durchschnittspunct ist mit A einerley, und der andre fällt über BD. (66 §.) Er sey C, und man ziehe BC und CD: so ist ABCD ein Parallelogramm, weil AB = CD, und AD = BC ist. (99. §.).

In der Ausübung ist es nicht nöthig, die ganzen Kreise zu zeichnen, denn man sucht eigentlich nur den über BD fallenden Durchschnittspunct, und diesen erhält man schon durch ein paar mäßige Bogen derselben.

Soll man auf einer gegebenen graden Linie AB ein Quadrat setzen; so bedarf man weiter keiner andern gegebenen Stücke. Man setzt auf AB durch A eine senkrechte Linie (74 §.) nimmt auf derselben AD = AB, und verfähret wie vorhin: so erhält man das Quadrat ABCD. 55 F.

56F. Wenn zwo Seiten E und F gegeben sind, und man soll daraus ein Rechteck verzeichnen; so bedarf man weiter keines gegebenen Winkels. Auf einer graden Linie AB setzt man, wie vorhin, eine senkrechte Linie AD; so ist DAB der gegebene Winkel: übrigens verfährt man nach den gegebenen Regeln.

57F. Soll man auf einer gegebenen Linie AB einen Rhombum setzen; so muß man den Winkel α wissen, den die Seiten des Rhombi einschliessen sollen. Man macht den Winkel BAD $= \alpha$, und AD $=$ AB: übrigens ergiebt sich der Rhombus ABCD wie vorhin.

102 §.

58F. Zwey Quadrate ABCD, EFGH, die gleiche Seiten haben, passen auf einander, und sind gleich groß. Wenn aber die Seite AB des Quadrats ABCD kleiner als die Seite EI des Quadrats EIKL ist: so ist ABCD $<$ EIKL. Denn ABCD past auf das Stück EFGH, des Quadrats EIKL.

Wenn demnach umgekehrt zwo Quadrate gleich groß sind; so sind ihre Seiten gleich groß, und des grössern Quadrats Seite ist grösser, als die Seite des kleinern Quadrats.

103 §.

Nimmt man im Parallelogramm eine Seite für die Grundlinie an; so ist die Höhe des Parallelogramms die Entfernung der entgegengesetzten Seite von dieser Grundlinie. Und wenn man im Dreyeck eine Seite für die Grundlinie nimmt; so ist die Höhe des Dreyecks die Entfernung der Spitze des entgegengesetzten Winkels von dieser Grundlinie.

55.
56F. Wenn im rechtwinklichten Parallelogramm ABCD eine Seite, welche man will, z. E. AB die Grundlinie ist; so ist die anliegende Seite AD oder BC, die

Höhe:

Höhe: und wenn im rechtwinklichten Dreyeck ABC der eine Cathetus BC die Grundlinie ist; so ist der andre AB die Höhe. 49F.

104 §.

Parallelogramme *ABCD* und *ABEF*, die gleiche Grundlinien und Höhen haben, sind gleich groß. 59F.

Beweis. Man kann allemahl das eine ABEF so auf das andre ABCD legen, daß beyde Grundlinien zusammenfallen, wie die Figur vorstellet. Sind nun die Höhen gleich; so sind alle Puncte in CD und EF gleichweit von AB entfernt, und deswegen fallen CD und EF in einer graden Linie. (94 §.) Dafern nun überdem der Winkel DAB = FAB ist; so paßt ABEF auf ABCD, und beyde Figuren sind gleich groß. Wenn aber die Winkel DAB, und FAB nicht gleich groß sind: so muß man drey Fälle unterscheiden.

1) Es kann F zwischen D und C fallen, wie in der 59 Figur. Nun ist DC = AB = FE, also DC − CF = FE − CF, oder DF = CE; ferner AD = BC, AF = BE: also das Dreyeck ADF = BCE (65 §.) und ADF + ABCF = BCE + ABCF, d. i. Pgr. ABCD = ABEF. 59F.

2) Es kann F in C fallen, und es bleibt das Dreyeck ACD = BEF, also ACD + ABF = BEF + ABF, d. i. Pgr. ABCD = ABEF. 60F.

3) Es kann F auf der andern Seite von C fallen, so daß BC von AF in G geschnitten wird. Es bleibt aber noch DC = FE, und also DC + CF = EF + CF, oder DF = CE, AD = BC, AF = BE, also das Dreyeck ADF = BCE. Ferner ADF − CGF = BCE − CGF d. i. ADCG = BGEF, und wiederum ADCG + AGB = BGFE + AGB, oder Pgr. ABCD = ABEF. 61F.

Statt eines gegebenen schiefwinklichten Parallelogramms kann man also allemahl leicht ein rechtwinklichtes verzeichnen, das jenem gleich ist, wenn man die eine Seite des rechtwinklichten der Grundlinie, und die andre Seite der Höhe des andern gleich macht.

105 §.

62F. Dreyecke *ABC*, *DEF* über gleichen Grundlinien, in gleicher Höhe, sind gleich groß.

Beweis. Aus den Winkeln A, D, und den Seiten AB, AC, und DE, DF verzeichne man die Parallelogramme AG und DH, die mit den Dreyecken ABC, DEF gleiche Grundlinien und Höhen haben: so ist Pgr. AG = Pgr. DH. (104 §.) Also $\frac{1}{2}$ AG = $\frac{1}{2}$ DH, oder das Dreyeck ABC = DEF. (99 §.)

Jedes Parallelogramm ist demnach doppelt so groß, als ein Dreyeck, so mit demselben gleiche Grundlinie hat.

106 §.

62F. 1.) Ist die Grundlinie DK eines von zweyen gleich hohen Dreyecken ABC, DKF grösser, als die Grundlinie des zweyten: so ist das Dreyeck DKF grösser, als ABC. Denn ein Theil DE von DK ist nun = AB, und das Dreyeck DKF > DEF, also DKF > ABC.

69F. 2.) Wenn in zweyen rechtwinklichten Dreyecken ABC, *abc*, die Grundlinie AB = *ab* ist, aber die Höhe *ac* > AC, so ist das Dreyeck *abc* in grösserer Höhe grösser als ABC: denn auch *ac*, AC, kann man für die Grundlinien nehmen, so sind die Höhen AB, *ab*, gleich, und der Satz folgt aus dem vorigen. Statt eines jeden von zweyen schiefwinklichten Dreyecken ABG, *abg*, auf gleichen Grundlinien in unglei-

ungleichen Höhen $ac > AC$ kann man auf derselben Höhe ein rechtwinklichtes Dreyeck zeichnen, das dem damit zusammen gehörigen schiefwinklichten gleich ist: alsdenn ist $abc > ABC$, mithin auch $abg > ABG$.

3.) Wenn demnach sowohl die Grundlinie, als auch die Höhe eines Dreyecks grösser, als die Grundlinie und Höhe eines andern Dreyecks ist: so ist noch um so mehr das erste Dreyeck grösser, als das letzte.

107 §.

Ein rechtwinklichtes Parallelogramm zu verzeichnen, das so groß, als ein gegebenes Dreyeck *ABC* ist. 64 F.

Aufl. I. Nachdem man CF mit der Grundlinie AB parallel gezogen hat, theile man AB bey D in zwey gleiche Theile, setze DE auf AB senkrecht, und ziehe BF mit DE parallel: so ist DBFE das verlangte Rechteck.

Beweis. Man ziehe CD: so ist das Rechteck DBFE = 2 . DBC (105 §.) und zugleich ABC = 2 DBC, also DBFE = ABC.

Es könnte auch BDE einem jeden andern gegebenen Winkel gleich genommen werden, wenn das Parallelogramm schiefwinklicht werden sollte: allemahl aber wird vermittelst dieser Verzeichnung ein Parallelogramm zuwege gebracht, das mit dem Dreyeck eine gleiche Höhe, und eine halb so grosse Grundlinie als das Dreyeck hat. Statt desselben läßt sich unter eben dem Winkel auch ein andres noch eben so grosses Parallelogramm verzeichnen, wovon eine Seitenlinie eine gegebene Länge hat.

II. Man verlängere die Grundlinie AB nach G und nehme BG so lang, als die gegebene Linie *ab* ist. Durch G ziehe man GH mit FB parallel, so werden

EF und GH einander in H schneiden, und man erhält das Parallelogramm BGHF. Ferner ziehe man in demselben die Diagonallinie BH, welche DE in I schneidet, durch I aber IK mit AB parallel; so werden BF und GH von IK in L und K geschnitten, und man erhält das Parallelogramm BGKL, worin BG die verlangte Länge hat. Aber auch eben dies Parallelogramm ist dem vorigen DBFE gleich.

Beweis. Es ist nemlich das Dreyeck EHI = KHI und das Dreyeck BFH = BGH, (99 §.) also EHI – BFH = KHI – BGH, oder das Viereck EFBI = BGKI. Ferner ist DBI = BLI, also EFBI – DBI = BGKI – BLI, oder das Parallelogramm DBFE = BGKL.

Aus dem zuletzt beygefügten Beweise folgt der allgemeine Satz: Wenn durch einen Punct B in der Diagonallinie HI eines Parallelogramms EHKI zwo grade Linien DG, FL mit den Seiten des Parallelogramms parallel gezogen werden, die es in vier andre Parallelogramme theilen; so sind von den letztern diejenigen beyden, durch welche die Diagonallinie des ganzen nicht durchgehet, gleich groß.

108 §.

67F. **Wenn auf den dreyen Seiten *AB*, *AC*, *BC* eines bey *A* rechtwinklichten Dreyecks *ABC* Quadrate verzeichnet sind; so ist das Quadrat *CE* auf der Hypothenuse so groß, als die Summe der Quadrate *AD* + *AL* auf den Perpendiculär-Seiten.**

Beweis. Weil BAH = R = CAG ist, so liegt AG mit AB und AH mit AC in grader Linie. (22 §.) Aus der Spitze des rechten Winkels A, sey AF auf der Hypothenuse BC senkrecht gezogen, und schneide

die

die gegenüberstehende Seite des Quadrats CE in K: so ist EF sowohl als CK ein Rechteck. Man ziehe AE und CD: so ist EF = 2ABE und AD = 2DBC. (105 §.) Aber der Winkel ABD = R = CBE, also ABD + ABC = CBE + ABC, oder DBC = ABE; ferner DB = AB, und BC = BE, also das Dreyeck ABE = DBC, (60 §.) und 2ABE = 2DBC, folglich das Rechteck EF = dem Quadrat AD. Eben so erhellet, daß das Rechteck CK = 2ACM, und das Quadrat AL = 2BCL, ACM aber = BCL, mithin das Rechteck CK = Quadr. AL sey. Demnach ist EF + CK = CE = AD + AL.

Dieser Lehrsatz heist von dem Erfinder der Pythagorische Lehrsatz, und wird in der Folge oft gebraucht werden. Weil es etwas leichtes ist, sich über jeder graden Linie ein Quadrat vorzustellen; so pflegt man die Quadrate nicht allemahl ausdrücklich in den Figuren zu zeichnen, vielmehr in der Ausübung sich folgender Verkürzung zu bedienen. Wenn über einer graden Linie AB ein Quadrat stehen sollte, das nicht ausdrücklich gezeichnet ist; so setzt man an den Buchstaben, die diese Linie bezeichnen, oberwärts rechter Hand den Buchstab q, auf diese Art AB^q: so wäre in der 67 Fig. $AB^q = AD$, $AC^q = AL$, $BC^q = CE$. Vermöge dieser verkürzten Ausdrücke läst sich der Pythagorische Lehrsatz so ausdrücken: In einem bey A rechtwinklichen Dreyeck ABC ist $BC^q = AB^q + AC^q$.

Es folgt hieraus, daß $BC^q - AC^q = AB^q$ sey, das heist: Im rechtwinklichten Dreyeck ist das Quadrat eines jeden Catheti gleich der Differenz des Quadrats des andern Catheti vom Quadrat der Hypothenuse.

109 §.

68 F. **Wenn in einem Dreyeck** ABC, $BCq = ABq + ACq$ **ist: so ist der Winkel** BAC, **der** BC **gegenüber stehet, ein rechter Winkel.**

Beweis. Man setze AD auf AB senkrecht, und mache $AD = AC$, ziehe BD: so ist $BDq = ABq + ADq$ (108 §.) $= ABq + ACq = BCq$, also $BD = BC$ (102 §.) Demnach paßt das Dreyeck ABD auf ABC und es ist der Winkel $BAD = BAC = R$. (65 §.).

Wenn also in einem Dreyeck abc, $bcq < abq + acq$ ist: so ist der Winkel a spitz. Denn im Dreyeck ABC, worin $AB = ab$, $AC = ac$, und $BCq = ABq + ACq = abq + acq$ gemacht worden, ist $A = R$. Weil nun $bcq < BCq$, folglich $bc < BC$: so ist $a < A$, (63 §.) also $a < R$. Auf ähnliche Art erhellet, wenn $bcq > abq + acq$ ist, daß A stumpf seyn müsse.

110 §.

Es sind die Seiten zweyer Quadrate gegeben: man soll die Seite eines Quadrats suchen, welches der Summe, oder der Differenz der vorigen gleich ist.

69 F. Aufl. Man verzeichne einen rechten Winkel A. (74 §.) Dafern nun D und E die Seiten der gegebenen Quadrate sind, deren Summe gesucht wird: so mache man $AB = D$, $AC = E$, und ziehe BC: so ist $BCq = ABq + ACq = Dq + Eq$. Sind F und E die Seiten der gegebenen Quadrate, deren Differenz gesucht wird: so nehme man $AC =$ der kleinern Seite E, und mit dem Halbmesser F verzeichne man aus C einen Kreis, welcher den andern Schenkel des rechten Winkels A schneidet. (79 §.) Ist nun B ein Durchschnittspunct, so ist AB die gesuchte Seite.

Denn

Denn man ziehe BC: so ist $ABq = BCq - ACq = Fq - Eq$ (108 §.).

111 §.

Wenn in zweyen rechtwinklichten Dreyecken die Hypothenuse *BC* des einen so groß, als die Hypothenuse *bc* des andern, aber die Grundlinie *AB* grösser als die Grundlinie *ab* des andern ist; so ist des erstern Höhe *AC* kleiner als die Höhe *ac* des andern.

Beweis. Es ist $ABq + ACq = BCq$, und $abq + acq = bcq$: (108 §.) wenn also $BC = bc$ ist, so ist $ABq + ACq = abq + acq$. (103 §.) Ist nun ferner $AB > ab$, so ist $ABq > abq$, mithin $ACq < acq$, und $AC < ac$. (103 §.)

Der V. Abschnitt.

Anwendung der Rechenkunst auf die Ausmessung grader Linien und Winkel.

112 §.

Bey allen Messungen nimmt man eine gewisse Grösse, die mit demjenigen, was man messen will, von einerley Art ist, als bekannt an; man nennt diese als bekannt angenommene Grösse das Maaß, und sie ist nichts anders, als die Einheit, womit man die auszumessende Grösse vergleicht, um ihr Verhältniß gegen diese Einheit durch eine Zahl auszudrücken. Ein jedes Maaß ist an sich willkührlich: inzwischen hat man nun allenthalben eingeführte bestimmte Maasse, und dies Maaß ist bey jeder Messung eine gegebene Grösse. Bey Ausmessung grader Linien muß also eine bestimmte Länge für das Maaß angenommen werden, und es ist fast durchgängig eingeführt, ohngefehr die Länge des Fusses eines erwachsenen Menschen dafür anzunehmen, daher man auch dies Maaß einen **Fuß** nennt. Man vergleiche den 251 §. der Rechenkunst:

113 §.

Eine Länge von 10 Füssen heiß eine **Ruthe**, der zehnte Theil des Fusses ein **Zoll**, der zehnte Theil des Zolles eine **Linie**, und der zehnte Theil einer Linie ein **Scrupel**. Diese Eintheilung ist aber vornemlich nur bey den Geometern gewöhnlich und dies deswegen, weil auf solche Art die kleinern Theile des Maasses durch Decimalbrüche ausgedrückt werden, welches wie aus der Rechenkunst bekannt ist, oft dazu dient, Rechnungen mehr ins kurze zu ziehen. Sonst ist es in gemeinen Leben mehr gewöhnlich, den **Fuß** in 12 **Zolle**, den **Zoll** in 12 **Linien**, die **Linie** in 12 **Scrupel** zu theilen, da dann 12 Fuß eine **Ruthe** ausmachen, wiewohl auch an einigen Orten 15, und wiederum an andern 16 Fuß auf eine Ruthe gerechnet werden. Auf einen **Klafter**, einen **Faden**, eine **Lachter** werden 6 Fuß gerechnet. Man kann das geometrische Maaß mit seiner Eintheilung das Decimal-Maaß, das gemeine aber, wenn Ruthen, Füsse, Zolle, Linien allemahl in 12 gleiche Theile getheilt werden, das **Duodecimalmaaß** nennen.

114 §.

Hat man beym geometrischen Messen eben den Fuß, oder eben die Ruthe gebraucht, die sonst nach gemeiner Art in 12 gleiche Theile getheilt wird; so kann man **die Zahlen, welche Decimalmaaß** aus-

ausdrücken, leicht auf Duodecimalmaaß bringen, wenn man nach dem 247 §. der Rechenkunst verfährt. Vorläufig muß man nur folgende Reductionssätze merken.

Bey einerley Ruthenmaaß sind
10 Decimalfuß = 12 Duodecimalfuß:

Bey einerley Fußmaaß sind
10 Decimalzoll = 12 Duodecimalzoll.

Wird nun gefragt: 3 Zoll 6 Linien Decimalmaaß wieviel sinds Duodecimalzoll? so setzt man an:

10 Dec. Z. — 12 Duod. Z. = 3 Zoll 6 Linien Dec. Maaß

× 10 ... × 10

100 Lin. ... 36 Lin.

12

72
36

100) 4|32 | 4 Z. 3 Lin. $10\frac{2}{25}$ Scr. Duod. Maaß.

32
12

64
32

100) 3|84

84
12

168
84

10|08

Wäre die Ruthe schon in 10 Füsse, und jeder Fuß in 10 Zoll getheilt worden; so müßte man nachstehenden Ansatz machen.

10 Dec.

10 Dec. Fuß — 12 Duod. F. 3 Zoll 6 Lin. Dec. M.?

```
  × 10          × 12          × 10
  ————          ————          ————
  100 Zoll      144 Duod. Z.  36 Lin.
  × 10           36
  ————          ————
  1000 Lin.      864
                432
                ————
               5|184| 5 Zoll 2 Lin. 2 62/125 Scrupel
        1000)        |     Duodecimal-Maaß.
                ————
                 184
                  12
                ————
                 368
                184
                ————
               2|208
        1000)
                ————
                 208
                  12
                ————
                 416
                208
                ————
        1000)  2|496
```

In beyden Exempeln müsten die 10 Fuß in der ersten Stelle mit der Fragzahl auf einerley Nahmen gebracht werden; und weil im zweyten Exempel das Facit in Duodecimalzollen gesucht ward, so müste die Zahl in der mittlern Stelle eben den Nahmen haben. Auch war vorauszusehen, daß unter dem Nahmen von Duod. Füssen ein Bruch wäre gefunden worden.

Eben diese Reductionssätze dienen, wenn man umgekehrt **Duodecimalmaaß** auf **Decimal-**

maaß bringen soll, wovon der folgende Ansatz zum Beyspiel dienet.

12 Duod. F. — 10 Dec. F. — 327 Fuß 7 Z. Duod. M.?

```
12                    12
———                 ————
144 Duod. Z.          661
                     327
                    ————
                     3931 Duod. Z.
                       10
                    —————      Fac.
                     39310 |272,986 1/9 Dec.
                     144)  |           Fuß.
```

Oder 272 Fuß 9 Zoll 8 Linien $6\frac{1}{5}$ Scrupel D. Maaß.

115 §.

In der Theorie nimmt man die Voraussetzung an, daß es möglich sey, eine grade Linie zu messen, wenn der Maaßstab gegeben ist, obgleich die Ausführung in vielen Fällen, wovon die practischen Theile der Mathematik Unterricht geben, mit Schwierigkeiten verbunden ist, die hier noch beyseite gesetzt werden. So lange man nur mit Figuren zu thun hat, die auf dem Papier gezeichnet sind, wird die Ausmessung der graden Linien vermittelst des Cirkel-Instruments bewerkstelliget, wenn der Maaßstab gegeben, oder willkührlich angenommen ist; und das letzte ist bey solchen Zeichnungen allemahl erlaubt, die nur zur Erläuterung der theoretischen Lehren der Geometrie dienen sollen: denn es ist an sich ganz willkührlich, wie groß die Linie seyn soll, die man eine Ruthe, oder einen Fuß nennen will. Dieserwegen nimmt man bey dergleichen Zeichnungen gewöhnlich eine sehr kleine Linie für eine Ruthe an; man macht übrigens die Eintheilung in Fusse, Zolle, eben so wie es im grossen gewöhnlich ist, und nennt

nennt ein solches Maaß alsdenn ein verjüngtes Maaß.

127 Fig. Um also zuerst auf dem Papier einen Maaßstab zu erhalten, ziehe man eine grade Linie AB, trage von A nach B hin 10 kleine gleiche Theile bis G, und nenne sie Ruthen oder Füsse, wie man will. Hiernächst fasse man AG zwischen den Schenkeln des Cirkel-Instruments und trage sie weiter von G nach H, von H nach B, u. s. f. so weit man Platz hat, oder es sonst nöthig findet: so wird jede Abtheilung wie GH = HB, u. s. f. 10 Ruthen lang, wenn jede kleine Abtheilung eine Ruthe vorstellet. Die kleinern Theile zähle man von G nach A, und setze die Ziffern von 1 bis 10 dabey: die grössern Abtheilungen zählt man am bequemsten von G nach B, so daß bey H die Zahl 10, bey B die Zahl 20 u. s. f. ihre Stelle erhält.

116 §.

Eine grade Linie CD, die nicht länger als der Maaßstab selbst ist, und die man zwischen den Spitzen des Cirkels auf einmahl fassen kann, wird nun auf folgende Art gemessen. Nachdem man dem Cirkel die gehörige Oefnung gegeben hat, so daß die Entfernung zwischen den Spitzen mit der Linie CD einerley ist, setze man die eine Spitze auf einen der Hauptheilungspuncte, wie G oder H, und gehe so lange nach B zurück, bis die andre Spitze entweder selbst in A, oder zwischen A und G fällt. Trift sie alsdenn einen von den zwischen A und B befindlichen Theilungspuncten, so zählt man leicht die Anzahl der Ruthen von der einen Spitze zur andern, welche die Länge der Linie CD ausmachen. Wofern die zwote Spitze des Cirkels zwischen zweene Theilungspuncte

trift:

trift; so muß man bey dieser Einrichtung des Maaßstabes nur schätzen, ob noch etwa $\frac{1}{4}$, oder $\frac{1}{2}$, oder $\frac{3}{4}$ von einer Ruthe zu der Anzahl der ganzen Ruthen hinzuzusetzen sey, die zwischen beyden Spitzen enthalten sind. In der 127 Fig. findet man auf diese Art CD = $27\frac{1}{4}$ Ruthen.

Wenn die zu messende Linie LQ länger, als der ganze Maaßstab ist, so kann man sie in Theile eintheilen, und jeden Theil wie vorhin messen. Am kürzesten wird man fertig, wenn man den ganzen Maaßstab, oder einen Theil desselben, der sich bequem zwischen den Cirkelsätzen fassen läßt, auf LQ sovielmahl aufträgt, als es angehet, und hiernächst noch den übrigen Rest, wie vorhin misset. So findet man LP = 30 Ruthen und PQ = $6\frac{1}{2}$ Ruthen: also LQ = $36\frac{1}{2}$ Ruthen. Eben das zuletzt beschriebene verfahren dienet, auf eine gegebene grade Linie Theile aufzutragen, die eine gegebene Anzahl Ruthen fassen, also auch eine solche Linie, wie LQ so viele Ruthen lang zu machen, als verlangt wird.

117 §.

Das Maaß eines Winkels muß ein Winkel von bekannter Grösse seyn: also kann der rechte Winkel entweder selbst, oder ein gewisser aliquoter Theil davon am füglichsten als ein Maaß dienen, um die Grösse eines jeden andern Winkels damit zu vergleichen; auch ist diese Vergleichung aller übrigen Winkel mit dem rechten Winkel, als die natürlichste, bisher würklich schon gebraucht worden. (20. 24 §.) Will man den rechten Winkel selbst = Eins annehmen; so muß die Grösse eines jeden spitzen Winkels durch einen eigentlichen Bruch ausgedrückt werden, und die Grösse der meisten stumpfen Winkel,

wenige

wenige Fälle ausgenommen, läßt sich nicht anders, als durch einen uneigentlichen Bruch, oder eine vermischte Zahl ausdrücken. Theilt man aber den rechten Winkel in kleinere aliquote Theile auf ähnliche Art, wie man Ruthen in Füsse, Füsse in Zolle, Zolle in Linien u. s. f. theilt; und giebt man diesen Theilen ihre eigenen Nahmen; so läßt sich die Grösse eines jeden Winkels durch eine oder mehr ganze Zahlen unter den erwählten Nahmen ausdrücken. Folgende Nahmen sind in solcher Absicht eingeführt: der 90ste Theil des rechten Winkels heißt ein **Grad**, der 60ste Theil des Grades eine **Minute**, und der 60ste Theil der Minute eine **Secunde**. Findet man nöthig, noch weiter zu theilen, so bleibt man bey der Eintheilung in 60 gleiche Theile unter den Nahmen von **Tertien**, **Quarten** u. s. f. Das Zeichen ($^\circ$) bedeutet **Grade**, ($'$) **Minuten**, ($''$) **Secunden**, und auf ähnliche Art werden **Tertien** mit ihren noch kleinern Theilen bezeichnet, wenn man allemahl bey der Eintheiluug in 60 gleiche Theile bleibt. Also liest man den Ausdruck $53^\circ\ 27'\ 18''\ 35'''$ so: 53 Grade, 27 Minuten, 18 Secunden, 35 Tertien.

Eben diese Zeichen werden auch wohl gebraucht, die Ruthen, Füsse, Zolle, Linien und Scrupel des Längenmasses kurz zu bezeichnen, vornemlich aber nur beym Duodecimalmaasse: alsdenn muß man die Zahlen $98^\circ\ 7'\ 9''\ 5'''\ 3''''$ so lesen: 98 Ruthen, 7 Fuß, 9 Zoll, 5 Linien, 3 Scrupel. Beym Decimal-Längenmaaß ist es kaum nöthig, die kleinern Theile unter diesen Nahmen anzugeben, weil man alsdenn die eben angeführte Zahl völlig eben so gut auch auf diese Art schreibt: 98,7953 Ruthen.

118 §.

Damit man sich diese Art, die Winkel auszumessen, geläufig mache, ist es nicht undienlich, ein für allemahl folgende Sätze anzumerken.

Zwey Nebenwinkel auf einer graden Linie machen zusammen 180° aus. (22 §.)

Alle in einerley Ebene um einen Punct herum liegende Winkel machen zusammen 360° Grade aus. (23 §.) Wenn demnach diese Winkel insgesammt gleich groß sind, so wird die Grösse eines jeden in Graden gefunden, wenn man 360° mit der Anzahl der Winkel dividirt.

Die Summe aller dreyer Winkel eines Dreyecks ABC 50 F.
beträgt 180°. (57 §.) Wenn also die Grösse eines Winkels A in Graden, Minuten, Secunden, u. s. f. bekannt ist; so wird die Summe der beyden übrigen B + C in Graden und Theilen eines Grades gefunden, wenn man die Zahl, welche die Grösse des Winkels A ausdrückt, von 180° subtrahirt. Es sey $A = 54° \; 29' \; 17''$, so giebt die Rechnung

$$\begin{array}{rrrr} A + B + C = & 180° & 0' & 0'' \\ A = & 54° & 29' & 17'' \\ \hline \text{also } B + C = & 125° & 30' & 43'' \end{array}$$

Weis man die Grösse zweener Winkel B und C, so wird der dritte A durch die Subtraction der Summe jener beyden Winkel von 180° gefunden. Es sey

$$\begin{array}{rrrr} B = & 52° & 47' & 49'' \\ C = & 72° & 42' & 54'' \\ \hline \text{so ist } B + C = & 125° & 30' & 43''. \end{array}$$

Dies subtrahirt

$$\begin{array}{rrrr} \text{von} & 180° & 0' & 0'' \\ \hline \text{giebt } A = & 45° & 29' & 17''. \end{array}$$

Im gleichseitigen Dreyeck ist jeder Winkel 60° groß. (61 §.)

Wenn im gleichschenklichten Dreyeck der Winkel an der Spitze der Grundlinie gegenüber in Graden gegeben ist; so wird jeder Winkel an der Grundlinie gefunden, wenn man den Winkel an der Spitze von 180° subtrahirt, und den Rest halbirt. Man erhält also auch eben den Winkel an der Grundlinie, wenn man die halbe Anzahl der Grade des Winkels an der Spitze von 90° subtrahirt.

Ist dagegen ein Winkel an der Grundlinie in Graden gegeben, so wird der Winkel an der Spitze gefunden, wenn man den doppelten Winkel an der Grundlinie von 180° subtrahirt.

119 §.

71 F. **Wenn die Winkel *ACB, EDF*, am Mittelpunct zweener Ausschnitte *AGBC, DEHF*, in einerley oder verschiedenen Kreisen, die gleiche Halbmesser haben, gleich groß sind; so sind die Bogen *AGB, EHF*, und die Ausschnitte selbst gleich groß.**

Wenn aber die Winkel am Mittelpunct *ACB, EDK* ungleich sind; so gehört zum kleinern Winkel *ACB* der kleinere Bogen und kleinere Ausschnitt, zum grössern Winkel *EDK* der grössern Bogen und grössere Ausschnitt.

Beweis. Die Kreise passen auf einander, wenn man ihre Mittelpuncte auf einander legt. Wenn nun CA auf DE gelegt wird; so paßt im ersten Fall der Winkel ACB auf EDF, und CB auf DF: mithin passen auch die Bogen AGB, EHF, und die dazu gehörigen Ausschnitte auf einander. Im zweyten

Fall

Fall ist ein Theil EDF des Winkel EDK so groß, als ACB, und EHK > EHF, EHKD > EHFD, also auch EHK > AGB, und EHKD > AGBC.

Wenn also die Bogen *AGB*, *EHF*, und ihre Halbmesser gleich groß sind, oder die Ausschnitte *AGBC*, *DEHF*; so sind die Winkel am Mittelpunct gleich groß. Denn widrigenfalls wären die Bogen und Ausschnitte nicht gleich groß.

Zum grössern Bogen und Ausschnitt gehört der größere Winkel am Mittelpunct, zum kleinern Bogen oder Ausschnitt aber der kleinere Winkel. Denn wenn die Bogen der Ausschnitte ungleich sind, so können die Winkel am Mittelpunct nicht gleich groß seyn, weil sonst auch die Bogen und Ausschnitte gleich groß seyn müsten. Auch kann zum grössern Bogen oder Ausschnitt nicht der kleinere Winkel am Mittelpunct gehören, weil der zum kleinern Winkel gehörige Bogen oder Ausschnitt der kleinere ist.

120 §.

Zweene Durchmesser AL und BM die einander 71F.
senkrecht schneiden, theilen die Kreislinie in vier gleiche Bogen, AB, BL, LM, AM, die man Quadranten der Kreislinie nennt; und eben so die Kreisfläche in vier gleiche Ausschnitte, die Quadranten der Kreisfläche heissen. (119 §.) Ein Bogen
aus der Spitze A eines Winkels BAC, DAC, oder 72F.
EAC mit einem willkührlichen Halbmesser zwischen des Winkels Schenkeln beschrieben, wie FG, HG, oder KG, ist ein Quadrant, grösser oder kleiner als ein Quadrant von seiner Peripherie, nachdem der Winkel ein rechter, stumpfer oder spitzer Winkel ist.

Auch umgekehrt: wenn man sonst weis, daß der Bogen ein Quadrant, grösser oder kleiner als ein Quadrant von seiner Peripherie sey; so ist der Winkel im ersten Fall ein rechter, im zweyten ein stumpfer, und im dritten Fall ein spitzer Winkel.

74F. Könnte man einen Winkel ACB in eine gegebene Anzahl gleicher Theile eintheilen; so würden die Linien CD, CE, CF, CG, welche den Winkel theilen, den Bogen AB zwischen seinen Schenkeln in eben soviele gleiche Bogen theilen. Ein solcher Bogen wird also halbirt, wenn man den Winkel halbirt, (69 §.) und jeder Durchmesser, der seine Sehne senkrecht halbirt, halbirt beyde dazu gehörige Bogen. (70 §.)

Umgekehrt: Ein Durchmesser EF, (73 Fig.) der einen Bogen AFB halbirt, halbirt auch den Winkel am Mittelpunct ACB, mithin halbirt er zugleich die Sehne AB senkrecht. (70 §.) Wenn also ABGH parallele Sehnen sind, so sind die dazwischen liegende Bogen AG, BH, gleich groß. Weil nemlich GF = HF, AF = BF ist, so hat man GF − AF = HF − BF, d. i. AG = BH.

Wäre ein Kreisbogen AB (74 Fig.) zwischen den Schenkeln des Winkels ACB bey D, E, F, G, in gleiche Theile getheilt, so würden die Linien von der Spitze des Winkels C durch die Theilungspuncte des Bogens gezogen den Winkel ACB in eben so viele gleiche Winkel theilen.

Ein rechter Winkel BAC wird in drey gleiche
72F. Theile getheilt, wenn man über einen seiner Schenkel ein gleichseitiges Dreyeck AGK verzeichnet. Denn alsdenn ist CAK = $\frac{2}{3}$R, also BAK = $\frac{1}{3}$R, und man kann CAK nach dem 69 §. halbiren. Eben

so

so theilt man auch den Quadranten FG in drey gleiche Theile.

121 §.

In einerley Kreise, oder auch verschiedenen Kreisen, die gleiche Halbmesser haben, gehören gleiche Bogen zu gleichen Sehnen, und umgekehrt. 75F.

Derjenige von den beyden zu einerley Sehne gehörigen Bogen wächst mit seiner Sehne, der kleiner ist, als die halbe Peripherie, der andre nimmt ab, wenn die Sehne wächst; und umgekehrt: die Sehne wächst mit demjenigen Bogen der kleiner als die halbe Peripherie ist.

Beweis. Wenn die Sehne AB = DE ist, und man zieht die Halbmesser CA, CB, FD, FE; so haben die Dreyecke ACB, DFE, gleiche Winkel, (65 §.) also ist ACB = DFE, mithin der Bog. AGB = DHE. (119 §.) Wenn umgekehrt der Bog. AGB = DHE ist, so ist der Winkel ACB = DFE, (119 §.) also AB = DE. (60 §.) Wenn ferner DK > AB ist, so ist DFK > ACB (64 §.) also DHK > AGB: (119 §.) und wenn DHK > AGB ist, so ist DFK > ACB, (119 §.) also DK > AB. (64 §.)

122 §.

Die Theilung eines Bogens in gleiche Theile würde also darauf ankommen, daß man aus der Sehne des gegebenen Bogens die Sehne eines jeden aliquoten Theils von ihm finden könnte: vermittelst dieser Sehne liessen sich alsdenn die Theilungspuncte des Bogens finden. Soll nemlich von D aus ein 75F. Bogen auf der Peripherie abgeschnitten werden, wozu eine Sehne von gegebener Länge gehört, die aber allemahl kleiner als des Kreises Durchmesser seyn muß; so beschreibe man aus D mit einem der Sehne gleichen Halbmesser einen Kreis: derselbe wird die Peripherie des gegebenen Kreises zweymahl in E und *e* schneiden, da dann nicht allein der Bogen DHE, sondern auch D*he* der gegebenen Sehne zugehört.

123 §.

111. 112 Fig. **Die Winkel *ACB*, *ACD*, am Mittelpunct eines Kreises verhalten sich gegen einander, wie die Bogen zwischen ihren Schenkeln: auch sind die Flächen der zu diesen Winkeln gehörigen Ausschnitte *ACBE*, *ADBE*, in demselben Verhältniß.**

Beweis. Wenn die Bogen AB, AD, ein gemeinschaftliches Maaß haben, so sey AE dieses Maaß, und $AB = n.AE$, $AD = m.AE$, also $AE = \frac{1}{m}AD$; so ist $AB = \frac{n}{m} AD$. Vermittelst der Sehne des Bogens AE, theile man AD in m gleiche Theile, so wird AB vermöge der Voraussetzung n solcher Theile enthalten: und wenn man von C nach alle Theilungspuncte die Halbmesser ziehet; so sind die Winkel ACB, ACD, und die dazu gehörigen Ausschnitte ACBE, ADBE, in eben so viele gleiche Theile, als die dazu gehörigen Bogen getheilt. (120 §.) Alsdenn ist $ACB = n.ACE$, $ACD = m.ACE$, also $ACE = \frac{1}{m}ACD$, und $ACB = \frac{n}{m}ACD$. Demnach ist $\frac{ACB}{ACD} = \frac{n}{m} = \frac{AB}{AD}$, oder $ACB : ACD = AB : AD$. (163 §. Rechenk.) Man kann statt der Winkel ACB, ACD die dazu gehörigen Ausschnitte verstehen;

hen, ohne daß solches in diesen Schlüssen etwas verändert.

In allen Fällen aber, wenn auch die Bogen AB, AD, incommensurabel sind, kann man AD halbiren, jede Hälfte aufs neue halbiren, und solchergestalt AD wenigstens in eine solche Anzahl gleicher Theile theilen, die eine Potenz der Zahl 2 ist. Wenn nun ebenfalls die Halbmesser nach den Theilungspuncten gezogen werden; so ist des Verhältnisses ACB : ACD Exponent allemahl zwischen denselben Gränzen $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$ enthalten, zwischen welchen des Verhältnisses AB : AD Exponent enthalten ist: demnach ist allemahl ACB : ACD = AB : AD, (164 §. R.) man mag die Winkel am Mittelpunct oder die dazu gehörigen Ausschnitte verstehen.

124 §.

Wenn in ungleichen Kreisen, wozu die Peripherien *P*, *p*, gehören, die Winkel *ACB*, *DEF*, am Mittelpunct gleich groß sind; so haben die dazu gehörigen Bogen gegen ihre Peripherien einerley Verhältniß. 113 Fig.

Auch umgekehrt: Wenn ein Paar Bogen *AB*, *DF*, ungleicher Kreise gegen ihre Peripherien einerley Verhältniß haben; so sind die dazu gehörigen Winkel am Mittelpunct gleich groß.

Beweis. 1.) Man setze CG auf AC, und EH auf ED senkrecht, so ist der Bogen AG = $\frac{1}{4}p$, und DH = $\frac{1}{4}$P. (120 §.) Ferner ist AB : AG = ACB : ACG, und DF : DH = DEF : DEH, (123 §.) überdem aber ACG = R = DEH, und vermöge der Voraussetzung ACB = DEF; also AB : AG = DF : DH, oder $\frac{AB}{AG} = \frac{DF}{DH}$, mithin auch $\frac{AB}{4AG} = \frac{DF}{4DH}$, oder $\frac{AB}{p} = \frac{DF}{P}$.

2.) Wird umgekehrt angenommen, es sey $\frac{AB}{p} = \frac{DF}{P}$, so sey $AG = \frac{1}{4}p$, $DH = \frac{1}{4}P$, und man ziehe CG, EH. Dies vorausgesetzt sind ACG, DEH, rechte Winkel, (120 §.) und man hat auch $\frac{AB}{4AG} = \frac{DF}{4DH}$, also $\frac{AB}{AG} = \frac{DF}{DH}$. Ferner ist $\frac{AB}{AG} = \frac{ACB}{ACG} = \frac{ACB}{R}$ und $\frac{DF}{DH} = \frac{DEF}{DEH} = \frac{DEF}{R}$, (123 §.) also $\frac{ACB}{R} = \frac{DEF}{R}$, mithin $ACB = DEF$.

125 §.

Zwischen den Schenkeln des rechten Winkels CAD
128 Fig. sey mit einem willkührlichen Halbmesser AF der Quadrant FG beschrieben, und man stelle sich vor, der rechte Winkel sey durch dergleichen Theilungslinien, wie AK eine vorstellt, in seine 90 Grade getheilt, so daß der Winkel CAK einen Grad fasset; so ist der Bogen FM zwischen den Schenkeln des Winkels CAK der 90ste Theil vom Quadranten FG: und wenn alle übrige Theilungslinien ebenfalls gezogen wären, so würden sie den Quadranten eben so wie den rechten Winkel in 90 gleiche Theile theilen. Umgekehrt: wäre der Quadrant FG sonst auf eine andre Art in 90 gleiche Theile getheilt; so würden die Halbmesser vom Mittelpunct A nach die Theilungspuncte des Quadranten gezogen den rechten Winkel in seine 90 Grade theilen; dieserwegen giebt man den Theilen des Quadranten eben die Nahmen, welche die damit zusammen gehörigen Theile des rechten Winkels führen. Der 90ste Theil

des

des Quadranten heißt ein Grad der Peripherie, wozu der Quadrant gehört, also fasset die halbe Peripherie 180 und die ganze Peripherie 360 solcher Grade. Jeden Grad theilt man in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, u. s. f. wie die Grade des rechten Winkels. Soviele Grade der Peripherie und Theile dieser Grade nun der Bogen *FN* zwischen den Schenkeln eines Winkels *CAB* fasset, eben so viele Grade des rechten Winkels und Theile dieser Grade fasset auch der Winkel *CAB*. (120 §.)

Wenn überhaupt Q den Quadranten derjenigen Peripherie bezeichnet, wozu der Bogen FN gehört; so sey $Q : FN = 90 : n$, also $FN = n \cdot \frac{1}{90} Q$, so heißt das: FN fasset n Grade von seiner Peripherie, es mag n eine rationale oder irrationale Zahl seyn. In allen Fällen ist $\frac{CAB}{R} = \frac{FN}{Q}$, (123 §.) also auch $\frac{CAB}{R} = \frac{n}{90}$, oder $CAB = n \cdot \frac{1}{90} R$, das heißt CAB fasset n Grade des rechten Winkels.

126 §.

In dem so erklärten Verstande kann man den Kreisbogen zwischen den Schenkeln eines Winkels als das Maaß dieses Winkels betrachten, nicht in dem Verstande des 112 §., als wenn der Bogen oder ein Theil desselben so und so vielmahl in dem Winkel enthalten seyn könnte; denn Bogen und Winkel sind ungleichartige Grössen. Nur die Zahl der Grade und Theile der Grade, die der Bogen von seiner Peripherie fasset, ist einerley mit der Zahl der Grade und Theile der Grade eines rechten Winkels, welche die Grösse des mit dem Bogen zusammen gehörigen Winkels ausmachen. Demnach giebt auch die Zahl der Grade des Bogens nicht die Länge des Bogens im Längenmaaß an, sondern vielmehr in Theilen seiner Peripherie.

Weil zum grössern Halbmesser eine grössere Peripherie als zur kleinern gehört, so werden auch die Grade und gleichnahmigen Theile der Grade grösser, wenn man einen grössern Halbmesser nimmt, und kleiner, wenn man den Halbmesser kleiner nimmt. Allein dieser Umstand kommt nur in Betrachtung, wenn von der Länge der Bogen an sich die Frage ist, nicht wenn die Bogen als Maasse der Winkel gebraucht werden. Zwey Bogen FN, OP mit verschiedenen Halbmessern zwischen den Schenkeln des Winkels CAB beschrieben fassen gleichviele Grade und Theile der Grade ihrer Peripherien, weil sie gegen ihre Peripherien einerley Verhältniß haben. (124 §.) Und wenn die Bogen OP, FN, zwar mit verschiedenen Halbmessern verzeichnet sind, aber gleichviele Grade und Theile der Grade ihrer Peripherien fassen, mithin gegen ihre Peripherien einerley Verhältniß haben; so sind die Winkel CAP, CAN gleich groß. (124 §.)

127 §.

Wenn die Sehne eines Bogens dem Halbmesser der dazu gehörigen Peripherie gleich ist; so fasset der Bogen 60 Grade.

Beweis. Wenn die Sehne FH dem Halbmesser AF gleich ist, so ist auch AH = AF, mithin der Winkel FAH = 60°, (118 §.) also fasset der Bogen FH 60 Grade von seiner Peripherie.

Ein solcher Bogen macht den sechsten Theil der Peripherie aus, und man kann vermittelst des Halb-

Halbmessers als einer Sehne die Peripherie eines Kreises in 6 gleiche Theile theilen.

128 §.

Um einen jeden Winkel bequem zu messen, muß man einen Halbkreis, der mit einem Halbmesser von willkührlicher Grösse beschrieben ist, ein für allemahl in seine 180 Grade theilen, so dient er bey Ausmessung der Winkel auf ähnliche Art, wie der Maaßstab im 115 und 116 §. bey Ausmessung der graden Linien. Aus dem Mittelpunct A mit dem Halbmesser AF sey also der Halbkreis FGQ beschrieben und AG auf FQ senkrecht, so sind FG, FQ Quadranten. Die Sehne FH nehme man dem Halbmesser gleich, so fasset FH 60° und HG 30°. Ferner halbire man FH in L, so fasset auch FL = LH 30°, und wenn man FL in 3 gleiche Bogen theilen kann, so fasset jeder davon 10°. Durch ein Verfahren, das von den beyden ersten Foderungssätzen der Geometrie (9. 36 §.) abhienge, läßt sich der Bogen FL so nicht theilen: man findet aber leicht, so genau, als es hier nöthig ist, durch Versuche mit dem Cirkel-Instrument eine Sehne, die sich auf FL dreymahl auftragen läßt, und erhält auf solche Art Bogen von 10 Graden. Jeder davon aufs neue halbirt giebt Bogen von 5 Graden, und wenn davon ein jeder durch Versuche in 5 gleiche Theile getheilt wird; so kommt man auf einzelne Grade.

128 Fig.

Soll nun ein Winkel TVW gemessen werden; so kann man mit dem Halbmesser AF aus dem Mittelpunct V einen Bogen RS zwischen den Schenkeln des zu messenden Winkels beschreiben, hiernächst die Sehne dieses Bogens zwischen dem Cirkel fassen, und selbige aus F nach G zu auf den eingetheilten

Halb-

Halbkreis tragen. Wenn die eine Spitze des Cirkels in F stehet, so kann man leicht sehen, wohin die andre Spitze in dem Halbkreise trift, wieviele Grade, und kleinere Theile eines Grades der Sehne zwischen den Cirkelspitzen zugehören: eben so viele Grade fasset der Winkel TVW, welches in der Zeichnung 50° sind.

129 §.

129 Fig. Einen noch bequemern **Winkelmesser** kann man aus Pappe oder Chartenpapier so verfertigen. Aus dem Mittelpunct A beschreibe man zweene Halbkreise DHE, KLM, und theile den einen in seine 180 Grade: so theilen die Halbmesser durch die Theilungspuncte dieses Halbkreises den andern eben so ein. An den Durchmesser DE setze man das Rechteck DEGF, schneide die Fläche des kleinern Halbkreises KLM aus dem Stück Pappe, worauf die Figur gezeichnet ist, heraus, und mache die Stelle des Mittelpuncts A durch einen kleinen Einschnitt, wie es die Figur anzeiget, bemerklich. Weiter schneide man auch das übrige Chartenpapier nach dem Umfang des grössern Halbkreises DHE und des Rechtecks DEGF weg; so hat man einen eingetheilten Halbkreis, den man auf jeden Winkel so auflegen kann, daß der Mittelpunct desselben mit des zu messenden Winkels BAC Spitze zusammen fällt, und die innere Seitenlinie DE des Rechtecks an einen Schenkel AC desselben anschließt. Nun wird ein Bogen EK des Halbkreises zwischen den Schenkeln des Winkels liegen, worauf man die Grade, welche der Winkel fasset, zählen kann. Unter den zum Zeichnen dienlichen Werkzeugen, die ein so genanntes mathematisches Besteck ausmachen, findet sich gewöhnlich ein aus

Messing

Messing so verfertigter Winkelmesser unter dem Nahmen eines Transporteurs. Die Grade sind auf zweyerley Art von D durch H nach E, und zugleich rückwärts von M durch L nach K so gezählt, daß der Anfang und das Ende der Eintheilung in den Durchmesser DE fallen, und dadurch wird der Vortheil erhalten, daß der Transporteur das Maaß zweener Nebenwinkel auf einer graden Linie zugleich angiebt.

130 §.

Ein solcher Winkelmesser dient zugleich, an einer graden Linie *AC*, einen Winkel, dessen Grösse in Graden gegeben ist, so zu zeichnen, daß seine Spitze in einen gegebenen Punct *A* dieser Linie fällt. Man lege des Winkelmessers Mittelpunct auf A und seinen Durchmesser DE an AC, am Umfang zähle man von E nach K so viele Grade ab, als der Winkel fassen soll, und bemerke die Stelle K mit einem Punct: so kann man hiernächst durch A und K die grade Linie AB ziehen, welche mit AC den verlangten Winkel einschließt. 129 Fig.

131 §.

Einen gradlinichten Winkel *ACB*, mithin auch jeden aus der Spitze als einen Mittelpunct zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Kreisbogen *AB*, vermittelst des Transporteurs in jede verlangte Anzahl gleicher Theile einzutheilen. 74F.

Aufl. Man dividire die Anzahl der Grade, die das Maaß des Winkels ausmachen, mit der gegebenen Zahl: so zeigt der Quotient, wie viele Grade ein jeder von den verlangten gleich grossen Theilen des Winkels, und zugleich der damit zusammen gehörige Bogen fassen muß. Ferner zeichne man an einen

von

von beyden Schenkeln CA einen Winkel ACD, der soviele Grade fasset, als vermittelst jener Division gefunden sind, (130 §.) und zwar so, daß die Spitze C des gegebenen Winkels ACB auch dieses neuen Winkels Spitze wird: alsdenn ist zugleich AD eben sovielmahl in AB, als ACD in ACB enthalten, und vermittelst der Sehne des Bogens AD läßt sich die übrige Eintheilung des Bogens AB, (122 §.) mithin auch des Winkels ACB bewerkstelligen.

89F. Soll man die ganze Peripherie eines um den Mittelpunct K beschriebenen Kreises in eine gegebene Anzahl gleicher Theile eintheilen; so dividire man 360 Grade, als das Maaß aller Winkel, welche in der Ebene des Kreises um den Mittelpunct K liegen können, mit der gegebenen Zahl der Theile der Peripherie, so giebt der Quotient die Zahl der Grade eines jeden der gesuchten gleich grossen Bogen der Peripherie, und zugleich des dazu gehörigen Winkels am Mittelpunct K. Soll nun die Theilung in dem Punct A anfangen, so ziehe man den Halbmesser KA, und zeichne an demselben einen Winkel AKB, der die gefundene Zahl der Grade fasset, so daß der Mittelpunct K dieses Winkels Spitze wird. (130 §.) Nun ist der Bogen AB als das Maaß des Winkels AKB einer von den gesuchten Theilen der Kreislinie, und vermittelst der Sehne dieses Bogens bewerkstelliget man die übrige Theilung.

Der

Der VI. Abschnitt.

Von den Sehnen und Berührungslinien des Kreises.

132 §.

Wenn zwo grade Linien *AB*, *AC* einander in *A* schneiden, und *DE* auf *AB* in *H*, *FG* auf *AC* in *M* senkrecht gesetzt wird; so müssen diese Normallinien einander ebenfalls schneiden. 70 F.

Beweis. Dafern der Winkel BAC ein schiefer Winkel ist, so wird er entweder spitz oder stumpf seyn. Ist er spitz: so ist BAC + AMG < 2R, und FG schneidet AB nach B und G zu verlängert. (85 §.) Ist BAC stumpf: so ist ein Nebenwinkel CAL spitz, und FG schneidet AB nach A und F verlängert. Wenn nun L der Durchschnittspunct ist; so ist der Winkel bey L in beyden Fällen spitz, weil AML = R ist. (57 §.) Da nun bey H ein rechter Winkel ist; so hat man in beyden Fällen H + L < 2R, also schneiden auch FG und DE einander. Dafern endlich BAC = R ist, so liegt DE mit AC parallel: (80 §.) also wird DE von FG vermöge des 87 §. geschnitten.

133 §.

Durch drey Puncte *A*, *B*, *C* die nicht in grader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben. 70 F.

Aufl. Man ziehe von einem Puncte A bis an die übrigen beyden B und C die graden Linien AB, AC, und halbire diese mit den senkrechten Linien DE, FG, (70 §.) welche einander irgendwo in K schneiden werden.

den. Dann aber wird eine Kreislinie aus dem Mittelpunct K mit dem Halbmesser KA beschrieben auch durch B und C durchgehen.

Beweis. Weil BAC < 2R ist: so schneiden DE und FG einander irgendwo in K. (132 §.) Man ziehe nun AK, BK, CK: so ist AK = CK (60 §.) und aus eben der Ursache AK = BK, folglich geht die Kreislinie aus K mit dem Halbmesser AK beschrieben durch B und C.

Durch jede drey Puncte, dafern sie nur nicht in grader Linie liegen, (72 §.) läßt sich also eine Kreislinie verzeichnen, und drey solche Puncte bestimmen die Grösse und Lage des Kreises.

134 §.

76F. **In einem Kreise sind gleiche Sehnen *AB*, *DE* vom Mittelpunct *C* gleichweit entfernt; und umgekehrt: vom Mittelpunct gleichweit entfernte Sehnen sind gleich groß.**

Von ungleichen Sehnen *AB*, *DF* liegt die grössere *DF* näher beym Mittelpunct, als die kleinere *AB*; und umgekehrt: Eine Sehne *DF*, die dem Mittelpunct näher liegt, ist grösser, als eine entferntere *AB*.

Beweis. Wenn CG, CH die Entfernungen der gleich grossen Sehnen AB, DE, von C sind: so ist AG = $\frac{1}{2}$AB, und DH = $\frac{1}{2}$DE. Man ziehe CA, CD: so hat man in den rechtwinklichten Dreyecken ACG, DCH, AG = DH, CA = CD, also CG = CH. (78 §.) Auch umgekehrt: wenn CG = CH ist, so bleibt CA = CD, also ist AG = DH, (78 §.) folglich AB = DE.

Wenn aber CK die Entfernung der Sehne DF von C ist: so hat man DK = $\frac{1}{2}$DF, also DK > AG,

wenn

wenn $DF > AB$ ist. Weil aber $CD = CA$ bleibt, so ist $CK < CG$, (111 §.) Auch umgekehrt: wenn $CK < CG$ ist, so bleibt $CD = CA$, also ist nun $DK > AG$, (111 §.) mithin $DF > AB$.

135 §.

Wenn zwo Sehnen AD, BD einen Win- 77.
kel ADB einschliessen, dessen Spitze D in der 78.
Kreislinie liegt, und wenn zu dem Bogen AB 79F.
zwischen den Schenkeln dieses Winkels am Mittelpunct der Winkel ACB gehört: so ist ACB doppelt so groß, als ADB.

Beweis. Man muß folgende drey Fälle unterscheiden.

1.) Es kann ein Schenkel AD des Winkels ADB an der Peripherie durch den Mittelpunct C gehen, also auf AC fallen, da dann vermöge des 62 §. der Winkel $ACB = 2ADB$ ist.

2.) Es kann der Mittelpunct C innerhalb des Winkels ADB fallen. Ziehet man nun den Durchmesser DE; so ist $ACE = 2ADE$, und $ECB = 2EDB$. (1 Fall.) Also $ACE + ECB = ACB = 2(ADE + EDB) = 2ADB$. 78F.

3.) Es kann C ausserhalb des Winkels ADB fallen. Ziehet man wiederum den Durchmesser DE: so ist $BCE = 2BDE$, und $ACE = 2ADE$, also $BCE - ACE = ACB = 2(BDE - ADE) = 2ADB$ 79F.

136 §.

Wenn man die Sehne AB ziehet: so heist der Winkel an der Peripherie ADB, dessen Schenkel durch die Endpuncte A und B der Sehne gehen, und dessen Spitze D in den Bogen des dieser Sehne zugehörigen Abschnitts fällt, der **Winkel in diesem Ab-** 79F.

schnitt, und man sagt: **der Abschnitt fasse diesen Winkel.**

Alle Winkel in einerley Abschnitt sind gleich groß, denn sie sind die Hälften von einerley Winkel am Mittelpunct.

Ein Winkel an der Peripherie fasset soviele Grade, als der halbe Bogen zwischen seinen Schenkeln von seiner Peripherie enthält: denn soviele Grade fasset die Hälfte des Winkels am Mittelpunct.

Wenn AB durch C gehet; so ist ADB ein
80F. Winkel im Halbkreise, und zwischen seinen Schenkeln liegt ein Halbkreis. Demnach ist sein Maaß ein Quadrant oder 90°, folglich **ist jeder Winkel im Halbkreise ein rechter Winkel.**

Ein Winkel ADb, den ein kleinerer Abschnitt als ein Halbkreis fasset, ist stumpf. Denn der Bogen AβBb zwischen seinen Schenkeln ist grösser als ein Halbkreis, also das Maaß des Winkels ADb $> 90°$.

Ein Winkel ADβ, den ein grösserer Abschnitt als ein Halbkreis fasset, ist spitz, weil der Bogen Aβ zwischen seinen Schenkeln kleiner, als ein Halbkreis, also sein Maaß kleiner als 90° ist.

137 §.

81F. **In einem Vierecke** *ABCD*, **dessen vier Winkelpuncte in einer Kreislinie liegen, sind jede zweene entgegengesetzte Winkel** $ABC + ADC = 2R$.

Beweis. Man ziehe AC, und BD: so ist $ABC + BCA + CAB = 2R$. Aber $BCA = BDA$, und $CAB = CDB$, also $ABC + BDA + CDB = 2R$, und weil $BDA + CDB = ADC$; so hat man $ABC + ADC = 2R$, also auch $BAD + BCD = 2R$. (96 §.)

Durch

82 F.

Durch drey Winkelpuncte A, B, C, eines Vierecks, ABCD, worin jeder Winkel kleiner als 2 rechte Winkel ist, geht allemahl eine Kreislinie. (133 §.) Wenn nun der vierte Winkelpunct D innerhalb der Fläche dieses Kreises liegt, so kann AD bis an die Kreislinie in F verlängert werden, und man kann CF ziehen. Alsdenn ist $ADC > AFC$, (56 §.) also $ADC + ABC > AFC + ABC$, und $AFC + ABC = 2R$, mithin $ADC + ABC > 2R$.

Wofern im Gegentheil D ausserhalb des Kreises liegt, so muß ein Stück des Bogens AFC zwischen den Schenkeln des Winkels ADC fallen. Man nehme G in diesem Bogen, ziehe AG, CG und verlängere CG bis H: so ist $ADC < AHC$, und $AHC < AGC$, (56 §.) mithin $ADC < AGC$. Demnach ist ferner $ADC + ABC < AGC + ABC$, und $AGC + ABC = 2R$, also $ADC + ABC < 2R$.

Wenn demnach im Viereck jeder Winkel den gegen überstehenden zu 2 rechten Winkeln ergänzt; so geht eine durch drey Winkelpuncte beschriebene Kreislinie zugleich durch den vierten Winkelpunct. Denn widrigenfalls ergänzte dieser Winkel, durch dessen Spitze die Kreislinie nicht liefe, den gegenüberstehenden nicht zu 2 rechten Winkeln.

138 §.

Eine grade Linie, die durch den Umfang eines Kreises so durchgehet, daß kein Punct von ihr innerhalb der Kreisfläche fällt, heißt eine Berührungslinie oder Tangente des Kreises, so wie jede Linie, die den Kreis schneidet, eine Secante desselben genannt wird.

Eine Tangente kann also nur durch einen Punct der Kreislinie gehen: denn gienge sie durch zwey Puncte; so fiele das Stück zwischen diesen Puncten in der Kreisfläche, (77 §.) also wäre die Linie keine Tangente.

139 §.

Durch einen gegebenen Punct, der entweder in der Kreislinie, oder ausserhalb des Kreises liegt, eine Tangente des Kreises zu ziehen.

Aufl. 1. Ist D in der Kreislinie gegeben; so
83 F. ziehe man den Halbmesser CD, und setze durch D auf CD die grade Linie AB senkrecht: (74 §.) so ist AB eine Tangente des Kreises. Denn alle übrige von D unterschiedene Puncte der Linie AB sind von C weiter, als D entfernt. (76 §.) Also liegt AB ganz ausser dem Kreise. (37 §.)

2) Ist A ausser dem Kreise gegeben: so ziehe
84 F. man die grade Linie CA, halbire sie in K und beschreibe mit dem Halbmesser KA = KC aus dem Mittelpunct K einen andern Kreis, der den vorigen in D und E schneidet. Man ziehe hierauf AB, oder AF durch D oder E: so ist sowohl AB, als auch AF eine Tangente des Kreises. Denn wenn man CD, oder CE ziehet: so ist CDA = R, und CEA = R, (136 §.) woraus wie vorhin folgt, daß beyde Linien Tangenten sind.

140 §.

83 F. **Wenn eine grade Linie *AB* den Kreis in *D* berührt, und man ziehet den Halbmesser *CD*: so ist *CD* auf *AB* senkrecht.**

Beweis. Denn CD ist die kürzeste Linie, die man von C nach AB ziehen kann: also ist CD auf AB senkrecht. (76 §.)

Eine

Eine grade Linie vom Mittelpunct C auf die Tangente senkrecht gezogen geht durch den Berührungspunct; denn sonst gäbe es mehr als eine Normallinie von C auf AB: und eine Linie durch D auf der Tangente AB senkrecht gesetzt geht durch den Mittelpunct C, denn sonst könnte man durch D auf AB mehr als eine Normallinie setzen, weil CD allemahl auch auf AB senkrecht ist.

141 §.

Wenn durch *A* zweene Tangenten des Kreises *AD* und *AE* gehen; so ist *AD* = *AE*, und *CA* theilt den Bogen *DE* bey *L* in zweene gleiche Theile. 84F.

Beweis. Denn die Halbmesser CD und CE sind auf AD und AE senkrecht; überdem ist CD = CE, CA = CA: also AD = AE, und ACD = ACE, (78 §.) folglich auch DL = LE. (119 §.)

142 §.

Wenn zweene Kreise einander in *D* berühren: so haben sie in *D* eine gemeinschaftliche Tangente. Denn eine grade Linie durch ihre Mittelpuncte C und E geht durch den Berührungspunct; (49 §.) also ist AB durch D auf CD senkrecht gesetzt eine Tangente beyder Kreise. (139 §.) 85F.

Umgekehrt: Kreise, die in *D* eine gemeinschaftliche Tangente *AB* haben, berühren einander. Denn eine grade Linie durch D auf AB senkrecht gesetzt geht durch beyder Mittelpuncte: (140 §.) also berühren sie einander. (47. 48 §.)

Wenn zwo Kreislinien durch *D* gehen, und die Linie *AB*, welche den einen in *D* berührt, wird von *ab*, welche den andern Kreis in eben dem Punct *D* berührt, geschnitten: so schneiden die Kreise einander ebenfalls. Denn eine Normallinie DH durch D auf AB ist nun von einer Normallinie De durch D auf AB unterschieden. Der Mittelpunct des einen Kreises fällt in DH, der Mittelpunct des andern aber, in De. Also liegen die Mittelpuncte nicht mit D in grader Linie, und solche Kreise schneiden einander. (42 §.)

143 §.

85 F. Wenn die Kreise DGL und DFH einander von innen berühren, und der Halbmesser CD des ersten kleiner ist, als der Halbmesser ED des zweyten; so fällt DGL ganz innerhalb des Kreises DFH: aber die Tangente AB fällt ganz ausserhalb desselben. Demnach geht der grössere Kreis DFH zwischen dem kleinern und der Tangente AB durch.

Ziehet man durch D eine grade Linie *ab* so, daß $EDa < R$ wird; so schneidet diese Linie nothwendig alle Kreise, die in D einander berühren. Denn nun fällt vom Mittelpunct eines jeden dieser Kreise eine Normallinie auf *ab*, die auf der Seite des spitzen Winkels EDa liegt: und weil diese Normallinie kleiner ist, als der Halbmesser des Kreises, durch dessen Mittelpunct sie geht; so giebt es auf dieser Seite Puncte in *ab*, die innerhalb eines jeden dieser Kreise fallen. Auf der andern Seite ist nun ED*b* stumpf, und die Tangente DB geht zwischen D*b*, und jeden dieser Kreise durch. Man nennt nun HDF, oder LDG den **Winkel des Halbkreises**, GDA, oder FDA aber den **Berührungswinkel**, (angulum contactus) und schließt daraus mit dem **Euclides** gewöhnlich folgende Sätze.

144 §.

144 §.

Der Winkel des Halbkreises wie *HDF* = *HDf* ist grösser, als jeder spitze Winkel, und kleiner als jeder stumpfer Winkel.

Denn ED*a* mag einem rechten Winkel so nahe kommen, als man will: so fällt doch allemahl ein Stück des Bogens DF zwischen D*a* und DA. Weil ferner der Winkel ED*b* stumpf ist; so mag er übrigens einem rechten Winkel so nahe, als man will, kommen, es wird doch allemahl die Tangente DB zwischen dem Bogen D*f*, und der graden Linie D*b* durchgehen: also HD*f* allemahl kleiner, als HD*b* seyn. Aus ähnlicher Ursache läßt sich dieser Satz behaupten:

Der Berührungswinkel *ADF* ist kleiner, als jeder gradlinichte Winkel *ADa*. Denn AD*a* mag so klein seyn, wie man will; so fällt noch ein Stück des Bogens DF zwischen DA und D*a*.

Die Sätze sind an sich richtig: damit sie aber nicht zum Mißverstand Anlaß geben, ist nöthig, folgendes dabey zu erinnern. Eine grade Linie, wie DA, oder D*a*, hat überall einerley Lage gegen eine andre DH, die sie schneidet. Dagegen hat ein Kreisbogen DF, DG, gegen eine grade Linie DH oder DA, die er schneidet, oder berührt, nicht überall einerley Lage: vielmehr ist die Lage des Kreisbogens in jedem folgenden Punct gegen eine solche grade Linie anders, als in dem vorhergehenden. Nur in dem Punct D ist die Lage des Bogens DF oder DG mit der Lage der Tangente einerley: das heißt, er schließt daselbst mit der Tangente gar keinen Winkel ein. In eben der Stelle D also schneidet er seinen Durchmesser unter einem eben so grossen Winkel, als derjenig ist, unter welchem die Tangente DA den Durchmesser schneidet: das heißt, der Bogen schneidet seinen Durchmesser unter einem rechten Winkel. Ein Punct, der die Kreislinie beschreibt, hat in dem Augenblick, da er in D anlangt, dieselbe Richtung, die er hätte, wenn er die grade Linie BA beschriebe: er ändert aber diese Richtung sogleich, wenn er die Stelle D verläßt.

145 §.

88 F. **Der Winkel des Abschnitts** ADEB heist derjenige Winkel, den die Sehne AB des Abschnitts mit dem Bogen an seinem Endpunct einschliest.

Wenn GH den Kreis in B berührt, so ist ABG der Winkel des Abschnitts. Denn es sey BF ein Durchmesser: so ist FBE = FBG, (144 §.) also FBE – FBA = FBG – FBA, oder ABE = ABG.

146 §.

88 F. **Der Winkel *ABG* des Abschnitts *ADEB* macht mit dem Winkel *ADB*, welchen eben dieser Abschnitt fasset, zweene rechte Winkel aus.**

Beweis. Wenn BF ein Durchmesser ist, und man ziehet AF; so ist FAB = R, (136 §.), also AFB + ABF = R (57 §.) = ABG + ABF: (140 §.) mithin AFB = ABG. Weil nun AFB + ADB = 2R ist; (137 §.) so ist auch ABG + ADB = 2R.

Demnach ist der Winkel ADB, welchen der eine zur Sehne AB gehörige Kreisabschnitt ADEB fasset, so groß, als der Winkel ABH des andern zu eben der Sehne gehörigen Abschnitts AFKB.

Der

Der VII. Abschnitt.

Von den vielseitigen und besonders den regulären Figuren.

147 §.

Wenn man die Ergänzungen aller hohlen Winkel einer gradlinichten Figur zu $2R$ nach der Ordnung, wie die Winkel in der Figur auf einander folgen, zusammen addirt, aber jedesmahl, wenn ein erhabener Winkel folgt, den Ueberschuß desselben über $2R$ von der bis dahin gefundenen Summe subtrahirt: so ergiebt sich, daß die Summe aller Ergänzungen der hohlen Winkel die Summe der Ueberschüsse der erhabenen Winkel über $2R$ um $4R$ übertreffen müsse, wenn anders die Figur schliessen soll.

Beweis. Weil die Figur wenigstens einen 46.
hohlen Winkel hat, (29 §.) so sey $FAB < 2R$. 47F.
Durch F ziehe man mit den Seitenlinien der Figur, wie sie nach einander in der Ordnung folgen, die parallelen Linien Fb, Fc, Fd, Fe, u. s. w. so sind die Winkel $AFb = BA\alpha$, $bFc = CB\beta$, $cFd = DC\gamma$, $dFe = ED\delta$, $eFf = FE\varepsilon$. (88 §.) Nun ist in der 47 Fig. $AFb + bFc = BA\alpha + CB\beta$, und weil bey C ein erhabener Winkel folgt, so wird $AFd = AFb + bFc - cFd = BA\alpha + CB\beta - DC\gamma$. Hiezu kommt ferner $dFe = ED\delta$, und $eFf = FE\varepsilon$: wird hievon AFf abgezogen, weil AFE ein erhabener Winkel ist; so findet man $AFb + bFc - cFd + dFe$

$+ eFf - fFA = 4R$. Eben so hat man in der 46 Fig. $AFb - bFc + cFd + dFe + eFf + fFA = 4R$.

Gesetzt daß auch anfangs mehr erhabene Winkel nach einander folgten, wie wenn in der 46 Figur FABCMNOP einen Theil vom Umfang der Fig. ausmachte; so könnte zwar anfangs die Summe der Ueberschüsse der erhabenen Winkel die Summe der Ergänzungen der hohlen Winkel übertreffen: allein wofern der hohle Winkel FAB ein Winkel der Figur werden soll, so müssen nach den erhabenen Winkeln wieder hohle Winkel folgen, und die Summe ihrer Ergänzungen zu 2R muß wieder grösser werden, als die Summe jener Ueberschüsse der hohlen Winkel über 2R. Zöge sich die gebrochene Linie FABCMN noch weiter linker Hand herum, und schlösse sie so mit F, so würde nicht der hohle Winkel FAB, sondern seine Ergänzung zu 4R, ein Winkel der Figur werden: deswegen muß die gebrochene Linie FABCMNOP bey N oder an einer andern Stelle wieder anfangen, sich rechter Hand herum zu ziehen, da dann bey N, O, wieder hohle Winkel folgen. Wenn also gleich anfangs die Summe der Ueberschüsse der erhabenen Winkel die Ergänzung AFb des ersten hohlen Winkels um den Winkel AFn übertrift; so wird doch AFn von der Summe der Ergänzungen der folgenden hohlen Winkel $nFo + oFp$ aufs neue um den Winkel AFp übertroffen. Nun könnten PQ und ED einander schon schneiden; und wenn die Figur so schlösse, so kämen zu AFp noch die Winkel $pFq + qFe + eFf + fFA$, die mit AFp zusammen 4R ausmachen.

Die Abwechselung in der Folge der erhabenen und hohlen Winkel nach einander könnte noch viel mannigfaltiger seyn: allein man mag sich den Fall

so

so verwickelt wie man will vorstellen, so ist doch eben um deswillen unmöglich, daß ein von 4R Winkeln verschiedenes Resultat herauskommen kann, weil die gebrochene Linie, die den Umfang der Figur ausmachen soll, mit F so wieder schliessen muß, daß der hohle Winkel FAB ein innerer Winkel wird.

148 §.

Die Summe aller Winkel einer jeden gradlinichten Figur beträgt zweymahl soviele rechte Winkel, als die Figur Seiten hat, weniger vier rechten Winkeln.

Beweis. Wenn man Kürze halber die innern Winkel der Figur, welche hier verstanden werden, mit A, B, C, D, u. s. w. ihre Ergänzungen zu 2R, oder wenn es erhabene Winkel sind, ihre Ueberschüsse über 2R, mit α, β, γ, δ, u. s. w. bezeichnet; so hat man

$$
\begin{aligned}
A + \alpha &= 2R \\
B + \beta &= 2R \\
C - \gamma &= 2R \\
D + \delta &= 2R \\
E + \varepsilon &= 2R \\
F - \zeta &= 2R
\end{aligned}
$$ 47 F.

und dies jederzeit sovielmahl, als die Figur Seitenlinien hat. (29 §.) Es sey also die Zahl der Seitenlinien $= n$, die Summe aller Winkel der Figur $= S$, die Summe aller Ergänzungen der hohlen Winkel $= \Sigma$, die Summe aller Ueberschüsse der erhabenen Winkel über 2R aber sey $= s$; so findet man $S + \Sigma - s = 2nR$. Es ist aber $\Sigma - s = 4R$, (147 §.) also $S + 4R = 2nR$, und $S = 2nR - 4R$.

Die Summe aller Winkel solcher Figuren, die gleichviele Seitenlinien haben, ist also in der einen

so

so groß als in der andern, und man findet diese Summe, wenn man 180° mit der Zahl der Seitenlinien weniger 2 multiplicirt: denn es ist auch $S = (n - 2) 2R$. Demnach beträgt diese Summe

im Fünfeck 6R,
im Sechseck 8R,
im Siebeneck 10R,

und allemahl wächst die Summe aller Winkel um 2R oder 180°, wenn die Zahl der Seitenlinien um Eins wächst.

149 §.

Jede gradlinichte Figur hat wenigstens drey hohle Winkel die kleiner als 2*R* Winkel sind.

Beweis. Wenn die Figur nur zwey hohle Winkel hätte, so wäre die Summe aller ihrer erhabenen Winkel schon grösser als $(n - 2) 2R$, welches dem 148 §. widerspricht: demnach muß die Figur wenigstens drey hohle Winkel haben.

150 §.

45F. Wenn die Winkeln *B*, *C*, *D*, unter welchen die gradlinichten Theile einer gebrochenen Linie *ABCDE* einander schneiden, insgesamt auf der Seite hohl sind, auf welcher die hohle Seite des ersten *ABC* liegt; so liegt die grade Linie *AE* zwischen ihren Endpuncten auf eben der Seite.

Beweis. Wenn man AE zieht, so giebt sich eine gradlinichte Figur, und ausser den Winkeln der gebrochenen Linie kommen nur zweene Winkel bey A und E hinzu. Fiele nun AE auf der Seite, wo die hohlen Winkel liegen, so wären gewiß alle Winkel bis auf zweene, erhabene Winkel, welches nicht seyn kann

kann. (149 §.) Es kann aber auch AE von der gebrochenen Linie zwischen A und E nicht geschnitten werden: sonst müste wenigstens ein Winkelpunct auf der andern Seite von AE liegen, und der dazu gehörige Winkel müste seine hohle Seite nicht auf der Seite haben, wie die hohle Seite der übrigen Winkel liegt.

151 §.

Jede gradlinichte Figur läßt sich durch Diagonallinien in Dreyecke theilen, deren Summe so groß ist, als die Fläche der ganzen Figur.

Beweis. Wenn alle Winkel der Figur kleiner als zweene rechte Winkel sind, so folgt die Möglichkeit dieser Voraussetzung aus dem 150 §. zwischen den Endpuncten A, C, der Schenkel eines jeden Winkels ABC liegt nun eine solche Diagonallinie, weil der übrige Theil CDEA vom Umfang der Figur eine solche gebrochene Linie ist, wie sie der 150 §. voraussetzt. Demnach liegt die Linie AC nothwendig zwischen dem hohlen Winkel ABC, und der hohlen Seite des übrigen Theils vom Umfang der Figur. Letztere ist nun vermittelst der Diagonallinie in ein Dreyeck und eine andre Figur von eben der Art wie vorhin vertheilt, die aber eine Seitenlinie weniger hat, als vorhin: demnach kann darin aufs neue eine Diagonale gezogen, und so fortgefahren werden, bis ein Viereck übrig bleibt, das man durch die letzte Diagonale in zwey Dreyecke theilt. 45F.

Ein Fünfeck kann nur zwey solche innere Winkel haben, die 2R übertreffen, ein Sechseck hat nie mehr als drey, ein Siebeneck nie mehr, als vier Winkel dieser Art. (149 §.) Entwirft man sich die Figur

für

für diese besondern Fälle, so überzeugt man sich leicht, daß dergleichen Figuren sich ebenfalls durch Diagonallinien in Dreyecke zerlegen lassen: nur wegen der immer grössern Mannigfaltigkeit der Fälle, wenn die Zahl der Seitenlinien immer grösser angenommen wird, läßt sich die allgemeine Möglichkeit einer solchen Zertheilung der Figur in Dreyecke nicht so kurz wie für den Fall beweisen, wenn alle innere Winkel kleiner als 2R sind. Indessen wird es verstattet seyn, anzunehmen: jede Figur lasse sich vermittelst einer Diagonale in ein Dreyeck und eine andre Figur zertheilen, die eine Seitenlinie weniger, als die vorige hat. Denn unter den Winkeln der Figur giebt es wenigstens drey solche, die kleiner als 2R sind, und wenigstens einer davon muß sich mit einer graden Linie durch die Endpuncte seiner Schenkel schliessen lassen, die zugleich ganz in der Fläche der Figur liegt. Also kann man jedes Fünfeck in ein Dreyeck und Viereck, mithin das Fünfeck selbst in Dreyecke theilen, weil sich das Viereck allemahl so theilen läßt. (96 §.) Aber eben darum muß jedes Sechseck sich so theilen lassen, weil es in ein Dreyeck und Fünfeck zertheilt werden kann, und dieserwegen auch das Siebeneck, weil man es in ein Sechseck und Dreyeck theilen kann. So gilt der Schluß von jedem Vieleck auf ein andres, das eine Seitenlinie mehr hat: mithin ist es verstattet, für alle Vielecke überhaupt anzunehmen, daß die Theilung derselben durch Diagonale in Dreyecke möglich sey.

152 §.

Eine gradlinichte Figur heißt eine **im Kreise beschriebene**, wenn der Kreis durch alle ihre Winkelspitzen geht, und man sagt, **der Kreis sey um die**

Figur

Figur beschrieben. Eine gradlinichte Figur aber heißt eine um den Kreis beschriebene, wenn alle ihre Seiten Berührungslinien des Kreises sind, und man sagt, der Kreis sey in der Figur beschrieben.

153 §.

Eine gradlinichte Figur heißt gleichwinklicht, wenn alle ihre Winkel gleich groß sind, und gleichseitig, wenn alle ihre Seiten gleich groß sind. Eine reguläre Figur ist eine solche, die lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, und also beydes gleichseitig und gleichwinklicht ist. Sie heißt gewöhnlich ein reguläres Polygon, wenn sie mehr als vier Seiten hat: der Winkel, welchen zwo Seiten einer solchen Figur einschliessen, heißt der Polygonwinkel, und jede Seite, die Polygonseite.

Es sey die Anzahl aller Seitenlinien des regulären Polygons $= n$, so ist die Summe aller Winkel desselben $= 2n\mathrm{R} - 4\mathrm{R}$: (148 §.) weil nun überdem alle Winkel gleich groß sind, so ist jeder Polygonwinkel $= 2\mathrm{R} - \frac{4\mathrm{R}}{n}$, also kleiner als 2R, das leztere folgt auch schon daraus, weil jeder von den übrigen insgesammt gleich grossen Winkeln 2R übertreffen müste, wenn einer davon 2R überträfe, welches nicht seyn kann. (29 §.)

154 §.

Ein reguläres Polygon in einem Kreise zu beschreiben, wenn vorausgesezt wird, daß man die Kreislinie in so viele gleiche Theile eintheilen könne, als verlangt wird.

Aufl. Man theile die Kreislinie in so viele gleiche Bogen, als das Polygon Seiten haben soll, (131 §.) und ziehe die Sehne eines jeden dieser Bogen: so ist das verlangte Polygon verzeichnet. 89F.

Beweis.

Beweis. Wenn AB, BC, CD, u. s. f. diese gleiche Bogen sind, und P die Peripherie des Kreises, n aber die Anzahl der Seiten des Polygons bezeichnet; so ist jeder von diesen Bogen $= \frac{1}{n} P$, und jeden Winkel der Figur, wie ABC, fasset ein Abschnitt, dessen Bogen $= \frac{2}{n} P$ ist: folglich stehen alle Winkel in gleichen Abschnitten, und sind gleich groß. (136 §.) Ueberdem sind alle Seiten der Figur gleich groß, weil es Sehnen sind, die zu gleichen Bogen gehören. (121 §.)

Die Sehne eines Bogen von 60°, oder vom sechsten Theil der Peripherie ist dem Halbmesser gleich: (127 §.) also kann auch ohne Hülfe des Transporteurs leicht ein Sechseck im Kreise verzeichnet werden.

Da jede Sehne ganz im Kreise liegt: so ist jedes im Kreise beschriebene reguläre Polygon kleiner, als der Kreis, und alle Seiten desselben sind vom Mittelpunct des Kreises gleich weit entfernt. Wenn aber in eben dem Kreise ein neues reguläres Polygon beschrieben wird, das mehr Seiten hat, als das vorige: so werden die Seiten des letztern kleiner, als die Seiten des ersten waren, (121 §.) und jene sind zugleich vom Mittelpunct weiter entfernt. (134 §.)

Indessen mag man dem Polygon so viele Seiten geben, als man will; so bleibt es doch allemahl kleiner, als der Kreis. Auch ist der Umfang eines solchen Polygons kleiner, als des Kreises Umfang, weil jede Sehne kleiner, als ihr Bogen ist. (32 §.)

Wenn man vom Mittelpunct des Kreises K bis an alle Winkelspitzen des Polygons A, B, C, u. s. f. die Halbmesser KA, KB, KC u. s. f. ziehet: so theilen sie das ganze Polygon in so viele gleichschenklichte

Dreyecke, als Seiten vorhanden sind. Diese gleichschenklichten Dreyecke passen überdem alle auf einander: (65 §.) also halbirt jeder Halbmesser, wie KB den Polygonwinkel ABC.

155 §.

In jedem regulären Polygon giebt es einen Punct *K*, der von allen Winkelspitzen gleichweit entfernt ist, und derselbe liegt in jeder graden Linie, die einen Polygonwinkel halbirt.

Beweis. Wenn man zweene an einer Seite BC anliegende Polygonwinkel ABC, BCD halbirt, so müssen die Theilungslinien BK, CK einander schneiden. (85 §.) Denn $ABC + BCD < 4R$, (153 §.) also $\frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}BCD = KBC + KCB < 2R$. Alsdenn ist ferner BKC ein gleichschenklichtes Dreyeck; (63. 153 §.) und wenn man KD ziehet; so ist $KCD = KBC$, $CD = BC$, (153 §.) $KC = KB$, also paßt das Dreyeck KCD auf KBC (60 §.) und es ist $KD = KC$, $KDC = KCB = KCD = KDE$. Demnach erhellet auf eben die Art, das auch $KE = KD$, mithin die Entfernung eines jeden der folgenden Winkelpuncte von K eben so groß, als die Entfernung der vorigen sey.

Eben der Punct K ist von allen Seitenlinien des Polygons gleichweit entfernt, und derselbe liegt zugleich in jeder graden Linie, die eine Polygonseite senkrecht halbirt.

156 §.

Der von allen Winkelpuncten und allen Seitenlinien des Polygons gleichweit entfernte Punct K kann des **Polygons Mittelpunct** heissen: er ist zugleich der Mittelpunct eines Kreises, der mit dem Halbmesser KA = KB, u. s. w. um das Polygon beschreiben läßt.

Alle durch K bis an den Umfang des Polygons gezogene grade Linien, wie MN, halbiren einander in K, weil die Dreyecke KCM, KGN ausser der gleichen Seite KC = KG zwey gleiche anliegende Winkel haben. (89 §.)

157 §.

Der Winkel BKC am Mittelpunct des regulären Polygons, welchen zwey nach den Endpuncten B und C einer Polygonseite gezogene Halbmesser einschliessen, heist der Centri-Winkel, und dieser Centriwinkel ist $= \frac{4R}{n}$, wenn n die Anzahl der Seiten des Polygons ist. Denn alle Winkel um K machen 4R, ihre Anzahl ist n, und sie sind alle gleich groß. Der Polygonwinkel ist $= 2R - \frac{4R}{n}$, (153 §.) mithin ergänzen der Polygonwinkel und Centriwinkel einander zu 2R. Diesemnach findet man

für das	den Centri-W.	den Polygon-W.
Fünfeck	72° 0′ 0″	108° 0′ 0″
Sechseck	60° 0′ 0″	120° 0′ 0″
Siebeneck	51° 25′ $42\frac{6}{7}$″	128° 34′ $17\frac{1}{7}$″
Achteck	45° 0′ 0″	135° 0′ 0″
Neuneck	40° 0′ 0″	140° 0′ 0″
Zehneck	36° 0′ 0″	144° 0′ 0″

158 §.

Auf einer gegebenen graden Linie *BC* ein Polygon zu verzeichnen, das eine gegebene Anzahl von Seiten hat, wenn vorausgesetzt wird, daß man jeden Winkel zeichnen könne,

dessen

dessen Verhältniß zum rechten Winkel gegeben ist.

Aufl. Man setze an der gegebenen Linie BC in B 90F.
und C den halben Polygonwinkel, daß ist, einen Winkel $CBG = BCG = R - \frac{2R}{n}$, (153 §.) wenn n die gegebene Anzahl der Seiten ist. Beyde auf solche Art durch B und C gezogenen grade Linien werden einander in G schneiden, (85 §.) und G wird der Mittelpunct, so wie GB = GC der Halbmesser eines Kreises seyn, worin die Sehne BC zu einem Bogen gehört, der im ganzen Umfang n mahl enthalten ist. Denn BGC ergänzt die Summe der beyden Winkel an B und C zu 2R, und weil diese Summe dem Polygonwinkel gleich ist, so ist BGC der Centriwinkel des verlangten Polygons. (157 §.)

Für das Sechseck wird BGC ein gleichseitiges Dreyeck, weil alle drey Winkel 60° groß seyn müssen. Man vergleiche den 127 §.

159 §.

Um einen gegebenen Kreis ein reguläres Polygon zu beschreiben, wenn wiederum vorausgesetzt wird, daß man den Kreis in so viele gleiche Theile eintheilen könne, als verlangt wird.

Aufl. Man theile die Kreislinie in so viele gleiche
Theile, als das Polygon Seiten haben soll. (131 §.) 91F.
Wenn nun L, M, N, O, P, Q, R, u. s. f. die Theilungspuncte sind; so ziehe man durch alle diese Puncte Tangenten des Kreises: jede derselben wird die nächstfolgende schneiden, in B, C, D, E u. s. f., und alle diese Tangenten werden das verlangte Polygon einschliessen.

Beweis. Die Halbmesser KL, KM, KN u. s. f. sind auf den Berührungslinien senkrecht, und die Winkel LKM, MKN u. s. f. sind kleiner, als 2R, weil das Polygon wenigstens 3 Seiten haben muß: (28 §.) also schneidet jede Tangente AB die nächstfolgende BC, (132 §.) und die Tangenten BL, BM, sind gleich groß, so wie aus eben dem Grunde CM = CN, DO = DN ist, u. s. w. um den ganzen Umfang herum. (141 §.) Ferner sind in den Vierecken BLKM, CMKN u. s. f. die Winkel bey K gleich, (119 §.) bey L, M, N u. s. f. sind rechte Winkel, (140 §.) also sind die Winkel B, C, u. s. f. gleich, weil sie die gleichen Winkel bey K zu zweenen rechten Winkeln ergänzen. (96 §.) Weiter ist MKB = $\frac{1}{2}$MKL und MKC = $\frac{1}{2}$MKN; (141 §.) also MKB = MKC, und aus eben dem Grunde NKC = NKD u. s. w. um den gan-zen Umfang herum: mithin ist MB = MC, AL = LB, NC = ND, u. s. w. (89 §.) Diesemnach ist AB = 2BL, BC = 2BM = 2CM, CD = 2CN; und weil BL = BM, CM = CN war, so ist AB = BC = CD, und s. f. um den ganzen Umfang herum.

Weil die Winkelpuncte B, C, D, u. s. f. nothwendig ausserhalb des Kreises fallen, (138 §.) so ist jedes um einen Kreis beschriebene Polygon grösser, als der Kreis. Weil ferner die gebrochene Linie LBM > Bog. LM ist, und MCN > Bog. MN, u. s. f. (32 §.) so ist der Umfang des Polygons grösser, als des Kreises Umfang.

Wenn man BK ziehet; so stehet diese Linie auf LM senkrecht: denn sie halbirt LKM, so daß BKL = $\frac{1}{2}$LKM ist. Bekommt das Polygon mehr Seiten, als vorhin; so wird der Bogen LM, folglich

LKM

LKM und BKL kleiner, als vorhin: also wird BL kleiner, (90 §.) folglich auch BK. (108 §.)

Wenn zwo an einander liegende Seiten AB, BC, eines regulären Polygons mit senkrechten Linien LK, MK halbirt werden; so schneiden diese einander im Mittelpunct K des Polygons, (155. 156 §.) und KL, KM, sind gleich groß, so wie die Entfernungen aller übrigen Seiten von K gleich groß sind. Demnach kann aus dem Mittelpunct K mit dem Halbmesser KL in jedem regulären Polygon ein Kreis beschrieben werden.

160 §.

Jedes reguläre Polygon ist so groß als ein Dreyeck, dessen Grundlinie dem Umfang des Polygons, und dessen Höhe der Entfernung der Seiten des Polygons vom Mittelpunct gleich ist. 90 F.

Beweis. Es sey n die Zahl der Seitenlinien des Polygons ABCDEF, (90 Fig.) so ist der Umfang desselben $= n$ BC; und wenn man die Halbmesser GB, GC, ziehet, so ist die Fläche des Polygons $= n$ Dr. BCG. Nun sey KL $= n$ BC, und des Dreyecks MKL Höhe KM $=$ GH; ferner sey KN $=$ BC: so ist MKN $=$ BCG. (105 §.) Auf KL kann man KN $=$ BC n mahl auftragen, und alsdenn nach alle Theilungspuncte O, P, Q, u. s. w. die Linien KO, KP, KQ, u. s. w. ziehen; so erhellet, daß MKL $= n$ MKN sey, also auch MKL $= n$ BCG. Weil nun das Polygon ebenfalls $= n$ BCG war, so ist das Polygon $=$ dem Dreyeck MKL.

Der VIII. Abschnitt.

Fernere Lehren von den Proportionen mit Anwendungen auf die Lehren von der Proportionalität grader Linien.

161 §.

Das Verhältniß A : B ist dem Verhältniß C : D nur alsdenn gleich, wenn man versichert ist, daß

allemahl $A > \frac{n}{m}B$ und $A < \frac{n+1}{m}B$ sey,

wenn $C > \frac{n}{m}D$ und $C < \frac{n+1}{m}D$ ist;

was auch *m* und *n* für ganze Zahlen bezeichnen. (164. 165 §. Rech.) Dies Kennzeichen der Proportionalität läßt sich auch so ausdrücken: das Verhältniß $A : B$ sey dem Verhältniß $C : D$ gleich, wenn man versichert ist, daß allemahl

$mA > nB$ und $mA < (n+1)B$ sey,

wenn $mC > nD$ und $mC < (n+1)D$ ist;

was man auch für ganze Zahlen durch *m* und *n* verstehen will. So drückt Euclides dies Kennzeichen der Proportionalität aus. (Elem. V. Def. V.) Wären die Verhältnisse rational, so liesse sich ein rationaler Bruch $\frac{n}{m}$ für den Exponenten angeben, da dann $A = \frac{n}{m}B$ seyn muß, wenn $C = \frac{n}{m}D$ ist, also auch $mA = nB$, wenn $mC = nD$ ist. Das alles fasset Euclides in die folgende Erklärung zusammen: In eadem ratione magnitudines dicuntur esse prima *A* ad secundam *B*, et tertia *C* ad quartam *D*; cum primae

primae A et tertiae C aequemultiplicia a ſecundae B et quartae D aequemultiplicibus, qualiscunque ſit haec multiplicatio, utrumque ab utroque, vel una deficiunt, vel una aequalia ſunt, vel una excedunt, ſi ea ſumantur aequemultiplicia, quae inter ſe reſpondent.

Es iſt rathſam, daß man ſich auch dieſe Vorſtellung des Kennzeichens der Proportionalität geläufig mache, um den **Euclides** ſelbſt und andre alte Geometer deſto beſſer zu verſtehen, Indeſſen führt jene Vorſtellung die Sache auf die einfachſten und leichteſten Grundbegriffe zurück: deswegen wird ſie im folgenden auch beybehalten werden.

Die alten Geometer bedienten ſich vornemlich der Proportionen, und der mancherley Arten zu ſchlieſſen, nach welchen man aus einer oder mehrern Proportionen neue herleiten kann, wenn ſie mit der Auflöſung geometriſcher Probleme und andern Unterſuchungen beſchäftiget waren. Die vornehmſten Regeln, nach welchen man dergleichen Aenderungen mit einer oder mehrern Proportionen vornehmen kann, ſo daß vier neue Proportionalgröſſen gefunden werden, ſind im 168. 169. 172. und 177 §. ſchon vorgetragen worden: daraus laſſen ſich aber noch mehrere andre Regeln dieſer Art herleiten, die man um deswillen ein für allemahl zu merken hat, weil bey den im folgenden häufig anzuſtellenden Vergleichungen die Beweiſe und Schlüſſe dadurch ſehr abgekürzt werden.

162 §.

Aus zwoen Proportionen von dieſer Art $A:B=C:D$, und $B:E=D:F$, wenn die beyden nachfolgenden Glieder der erſten mit den beyden vorhergehenden Gliedern der zweyten einerley sind, folgt (*ordinatim et ex aequo*) die dritte $A : E = C : F$.

Beweis. Aus A : B = C : D
und B : E = D : F

folgt A × B : E × B = C × D : F × D, (177 §. Rech.) und es ist A × B : E × B = A : E, so wie C × D : F × D = C : F; (171 §. Rechenk.) also A : E = C : F.

Das Verhältniß A : E ist aus den Verhältnissen A : B und B : E, so wie das Verhältniß C : F aus C : D und D : F zusammengesetzt: (219 §. Rech.) also leitet die erwiesene Regel auf den folgenden allgemeinen Satz:

163 §.

Verhältnisse, die aus einer gleichen Anzahl gleich grosser Verhältnisse zusammen gesetzt werden, sind gleiche Verhältnisse.

Beweis. Aus A : B = C : D
und B : E = D : F
folgt A : E = C : F (162 §.)

Hat man also ferner
E : G = F : H, so ist
auch A : G = C : H, und wenn
überdem G : K = H : L ist, so folgt
eben so A : K = C : L.

So kann man von jeder Anzahl von Proportionen dieser Art auf die folgende um Eins grössere Anzahl schliessen: mithin ist der Satz allemahl richtig, die Anzahl der gleichen Verhältnisse, aus welchen man zwey andre zusammen setzt, sey so groß, als sie wolle.

164 §.

Wenn $A : B = C : D$ ist; so ist auch

I.) zusammengesetzt oder getheilt *(componendo vel dividendo)* $A + B : B = C + D : D$, oder $A - B : B = C - D : D$; im letzten Fall vorausgesezt, daß $A > B$, also auch $C > D$ sey.

Beweis. Es sey $A > \frac{n}{m}B$ und $A < \frac{n+1}{m}B$, so ist allemahl zugleich $C > \frac{n}{m}D$ und $C < \frac{n+1}{m}D$. Daraus folgt, es sey $A + B > \frac{n+m}{m}B$ und $A + B < \frac{n+m+1}{m}B$; überdem aber allemahl auch $C + D > \frac{n+m}{m}D$ und $C + D < \frac{n+m+1}{m}D$: folglich ist $A + B : B = C + D : D$. (161 §.) Wenn ferner $A > B$, also wenigstens n nicht kleiner als m ist, so hat man auch $A - B > \frac{n-m}{m}B$ und $A - B < \frac{n+1-m}{m}B$, zugleich aber allemahl $C - D > \frac{n-m}{m}D$ und $C - D < \frac{n+1-m}{m}D$: mithin wiederum $A - B : B = C - D : D$.

II.) Umgekehrt *(convertendo)* $A : A + B = C : C + D$, oder $A : A - B = C : C - D$.

Beweis. Aus $A : B = C : D$ folgt $A + B : B = C + D : D$, vermöge n. 1. und überdem $B : A = D : C$ (167 §. Rech.) also auch $A + B : A = C + D : C$ (162 §.) oder $A : A + B = C : C + D$. Ferner ist $A - B : B = C - D : D$ (n. 1.) und $B : A = D : C$, also $A - B : A = C - D : C$, (162 §.) oder $A : A - B = C : C - D$. (167 §. Rechenk.)

 III.) Aus

III.) Aus den beyden Proportionen $A + B : A = C + D + C$, und $A : A - B = C : C - D$, folgt auch nach dem 162 §. diese, $A + B : A - B = C + D : C - D$.

IV.) Wenn also alle vier Glieder der Proportion $A : B = C : D$ von einerley Art sind, so hat man aus der letzten Proportion wiederum folgende: $A + B : C + D = A - B : C - D$. (172 §. Rech.)

165 §.

Man kann zwey gleichnahmige Glieder einer Proportion mit einerley Rational= oder Irrational=Zahl multipliciren oder dividiren, und man erhält eine neue Proportion.

Beweis. Wenn $A : B = C : D$ ist; so hat man $nA : A = nC : C$, wenn gleich n irrational wäre, (165 §. Rech.) und $A : B = C : D$; also $nA : B = nC : D$. (162 §.) Mit der Proportion $A : B = C : D$ verbinde man ferner diese, $B : nB = D : nD$, (164. 165 §. Rech.) so ist auch $A : nB = C : nD$, (162 §.) Aus jener Proportion wird alsdenn ferner $A : \frac{B}{n} = C : \frac{D}{n}$, aus dieser aber $\frac{A}{n} : B = \frac{C}{n} : D$ gefunden. (170 §. Rech.)

Demnach kann man auch beydes zugleich die beyden vorhergehenden Glieder mit einerley Zahl, und jedes der beyden nachfolgenden Glieder mit einer und eben derselben von der vorigen verschiedenen Zahl multipliciren oder dividiren, um eine neue Proportion zu erhalten. Denn aus $A : B = C : D$ folgt $nA : B = nC : D$, und daraus ferner $nA : mB = nC : mD$.

166 §.

166 §.

Aus zwoen Proportionen von dieser Art *A : B = C : D*, und *B : E = F : C*, wenn die beyden mittlern Glieder der ersten mit den beyden äussern der letzten einerley sind, folgt *(perturbate et ex aequo)* die dritte *A : E = F : D*.

Beweis. Aus A : B = C : D
und B : E = F : C
folgt A × B : E × B = F × C : D × C, (177 §. Rech.)
also auch A : E = F : D. (171 §. R.)

167 §.

Wenn in zwoen Proportionen *A : B = C : D* und *E : F = G : H* die beyden ersten gleichnahmigen Glieder beyder Proportionen einander proportional sind; so sind auch die beyden letztern einander proportional.

Beweis. Weil A : E = C : G, und E : F = G : H angenommen wird; so ist A : F = C : H. (162 §.) Ueberdem ist B : A = D : C, also B : F = D : H. (162 §.)

168 §.

Wenn in zwoen Proportionen *A : B = C : D* und *E : F = G : H* die gleichnahmigen Glieder der einen den gleichnahmigen Gliedern der andern proportional sind; so sind die Summen oder Differenzen der Glieder, wie sie nach einander folgen, proportional: da dann im letzten Fall alle Glieder der einen Proportion die gleichnahmigen Glieder der andern übertreffen müssen.

Beweis. Weil A : E = C : G angenommen wird: so ist A + E : E = C + G : G; (164 §.) und weil überdem E : F = G : H gesetzt ist, so wird A + E : F

= C

$= C + G : H$. (162 §.) Ferner hat man $B : F = D : H$; (167 §.) also ist $F : B + F = H : D + H$, (164 §.) mithin auch $A + E : B + F = C + G : D + H$. (162 §.) Wäre $E < A$, also $G < C$; und wäre überdem $F < B$, also $H < D$; so könnte man allenthalben das Zeichen $-$ statt $+$ schreiben, und man erhielte $A - E : B - F = C - G : D - H$.

169 §.

Der erste Satz des vorigen §. läßt sich auch auf mehr, als zwo Proportionen anwenden. Es sey

$A : B = C : D$	und	so ist (167 §.)
$E : F = G : H$	$A : E = C : G$	$B : F = D : H$
$I : K = L : M$	$E : I = G : L$	$F : K = H : M$;

also hat man aus den beyden ersten Proportionen $A + E : B + F = C + G : D + H$. (168 §.) hiemit verbinde man die dritte $I : K = L : M$; so hat man vermöge der zweyten Columne $A + E : E = C + G : G$, (164 §.) also weiter $A + E : I = C + G : L$, (162 §.) mithin $A + E + I : B + F + K = C + G + L : D + H + M$. (168 §.)

So kann man von jeder Anzahl von Proportionen auf die nächstfolgende schliessen; also gilt der Satz von so vielen Proportionen, als man will, wenn ihre gleichnahmigen Glieder proportional sind.

170 §.

Wenn in mehrern Proportionen zwo gleichnahmige Glieder einerley sind, wie in folgenden.

$$A : a = B : b$$
$$C : a = D : b$$
$$E : a = F : b \text{ u. s. f.}$$

so findet die Regel des vor. §. ihre Anwendung, weil alsdenn die gleichnahmigen Glieder in der zweyten

und

und vierten Stelle, wie sie in der Ordnung folgen, proportional sind. Demnach hat man

$A + C + E + \text{etc} : na = B + D + F + \text{etc} : nb$,

wenn n die Anzahl der Proportionen ist: also ist auch,

$A + C + E + \text{etc} : a = B + D + F + \text{etc} : b$. (167 §.)

171 §.

Die Begriffe von der geometrischen Progreßion (179 §. R.) sind eben so wenig auf die Zahlen allein eingeschränkt als es die Begriffe von den Verhältnissen und Proportionen überhaupt sind: vielmehr können die Glieder der Progression auch Linien und andre geometrische Grössen seyn. Eben diese Allgemeinheit der Begriffe von den Verhältnissen, Proportionen und Progressionen, hat veranlasset, daß auch in die Geometrie Redensarten sind aufgenommen worden, die sonst nur in der Rechenkunst gewöhnlich wären. Eine Linie mit einer Linie multipliciren oder dividiren heißt im ersten Fall: zu einer Linie, die = 1 gesetzt ist, und zu beyden Factoren; im zweyten Fall: zum Divisor, der = 1 gesetzten Linie, und dem Dividendo die vierte Proportionallinie suchen. (175 §. Rech. n. 4. 5.) In der Geometrie bedeuten diese Redensarten Constructionen, da sie statt dessen in der Rechenkunst Rechnungsarten mit Zahlen bezeichneten. Im allgemeinen geometrischen Verstande ist also die Quadratwurzel aus einer Linie eine mitlere Proportional-Linie zwischen eben dieser Linie und der Einheit: die Cubikwurzel aus einer Linie ist die erste von zwoen mitlern Proportional-Linien zwischen der gegebenen Linie und der = 1 gesetzten Linie. Ueberhaupt ist die Wurzel einer jeden höhern Ordnung die erste von so vielen dergleichen mittlern Proportionallinien, als der Wurzel-Exponent weniger Eins anzeigt. (181 §. Rech.)

172 §.

95F. **Wenn eine Seite *AB* eines Dreyecks *ABC* in gleiche Theile *Aa, ab, bc,* u. s. f. eingetheilt ist, und durch alle Theilungspuncte, *a, b, c* u. s. f. die graden Linien *af, bg, ch,* u. s. w. mit der anliegenden Seite *BC* parallel gezogen werden; so wird dadurch die dritte Seite *AC* in eben so viele gleiche Theile getheilt.**

Beweis Jede Parallele schneidet auch AC und zwar zwischen A und C, weil sie alle die Seite AB unter dem Winkel $Aaf = ABC$ schneiden, mithin durch die Fläche des Dreyecks durchgehen müssen: (31 §.) also giebt es in AC so viele Theile, als in AB. Durch alle Theilungspuncte *a, b, c,* u. s. f. ziehe man mit AC die Parallelen *am, bn,* u. s. f. bis an die nächste Parallele: so hat man in den Dreyecken Aaf und abm die Seite $Aa = ab$, den Winkel $aAf = bam$, und $Aaf = abm$, (86 §.) folglich $am = Af$. (89 §.) Aber es ist auch $am = fg$: (99 §.) also $Af = fg$. Aus ähnlicher Ursache ist $bn = am$ (89 §.) $= fg$, und $bn = gh$: (99 §.) also auch $fg = gh$. Da diese Schlüsse von jedem Stück auf das nächstfolgende allemahl gelten; so sind alle Theile in AC gleich groß.

173 §.

95F. **Eine gegebene grade Linie *AC* in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen.**

Aufl. Man ziehe durch A eine andre grade Linie AB, die mit AC einen beliebigen Winkel BAC macht. Auf AB nehme man ein Stück Aa von willkührlicher Grösse, und trage es von *a* in *b*, von *b* in *c* u. s. f. so oft auf (40 §.) bis man auf AB so viele Theile hat, als AC haben soll. Wenn nun der letzte Theilungspunct B ist; so ziehe man BC, und durch alle Theilungspuncte *a*, *b*, *c* u. s. f. mit BC Parallelinien: so theilen diese die Linie AC in die verlangte Anzahl gleicher Theile. (172 §.)

174 §.

Wenn eine grade Linie *DE* zwo Seiten *AB* und *AC* eines Dreyecks *ABC* in *D* und *E* schneidet, und mit der dritten Seite *BC* parallel liegt: so sind die beyden abgeschnittenen Stücke *AD*, *AE*, den dazu gehörigen Seiten *AB*, *AC* proportional. 95. 96F.

Beweis. Dafern AD und AB ein gemeinschaftliches Maaß haben: so sey es A*a*, uud AB $= m \,.\, Aa$. Nun wird man A*a* von A nach B *m*mahl auftragen können, und es wird ein Theilungspunct in D fallen. Man ziehe durch alle Theilungspuncte mit BC Parallelinien: diese werden AC gleichfalls in *m* gleiche Theile eintheilen so, daß AC $= m \,.\, Af$ wird. Wenn nun AD *n* solcher Theile enthält, wovon *m* in AB enthalten sind, also AD $= n \,.\, Aa$ ist; so wird auch AE $= n \,.\, Af$ seyn. (172 §.) Diesemnach ist A*a* $= \frac{1}{m}$ AB, A*f* $= \frac{1}{m}$ AC; ferner AD $= \frac{n}{m}$ AB, und

AE $= \frac{n}{m}$AC: also AB : AD = AC : AE, (161 §.) oder AB : AC = AD : AE. (172 §. Rech.)

Wenn AD und AB kein gemeinschaftliches Maaß haben, und AB in so viele gleiche Theile als man will getheilt wird; so kann nie ein Theilungspunct in D fallen. Aber wenn durch alle Theilungspuncte die graden Linien *af*, *bg*, *ch*, u. s. f. mit BC parallel gezogen werden; so liegt DE zwischen zwoen solchen Parallelinien rallelen: und wenn D zwischen dem $n$ten und $(n+1)$ten Theilungspunct in AB fällt; so liegt allemahl auch E zwischen den $n$ten und $(n+1)$ten Theilungspunct in AC. Wenn also $\frac{n}{m}$ AB < AD und $\frac{n+1}{m}$AB > AD ist; so fällt AE allemahl zwischen eben solchen Gränzen, und es ist zugleich $\frac{n}{m}$ AC < AE, aber $\frac{n+1}{m}$AC > AE, was auch m und n für ganze Zahlen bedeuten. Demnach ist auch in diesem Fall AB : AD = AC : AE, (162 §.) oder AB : AC = AD : AE.

Es folgt hieraus, daß auch die Stücke DB, und EC zwischen den Parallelinien den beyden andern Stücken, AD, AE proportional seyn müssen. Denn aus AB : AD = AC : AE folgt (164 §.) (dividendo) AB – AD : AD = AC – AE : AE, oder DB : AD = EC : AE, oder auch DB : EC = AD : AE.

Diese beyden Stücke zwischen den Parallelinien sind also ebenfalls den zugehörigen Seiten proportional. Denn die beyden Proportionen AB : AC = AD : AE, und DB : EC = AD : AE geben die dritte AB : AC = DB : EC.

175 §.

95 F. **Wenn zwo Seiten *AB*, *AC* eines Dreyecks *ABC* in *D* und *E* so getheilt sind, daß die beyden Stücke der einen Seite *AB* den beyden Stücken der andern *AC* proportional sind; so ist die grade Linie *DE* durch die Theilungspuncte mit der dritten Seite *BC* parallel.**

Beweis. Es sey AD : BD = AE : EC, und DE nicht mit BC parallel: so muß durch D eine andre grade

grade Linie DF mit BC parallel gezogen werden können. Dann aber ist AD : DB = AF : FC, (174 §.) und es wird vorausgesetzt, es sey AD : DB = AE : EC, deswegen müste AF : FC = AE : EC seyn, welches nicht angehet. Wenn nämlich F über E fällt: so ist AF < AE, also müste FC < EC seyn, (167 §. Rech.) welches sich widerspricht. Ein ähnlicher Widerspruch käme heraus, wenn F unter E fiele. Demnach muß DE selbst mit BC parallel seyn.

176 §.

Zwo grade Linien *AB, CD,* werden von 97 F.
dreyen Parallelinien *AC, EF, BD,* allemahl so geschnitten, daß die Stücke zwischen den Parallelinien *AE, EB, CF, FD* einander proportional sind.

Beweis. Wenn auch AB und CD parallel sind: so ist der Satz für sich klar, weil sodann AE = CF, und EB = FD ist, (99 §.), also AE : EB = CF : FD. Wenn aber AB nicht mit CD parallel ist; so sey durch A mit CD die Parallele AG gezogen, welche BD in G, und EF in H schneidet: so wird AH = CF, und HG = FD. (99 §.) Da nun AE : EB = AH : HG, (174 §.) so ist auch AE : EB = CF : FD.

Es ist also auch AE + EB : EB = CF + FD : FD, oder AB : EB = CD : FD, und AE + EB : AE = CF + FD : CF, oder AB : AE = CD : CF.

Umgekehrt: Wenn ein paar grade Linien *AB, CD* zwischen zwoen Parallelen *AC,* und *BD* in *E* und *F* so getheilet sind, daß *AE* : *EB* = *CF* : *FD*; so ist *EF* mit *AC* und *BD* parallel. Denn wäre nicht EF; sondern EK mit BD und AC parallel, so wäre auch AE : EB = CK : KD, also CF : FD = CK : KD, welches nicht seyn kann.

98F. Schneiden demnach ein Paar grade Linien AB und CD einander in L, und es fällt L zwischen den Parallelen AC, und BD: so ist AL : LB = CL : LD. Denn man kann durch L die dritte Parallele *ef* ziehen, da denn der vorige Beweis gilt.

Auch umgekehrt: Wenn die entgegengesetzten Schenkel AL, LB, CL, LD, der Scheitel-Winkel ALC, BLD einander proportional sind; so ist AC # BD. Denn wäre nicht BD # AC: so sey B*d*, welche CD in *d* schneidet, mit AC parallel, und es wird AL : LB = CL : L*d* seyn. Da nun auch AL : LB = CL : LD seyn soll; so müste CL : L*d* = CL : LD, also L*d* = LD seyn, welches nicht seyn kann.

177 §.

99F. Wenn *AC*, *BD* die beyden parallelen Seiten eines Trapez'i *ABDC* sind, und man halbirt die beyden andern Seiten *AB* und *CD* bey *E* und *F*: so ist *EF* die halbe Summe der parallelen Seiten *AC* und *BD*.

Beweis. Man halbire AC in G, BD in H, und ziehe EG, HF, imgleichen BC, welche EF in K schneidet. Nun ist einmahl EF # AC # BD. (176 §.) Ueberdem AE : EB = AG : GC, und DH : BH = DF : FC; also EG # BC # HF. (175 §.). Deswegen ist EK = GC, KF = BH, und EK + KF = EF = GC + BH = $\frac{1}{2}$AC + $\frac{1}{2}$BD, oder EF = $\frac{1}{2}$(AC + BD.)

178 §.

100 Fig. Eine grade Linie *AD*, die den Winkel *BAC* im Dreyeck *ABC* halbirt, theilt die gegenüberstehende Seite so, daß die Theile *BD*, *DC* sich wie die anliegenden Seiten *AB*, *AC* verhalten.

Und umgekehrt: Wenn eine Seite *BC* des Dreyecks *ABC* in *D* so getheilt ist, daß die

Stü-

Stücke *BD*, *DC* sich wie die anliegenden Seiten *AB*, *AC* verhalten; so halbirt *AD* den gegenüberstehenden Winkel *BAC*.

Beweis. Man verlängere BA, eine von den Seiten, die den Winkel BAC einschliessen, bis E, und mache AE = AC, ziehe sodann CE. Dafern nun

1.) BAD = DAC ist; so ist BAC = 2BAD. Aber auch BAC = 2E, (62 §.) also 2BAD = 2E, und BAD = E; folglich AD ⋕ CE (81 §.) und BD : DC = BA : AE, (174 §.) oder BD : DC = BA : AC.

2.) Wenn umgekehrt BD : DC = BA : AC, also BD : DC = BA : AE ist; so ist AD ⋕ EC (175 §.) und BAD = E. (86 §.) Aber E = $\frac{1}{2}$BAC, (62. §.) also BAD = $\frac{1}{2}$BAC.

179 §.

Zu dreyen gegebenen graden Linien *a*, *b*, *c*, die vierte Proportionallinie zu finden. 101 Fig.

Aufl. Man verzeichne einen Winkel A von willkührlicher Grösse. Auf dem einen Schenkel nehme man AB = *a*, und AC = *b*, auf dem andern Schenkel aber AD = *c*, ziehe BD, und durch C mit BD die Parallele CE, welche AD in E schneidet: so ist AE die gesuchte vierte Proportionallinie. Denn es ist AB : AC = AD : AE. (174 §.) Also auch *a* : *b* = *c* : AE.

Wenn $a = 1$ ist; so hat man $1 : b = c :$ AE, also AE $= b \times c =$ AC $\times$ AD: und wenn $b = 1$ ist; so wird $a : 1 = c :$ AE, folglich AE $= \frac{c}{a} = \frac{AD}{AB}$. (175 §. Rech. n. 4. 5.) Hiedurch wird es also völlig ins Licht gesetzt, daß die Multiplication und Division einer Linie mit der andern geometrische Constructionen sind, wenn diese Wörter in der allgemeinen Bedeutung genommen werden, welche eben im 171 §. ist festgesetzt worden. Demnach ist auch AE = $\frac{b \times c}{a} = \frac{AC \times AD}{AB}$, weil die Regel des 175 §. der Rech. so allgemein erwiesen ist, daß sie diese Folge zuläßt.

180 §.

Wenn bey Vergleichung grader Linien nicht ihre Grösse allein, sondern zugleich ihre Lage in Betrachtung kommt; so unterscheidet man bey Bezeichnung derselben diejenigen, welche eine entgegen gesetzte Lage haben, durch die voran gesetzten Zeichen (+) und (—) von einander, wie dazu im 39 §. ist Anleitung gegeben worden. Ueberdem aber kommt alsdenn zu den bisher aus einander gesetzten Begriffen von der Proportionalität grader Linien noch der Umstand hinzu, **daß zwey Linien von übereinstimmiger Lage sich nur wie zwey andre Linien verhalten können, wenn letztere ebenfalls eine übereinstimmige Lage haben.** Eben so können auch zwo Linien von entgegengesetzter Lage sich nur wie zwo andre Linien verhalten, wenn letztere ebenfalls der Lage nach einander entgegen gesetzt sind. Ueberhaupt muß zwischen den beyden letzten Gliedern einer Proportion eben die Beziehung des Gegensatzes oder Nicht-Gegensatzes statt haben, welche zwischen den beyden ersten Gliedern statt hat. Wofern also für sich betrachtet A gegen B so groß ist, als C gegen D; so ist auch

$$+A : +B = +C : +D,$$
$$+A : +B = -C : -D,$$
$$+A : -B = +C : -D,$$
$$+A : -B = -C : +D:$$

keinesweges aber $+A : +B = +C : -D$, oder $-A : -B = +C : -D$. Wenn nemlich diese vier Buchstaben Linien bezeichnen, so könnte zwar die erste gegen die zweyte eben so groß seyn, als die dritte gegen die vierte: allein $+A$ hätte gegen $+B$, oder $-A$ gegen $-B$ nicht eben die Lage, die $+C$ gegen $-D$, oder $-C$ gegen $+D$ hat.

Wenn demnach ausser der Grösse auch die Lage zwoer Linien, oder überhaupt bey einem Paar Grössen, von welcher Art sie auch seyn mögen, diese besondre Beziehung der einen gegen die andre mit in Betrachtung kommt, vermöge der sie einander entgegen oder nicht entgegen gesetzt sind; so sind nur diejenigen Linien für gleiche Linien anzunehmen, die beydes einerley Grösse und einerley Lage haben: und überhaupt sind ein paar Grössen nur alsdenn gleich, wenn sie nicht allein als Grössen für einander gesetzt werden können, sondern auch überdem einander nicht entgegen gesetzt sind.

181 §.

Jedes Product entgegen gesetzter Factoren ist negativ, und jedes Product nicht entgegen gesetzter Grössen in einander ist positiv, vorausgesetzt, daß die Einheit allemahl positiv genommen werde.

Bey eben dieser Voraussetzung geben entgegen gesetzte Grössen in einander Dividirt einen negativen, nicht entgegen gesetzte Grössen aber einen positiven Quotienten.

Beweis des 1 S. Wenn a das Multiplicandum, b den Multiplicator bezeichnet, so ist vermöge des allgemeinen Begrifs der Multiplication

$$+1 : -b = +a : +a \times -b,$$
$$+1 : +b = -a : -a \times +b,$$
$$+1 : +b = +a : +a \times +b,$$
$$+1 : -b = -a : -a \times -b:$$

also wird erfordert, daß $+a \times -b = -ab$, und eben so $-a \times +b = -ab$ sey, aber $+a \times +b = +ab$, und $-a \times -b = +ab$. (180. §.)

Beweis. des 2 S. Wenn ferner a das Dividendum und b den Divisor bezeichnet; so hat man dem allgemeinen Begrif der Division gemäß

$$+b : +1 = -a : \frac{-a}{+b},$$
$$-b : +1 = +a : \frac{+a}{-b},$$
$$+b : +1 = +a : \frac{+a}{+b},$$
$$-b : +1 = -a : \frac{-a}{-b}:$$

demnach wird nicht allein $\frac{-a}{+b}$ sondern auch $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$, aber $\frac{+a}{+b}$ und $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$. (180 §.)

Wenn a und b grade Linien bezeichnen, so kann man die hieselbst aufgeführten Producte und Quotienten den Regeln des 179 §. gemäß suchen, da dann die geometrische Construction mit diesen allgemeinen
101 Fig. Schlüssen aufs vollkommenste übereinstimmet. Man setze $AB = +1$, $AC = +b$, $AD = +a$, so sind die auf den Schenkeln des Winkels CAE von A nach C und

und nach E zu abgeschnittenen Stücke positiv, die ihnen auf der andern Seite von A entgegen gesetzten aber negativ. Vermöge der im 180 §. gelehrten Construction fällt E auf der positiven Seite, wenn B, C, D, auf der positiven Seite genommen werden, und es ist $AE = + ab$. Man nehme $A\gamma = AC$, $A\delta = AD$, also $A\gamma = -b$, $A\delta = -a$, ziehe dem 179 §. gemäß $B\delta$ und durch γ eine grade Linie mit $B\delta$ parallel, so schneidet selbige AD eben so wie vorhin in E, und es ist noch $AB : A\gamma = A\delta : AE$, (176 §.) d. i. $1 : -b = -a : + AE$, also $+ AE = -a \times -b$.

Nimmt man dagegen $A\gamma = -b$, $AD = + a$, ziehet BD, und durch γ eine grade Linie $\gamma\varepsilon$ mit BD parallel, die AD in ε schneidet, so liegt $A\varepsilon$ auf der negativen Seite, und es ist $AB : A\gamma = AD : A\varepsilon$, (176 §.) oder $+1 : -b = +a : -AE$, also $-AE = +a \times -b$. Wird umgekehrt $AC = +b$, $A\delta = -a$ genommen, und durch C eine grade Linie mit $B\delta$ parallel gezogen; so schneidet selbige AD wiederum in ε, und es ist $AB : AC = A\delta : A\varepsilon$, oder $+1 : +b = -a : -AE$, also $-AE = -a \times +b$.

Wenn man $AC = +b$, $AB = +1$, und $AE = +a$ nimmt, alsdenn aber durch B eine grade Linie BD mit CE parallel ziehet, so ist $AD = \frac{+a}{+b}$ positiv: auch wenn $A\gamma = -b$, $A\varepsilon = -a$ genommen, und BD mit $\gamma\varepsilon$ parallel gezogen wird, so findet man noch $AD = \frac{-a}{-b}$ positiv. Wird aber $A\gamma = -b$, $AE = +a$ genommen und durch B eine grade Linie mit $E\gamma$ parallel gezogen, die AE in δ

schneidet; so ist $A\delta = \frac{+a}{-b}$ negativ. Auch umgekehrt, wenn $AC = +b$, und $A\varepsilon = -a$ genommen, hiernächst aber durch B eine grade Linie mit $C\varepsilon$ parallel gezogen wird, so findet man ebenfalls $A\delta = \frac{-a}{+b}$ negativ.

182 §.

Wenn zwey oder mehr Grössen vermittelst der Zeichen (+) und (−), vielleicht überdem auch vermittelst der Multiplications- und Divisionszeichen verbunden sind, wie $a + \frac{b \cdot c}{d}$, oder $\frac{f \cdot g}{h} - k$, so zeigt ein solcher Ausdruck eine Grösse an, die aus a, b, c, d, oder f, g, h, k, entweder durch Rechnung, wenn die Buchstaben Zahlen bezeichnen, oder durch geometrische Constructionen, wenn die Buchstaben Linien vorstellen, gefunden werden kann. Zwey dergleichen allgemeine Ausdrücke können eine und eben dieselbe Grösse bezeichnen, weil einerley Grösse bald auf eine Art aus diesen gegebenen Grössen, bald auf andre Art aus andern von den vorigen entweder völlig oder zum Theil verschiedenen Grössen durch Rechnung oder Construction zuwege gebracht werden kann: wenn alsdenn zwey dergleichen allgemeine Ausdrücke vermittelst des Zeichens der Gleichheit verbunden sind, so nennt man das eine **Gleichung** (aequatio). Eine Probe davon giebt jede Proportion $a : b = c : d$, woraus die Gleichung $a \times d = b \times c$ folgt.

Aus einer solchen Gleichung kann man unzählig viele andre herleiten, wenn man nemlich auf beyden Seiten gleiches addirt oder subtrahirt, oder auf beyden Seiten mit einerley Grösse multiplicirt oder dividirt:

dirt: und auf diesen an sich ganz leichten und einfachen Gründen beruhen die vornehmsten Kunstgriffe der neuern **Mathematischen Analysis.** (40 §.) Bey Auflösung einer Mathematischen Aufgabe vermittelst der Methode der Gleichungen bezeichnet man die gesuchte Grösse mit einem von den letzten Buchstaben des Alphabeths z, y, x, die gegebenen Grössen aber mit den ersten Buchstaben a, b, c, u. s. w. Ferner leitet man aus der Natur der Aufgabe eine Gleichung her, worin die unbekannte Grösse mit den gegebenen auf mancherley Art auch so verbunden seyn kann, daß diese unbekannte Grösse selbst auf eine höhere Potenz erhaben ist, oder unter einem Wurzelzeichen vorkommt. In allen Fällen sucht man daraus eine andre Gleichung herzuleiten, worin die unbekannte Grösse auf der einen Seite des Gleichheitszeichens, allein steht, auf der andern Seite aber ein allgemeiner Ausdruck, worin keine andre, als bekannte Grössen unter einander verbunden sind. Man nennt das **die Gleichung auflösen**: denn die so veränderte zuletzt herausgebrachte Gleichung zeigt nun unmittelbar an, wie und in welcher Ordnung die unbekannte Grösse aus den gegebenen gefunden werden könne.

Wenn die Gleichung keine andre als die erste Potenz der unbekannten Grösse enthält, die mit den gegebenen Grössen vermittelst der vier allgemeinen Rechnungsarten auf mancherley Art verbunden seyn kann; so findet man ihre Auflösung nach folgenden Regeln.

Wofern unter den Gliedern der Gleichung Brüche vorkommen, so multiplire man die ganze Gleichung mit allen Nennern nach der Ordnung, oder welches gleichviel ist, auf einmahl mit dem Product aller Nenner.

Diejenigen ganz bekannten Glieder der Gleichung, welche nun vor dem Gleichheitszeichen stehen, und mit unbekannten Gliedern durch die Addition oder Subtraction verbunden sind, setze man mit dem entgegen gesetzten Zeichen hinter dasselbe.

Die Glieder hinter dem Gleichheitszeichen, welche die unbekannte Grösse enthalten, setze man mit dem entgegen gesetzten Zeichen vor dasselbe.

Nun ist das, was vor dem Gleichheitszeichen steht, ein Product der unbekannten Grösse in die Summe aller ihrer Factoren oder Coefficienten: demnach dividire man mit dieser Summe der Coefficienten auf beyden Seiten, so ist die Gleichung aufgelöset.

Eine Probe hievon giebt folgende Rechnung:

Es sey $\frac{ax}{b} + c = \frac{fx}{g} + h$, so ist ferner

$$agx + bgc = bfx + bgh,$$

und $$agx - bfx = bgh - bgc,$$

oder $$(ag - bf)x = bg(h - c),$$

folglich $$x = \frac{bg(h-c)}{ag-bf}.$$

Der zweyte Theil dieses Lehrbuchs wird von diesem allen mehr Unterricht geben.

Der IX. Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

183 §.

Gradlinichte Figuren ABCDEF, *abcdef* heissen 102 Fig.
ähnliche Figuren, wenn bey einer gleichen Anzahl von Seiten die Winkel A, B, C, u. s. f. den Winkeln *a*, *b*, *c* u. s. f. nach der Ordnung gleich, und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschliessen, einander proportional sind. Diese Seiten nennt man die **gleichnahmigen Seiten** der Figuren, und **gleichnahmige Diagonallinien** sind in ähnlichen Figuren solche, die man zwischen den Spitzen gleichnahmiger Winkel ziehet. Um die Aehnlichkeit zwoer Figuren anzudeuten, wird das Zeichen ($\backsim$) gebraucht.

Figuren, die auf einander passen, sind nicht allein gleiche, sondern auch ähnliche Figuren.

Zwo Figuren sind einander selbst ähnlich, wenn sie einer dritten ähnlich sind. Denn jede zweene nach einander folgende Winkel der beyden ersten Figuren sind alsdenn dem gleichnahmigen Winkel in der dritten, und die Verhältnisse zwoer gleichnahmigen Seiten der beyden ersten dem Verhältniß der gleichnahmigen Seiten in der dritten gleich.

Alle reguläre Polygone, die gleichviele Seiten haben, sind ähnliche Polygone. Denn wenn *n* die Anzahl der Seiten ist; so ist jeder Winkel, sowohl des einen als des andern Polygons, $= 2R - \frac{4R}{n}$ (153 §.) Weil ferner die Seiten eines jeden Polygons alle unter sich gleich groß sind; so ergiebt sich von selbst, daß auch

auch die gleichnahmigen Seiten proportional seyn müssen.

184 §.

103 Fig. *In gleichwinklichten Dreyecken ABC, DEF sind die gleichnahmigen Seiten proportional, und die Dreyecke sind einander ähnlich.*

Auch umgekehrt: wenn die Seiten eines Dreyecks ABC den Seiten eines andern DEF in eben der Ordnung proportional sind; so sind die Winkel zwischen den proportionalen Seiten gleich groß, und die Dreyecke sind ähnliche Dreyecke.

Beweis des 1. S. Wenn B = E, A = D, folglich C = F ist; (57 §.) so nehme man BG = EF, wenn EF die Seite ist, die mit BC zwischen gleichen Winkeln liegt. Durch G ziehe man GH mit AC, und durch G die Linie GI mit AB parallel; so hat man BHG = A = D, und BGH = C = F. (86 §.) Also BH = DE, HG = DF (89 §.) = AI (99 §.) Ferner ist AB : BC = HB : BG (174 §.) = DE : EF, und überdem AC : BC = AI : BG (174 §.) = DF : EF. Demnach sind die Seiten proportional, welche die gleichen Winkel B = E und C = F einschliessen. Aber die beyden gefundenen Proportionen AB : BC = DE : EF, und AC : BC = DF : EF, oder BC : AC = EF : DF, geben die dritte AB : AC = DE : DF. (162 §.) Also sind auch die Seiten, welche den dritten Winkel einschliessen, proportional, und die Dreyecke ABC, DEF einander ähnlich. (183 §.)

Beweis des 2. S. Wenn BC und EF ein paar gleichnahmige Seiten sind, so nehme man BG = EF, und ziehe GH mit AC parallel: so wird GH die Seite AB irgendwo in H schneiden, und dann ist BGH

BGH = BCA, BHG = BAC; also werden die Dreyecke HBG, ABC einander ähnlich. (183 §.) Nun ist aber Vermöge der Voraussetzung BA : BC = ED : EF, und vermöge des 1. Satzes BA : BC = BH : BG. Also BH : BG = ED : EF, und weil BG = EF gemacht ist; so wird BH = ED. (168 §. Rech.) Es ist ferner vorausgesetzt, daß BC : AC = EF : DF sey, und man hat überdem vermöge des 1. Satzes BC : AC = BG : HG. Also BG : HG = EF : FD, folglich auch HG = DF. (168 §. R.) Aus den dreyen Sätzen aber BG = EF, BH = DE, HG = DF, folgt, es sey DEF = B, und DFE = BGH = C, also EDF = A, und das Dreyeck DEF ∽ ABC.

185 §.

Dreyecke *ABC*, *DEF*, die einen gleichen Winkel haben *B* = *E*, sind ähnliche Dreyecke, dafern die Seiten, welche den gleichen Winkel einschliessen *AB*, *BC*, *DE*, *EF* einander proportional sind. 104 Fig.

Auch sind solche Dreyecke, die einen gleichen Winkel haben, und zwo proportionale Seiten, die den gleichen Winkel nicht einschliessen, einander ähnlich, wenn die dem gleichen Winkel gegen über stehende Seite grösser ist, als die an demselben anliegende Seite.

Beweis des 1. S. Wofern BA : BC = ED : EF ist, also BA, ED, imgleichen BC, EF gleichnahmige Seiten sind; so schneide man auf BA das Stück BH = der gleichnahmigen Seite ED, und eben so auf BC das Stück BG = EF ab, und ziehe GH: so ist auch HG = DF, BHG = EDF, HGB = DFE. (60 §.) Ueberdem aber BA : BC = BH : BG, also

HG

HG ⧣ AC, (175 §.) und EDF = BHG = A, F = HGB = C, folglich das Dreyeck DFE ∽ ABC. (184 §.)

104 Fig. **Beweis des 2. S.** In den Dreyecken ABC, DEF sey B = E, und BA : AC = ED : DF, überdem AC > BA, also DF > ED. Man nehme BH = ED, und mache den Winkel BHG = A; so ist das Dreyeck BHG ∽ ABC (184 §.) und BA : AC = BH : HG. Aber vermöge der Voraussetzung ist BA : AC = ED : DF, also auch BH : HG = ED : DF. Weil nun BH = ED, so ist HG = DF, also der Winkel D = BHG (78 §.) = A: und weil auch E = B; so ist das Dreyeck ABC ∽ DEF.

186 §.

105 Fig. **Eine Linie *AE* von der Spitze des rechten Winkels *A* im rechtwinklichten Dreyeck *ABD* auf die Hypothenuse *BD* senkrecht gezogen theilt das Dreyeck in zwo andre, die unter sich und auch dem ganzen ähnlich sind.**

Beweis. Die Dreyecke ABD und ABE sind gleichwinklicht, weil BAD = R = AEB, und B beyden Dreyecken gemein ist: also ist ABD ∽ ABE. So sind auch ABD und ADE gleichwinklicht, weil BAD = R = AED, und D beyden Dreyecken gemein ist: also ist ABD ∽ ADE, (184 §.) mithin auch das Dreyeck ABE ∽ ADE. (183 §.)

Demnach ist die grade Linie AE, welche von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks senkrecht fällt, zwischen den beyden Stücken, worin sie die Hypothenuse theilt, die mittlere Proportionallinie.

Wenn

Wenn also im Kreise über einen Durchmesser BD eine senkrechte Linie EA stehet, die den Kreis in A trift; so ist diese zwischen den beyden zugehörigen Stücken des Durchmessers BE, ED, die mittlere Proportionallinie: auch ist jede von den beyden Sehnen AD oder AB zwischen dem Durchmesser BD und dem an der Sehne anliegenden Theil desselben DE oder BE die mittlere Proportionallinie. Denn die Sehnen AB, AD schliessen mit dem Durchmesser BD ein rechtwinklichtes Dreyeck ein, das bey A den rechten Winkel und BD zur Hypothenuse hat; (136 §.) also ist BE : AE = AE : ED, BD : AD = AD : DE, und BD : AB = AB : BE.

187 §.

Zwo Secanten des Kreises, die sich irgendwo in *A* schneiden, werden vom Kreise so getheilt, daß die beyden Stücke der einen Secante zwischen beyder Durchschnittspunct *A* und den Durchschnittspuncten mit dem Kreise den ähnlichen beyden Stücken der andern umgekehrt proportional sind. 106 Fig.

Und wenn eine Tangente von einer Secante des Kreises irgendwo in *A* geschnitten wird, so ist das Stück der Tangente, das zwischen *A* und dem Berührungspunct liegt, zwischen den beyden Stücken der Secante, die sich von *A* bis an den Kreis erstrecken, eine mittlere Proportionallinie. 107 Fig.

Beweis. Es mag der Durchschnittspunct A innerhalb oder ausserhalb des Kreises fallen: so werden zwo grade Linien BE, und DC allemahl ein Paar Dreyecke ABE, ADC geben, worin der Winkel EAB = DAC, (26 §.) und BCD = BED (136 §.) ist

ist. Also wird das Dreyeck ABE $\backsim$ ADC, (184 §.) und AB : AD = AE : AC.

107 Fig. Wenn aber AF den Kreis in D berühret, und AC ihn in B und C schneidet; so ziehe man BD, CD. Nun ist CBD = A + ADB, und CDF = A + ACD, (56 §.) aber CBD = CDF, (146 §.) also A + ADB = A + ACD, und ADB = ACD. Den Winkel A haben die beyden Dreyecke DAC, und ADB gemein. Also ist das Dreyeck DAC $\backsim$ ADB (184 §.) und AC : AD = AD : AB.

188 §.

105 Fig. **Zwischen zwoen gegebenen graden Linien *a*, *b*, eine mittlere Proportionallinie zu finden.**

I. Aufl. Man trage auf einer willkührlich gezogenen graden Linie BD zuerst BE = a auf, und addire dazu b (40 §.) so, daß ED = b und BD = $a + b$ wird. Die Summe BD halbire man in C, und verzeichne aus C mit dem Halbmesser CB = CD = $\frac{1}{2}(a + b$ einen Kreis. Durch E ziehe man eine grade Linie auf BD senkrecht, diese wird den Kreis in A schneiden, und EA wird die gesuchte mittlere Proportionallinie seyn. (186 §.)

107 Fig. II. Aufl. Man kann auch so fortfahren. Auf einer willkührlich gezogenen graden Linie AC nehme man AC = a, AB = b. Ueber BC = AC – AB = $a - b$ setze man ein gleichschenklichtes Dreyeck BGC, und mit dem Halbmesser GB = GC verzeichne man aus dem Mittelpunct G einen Kreis: so wird A ausserhalb dieses Kreises fallen. (77 §.) Durch A ziehe man eine Tangente des Kreises AD: (139 §.) so wird AD die gesuchte mittlere Proportionallinie seyn. (187 §) Wenn $a = 1$ ist, so

findet

findet man vermittelst dieser Construction die Quadratwurzel aus *b*. (171 §.)

189 §.

Aehnlich liegende Dreyecke in ähnlichen Figuren, solche nemlich, die zwischen gleichnahmigen Seiten und Diagonallinien liegen, sind ähnliche Dreyecke. 102 Fig.

Beweis. 1) Wenn zwo Seiten solcher Dreyecke zugleich gleichnahmigte Seiten der ähnlichen Figuren sind, wie AB, *ab*, BC, *bc*, in den Dreyecken ABC, *abc*; so folgt die Aehnlichkeit der beyden Dreyecke aus dem 184 §. Denn es ist nun $B = b$, und $AB : ab = BC : bc$.

2) Rechnet man diese Dreyecke ABC, *abc*, von beyden Figuren ab: so bleiben ACDEF und *acdef* auch noch ähnliche Figuren. Denn es ist $BCD = bcd$, und $BCA = bca$, also $BCD - BCA = bcd - bca$, oder $ACD = acd$. Ueberdem ist auch $AC : ac = BC : bc = CD : cd$, also sind ACD und *acd* ähnliche Dreyecke; ferner sind ADEF, *adef* wieder ähnliche Figuren, auch ist das Dreyeck $ADE \backsim ade$. So gilt der Schluß von jedem Dreyeck auf das nächstfolgende, und deswegen sind alle ähnlichliegende Dreyecke einander ähnlich.

In ähnlichen Figuren verhält sich also jedes Paar ähnlich liegender Diagonallinien, wie sich zwo gleichnahmige Seiten der Figuren verhalten.

190 §.

Die ganzen Peripherien ähnlicher Figuren verhalten sich wie jedes Paar gleichnahmiger Seiten, oder gleichnahmiger Diagonallinien. 102 108 Fig.

Beweis. Man hat folgende Proportionen.

$$AB : ab = AB : ab = AC : ac$$
$$BC : bc = AB : ab = AC : ac$$
$$CD : cd = AB : ab = AC : ac$$
$$DE : de = AB : ab = AC : ac$$

Also $AB + BC + CD + DE : ab + bc + cd + de = AB : ab = AC : ac$. (167 §. Rech.) Hieraus erhellet soviel, daß ein Paar Stücke des Umfangs ähnlicher Figuren wie ABCDE, *abcde* sich wie AB : *ab*, oder wie AC : *ac*, verhalten, wenn diese Stücke aus einer gleichen Anzahl nach einander folgender gleichnahmiger Seiten zusammengesetzt sind. Aber man sieht leicht, daß jedesmahl noch die beyden folgenden Seiten EF, *ef* zu den vorigen Summen addirt werden können, ohne daß sich das Verhältniß der Summen ändert. Dieserwegen gilt der Satz für die ganzen Peripherien ähnlicher Figuren.

191 §.

110 Fig. **Die Peripherien ähnlicher regulärer Polygone verhalten sich wie die Halbmesser der dazu gehörigen in oder um diese Polygone beschriebenen Kreise.**

Beweis. Wenn EF, *ef*, zwo Seiten ähnlicher regulärer Polygone, C, *c*, ihre Mittelpuncte, CB, *cb*, die Entfernungen der Seiten von diesen Mittelpuncten, CE, *ce*, aber Halbmesser durch die Endpuncte dieser Seitenlinien sind; so sind CB, *cb*, die Halbmesser der in diesen Polygonen, CE, *ce*, die Halbmesser der um diese Polygone beschriebenen Kreise. Ferner sind die Dreyecke BCE, *bce*, einander ähnlich, (184 §.) also $BE : be = CB : cb = CE : ce$. Diesen Verhältnissen ist das Verhältniß

niß der Seiten EF : ef, also auch das Verhältniß der ganzen Peripherien gleich. (190 §.)

192 §.

Man kann in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone von sovielen Seitenlinien verzeichnen, daß der Exponent des Verhältnisses der Peripherie des äussern gegen die Peripherie des innern Polygons kleiner wird, als jede Zahl, welche die Einheit übertrift.

Beweis. Um den Mittelpunct C sey ein Kreis beschrieben, wozu der Halbmesser CF gehört, und es sey die Zahl $\mu > 1$. Man verlängere CF, nehme $CG = \mu . CF$, und ziehe durch G eine Tangente des Kreises. Wenn nun H der Berührungspunct ist, so nehme man $HI = HG$, und ziehe CI, welche die Kreislinie in K schneidet; so ist FK ein Bogen von bestimmter Grösse. Ferner sey P die Peripherie des Kreises, und die Zahl n so groß, daß $\frac{1}{n} P < FK$ wird; man nehme $HA = HB = \frac{1}{2} . \frac{1}{n} P$, also den Bog. $AHB = \frac{1}{n} P$, ziehe AB, und verlängere die Halbmesser CA, CB, bis an die Tangente in D und E: so ist AB die Seitenlinie eines innern Polygons, das n Seiten hat, und DE ist die Seitenlinie eines ähnlichen äussern Polygons. Die Peripherie des innern Polygons sey $= \pi$, des äussern $= \Pi$; so ist $\frac{\Pi}{\pi} = \frac{CD}{CA}$. (191 §.) Ueberdem ist $CD < CG$, (76 §.) und $CA = CF$, also $\frac{CD}{CA} < \frac{CG}{CF}$, mithin $\frac{\Pi}{\pi} < \mu$. 109 Fig.

Wenn also eine Linie L kleiner ist, als die Peripherie des Kreises, so kann man im Kreise ein reguläres Polygon verzeichnen, dessen Peripherie grösser als L ist. Denn es sey $\frac{P}{L}=\mu$, und man verzeichne wie vorhin die regulären ähnlichen Polygone in und um den Kreis, so daß $\frac{\Pi}{\pi} < \mu$ ist, oder $\frac{\Pi}{\pi} < \frac{P}{L}$. Das giebt $1 : \frac{\Pi}{\pi} > 1 : \frac{P}{L}$, oder $\frac{\pi}{\Pi} > \frac{L}{P}$. Ueberdem ist $P < \Pi$ also $\frac{\pi}{P} > \frac{\pi}{\Pi}$, mithin auch $\frac{\pi}{P} > \frac{L}{P}$, und das giebt $\pi > L$.

Wenn dagegen eine Linie λ grösser als die Peripherie des Kreises ist; so kann man um den Kreis ein reguläres Polygon verzeichnen, dessen Peripherie kleiner als λ ist. Es sey nemlich $\frac{\lambda}{P}=\mu$, und man verzeichne wie vorhin die ähnlichen Polygone in nnd um den Kreis; so daß $\frac{\Pi}{\pi} < \mu$ wird. Alsdenn hat man $\frac{\Pi}{\pi} < \frac{\lambda}{P}$, und $P > \pi$, also $\frac{\Pi}{P} < \frac{\Pi}{\pi}$, mithin auch $\frac{\Pi}{P} < \frac{\lambda}{P}$, und das giebt $\Pi < \lambda$.

193 §.

102 Zwo gradlinichte Figuren *ABCDEF*,
108 *abcdef*, die aus einer gleichen Anzahl ähnlicher
Fig. Dreyecke in einerley Ordnung so zusammen-

gesetz

gesetzt sind, daß jedes Dreyeck wie *ABC*, *abc*, mit dem folgenden *ACD*, *acd* eine Seite *AC*, *ac* gemein hat, sind ähnliche Figuren.

Beweis. Alle Seiten der einen Figur sind, den gleichnahmigen Seiten der andern proportional, und die gleichnahmigen Winkel in den beyden Figuren sind gleich groß. Denn es sind entweder die gleichen Winkel der Dreyecke selbst, wie ABC, *abc*, oder die Summe zweener oder mehrerer solcher gleichen Winkel, wie $BCD = BCA + ACD = bca + acd = bcd$; oder auch in der 108 Fig. $BCD = BCA + ACK + KCD = bca + ack + kcd = bcd$. Also sind die Figuren einander ähnlich. (181 §.)

194 §.

Wenn die Länge zwoer Seitenlinien AB, BC, einer Figur in Ruthen, Füssen und falls es nöthig ist in noch kleinern Theilen eines bekannten Maaßstabes gegeben ist; so ist dadurch das Verhältniß dieser Linien in Zahlen gegeben. Es sey eine Ruthe dieses Maaßstabes = P, und AB fasse *m* Ruthen, BC *n* Ruthen, da dann *m* und *n* ganze Zahlen mit angehängten Brüchen seyn werden, wenn AB und BC ausser den Ruthen noch Füsse, Zolle, u. s. w. enthalten: so ist $AB = m . P . BC = n . P$, also $AB : BC = m : n$. Wenn ferner *ab*, *bc*, zwo gleichnahmige Seitenlinien einer der vorigen ähnlichen Figur sind, und *ab* nach einem kleinern Maaßstab eben so viele Ruthen und Theile von Ruthen als AB nach einem grössern Maaßstab fasset; so ist auch *bc* nach dem kleinern Maaßstab soviele Ruthen und Theile von Ruthen lang, als BC nach dem grossen Maaßstab. Denn es ist $AB : BC = ab : bc$, oder $m : n = ab : bc$.

102 Fig.

Die Länge einer Ruthe nach dem kleinern Maaßstab sey $= p$, und $ab = m.p$; so wird $bc = n.p$.

Umgekehrt, wenn man weis, wie lang zwo Seiten AB, BC, einer Figur nach einem bekannten Maaßstab sind; und wenn man von zwoen Seiten ab, bc, einer andern Figur die erste in einem kleinern mit dem vorigen gleichnahmigen Maaß so lang, als die erste von jenen, und die zweyte so lang, als die zweyte von jenen macht; so ist $AB : BC = ab : bc$. Es sey nemlich $AB = m\,P$, $BC = n\,P$, $ab = m.p$, $bc = n.p$, so ist $AB : BC = m : n$ und $ab : bc = m : n$ (171 §. Rech.) also $AB : BC = ab : bc$.

Verbindet man hiemit die bisher vorgetragenen Lehren von den Eigenschaften der ähnlichen gradlinichten Figuren; so erhellet, daß man auf mancherley Art eine Figur zeichnen könne, die einer andern ähnlich ist. Auch wird daraus der vorzügliche Nutzen des verjüngten Maaßstabes bey Zeichnungen im kleinen begreiflich. Die bisherige Lehren sind übrigens der Grund aller Chartenzeichnungen, weil die ganze Figur von einem Stück Feldes, und jeder andern ebenen Fläche vermittelst des verjüngten Maaßstabes im kleinen so gezeichnet werden kann, daß sie der grossen ähnlich ist. Wenn alle Seiten und Winkel der Figur im grossen gemessen sind, so kann man im kleinen eine Figur zeichnen, wovon alle Seitenlinien nach der Ordnung im verjüngten Maaß so groß sind, als jene im grossen Maaß, und jedes Paar dieser Seitenlinien kann man vermittelst des Transporteurs unter eben dem Winkel zusammen setzen, unter welchen die gleichnahmigen Seiten der grossen Figur einander schneiden.

Wenn

Wenn man die Figur im grossen durch Diagonallinien in Dreyecke getheilt hat, so kann man die Figur im kleinen aus eben sovielen Dreyecken, die jenen ähnlich sind, in eben der Ordnung zusammen setzen, (193 §.) wobey der Vortheil eintrift, daß drey Stücke vom Umfang eines Dreyecks, unter welchen wenigstens eine Seitenlinie ist, die übrigen bestimmen. Sind ausser den Seitenlinien alle Diagonallinien der Figur im grossen gemessen worden, so bedarf es des Messens der Winkel nicht: man kann alle Dreyecke aus den gemessenen dreyen Seitenlinien nach dem verjüngten Maaßstab zeichnen. (181 §.)

195 §.

Die Halbmesser R, r, oder Durchmesser D, d zweener um die Mittelpuncte C, c, beschriebenen Kreise verhalten sich gegeneinander, wie ihre Peripherie P, p. 110 Fig.

Beweis. Die vierte Proportionallinie zu R, r, und P sey l, so daß $R : r = P : l$ ist, oder $l = \frac{r \cdot P}{R}$, so muß $l = p$ seyn: denn l ist grösser als der Umfang eines jeden innern, und kleiner als der Umfang eines jeden äussern zu dem um den Mittelpunct c beschriebenen Kreise gehörigen regulären Polygons. Es sey nemlich im Kreise um c ein reguläres Polygon von soviel Seiten als man will verzeichnet, und in dem Kreise um C ein dem vorigen ähnliches Polygon; des ersten Umfang sey $= \pi$, des letztern $= \Pi$; so ist $R : r = \Pi : \pi$. (191 §.) Ferner ist vermöge der Voraussetzung $R : r = P : l$, also $\Pi : \pi = P : l$; und weil $P > \Pi$ ist, (154 §.) so ist allemahl $l > \pi$, (168 §. Rech.) wieviel Seiten man auch den Polygonen geben will.

Man verzeichne weiter um den Kreis, dessen Mittelpunct c ist, ein reguläres Polygon von soviel Seiten als man will, und um den Kreis, dessen Mittelpunct C ist, ein dem vorigen ähnliches Polygon; des ersten Umfang sey $= q$, des letztern Umfang $= Q$, so ist $R : r = Q : q$, (192 §.) und vermöge der Voraussetzung ist $R : r = P : l$; also $Q : q = P : l$. Aber allemahl ist $P < Q$, (159 §.) also $l < q$, man mag den Polygonen soviel Seiten als man will geben. Eine Linie l, die grösser als die Peripherie eines jeden innern, und kleiner als die Peripherie eines jeden äussern Polygons ist, muß der Peripherie des Kreises p gleich seyn. Denn wenn sie grösser wäre, so gäbe es noch ein Polygon um den Kreis dessen Peripherie kleiner als l wäre; und wenn $l < p$ wäre, so gäbe es noch ein Polygon im Kreise, dessen Peripherie grösser als l wäre: (192 §.) also ist $l = p$, und man hat $R : r = P : p$, mithin auch $D : d = P : p$, weil $D = 2R$, und $d = 2r$ ist.

196 §.

122 123 Fig. Wenn zwischen den Schenkeln ungleicher Winkel *ACB*, *DEF*, aus den Spitzen *C* und *E* mit ungleichen Halbmessern *CA*, *ED*, die Bogen *AB*, *DF*, beschrieben sind; so ist das Verhältniß der Winkel *ACB*, *DEF*, aus den beyden Verhältnissen der Bogen *AB*, *DF*, und der zugehörigen Halbmesser verkehrt genommen *ED*, *CA*, zusammen gesetzt.

Beweis. Die zum Bogen AB gehörige Peripherie sey $= p$, und die zum Bogen DF gehörige $= P$,

so

so ist $ACB : 4R = AB : p$, und $4R : DEF = P : DF$; (123 §.) also ist $ACB : DEF = AB \times P : DF \times p$ (219. 220 §. Rech.) oder $ACB : DEF = \left\{ \begin{matrix} AB : DF \\ P : p \end{matrix} \right\}$. Ferner ist $P : p = ED : CA$ (195 §.) also $ACB : DEF = \left\{ \begin{matrix} AB : DF \\ ED : CA \end{matrix} \right\}$.

197 §.

Eine grade Linie die an der erhabenen Seite ei- 114
ner krummen Linie mit der letztern zwar zusammen Fig.
stößt, übrigens aber wenigstens in der Nähe der Stelle, wo beyde zusammenlaufen, ganz an der erhabenen Seite der krummen Linie liegen bleibt, heist eine **Tangente** der krummen Linie.

Eine solche Berührung der graden und krummen Linie kann nur in einem Punct geschehen, weil das Stück einer graden Linie, welches zwischen zweenen Puncten liegt, die eine grade und krumme Linie gemein haben, ganz an der hohlen Seite liegt, wenn gleich übrigens die grade Linie zu beyden Seiten dieser Puncte an der erhabenen Seite der krummen Linie fortläuft.

198 §.

Zwo **krumme Linien**, ABC, DEF, sind ein- 114
ander **ähnlich**, wenn die Tangenten BK, EL, durch 115
die Endpuncte B, E, zweener den ganzen krummen Fig.
Linien proportionaler Theile gegen die Tangenten AG, DH, durch die Anfangspuncte A, D, allemahl einerley Lage haben, wie groß oder klein auch AB, und DE genommen worden, daferne diese Bogen nur allemahl proportionale Theile der ganzen Linien ABC, DEF bleiben.

116 Fig. Dies ist der Begriff der Aehnlichkeit des 181 §, nur so verändert, wie es der Natur krummer Linien gemäß ist. Eine gebrochne Linie ABCDG, ist einer andern *abcdg* ähnlich, wenn ihre graden Theile AB, *ab*, BC, *bc*, CD, *cd*, u. s. f. nach der Ordnung in einerley Verhältniß stehen, welches also mit dem Verhältnisse der ganzen Linien einerley ist, und wenn überdem die Winkel ABC, *abc*; BCD, *bcd* u. s. f. zwischen den proportionalen Theilen gleich groß sind. Das heist mit andern Worten: wenn die äussersten gradlinichten Theile CD, *cd*, zweyer den ganzen Linien AG, *ag*, proportionaler Stücke AD, *ad*, gegen die anfänglichen gradlinichten Theile AB, *ab*, allemahl einerley Lage haben; so sind die gebrochenen Linien einander ähnlich. Die gradlinichten Theile einer gebrochenen Linie behalten von einem Winkelpunct bis zum andern einerley Lage: dagegen ist die Lage einer krummen Linie in jeder folgenden Stelle von ihrer Lage in der nächstvorhergehenden verschieden, und die Lage einer krummen Linie an einer gegebenen Stelle kommt mit der Lage ihrer Tangente an dieser Stelle überein. Wenn demnach die Tangenten durch die Endpuncte solcher Theile zwoer krummer Linien, die den ganzen Linien proportional sind, allemahl mit den ersten Tangenten in ihren Anfangspuncten gleiche Winkel machen; so sind es ähnliche Linien.

199 §.

117 Fig. Alle Kreise sind einander ähnlich, auch sind alle Kreisbogen, die ihren Peripherien proportional sind, ebenfalls ähnliche Bogen.

Auch umgekehrt: ähnliche Kreisbogen sind ihren Peripherien proportional.

Beweis.

Beweis. Wenn CA, ED ein Paar Halbmesser zweener Kreise sind; so ziehe man durch A und D die Tangenten AM, DN. Man nehme ein Paar Bogen AB, DF, die sich wie die ganzen Kreislinien verhalten, und ziehe durch B und F die Tangenten BG, FH: so ist der Winkel ACB = DEF. (124 §.) Ferner ist BGM = 2R − AGB (22 §.) und ACB = 2R − AGB; (96 §.) also BGM = ACB, und aus eben dem Grunde FHN = DEF. Demnach ist auch BGM = FHN, und die Kreise sind einander ähnlich. (198 §.)

Sind nun AK und DL ein paar Kreisbogen, die ihren Peripherien p und P proportional sind, und man nimmt AB : DF = AK : DL d. i. AB : DF = p : P; so erhellet, wie vorhin, daß BGM allemahl = FHN sey, deswegen sind AK, DL ähnliche Bogen.

Umgekehrt: Wenn AB, DF ähnliche Kreisbogen sind; so ist der Winkel BGM = FHN, also auch ACB = DEF, und AB : DF = p : P. (124 §.)

Also verhalten sich ähnliche Kreisbogen wie die Durchmesser, oder Halbmesser, ihrer Peripherien: (195 §.) auch verhalten sich ähnliche Kreisbogen wie ihre Sehnen, die zu ähnlichen Bogen gehörige Winkel am Mittelpunct sind gleich groß, (124 §.) und die Sehnen ähnlicher Bogen verhalten sich wie die damit zusammen gehörigen halben oder ganzen Durchmesser.

200 §.

Ausschnitte *ACBQ*, *DEFR*, und Abschnitte *AQB*, *DRF*, die zu ähnlichen Bogen gehören, sind ähnliche Figuren. 117 Fig.

Beweis. In den Ausschnitten sind die Winkel bey A und D, B und F, C und E gleich groß, und AC:

AC : DE = BC : FE = Bog : AQB : Bog : DRF. (199 §.)

Der Abschnitte AQB, DRF, Winkel bey A und D, B und F sind gleich: denn es ist CAB = EDF, und CBA = EFD, also BAG = FDH, GBA = HFD. Ueberdem der Bogen AQB : Bog. DRF = AB : DF. (199 §.)

201 §.

117 Fig. Aehnliche Abschnitte fassen gleiche Winkel: (136 §.) und wenn Abschnitte gleiche Winkel fassen; so sind es ähnliche Abschnitte.

Beweis. Die Winkel GAB, HDF, und GBA, HFD ähnlicher Abschnitte müssen gleich groß seyn (183 §.): also sind auch die Winkel gleich groß welche die Abschnitte fassen, denn sie sind jener Ergänzungen zu 2R. (146 §.) Umgekehrt also: wenn die Abschnitte gleiche Winkel fassen; so ist GAB = HDF = GBA = HFD, also auch G = H, (57 §.) und ACB = DEF. (96 §.) Folglich ABQ ∽ DRF. (200 §.)

Der X. Abschnitt.

Von der Vergleichung des Flächen-Inhalts der Figuren.

302 §.

118 Fig. Dreyecke *ABC, DEF*, die gleich hoch sind, verhalten sich wie ihre Grundlinien *BC, EF*.

Beweis. Wenn BC die grössere Grundlinie ist; so nehme man BG = EF, und ziehe AG: so ist das

das Dreyeck ABG = DEF. (105 §.) Ist nun BH das gemeinschaftliche Maaß von BG und BC so, daß BG = nBH, BC = mBH, also BH = $\frac{1}{m}$BC, und BG = $\frac{n}{m}$ BC ist; so trage man BH auf BG $n$mahl auf (40 §.) und ziehe die graden Linien AH u. s. f. nach allen Theilungspuncten in BC. Hiedurch erhält man Dreyecke, die alle = ABH sind; auf ABG gehen so viele, als BG, und auf ABC so viele, als BC Theile hat, so, daß ABH = $\frac{1}{m}$ABC, und ABG = $\frac{n}{m}$ ABC wird. Weil nun ABC : $\frac{n}{m}$ABC = BC : $\frac{n}{m}$BC, und $\frac{n}{m}$ ABC = ABG = DEF, $\frac{n}{m}$BC = BG = EF ist; so hat man ABC : DEF = BC : EF.

Dafern BC und BG oder EF kein gemeinschaftliches Maaß haben; so mag man BC in so viele gleiche Theile, als man will, eintheilen, es wird allemahl G zwischen zween Theilungspuncten fallen. Wenn aber BC = mBH ist, es mag m so groß seyn als man will, und wenn G zwischen dem $n$ten und ($n + 1$)ten Theilungspunct fällt; so wird auch AG zwischen der $n$ten und ($n + 1$)ten Theilungslinie fallen. Man hat also allemahl zugleich $\frac{n}{m}$ABC < ABG und $\frac{n+1}{m}$ABC > ABG, wenn $\frac{n}{m}$ BC < BG, und $\frac{n+1}{m}$BC > BG ist. Demnach ist auch in diesem Fall ABC : ABG = BC : BG, oder ABC : DEF = BC : EF. (161 §.)

Gleich hohe Parallelogramme verhalten sich also ebenfalls wie ihre Grundlinien: denn ein Paar Drey-

ecke

ecke auf eben den Grundlinien von eben der Höhe sind ihre Hälften. (105 §.)

203 §.

119 Fig. Dreyecke *ABC, DEF*, die gleiche Grundlinien haben, verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis. Des Dreyecks ABC Höhe sey CG, und FH des Dreyecks DEF Höhe. Man ziehe BG, EH, so sind BGC, HEF rechtwinklichte Dreyecke; und wenn CG, FH für ihre Grundlinie genommen werden, so sind BC, EF, ihre Höhen. (103 §.) Da nun BC = EF angenommen wird; so ist GBC : HEF = GC : HF. (202 §.) Aber GBC = ABC, und HEF = DEF, (105 §.) also auch ABC : DEF = GC : HF.

Demnach verhalten sich auch Parallelogramme auf gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen.

204 §.

120 Fig. Das Verhältniß zweyer Dreyecke, oder Parallelogramme gegen einander ist aus dem Verhältniß ihrer Grundlinien und Höhen zusammengesetzt.

Beweis. Wenn GB des Dreyecks ABC Höhe und DH des Dreyecks DEF Höhe ist; so nehme man BK = DH, und ziehe KC. Nun ist ABC : KBC = GB : KB, (203 §.) und KBC : DEF = BC : EF; also ABC : DEF = $\begin{pmatrix} GB : KB \\ BC : EF \end{pmatrix}$ (219 §. Rech.)

Wenn man auf jeder Grundlinie BC, EF, zweyer Parallelogramme LC, EM, denen die Höhen BG, DH zugehören, in gleicher Höhe mit dem Parallelogramm LC das Dreyeck ABC, und in gleicher Höhe mit dem andern EM das Dreyeck DEF

setzt;

setzt; so ist ABC = $\frac{1}{2}$LC, und DEF = $\frac{1}{2}$EM. (160 §.) Also LC : EM = ABC : DEF (170 §. R.) $\left(\begin{matrix} GB : KB \\ BC : EF \end{matrix}\right)$.

205 §.

Ist L die Seite eines Quadrats Q: so ist sowohl die Grundlinie, als auch die Höhe desselben = L. (103 §.) Wenn also eines andern Quadrats q Seite = l ist; so hat man Q : q = $\left(\begin{matrix} L : l \\ L : l \end{matrix}\right)$. Also ist das Verhältniß zweyer Quadrate das doppelte Verhältniß ihrer Seiten.

Wenn die Höhen zweyer Dreyecke oder Parallelogramme sich wie die Grundlinien verhalten; so ist das Verhältniß derselben ebenfalls das verdoppelte Verhältniß der Grundlinien oder Höhen, und ein Paar Quadrate, welche dieselben Grundlinien oder Höhen hätten, würden sich eben so verhalten. Demnach verhalten sich Dreyecke, oder Parallelogramme, wie die Quadrate ihrer Grundlinien oder Höhen, wenn das Verhältniß ihrer Grundlinien mit dem Verhältniß ihrer Höhen einerley ist.

206 §.

Weil ABC : DEF = LC : EM = $\left(\begin{matrix} BG : DH \\ BC : EF \end{matrix}\right)$ = BG × BC : DH × EF; (220 §. Rech.) so verhalten sich Dreyecke und Parallelogramme auch wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen, und Rechtecke verhalten sich wie die Producte ihrer Seitenlinien.

Dafern nun BC : EF = DH : BG ist; so hat man BG × BC = DH × EF. Wenn also die Grundlinien sich umgekehrt wie die Höhen oder die Seitenlinien eines

eines Rechtecks sich umgekehrt wie die Seitenlinien eines andern verhalten; so sind die Dreyecke oder Parallelogramme oder die Rechtecke gleich.

Und wenn die Seite eines Quadrats zwischen den beyden Seiten eines Rechtecks die mittlere Proportionallinie ist; so ist das Quadrat dem Rechteck gleich.

Umgekehrt: Wenn die Dreyecke, oder Parallelogramme gleich sind; so verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen: und wenn Rechtecke gleich groß sind, so sind die Seitenlinien des einen den Seitenlinien des andern umgekehrt proportional. Denn nun ist BG × BC = DH × EF, also BC : EF = DH : BG. (176 §. Rech.)

Wenn ein Quadrat einem Rechteck gleich ist; so ist die Seite desselben zwischen den Seiten des Rechtecks die mittlere Proportionallinie.

Auf diese Vergleichung der Rechtecke unter sich und mit den Quadraten, gründet sich eine Art die Rechtecke zu bezeichnen, wenn ihre Seiten gegeben sind, ohne daß man nöthig hat, das Rechteck in der Figur würklich zu zeichnen. Sind a und b die zwo Seiten desselben, so schreibt man es so: $a \times b$. Denn wenn c und d zwo Seiten eines andern Rechtecks sind, das man eben so bezeichnet: $c \times d$; so ist es gleichviel, ob man das Verhältniß der Rechtecke selbst, oder das Verhältniß der Producte $a \times b$, $c \times d$ braucht, weil beyde Verhältnisse gleich sind.

207 §.

121 Fig. **Wenn zwey Parallelogramme *BD*, *FH*, oder Dreyecke *ABC*, *EFG*, einen gleichen Winkel haben *B*=*F*, und wenn die Seiten, welche diesen gleichen Winkel einschliessen, einander umge-**

umgekehrt proportional sind; so sind die Dreyecke, oder Parallelogramme, gleich groß.

Umgekehrt: wenn gleich grosse Parallelogramme oder Dreyecke einen gleichen Winkel haben, so sind die Seiten an dem gleichen Winkel einander umgekehrt proportional.

Beweis. Wenn AK, EL die Höhen dieser Figuren sind; so ist das Dreyeck ABK ∽ EFL, und EF : AB = EL : AK. Ist also BC : FG = EF : AB; so ist auch BC : FG = EL : AK; mithin ABC = EFG, und BD = FH. (206 §.) Wenn aber diese letzte Gleichheit vorausgesetzt wird; so folgen jene Proportionen rückwärts.

208 §.

Das Rechteck beyder Diagonallinien eines im Kreise beschriebenen Vierecks *AC* × *BD* **ist so groß, als die Summe der Rechtecke jeder zwoer einander gegenüber stehender Seitenlinien** *AD* × *BC* + *AB* × *CD*. 81 F.

Beweis. Man mache den Winkel ABE = CBD, so ist auch ABD = EBC. Ferner ist BCA = BDA, (136 §.) also das Dreyeck BDA ∽ BCE, und man hat BC : CE = BD : DA, folglich BC × DA = CE × BD. Weiter ist das Dreyeck BEA ∽ BCD, also AB : AE = DB : DC, und AB × DC = AE × DB. Addirt man nun gleiches zu gleichen, so findet man BC × DA + AB × DC = (CE + AE) BD, oder AC × BD = AD × BC + AB × CD.

209 §.

Wenn in ähnlichen Dreyecken *ABC*, *DEF* **zwo gleichnahmige Seiten** *BC*, *EF* **für die Grundlinien genommen werden; so verhal-** 103 Fig.

ten sich die Höhen *AM*, *DN*, wie ihre Grundlinien.

Beweis. Es ist ABM ∽ DEN; (184 §.) also AM : DN = AB : DE, und AB : DE = BC : EF. Folglich auch AM : DN = BC : EF.

Also verhalten sich ähnliche Dreyecke wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten. (205 §.)

210 §.

Alle ähnliche gradlinichte Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten oder Diagonallinien.

102 Beweis. Wenn man die Figuren nach dem
108 189 §. in ähnlichliegende Dreyecke eintheilt; so ist
Fig. das Verhältniß von jedem Paar solcher ähnlichliegender Dreyecke = AB*q* : *abq* = AC*q* : *acq* u. s. f. Also ist das Verhältniß der Summe aller Dreyecke in der einen Figur zur Summe aller Dreyecke in der andern, oder das Verhältniß der einen ganzen Figur gegen die andre, eben so groß. (168 §. Rech.)

211 §.

Die Flächen ähnlicher regulärer Polygone verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser oder Durchmesser der dazu gehörigen in oder um diese Polygone beschriebenen Kreise.

110 Beweis. Wenn die Figur wie im 192 §. ge-
Fig. zeichnet ist; also CB, *cb*, die Halbmesser der innern Kreise CE, *ce*, aber die Halbmesser der äussern Kreise sind, so sind die Dreyecke CEF, *cef* einander ähnlich, (184 §.) also ist EF : *ef* = CB : *cb* (209 §.) = CE : *ce*. Aber das Verhältniß der Polygone ist = EF*q* : *efq* (210 §.) also ist eben das Verhältniß = CB*q* : *cbq* = CE*q* : *ceq*.

212 §.

Man kann in und um den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone von so vielen Sei- 109 Fig.
tenlinien verzeichnen, daß der Exponent des Verhältnisses der Fläche des äussern gegen die Fläche des innern Polygons kleiner wird, als jede Zahl, welche die Einheit übertrift.

Beweis. Die gegebene Zahl μ sey grösser als 1, und F ein Halbmesser des Kreises; so kann man denselben nach G verlängern, und $CG = CF\sqrt{\mu}$ nehmen. Alsdenn hat man $\frac{CGq}{CFq} = \mu$, und man kann die regulären Polygone eben so, wie im 192 §. zeichnen. Wenn nun Q und q die Flächen des äussern und innern Polygons bezeichnen; so ist $\frac{Q}{q} = \frac{CDq}{CAq}$, und $\frac{CDq}{CAq} < \frac{CGq}{CFq}$, mithin $\frac{Q}{q} < \mu$.

Wenn also die Fläche Y einer ebenen Figur kleiner als die Kreisfläche ist: so kann man im Kreise ein reguläres Polygon verzeichnen, dessen Fläche grösser als Y ist. Denn es sey die Kreisfläche $= C$, und $\frac{C}{Y} = \mu$, und man verzeichne wie vorhin die regulären ähnlichen Polygone in und um den Kreis, so daß $\frac{Q}{q} < \mu$ ist, oder $\frac{Q}{q} < \frac{C}{Y}$. Das giebt $1 : \frac{Q}{q} > 1 : \frac{C}{Y}$, oder $\frac{q}{Q} > \frac{Y}{C}$. Ueberdem ist $C < Q$, also $\frac{q}{C} > \frac{q}{Q}$, mithin auch $\frac{q}{C} > \frac{Y}{C}$, und $q > Y$.

Wenn dagegen die Fläche Z einer ebenen Figur grösser als die Kreisfläche C ist; so kann man um den Kreis ein reguläres Polygon verzeichnen, dessen Fläche kleiner als Z ist. Es sey nemlich $\frac{Z}{C} = \mu$, und man verzeichne wie vorhin die ähnlichen regulären Polygone Q und q in und um den Kreis, so daß $CG = CF\sqrt{\mu}$, also $\frac{Q}{q} < \mu$ wird. Alsdenn hat man $\frac{Q}{q} < \frac{Z}{C}$, und $C > q$, also $\frac{Q}{C} < \frac{Q}{q}$, mithin auch $\frac{Q}{C} < \frac{Z}{C}$, folglich $Q < Z$.

213 §.

94F. **Die ganze Fläche eines um den Mittelpunct *K* beschriebenen Kreises ist einem Dreyeck *FGH* gleich, dessen Grundlinie *FG* so groß als die Peripherie *P*, und dessen Höhe *FH* so groß, als der Halbmesser *R* des Kreises ist.**

Beweis. Eine Figur, die grösser ist, als jedes im Kreise beschriebene Polygon, und kleiner, als jedes um den Kreis beschriebene Polygon, muß der Kreisfläche selbst gleich seyn. Denn wäre sie grösser als der Kreis, so gäbe es noch ein kleineres äusseres Polygon; und wenn sie kleiner wäre, so gäbe es noch ein grösseres inneres Polygon. (212 §.) Aber das Dreyeck FGH ist grösser als jedes innere Polygon. Denn im Kreise sey ein inneres Polygon q von so viel Seiten, als man will, beschrieben, dessen Peripherie $= \pi$ ist, und dessen Seiten vom Mittelpunct um den Abstand δ entfernt sind. Ferner sey das Dreyeck LMN verzeichnet, dessen Grundlinie LM $= \pi$, und Höhe LN $= \delta$ ist; so ist $q =$ LMN. (160 §.) Es ist aber

aber $P > \pi$, und $R > \delta$, also $FG > LM$, und $FH > LN$, mithin das Dreyeck $FGH > LMN$, (106 §.) folglich auch $FGH > q$. Eben das Dreyeck FGH ist kleiner als jedes äussere Polygon. Denn um den Kreis sey ein äusseres Polygon Q von so viel Seiten, wie man will, beschrieben, dessen Peripherie $= \Pi$ ist. Ferner sey das Dreyeck PQR verzeichnet, dessen Grundlinie $PQ = \Pi$, und Höhe $PR = R$ ist; so ist $Q = PQR$. (160 §.) Es ist aber $P < \Pi$, also $FG < PQ$, und $FH = R = PR$, also das Dreyeck $FGH < PQR$, (106 §.) folglich auch $FGH < Q$. Diesemnach ist das Dreyeck FGH der Kreisfläche gleich.

Dieser in der Lehre vom Kreise sehr merkwürdige Satz ist vom **Archimedes** erfunden, der etwa 50 Jahre später als **Euclides** berühmt war. Er wird mit Recht für den grösten Erfinder unter den alten Mathematikern gehalten, und es werden unten noch einige andre von ihm erfundene geometrische Lehrsätze vorkommen. Zu seinen Werken gehört eine kleine Schrift unter dem Titel: κυκλȣ μετρησις s. Circuli Dimensio, welche mit dem hier vorgetragenen Lehrsatz anfängt.

214 §.

Ein Kreis-Ausschnitt *ACBD* **ist einem** 124
Dreyeck *EFH* **gleich, dessen Grundlinie** *FH* Fig.
so groß als der Bogen *ADB*, **und dessen Höhe** *EF* **so groß, als der Halbmesser** *AC* **des Ausschnitts ist.**

Beweis. Man setze es sey FG der Peripherie P des Kreises gleich, wozu der Ausschnitt gehört: so ist die Kreisfläche, wozu der Ausschnitt gehört, dem Dreyecke EFG gleich. (213 §.) Diese Kreisfläche

 sey

sey = C: so hat man zwo Proportionen ACBD : C = ADB : P = FH : FG (123 §.) und EFH : EFG = FH : FG. (202 §.) Diese geben die dritte ACBD : C = EFH : EFG; und weil C = EFG ist, so ist auch ACBD = EFH. (166 §. Rech.)

215 §.

Kreisflächen, ähnliche Kreisausschnitte, und ähnliche Kreisabschnitte verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Halbmesser oder Durchmesser.

Das Verhältniß der ähnlichen Abschnitte ist auch gleich dem Verhältniß der Quadrate ihrer Sehnen.

124 Beweis. Der einen Kreisfläche C Peripherie
125 sey P, der andern Kreisfläche c Peripherie sey p.
Fig. Man verzeichne zwo Dreyecke EFG, efg und mache die Grundlinie FG = P, $fg = p$, die Höhen EF = AC, $ef = ac$; so hat man P : p = AC : ac, (195 §.) also FG : fg = EF : ef. Demnach ist EFG : efg = EFq : efq (205 §.) = ACq : acq. Weil ferner EFG = C, und $efg = c$ ist; (213 §.) so ist auch C : c = ACq : acq.

Wenn die Bogen ADB, adb, einander ähnlich sind, alsdenn aber FH = ADB, und $fh = adb$ ist; so hat man wiederum ADB : adb = AC : ac; (199 §.) also FH : fh = EF : ef, und EFH : efh = EFq : efq = ACq : acq. (205 §.) Da nun EFH = ACDB, und $efh = acdb$; (214 §.) so ist auch ACDB : $acdb$ = ACq : acq.

Man ziehe die Sehnen AB und ab; so ist der Winkel ACB = acb (199 §.) und AC : ac = BC : bc, also das Dreyeck ACB ∽ acb (184 §.) und ACB : abc = ACq : acq. (209 §.) Aber auch ACDB : $acdb$ = ACq

$= ACq : acq$; also $ACDB - ACB : acdb - acb = ACq : acq$, (169 §.) oder der Abschnitt ADB : Absch. $adb = ACq : acq$.

Das Verhältniß der Quadrate der Durchmesser ist mit dem Verhältniß der Quadrate der Halbmesser einerley, weil die Durchmesser selbst sich wie die Halbmesser verhalten; auch ist das Verhältniß der Halbmesser mit dem Verhältniß der Sehnen ähnlicher Bogen einerley; also ist auch das Verhältniß ähnlicher Abschnitte einerley mit dem Verhältniß der Quadrate ihrer Sehnen.

216 §.

Eine Figur quadriren heist ein Quadrat verzeichnen, das der gegebenen Figur gleich ist.

Wenn ein Rechteck gegeben ist; so sucht man nach dem 188 §. zwischen den Seiten desselben eine mittlere Proportionallinie, diese ist die Seite des dem Rechteck gleichen Quadrats. (206 §.)

Ist die gegebene Figur ein schiefwinklichtes Parallelogramm, oder ein Dreyeck: so sucht man nach dem 104, oder 107 §. ein eben so grosses Rechteck, und quadrirt dieses, wie vorhin gewiesen ist. Anstatt des so gefundenen Rechtecks kann hiernächst auf einer gegebenen Seitenlinie auch ein anders eben so grosses Rechteck gezeichnet werden, wovon man die zweyte Seitenlinie findet, wenn man zur gegebenen Seitenlinie und den Seitenlinien des gegebenen Rechtecks die vierte Proportionallinie sucht. (206 §.) Eben diese Seitenlinie wird nach Anleitung des 107 §. gefunden.

Statt eines gegebenen regulären Polygons quadrirt man, wie vorhin, das demselben gleiche Dreyeck. (160 §.).

Ist eine irreguläre gradlinichte Figur gegeben: so vertheile man sie durch Diagonallinien in Dreyecke, und quadrire jedes Dreyeck für sich. Statt aller so gefundenen Quadrate kann hiernächst mit Hülfe des Pythagorischen Theorems, ein Quadrat gefunden werden, welches allen vorigen zusammen genommen gleich ist. Auch kann man statt eines jeden dieser Dreyecke ein eben so grosses Rechteck dem 107 §. gemäß so verzeichnen, daß diese Rechtecke insgesammt eine gleiche Seitenlinie haben. Diese Rechtecke lassen sich so an einander setzen, daß jedes mit dem folgenden die eben so grosse Seitenlinie gemein hat, und alle zusammen machen alsdenn ein Rechteck aus, daß der gegebenen Figur gleich ist, welches man quadriren kann.

Vorausgesetzt, daß man eine grade Linie finden könne, die dem Umfang eines Kreises gleich ist, läst sich auch der Kreis, oder ein Abschnitt, oder Ausschnitt des Kreises quadriren; wenn das Verhältniß des dem Abschnitt, oder Ausschnitt, zugehörigen Bogens zur Peripherie gegeben ist. Man müste nach dem 213 §. ein der ganzen Kreisfläche, und nach dem 214 §. ein dem Ausschnitte gleiches Dreyeck suchen, welches sich dann statt des Kreises, oder des Ausschnitts quadriren liesse. Von der Quadratur des Ausschnitts hinge dann zugleich die Quadratur des Abschnitts zwischen dem zugehörigen Bogen, und der Sehne ab: denn diese Sehne schneidet ein Dreyeck ab, und man könnte nun die Differenz der dem Ausschnitt und dem Dreyeck gleichen Quadrate nach dem 110 §. suchen.

217 §.

Den Durchmesser eines Kreises zu finden, der so groß ist, als die Summe zweener andern Kreise C, c, deren Durchmesser *AB*, *AC* gegeben sind. 126 Fig.

Aufl. Man verzeichne einen rechten Winkel BAC, und mache seine Schenkel AB, AC so groß, als die Durchmesser der gegebenen Kreise sind: so ist die Hypothenuse BC des rechtwinklichten Dreyecks ABC der Durchmesser des gesuchten Kreises.

Beweis. Der Kreis, dessen Durchmesser die Hypothenuse ist, heisse K: so ist $ABq : ACq = C : c$, (215 §.) also $ABq + ACq : ACq = C + c : c$ (164 §.) oder $BCq : ACq = C + c : c$. (108 §.) Ferner ist $BCq : ACq = K : c$, (215 §.) also $K : c = C + c : c$, und $K = C + c$. (166 §. Rech.)

Der Durchmesser eines Kreises C, welcher so groß ist, als die Differenz eines grössern Kreises K von einem kleinern *c* wird demnach gefunden, wenn man auf dem einen Schenkel des rechten Winkels BAC den Durchmesser AC des kleinern Kreises nimmt, und aus dem Mittelpunct C mit dem Durchmesser CB des größten K einen Kreis beschreibt, der den andern Schenkel in B schneidet: alsdenn ist AB der Durchmesser des gesuchten Kreises. Denn ist C der diesem Durchmesser zugehörige Kreis; so ist vermöge des Beweises $K = C + c$ also $K - c = C$.

Dieser Beweis gründet sich, auf den Pytagorischen Lehrsatz, und auf die Eigenschaft der Kreise, daß ihr Verhältniß gegen einander mit dem Verhältniß der Quadrate ihrer Durchmesser einerley ist. Weil es nun eine allgemeine Eigenschaft aller ähnlichen Figuren ist, daß sie sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten oder Diagonallinien verhalten: so gilt der Satz mit gehöriger Veränderung von allen ähnlichen Figuren, wenn statt der Durchmesser der Kreise gleichnahmige Seiten oder Diagonallinien ähnlicher Figuren, oder auch die Sehnen ähnlicher Kreis-Abschnitte verstanden werden.

Wenn nemlich die Summe der Quadrate zwoer solcher gleichnahmigen Linien in zwoen ähnlichen Figuren so groß ist, als das Quadrat einer gleichnahmigen Linie einer ähnlichen dritten Figur; so ist diese dritte Figur so groß, als die Summe der beyden vorigen.

218 §.

126 Fig. Vermöge des vorigen Satzes ist in der 126 F. die halbe Kreisfläche CAB der Summe der beyden halben Kreisflächen BDA + AEC gleich. Wenn nun von dem Halbkreis BAC die beyden Abschnitte AGB und AHC abgehen; so bleibt das Dreyeck ABC übrig: und wenn von den beyden Halbkreisen ADB, AEC eben die Abschnitte AGB, AHC abgehen; so bleiben die beyden Figuren ADBG, und AECH übrig. Beyde zusammen sind also dem gradlinichten Dreyeck ABC gleich, oder jede für sich einem der Dreyecke AKB, AKC, wenn AB = AC, und AK eine senkrechte Linie auf BC ist. Diese Figuren ADBG, AECH, werden von ihrer Gestalt Möndchen (lunulae) genannt. Man kann sie quadriren, weil man die ihnen gleichen Dreyecke quadriren kann. (216 §.) Sie werden von dem Erfinder dieser Quadratur Möndchen des Hippocrates, (lunulae Hippocratis) genannt: aber der-

dergleichen besondre Quadraturen solcher Figuren, die von Kreisbogen eingeschlossen sind, haben in der Ausübung eben keinen Nutzen.

Der XI. Abschnitt.

Anwendung der Rechenkunst auf die Ausmessung ebener Figuren.

219 §.

Den Flächen-Inhalt eines Parallelogramms *P* auszurechnen, wenn die Grundlinie und Höhe desselben gegeben sind. 131 Fig.

Aufl. Man muß eine andre ebene Figur, deren Grösse als bekannt voraus gesetzt werden kann, für das Maaß annehmen, (112 §.) und untersuchen, wie vielmahl diese entweder selbst, oder ein aliquoter Theil von ihr, in dem Parallelogramm enthalten sey. In solcher Absicht erwählt man ein Quadrat Q, dessen Seite L so lang ist, als eines von den im 112 §. erwehnten Maassen, z. E. ein Fuß, eine Ruthe u. s. f. Ein solches Quadrat erhält den Nahmen von diesem Längenmaasse, dem die Seite desselben gleich ist: es heißt eine Quadrat-Ruthe, ein Quadrat-Fuß, ein Quadrat-Zoll u. s. f., nachdem L eine Ruthe einen Fuß, einen Zoll lang ist, u. s. f. Wenn nun die Grundlinie AB und die Höhe CE des Parallelogramms in Zahlen gegeben sind, wobey L die Einheit ist; so hat man aus dem 206 §. die Proportion $Q : P = L \times L : AB \times CE$, also $Q : P = 1 : AB \times CE$, weil $L = 1$ ist. Demnach ist das Quadrat Q dessen Seitenlinie einen

Fuß,

Fuß, eine Ruthe, wie man will, lang seyn kann, im Parallelogramm P so vielmahl enthalten, als Eins in derjenigen Zahl enthalten ist, welche das Product aus der Grundlinie AB in die Höhe CE ausdrückt, vorausgesetzt, daß man beydes Grundlinie und Höhe mit einerley Längenmaaß gemessen habe, mithin die Zahlen, welche ihre Länge angeben, einerley Nahmen haben.

Es sey AB = 39,36 Ruth.
CE = 54,78 Ruth.

31488
27552
15744
19680

so wird P = 2156,1408 Q. Ruthen.

220 §.

Die Quadrate selbst gehören in die Classe der Parallelogrammen, und die Grundlinie eines Quadrats ist seiner Höhe gleich. Wenn man also die Zahl, welche die Länge der nach einem bekannten Maaß gemessenen Seite eines Quadrats angiebt, mit sich selbst multiplicirt; so drückt das Product aus, wie vielmahl ein Quadrat, dessen Seite so lang als das gebrauchte Längenmaaß ist, in jenem enthalten sey: und dies ist der Ursprung des Nahmens einer Quadratzahl. (180 §. Rech.)

Wenn dagegen der Flächenraum eines Quadrats im Quadratmaaß gegeben ist; so wird die Seitenlinie des Quadrats im Längenmaaß, das mit dem Quadratmaaß gleichnahmig ist, durch

durch Ausziehung der Quadratwurzel aus der gegebenen Zahl gefunden.

Eine Quadrat-Ruthe enthält 100 Q. F., weil ihre Seite nach der Decimal-Abtheilung = 10 F. ist: aus eben der Ursache enthält ein Quadrat-Fuß 100 Quadrat-Zoll, ein Quadrat-Zoll aber 100 Quadrat-Linien, eine Quadratlinie 100 Quadrat-Scrupel.

Hiedurch werden zugleich die Nahmen solcher Decimaltheile bestimmt, die an einer ganzen Zahl anhängen, welche den Flächen-Inhalt einer Figur ausdrückt, wenn die Einheit eine Quadrat-Ruthe, oder ein Quadrat-Fuß u. s. f. ist. Im vor. §. ward das Parallelogramm $P = 2156,1408$ Q. R. oder $P = 2156\frac{1408}{10000}$ Q. R. gefunden, und man kann den anhängenden Bruch nach dem 136 §. R. auf Quadratfüsse bringen: alsdenn erhält man $\frac{1408}{10000}$ Q. R. $= \frac{1408}{10000}$ 100 Q. F. $= 14,08$ Q. F. Eben so werden $\frac{8}{100}$ Q. F. = 8 Quad. Zollen, und deswegen sind 2156,1408 Q. R. so viel, als 2156 Q. R. 14 Q. F. 8 Q. Z.

Man kann sich auf solche Art jedesmahl die an einer Zahl von dieser Art anhängende Decimalzahl von der Linken gegen die Rechte so eingetheilt vorstellen, daß jede Classe zwo Ziffern bekommt, und es werden diese Classen Quadratfüsse, Quadratzolle, Quadratlinien, und s. f. naheinander bedeuten, wenn die Einheit eine Quadrat-Ruthe ist. Wie sich dies ändre, wenn die Einheit ein Quadratfuß, oder Quadratzoll, u. s. f. ist, fällt leicht in die Augen. Wäre die Anzahl der Decimalstellen ungrade; so erhält man durch Hinzusetzung der 0 eine grade Anzahl, welches den Werth der Zahl bekannter massen nicht ändert.

ändert. So sind 453,73269 Q. R. = 453 Q. R. 73 Q. F. 26 Q. Z. 90 Q. L.

221 §.

Nach dem Duodecimal-Maaß enthält eine Quadrat-Ruthe 144 Quadrat-Fuß, ein Quadrat-Fuß enthält 144 Quadrat-Zoll, ein Quadrat-Zoll 144 Quadrat-Linien, und in einer Quadratlinie sind 144 Quadrat-Scrupel enthalten. Dies vorausgesetzt, kann man leicht das Decimal-Quadratmaaß auf Duodecimal-Quadratmaaß, und umgekehrt dieses auf jenes bringen. Es dienen dazu folgende Sätze, als Reductionssätze.

Bey einerley Ruthenmaaß sind

100 Dec. Q. F. = 144 Duod. Q. F.

Bey einerley Fußmaaß sind

100 Dec. Q. Z. = 144 Duod. Q. Z.

Wird nun gefragt: 63 Quadrat-Fuß 95 Quadrat-Zoll Decimalmaaß, wieviel sinds Duodecimal-Quadrat-Füsse und kleinere Duodecimal-Quadrattheile von solchen Quadratfüssen? so setzt man an:

100 Dec. Q. F. — 144 Duod. Q. F. — 63 Q. F. 95 Q. Z.
× 100 × 100 Dec. M.?

10000 Dec. Qu. Z. 6395 Dec. Qu. Z.

```
          6395 Dec. Qu. Z.
           144
         -----
         25580
        25580
        6395
       -------
       92|0880          Facit
10000) -------
          880 | 92 Q. F. 12 Q.
          144 | Z. 96 Qu. Lin.
        ----- | 110 Qu. Scr.
        11520 | Duod. Maaß.
        1152
       -------
       12|6720
10000) -------
          6720
          144
        ------
         26880
        2688
        672
       -------
       96|7680
10000) -------
          7688
           144
        ------
         30752
        30752
        7688
       -------
      110|7072
10000) -------
          7072
```

Von der umgekehrten Frage, wie man Duodecimal-Quadratmaaß auf Decimal-Quadratmaaß bringt, giebt der folgende Ansatz ein Beyspiel.

144 Duod. Q. F. — 100 Dec. Q. F. — 286 Q. F 137 Q. Z.
Duod. M.?

144	286
144	144
576	1144
576	1144
144	286
30736 Duod. Qu. Z.	137
	41321 Duod Qu. Z.
	× 100 Fac.
	20736) 4132100 | 199,271798 Qu. F. Dec. Maaß.

Weil übrigens die Verschiedenheit des in verschiedenen Ländern und Städten üblichen Längenmaasses oft Reductionen solcher Zahlen, die eine gemessene Länge angeben, auf ein andres Längenmaaß nothwendig macht; so ist leicht zu erachten, daß man zuweilen genöthiget seyn werde, solche Zahlen, welche die Grösse einer Fläche im Quadratmaaß angeben, auf ein Quadratmaaß eines andern Nahmens zu bringen. Wenn man die Zahlen quadrirt, welche in der Vergleichungstafel der Fußmaasse des 254 §. der Rechenkunst sind mitgetheilt worden; so verhalten sich die so gefundenen Quadratzahlen wie die Quadratmaasse an den Oertern, welche in der Tafel dabey angezeigt sind. Auch hat man leicht die nöthigen Reductionssätze, wenn man die Zahlen in den Reductionssätzen für die Längenmaasse quadrirt.

Sind 144 Lond. Fuß = 135 Paris. Fuß:
so sind 20736 Lond. Q. F. = 18225 Paris. Q. F.

Wie man sich weiter bey Auflösung hieher gehöriger Rechnungsfragen verhalten müsse, dazu hat die Rechenkunst ausführlich genug Anleitung gegeben: nur ist nicht undienlich zu bemerken, daß man sich dabey in vielen Fällen mit Vortheil der Logarithmen bedie-

bedienen könne. Soll man 4739 Lond. Q. F. auf Pariser Q. F. bringen, so kann man so rechnen.

144^2 Lond. — 135^2 Paris. — 4739 Lond?

$$l\,144 = 2{,}1583625 \qquad l\,135 = 2{,}1303338$$
$$\underline{\quad 2 \quad} \qquad \underline{\quad 2 \quad}$$
$$l\,144^2 = 4{,}3167250 \qquad l\,135^2 = 4{,}2606676$$
$$l\,4739 = \underline{3{,}6756867}$$
$$7{,}9363543$$
$$l\,144^2 = \underline{4{,}3167250}$$

Log. der ges. Zahl = 3,6196293

also diese Zahl = 4165,1371 P. Q. F.

222 §.

Den Flächen-Inhalt eines Dreyecks *ABC* ausʒurechnen, wenn eine Seite desselben *AB* nebst der dazu gehörigen Höhe *CE* nach einem bekannten Maaß in Zahlen gegeben sind. 131 Fig.

Aufl. Wenn auf eben der Grundlinie AB in eben der Höhe CE ein Parallelogramm P stehet; so ist das Dreyeck ABC $= \frac{1}{2}$P. Weil nun P = AB × CE gefunden wird, (219 §.) so erhält man ABC $= \frac{1}{2}$ AB × CE. Demnach giebt das halbe Product aus der Grundlinie eines Dreyecks in seine Höhe den Flächen-Inhalt des Dreyecks im Quadrat-Maaß, allemahl vorausgesetzt, daß Grundlinie und Höhe im gleichnahmigen Längenmaaß durch Zahlen ausgedrückt seyn müssen.

Wenn also AB = 39, 36 R, CE = 54, 78 R: so wird das Dreyeck ABC = 1078,0704 Quad. R. oder 1078 Q. R. 7 Q. F. 4 Q. Z.

223 §.

Ein Trapezium *ABCD* auszurechnen, wenn beyde parallele Seiten, *AB*, *CD*, nebst 132 Fig.

ihrer Entfernung, oder der Höhe des Trapezii *DE*, gegeben sind.

Aufl. Die halbe Summe der parallelen Seiten $\frac{1}{2}(AB + CD)$ multiplicire man in die Höhe DE; so drückt das Product den Inhalt des Trapezii aus.

Beweis. Man ziehe die Diagonallinie BD; so ist das Dreyeck $ABD = \frac{1}{2} AB . DE$, und das Dreyeck $CBD = \frac{1}{2} CD . DE$: (222 §.) also $ABCD = ABD + CBD = \frac{1}{2} AB . DE + \frac{1}{2} CD . DE = \frac{1}{2}(AB + CD) DE$.

224 §.

Den Flächen-Inhalt einer jeden irregulären gradlinichten Figur auszurechnen, wenn man alle ihre Diagonallinien, und die diesen Diagonallinien zugehörigen Höhen der Dreyecke messen kann, in welche die Figur durch diese Diagonallinien vertheilt wird.

Aufl. Man berechne den Inhalt eines jeden dieser Dreyecke besonders nach dem 222 §., und bringe zuletzt alle gefundene Zahlen in eine Summe: so hat man den Inhalt der ganzen Figur.

133 Fig. Im Viereck ABCD ist eine Diagonallinie AC hinlänglich, und wenn man diese für die gemeinschaftliche Grundlinie der beyden Dreyecke ABC, ADC nimmt, so daß BF, DE, die Höhen werden; so ist das ganze Viereck $= \frac{1}{2} AC . BF + \frac{1}{2} AC . DE = \frac{1}{2} AC (BF + DE)$. Solchergestalt findet man den Inhalt auf einmal durch eine einzige Multiplication, welches die Rechnung verkürzt.

In jeder andern Figur, die mehr als vier Seiten hat, machen zwey Dreyecke, die an einer Diagonallinie liegen, ein solches Viereck aus: daher kann

kann man zu Verkürzung der Rechnung den Inhalt aller dieser Vierecke auf die jetzt beschriebene Art berechnen, und zuletzt alles mit den etwa noch übrigen Dreyecken in eine Summe bringen.

225 §.

Die Länge zwoer Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks ist gegeben, man soll die Länge der dritten Seite durch Rechnung finden.

Aufl. Wenn a die eine, und b die andre Perpendiculär-Seite, h aber die Hypothenuse bezeichnet; so ist $hq = aq + bq$, und $aq = hq - bq$ (108 §.) also auch $h^2 = a^2 + b^2$, und $a^2 = h^2 - b^2$, (220 §.) mithin ferner $h = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ und $a = \sqrt{(h^2 - b^2)}$. (184 §. Rech.) Sind also beyde Perpendiculärseiten in gleichnahmigen Zahlen gegeben, so mache man von jeder dieser Zahlen die Quadratzahl, addire diese zusammen, und ziehe aus der Summe die Quadrat-Wurzel: so hat man die Hypothenuse gefunden.

Ist nebst der Hypothenuse ein Cathetus gegeben; so ziehe man die Quadratzahl des gegebenen Catheti von der Quadratzahl der Hypothenuse ab, und suche aus dem Rest die Quadrat-Wurzel: so hat man die Länge des andern Catheti gefunden.

Wäre $a = b = 1$; so wäre $h = \sqrt{2}$. Also sind in diesem Fall a oder b und h incommensurable Linien.

226 §.

Die Länge der Seite AB eines regulären Polygons nebst dem Halbmesser $CA = CB$ des um dasselbe beschriebenen Kreises ist gegeben: 130 Fig.

man soll den Flächen-Inhalt des Polygons durch Rechnung finden.

Aufl. Man suche zuerst die Entfernung CD der Seiten vom Mittelpunct des Polygons: diese halbirt die Seite AB in D, (74 §.) und weil AB gegeben ist, so hat man auch $AD = \frac{1}{2} AB$. Demnach wird im rechtwinklichten Dreyeck ADC die Perpendicularseite $CD = \sqrt{(AC^2 - AD^2)}$ gefunden, und man hat den ganzen Umfang des Polygons, wenn man die Länge der Seite AB mit der Anzahl der Seiten multiplicirt. Wird nun die halbe Peripherie des Polygons mit der Entfernung der Seiten vom Mittelpunct multiplicirt, so findet man den Flächeninhalt des Polygons: denn dies Product giebt den Inhalt eines dem Polygon gleichen Dreyecks. (160 §.)

Wenn der Halbmesser des Kreises = 1 ist, so ist auch die Seite des regulären Sechsecks = 1, und man findet für das Sechseck $CD = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}86602535$, (200 §. Rech.) mithin für den Inhalt 2,59807605 Decimal-Quadrattheile des Halbmessers.

Die Seite des im Kreise beschriebenen Quadrats ist $= \sqrt{2}$, und daraus hat man unmittelbar nach dem 220 §. den Flächeninhalt = 2 Quadrate des Halbmessers, wie auch für sich schon klar ist. Die Entfernung der Seiten vom Mittelpunct ist $= \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})} = 0{,}70710678$.

227 §.

Eine Figur wird **arithmetisch quadrirt**, wenn man die Seitenlinie desjenigen Quadrats durch Rechnung sucht, dessen Flächenraum eben so groß, als der Flächenraum der gegebenen Figur ist.

Weil

Weil man den Flächeninhalt einer jeden gradlinichten Figur im Quadratmaaß finden kann, in der Voraussetzung, daß alle diejenigen graden Linien vermittelst des Längenmaasses gemessen werden können, welche bey der Rechnung gegeben seyn müssen; so läßt sich jede gradlinichte Figur arithmetisch quadriren. Weil nemlich ihr im Quadratmaaß gefundener Flächeninhalt zugleich die Grösse des Flächenraums eines eben so grossen Quadrats angiebt; so suche man aus der so gefundenen Quadratzahl die dazu gehörige Quadratwurzel: diese giebt die Länge der Seitenlinie des gesuchten Quadrats im Längenmaaß, das mit dem Quadratmaaß einerley Nahmen hat, wodurch der Flächeninhalt der Figur ausgedrückt ist. (220 §.)

Der XII. Abschnitt.

Die ersten Grundlehren von den trigonometrischen Linien.

228 §.

Es sey ACB ein spitzer Winkel und BCK seine Ergänzung zu 180° oder 2R; ferner sey CF auf AC senkrecht, und aus dem Mittelpunct mit einem willkührlichen Halbmesser ein Halbkreis über AK beschrieben: so sind AF, KF, Quadranten, und AB ist das Maaß des Winkels ACB. Aus B ziehe man BD, BE auf die Schenkel des rechten Winkels senkrecht, durch A und F aber Tangenten des Kreises, welche CB in T und V schneiden; so erhellet, daß die Linien BD = CE, AD, AT, CT, BE = CD, 177 Fig.

EF, FV, und CV insgesammt von der Grösse des Winkels ACB abhängen. Es heist aber

BD = CE der Sinus,
AD der Quersinus, (Sinus versus)
AT die Tangente,
CT die Secante sowohl des Winkels ACB, als auch des Bogens AB.

In eben dem Verstande ist

BE = CD der Sinus,
EF der Quersinus,
FV die Tangente,
CV die Secante sowohl des Winkels FCB, der ACB zu 90° ergänzt, als auch des Bogens FB der AB zum Quadranten ergänzt: man könnte also die letzten vier Linien den Sinus, den Quersinus, die Tangente, die Secante des Complements des Winkels ACB, oder des Bogens AB zu 90° nennen: statt dessen aber heißt kürzer

BE = CD der Cosinus,
EF der Cosinus versus,
FV die Cotangente,
CV die Cosecante sowohl des Winkels ACB, als auch des Bogens AB.

Alle acht Linien heissen auch überhaupt die zu dem Winkel oder Bogen gehörigen **trigonometrischen Linien**; und wenn α einen Winkel oder einen Kreisbogen bezeichnet, so dienen die verkürzten Ausdrücke $\sin\alpha$, $\sin v.\ \alpha$, $\tan g\ \alpha$, $\sec\alpha$, $\cos\alpha$, $\cos v.\ \alpha$, $\cot\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$, als allgemeine Zeichen für diese trigonometrischen Linien. Sie führen diesen gemeinschaftlichen Nahmen, weil sie anfangs vornemlich nur gebraucht wurden, aus dreyen Stücken vom Umfang eines Dreyecks, wenn unter denselben wenigstens eine

eine Seite befindlich ist, die übrigen durch Rechnung zu finden, wozu die nähere Anleitung bald folgen wird.

229 §.

Wenn der spitze Winkel ACB wächst, so wächst zugleich sein Sinus und Quersinus, seine Tangente und Secante: dagegen nehmen die übrigen vier trigonometrischen Linien ab. Nach diesem Gesetz erfolgen die Aenderungen so lange bis ACB, oder AB $= 90°$ wird mithin CB in CF fällt.

Nun wird nicht allein der Sinus $DB = CF$, sondern auch der Quersinus $AD = AC$, also beyde dem Halbmesser des Bogens AB gleich, der nun ein Quadrant ist, wenn B in F fällt. Wenn B über F nach G hinaus rückt, so nimmt der Sinus, der nun GH ist, wieder ab, und der Sinus kann nie grösser, als der Halbmesser werden: deswegen heißt der Sinus des rechten Winkels auch der ganze Sinus. Wird dieser Sinus $= 1$ gesetzt, so lassen sich alle übrige Sinus in Zahlen nicht anders als durch Brüche ausdrücken. Für den stumpfen Winkel ACG ist AH der Quersinus, mithin übertrift derselbe nun den ganzen Sinus.

Die Tangente AT und Secante CT wachsen über alle Gränzen, wenn sich ACB dem rechten Winkel nähert, und weil Tangente und Secante eines rechten Winkels eigentlich gar keinen Endpunct haben, da es keinen Durchschnittspunct T alsdenn mehr giebt, so ist sowohl die Tangente als auch die Secante eines rechten Winkels grösser als jede gegebene Linie. Eine Linie dieser Art nennt man unendlich groß, und das Zeichen ∞ wird alsdenn gebraucht, eine solche Linie anzudeuten. Die

Tangente und Secante des stumpfen Winkels ACG sind AS, CS, beyder Durchschnittspunct liegt nun auf der andern Seite des Durchmessers AK, und beyde Linien haben nun eine Lage die der vorigen entgegen gesetzt ist.

Der Cosinus, der Cosinusversus, und die Cotangente des rechten Winkels verschwinden, und die Cosecante ist dem Halbmesser gleich. Für den stumpfen Winkel haben der Cosinus EG = CH, und die Cotangente FW eine Lage, die der vorigen entgegen gesetzt ist, die Cosecante CW ist wieder grösser als der Halbmesser. Eben diese Linien wachsen mit dem stumpfen Winkel, auch der Quersinus mit dem Cosinusversus wächst; so wie im Gegentheil Sinus, Tangente, Secante abnehmen. Werden ACG oder AG = 180°, so verschwindet der Sinus, der Quersinus ist dem Durchmesser des Bogens AG gleich, der nun ein Halbkreis ist, die Tangente verschwindet, die Secante ist dem Halbmesser gleich, die Cotangente und Cosecante werden unendlich groß, der Cosinus und der Cosinusversus aber dem Halbmesser gleich.

Wenn man die mit einem spitzen Winkel zusammen gehörigen trigonometrischen Linien positiv annimmt, so bleiben die Sinus, Quersinus, Cosinusversus und Cosecanten für stumpfe Winkel zwischen 90° und 180° positiv, aber die Cosinus, Tangenten, Secanten und Cotangenten dieser stumpfen Winkel werden negativ. (39 §.) Die übrigen Aenderungen, welche mit diesen Linien vorgehen, wenn Winkel und Bogen über 180° wachsen, werden hier noch nicht in Betrachtung kommen.

Die

Die Winkel ACB, ACL, haben eine entgegengesetzte Lage, und beyde haben einerley Cosinus CD und Quersinus AD der Grösse und Lage nach, wenn die Winkel selbst gleich groß sind, aber entgegen gesetzte Sinus DB, DL, und Tangenten AT, AS. Des negativen Winkels ACL = ACB Cotangente, Cosecante, und Cosinusversus sind FW, CW, FP, die Cosecante CW ist der Secante CS entgegen gesetzt. Wie es komme, daß des negativen Winkels Cosinus und Secante positiv bleiben, übersiehet man am deutlichsten, wenn man sich vorstellt, daß ACB abnehme, verschwinde, und in den entgegen gesetzten Zustand übergehn, indem CB sich um C gegen CA zu drehet: alsdenn nimmt CD zu und CT nimmt ab so lange bis ACB verschwindet, da dann Cosinus und Secante dem Halbmesser gleich sind, weil D und T in A fallen. Sobald aber CB auf die Seite von CA kommt, wo CL liegt, sobald nimmt CD wieder ab, CT oder CS aber wächst, und der Endpunct T oder S bleibt auf eben der Seite von C liegen, wo er seine Stelle für den positiven Winkel hatte. Indem sich solchergestalt CB um C durch CA gegen CL zu drehet, wächst zugleich der Cosinusversus FE; er wird dem Halbmesser gleich, wenn ACB verschwindet, und er übertrift den Halbmesser FC, wenn CB über CA hinaus gerückt, und der Winkel nun negativ geworden ist.

230 §.

Zu zweenen Winkeln, die einander zu 180° Grad ergänzen, gehören gleich grosse trigonometrische Linien, wenn der einzige Quersinus ausgenommen wird.

Beweis. Wenn $ACB = 180° - ACG$ ist, so hat man auch $KCG = 180° - ACG$, also $ACB = KCG = ACS$, und $FCB = FCG$. Ferner ist $CG = CB$, bey D und H sind rechte Winkel; also ist in den Dreyecken BDC und GHC die Seite $BD = GH$, $CD = CH$, mithin sind Sinus und Cosinus der Winkel ACB, ACG gleich groß, nur nicht die Quersinus AD, AH, welche um den doppelten Cosinus verschieden sind. In den Dreyecken CAT, CAS, ist $AT = AS$, $CT = CS$, also sind Tangente und Secante gleich groß. Eben so hat man in den Dreyecken CFV, CFW, auch $FV = FW$, $CV = CW$, also sind die Cotangente und Cosecante für beyde Winkel ACB, ACG gleich groß, und der Cosinus versus FE ist gleichfalls für beyde einerley, weil der Sinus CE für beyde einerley ist.

Einige dieser Linien haben für solche Winkel, die einander zu 180° ergänzen, eine entgegengesetzte Lage, wie schon im vor. §. bemerkt ist. Wenn demnach auf beydes zugleich ihre Grösse und Lage Rücksicht genommen wird, und α einen spitzigen Winkel bezeichnet; so ist

$$\begin{aligned}
\sin(180° - \alpha) &= \sin\alpha,\\
\cos(180° - \alpha) &= -\cos\alpha,\\
\text{tang}(180° - \alpha) &= -\text{tang}\,\alpha,\\
\cot(180° - \alpha) &= -\cot\alpha,\\
\sec(180° - \alpha) &= -\sec\alpha,\\
\text{cosec}(180° - \alpha) &= \text{cosec}\,\alpha,\\
\text{cosin v.}(180° - \alpha) &= \text{cosin v.}\,\alpha.
\end{aligned}$$

231 §.

177 **Wenn** *ACB*, *acb*, **gleich grosse Winkel,**
178 **die Bogen** *AB*, *ab*, **aber mit ungleichen Halb-**
Fig. **messern** *CA*, *ca*, **beschrieben sind, und wenn**
als-

alsdenn für diese Winkel oder Bogen die den Halbmesser *CA*, *ca*, zugehörigen trigonometrischen Linien verzeichnet werden; so verhalten sich von diesen Linien diejenigen, die einerley Nahmen haben, wie die dazu gehörigen Halbmesser.

Beweis. Es ist so gleich einleuchtend, daß die Dreyecke BCD und *bcd*, ACT und *act*, AFV und *afv* einander ähnlich sind: (184 §.) deswegen verhalten sich die Sinus und Cosinus wie die Halbmesser CB : *cb*, die Tangenten und Secanten wie CA : *ca*, die Cotangenten und Cosecanten wie CF : *cf*. Ferner ist AC : *ac* = CD : *cd*, also auch AC − CD : *ac* − *cd* = AC : *ac* (169 §. Rech.) d. i. die Quersinus AD, *ad*, verhalten sich wie die Halbmesser. Für die Cosinusversus EF, *ef*, folgt es eben so: denn es ist CF : *cf* = CE : *ce*, also CF − CE : *cf* − *ce*, oder EF : *ef* = CE : *ce*.

Für die stumpfen Winkel gilt eben der Satz, weil sie, mit Ausnahme des Quersinus, mit ihren Ergänzungen zu 180° einerley trigonometrische Linien haben. Uebrigens aber hat man auch AC : *ac* = CH : *ch*, also AC + CH : *ac* + *ch* = AC : *ac* (168 §. Rech.) oder die Quersinus AH, *ah*, zweener gleich grossen stumpfen Winkel verhalten sich wie die dazu gehörigen Halbmesser.

Trigonometrische Linien, die zu einerley Winkel gehören, bleiben also in einerley Verhältniß, wenn man gleich den Halbmesser ändert. Denn es ist BD : *bd* = AC : *ac*, und CD : *cd* = AC : *ac*, also BD : *bd* = CD : *cd*, mithin auch BD : CD = *bd* : *cd*. Ferner ist AT : *at* = AC : *ac* = CT : *ct*, also auch AT : CT = *at* : *ct*.

Eben

Eben so erhellet, daß das Verhältniß zweyer trigonometrischer Linien für den Halbmesser CA einerley sey mit dem Verhältniß zweyer mit den vorigen gleichnahmiger trigonometrischen Linien für den Halbmesser *ca*, wenn die Winkel ACB, *acb*, gleich groß sind.

232 §.

Der Sinus eines Winkels *ACB* oder Bogens $AB = \alpha$ ist für den Halbmesser $= 1$ gegeben: man soll die übrigen zu eben dem Winkel gehörigen trigonometrischen Linien finden.

Aufl. Aus dem Sinus hat man gleich den Cosinus versus, denn es ist $ET = CF - CE$, also $\text{cosin v. } \alpha = 1 - \sin \alpha$. Weiter ist $CD = \sqrt{(BC^2 - BD^2)}$, (225 §.) weil nun der Halbmesser $BC = 1$ gesetzt wird, so hat man $\cos \alpha = \sqrt{(1 - \sin \alpha^2)}$, so wie überhaupt allemahl $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$.

Ferner ist $CD : DB = CA : AT$, also $AT = \frac{DB \cdot CA}{CD}$, d. i. $\text{tang}\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, weil $CA = 1$ ist. Aus dem Cosinus hat man auch $AD = AC - CD$, d. i. $\sin \text{v.}\, \alpha = 1 - \cos \alpha$, wenn α spitz ist. Für den Winkel $ACG = 180° - \alpha$ hat man $AH = AC + CH$, d. i. $\sin \text{v.} (180° - \alpha) = 1 + \cos \alpha$.

Aus der Tangente hat man auch die Cotangente, denn es ist das Dr. $ACT \backsim FCV$, also $AT : AC = CF : FV$, d. i. $\text{tang}\, \alpha : 1 = 1 : \cot \alpha$, also $\cot \alpha = \frac{1}{\text{tang}\, \alpha}$. Allemahl also ist das Rechteck der

Tan=

Tangente und Cotangente dem Quadrat des Halbmessers gleich. Weil nun $\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ war, so ist auch $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Aus der Tangente wird die Secante und aus der Cotangente die Cosecante nach dem Pythagorischen Lehrsatz gefunden. Denn es ist $CT = \sqrt{(AC^2 + AT^2)}$ und $CV = \sqrt{(CF^2 + FV^2)}$ also $\sec\alpha = \sqrt{(1 + \tang\alpha^2)}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{(1 + \cot\alpha^2)}$. Man findet aber auch die Secante aus dem Cosinus und die Cosecante aus dem Sinus: denn es ist $CD : CB = CA : CT$, d. i. $\cos\alpha : 1 = 1 : \sec\alpha$, und $DB : CB = CF : CV$, d. i. $\sin\alpha : 1 = 1 : \operatorname{cosec}\alpha$, also $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$. Auch ist allemahl $\cos\alpha . \sec\alpha = \sin\alpha . \operatorname{cosec}\alpha = 1^2$.

Diese Formuln sind insgesammt allgemein richtig, es mag α einen spitzen oder stumpfen Winkel bezeichnen, wenn man nur bemerkt, daß $\cos\alpha$, $\tang\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$, negativ werden, wenn α zwischen $90°$ und $180°$ fällt. Diese Bemerkung vorausgesetzt, kann auch der Ausdruck $\sin v. = 1 - \cos\alpha$ als allgemein gelten, weil nach dem Subtractionsregeln des 40 §. ohnehin $\sin v. (180° - \alpha) = 1 + \cos(180° - \alpha)$ gefunden wird. Vergleicht man überdem hiemit die allgemeinen Multiplications- und Divisions-Regeln aus dem 181 §; so fließt auch aus den Formuln $\tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, daß $\tang\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$, mit $\cos\alpha$ zugleich negativ werden, wenn

sin α

$\sin\alpha$ positiv bleibt. Weil ferner $\cos\alpha$ positiv bleibt aber $\sin\alpha$ mit α negativ wird, (229 §.) so folgt nach eben den Regeln, daß $\tan g\,\alpha$, $\cot\alpha$, mit α negativ werden, aber $\sec\alpha$ positiv bleibe.

Hat man die trigonometrische Linie eines Winkels für den Halbmesser $= 1$, so hat man die eben dem Winkel zugehörige Linie desselben Nahmens für einen andern Halbmesser, wenn man die Zahl, welche sie für den Halbmesser 1 ausdrückt, mit der Länge des neuen Halbmessers multiplicirt. Es sey s für den Halbmesser 1, S für den Halbmesser r der Sinus eines Winkels, so ist $1 : r = s : S$, (231 §.) also $S = r \cdot s$. Eigentlich sind die Zahlen, welche man für den Halbmesser $= 1$ findet, die Exponenten der Verhältnisse der Trigonometrischen Linien zum Halbmesser oder dem ganzen Sinus: deswegen kommt es bey Berechnung der trigonometrischen Linien vornemlich nur darauf an, diese Zahlen zu finden. Aber eben um deswillen müssen auch die abgekürzten Ausdrücke $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, u. s. w. welche die trigonometrischen Linien bezeichnen, allemahl für den Halbmesser $= 1$ verstanden werden, da sie denn Zahlen, eigentlich keine Linien, bezeichnen.

233 §.

179 **Der Sinus und Cosinus zweener Winkel**
180 $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$ **sind gegeben, man soll**
Fig. **den Sinus und Cosinus der Summe oder der Differenz beyder Winkel finden.**

Aufl. Es sey in der 179 Fig. BE auf AC und DG auf BC senkrecht, so ist $BE = \sin\alpha$, $CE = \cos\alpha$, $DG = \sin\beta$, und $CG = \cos\beta$. Ferner sey DF auf AC senkrecht, und schneide CB in L, so ist $ACD = \alpha + \beta$, $DF = \sin(\alpha+\beta)$, $CF = \cos(\alpha+\beta)$.

Ueber-

Ueberdem sey GH auf AC und GK auf DF senkrecht, so ist DF oder $\sin(\alpha+\beta) = FK + DK$, und CF oder $\cos(\alpha+\beta) = CH - HF$: demnach muß man FK, DK, CH, und HF suchen. Es ist $BC : BE = GC : GH$, (184 §.) oder $1 : \sin\alpha = \cos\beta : GH$, also $GH = \sin\alpha \cos\beta = FK$. Ferner sind die Winkel bey L in den rechtwinklichten Dreyecken, DGL, FCL gleich, also ist der Winkel $ACB = GDK$, und das Dreyeck $BCE \backsim$ Dr. DKG; mithin $BC : CE = DG : DK$, oder $1 : \cos\alpha = \sin\beta : DK$, und $DK = \cos\alpha \sin\beta$: demnach hat man

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Ferner ist $BC : CE = CG : CH$, oder $1 : \cos\alpha = \cos\beta : CH$, also $CH = \cos\alpha\cos\beta$; überdem $BC : BE = DG : GK$, oder $1 : \sin\alpha = \sin\beta : GK$, also $GK = \sin\alpha\sin\beta = HF$, und das giebt

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

In der 180 Fig. sey ebenfalls $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$, also $ACD = \alpha - \beta$, und alles übrige wie zuvor; so ist nun $DF = \sin(\alpha-\beta) = FK - KD$, und $CF = \cos(\alpha-\beta) = CH + HF$. Ferner bleibt $GH = FK = \sin\alpha\cos\beta$, BC und DF schneiden einander wiederum in L, die Dreyecke DKG und BCE bleiben einander ähnlich, also bleibt $KD = \cos\alpha\sin\beta$, $CH = \cos\alpha\cos\beta$ und $HF = GK = \sin\alpha\sin\beta$: mithin ist

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Diese letzten beyden Formuln fliessen schon aus den beyden ersten, wenn man in denselben den Winkel β negativ annimmt: denn alsdenn ist $\sin\beta$ negativ und $\cos\beta$ bleibt positiv. (229 §.)

234 §.

234 §.

Der Sinus und Cosinus eines Winkels α **sind gegeben: man soll den Sinus und Cosinus des doppelten Winkels** 2α **finden.**

Aufl. Es war $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ und $\cos(\alpha+\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$: Demnach setze man $\alpha = \beta$, und man erhält

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

so wie $\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2.$

235 §.

Der Sinus oder Cosinus eines Winkels γ **ist gegeben: man soll den Sinus und Cosinus seiner Hälfte finden.**

Aufl. Man setze $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$, also $2\alpha = \gamma$, so verwandelt sich der zuletzt gefundene allgemeine Ausdruck des $\cos 2\alpha$ in den folgenden $\cos\gamma = \cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2$, oder $\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + \cos\gamma = \cos\frac{1}{2}\gamma^2$. Ferner ist $\cos\frac{1}{2}\gamma^2 = 1 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2$, also $\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + \cos\gamma = 1 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2$, und $2\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + \cos\gamma = 1$; mithin ferner $2\sin\frac{1}{2}\gamma^2 = 1 - \cos\gamma$, und

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}}.$$

Setzt man weiter $1 - \cos\frac{1}{2}\gamma^2$ statt $\sin\frac{1}{2}\gamma^2$, so verwandelt sich der Ausdruck $\sin\frac{1}{2}\gamma^2 + \cos\gamma = \cos\frac{1}{2}\gamma^2$ in folgenden $1 - \cos\frac{1}{2}\gamma^2 + \cos\gamma = \cos\frac{1}{2}\gamma^2$, und daraus folgt $1 + \cos\gamma = 2\cos\frac{1}{2}\gamma^2$, also erhält man auch

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}}.$$

236 §.

Die Summe der Sinus zweener Winkel verhält sich zur Differenz ihrer Sinus, wie die

die Tangente der halben Summe dieser Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

Beweis. Es war im 233 §.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

Also ist

I.) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

II.) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

(Man vergleiche den 29 §. der Rechenkunst.)

Nun sey $\alpha+\beta=\eta$, $\alpha-\beta=\vartheta$, so ist $\alpha=\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)$ und $\beta=\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$, (151 §. Rech.) also

I.) $\sin\eta + \sin\vartheta = 2\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\cos\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$

II.) $\sin\eta - \sin\vartheta = 2\cos\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$,

und man erhält

$$\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\sin\eta-\sin\vartheta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)} \times \frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}$$

$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)} : \frac{\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}$; mithin vermöge des 232 §. $\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\sin\eta-\sin\vartheta} = \frac{\tang\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)}{\tang\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}$

Die Formuln im 233 §.

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ geben auch

$\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$.

Man setze $\alpha=\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)$ und $\beta=\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$ wie vorhin, so findet man

III.) $\cos\vartheta + \cos\eta = 2\cos\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\cos\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$

IV.) $\cos\vartheta - \cos\eta = 2\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$

237 §.

1.) Die Sehne *BL* eines Kreisbogens *BAL* ist der doppelte Sinus, 2*BD*, der Hälfte *AB* des Bogens BAL, also ist zugleich die Sehne eines Bogens gefunden, wenn der Sinus seiner Hälfte gefunden ist. Bezeichnet der Ausdruck chord. γ die dem Bogen $BAL = \gamma$ zugehörige Sehne; so ist chord. $\gamma = 2 \sin \frac{1}{2}\gamma$, und diese Sehne gehört alsdenn mit dem Halbmesser $= 1$ zusammen.

Man weis, daß die Sehnen ähnlicher Bogen, oder solcher, die zu gleichen Winkeln am Mittelpunct gehören, sich wie die damit zusammen gehörigen Halbmesser verhalten; (199 §.) wenn also die Sehne c eines in Graden gegebenen Bogens für den Halbmesser $= 1$ bekannt ist, so findet man die Sehne C eines zum Halbmesser r gehörigen Bogens von eben sovielen Graden $= r.c$: denn es ist $1 : r = c : C$. Die Berechnung der Sehnen des Kreises hängt also von der Berechnung der Sinus, und umgekehrt die Berechnung der Sinus von der Berechnung der Sehnen ab: denn es ist $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}$ chord γ, oder $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ chord. 2α, wenn $\frac{1}{2}\gamma = \alpha$ gesetzt wird.

2.) **Die Sehne der Ergänzung eines Bogens zu 180° ist der doppelte Cosinus seiner Hälfte:** denn es ist chord. $(180° - \gamma) = 2 \sin \frac{1}{2}(180° - \gamma) = 2 \sin (90° - \frac{1}{2}\gamma)$, oder chord. $(180° - \gamma) = 2 \cos \frac{1}{2}\gamma$; also auch chord. $(180° - 2\alpha) = 2 \cos \alpha$, wenn man $\frac{1}{2}\gamma = \alpha$ setzt. Diesemnach ist $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ chord. $(180° - 2\alpha)$, **oder der Cosinus eines Bogens ist die halbe Sehne der Ergänzung des doppelten Bogens zu 180°.**

3.) Wenn BM auf den Durchmesser LG senkrecht fällt; so ist $LM = \sin v.\ \gamma$, und $BL =$ chord γ: ferner ist der Bogen $BFG = 180° - \gamma$, also $BG =$ chord $(180° - \gamma)$ und $GM = \sin v.\ (180° - \gamma)$. Ueberdem hat man $LG : LB = LB : LM$, (186 §.) also

also $2 : \text{chord}\,\gamma = \text{chord}\,\gamma : \sin v.\gamma$, und das giebt

$$\text{chord}\,\gamma = \sqrt{2 \sin v.\gamma}$$

oder $\text{chord}\,\gamma = \sqrt{2(1 - \cos\gamma)}$.

Aus demselben Grunde ist $GL : BG = BG : GM$, also

$$\text{chord}\,(180° - \gamma) = \sqrt{2 \sin v.(180° - \gamma)};$$

oder $\text{chord}\,(180° - \gamma) = \sqrt{2(1 + \cos\gamma)}$.

Setzt man in diesen Formuln $\text{chord}\,\gamma = 2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma$ und $\text{chord}\,(180° - \gamma) = 2 \sin \tfrac{1}{2}(180 - \gamma) = 2 \cos \tfrac{1}{2}\gamma$, so hat man $\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\dfrac{(1 - \cos\gamma)}{2}}$, und $\cos \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\gamma}{2}}$ wie im 235 §.

4.) Weil $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1^2$, (232 §.) so hat man auch $\tfrac{1}{4}(\text{chord}\,2\alpha)^2 + \tfrac{1}{4}(\text{chord}\,(180° - 2\alpha))^2 = 1$, oder wenn man $2\alpha = \gamma$ setzt,

$$(\text{chord}\,\gamma)^2 + \text{chord}\,(180° - \gamma)^2 = 4.$$

In diesen allgemeinen Ausdrücken ist der Halbmesser $= 1$, also der Durchmesser $= 2$, und 4 ist das Quadrat des Durchmessers. In der 177 Fig. ist $BL = \text{chord}\,\gamma$, $BG = \text{chord}\,(180° - \gamma)$, wenn der Bogen $BAL = \gamma$ gesetzt wird; also erhellet der Satz auch aus dem Pythagorischen Lehrsatz, weil der Winkel LBG im Halbkreise ein rechter Winkel ist.

238 §.

Aus der Sehne eines Bogens die Sehne des doppelten Bogens zu finden.

Aufl. Es ist $\sin\alpha = 2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha$, (234 §.) und $\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\text{chord}\,2\alpha$, $\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\text{chord}\,\alpha$, $\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\text{chord}\,(180° - \alpha)$: (237 §.) also $\text{chord}\,2\alpha = \text{chord}\,\alpha - \text{chord}\,(180° - \alpha)$. Ferner ist $\text{chord}\,(180° - \alpha) = \sqrt{(4 - \text{chord}\,\alpha^2)}$, also erhält man

$$\text{chord}\,2\alpha = \text{chord}\,\alpha \cdot \sqrt{(4 - \text{chord}\,\alpha^2)}.$$

239 §.

Aus der Sehne eines Bogens die Sehne seiner Hälfte zu finden.

Aufl. Es ist $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ (235 §.) $= \sqrt{\frac{2-2\cos\alpha}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(2-2\cos\alpha)}$, also $2\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{(2-2\cos\alpha)}$. Ferner ist $2\sin\frac{1}{2}\alpha = \text{chord}\,\alpha$ und $2\cos\alpha = \text{chord}(180° - 2\alpha)$, (237 §.) also $\text{chord}\,\alpha = \sqrt{(2 - \text{chord}(180° - 2\alpha))}$, oder $\text{chord}\,\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{(2 - \text{chord}(180° - \gamma))}$, wenn $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$ ist. Man suche also zuerst

$$\text{chord}(180° - \gamma) = \sqrt{(4 - (\text{chord}\,\gamma)^2)},$$

so hat man hiernächst

$$\text{chord}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{(2 - \text{chord}(180° - \gamma))}.$$

240 §.

181 Fig. Aus dem gegebenen Halbmesser die Seite des regulären Zehnecks im Kreise zu finden.

Aufl. Es sey AB die gesuchte Seite des Zehnecks, diese sey bis D verlängert, BD = BC gemacht, und CD gezogen: so ist ABC = 2BCD. (62 §.) Ferner ist ACB = $\frac{2}{5}$R, ABC = R $-\frac{1}{5}$R (157 §.) = $\frac{4}{5}$R, folglich ABC = 2ACB, und ACB = BCD = ADC. Demnach sind die Dreyecke ADC, ACB einander ähnlich, (182 §.) und es ist AD : AC = AC : AB. Wenn nun AC = CB = BD = 1, und AB = x gesetzt wird, so hat man $1 + x : 1 = 1 : x$, also $x^2 + x = 1^2$, folglich auch $x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, und $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$, (190 §. Rech.) mithin $x = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$, oder $x = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$.

Für jeden andern Halbmesser CA = r ist also die Seite des regulären Zehnecks $= r\left(\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}\right)$ (237 §.)

(237 §.) $= \sqrt{\frac{5}{4}r^2} - \frac{1}{2}r$, und daraus fließt folgende Regel. Man setze CF auf dem Durchmesser AK senkrecht, und nehme CG $= \frac{1}{2}r$, so wird GF $= \sqrt{(r^2 + \frac{1}{4}r^2)} = \sqrt{\frac{5}{4}r^2}$. Ferner nehme man GH $=$ GF, so ist CH $=$ GH $-$ GC $= \sqrt{\frac{5}{4}r^2} - \frac{1}{2}r$ die gesuchte Seite des Zehnecks.

Wenn r der Halbmesser, und l die Seite des Zehnecks ist; so giebt die Proportion $r + l : r = r : l$ auch folgende $l : r = r - l : l$ (164 §.) oder $r : l = l : r - l$, also CK : CH $=$ CH : HK, weil CK $= r$, CH $= l$ ist. Demnach ist das Rechteck zwischen dem Halbmesser und dem Ueberschuß desselben über die Seite des Zehnecks dem Quadrat der Seite des Zehnecks gleich: die Linie CK ist in H, und eben so AD in B so getheilt, daß das Quadrat des grössern Theils dem Rechteck zwischen der ganzen Linie und dem kleinern Theil gleich ist. Dies drückten die alten Geometer so aus: die Linie sey media et extrema ratione getheilt. Andre Constructionen dieser Aufgabe findet man beym Euclides Lib. II. Prop. XI. M. s. auch Hausen Elem. Math. Geom. Prop. LIII.

241 §.

Die Seite des regulären Fünfecks im Kreise zu finden, wenn der Halbmesser gegeben ist.

Aufl. Für den Halbmesser $= 1$ ist die Seite des Zehnecks $= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, (240 §.) und wenn $\alpha = \frac{2}{5}$R gesetzt wird, so ist diese Seite des Zehnecks $=$ chord α, die Seite des Fünfecks aber $=$ chord 2α. Es war aber chord $2\alpha =$ chord $\alpha \,.\, \sqrt{(4 - \text{chord } \alpha^2)}$; (238 §.)

(238 §.) wenn also nun die Seite des Fünfecks $= L$, die Seite des Zehnecks $= l$ gesetzt wird, so ist $L = l.\sqrt{(4 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}.)}$ Weiter hat man $(\sqrt{5}-1)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1$ (190 §. R.) $= 6 - 2\sqrt{5}$, und $4 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} = \frac{16-(6-2\sqrt{5})}{4} = \frac{10+2\sqrt{5}}{4}$ (29 §. R.) $= \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, mithin $L = l\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Statt l setze man noch $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$, so findet man $L = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{4}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}$ (114 §. R.) $= \sqrt{\frac{4+5-2\sqrt{5}+1}{4}}$, oder $L = \sqrt{\left(1 + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\right)}$, (190 §. Rech.) also auch $L = \sqrt{(1+l^2)}$.

Für jeden andern Halbmesser r ist die Seite des Fünfecks $= r\sqrt{(1+l^2)} = \sqrt{(r^2+r^2l^2)}$ und $r.l$ ist die Seite des Zehnecks für eben den Halbmesser. Diesemnach ist das Quadrat der Seite des Fünfecks der Summe der Quadrate der Seite des Zehnecks und des Halbmessers gleich; und wenn man nach den Regeln des 240 §. die Seite des Zehnecks $=$ CH (181 Fig.) gefunden hat, so ist HF die Seite des Fünfecks. Den geometrischen Beweis hat Euclides Lib. XIII. Prop. X. und Hausen Elem. Math. Geom. Prop. LVII.

Der

Der XIII. Abschnitt.

Nähere Anleitung zur Berechnung und dem Gebrauch der trigonometrischen Tafeln.

242 §.

Setzt man in den Formuln des 235 §.

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}}$$

und $$\cos \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}}$$ den Winkel oder Bogen $\gamma = 90^\circ$, so hat man $\sin 45^\circ = \sin \tfrac{1}{2} R = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und $\cos 45^\circ = \cos \tfrac{1}{2} R = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Auf diese Art kann man fortfahren, und solchergestalt die Sinus und Cosinus aller Bogen finden, die durch fortgesetzte Halbirung des Quadranten entstehen: diese Sinus und Cosinus gehören alsdenn zugleich zu denjenigen Winkeln, die man durch fortgesetzte Halbirung des rechten Winkels findet. Nach angestellter Rechnung findet man folgende Zahlen.

$\cos \tfrac{1}{2} R = 0{,}7071067811865475$
$\cos \tfrac{1}{4} R = 0{,}9238795325112867$
$\cos \tfrac{1}{8} R = 0{,}9807852804032304$
$\cos \tfrac{1}{16} R = 0{,}9951847266721968$
$\cos \tfrac{1}{32} R = 0{,}99879545620527239$
$\cos \tfrac{1}{64} R = 0{,}9996988186962042 2$
$\cos \tfrac{1}{128} R = 0{,}99992470183914454$
$\cos \tfrac{1}{256} R = 0{,}99998117528260114$
$\cos \tfrac{1}{512} R = 0{,}99999529380957617$
$\cos \tfrac{1}{1024} R = 0{,}99999882345170109$

$\text{cos}\frac{1}{2048}R = 0{,}9999997058628822\,19$
$\text{cos}\frac{1}{4096}R = 0{,}9999999264657178\,51$
$\text{cos}\frac{1}{8192}R = 0{,}9999999816164292\,9380$

Für die drey letzten Winkel ergeben sich zugleich folgende drey Sinus

$\sin\frac{1}{2048}R = 0{,}000766990322$
$\sin\frac{1}{4096}R = 0{,}0003834951875$
$\sin\frac{1}{8192}R = 0{,}0001917475973$

Der letzte Winkel ist schon kleiner, als ein Winkel von einer Minute, weil 60 mahl 90 oder 5400 Minuten einen rechten Winkel ausmachen: dagegen aber übertrift der nächst letzte Winkel noch eine Minute.

243 §.

Den Ueberschuß der Tangente über den Sinus eines Kreisbogens zu finden.

Aufl. Es ist $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (232 §.) und $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ (234 §.) also $\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$, mithin $\tan\alpha = \frac{2\sin\alpha^2}{\sin 2\alpha}$. Demnach erhält man

$$\tan\alpha - \sin\alpha = \frac{2\sin\alpha^2 - \sin 2\alpha\sin\alpha}{\sin 2\alpha},$$ oder

$$\tan\alpha - \sin\alpha = \frac{(2\sin\alpha - \sin 2\alpha)\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{(\text{chord}\,2\alpha - \sin 2\alpha)\sin\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Weil allemahl $\sin 2\alpha > \sin\alpha$ ist, so lange $\alpha < 45°$ bleibt, so ist bey kleinen Winkeln $\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$ ein eigentlicher Bruch, also $\tan\alpha - \sin\alpha < \text{chord}\,2\alpha$

— sin

$- \sin 2\alpha$. Ferner ist $\alpha < \tan\alpha$, also $\alpha - \sin\alpha < \tan\alpha - \sin\alpha$, mithin auch $\alpha - \sin\alpha < \mathrm{chord}\, 2\alpha - \sin 2\alpha$, oder: **der Unterscheid eines Kreisbogens von seinem Sinus beträgt nicht soviel, als der Unterscheid zwischen der Sehne und dem Sinus des doppelt so grossen Bogens.**

244 §.

Man setze $\alpha = \frac{1}{8192} Q$, wenn Q einen Quadranten für den Halbmesser $= 1$ bezeichnet; so ist

$$\begin{array}{ll} \sin\alpha & = 0{,}0001917475973 \\ \mathrm{chord}\, 2\alpha & = 0{,}0003834951946 \\ \sin 2\alpha & = 0{,}0003834951875 \quad (242\ §.) \\ \hline \end{array}$$

$$\mathrm{chord}\, 2\alpha - \sin 2\alpha = 0{,}0000000000071$$

Ueberdem sey $\beta = \frac{1}{4096} Q$, so ist

$$\begin{array}{ll} \sin\beta & = 0{,}0003834951946 \\ \mathrm{chord}\, 2\beta & = 0{,}0007669903892 \\ \sin 2\beta & = 0{,}000766990322 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathrm{chord}\, 2\beta - \sin 2\beta = 0{,}000000000067$$

Demnach ist jeder von den beyden Bogen $\frac{1}{8192} Q$, und $\frac{1}{4096} Q$, noch nicht um ein zehntausend Milliontheilchen des Halbmessers von seinem Sinus verschieden: also kann auch jeder von den dazwischen fallenden Bogen von seinem Sinus nicht um ein solches Theilchen des Halbmessers verschieden seyn. Folglich ist

$$\frac{1}{8192} Q = 0{,}0001917476$$
$$\frac{1}{4096} Q = 0{,}0003834952$$

Weil nun die Bogen sich wie die Winkel am Mittelpunct verhalten; so läßt sich hieraus der Bogen von 1 oder $\frac{1}{5400} Q$ bis auf die Zehnte Decimalstelle finden, wenn man ansetzt.

$$\frac{1}{8192} : \frac{1}{4096} = 0{,}0001917476 : \text{viert. Zahl}$$

und man erhält

$$\frac{1}{5400}Q = \text{Arc. } 1' = 0,0002908881.$$

Weil ferner die Zahl, welche den Sinus dieses Bogens ausdrückt, mit derjenigen, die den Bogen angiebt, bis auf die zehnte Decimalstelle überein kommen muß; (242 §.) so ist auch

$$\sin 1' = 0,0002908881.$$

Aus dem $\sin 1'$ findet man $\cos 1'$ vermittelst der Formul $\cos\alpha = \sqrt{(1 - \sin\alpha^2)}$, alsdenn ferner $\sin 2'$ und $\cos 2'$ vermittelst der Formuln des 234 §, und wiederum $\sin 3' = \sin(2+1)'$, $\cos 3' = \cos(2+1)'$ vermittelst der Formuln des 233 §. So kann man fortfahren und die folgenden Sinus und Cosinus von Minute zu Minute berechnen, da dann alle Sinus und Cosinus gefunden sind, wenn man bis zu 45° gekommen ist.

Es würde indessen nur erfordert werden, daß man dies Verfahren bis zu 30° fortsetze: denn die übrigen Sinus und Cosinus bis zu 45° können alsdenn durch eine leichte Addition und Subtraction gefunden werden. Es ist nemlich

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

und $\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta)$;

also $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

Ueberdem ist

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$$

und $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$;

also $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ (29 §. Rech.)

Man setze $\alpha = 30°$, so ist $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, und man erhält

$$\cos\beta = \sin(30°+\beta) + \sin(30°-\beta)$$
$$\sin\beta = \cos(30°-\beta) - \cos(30°+\beta).$$

also

also $\sin(30^\circ + \beta) = \cos\beta - \sin(30^\circ - \beta)$
und $\cos(30^\circ + \beta) = \cos(30^\circ - \beta) - \sin\beta$.

Man setze demnach $\beta = 1'$, $\beta = 2'$, u. s. f. bis 15°, so können nach diesen Formuln die Sinus und Cosinus bis zu 45° gefunden werden, wenn man sie für Winkel, die kleiner als 30° sind, schon gefunden hat. Aus dem bekannten Sinus und Cosinus eines jeden Winkels können die übrigen dazu gehörigen trigonometrischen Linien nach Anleitung 232 §. gefunden werden: also läßt es sich nun vollständig übersehen, wie es möglich gewesen sey, diese Linien für alle Winkel von Minute zu Minute zu berechnen, und in Tafeln zu bringen, die den so genannten **Canon der Sinus, Tangenten Secanten und Quersinus** ausmachen. Der gröste Theil der schon einigemahl (198. 212. 229 §. Rech.) angeführten Mathematischen Tafeln bestehet aus den Tafeln für diese trigonometrischen Linien, und den Logarithmen Tafeln für die Zahlen, so wie sie in natürlicher Ordnung folgen: weswegen sie auch unter dem Titel der **trigonometrischen Tafeln** am bekanntesten sind. Auch die Logarithmen sind anfangs vornemlich zum Gebrauch bey trigonometrischen Rechnungen erfunden worden: eben um deßwillen hat man für die Zahlen, welche die trigonometrischen Linien ausdrücken, die Logarithmen berechnet, und mit in die **trigonometrischen Tafeln** gebracht, von deren Einrichtung man noch folgendes wissen muß.

245 §.

Die Zahlen, welche in den Tafeln für die trigonometrischen Linien angegeben sind, kommen zwar sonst mit denjenigen überein, welche den bisher vorgetragetragenen Gründen gemäß gefunden werden: nur ist der Halbmesser in den Tafeln nicht = 1 gesetzt. Bey Berechnung der Logarithmen hat man den Halbmesser, oder den Sinus totus = 10 000 000 000 angenommen, solchergestalt wird der Logarithme des Halbmessers oder des ganzen Sinus = 10. Sind alsdenn die trigonometrischen Linien für den Halbmesser = 1 bis auf die zehnte Decimalstelle berechnet, so hat man sie zugleich für den Halbmesser der Tafeln in ganzen Zahlen richtig, wenn man mit 10 000 000 000 multiplicirt. Es bleiben übrigens dieselben Ziffern, wie für den Halbmesser = 1, nur wird das Zeichen der Einer um zehn Classen weiter gegen die Rechte gerückt. Weil nun im vorhergehenden festgesetzt ist, daß die abgekürzten Ausdrücke $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan g\alpha$, $\cot\alpha$, u. s. f. allemahl für den Halbmesser = 1 verstanden werden müssen; (232 §.) so kann man in den allgemeinen Formuln des 232sten und der folgenden §§. die aus den trigonometrischen Tafeln genommenen Zahlen nur alsdenn brauchen, wenn man sie vorher mit 10 000 000 000 dividirt oder welches einerley ist, die Stelle der Einer um zehn Classen von der rechten gegen die Linke gerückt hat. So müste man sich verhalten, wenn in allen Tafeln die Zahlen, welche die trigonometrischen Linien für den Halbmesser = 10 000 000 000 ausdrücken, vollständig mitgetheilt wären: allein man hat in den kleinern Tafeln die drey letzten Ziffern weggelassen, mithin für den Halbmesser = 1 diese Zahlen nur bis auf die siebende Decimalstelle mitgetheilt. Sie sind also als solche anzusehen, die zum Halbmesser = 10 000 000 gehören, und um sie auf den Halbmesser = 1 zu bringen, muß man

die

die Stelle der Einer um sieben Classen von der Rechten gegen die Linke rücken.

246 §.

Im folgenden soll nun allemahl der abgekürzte Ausdruck sin. tot. den Halbmesser der Tafeln anzeigen, statt dessen auch noch kürzer in den hieher gehörigen allgemeinen Formuln der Buchstab R gebraucht werden kann. Ferner sollen abgekürzte Ausdrücke dieser Art: sin. tab. α, cos. tab. α, tang. tab. α, cot. tab. α, u. s. f. die trigonometrischen Linien für den Halbmesser der Tafeln bezeichnen. Dies vorausgesetzt hat man

$$\sin\alpha = \frac{\text{sin. tab.}\,\alpha}{\text{sin. tot.}} = \frac{\text{cos. tab.}\,\alpha}{R},$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cos. tab.}\,\alpha}{\text{sin. tot.}} = \frac{\text{cos. tab.}\,\alpha}{R},$$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\text{tang. tab.}\,\alpha}{\text{sin. tot.}} = \frac{\text{tang. tab.}\,\alpha}{R},$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{cot. tab.}\,\alpha}{\text{sin. tot.}} = \frac{\text{cot. tab.}\,\alpha}{R},$$

und eben so für die übrigen vier trigonometrischen Linien

$$\sec\alpha = \frac{\text{sec. tab.}\,\alpha}{\text{sin. tot.}} = \frac{\text{sec. tab.}\,\alpha}{R},$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{\text{cosec. tab.}\,\alpha}{\text{sin. tot.}} = \frac{\text{cosec. tab.}\,\alpha}{R},$$

$$\text{sin. v.}\,\alpha = \frac{\text{sin. v. tab.}\,\alpha}{\text{sin. tot.}} = \frac{\text{sin. v. tab.}\,\alpha}{R},$$

$$\text{cosin. v.}\,\alpha = \frac{\text{cosin. v. tab.}\,\alpha}{\text{sin. tot.}} = \frac{\text{cosin. v. tab.}\,\alpha}{R}.$$

Will

Will man nun in den Formuln des 232sten und der folgenden §§. für die trigonometrischen Linien die Zahlen aus den Tafeln brauchen, so muß man zuförderst die Formuln darnach gehörig verändern, und die folgenden Beyspiele werden dies weiter erläutern.

Es ist tang $\alpha = \frac{\text{sin } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ für den Halbmesser $= 1$, also tang. tab. $\alpha = \frac{\text{R sin. } \alpha}{\text{cos } \alpha}$; überdem ist $\frac{\text{sin. } \alpha}{\text{cos. } \alpha}$ $= \frac{\text{sin. tab. } \alpha}{\text{cos. tab. } \alpha}$ (231 §.) also tang. tab. $\alpha = \frac{\text{R sin. tab. } \alpha}{\text{cos. tab. } \alpha}$.

Ferner ist sec $\alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$, also sec. tab. $\alpha =$ $\frac{\text{R}}{\text{cos } \alpha}$, und weil cos $\alpha = \frac{\text{cos. tab. } \alpha}{\text{R}}$, so wird sec. tab. $\alpha = \frac{\text{R}^2}{\text{cos. tab. } \alpha}$.

Aus dem 237 §. hat man chord $\alpha = \sqrt{2 \text{ sin v. } \alpha}$ $= 2 \text{ sin } \tfrac{1}{2}\alpha$, also sin v. $\alpha = 2 (\text{sin } \tfrac{1}{2}\alpha)^2$. Das giebt sin v. tab. $\alpha = 2\text{R } (\text{sin } \tfrac{1}{2}\alpha)^2$, und $(\text{sin } \tfrac{1}{2}\alpha) =$ $\frac{(\text{sin. tab. } \frac{1}{2}\alpha)^2}{\text{R}^2}$, also sin v. tab. $\alpha = \frac{2 (\text{sin. tab. } \frac{1}{2}\alpha)^2}{\text{R}}$.

247 §.

Die Logarithmen der Sinus für den Halbmesser der Tafeln können aus den Logarithmen für die natürlichen Zahlen, wenn diese schon berechnet sind, so gefunden werden, wie der 237 §. der Rechenkunst dazu Anleitung giebt. Wollte man den Logarithmen des Sinus eines Winkels von 1 Minute suchen, so hat

hat man sin. tab. 1 = 2908881 (244 §.), und man findet

$$l2909 = 4637437$$
$$l2908 = \underline{4635944}$$
$$\text{Differenz } 1493$$

Ferner $1 : 0{,}881 = 1493$: viert. Zahl

$$\begin{array}{r} 0{,}881 \\ \hline 11944 \\ 1194 \\ 15 \\ \hline 1315 \\ l2908 = 4635944 \\ \hline \end{array}$$

also $l$sin. tab. $1' = 6{,}4637259$

Um aus dem Logarithmen des Sinus eines Winkels den Logarithmen der Tangente, der Secante und des Quersinus für eben den Winkel zu finden, dienen die am Ende des vor. §. angezeigten allgemeinen Formuln, wenn man die aus der Rechenkunst bekannten Eigenschaften der Logarithmen damit verbindet. Es ist nemlich

$$\text{log. tang. tab.}\,\alpha = lR + l\,\text{sin. tab.}\,\alpha - l\,\text{cos. tab.}\,\alpha$$
$$\text{log. sec. tab.}\,\alpha = 2lR - l\,\text{cos. tab.}\,\alpha$$
$$\text{log. sin v. tab.}\,\alpha = l2 + 2\,l\,\text{sin. tab.}\,\tfrac{1}{2}\alpha - lR,$$

und $lR = 10$, weil $R = 10\,000\,000\,000$ gesetzt ist. Nach den kleinern Tafeln wäre zwar der Halbmesser $= 10\,000\,000$ also $lR = 7$: allein man hat $lR = 10$ beybehalten, obgleich von den Logarithmen ebenfalls nur die ersten sieben Decimalstellen mitgetheilt sind.

248 §.

Wer solche Tafeln zur Hand und sich ihre Einrichtung bekannt gemacht hat, der findet darin leicht

sowol

sowol jede trigonometrische Linie als auch ihren Logarithmen, wenn der dazu gehörige Winkel in Graden und Minuten gegeben ist. Auch umgekehrt, wenn der Sinus die Tangente oder der Logarithme des Sinus, der Tangente, eines Winkels gegeben ist, und man will den Winkel haben, welcher der trigonometrischen Linie zugehört; so sucht man die gegebene trigonometrische Linie unter den Zahlen auf, welche die trigonometrischen Linien desselben Nahmens in den Tafeln angeben, oder statt dessen den gegebenen Logarithmen unter den Logarithmen der Linien desselben Nahmens: da dann die gegebene Zahl oder der Logarithme sich gewiß darin finden muß, wofern der dazu gehörige Winkel nur Grade und Minuten, keine Secunden und kleinere Theile fasset.

Hat man die trigonometrischen Linien oder ihre Logarithmen für solche Winkel nöthig, die ausser Graden und Minuten auch noch in Secunden angegeben sind; so hilft man sich beym Gebrauch der kleinen Tafeln, so lange nicht die gröste Schärfe nöthig ist, mit einer ähnlichen Voraussetzung, wie die im 236 §. Rech. angenommene war. Man nimmt an, daß die Differenzen nicht allein der trigonometrischen Linien sondern auch ihrer Logarithmen, den Differenzen der dazu gehörigen Winkel proportional sind, obgleich diese Voraussetzung bey kleinen Winkeln ziemlich unrichtig ist. Was die Sinus betrift, so vermindert sich der Fehler desto mehr, je grösser die Winkel werden, bey den Tangenten aber nimmt er wieder zu, wenn die Winkel dem rechten Winkel nahe kommen. Wie man sich verhalten müsse, wenn

schärfere

schärfere Rechnungen nöthig sind, dazu wird die allgemeine analytische Trigonometrie Anleitung geben.

Wenn umgekehrt eine gegebene trigonometrische Linie, oder ihr Logarithme, in den Tafeln nicht anzutreffen ist, so wird man doch unter den Zahlen, welche die Linien desselben Nahmens, oder auch die dazu gehörigen Logarithmen angeben, ein Paar solche finden, die zu Winkeln gehören, welche nur um eine Minute unterschieden sind, und wovon die eine grösser, die andre kleiner, als die gegebene Zahl oder der gegebene Logarithme ist. Bey der nächst kleinern Zahl, oder auch bey dem nächst kleinern Logarithmen, findet man alsdenn die Grade und Minuten des dazu gehörigen Winkels, und um die Secunden wenigstens beynahe zu finden, rechnet man ebenfalls nach der vorhin angeführten Voraussetzung. Die folgenden Beyspiele werden das in beyden Fällen nöthige Verfahren zulänglich erläutern.

Der gegebene Winkel fasse $53^\circ\ 28'\ 54''$; so ist

$$\begin{array}{rl} l\sin 53^\circ\ 29' = & 9{,}9050852 \\ l\sin 53^\circ\ 28' = & \underline{9{,}9049916} \\ \text{Differenz} & 936 \end{array}$$

und man findet $60'' : 54'' = 936 : 842$

$$\begin{array}{rl} \text{zum } l\sin 53^\circ\ 28' = & 9{,}9049916 \\ \text{addirt man die vierte Zahl} & \underline{842} \\ \text{so ist } l\sin 53^\circ\ 28'\ 54'' = & 9{,}9050758 \end{array}$$

Ferner ist

$$\begin{array}{rl} l\text{tang } 53^\circ\ 29' = & 10{,}1305269 \\ l\text{tang } 53^\circ\ 28' = & \underline{10{,}1302628} \end{array}$$

also $60'' : 54'' = 2641 : 2377$ Differ. 2641 zur vierten Zahl wird addirt

$$l\tan 53^\circ\ 28' = \underline{10{,}1302628}$$

$$\text{so ist } l\tan 53^\circ\ 28'\ 54'' = 10{,}1305005$$

Weiter findet man

$$l\cos 53^\circ\ 28' = 9{,}7747288$$

$$l\cos 53^\circ\ 29' = \underline{9{,}7745583}$$

$$\text{Differenz } 1705;$$

$$\text{aber } 60'' : 54'' = 1705 : 1534,$$

$$\text{und vom } l\cos 53^\circ\ 28' = 9{,}7747288$$

$$\text{subtrahirt } \underline{1534}$$

$$\text{giebt } l\cos 53^\circ\ 28'\ 54'' = 9{,}7745754$$

Sucht man den Logarithmen der Cotangente eben des Winkels; so ist

$$l\cot 53^\circ\ 28' = 9{,}8697372$$

$$l\cot 53^\circ\ 29' = \underline{9{,}8694731}$$

$$\text{Differenz } 2641$$

$$\text{und überdem } 60'' : 54'' = 2641 : 2376.$$

$$\text{Wird nun von } l\cot 53^\circ\ 28' = 9{,}8697372$$

$$\text{subtrahirt } \underline{2376}$$

$$\text{so erhält man } l\cot 53^\circ\ 28'\ 54'' = 9{,}8694996$$

Man hat vollständige Ausgaben der Trigonometrischen Tafeln, worin die Differenzen der nach einander folgenden Logarithmen mit aufgeführt sind, damit man der Mühe überhoben seyn könne, selbige in jedem besondern Fall zu suchen. Eben diese Differenzen hat man in dem umgekehrten Fall nöthig, wenn der Logarithme einer trigonometrischen Linie gegeben ist, und man den damit zusammen gehörigen Winkel sucht.

Es sey $l\sin\alpha = 9{,}9426938$, man sucht α; so ist

$$l\sin 61^\circ\ 13' = 9{,}9427255$$
$$l\sin 61^\circ\ 12' = \underline{9{,}9426561}$$
$$\text{Differenz } 694$$

Ferner ist

$$l\sin\alpha = 9{,}9426938$$
$$l\sin 61^\circ\ 12' = \underline{9{,}9426561}$$
$$\text{Differenz } 377$$

und die Regel Detri giebt

$$694 : 377 = 60'' : 32'',$$

also ist $\alpha = 61^\circ\ 12'\ 32''$.

Ferner sey $l\tan g\,\alpha = 10{,}1948376$, so ist

$$l\tan g\ 57^\circ\ 27' = 10{,}1949767$$
$$l\tan g\ 57^\circ\ 26' = \underline{10{,}1946981}$$
$$\text{Differenz } 2786;$$

Ferner ist

$$l\tan g\,\alpha = 10{,}1948376$$
$$l\tan g\ 57^\circ\ 26' = \underline{10{,}1946981}$$
$$\text{Differenz } 1395$$

und nach der Regel Detri

$$2786 : 1385 = 60'' : 30''$$

also $\alpha = 57^\circ\ 26'\ 30''$.

Wäre $l.\cos\alpha = 9{,}8807832$, so hätte man

$$l\cos 40^\circ\ 32' = 9{,}8808296$$
$$l\cos 40^\circ\ 33' = \underline{9{,}8807215}$$
$$\text{Differenz } 1081;$$

ferner $l\cos\alpha = 9{,}8807832$

$$l\cos 40^\circ\ 33' = \underline{9{,}8807215}$$
$$\text{Differenz } 617,$$

und $1081 : 617 = 60'' : 34''$,

also $\alpha = 40^\circ\ 33' - 34'' = 40^\circ\ 32'\ 26''$.

Noch sey $l\cot\alpha = 9{,}7766384$, so ist

$$l\cot 59^\circ\ 7' = 9{,}7767685$$
$$l\cot 59^\circ\ 8' = 9{,}7764816$$

Differenz 2869;

ferner

$$l\cot\alpha = 9{,}7766384$$
$$l\cot 59^\circ\ 8' = 9{,}7764816$$

Differenz 1568,

und $2869 : 1568 = 60'' : 32''$;

also $\alpha = 59^\circ\ 8' - 32'' = 59^\circ\ 7'\ 28''$.

249 §.

Mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln die Sehne eines Bogens zu finden, wenn der Halbmesser mit der Zahl der Grade des Bogens gegeben ist.

Auch umgekehrt: Aus der gegebenen Sehne und dem Halbmesser eines Bogens die Zahl seiner Grade zu finden.

Aufl. Wenn C die Sehne, und r den Halbmesser und α die Zahl der Grade des Bogens bezeichnet; so ist $C = 2r \sin\frac{1}{2}\alpha$. (237 §.) Ferner sey der Halbmesser der Tafeln = R, so ist $C = \frac{2r \text{ sin. tab. } \frac{1}{2}\alpha}{R}$; also umgekehrt sin. tab. $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{r} \cdot C$, und man kann $\frac{1}{2}\alpha$, also auch α vermittelst der Tafeln finden.

In den kleinen Tafeln ist R = 10000000, und man kann bey Auflösung beyder Aufgaben auch die Logarithmen brauchen. Nimmt man $r = \frac{1}{2}$R, so wird C = sin. tab. $\frac{1}{2}\alpha$.

250 §.

Vermittelst dieser Aufgaben kann für jedes reguläre Polygon im Kreise die Polygonseite gefunden werden, wenn der Halbmesser und die Zahl der Seiten des Polygons gegeben ist; denn die Polygonseite ist die Sehne des zum Centriwinkel gehörigen Bogens.

Wäre der Halbmesser r des im Polygon beschriebenen Kreises gegeben, so wäre die Seite des äussern Polygons die doppelte Tangente des halben Centriwinkels. Ist also die Seite des äussern Polygons $= L$, der Centriwinkel $= \alpha$, so hat man $L = \frac{2r \text{ tang. tab. } \frac{1}{2}\alpha}{R}$.

Wäre dagegen die Seite C des innern Polygons schon gegeben, so würde man die Seite des äussern dem vorigen ähnlichen Polygons vermittelst der Proportion finden $\sin \frac{1}{2}\alpha : \text{tang } \frac{1}{2}\alpha = C : L$. Es ist aber auch $\text{tang } \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha}$, also verwandelt sich jene Proportion in folgende $1 : \frac{1}{\cos \frac{1}{2}\alpha} = C : L$, oder $1 : \sec \frac{1}{2}\alpha = C : L$, und man erhält $L = \frac{C}{\cos \frac{1}{2}\alpha} = C \sec \frac{1}{2}\alpha$. Wenn also Π den Umfang des äussern und π den Umfang des innern ähnlichen Polygons bezeichnet, so ist auch $\Pi = \frac{\pi}{\cos \frac{1}{2}\alpha} = \pi \,.\, \sec \frac{1}{2}\alpha$; also $\Pi = \frac{R \,.\, \pi}{\cos. \text{ tab. } \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\pi \,.\, \sec. \text{ tab. } \frac{1}{2}\alpha}{R}$.

Eben die allgemeinen Ausdrücke dienen, aus der Sehne und der Zahl der Grade eines Bogens seinen

Halbmesser zu finden: denn es ist $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\text{sin. tab.} \frac{1}{2}\alpha}$. C, und auf eben die Art wird zur Seite des innern Polygons, wenn α der Centriwinkel ist, der Halbmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises gefunden.

Wäre die Seite L des äussern Polygons gegeben, wozu der Centriwinkel α gehört; so fände man den Halbmesser des darin beschriebenen Kreises $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\text{tang. tab.} \frac{1}{2}\alpha} \cdot L.$

Für das gleichseitige Dreyeck und den Halbmesser $r = 1$ ist $C = 2 \sin 60°$ und $\sin 60° = \cos 30° = \sqrt{(1 - (\sin 30°)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $C = \sqrt{3}$, und $\pi = 3\sqrt{3}$. Ferner ist $L = \frac{C}{\cos 60°} = \frac{C}{\sin 30°} = 2C, = 2\sqrt{3}$, und $\Pi = 6\sqrt{3}$.

Für das Sechseck ist $C = 1$, $\pi = 6$; ferner $L = \frac{C}{\cos 30°} = \frac{C}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1,15470047$, und $\Pi = 6,92820262$.

Für das Siebeneck ist $\alpha = 51° \; 25' \; 43''$, $\frac{1}{2}\alpha = 25° \; 42' \; 51\frac{1}{2}''$, und man findet

$$\begin{array}{rl} \sin 25° \; 43' = & 4339212 \\ \sin 25° \; 42' = & \underline{4336591} \\ \text{Differenz} & 2621; \end{array}$$

ferner $60'' : 51\frac{1}{2}'' = 2621 : 2249,6$,

$$\begin{array}{rl} \text{und zum } \sin 52° \; 42' = & 4336591 \\ \text{addirt die vierte Zahl} & \underline{2249,6} \\ \text{giebt } \sin 25° \; 42' \; 51\frac{1}{2}'' = & 4338840,6 \\ & \underline{\times 2} \\ \text{also } C = & 0,8677681 \end{array}$$

Eben

Eben so findet man

$$\begin{aligned} \text{tang } 25^\circ\ 43' &= 4816258 \\ \text{tang } 25^\circ\ 42' &= 4812675 \\ \hline \text{Differenz } & 3583 \end{aligned}$$

und $60'' : 51\frac{1}{2}'' = 3583 : 3075{,}4.$

Wird hiernächst

zur $\text{tang } 25^\circ\ 42' = 4812675$

addirt $3075{,}4$

so ist $\text{tang } 25^\circ\ 42'\ 51\frac{1}{2}'' = 4815750{,}4$

$\times 2$

also $L = 0{,}9631501.$

Der XIV. Abschnitt.

Von der Kreismessung.

251 §.

Wenn die Länge der Peripherie p des Kreises für den Halbmesser $= 1$ bekannt wäre, so wäre sie für jeden andern Halbmesser r bekannt, dem die Peripherie P zugehört: denn es ist $1 : p = r : P$. (195 §.) Demnach bedarf es dessen nur, daß man ein für allemahl die Zahl $p = \frac{P}{r}$ suche, um hiernächst für jeden Halbmesser r die Peripherie $P = p \cdot r$ zu finden. Im Kreise, dessen Halbmesser $= 1$ ist, sey ein reguläres Polygon beschrieben, und die Peripherie desselben sey $= \pi$; um eben den Kreis sey ein dem vorigen ähnliches reguläres Polygon beschrieben, und dessen Peripherie $= \Pi$: wenn nun beyde um die Differenz ε verschieden sind, und δ ein gegebener Theil des Halbmessers ist, so klein man will; so kann man den Polygonen soviele Seiten geben, daß $\varepsilon < \delta$ wird.

Es sey nemlich λ eine Linie, welche die Peripherie des Kreises übertrift, und r der Halbmesser; so ist $\frac{r}{\lambda}\delta$ ebenfalls eine gegebene Linie, und $\left(r + \frac{r}{\lambda}\delta\right) : r = 1 + \frac{\delta}{\lambda}$ eine Zahl, welche die Einheit übertrift. Diese Zahl sey $= \mu$, so können die Polygone soviele Seitenlinien erhalten, daß $\frac{\Pi}{\pi}$, oder $\frac{\varepsilon}{\Pi - \varepsilon} < \mu$ wird. (192 §.) Alsdenn ist $1 + \frac{\Pi}{\Pi - \varepsilon} < 1 + \frac{\delta}{\lambda}$; mithin $\varepsilon < \frac{\Pi - \varepsilon}{\lambda}\delta$, oder $\varepsilon < \frac{\pi}{\lambda}\delta$, und $\frac{\pi}{\lambda}\delta < \delta$, weil $\pi < \lambda$, also ist nun $\varepsilon < \delta$.

Der Unterschied der Kreislinie selbst von der Peripherie sowohl des innern als auch des äussern Polygons ist kleiner als ε; also kann man in oder um den Kreis ein reguläres Polygon von so vielen Seiten beschreiben, daß die Peripherie desselben von der Peripherie des Kreises weniger als um einen gegebenen noch so kleinen Theil des Halbmessers verschieden ist.

252 §.

Die Peripherie p des Kreises für den Halbmesser $= 1$ so genau zu finden, daß der Fehler kleiner sey, als jeder gegebene Theil des Halbmessers.

Aufl.

Aufl. Es sey der gegebene Theil des Halbmessers $= \delta$, den Halbmesser selbst $= 1$ gesetzt. Wenn man nun die Schlüsse des 192 §. mit dieser Aufgabe verbindet; so erhellet, daß in der 109 Figur CG die Secante des Bogens HF für den Halbmesser CH sey: demnach sey $CH = CF = 1$, so hat man 109 Fig.

$\mu = \frac{CG}{CF} = \sec HF$. Was aber im 192 §. die gegebene Zahl μ war, dafür nehme man hier die Zahl $1 + \frac{\delta}{\lambda}$ an, (251 §.) und setze $\sec HF = 1 + \frac{\delta}{\lambda}$; so erhellet, daß die Peripherie eines regulären Polygons im Kreise von der Peripherie des Kreises selbst nicht um den gegebenen Theil δ des Halbmessers verschieden sey, wenn der Bogen HA, wozu der halbe Centriwinkel HCA gehört, kleiner ist, als ein Bogen, dessen Secante $= 1 + \frac{\delta}{\lambda}$ ist, wofern nur λ grösser als die Peripherie des Kreises angenommen wird. Weil nun die Peripherie des um den Kreis beschriebenen Sechsecks noch nicht völlig $= 7$ ist; (250 §.) so kann man $\lambda = 7$ annehmen. Demnach suche man einen Bogen, wozu die Secante $1 + \frac{1}{7}\delta$, oder der Cosinus $\frac{1}{1 + \frac{1}{7}\delta}$ gehört; man suche ferner einen solchen aliquoten Theil der Peripherie des Kreises, der kleiner ist, als Arc. cos. $\frac{1}{1 + \frac{1}{7}\delta}$; so ist die Sehne eines doppelt so grossen Bogens die Seitenlinie eines innern Polygons, dessen Peripherie von der Kreislinie selbst nicht um den Theil δ des Halbmessers verschieden ist. Wenn demnach die so gefunfundene Seitenlinie mit der Zahl der Seiten multiplicirt, oder sovielmahl genommen wird, als der dazu gehörige Bogen in der Peripherie des Kreises enthalten ist; so hat man die Peripherie des Kreises so genau, als man sie verlangte. Sucht man hiernächst auch die Peripherie des ähnlichen äussern Polygons; so werden die Zahlen, welche die Peripherien beyder Polygone ausdrücken, in den höhern Ziffern mit einander übereinkommen, und in eben sovielen Ziffern ist zugleich die Peripherie p des Kreises gefunden.

Es sey also $\delta = 0{,}0000001$, so ist $1 + \frac{1}{7}\delta = 1{,}0000000142\frac{6}{7}$, also $\frac{1}{1+\frac{1}{7}\delta} = 0{,}999999985725$, und wenn man die im 242 §. gefundenen Cosinus vergleicht, so ergiebt sich, daß der letzte daselbst angezeigte Cosinus noch etwas kleiner, als hier die Zahl $\frac{1}{1+\frac{1}{7}\delta}$ sey. Wenn also q den Quadranten für den Halbmesser = 1 bezeichnet, so ist $\frac{1}{8192} q$ noch grösser, als Arc. cos $\frac{1}{1+\frac{1}{7}\delta}$. Setzt man aber die Rechnung des 242 §. fort, so findet man cos $\frac{1}{16384} q = 0{,}99999999040410731289$, also ist $\frac{1}{16384} q <$ Arc. cos. $\frac{1}{1+\frac{1}{7}\delta}$, und man findet weiter

$\sin \frac{1}{16384} q = 0{,}0000958737990959$
$\text{chord} \frac{1}{8192} q = 0{,}0001917475981918$
Diese Sehne mult. mit 8192

3834951963836
17257283837262
1917475981918
15339807855344

giebt $\frac{1}{4} \pi = 1{,}5707963243872256$
also $\frac{1}{2} \pi = 3{,}1415926487744512$
und $\pi = 6{,}2831852975489024$

Der zu diesem Polygon gehörige halbe Centriwinkel ist $\frac{1}{16384}$R, und aus dem vorhin angegebenen Cosinus desselben findet man seine Secante $= 1{,}0000000000459589277907$, also $\Pi = 6{,}2831853578416737$, und $\Pi - \pi = \varepsilon = 0{,}0000000060292771 3$, auch $\frac{1}{2} \Pi = 3{,}14159267892083 68$. Diesemnach ist $\frac{1}{2} p > 3{,}14159264$, und $\frac{1}{2} p < 3{,}14159267$, und wenn man $\frac{1}{2} p = 3{,}1415926$ annimmt, so beträgt der Fehler kein Zehnmilliontheilchen des Halbmessers.

253 §.

Aus dem gegebenen ganzen oder halben Durchmesser eines Kreises die Peripherie, oder umgekehrt aus der Peripherie den Durchmesser zu finden.

Auch wenn von der Länge eines Kreisbogens, der Zahl seiner Grade, und der Länge des dazu gehörigen Halbmessers zwey Stücke gegeben sind, das dritte zu finden.

Aufl.

Aufl. 1.) Gehört die Peripherie P zum Halbmesser r, und Durchmesser D, so ist $p = \frac{P}{r}$, und $\frac{P}{2r} = \frac{P}{D} = 3,1415926 = \frac{1}{2}p$. Man setze von nun an allemahl die Zahl $\frac{1}{2}p = \pi$ für den Halbmesser $= 1$; so hat man $P = 2\pi r = \pi . D$: und weil die Zahl 2π so genau gefunden werden kann, daß der Fehler kleiner als jeder gegebene noch so kleine Bruch ist; so kann zugleich die **Peripherie** P **für jeden Halbmesser** r **oder den Durchmesser** D so genau gefunden werden, daß der Fehler kleiner ist, als jeder gegebene Theil des Halmessers.

2.) **Wenn ein Kreisbogen in Graden und Theilen eines Grades gegeben ist,** so ist sein Verhältniß zur ganzen Peripherie gegeben, weil diese allemahl 360° fasset. Um also die Länge des Bogens in demjenigen Maaß zu finden worin die **Länge des Halbmessers** gegeben ist, kann man zuerst in eben dem Maaß die Länge der Peripherie suchen, wenn diese nicht schon bekannt ist; so giebt hiernächst ein leichter Ansatz nach der Regel Detri die Länge des Bogens. Ist diese $= A$, die Zahl seiner Grade $= n$, die Länge der Peripherie P, so hat man $360° : n° = P : A$, also $A = \frac{n°}{360°} . P$. Wenn der Bogen in Graden und Minuten, oder in Graden Minuten und Secunden ausgedrückt wäre; so verstünde sich von selbst, daß man statt der beyden ersten Zahlen der Proportion allemahl solche brauchen müßte, die einerley Nahmen haben: mithin müssen entweder die Minuten und Secunden

durch

durch Brüche von Graden ausgedrückt, oder die Grade auf Minuten und Secuuden gebracht werden.

3.) Weil $P = 2\pi r$ ist, so hat man auch $A = \frac{n^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$, und es ist $\frac{n^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi$ die Länge eines ähnlichen Bogens, der eben soviele Grade und Theile eines Grades fasset, für den Halbmesser $= 1$. Wenn also die Länge eines jeden in Graden Minuten und Secunden ausgedruckten Bogens für den Halbmesser $= 1$ schon bekannt ist; so hat man die Länge eines ähnlichen Bogens für den Halbmesser r, wenn man mit diesem Halbmesser multiplicirt. Daraus wird der Nutzen einer solchen Tafel begreiflich, welche die Länge aller Kreisbogen für den Halbmesser $= 1$ von 1° bis 360°, und hiernächst von $1'$ bis $60'$, ferner auch von $1''$ bis $60''$ enthält, so wie sie Herr Lambert in den Zusätzen zu den Trigonometrischen Tabellen, auf der 146 S. Tab. XXIII. mitgetheilt hat. Die Länge dieser Bogen ist daselbst bis auf die 27ste Decimalstelle richtig angegeben, und man nimmt davon soviele Ziffern, als die jedesmahlige Schärfe erfordert, die man bey der Rechnung zu erreichen sucht. Will man die Länge eines Bogens von $56^\circ\ 24'\ 17''$ für den Halbmesser 1 bis auf Zehnmilliontheilchen richtig haben, so rechnet man aus der Tafel zusammen

$$\begin{array}{lll}
\text{Arc. } 56^\circ & = & 0{,}97738438 \\
\text{Arc. } 20' & = & 0{,}00581776 \\
\text{Arc. } 4' & = & 0{,}00116355 \\
\text{Arc. } 10'' & = & 0{,}00004848 \\
\text{Arc. } 7'' & = & 0{,}00003393 \\
\hline
\text{Arc. } 56^\circ\ 24'\ 17'' & = & 0{,}98444810
\end{array}$$

Wer

Wer die Tafeln nicht zur Hand hat, der kann schon mit Vortheil folgende Zahlen brauchen.

Arc. $180^\circ = 3{,}141592\,653589\,793238\,462643\,383 = \pi$,
Arc. $1^\circ = 0{,}017453\,292519\,943295\,769236\,908$,
Arc. $1' = 0{,}000290\,888208\,665721\,596153\,948$,
Arc. $1'' = 0{,}000004\,848136\,811095\,359935\,899$.

4.) Wird umgekehrt gefragt, wie groß der halbe oder ganze Durchmesser sey, wenn die Länge der Peripherie, oder auch die Länge eines Bogens, und im letzten Fall zugleich die Zahl der Grade dieses Bogens, gegeben ist; so hat man $D = 2r = \frac{1}{\pi} P$, $r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} P$, und

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318309\,886183\,790671\,537767\,926.$$

Ferner ist $P = \frac{360^\circ}{n^\circ} A$, (251 §.) also auch $D = 2r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{360^\circ}{n^\circ} \cdot A$, und man findet den gesuchten Durchmesser oder Halbmesser $r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{180^\circ}{n^\circ} \cdot A$ desto schärfer, je mehr Decimaltheile der Zahl $\frac{1}{\pi}$ in Rechnung gebracht werden.

5.) Wäre die Lage A eines Bogens mit dem dazu gehörigen ganzen oder halben Durchmesser $D = 2r$ gegeben, so hätte man die Zahl seiner Grade vermittelst der Formul $n^\circ = \frac{1}{\pi} \cdot 360^\circ \cdot \frac{A}{D}$, oder $n^\circ = \frac{1}{\pi} \cdot 180^\circ \cdot \frac{A}{r}$.

6.) Soll

6.) Soll der Bogen seinem Halbmesser gleich seyn, so hat man $\frac{A}{r} = 1$, also $n = \frac{1}{\pi} \cdot 180° =$ $57,2957795130 8° = 57° \, 17' \, 44'' \, 48''' \, 22^{IV} \, 29^{V} \, 21^{VI} \ldots$. Soviele Grade und Theile eines Grades fasset jeder Bogen der seinem Halbmesser gleich ist. Weil nemlich die Halbmesser gegen ihre Peripherien einerley Verhältniß haben, (195 §.) so haben die eben so grossen Bogen gegen ihre Peripherien gleichfalls einerley Verhältniß, und fassen eben deßwegen gleichviele Grade und Theile eines Grades. (126 §.)

254 §.

Wenn man den Winkel, wozu ein Bogen gehört, der seinem Halbmesser gleich ist, für die Einheit annimmt, so ist die Zahl, welche die Grösse eines jeden andern Winkels ausdrückt, einerley mit derjenigen, welche die Länge eines mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen den Schenkeln eben des Winkels beschriebenen Bogens angiebt.

Beweis. Es sey η der Winkel, wozu der seinem Halbmesser gleiche Bogen gehört, so ist der Bogen $= 1$, den man mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen seinen Schenkeln beschreibt. Mit eben dem Halbmesser $= 1$ sey zwischen den Schenkeln eines andern Winkels φ ein Bogen beschrieben, und dieser Bogen sey $= \alpha$ so ist $\eta : \varphi = 1 : \alpha$, mithin $\varphi = \alpha$, wenn $\eta = 1$ gesetzt wird, oder η ist in φ sovielmahl enthalten, als die Zahl angiebt, welche die Länge des Bogens α ausdrückt.

Wird zwischen den Schenkeln eben des Winkels ein Bogen A mit dem Halbmesser r beschrieben,

ben, so ist $A = \alpha . r$, (253 §. n. 3.) und $\alpha = \frac{A}{r}$. Weil nun bey der angenommenen Voraussetzung α und φ durch einerley Zahl ausgedrückt werden, so ist auch $\varphi = \frac{A}{r}$. Verlangt man die Zahl der Grade dieses Winkels, so muß man mit der Zahl $\frac{1}{\pi} . 180$ multipliciren. (253 §. n. 5.)

Der Halbmesser r ist $= \frac{A}{\varphi}$, welches mit dem vor. §. n. 4 überein kommt, denn φ drückt auch die Länge des mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen Bogens aus, der dem Bogen A ähnlich ist. Aus der Zahl n der Grade des Bogens A hat man $\varphi = \frac{n}{180} . \pi$ (253 §. n. 3) also kommt der Ausdruck $\varphi = \frac{A}{r}$ mit dem 253 §. n. 4 überein.

255 §.

Die Fläche eines Kreises auch eines Kreisausschnitts oder Abschnitts im Quadratmaaß so genau zu finden, daß der Fehler kleiner ist, als ein gegebener noch so kleiner Theil vom Quadrat des Halbmessers, wenn der Halbmesser, und in den beyden letzten Fällen zugleich die Zahl der Grade des zum Ausschnitt oder Abschnitt gehörigen Bogens gegeben ist.

Aufl. 1.) Es sey die Kreisfläche = C, der Durchmesser D, die Peripherie P, so findet man $C = \frac{1}{4} D . P$, denn dies ist der Inhalt eines der Kreisfläche gleichen Dreyecks. (213 §.) Wird also $D = 2r$ gesetzt, wenn r den Halbmesser bezeichnet,

net, so ist $C = \frac{1}{2} r . P$, und $P = 2\pi r$, also $C = \pi rr = \frac{1}{4} \pi D^2$. Weil man nun π in Decimaltheilen so genau finden kann, daß der Fehler kleiner wird, als jeder gegebene noch so kleine Bruch, so findet man auch C im Quadratmaaß, das mit dem Längenmaaß, worin der Halbmesser ausgedrückt ist, einerley Nahmen hat, so genau, daß der Fehler kleiner werden kann, als jeder gegebene Theil vom Quadrat des Halbmessers.

Die allgemeine Formul $C = \pi rr$ giebt die Proportion $C : rr = \pi : 1$, demnach verhält sich die Kreisfläche zum Quadrat des Halbmessers wie die Peripherie zum Durchmesser. Ferner ist auch $C : D^2 = \frac{1}{4} \pi : 1$, also die Kreisfläche zum Quadrat des Durchmessers, wie ein Quadrant der Peripherie zum Durchmesser, und man hat

$$\frac{1}{4} \pi = 0{,}785398 \quad 163397 \ldots$$

Ist die Kreisfläche gegeben, und man soll den halben oder ganzen Durchmesser, oder auch die Peripherie finden, so hat man $r = \sqrt{\frac{1}{\pi} C}$, und $D = 2\sqrt{\frac{1}{\pi} C}$, also $P = 2\pi r = 2\sqrt{\pi . C}$.

2.) Wenn der Bogen $AEB = A$, der Halbmesser $= r$ der Ausschnitt $ACBE = S$ gesetzt wird, so findet man $S = \frac{1}{2} A . r$, denn dies ist der Inhalt eines dem Ausschnitt gleichen Dreyecks. (214 §.) Ferner sey n die Zahl der Grade des Bogens A, so ist $A = \frac{n^\circ}{360^\circ} . 2\pi r$, (253 §.) mithin $S = \frac{n^\circ}{360^\circ} . \pi rr$. 130 Fig.

3.) Im gradlinichten Dreyeck ABC sey AM auf BC senkrecht, so ist AM der Sinus des Centriwinkels ACB für den Halbmesser r, also AM $= r\ \text{sin}.n^\circ = \frac{r\ \text{sin tab}\ n^\circ}{\text{sin tot}}$, mithin des Dreyecks ABC Fläche $= \frac{1}{2}r.\text{AM}$ (222 §.) $= \frac{\frac{1}{2}r^2\ \text{sin tab}\ n^\circ}{\text{sin tot}}$. Der Inhalt des Abschnitts ADBE sey $= s$, so ist $s =$ S − Dreyeck ABC, folglich $s = \left(\frac{n^\circ.\pi}{180^\circ} - \frac{\text{sin. tab.}\ n^\circ}{\text{sin. tot.}}\right).\frac{1}{2}rr.$

256 §.

Eine jede ebene Figur kann arithmetisch quadrirt werden, wenn man ihren Flächeninhalt im Quadratmaaß finden kann. (227 §.) Demnach kann nicht allein die ganze Kreisfläche, sondern auch jeder Ausschnitt und Abschnitt des Kreises, quadrirt werden, und die Richtigkeit dieser Quadratur hängt von der Richtigkeit der Zahlen ab, welche das Verhältniß $\pi : 1$ ausdrücken: daher heissen die Bemühungen, dieses Verhältniß zu bestimmen, auch Quadraturen des Kreises. Sonst braucht man auch die Redensart: eine krumme Linie werde rectificirt, wenn man eine grade Linie von eben der Länge findet; demnach kann man vermittelst des Verhältnisses $\pi : 1$ den Kreis so genau rectificiren, als die Schärfe erfordert, die man in jedem besondern Fall zu erreichen sucht. Die Quadratur des Kreises hängt solchergestalt von seiner Rectification ab, und man hat beyde überflüssig genau. Aus dem Inhalt des Kreises $= \pi r^2$ (254 §.) hat man die Seite des eben so grossen Quadrats $= r\sqrt{\pi}$, und man findet $\sqrt{\pi} = 1,772453\ 85075 \ldots$

Es wäre freylich angenehm, wenn sich das Verhältniß der Kreislinie zu ihrem Durchmesser durch ein Paar bestimmte Zahlen völlig genau ausdrücken liesse: wie aber, wenn man entscheidend beweisen könnte, daß dies Verhältniß irrational sey? Wäre es denn ein Mangel der Theorie, wenn dies Verhältniß nur durch Näherung angegeben werden könnte? Soviel ist schon von den Mathematikverständigen, unter andern vom Hn. Lambert im zweyten Theil seiner Beyträge zum Gebrauch der Mathematik, 140 u. f. S. bewiesen, wenn auch das Verhältniß $\pi : 1$ rational wäre, daß es doch nicht anders als im grossen zum rechnen sehr unbequemen Zahlen würde angegeben werden können. Die Zahlen

$$3245215400329 45 : 1019514486099146$$

drücken das Verhältniß $\pi : 1$ bis auf die 25ste Decimalstelle richtig aus, und wenn es ein Paar rationale Zahlen giebt, die es genau ausdrücken, so müssen sie grösser als jene angezeigten seyn. Gesetzt also, man hätte auch dergleichen Zahlen, so würde man sich doch wohl kein Bedenken machen, in Fällen, wo keine so grosse Schärfe nöthig ist, mit kleinern Zahlen zu rechnen, die es nach der jedesmahligen Absicht scharf genug, obgleich nicht so genau, wie jene ausdrückten. In ungemein vielen Fällen muß man sich bey der vollkommensten Theorie mit ähnlichen Näherungen begnügen. Oft läßt sich nicht einmahl der Umfang eines gradlinichten Dreyecks, in andern Fällen die Fläche des Dreyecks nicht durch eine rationalzahl ausdrücken. Wenn im

Dreyeck jede Seite = 1 ist, so ist der Umfang = 3, die Fläche = $\frac{1}{2}$ sin 60° und sin 60° = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. (250 §.): ist dagegen im rechtwinklichten Dreyeck jede Perpendiculärseite = 1, so ist die Fläche = $\frac{1}{2}$, und der Umfang = $2 + \sqrt{2}$. So wenig die Ausübung verliert, wenn man sich in diesen und andern ähnlichen Fällen mit Näherungen begnügt, so wenig verliert sie auch bey der nur durch Näherung bekannten Quadratur des Kreises.

Beym Hn. Lambert a. a. O. 156. 157. S. findet man 27 verschiedene in Rationalzahlen ausgedrückte Verhältnisse, wovon jedes folgende dem Verhältniß $\pi : 1$ näher als das vorhergehende ist, und unter denselben ist das vorhin angezeigte das letzte. Archimedes hat für das Verhältniß $\pi : 1$ die Gränzen $22 : 7$ und $21\frac{70}{71} : 7$, oder $3\frac{1}{7} : 1$, und $3\frac{10}{71} : 1$, angegeben. (Dimensio circuli P. III. Theor. III.) Bey Vergleichung der Kreisfläche mit dem Quadrat des Durchmessers behält Archimedes die Zahlen $22 : 7 = \frac{22}{7} : 1$, welches $C : D^2 = \frac{1}{4}\pi : 1 = \frac{11}{14} : 1 = 11 : 14$ giebt: (a. a. O. Prop. II. Theor. II.) es ist aber das Verhältniß $\frac{22}{7} : 1$ nur bis auf Hunderttheilchen richtig, denn man findet $\frac{22}{7} = 3{,}1428$ . . . . Genauer ist die Zahl $\frac{333}{106} = 3{,}14150$ . . . . aber etwas zu klein: noch genauer die Zahl $\frac{355}{113} = 3{,}1415929$ . . . . aber etwas zu groß. Die Zahlen 355 : 113 hat Metius angegeben, und weil sie bis auf Milliontheilchen des Halbmessers richtig sind, so kann man sie in allen Fällen brauchen, wenn mehr Schärfe nicht erforderlich ist. Der wegen seiner überaus mühsamen Rechnungen über die Quadratur des

Kreises

Kreises berühmte **Ludolph von Ceulen** aus Hildesheim hat die Zahl
$\pi = 3{,}141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383879\ 50$
gefunden: so ist diese Zahl in *Ludolvi a Ceulen* de circulo et adscriptis libro e vernaculo lat. vers. a Willebrordo Snellio, Lugd. Bat. 1619, Lib. III. p. 92. Zetemate 2. angegeben. Dies Werk ist eigentlich eine Sammlung mehrerer kleiner Schriften eben des Verfassers mit fortlaufenden Seitenzahlen: am Ende allererst ist das Buch de circulo et adscriptis mit von neuen anfangenden Seitenzahlen beygefügt, und in demselben ist pag. 32 die Rechnung nur bis auf 20 Decimalstellen fortgesetzt. Nach der Zeit aber hat eben dieser **Ludolph von Ceulen** mit Hülfe seines Schülers **Peter Cornelii**, die Rechnung weiter fortgeführt: auch hat man von eben dem Verfasser noch ein andres hieher gehöriges von Willebrordo Snellio übersetztes Werk: Fundamenta Arithmetica et Geometrica cum eorundem vsu in variis problematibus Geometricis, Lugd. Bat 1615. Um eben die Zeit hat sich **Philipp Lansberg** mit den cyclometrischen Rechnungen beschäftiget, und man findet in dessen Operibus Middelburgi Zelandiae 1663. pag. 89 seine hieher gehörigen Aufsätze unter dem Titel Cyclometriae Norae Libri duo: die Zahl π ist daselbst in 27 Decimalstellen mit der vorhin angezeigten übereinstimmung gefunden, und die Methode, nach welcher sowohl **Ludolph von Ceulen**, als auch **Landsberg** ihre Rechnungen angestellet haben, beruhet mit der oben im 250 §. vorgetragenen auf einerley Gründen. Nach der Zeit sind vermittelst der höhern Rechenkunst weit vortheilhaftere Methoden erfunden worden, nach welchen

man diese Zahl π mit weniger Mühe und Zeitverlust schärfer als man sie jemahls nöthig hat, finden kann, und vermittelst dieser Methoden hat man gefunden, daß die von Ludolph von Ceulen herausgebrachte Zahl völlig richtig sey, weswegen sie zur vollkommen sichern Prüfung aller vermeinten ältern und neuern Quadraturen des Kreises dient.

Der XV. Abschnitt.

Trigonometrische Berechnung der Seiten und Winkel gradlinichter Dreyecke.

257 §.

182 Fig. Im rechtwinklichten Dreyeck ABC ist jede Perpendiculärseite AB der Sinus des gegenüberstehenden Winkels ACB und der Cosinus des anliegenden Winkels ABC für den Halbmesser BC, der in diesem Dreyeck die Hypothenuse ist: also hat man $AB = BC \sin ACB = \frac{BC \cdot \text{sin. tab. } ACB}{\text{sin. tot.}}$, oder auch $AB = BC \cos ABC = \frac{BC \cdot \text{cos. tab. } ABC}{\text{sin. tot.}}$. (246 §.)

Ferner ist jede Perpendiculärseite AB die Tangente des gegenüberstehenden Winkels ACB, oder die Cotangente des anliegenden Winkels, für einen Halbmesser, der in diesem Dreyeck der andern Perpendiculärseite AC gleich ist: demnach hat man auch

AB

$$AB = AC \text{ tang } ACB = \frac{AC \,.\, \text{tang. tab. } ACB}{\text{ſin. tot.}},$$

oder $AB = AC \,.\, \text{cot } ABC = \frac{AC \,.\, \text{cot. tab. } ABC}{\text{ſin. tot.}}$.

In eben dem Fall, wenn eine Perpendiculärseite AC für den Halbmeſſer genommen wird, iſt die Hypothenuſe BC die Secante des an dieſer Perpendiculärſeite anliegenden Winkels, oder die Coſecante des eben der Perpendiculärſeite gegen überſtehenden Winkels: alſo $BC = AC \text{ ſec } ACB = \frac{AC \text{ ſec. tab } . ACB}{\text{ſin. tot.}}$, oder auch $BC = AC$ coſec. $ABC = \frac{AC \text{ coſec. tab } . ABC}{\text{ſin. tot.}}$.

258 §.

In jedem Dreyeck *ABC* verhalten ſich die Seiten wie die Sinus der gegenüberſtehenden Winkel, die zu einerley Halbmeſſer gehören. 183 184 Fig.

Beweis. Wenn AB, BC, zwo Seiten eines Dreyecks ſind, ſo laſſe man aus der Spitze B des Winkels, den ſie einſchlieſſen, auf die gegenüber ſtehende Seite AC die ſenkrechte Linie BD fallen, wobey es gleichviel iſt, ob dieſe innerhalb oder auſſerhalb des Dreyecks fällt. Das letztere wird erfolgen, wenn einer von den Winkeln an AC ſtumpf iſt, wie in der 184 Figur der Winkel CA*b* im Dreyeck A*b*C. Nun hat man in dem rechtwinklichten Dreyeck ABD die Seite $BD = \frac{AB \text{ ſin } BAD}{R} = \frac{AB \text{ ſin } BAC}{R}$, und im rechtwinklichten Dreyeck BCD eben die Seite BD $= \frac{BC \text{ ſin } DCB}{R} = \frac{BC \text{ ſin } ACB}{R}$. Wenn alſo R einerley Halbmesser bezeichnet, so ist AB sin BAC = BC sin ACB, mithin AB : BC = sin ACB : sin BAC. (176 §. R.) oder auch AB : sin ACB = BC : sin BAC. (172 §. Rechenk.)

In dem Fall, welchen das Dreyeck AbC in der 184 Fig. vorstellt, hat man eben so $bd = \frac{Ab\,.\,\sin.\,dAb}{R} = \frac{Ab\,.\,\sin.\,bAC}{R}$, und $bd = \frac{bC\,.\,\sin.\,ACb}{R}$: also A$b$. sin. bAC = bC . sin ACb, woraus die Proportion Ab : bC = sin ACb : sin bAC wie vorhin folgt.

259 §.

183 Fig. **Im Dreyeck *ABC* sind zweene Winkel *A* und *B* nebst einer Seite *AB* in Zahlen gegeben: man soll die übrigen beyden Seiten durch Rechnung finden.**

Aufl. Wenn zweene Winkel A und B bekannt sind, so wird zugleich die Grösse des dritten Winkels dem 118 §. gemäß leicht gefunden: demnach weiß man die Grösse einer Seite AB und des gegenüber stehenden Winkels C. Aber vermöge des 258 §. hat man eine Proportion zwischen der bekannten und gesuchten Seite und den Sinus der diesen beyden Seiten entgegengesetzten Winkel, und diese kann man so ordnen, daß die gesuchte Seite das vierte Glied wird, da sie dann nach der Regel des 175 §. der Rechenkunst gefunden werden kann. Diesemnach ist die vorgelegte Aufgabe aufgelößt, wenn man in folgenden zwoen Proportionen.

sin C : AB = sin A : BC
sin C : AB = sin B : AC

das

das vierte Glied sucht, wobey man statt der Zahlen selbst mit ihren Logarithmen rechnen kann.

Es sey

$$\begin{array}{ll} A = 29^\circ\, 38'\, 24'' & A+B+C = 179^\circ\, 59'\, 60'' \\ \underline{B = 109^\circ\, 54'\, 16''} & \underline{A+B = 139^\circ\, 32'\, 40''} \\ A+B = 139^\circ\, 32'\, 40'' & \text{Also } C = 40^\circ\, 27'\, 20''. \end{array}$$

Ferner sey AB = 78324,3 Ruthen, so ist $\sin 40^\circ\, 27'\, 20'' : 78324{,}3\ \text{R.} = \sin 29^\circ\, 38'\, 24'' : BC$, und die Rechnung giebt

$$\begin{aligned} l\,78324{,}3 &= 4{,}8938965 \\ l \sin 29^\circ\, 28'\, 24'' &= \underline{9{,}6942091} \\ & \ 14{,}5881056 \\ l \sin 40^\circ\, 27'\, 20'' &= \underline{9{,}8121497} \\ l\,BC &= 4{,}7759559 \\ \text{also } AB &= 59697{,}47 \text{ Ruthen.} \end{aligned}$$

Weiter ist

$\sin 40^\circ\, 27'\, 20'' : 78324{,}3\ \text{R.} = \sin 109^\circ\, 54'\, 16'' : AC$, und weil $109^\circ\, 54'\, 16'' = 180^\circ - (70^\circ\, 5'\, 44'')$, so findet man

$$\begin{aligned} l\,78324{,}3 &= 4{,}8938965 \\ l \sin 70^\circ\, 5'\, 44'' &= \underline{9{,}9732488} \\ & \ 14{,}8671453 \\ l \sin 40^\circ\, 27'\, 20'' &= \underline{9{,}8121497} \\ l\,AC &= 5{,}0549956 \\ \text{also } AC &= 113499{,}913 \text{ Ruthen.} \end{aligned}$$

Weil diese Proportionen allgemein sind, so kann man sie allemahl gebrauchen, auch wenn einer von den gegebenen Winkeln = 90° ist, da denn sein Sinus dem ganzen Sinus, und beym Gebrauch der Tafeln sein Logarithme = 10 wird. Wenn A = 90°, 182
und die Hypothenuse nebst den übrigen Winkeln gegeben ist, so hat man Fig.

$$\sin.\text{tot.} : BC = \sin B : AC$$
$$\sin.\text{tot.} : BC = \cos B : AB.$$

Wofern eine Perpendiculärſeite AB gegeben iſt, ſo kann man um die andre zu finden, die Proportion gebrauchen,

$$\sin.\text{tot.} : \text{tang.}\, B = AB : AC, \quad (257\ \S.)$$

und falls man Tafeln zur Hand hat, welche die Secanten mit ihren Logarithmen enthalten, ſo findet man die Hypothenuſe vermittelſt der Proportion

$$\sin.\text{tot.} : \sec.\, B = AB : BC. \quad (257\ \S.)$$

Es ſey AB = 54837,2 Ruthen, und B = 65° 28′ 17″, ſo findet man

$l$tg. 65° 28′	= 10,3406267	lſec. 65° 28′	= 10,3817191
17″	948	17″	784
lAB	= 4,7390753	lAB	= 4,7390753
lAC	= x 5,0797968	lBC	= x 5,1208728
alſo AC	= 120170,2 R.	alſo BC	= 132090,8 R.

260 §.

Aus zwoen gegebenen Seiten *AB*, *BC*, und einem von beyden entgegen geſetzten Winkeln im Dreyeck *ABC* die übrigen Winkel mit der dritten Seite *BC* zu finden.

Aufl. Wenn auſſer den Seiten AB und BC der Winkel A gegeben iſt, ſo hat man zwiſchen dieſen Seiten und den Sinus der entgegengeſetzten Winkel eine Proportion, die man ſo ordnet

$$BC : \sin A = AB : \sin C,$$

daß der Sinus des noch unbekannten Winkels C in das letzte Glied kommt. Der Sinus, welcher ſolchergeſtalt für den Winkel C gefunden wird, gehört für zweyerley Winkel, wofern es nicht etwa der ganze Sinus iſt: (230 §.) alſo könnte C ſowohl ſtumpf als ſpitz ſeyn. Wenn indeſſen A ſtumpf oder ein rechter Winkel ist, so weiß man, daß C nothwendig spitz seyn müsse; und wenn A ein spitzer Winkel überdem aber BC > AB ist, so ist ebenfalls C nothwendig spitz, weil sonst AB > BC seyn müste. Also bleibt die Sache nur zweifelhaft, wenn A spitz und BC < AB ist, welches mit dem 79 §. übereinstimmt. Bey Anwendung dieser Lehren in der Ausübung kennt man gemeiniglich die Grösse der gesuchten Winkel schon einigermaaßen im voraus, weswegen der Zweifel mehrentheils wegfällt.

Hat man C gefunden, so ist auch B bekannt, und man sucht AC vermittelst der Proportion

$$\sin A : BC = \sin B : AC.$$

Es sey AB = 64875,74 Ruthen, BC = 45613,96 Ruhen, A = 26° 19′ 36″, so setzt man an 45613,96 R. : sin 26° 19′ 36″ = 64875,74 R. : sin C, und die Rechnung giebt

$$\begin{aligned} l\sin 26^\circ\, 19'\, 36'' &= 9{,}6468822 \\ l\,64875{,}743 &= \underline{4{,}8120823} \\ & 14{,}4589645 \\ l\,45613{,}96 &= \underline{4{,}6590976} \\ l\sin C &= 9{,}7998669 \\ \text{also entweder } C &= 39^\circ\ \ 6'\, 32'' \\ \text{oder } C &= 140^\circ\, 53'\, 28'', \end{aligned}$$

und im ersten Fall wird

$$B = 114^\circ\, 34'\, 1''$$

im zweyten Fall $\quad B = 12^\circ\, 46'\, 56''$

Hiernach richtet sich also die fernere Rechnung, wenn man AC aus der Proportion sin A : BC = sin B : AC sucht.

Es

183 Fig. Es sey nun $A = 36° 52' 11\frac{2}{3}''$, $AB = 10000$ Ruth. $BC = 6000$ Ruthen, man sucht C, so findet man

$$6000 : \sin 36° 52' 11\tfrac{2}{3}'' = 10000 : \sin C,$$

und es ist $l10000 = 4{,}0000000$

$$l\sin 36° 52' 11\tfrac{2}{3}'' = 9{,}7781513$$

$$13{,}7781513$$

$$l6000 = 3{,}7781513$$

$$l\sin C = 10{,}0000000,$$

also $C = 90°$ und $B = 53° 7' 48\frac{1}{3}''$.

261 §.

183 Fig. In jedem Dreyeck verhält sich die Summe zwoer Seiten $AC + AB$ zu ihrer Differenz $AC - AB$ wie die Tangente der halben Summe der beyden gegenüber stehenden Winkel B und C zur Tangente ihrer halben Differenz.

Beweis. Es ist $AC : AB = \sin B : \sin C$ (258 §.) also $AC + AB : AC - AB = \sin B + \sin C : \sin B - \sin C$, (165 §. n. III.) folglich auch $AC + AB : AC - AB = \mathrm{tg.}\, \frac{1}{2}(B + C) : \mathrm{tg.}\, \frac{1}{2}(B - C)$. (236 §.)

262 §.

182 Fig. Aus zwoen gegebenen Seiten AB, AC, und dem dazwischen liegenden Winkel im Dreyeck ABC die übrigen beyden Winkel B und C nebst der dritten Seite BC zu finden.

Aufl. I.) Wenn $A = 90°$ ist, so schliesse man $AB : AC$ sin. tot : tang B, (257 §.) daraus findet man B, also $C = 90° - B$, und die Hypothenuthenuse BC kann man vermittelst der Proportion $\sin B : AC = \sin tot : BC$ suchen.

Es sey $A = 90°$, $AB = 5419$ Ruth $AC = 7364,7$ Ruth. so ist der Ansatz

$$5419 : 7364,7 = \sin tot : \tan B,$$

und man findet

$$\begin{aligned} l7364,7 + l\sin tot &= 13,8671551 \\ l5419 &= \underline{3,7339192} \\ l\tan B &= 10,1332359 \\ l\tan 53° 39' &= \underline{10,1331709} \end{aligned}$$

$$\text{Differenz} \ldots 650$$

$$2647 : 650 = 60'' : 15'' \text{ beynahe}$$

$$\text{also } B = 53° \ 39' \ 15''$$

$$\text{und } C = 36° \ 20' \ 45''.$$

II.) Wenn A ein schiefer Winkel ist, so sub- 183 Fig.
trahire man ihn von 180°, so findet man die Summe der übrigen beyden Winkel, und daraus ferner ihre halbe Summe. Wenn alsdenn $AC > AB$ ist, so setze man dem 261 §. gemäß ferner an

$$AC + AB : AC - AB = \tan \tfrac{1}{2}(B+C) : \tan \tfrac{1}{2}(B-C),$$

so wird die halbe Differenz der gesuchten Winkel gefunden, und diese zur halben Summe addirt giebt den grössern Winkel, so wie sie von der halben Summe subtrahirt den kleinern Winkel giebt. (151 §. Rech.) Sind solchergestalt die Winkel gefunden, so erhält man die dritte Seite wie im 259 §.

Es sey $A = 29° \ 38' \ 24''$, $AC = 113499,913$ Ruthen, $AB = 78324,3$ Ruthen, so hat man $B + C = 150° \ 21' \ 36''$, und $\tfrac{1}{2}(B + C) = 75° \ 10' \ 48''$.

$AC = 113499{,}931$ R.	$l(AC - AB) = 4{,}5462416$
$AB = 78324{,}3$	$l\,tg.\,\frac{1}{2}(B+C) = 10{,}5774351$
$AC + AB = 191824{,}213$	$15{,}1236767$
$AC - AB = 35175{,}613$ R.	$l(AC + AB) = 5{,}2129035$
	$l\,tg.\,\frac{1}{2}(B-C) = 9{,}8407732$

$$\text{Also } \tfrac{1}{2}(B - C) = 34^\circ\ 43'\ 28''$$
$$B = 109^\circ\ 54'\ 16''$$
$$C = 40^\circ\ 27'\ 20''.$$

Man setze die Winkel $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, die gegenüberstehenden Seiten $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; so hat man $\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$, (258 §.) und $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$ also $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$ (230 §.) $= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$, (233 §.) und $\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \cot\beta$. (232 §.) Das giebt $\frac{c}{b} = \sin\alpha \cot\beta + \cos\alpha$, mithin ferner $c - b\cos\alpha = b\sin\alpha\cot\beta$ und man findet $\cot\beta = \frac{c - b\cos\alpha}{b\sin\alpha}$.

also $\tan\beta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha}$. (232 §.) Dieser allgemeine Ausdruck giebt den Winkel β aus α und den anliegenden Seiten, und man hat eben so $\tan\gamma = \frac{c\sin\alpha}{b - c\,.\cos\alpha}$.

Aus dem 258 §. findet man die dritte Seite $a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$, und aus $\tan\beta$ wird auch $\sin\beta$ vermittelst der allgemeinen Formuln des 232 §. gefunden. Es ist nemlich $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$, und $\sec\beta$

=

$= \frac{1}{\operatorname{cos}\beta}$, also $\sin\beta = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sec\beta}$. Ueberdem ist $\sec\beta = \sqrt{(1+\operatorname{tang}\beta^2)}$, also findet man hier $\sec\beta = \frac{\sqrt{(c^2-2bc.\cos\alpha+b^2)}}{c-b\cos\alpha}$, weil $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ ist, und daraus ferner $\sin\beta = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sec\beta} = \frac{b\sin\alpha}{\sqrt{(b^2-2bc.\cos\alpha+c^2)}}$. Demnach ist die dritte Seite $a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{(b^2-2bc\cos\alpha+c^2)}$.

Wenn $\alpha = 90°$ ist, so hat man $\cos\alpha = 0$ (229 §.) also in diesem Fall $a = \sqrt{(b^2+c^2)}$, wie dem Pythagorischen Lehrsatz gemäß ist.

263 §.

Alle drey Seiten *AB*, *BC*, *AC*, eines Dreyecks sind gegeben: man soll die Winkel finden. 183 184 Fig.

Aufl. Wenn zwo Seiten AB, BC, gleich groß sind, und aus der Spitze B des dazwischen liegenden Winkels BD auf die dritte Seite senkrecht gesetzt wird, so ist AD $= \frac{1}{2}$ AC. (73 §.) und man hat im rechtwinklichten Dreyeck ABD zwo Seiten, die den rechten Winkel nicht einschliessen, AB, AD, woraus nach dem 260 §. die Winkel gefunden werden. Man setzt nemlich an

AB : sin. tot $= \frac{1}{2}$AC : sin ABD,

und findet daraus ABC = 2ABD, so wie A = 90° — ABD = C.

Ist dagegen das Dreyeck ungleichseitig, so lasse man auf die gröste Seite AC aus der Spitze B des gegenüberstehenden Winkels die Linie BD senkrecht fallen, so wird AD > DC seyn, wenn AB > BC ist. Man setze BC = a, AC = b, AB = c, AD = x, also CD = $b - x$; so hat man im rechtwinklichten Dreyeck ABD vermöge des Pythagorischen Lehrsatzes

$$BD^2 = c^2 - x^3,$$

und im Dreyeck BCD ist eben so

$$BD^2 = a^2 - (b - x)^2,$$

mithin $c^2 - x^2 = a^2 - (b - x)^2$, also ferner

$$c^2 + (b - x)^2 = a^2 + x^2$$

und $(b - x)^2 = b^2 - 2bx + x^2$ (190 §. Rech.)
folglich $c^2 + b^2 - 2b\,x = a^2$.
Das giebt ferner

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2b\,x$$

und $2b\,x = b^2 + c^2 - a^2$.
Ferner ist $c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$, (190 §. Rech.)
also $x = \frac{1}{2}b + \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$.

Man halbire AC in E, so ist AE = $\frac{1}{2}b$, also
AD = AE + ED = AE + $\frac{(c + a)\,(c - a)}{2b}$,
und ED = $\frac{(c + a)\,(c - a)}{2b}$, oder ED = $\frac{(AB + BC)\,(AB - BC)}{2\,AC}$. Die Voraussetzung war, daß AB > BC sey, oder $c > a$, daher giebt der gefundene allgemeine Ausdruck das grössere Stück AD der Grundlinie AC: wäre also AB < BC, oder $c < a$, wie in der 184 Figur, so müste

man

man CD durch x verstehen, und es wird in eben diesem Fall $ED = \frac{(BC + AB)\,(BC - AB)}{2\,AC}$. Bezeichnen alsdenn a und c noch wie vorhin die Seitenlinien BC und AB, so ist nun $ED = \frac{(a+c)\,(a-c)}{2b}$, und $CD = x = \frac{1}{2}b + \frac{(a+c)\,(a-c)}{2b}$, also wird in eben diesem Fall, wenn $AB < BC$ ist, das kleinere Stück der Grundlinie $AD = \frac{1}{2}b - \frac{(a+c)\,(a-c)}{2b}$.

Diesemnach kann AD aus den dreyen gegebenen Seiten des Dreyecks gefunden werden, und man erhält im rechtwinklichten Dreyeck ABD den Winkel A vermittelst der Proportion

AB : sin. tot. = AD : cos A.

die übrigen Winkel werden hiernächst wie im 259 §. gefunden.

Es sey AC = 113499,913 Ruthen, BC = 78324,3 R., AB = 59697,47 R., so ist $BC > AB$, oder $a > c$, und man hat nun $CD = x = \frac{1}{2}b + \frac{(a+c)\,(a-c)}{2b}$. Demnach giebt die Rechnung 184 F.

	AC =	78324,3	$= a$
	AB =	59697,47	$= c$
	BC + AB =	138021,77	$= a + c$
	BC — AB =	18626,83	$= a - c$
	$l(a+c)$ =	5,1399476	
	$l(a-c)$ =	4,2701389	
		9,4100865	
	lb =	5,0549956	
		4,3550909	
	$l2$ =	0,3010300	
	lED =	4,0540609	
also	ED =	11325,594,	dies subtrahirt
von	$\frac{1}{2}$AC =	56749,956	
giebt	AD =	45424,362.	

$$\begin{aligned} \text{Ferner } l\text{AD} + l\text{sin. tot.} &= 14{,}6572889 \\ l\text{AB} &= \underline{\ 4{,}7759559\ } \\ l\text{cos A} &= \ 9{,}8813330 \end{aligned}$$

Also $A = 40^\circ\ 28' - 40'' = 40^\circ\ 27'\ 20''$.

264 §.

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms oder Dreyecks ist gegeben, und zwo Seitenlinien der Figur: man soll den Winkel finden, welchen die Seitenlinien einschliessen.

Aufl. Es sey BD die Höhe des Parallelogramms ABFC oder des Dreyecks ABC für die Grundlinie AC, und $AC = b$, $AB = c$, der Winkel BAC $= \alpha$; so ist $BD = c$ sin. α, folglich der Inhalt des Parallelogramms $= bc$ sin. α, des Dreyecks $= \frac{1}{2} bc$ sin. α. Man setze jenen $= Q$, diesen $= q$, so hat man sin. $\alpha = \frac{Q}{b \cdot c}$, oder auch sin. $\alpha = \frac{2q}{b \cdot c}$.

Weil dieser Sinus zu zweenen verschiedenen Winkeln BAC und bAC $= 180^\circ -$ BAC gehört, so wird die Gestalt des Dreyecks durch die gegebenen Stücke nicht bestimmt. Wenn demnach aus zwoen Seitenlinien ein Dreyeck verzeichnet werden soll, das einen gegebenen Inhalt hat; so giebt es allemahl zwey verschiedene Dreyecke BAC, bAC, die der Aufgabe ein Genüge leisten, und die dritte Seite BC, bC ist nicht von gleicher Grösse in beyden Dreyecken. Dagegen ist im Parallelogramm ABFC der Winkel ACF $= 180^\circ -$ BAC, und obgleich aus den gegebenen Seiten über der Grundlinie AC $= b$ ebenfalls zwey verschiedene Parallelogramme ABFC, AbfC, verzeichnet werden können, die den gegebenen Inhalt haben; so sind doch beyde nur der Lage nach verschieden, und die Winkel ACF, bAC, mithin auch die übrigen drey sind von gleicher Grösse.

Der

Der
Geometrie zweyter Theil.
Die körperliche Geometrie,
nebst
Berechnung der körperlichen Grössen.
Der XVI. Abschnitt.
Von den verschiedenen Lagen grader Linien, und ebener Flächen, gegen andre ebene Flächen.

265 §.

Wenn man sich von einem geometrischen Körper eine solche Vorstellung macht, wie sie im 4 §. ist beschrieben worden; so enthält diese Vorstellung nichts weiter, als daß ein Raum von einer gewissen Grösse in gewissen Gränzen eingeschlossen sey. Diese Gränzen geben dem Körper das, was wir seine Gestalt oder Figur nennen, und eben deswegen heißt ein jeder körperlicher Raum, der von allen Seiten durch gewisse Gränzen eingeschlossen ist, eine **körperliche Figur**, die man also von einer ebenen Figur (27 §.) wohl unterscheiden muß. Die Gränzen einer solchen körperlichen Figur sind ihre Oberflächen (5 §.) und dies können sowohl ebene als auch krumme Flächen seyn.

266 §.

Eine einzige ebene Fläche kann keine körperliche Figur einschliessen, wohl aber eine einzige

krumme Fläche, wie das Beyspiel einer Kugel beweiset.

Wenn man sich nemlich eine einzige ebene Fläche in Gedanken allein vorstellt; so ergiebt sich leicht, daß diese zwar jeden Raum, in welchem man sich diese Ebene vorstellet, in zwey Stücke theile, übrigens aber weder das eine, noch das andre dieser beyden Stücke von allen Seiten einschliessen könne, man mag sich die Ebene so groß man will, vorstellen.

267 §.

Eine ebene Fläche wird durch zweene, oder drey gegebene Puncte gelegt, wenn man ihr eine solche Lage giebt, daß entweder beyde, oder alle drey Puncte in diese Ebene fallen.

In der körperlichen Geometrie nimmt man es als eine Voraussetzung an, **daß es allemahl möglich sey, durch zweene, oder auch durch drey gegebene Puncte, die nicht in grader Linie liegen, eine Ebene zu legen.**

Dabey stellt man sich die Ebene von unbestimmter Grösse vor, so daß man sie in jedem besondern Fall so groß nehmen kann, als nöthig ist.

Daß man sie durch einen Punct legen könne, ist augenscheinlich: aber um diesen Punct kann man sie, wie man will, drehen, und sie auf solche Art auch an den zweyten Punct bringen. Nun gehet die Ebene zugleich durch die grade Linie, die durch diese zweene Puncte bestimmt wird, (12 §.) und um eben diese grade Linie läßt sich die Ebene noch drehen: also kann man die Ebene auch an diesen dritten Punct bringen, wenn man sie nur groß genug annimmt, derselbe mag ausser der graden Linie zwischen jenen beyden Puncten liegen wo er wolle.

Durch

Durch beyde Schenkel eines gradlinichten Winkels kann eine Ebene gelegt werden, und zwey grade Linien, die einander schneiden, liegen in einerley Ebene.

268 §.

Wenn man durch drey nicht in grader Linie liegende Puncte *A, B, C* **eine Ebene** *DE* **gelegt hat: so ist dadurch die Lage dieser Ebene völlig bestimmt,** und man kann durch eben die drey Puncte keine andre Ebene legen, die von der vorigen, der Lage nach, unterschieden ist, ob sie gleich grösser oder kleiner seyn könnte. Legt man durch eben die Puncte noch mehr Ebenen; so fallen sie insgesammt mit der ersten zusammen. 134 Fig.

269 §.

Durch eine und eben dieselbe grade Linie AB kann mehr, als eine Ebene gelegt werden, (267 §.) und alsdenn schneiden diese Ebenen einander in dieser graden Linie AB. Allemahl aber, wenn zwo Ebenen CD, EF, einander schneiden, giebt es eine grade Linie, wie AB, die man ihre **Durchschnittslinie** nennt. Ausser dieser graden Linie AB können beyde Ebenen nichts gemein haben; denn wäre nur noch ein Punct G ausser der graden Linie AB in beyden Ebenen zugleich; so müsten beyde Ebenen zusammen fallen, und könnten einander nicht schneiden. (268 §.) 135 Fig.

270 §.

Zieht man durch einen Punct H in der Ebene CD, und einen andern K, der ausser ihr liegt, die grade Linie KL: **so schneidet** die Ebene CD die grade Linie KL. In allen Fällen, wenn eine Ebene CD eine grade Linie KL schneidet, giebt es einen **Durchschnittspunct**, wie H, und ausser demselben kann 135 F.

die Ebene CD mit der graden Linie KL nichts gemein haben. Denn wäre noch ein Punct I in beyden zugleich: so fiele KL ganz in CD, (10 §.) und CD könnte KL nicht schneiden.

Jede durch zweene auf verschiedenen Seiten der Ebene CD liegende Puncte K und L gezogene grade Linie KL, wird von der Ebene CD geschnitten: und jede durch zweene auf verschiedenen Seiten der Ebene EF liegende Puncte C und D gelegte Ebene CD, schneidet EF.

271 §.

136 Fig. Zwo oder drey ebene Flächen allein können keinen Körper einschliessen: es werden wenigstens vier Ebenen dazu erfodert. Man stelle sich eine Ebene, wie BCD vor. und gebe ihr die Gestalt eines Dreyecks; durch eine Seite BC lege man eine neue Ebene ACB, und ziehe in derselben willkührlich die grade Linie CA: so liegt CA nicht in einerley Ebene mit CB und CD, und man kann durch CA und CD eine dritte Ebene legen. Nun wird zwar von den dreyen Ebenen um C herum ein körperlicher Raum eingeschlossen, dieser ist aber noch nicht von allen Seiten begränzt. Um ihn an der noch offenen Seite zu schliessen, wird eine vierte Ebene erfordert, die man durch drey Puncte A, B, D, legen kann, wovon der erste in CA, der andre in CB, der dritte in CD liegt.

272 §.

Die ebenen Flächen, welche den Körper einschliessen, heissen seine **Seitenflächen**, (hedrae) so wie die graden Linien, worin die Seitenflächen einander schneiden, seine **Seitenlinien**, (termini lineares) genannt werden. Ist der Körper an allen Seiten

durch

durch ebene Flächen begränzt, so führt er den allgemeinen Nahmen eines **eckigten Körpers**: es giebt nemlich alsdenn auf der Oberfläche des Körpers Puncte, durch welche drey oder mehr Seitenflächen gelegt sind, wie C, A, B, D, in der 136 Figur, und der an einer solchen Stelle, wie C, sonst rings herum zwar begränzte, aber gegen A, B, D, zu noch unbegränzte Raum heißt eine **Ecke** des Körpers, auch ein **körperlicher Winkel**.

Die Seitenflächen des eckigten Körpers sind gradlinichte Figuren, also hat jede wenigstens drey Seitenlinien und drey Winkel. Wenn also die Zahl der Seitenflächen $= h$ die Zahl aller auf der Oberfläche des Körpers liegenden ebenen Winkel $= w$ gesetzt wird, so ist w nie kleiner als $3h$.

Jede Seitenfläche hat mit einer andern anliegenden eine Seitenlinie gemein: demnach ist die Anzahl aller Seitenlinien des Körpers nur halb so groß, als die Anzahl der Seitenlinien aller Seitenflächen, mithin auch nur halb so groß, als die Anzahl aller auf der Oberfläche des Körpers liegenden Winkel. Wenn also l die Anzahl aller Seitenlinien des Körpers ist; so ist $w = 2l$. Demnach ist auch $2l$ nie kleiner als $3h$, oder l nie kleiner als $\frac{3}{2}h$.

273 §.

Im Umfang ebener Figuren waren nur die Seiten und Winkel zu unterscheiden, und das machte gleich anfangs in der ebenen Geometrie die Untersuchungen über die Natur gradlinichter Winkel, oder über die verschiedenen Lagen einer graden Linie gegen andre, die mit ihr in einer Ebene gezogen sind, nothwendig. Die ganze den eckigten Körper umgebende Gränze bestehet aus ebenen Seitenflächen, die einander gleichfalls unter gewissen Winkeln schneiden, und selbst die Seitenlinien machen mit den Seitenflächen gewisse Winkel. Schon um deswillen würde in der körperlichen Geometrie mit Untersuchungen über die mancherley möglichen Lagen einer graden Linie gegen eine Ebene, oder einer Ebene gegen die andre, der Anfang gemacht werden müssen, wenn auch nicht ausserdem die dahin gehörigen Lehren ihren mannigfaltigen sehr ausgebreiteten Nutzen hätten.

274 §.

135 F. Wenn eine Ebene CD eine andre EF in der graden Linie AB schneidet: so kann man durch einen Punct P in der Ebene CD auf AB die senkrechte Linie PN, und zugleich durch eben den Punct P in der Ebene EF auf AB die senkrechte Linie PM ziehen. (68 §.) Demnach kann eine grade Linie AB auf zwoen andern PM, PN, die sich in P schneiden, im Durchschnittspunct P senkrecht seyn, wenn sie mit ihnen nicht in einer Ebene liegt. Wäre AB mit PM und PN in einerley Ebene befindlich, so würde das nicht möglich seyn. (20 §.)

275 §.

138 F. Wenn eine grade Linie AB, so von einer Ebene LM in B geschnitten wird, daß sie auf allen durch B in der Ebene LM gezogenen graden Linien CD, EF; GH u. s. f. senkrecht ist; so schneidet LM die grade Linie AB **senkrecht**, und AB steht auf der Ebene LM **senkrecht** oder **lothrecht**, auch heißt AB eine **Normallinie** auf LM. Ist aber AB nicht auf allen durch B in LM gezogenen graden Linien senkrecht; so wird AB von LM **schief** geschnitten, oder AB stehet **schief** auf LM.

Durch

Durch einen Punct B in der Ebene LM läßt sich nur eine grade Linie AB auf LM senkrecht setzen. Denn wäre auch BK auf LM senkrecht, so könnte man durch den Winkel ABK eine Ebene legen, welche LM in BD schnitte: alsdenn wären ABD und KBD rechte Winkel, welches nicht seyn kann. (20 §.)

Auch durch einen Punct A ausserhalb der Ebene LM läßt sich nur eine grade Linie nach LM senkrecht ziehen. Denn wäre auch AD auf LM senkrecht; so würde LM von der Ebene BAD in BD geschnitten, da dann ABD = R = ADB wäre, welches dem 57 §. zuwider ist.

276 §.

Eine grade Linie *AB*, die nur auf zwoen in der Ebene *LM* gezogenen graden Linien *CD*, *EF* im Durchschnittspunct *B* senkrecht ist, stehet auf der Ebene *LM* selbst senkrecht. 138 F.

Beweis. Man ziehe in der Ebene LM durch B die dritte grade Linie GH, und wenn diese zwischen des Winkels CBE Schenkeln fällt; so nehme man BC und BE von willkührlicher Grösse, und ziehe CE, welche GH in G schneidet. (33 §.) Man nehme ferner BD = BC, BF = BE, und ziehe DF: so ist BC : BD = BE : BF, also DF mit CE parallel, und GH schneidet auch DF so, daß BG = BH wird. (177 §.) Ueberdem wird EC = DF, und EG = FH. (60 §.) Ziehet man nun von A nach den Puncten C, D, E, F, G, H, grade Linien, so wird AC = AD, AE = AF: (60 §.) und weil auch EC = DF war, so wird der Winkel AEG = AFH, (65 §.) folglich AG = AH. (60 §.) Demnach ist in den Dreyecken ABG und AHB der Winkel ABG = ABH, (65 §) und AB auf GH senkrecht. (19 §.)

Weil dieser Beweis von allen graden Linien gilt, die durch B in der Ebene LM gezogen werden können: so ist AB auf LM senkrecht.

Die senkrechte Linie AB ist unter allen, die von A nach der Ebene LM gezogen werden können, die kürzeste, (75 §.) mithin ist sie die Entfernung des Puncts A von der Ebene LM. (33 §.)

177 §.

Wenn drey grade Linien *BC*, *BG*, *BP*, einander in einem Punct *B* schneiden, und eine vierte *AB* auf allen dreyen im Durchschnittspunct *B* senkrecht ist; so liegen *BC*, *BG*, *BP* in einer Ebene.

Beweis. Man lege durch den Winkel CBG eine Ebene LM: wenn diese nicht zugleich durch BP gehet; so wird sie die Ebene des Winkels ABP in einer graden Linie BE schneiden, die von BP verschieden ist. Nun wird aber ABE = R, (276 §.), und vermöge der Voraussetzung ist auch ABP = R, welches nicht zugleich seyn kann: (20 §.) also muß die Ebene CBG durch BP gehen, wenn auch ABP ein rechter Winkel ist.

278 §.

139 Fig. **Wenn *AB* auf der Ebene *LM* senkrecht und *CD* mit *AB* parallel ist; so ist auch *CD* auf *LM* senkrecht.**

Beweis. Die Ebene der Parallelen AB, CD, schneidet LM in der graden Linie BD, und in dieser Ebene liegt auch DA. (10 §.) In der Ebene LM setze man DE auf DB senkrecht, mache DE = AB, und ziehe BE: so ist ABD = R = BDE, und BD = BD, also auch AD = BE. (60 §.) Man ziehe ferner AE; so passen die Dreyecke AEB und AED auf einan=

einander, weil die Seiten AB, DE, und AD, BE gleich groß sind, und AE zu beyden Dreyecken gehört: (65 §.) also ist ADE = ABE = R. Ueberdem war BDE = R, folglich ist ED auf der Ebene ABCD senkrecht, und CDE = R. (276 §.) Weiter ist CDB = 2 R − ABD (86 §.) = R: also steht CD auf LM senkrecht. (276 §.)

279 §.

Zwo grade Linien *AB*, *CD*, die auf einer- 139
ley Ebene senkrecht stehen, sind parallel. F.

Beweis. Man kann durch D mit AB eine Parallele ziehen, diese steht auf LM senkrecht, (278 §.) und muß mit DC zusammen fallen, (275 §.) wenn DC so wie AB auf LM senkrecht ist: demnach ist DC selbst mit AB parallel.

280 §.

Zwo grade Linien, *AB*, *CD*, die mit einer 139
dritten *EG* parallel sind, sind unter einander F.
selbst parallel, auch wenn nicht alle drey in einer Ebene liegen.

Beweis. In der Ebene CDEG ziehe man ED, in der Ebene ABEG aber EB auf EG senkrecht, und lege durch BED die Ebene LM: so ist EG auf LM senkrecht. (276 §.) Also sind auch AB und CD auf LM senkrecht, (278 §.) folglich AB und CD einander parallel. (279 §.)

281 §.

Eine grade Linie AB ist mit einer Ebene EF pa- 141
rallel oder **gleichlaufend**, wenn sie mit der Ebene F.
nicht zusammenstossen kann, die Ebene und die Linie mögen so groß werden, als man will.

Wenn *AB* mit einer in der Ebene *EF* liegenden graden Linie *CD* parallel ist; so ist sie

auch

auch mit der Ebene *EF* parallel. Denn AB und CD bleiben allemal in einer Ebene; wenn also AB mit EF zusammenstiesse; so müste es in einem Punct geschehen, der in beyden Ebenen ABCD und EF zugleich, also in beyder Durchschnitt CD befindlich wäre: welches wider die Voraussetzung ist.

Wenn AB mit der Ebene EF parallel ist, so ist auch AB mit jeder graden Linie CD parallel, worin EF von einer durch AB gelegten Ebene geschnitten wird. Denn AB und CD liegen in einerley schneidenden Ebene, und können nicht zusammen stossen, weil sonst AB auch mit der Ebene EF zusammenstiesse, womit sie doch parallel seyn soll.

282 §.

142 F. **Zweene Winkel *ACB, DEF*, die nicht in einer Ebene liegen, sind gleich groß, wenn ihre Schenkel *CA, ED*, imgleichen *CB, EF*, die in Absicht der durch die Spitzen gezogenen graden Linie *CE* nach einer Seite liegen, parallel sind.**

Beweis. Man nehme CA = ED, und CB = EF; so sind AD und BF beyde mit CE parallel, und überdem beyde eben so groß als CE. (97 §.) Also sind auch AD und BF parallel, (280 §.) und gleich groß: mithin ferner AB = DF, und ACB = DEF. (65 §.)

283 §.

135 F. **Wenn eine Ebene CD die andre EF in der graden Linie AB schneidet: so schliessen beyde an der Durchschnittslinie AB einen Winkel ein, den man einen Flächen-Winkel nennen könnte.** Einen solchen Flächenwinkel kann man zuweilen kurz mit vier

vier Buchstaben DABF bezeichnen, wovon die beyden mittlern A, B, an der Durchschnittslinie stehen.

Man nehme in AB irgendwo einen Punct P und ziehe durch P auf AB ein paar senkrechte Linien PM und PN wovon eine PM in der einen Ebene EF, die andre PN in der andren Ebene CD liegt. Der Winkel MPN, den diese beyde Linien einschliessen, heist der **Neigungs-Winkel** der Ebenen CD und EF gegen einander: er ist mit dem **Flächen-Winkel** an AB einerley, und wenn es ein rechter Winkel ist: so stehen die Ebenen CD, EF, auf einander senkrecht.

Dieser Winkel MPN ist nemlich bey unveränderter Lage beyder Ebenen gegen einander immer einerley, wo man auch den Punct P in der Durchschnittslinie AB annimmt. Wenn in der Ebene EF auch BQ auf AB, nnd BR in der Ebene CD auf AB senkrecht sind; so ist BQ mit PM und BR mit PN parallel (80 §.) also der Winkel QBR = MPN. (282 §.)

284 §.

Die Durchschnittslinie AB zwoer Ebenen CD, EF steht auf der Ebene ihres Neigungswinkels MPN senkrecht: (276 §.) und wenn eine Ebene *ST* die Durchschnittslinie *AB* in *P* senkrecht schneidet; so ist sie die Ebene des Neigungswinkels. Denn wenn EF in PM, und CD in PN von der Ebene ST geschnitten werden, so sind BPM, BPN rechte Winkel, (275 §.) folglich ist MPN der Ebene EF Neigungswinkel gegen CD. (283 §.)

285 §.

285 §.

143 F. Zwo Ebenen *AG*, *AH*, die einander schneiden, können nicht auf einer dritten Ebene *LM*, worin jener beyden Ebenen Durchschnittslinie *AD* liegt, beyde zugleich senkrecht seyn.

Beweis. Man lege durch einen Punct B der Durchschnittslinie AD eine Ebene auf AD senkrecht, welche AG in BC, AH in BE und LM in BF schneidet; so ist CBF der Ebene AG und EBF der Ebene AH Neigungswinkel gegen LM. Es können aber CBF und EBF nicht beyde zugleich rechte Winkel seyn. (20 §.)

286 §.

143 F. Wenn die grade Linie *BC* auf der Ebene *LM* senkrecht ist: so steht jede durch *BC* gelegte Ebene *AG* auf *LM* ebenfalls senkrecht.

Beweis. Die Ebene AG schneide LM in der graden Linie AD, und weil diese durch B gehen muß; so setze man BF in der Ebene LM auf AD senkrecht. Weil ferner BC auf LM senkrecht ist; so ist zuerst CBA = R, (275 §.) also CBF der Ebene AG Neigungs-Winkel gegen LM. (283 §.) Es ist aber auch CBF = R, (275 §.) also AG auf LM senkrecht. (283 §.)

Demnach stehen zwo Ebenen, die einander schneiden, auf der Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht.

287 §.

144 F. Zweene gleich grosse Flächen-Winkel *BADC*, *KHLI* passen in einander.

Beweis. In AD und HL nehme man die Puncte F und N willkührlich, und ziehe durch sie gehörig die Neigungswinkel EFG, MNO. Man

lege

lege die Ebene HI auf AC so, daß HL in AD, und N in F fällt: so muß NO in FG, und die Ebene MNO mit EFG zusammen fallen. (285 §.) Also fällt NM in FE (18 §.) und die Ebene HNM oder HK fällt mit AFE oder AB zusammen. (268 §.)

288 §.

Eine grade Linie *BC* die in einer von 143
zwoen senkrechten Ebenen *AG*, *LM* auf bey- Fig.
der Durchschnitt *AD* senkrecht ist, steht auch auf der andern Ebene *LM* senkrecht.

Beweis. In LM ziehe man BF auf AD senkrecht; so hat man den Neigungswinkel CBF, (283 §.) weil ABC und ABF rechte Winkel sind. Ueberdem ist vermöge der Voraussetzung AG auf LM senkrecht, also CBF eben so wie CBA ein rechter Winkel: demnach steht CB auf LM senkrecht (276 §.)

Eine grade Linie, die von einem Punct C der Ebene AG auf die ihr senkrechte Ebene LM lothrecht gezogen ist, muß in der Ebene AG liegen. Denn es sey CB auf dem Durchschnitt AD senkrecht. Fiele nun eine senkrechte Linie CK auf LM ausser der Ebene AG; so wären CB und CK beyde auf LM senkrecht, welches nicht seyn kann. (276 §.)

Wenn AG und LM auf einander senkrecht sind, und durch einen Punct B in der Durchschnittslinie AD eine grade Linie BC auf LM senkrecht gesetzt wird; so liegt BC in der Ebene AG. Denn sonst wären CAD und GAD zwo verschiedene auf LM senkrechte Ebenen, (286 §.) welches dem 285 §. widerspricht.

289 §.

289 §.

137 F. Wenn zwo Ebenen *CG*, *FH* einander in *AB* schneiden, und auf einer dritten *LM* senkrecht sind; so ist auch ihr Durchschnitt *AB* auf *LM* senkrecht.

Beweis. In der Ebene LM ziehe man BK auf BC, und BI auf BF, beyder Ebenen Durchschnitte mit LM, senkrecht: so ist BK auf CG, und BI auf FH senkrecht. (288 §.) Demnach ist ABK = R = ABI, (275 §.) folglich AB auf LM senkrecht. (276 §.)

290 §.

140 F. Von einem Punct *A*, der ausser der Ebene *LM* liegt, nach *LM* eine senkrechte Linie zu ziehen.

Aufl. Man ziehe in der Ebene LM eine grade Linie CD, und setze in der Ebene ACD die grade Linie AE auf CD senkrecht, durch E ziehe man EF in der Ebene LM auf CD senkrecht; so ist AEF der Ebene ACD Neigungswinkel gegen LM, mithin die Ebene AEF auf LM senkrecht. (283. 286 §.) Weiter setze man AB in der Ebene AEF auf EF senkrecht, so ist auch AB auf LM senkrecht. (288 §.)

Durch einen in der Ebene LM gegebenen Punct P kann man also auf LM eine grade Linie PQ senkrecht ziehen, wenn man von einem willkührlichen Punct A nach LM die senkrechte Linie AB, und PQ mit AB parallel ziehet. (278 §.)

291 §.

145 F. Wenn von einem Punct *A* einer Ebene *DH*, die eine andre *DG* in *CD* schneidet, auf letztere die grade Linie *AB* senkrecht gesetzt, und hiernächst von *A* oder *B* nach *CD* die

grade

grade Linie *AE* oder *BE* senkrecht gezogen wird; so ist *EAB* die Ebene des Neigungswinkels.

Beweis. Die Ebene EAB ist auf DG senkrecht, (286 §.) und wenn BE auf CD senkrecht ist, so steht CD auf der Ebene AEB senkrecht (288 §.) also ist EAB die Ebene des Neigungswinkels. (284 §.)

Ist umgekehrt AE auf CD senkrecht, so ist es auch BE: denn wäre nicht EB, sondern E*b* auf CD senkrecht, so wäre AE*b* der Neigungswinkel, und die Ebene AE*b* auf DG senkrecht. Setzte man nun A*b* auf E*b* senkrecht, so wäre auch A*b* auf DG senkrecht, (288 §.) worauf schon AB senkrecht ist, welches dem 275 §. widerspricht.

Wenn die Ebenen zweyer Dreyecke ACD, BCD, auf einerley Grundlinie CD einander so schneiden, daß zugleich CD die Durchschnittslinie ist, und wenn alsdenn die grade Linie AB zwischen den Spitzen A und B der Grundlinie CD gegenüber auf der Ebene eines dieser Dreyecke BCD senkrecht steht; so verhält sich das gegen *AB* geneigte Dreyeck *ACD* zu dem auf *AB* senkrechten *BCD*, wie der ganze Sinus zum Cosinus des Neigungswinkels beyder Ebenen gegen einander. Denn BE auf CD senkrecht gesetzt, ist des Dreyecks BCD Höhe, und weil alsdenn zugleich AE auf CD senkrecht, und AEB der Neigungswinkel ist; so ist AE des Dreyecks ACD Höhe, und man hat AE : BE = sin. tot. cos AEB. (257 §. G.) Ferner ist Dr. ACD : Dr. BCD = AE : BE, (203 §. G.) also auch Dr. ACD : Dr. BCD = sin. tot. cos AEB.

292 §.

140 F. **Der Neigungswinkel einer graden Linie** *AE* **gegen eine Ebene** *LM*, welche sie in E schneidet, ist der gradlinichte Winkel AEF, den die Durchschnittslinie EF einer durch AE auf LM senkrecht gesetzten Ebene mit AE einschliest.

Läßt man von einem Punct A der Linie AE auf LM die senkrechte Linie AB fallen, und ziehet EB; so ist AEB der Linie AE Neigungswinkel gegen LM. Denn die Ebene AEB ist auf LM senkrecht, (286 §.) und schneidet sie in EB.

293 §.

140 F. **Parallellinien** *AE, QR* **sind gegen einerley Ebene** *LM* **unter einerley Winkel geneigt.**

Beweis. Wenn AB, QP auf LM senkrecht stehen; so sind AEB, QRP die Neigungswinkel. (292 §.) Aber AB, und QP sind parallel; (279 §.) also ist der Winkel A = Q, (282 §.) folglich auch AEB = QRP. (57 §.)

294 §.

145 F. **Eine grade Linie** *ac*, **oder** *AB* **kann nicht auf zwoen Ebenen** *DG, DH*, **die einander in** *CD* **schneiden, zugleich senkrecht seyn.**

Beweis. Die grade Linie *ac* gehe zuerst durch einen Punct E der Durchschnittslinie CD, und man ziehe EA in der einen Ebenen DH; so schneidet die Ebene des Winkels AE*a* auch die andre Ebene DG in einer graden Linie EB. Wäre nun *ab* auf beyden Ebenen zugleich senkrecht; so wäre AE*a* = R = BE*a*, welches unmöglich ist. (20 §.)

Wenn statt dessen eine grade Linie AB die Ebene DH in A und DG in B trift, also nicht durch beyder Durchschnittslinie CD gehet; so ziehe man von einem

einem Punct E der Durchschnittslinie CD sowohl nach A, als auch nach B, grade Linien: dies giebt ein Dreyeck ABE, worin sowohl bey A, als auch bey B ein rechter Winkel wäre, wenn AB auf beyden Ebenen DH, DG, zugleich senkrecht stünde, welches dem 57 §. widerspricht.

295 §.

Zwo Ebenen KL, MN, die eine solche Lage haben, daß sie nicht zusammenstossen können, sie mögen nach allen Seiten, so weit man will, erweitert werden, heissen **parallele Ebenen**. 146 F.

Wenn eine grade Linie *AB* auf zwoen Ebenen *KL, MN* zugleich senkrecht stehet; so sind *KL, MN* einander parallel. Denn sie können einander nicht schneiden. (294 §.)

Wenn demnach ausser der Ebene MN ein Punct A gegeben ist; so kann man durch A auf folgende Art eine Ebene mit MN parallel legen. Man lasse von A auf MN die senkrechte Linie AB fallen, ziehe durch B in der Ebene MN ein Paar grade Linien BC, BD, und mit ihnen durch A die Linien AE, AF parallel. Durch den Winkel EAF lege man die Ebene KL: so ist KL mit MN parallel. Denn es ist BAE = R = BAF, also AB auf beyden Ebenen MN, KL senkrecht.

Wenn zwo parallele Ebenen KL, MN von einer dritten BE geschnitten werden; so sind die Durchschnittslinien AE, BC parallel: denn sie liegen in der schneidenden Ebene, und können nicht zusammen stossen, weil sonst KL mit MN zusammenstiesse, welches der Voraussetzung entgegen ist.

296 §.

146 F. Die Ebenen *KL*, *MN* zweener Winkel *EAF*, *OPQ* sind parallel, wenn die Schenkel *AE*, *PO*, und *AF*, *PQ* dieser Winkel parallel sind.

Beweis. Von A falle auf MN die lothrechte Linie AB, durch B aber sey BC mit PO, und BD mit PQ parallel gezogen: so ist auch BC mit AE, und BD mit AF parallel. (280 §.) Also ist nicht allein BAF = 2R − ABD = R, sondern auch BAE = 2R − ABC = R, (86 §.) und AB auf KL senkrecht, (276 §.) folglich KL mit MN parallel. (295 §.)

297 §.

146 Fig. Wenn die Ebene *KL* mit *MN* parallel, und von einem Punct *A* dieser Ebene *KL* die Linie *AB*; auf *MN* senkrecht gezogen ist; so ist *AB* auch auf *KL* senkrecht.

Beweis. Durch B ziehe man ein Paar grade Linien BC, BD in der Ebene MN: so schneiden die Ebenen ABC, ABD auch KL in AE und AF, und es ist AE mit BC so wie AF mit BD parallel. (295 §.) Demnach ist BAE = 2R − ABC = R, und BAF = 2R − ABD = R, (86 §.) folglich AB auf KL senkrecht. (276 §.)

Durch einen gegebenen Punct A läst sich nicht mehr als eine Ebene KL mit MN parallel legen, denn man kann AB auf MN senkrecht ziehen, und alsdenn stünde AB auf beyden durch A mit MN parallel gelegten Ebenen senkrecht, gegen den 294 §.

Eine Ebene also, die eine von zwoen parallelen Ebenen schneidet, schneidet auch die andre: und zwo Ebenen, die mit einer dritten parallel sind, müssen untereinander selbst parallel seyn. Denn schnitten jene

jene beyde einander; so schnitte jede von ihnen die dritte, womit sie parallel seyn soll.

298 §.

Eine grade Linie *CD*, die eine von zwoen parallelen Ebenen *KL* schneidet, trift verlängert auch die andre *MN*, und ist gegen beyde unter einerley Winkel geneigt. 147 Fig.

Beweis. Wenn CD die Ebene KL in A schneidet, und AB auf MN senkrecht gezogen ist: so steht AB auch auf KL senkrecht. (297 §.) Die ebene DAB also, welche KL in AF, und MN in BE schneidet, ist sowohl auf KL, als auch auf MN senkrecht, (286 §.) und AF, BE sind Parallellinien. (295 §.) Demnach schneiden CD und EB einander, (88 §.) folglich auch CD und MN. Wenn nun E der Durchschnitts-Punct ist; so ist CA gegen KL unter dem Winkel CAF, gegen MN aber, unter dem Winkel AEB geneigt, (292 §.) und es ist CAF = AEB. (88 §.)

299 §.

Parallele Ebenen *KL*, *MN*, sind durchgängig gleich weit von einander entfernt. 146 Fig.

Beweis. Wenn AB und EC die Entfernungen der Puncte A und E von MN sind: so sind AB, EC parallel, (279 §.) und die Durchschnitte AE, BC der Ebenen KL, MN mit der Ebene AECB sind auch parallel; (295 §.) also AB = EC. (99 §.) Eben so erhellet, daß eines jeden andern Puncts F in der Ebene KL Entfernung FD von MN = AB sey.

Wenn eine grade Linie AE durch A mit MN parallel ist; so liegt sie in der mit MN durch A parallelen Ebene KL: denn schnitte sie KL, so schnitte sie auch MN. (298 §.) Also ist auch AE durchgängig gleich weit von MN entfernt.

Wenn drey Puncte A, E, F von der Ebene MN gleich weit entfernt sind; so ist die Ebene KL durch A, E und F mit MN parallel. Denn die gleichen Entfernungen AB, EC, FD sind auch parallel. (279 §.) Zieht man also AE, AF, BC, BD; so sind ABCE, ABDF rechtwinklichte Parallelogramme, (97, 100 §.) und AB ist auf KL senkrecht, (276 §.) also KL mit MN parallel. (295 §.)

Alle Puncte A, E, F, G, u. s. f., die von der Ebene MN gleich weit entfernt sind, liegen in einer Ebene. Denn es sey AB = EC = FD = GH: so muß eine Ebene KL durch A, E und F gelegt auch durch G gehen. Im Gegentheil würde KL doch mit MN parallel seyn, und GH irgendwo in I schneiden, (298 §.) da dann IH = AB wäre. Es wird aber vorausgesetzt, daß GH = AB sey, und beydes zugleich kann nicht seyn.

300 §.

148 Fig. **Zwo grade Linien *AB, CD,* werden von dreyen parallelen Ebenen *HI, KL, MN,* in proportionale Theile geschnitten.**

Beweis. Wenn A, E, B und C, F, D die Durchschnittspuncte sind; so ziehe man BC, welche KL in G schneidet. Die Ebene ABC wird HI in AC, und KL in EG schneiden, so wie die Ebene BCD von KL in GF und von MN in BD geschnitten wird. Da nun AC und EG, imgleichen BD und GF parallel sind; (295 §.) so ist AE : EB = CG : GB, und CG : GB = CF : FD, (174 §.) also AE : EB = CF : FD.

Aus dieser Proportion folgt auch AB : EB = CD : FD, und AB : AE = CD : CF. (164 §.)

301 §.

Parallele Ebenen *KL*, *MN* werden von einer dritten Ebene *PQ* unter gleichen Neigungswinkeln geschnitten, wovon die Oeffnungen eine übereinstimmige Lage haben. 149 Fig.

Beweis. Die Durchschnitte AB, CD sind parallel. (295 §.) Wenn also durch einen Punct F in AB eine Ebene auf AB senkrecht gesetzt wird, welche PQ in FE und KL in FH schneidet; so ist EFH der Neigungswinkel der Ebene PQ gegen KL. (283 §.) Aber EF trift verlängert auch CD in G; (88 §.) also schneidet die Ebene EFH auch CD, und zwar senkrecht. (278 §.) Wenn also GI ihr Durchschnitt mit MN ist; so ist FGI der Ebene PQ Neigungswinkel gegen MN. Ueberdem sind FH, GI parallel, (295 §.) also ist EFH = FGI. (86 §.)

302 §.

Wenn zwo Ebenen *KL*, *MN* von einer dritten *PQ* so geschnitten werden, daß die Durchschnitte *AB*, *CD* parallel, und die Neigungswinkel gegen *KL*, *MN* auf eben der Seite von *PQ* gleich groß sind; so sind *KL*, und *MN* parallel. 149 Fig.

Beweis. Es sey EFH der Ebene PQ Neigungswinkel gegen KL: so ist die Ebene EFH auf AB senkrecht, (284 §.) und schneidet auch CD in G, wo EF verlängert CD trift, (88 §.) und zwar senkrecht. (278 §.) Wenn also GI der Ebene EFH Durchschnitt mit MN ist; so ist FGI der Ebene PQ Neigungswinkel gegen MN, und vermöge der Voraussetzung EFH = FGI. Also ist FH mit GI parallel, und weil auch AB mit CD parallel ist; so ist die Ebene KL mit MN parallel. (296 §.)

Der XVII. Abschnitt.

Von den prismatischen Körpern und Pyramiden.

303 §.

150 F. Drey und mehr ebene Flächen AK, BF, CG, DH, EI, können einander so schneiden, daß alle Durchschnittslinien AF, BG, CH, DI, EK, mit einander parallel laufen. Solchergestalt wird zwar ein körperlicher Raum rings herum durch diese Ebenen begränzt: weil aber die parallelen Durchschnittslinien nicht zusammen laufen können, so bleibt dieser Raum an beyden Seiten, wohin diese Durchschnittslinien laufen, noch unbegränzt. Um den Raum völlig zu schliessen, werden noch zwo Ebenen LM, NO, eine an jeder Seite erfordert, und wenn diese unter einander parallel sind; so heißt der so begränzte Körper ein **Prisma**, ein **Pfeiler**, oder eine **Ecksäule**. Die parallelen Seitenflächen betrachtet man als die **Grundflächen** des Prisma, die übrigen, welche einander insgesammt in parallelen Durchschnittslinien schneiden, heissen hier im besondern Sinn die **Seitenflächen** des **Prisma**, und von der Anzahl dieser Seitenflächen erhält das Prisma den Nahmen eines **dreyseitigen**, vier- fünf- sechsseitigen **Prisma** u. s. f.

304 §.

Die Seitenflächen des Prisma sind Parallelogramme, und die Grundflächen desselben sind gleiche und ähnliche gradlinichte Figuren.

Beweis.

Beweis. Die Durchschnittslinien AB, FG, jeder Seitenfläche mit den Grundflächen sind parallel, (295 §.) also sind die Seitenflächen Parallelogramme. Ferner sind die Grundflächen gradlinichte Figuren, die gleichviele Seitenlinien haben, eben soviele, als das Prisma Seitenflächen hat. Zu jeder Seitenlinie der einen Grundfläche gehört eine Seitenlinie der andern Grundfläche, die mit jener in einerley Seitenfläche des Prisma liegt, und jede zwo so zusammengehörige Seitenlinien der Grundflächen sind parallel und gleich groß, wie AB und FG. Ferner gehört zu jedem Winkel der einen Grundfläche ein Winkel in der andern, dessen Spitze mit der Spitze jenes Winkels in einer von den parallelen Seitenlinien des Prisma liegt, und jede zweene so zusammengehörige Winkel ABC, FGH, sind gleich groß, weil ihre Schenkel parallel sind. (282 §.) Demnach sind die Grundflächen gleiche und ähnliche Figuren.

Jeder Schnitt der prismatischen Fläche mit einer Ebene, die den Grundflächen parallel liegt, giebt also ebenfalls eine Durchschnittsfigur, die den Grundflächen gleich und ähnlich ist.

305 §.

Wenn die parallelen Seitenlinien des Prisma, 158
also auch die Seitenflächen auf den Grundflächen F.
senkrecht stehen; (286 §.) so heißt der Körper ein grades widrigenfalls aber ein schiefes Prisma. Die Seitenflächen eines graden Prisma sind also Rechtecke.

Wenn eine dreyseitige prismatische Fläche LMNOPQ mit einer Ebene auf den Seitenlinien PM, OL, QN, und mit einer andern Ebene auf eben den Seitenlinien schief geschnitten wird; so verhält sich der schiefe Schnitt zum senkrechten, wie der ganze Sinus zum Cosinus des Neigungswinkels beyder Ebenen gegen einander. Es sey nemlich OPQ der senkrechte Schnitt, und durch einen Winkelpunct Q dieses Dreyecks sey eine Ebene mit dem schiefen Schnitt parallel gelegt, welche das Dreyeck QRS giebt, so ist dies Dreyeck jenem schiefen Schnitt gleich; (304 §.) wenn also der Neigungswinkel der Ebene QRS gegen OPQ = α gesetzt wird, so wird nur der Beweis des Satzes erfodert, es sey QRS : OPQ = sin tot : cos α. Man verlängere also RS und RO bis beyde Linien einander in T schneiden, und ziehe TQ, so ist TQ die Durchschnittslinie beyder Ebenen QRS und OPQ, und man hat

Dr. RTQ : Dr. PTQ = sin. tot. : cos α

Dr. STQ : Dr. OTQ = sin. tot. : cos α (291 §.)

also RTQ — STQ : PTQ — OTQ = sin. tot. : cos α (168 §. Rech.)

d. i. Dr. QRS : Dr. OPQ = sin. tot. : cos α

Wenn RS mit OP parallel ist, so kann man durch RS eine Ebene mit OPQ parallel legen, da dann die Durchschnittsfigur ein Dreyeck mit OPQ von gleicher Grösse ist: alsdenn aber folgt die Richtigkeit des Satzes für sich schon aus dem 291 §.

Ist nun BGKE ein vielseitiges Prisma, so kann man die beyden Grundflächen ABCDE, FGHIK durch gleichnahmige Diagonallinien AC und FH, AD und FI. u. s. f. in Dreyecke, und hiemit das ganze Prisma in eben soviele dreyseitige Prismen theilen. Wird alsdenn das vielseitige Prisma mit einer Ebene auf den Seitenlinien senkrecht, mit einer andern aber darauf schief geschnitten; so sind die Schnitte gradlinichte Figuren von gleich vielen Seitenlinien, und die Durchschnittslinien mit den Diagonalflächen thei-

theilen sie in gleichviele Dreyecke, so daß jedes Dreyeck im senkrechten Schnitt mit einem Dreyeck im schiefen Schnitt, als ein senkrechter und schiefer Schnitt eines von den dreyseitigen Prismen zusammen gehört, woraus das vielseitige zusammen gesetzt ist. Aber das Verhältniß eines jeden der schiefen dreyseitigen Schnitte zum damit zusammengehörigen senkrechten ist so groß, als das Verhältniß des ganzen Sinus zum Cosinus des Neigungswinkels beyder Schnitte gegen einander, also ist das Verhältniß der Summe aller schiefen zur Summe aller senkrechten Schnitte eben so groß, (167 §. Rech.) das heißt: in jedem Prisma verhält sich der schiefe Schnitt zum senkrechten, wie der ganze Sinus zum Cosinus des Neigungswinkels der Ebenen dieser Schnitte gegen einander.

306 §.

Ein Parallelepipedum ist ein Prisma, dessen Grundflächen ABCD, EFGH Parallelogramme sind. 151 F.

Jede zwo entgegen gesetzte Seitenflächen des Parallelepipedi, wie AH, BG sind einander parallel, weil AD mit BC, und AE mit BF parallel ist. (296 §.)

Also können jede zwo entgegen gesetzte Seitenflächen, wie AH, BG, für die Grundflächen des Parallelepipedi angenommen werden, da dann die Grundflächen AC, EG Seitenflächen werden.

Jedem Flächenwinkel an einer Seitenlinie AE, den zwo Seitenflächen einschliessen, steht ein andrer an der Seitenlinie CG gegenüber, und weil AE, CG, parallel sind, so kann man durch beyde Seitenlinien eine Ebene legen: ihre Durchschnitte AC, EG, mit den Grundflächen sind Diagonallinien der Grundflächen, und die schneidende Ebene kann auf ähnliche

Art

Art eine Diagonalfläche des Parallelepipedi heissen. Letzteres wird dadurch in zwey dreyseitige Prismen getheilt.

307 §.

151 F. **Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum** ist ein grades Parallelepipedum, dessen Grundflächen AC, EG Rechtecke sind. Es können also die Grundflächen Quadrate seyn: und weil die Seitenflächen Rechtecke sind; (305 §.) so werden sie ebenfalls Quadrate, wenn die Entfernung der Grundflächen von einander ihrer Seitenlinie gleich ist.

Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum von dieser Art, welches also von sechs gleich grossen Quadraten eingeschlossen ist, heißt ein **Würfel**. Die Seitenlinie von jeder Seitenfläche heißt zugleich eine **Seitenlinie des Würfels.**

308 §.

Die **Höhe** des Prisma ist die Entfernung der einen Grundfläche von der andern. Daher kann im rechtwinklichten Parallelepipedo eine jede Seitenlinie die Höhe seyn, weil man jedes Paar der entgegen gesetzten Seitenflächen als die Grundflächen ansehen kann.

309 §.

Wenn zwey Prismen nebst gleichen Höhen gleiche und ähnliche Grundflächen haben, und wenn überdem ihre gleichnahmigen Seitenflächen (das ist, diejenigen, welche die Grundflächen in gleichnahmigen Seitenlinien schneiden) gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt sind: so sind die Prismen gleich groß.

Beweis. Denn die Grundflächen passen auf einander: und wenn man diese gehörig auf einander legt;

legt; so fällt jedes Paar gleichnahmiger Seitenflächen zusammen. (287 §.) Ueberdem fallen die Ebenen der entgegen gesetzten Grundflächen zusammen. (299 §.) Demnach müssen auch die Durchschnittslinien dieser letzten Ebenen, und der Seitenflächen, mithin die entgegen gesetzten Grundflächen selbst zusammen fallen. Also paßt ein Prisma in dem andern, (16 §.) und beyde sind gleich groß.

Würfel also, deren Seitenlinien gleich groß sind, sind selbst gleich groß. Von zweenen Würfeln aber mit ungleichen Seitenlinien ist derjenige der grössere, der die grössere Seitenlinie hat.

Gleich grosse Würfel haben demnach gleich grosse Seitenlinien, und von ungleichen Würfeln hat der grössere eine grössere Seitenlinie, als der kleinere.

310 §.

Drey und mehr ebene Flächen BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, die an der Spitze A eine körperliche Ecke (272 §.) einschliessen, begränzen noch nicht an allen Seiten einen körperlichen Raum: ausser den Seitenflächen der Ecke wird noch eine neue Ebene BE erfodert, die alle Seitenlinien, mithin auch alle Seitenflächen der Ecke schneidet, und solchergestalt den Seitenflächen der Ecke um A die Figur gradlinichter Dreyecke giebt. Der geometrische Körper, welchen die Seitenflächen der Ecke und ausserdem eine neue Ebene BCDEF, die diese Seitenflächen insgesammt schneidet, an allen Seiten begränzen, führt den Nahmen einer **Pyramide** oder **Spitzsäule**. Die Spitze der Ecke A heißt auch der Pyramide **Spitze**, die Figur BCDEF ihre **Grundfläche**, und die Dreyecke ABC, ACD, u. s. f. ihre **Seitenflächen**.

152 F.

Jede

Jede Pyramide hat demnach so viele Seitenflächen, als die Grundfläche Seitenlinien hat: daher erhellet leicht, was dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Pyramiden sind, u. s. f. Wenn die Grundfläche auch ein Dreyeck, also die Pyramide dreyseitig ist; so kann jede Seitenfläche als die Grundfläche angesehen werden.

Die Entfernung der Spitze einer Pyramide von ihrer Grundfläche heißt ihre **Höhe**.

311 §.

Wenn Pyramiden gleiche und ähnliche Grundflächen haben, und überdem alle gleichnahmige Seitenflächen gegen die Grundflächen unter einerley Winkel geneigt sind: so sind sie gleich groß.

Beweis. Die Grundflächen passen auf einander: und wenn man sie gehörig auf einander legt; so fallen nicht allein die Ebenen jeder zwoer gleichnahmigen Seitenflächen zusammen, (287 §.) sondern auch alle Seitenlinien, (269 §.) und dieserwegen auch die Spitzen der Pyramiden. Also passen die Pyramiden in einander, und sind gleich groß.

312 §.

153 F. **Wenn man ein Parallelepipedum *AB* mit einer Ebene *CD* schneidet, die zwoen Seitenflächen *AE*, *BF* parallel liegt; so verhält sich das abgeschnittene Parallelepipedum *AC* zum ganzen *AB*, wie die Grundfläche des ersten *AK* zur Grundfläche des zweyten *AL*.**

Beweis. Es sey AF eine von den Seitenlinien, welche die Seitenflächen AE, BF schneiden; so wird eben diese Linie auch von CD irgendwo in D geschnitten. Wenn nun AD und AF commensurable Linien sind und AG ihr gemeinschaftliches Maaß ist, so trage man AG auf AF so vielmahl auf, als es angehet, und man setze, es werde $AD = nAG$, und $AF = mAG$, also $AG = \frac{1}{m} AF$ und $AD = \frac{n}{m} AF$ gefunden. Durch alle Theilungspuncte in AF lege man Ebenen mit CD parallel, und eine davon sey GH: so wird AC in n Parallelepipeda, und AB in m Parallelepipeda getheilt, wovon jedes $= AH$ ist, (309 §.) und man erhält $AC = nAH$, $AB = mAH$, also $AH = \frac{1}{m} AB$ und $AC = \frac{n}{m} AB$. Demnach ist $AC : AB = AD : AF$. (161 §.)

In dem Fall, wenn AD und AF inconmensurable Linien sind, kann man AF in soviele gleiche Theile, als man will theilen, und es wird $AG = \frac{1}{m} AF$ nie in AD aufgehen, wie groß auch die Zahl m angenommen wird. Indessen wird D allemal zwischen zweenen Theilungspuncten fallen, und wenn dies der $n$te, und $(n+1)$te Theilungspunct ist; so wird auch CD zwischen der $n$ten, und $(n+1)$ten Theilungs-Ebene fallen. Demnach sind wiederum ähnliche aliquote Theile von AF und AB gleichvielmahl in AD und AC enthalten, wie groß auch m angenommen ist, und die Reste sind jedesmahl kleiner als die gebrauchten Divisoren. Also folgt aus dem 161 §., es sey auch in diesem Fall $AC : AB = AD : AF$. Ferner hat man $AD : AF = AK : AL$, (202 §.) also auch $AC : AB = AK : AL$.

Die abgeschnittenen Stücke AC, DB verhalten sich demnach ebenfalls wie ihre Grundflächen AK, DL. Denn vermöge des Beweises ist $AC : AB$

$= AK$

= AK : AL, und AB : DB = AL : DL, also AC : DB = AK : DL. (162 §.)

313 §.

154 Fig. Gleich hohe Parallelepipeda auf gleichen und ähnlichen Grundflächen sind gleich groß.

Beweis. Ueber der Grundfläche ABCD des Parallelepipedi CE stehe noch ein andres Parallelepipedum, dessen zweyte Grundfläche QPRS mit EFGH als der zweyten Grundfläche des ersten in einer Ebene liegt, so sind beyde Parallelepipeda gleich hoch. Die erweiterte Ebene der Seitenfläche BE schneide die Ebenen DP und CR in AI und BK, so ist AI ⧣ BK. Eben die Ebene BE schneidet auch die Ebene PS, und wenn IK das Stück der Durchschnittslinie ist, das zwischen den wo es nöthig ist verlängerten Parallellinien PQ, RS liegt, so ist auch IK ⧣ AB, und AIKB ein Parallelogramm. (295 §.) Die Ebene der Seitenfläche CH schneide eben so die Ebenen DP und CR in DM und CL, die Ebene PS aber in LM, und LM sey das Stück der Durchschnittslinie zwischen den Parallellinien PQ, RS, so ist auch DMLC ein Parallelogramm. Wie nun auch ADMI, BCLK, Parallelogramme sind, so hat man auf eben der Grundfläche ein drittes Parallelepipedum, dessen zweyte Grundfläche MIKL ist. Zwo Seitenflächen dieses dritten Parallelepipedi, welches ich das mittlere nennen will, fallen mit zwoen Seitenflächen des einen CE, und die beyden übrigen Seitenflächen des mittlern mit zwoen Seitenflächen des andern CP in einerley Ebene: und wenn bewiesen ist, daß das mittlere DK = CE sey, so folgt aus eben dem Beweise, es sey auch DK = CP, mithin CE = CP.

Daß

Daß aber das mittlere Parallelepipedum DK = CE sey, erhellet so: die Körper AEIDHM, und BFKCGL sind dreyseitige Prismen (302 §.) ihre Grundflächen DHM und CGL sind gleich und ähnlich, (60 §.) weil DH = CG, DM = CL, und der Winkel HDM = GOM = GCL ist. (88 §.) Beyde Prismen stehen zwischen parallelen Ebenen ABKE, DCLH, und sind also gleich hoch; (299 §.) ihre Seitenflächen ADHE und BCGF, ADMI und BCLK, EHMI und FGLK sind gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt: (301 §.) also ist das Prisma AEIDHM = BFKCGL. (300 §.) Man nehme von beyden das dreyseitige Prisma FNIGOM ab, so bleiben gleiche vierseitige Prismen übrig, nemlich AEFNDHGO = BNIKCOML. Zu jedem dieser gleichen Körper setze man das dreyseitige Prisma ANBDOC hinzu: so hat man gleiche Summen, also das mittlere Parallelepipedum DK = CE.

314 §.

Grade Parallelepipeda *AP*, *CQ* auf gleichen obgleich unähnlichen Grundflächen *AB*, *CD* in gleicher Höhe, sind gleich groß. 155 Fig.

Beweis. Die vier Seitenflächen CD, CS, DG, GS, schliessen eine prismatische Fläche ein, wozu CG, EQ als Grundflächen gehören (306 §.) diese prismatische Fläche sey über EQ hinaus erweitert, und EF = LB genommen, durch F aber eine Ebene mit CG oder EQ parallel gelegt; so ist die Durchschnittsfigur FTWK den Grundflächen EQ, CG gleich und ähnlich, (304 §.) und EW ein Parallelepipedum, wovon die Seitenfläche EFTS der Seitenfläche LP des Parallelepipedi AP gleich und ähnlich ist. Denn beyde sind Rechtecke, und es ist EF = LB, FT = BP.

Auch die vier Seitenflächen EQ, EK, TQ, TK, des Parallelepipedi EW schliessen eine prismatische Fläche ein, wozu ET, DW als Grundflächen gehören. Diese prismatische Fläche sey über ET hinaus erweitert, so kann man sie diesseits ET mit einer Ebene schneiden, die den Grundflächen ET DW parallel liegt; alsdenn ist die Durchschnittsfigur HYZM den Grundflächen ET, DW gleich und ähnlich, und man erhält das dritte Parallelepipedum HT, dessen Grundfläche ET der Seitenfläche LP des Parallelepipedi AP gleich und ähnlich ist. Wird nun diese Seitenfläche LP für die Grundfläche des Parallelepipedi AP angenommen, so ist ihre Entfernung von der gegen überstehenden Seitenfläche AV die dazu gehörige Höhe. Die Ebene HYZM sey von der Grundfläche ESTF eben so weit entfernt; so ist das Ppp. HT = Ppp. AP; (313 §.) auch ist die Seitenfläche HF = AB, weil EF = LB war, und beyde Parallelogramme gleich hoch sind. (104 §.) Ueberdem ist AB = CD angenommen, also hat man HF = CD.

Vermöge des 312 §. hat man ferner Ppp. CQ : Ppp. EW = CD : EK; Ppp. EW : Ppp. HT = EK : HF, also Ppp. CQ : Ppp. HT = CD : HF; (162 §.) und weil CD = HF ist, so ist auch Ppp. CQ = Ppp. HT. Es war aber Ppp. HT = Ppp. AP, also auch Ppp. CQ = Ppp. AP.

315 §.

Jede zwey Parallelepipeda auf gleichen, obgleich unähnlichen, Grundflächen in gleichen Höhen sind gleich groß.

Beweis.

Beweis. Wenn beyde grade sind; so ist der Satz im vor. §. erwiesen. Ist eins schief; so setze man auf eben der Grundfläche ein grades in gleicher Höhe: dies ist dem schiefen, (313 §.) und dem andern graden, (314 §.) folglich auch dies letzte dem schiefen gleich. Sind beyde schief; so setze man auf eines jeden Grundfläche ein grades in eben der Höhe: so sind beyde grade Parallelepipeda gleich, (314 §.) auch ist jedes grade dem zugehörigen schiefen gleich, (313 §.) also sind auch beyde schiefe Parallelepipeda gleich groß.

316 §.

Die Diagonalfläche *ABCD* theilt jedes Parallelepipedum *HS* in zwey gleich grosse dreyseitige Prismen.

Beweis. Man halbire die Diagonallinie AD, BC, beyder Grundflächen in E und F, so ist EF mit den Seitenlinien und Seitenflächen des Parallelepipedi parallel, und man kann durch EF ein Paar Ebenen OQ, NP, mit den Seitenflächen des Parallelepipedi parallel legen. Diese theilen es in vier gleich grosse Parallelepipeda NO, QP, FR, EG, und die beyden ersten werden wiederum durch die Diagonalfläche in zwey dreyseitige Prismen getheilt. Mit diesen beyden Parallelepipeden NO, QP, gehe man eben so, wie mit dem ersten um, so erhält man abermahl in jedem von ihnen vier gleich grosse Parallelepipeda, wovon ihrer zwey BK, IE, und FM, LD, aufs neue durch dieselbe Diagonalfläche in zwey dreyseitige Prismen getheilt werden. Von den übrigen Parallelepipedis, durch welche die Diagonalfläche nicht durchgehet, ist die eine Hälfte im Prisma ABGCDS, die andre Hälfte im Prisma ABHCDR

156 Fig.

beschrieben. Jedesmahl, wenn man alle Parallelepipeda, durch welche die Diagonalfläche ABCD durchgehet, und welche ich die mittlern nennen will, eben so wie das erste theilt, geht von ihrer Summe die Hälfte ab: also kann die Summe dieser mittlern Parallelpipeden kleiner werden, als jeder gegebene geometrische Körper. (128 §. Rechenk.)

Es sey das Prisma ABGCDS $= P$, das andre, ABHCDR $= p$, die Summe der in jedem dieser Prismen beschriebenen Parallelepipeden $= S$, die Summe der mittlern $= s$, das ganze Parallelepipedum GR $= \Pi$, so ist $\Pi = 2S + s = P + p$. Wäre nun $P > p$, so sey $P - p = d$. Man setze die Theilung der mittlern Parallelepipeden auf die beschriebene Art so lange fort, bis $s < d$ ist. Alsdenn hat man $2S + s < 2S + d$, also $P + p < 2S + d$, weil aber $P = p + d$ gesetzt ist, so giebt das $2p + d < 2S + d$. Demnach wäre $p < S$, welches nicht seyn kann. Hätte man $p > P$, und $p = P + d$ gesetzt, so wäre $P + p = 2P + d$, und es müste $2P + d < 2S + d$, mithin $P < S$ seyn, welches eben so wenig bestehen kann.

Können aber beyde Prismen P und p nicht ungleich groß seyn, so ist nothwendig $P = p$.

317 §.

Jedes dreyseitige Prisma $ABGCDF = P$ ist die Hälfte eines Parallelepipedi, das mit demselben eine gleiche Höhe und eine doppelt so grosse Grundfläche hat.

Beweis. Durch die Seitenlinien AB, CD, lege man Ebenen BR, CR, mit den Seitenflächen GD, GA, parallel, welche die Ebenen der Grundflächen in AR, DR, BH, CH, schneiden: so erhält man

man ein Parallelepipedum GR = Π = 2P, (316 §.) dessen Grundfläche AGCH doppelt so groß, als des Prisma P Grundfläche BGC. Aber jedes andre Parallelepipedum Q, dessen Höhe eben so groß, und dessen Grundfläche = AGCH ist, hat eben die Grösse: demnach ist auch Q = 2P, oder P = $\frac{1}{2}$Q.

Also sind dreyseitige Prismen gleich groß, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben.

318 §.

Zwey Parallelepipeda *P* und *p* von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen *B* und *b*. 157 Fig.

Beweis. Man nehme zuerst ein Paar rechtwinklichte Parallelepipeda AC, und DF, deren Grundflächen AB und DE, ihre gleich grossen Höhen BC und EF sind. Man verlängere die eine Seitenlinie AG der Grundfläche AB nach H, und setze an GB ein Rechteck BGHI, welches so groß ist, als DE. (206 §.) Weil nun HI mit GC und AN parallel ist, (281 §.) so lege man durch HI eine Ebene HK mit GC parallel, welche die Seitenflächen AM in HL, BN in IK, und die Ebene der Grundfläche MN zwischen den Parallelen OM, CN, in KL schneidet: so erhält man ein Parallelepipedum GK = DF. Es ist aber Ppp. AC : Ppp. GK = AB : GI, (321 §.) also auch Ppp. AC : Ppp. DF = AB : DE.

Statt jeder zweyer andern Parallelepipeden P, *p*, deren Grundflächen B, *b*, sind, und deren gleiche Höhe A ist, kann man ein Paar rechtwinklichte AC, DF verzeichnen, deren Höhe BC = EF = A, und wovon des einen Grundfläche AB = B, des andern Grundfläche DE = *b* ist: (315 §.) sodann ist AC = P, und DF = *p*. Folglich auch P : *p* = B : *b*.

Demnach verhalten sich auch dreyseitige Prismen wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich sind. (316 §.)

Auch ist jedes dreyseitige Prisma einem Parallelepipedo gleich, das mit demselben eine gleiche Grundfläche und Höhe hat.

319 §.

158 Fig. **Jedes vielseitige Prisma *BGKE* verhält sich zum dreyseitigen *LMNOPQ* von gleicher Höhe wie des erstern Grundfläche zur Grundfläche des letztern.**

Beweis. Man theile die Grundflächen ABCDE, FGHIK durch gleichnahmige Diagonallinien AC und FH, AD und FI, u. s. f. in Dreyecke; so sind jede zwo gleichnahmige Diagonallinien einander parallel, (97 §.) und die Diagonalflächen ACHF, ADIF u. s. f. theilen das ganze Prisma in so viel dreyseitige von eben der Höhe, in so viel Dreyecke die Grundflächen getheilt sind. Nun setze man der Kürze wegen das dreyseitige Prisma LMNOPQ $= \pi$, seine Grundfläche LMN $= \beta$. Man setze ferner die Dreyecke ABC $= a$, ACD $= b$, ADE $= c$, und bezeichne die zu diesen Grundflächen gehörigen Prismen mit P, Q, R: so hat man aus dem 318 §. $P : \pi = a : \beta$, $Q : \pi = b : \beta$, $R : \pi = c : \beta$, u. s. f. Also $P + Q + R : \pi = a + b + c : \beta$, (171 §.) oder Pr. BGKE : Pr. $\pi =$ ABCDE : β.

Demnach ist ein vielseitiges Prisma einem dreyseitigen gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat: und eben deswegen **sind alle Prismen, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, gleich groß.** Auch **verhalten sich überhaupt** ein Paar Prismen wie ihre Grundflächen, wenn die Höhen gleich sind. (318 §.)

320 §.

Zwey Prismen verhalten sich wie ihre Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind. 159 Fig.

Beweis. Man vergleiche zuerst ein Paar rechtwinklichte Parallelepipeda AC, DF, die auf gleichen und ähnlichen Grundflächen AB, DE, stehen so, daß AG = DH, und GB = HE sey. Die Höhe des ersten sey BC, die Höhe des andern EF. Nimmt man nun die Seitenflächen GC und HF als die Grundflächen an; so sind die Höhen AG und DH gleich, und man hat Ppp. AC : Ppp. DF = GC : FH. (319 §.) Es ist aber GC : FH = BC : EF: (203 §.) also Ppp. AC : Ppp. DF = BC : EF. Wenn nun überhaupt ein Prisma P die Höhe A, ein andres p die Höhe a hat, und beyder Grundflächen gleich sind: so kann man allemahl ein Paar gleiche und ähnliche Rechtecke AB, DE zeichnen, die so groß, als jene Grundflächen sind. (216. 206 §.) Setzt man nun auf AB ein rechtwinklichtes Parallelep. AC in der Höhe BC = A, auf DE ein andres DF in der Höhe EF = a: so ist AC = P, und DF = p, (319. §.) folglich auch P : p = A : a.

321 §.

Das Verhältniß zweyer Prismen ist aus den Verhältnissen ihrer Grundflächen und Höhen zusammengesetzt.

Beweis. Des einen Prisma P Grundfläche sey B, und Höhe A, des andern p Grundfläche b, und Höhe a: so kann man mit beyden ein drittes Prisma π vergleichen dessen Grundfläche b, und Höhe A ist. Nun hat man

$$P : \pi = B : b \text{ (319 §.)}$$
$$\pi : p = A : a \text{ (320 §.)}$$

Also ist $P : p = \begin{pmatrix} B : b \\ A : a \end{pmatrix}$ (219 §. Rech.)

Hat man statt P und p ein paar Würfel C, c und ist L des ersten, l des zweyten Seitenlinie: so ist des ersten Höhe L, des zweyten l. Also hat man $C : c = \begin{pmatrix} B : b \\ L : l \end{pmatrix}$.

Aber B und b sind Quadrate, und L, l ihre Seitenlinien: also ist $B : b = \begin{pmatrix} L : l \\ L : l \end{pmatrix}$, (205 §.) folglich wird $C : c = \begin{pmatrix} L : l \\ L : l \\ L : l \end{pmatrix}$, oder das Verhältniß zweener Würfel ist dreymahl so groß, als das Verhältniß ihrer Seiten (ratio triplicata laterum.)

322 §.

Weil $\begin{pmatrix} B : b \\ A : a \end{pmatrix} = B \times A : b \times a$; (220 §. R.) so ist auch $P : p = B \times A : b \times a$, oder zwey Prismen verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

Dafern nun $B : b = a : A$ ist, so hat man $B \times A = b \times a$. (176 §. Rech.) Wenn also die Grundflächen sich umgekehrt, wie die Höhen verhalten; so sind die Prismen gleich. Auch umgekehrt: wenn zwey Prismen gleich sind; so verhalten sich die Grundflächen umgekehrt, wie die Höhen.

323 §.

Den körperlichen Inhalt eines Prisma auszurechnen, wenn der Inhalt der Grundfläche B im Quadratmaaß, und die Höhe A im

im Längenmaaß, das mit jenem Quadratmaaß einerley Nahmen hat, gegeben sind.

Aufl. Man muß einen andern Körper von bekannter Grösse für das Maaß annehmen, und prüfen, wie vielmahl derselbe entweder ganz, oder ein aliquoter Theil von ihm, in dem Prisma P enthalten sey. Hiezu erwählet man einen Würfel C, dessen Seite L so lang ist, als eines von den im 113 §. erklärten Maassen, z. E. ein Fuß, eine Ruthe, u. s. f. Der Würfel C erhält den Nahmen von diesem Längenmaasse, dem die Seite desselben gleich genommen wird: er heist eine Cubic-Ruthe, ein Cubic-Fuß, Cubic-Zoll, u. s. f. nachdem seine Seite eine Ruthe, einen Fuß einen Zoll lang ist, u. s. f. Wenn nun die Grundfläche des Prisma in Zahlen nach einem solchen Quadratmaaß gegeben ist, das mit dem Längenmaaß, dem die Seite des Würfels gleich ist, einerley Nahmen hat; so ist des Würfels Grundfläche $= 1^2$ im Quadratmaaß von eben dem Nahmen, und $C : P = 1^3 : B \times A$. (322 §.) Also ist der Würfel C im Prisma P so vielmahl enthalten, als Eins in dem Product $B \times A$ enthalten ist, und man findet den körperlichen Inhalt des Prisma im Cubicmaaß, das mit dem Quadratmaaß, wodurch der Inhalt der Grundfläche ausgedrückt ist, einerley Nahmen hat, wenn man den Inhalt der Grundfläche mit einer Zahl multiplicirt, welche die Höhe des Prisma im Längenmaaß von eben dem Nahmen ausdrückt.

$$
\begin{array}{r}
\text{Es sey } B = 582,374 \text{ Q. R.} \\
A = 6,253 \text{ R.} \\
\hline
1747122 \\
2911870 \\
1164748 \\
3494244 \\
\hline
\text{so wird } P = 3641,584622 \text{ Cub. R.}
\end{array}
$$

324 §.

Die Würfel selbst sind Prismen, und wenn eines Würfels Seite durch die Zahl λ ausgedrückt: ist so ist seine Grundfläche $= \lambda . \lambda$, (220 §.) seine Höhe $= \lambda$, also sein Inhalt $= \lambda\lambda\lambda = \lambda^3$. Wenn man demnach ein Product dreyer Factoren macht, wovon jeder die Länge der nach einem bekannten Längenmaaß gemessenen Seite des Würfels ausdrückt: so ergiebt dies Product, wie vielmal ein Würfel, dessen Seite so lang, als das gebrauchte Längenmaaß ist, in dem gegebenen enthalten sey. Dies ist der Ursprung des Namens einer Cubic-Zahl (180 §. Rechenk.)

Ist umgekehrt die körperliche Grösse eines Würfels im Cubicmaaß gegeben; so wird die Seitenlinie des Würfels im Längenmaaß, das mit jenem Cubicmaaß einerley Nahmen hat, durch Ausziehung der Cubicwurzel aus der gegebenen Zahl gefunden.

Eine Cubic-Ruthe enthält also 1000 Cubic-Fuß, ein Cubic-Fuß 1000 Cubic-Zoll, ein Cubic-Zoll 1000 Cubic-Linien, eine Cubiclinie 1000 Cubic-Scrupel, wenn beym Längenmaasse die Decimal-Abtheilung ist gebraucht worden. Hiedurch werden zugleich die Nahmen solcher Decimaltheile bestimmt, die an einer Zahl hängen, welche den Inhalt

Inhalt eines Körpers ausdrückt. Im vorigen §. fand man das Parallelepipedum P = 3641,584622 Cub. R. und den anhängenden Decimalbruch bringt man dem 136 §. der Rechenk. gemäß, leicht auf Cubicfüsse und kleinere Theile des Cubicmasses. Es sind nemlich 0,584622 Cub. R. = 0,584622 × 1000 Cub. Fuß = 584,622 Cub. Fuß, und 0,622 Cub. F. = 0,622 × 1000 Cub. Zoll = 622 C. Z. Also ist P = 3641 C. R. 584 C. F. 622 C. Z. groß.

Demnach kann man jedesmahl die an einer Zahl von dieser Art hängende Decimal-Zahl von der Linken gegen die Rechte in Classen so eintheilen, daß jede Classe 3 Ziffern bekommt, da man denn in der letzten eine oder zwo Nullen zusetzt, wenn nur eine oder zwo Ziffern in dieselbe kämen. Nun werden diese Classen Cubic-Füße, Cubic-Zolle, Cubic-Linien u. s. f. nach einander bedeuten, wenn die Einheit eine Cubic-Ruthe ist: auch sieht man leicht, wie sich dies ändre, wenn die Einheit ein Cubic-Fuß, ein Cubic-Zoll, u. s. f. ist.

325 §.

Nach dem Duodecimal-Maaß hält eine Cubic-Ruthe 1728 Cubic-Fuß, ein Cubic-Fuß 1728 Cubic-Zoll, ein Cubiczoll 1728 Cubiclinien, und in der Cubiclinie sind 1728 Cubic-Scrupel enthalten: also kann man leicht Decimal-Cubic-Maaß auf Duodecimal-Cubic-Maaß, und umgekehrt, dieses auf jenes bringen, wenn man folgende Sätze als Reductions-Sätze merket.

Bey einerley Ruthenmaaß sind
1000 Dec. C. Fuß = 1728 Duod. C. Fuß:
bey einerley Fußmaaß sind
1000 Dec. C. Zoll = 1728 Duod. C. Zoll.

Es sey die Frage: 584 Cubicfuß 622 Cubiczoll Decimalmaaß, wieviel sind es Duodecimal Cubicfuß und kleinere Duodecimal-Cubictheile von solchen Cubicfüssen: so ist der Ansatz

1000 Dec. C. F. — 1728 Duod. C. F. — 584 C. F. 622 C. Z. Dec. M.?

× 1000 | × 1000

1000000 Cub. Zoll. | 584622 Dec. C. F. Z.

1728

4676976
1169244
4092354
584622

1010|226816

1000000) 226816 | 1010 C. F. 391 C. Z. 1621 C. Lin. 254 C. Scr. Duod. Maaß.

1728

1814528
453632
1587712
226816

391|938048

1000000) 938048

1728

7504384
1876096
6566336
938348

1621|146944

1000000) 146944

1728

1175552
293888
1028608
146944

253|919232

1000000)

Wird

Wird umgekehrt gefragt: 597 Cub. Fuß 918 Cub. Zoll Duodec. Maaß wieviel sinds Cub. Fuß Decimal-Maaß? so ist der Ansatz dieser:

1728 Duod. C. F. — 1000 Dec. C. F. —	1728 597	C. F. 918 C. Z. Duod. M.?
1728	12096	
13824	15552	
3456	8640	
12096	918	
1728	1032534	Duod. Cub. Z.
2985984	× 1000	Fac.
	1032534000 2985984)	345,793547422 Dec. Cub. Fuß.

Ausser diesen Reductionen des Decimal- und Duodecimal-Cubicmaasses, wobey einerley Längenmaaß zum Grunde liegt, macht die Verschiedenheit des an verschiedenen Orten gebräuchlichen Längenmaasses zuweilen die Reduction solcher Zahlen, welche die Grösse eines Körpers im Cubicmaaß angeben, auf ein Cubicmaaß eines andern Nahmens nothwendig. Man muß von den Zahlen, welche die Vergleichungstafel der Fußmaasse im 254 §. der Rechenkunst angiebt, die Cubiczahlen machen, um solche zu erhalten, welche das Verhältniß der Cubicmaasse für die dabey angezeigten Oerter angeben: und wenn man den Reductionssatz für zwey solche Cubicmaasse haben will; so cubirt man die Zahlen im Reductionssatz für die Längenmaasse.

Sind 144 Lond. Fuß $= 135$ Paris. Fuß;
so sind 144^3 Lond. Cub. F. $= 135^3$ Paris. Cub. F.

Die Reductionsrechnungen selbst werden durch den Gebrauch der Logarithmen sehr erleichtert, wie in dem nachstehenden Exempel.

144^3 Lond. C. F. — 135^3 Parif. C. F. — 417 L. C. F.?

$$l144 = 2{,}1583625 \qquad l135 = 2{,}1303338$$
$$3 \qquad\qquad 3$$
$$l144^3 = 6{,}4750875 \qquad l135^3 = 6{,}3910014$$
$$l417 = 2{,}6201360$$
$$9{,}0111374$$
$$l144^3 = 6{,}4750875$$

Log. der gesuchten Zahl = 2,5360499
und diese ist = 343,597391 Paris. Cub. Fuß.

326 §.

152 Fig. Wenn eine Ebene die Pyramide *ABCDEF* mit der Grundfläche parallel schneidet: so ist die Durchschnitts-Figur *GHIKL* der Grund-Fläche ähnlich, und die Flächen-Räume beyder Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide.

Beweis. Die Durchschnitts-Figur hat so viel Seiten-Linien als die Grundfläche, weil durch jede Seitenlinie der Grundfläche eine Seitenfläche geht, deren Durchschnitt mit der schneidenden Ebene eine Seitenlinie der Durchschnitts-Figur wird. Ueberdem ist jeder Winkel in der Durchschnitts-Figur so groß, als der ihm zugehörige Winkel in der Grundfläche, dessen Spitze nemlich mit jenes Spitze in einer Seitenlinie der Pyramide liegt. Denn es ist BF mit GL, und BC mit GH parallel, (295 §.) also FBC = LGH. (282 §.) Auf ähnliche Art erhellet, daß auch BCD = GHI, CDE = HIK sey, u. s. f. Ferner sind die gleichnahmigen Seiten beyder Figuren einander proportional. Es ist nemlich BF : GL = AB : AG, und BC : GH

= AB

= AB : AG, (182 §.) also auch BF : GL = BC : GH. Aus einem ähnlichen Grunde folgt, daß auch BC : GH = CD : HI = DE : IK sey, u. s. f. Also ist BCDEF : GHIKL = BFq : GLq. (210 §.) Es sey AN eine lothrechte Linie von A auf die Grundfläche, welche die Durchschnitts-Figur in M trift: so ist auch AM auf der Durchschnitts-Figur senkrecht, und die Linien BN, GM sind parallel, (295 §.) mithin ist AN : AM = AB : AG, (182 §.) = BF : GL. Demnach ist ferner ANq : AMq = BFq : GLq, folglich BCDEF : GHIKL = ANq : AMq.

327 §.

Jede dreyseitige Pyramide *ABCD* läßt sich in zwey Prismen und zwo Pyramiden eintheilen, wovon die beyden Prismen zusammen mehr als die Hälfte der ganzen Pyramide betragen. 160 Fig.

Beweis. Man theile zuerst die drey Seiten-Linien AB, AC, AD bey E, F, G in zweene gleiche Theile; so schneidet die Ebene EFG eine Pyramide AEFG ab. Alsdenn ist EF mit BC, mit FG mit CD parallel, (176 §.) also ist die Ebene EFG mit BCD parallel, (296 §.) und EFG ∽ BCD. (326 §.) Man theile ferner BC, CD, BD bey H, I, K in zweene gleiche Theile, und ziehe FH, HI, FI: so wird FHCI die zwote Pyramide, und ihre Grundfläche HCI ist der Grundfläche EFG der ersten Pyramide gleich und ähnlich. Denn es ist FI mit AD parallel, und FG mit DI, also auch DI = FG = CI. Ueberdem sind die Winkel HCI = EFG, und HIC = BDC = EGF: also passen die Dreyecke HCI und EFG auf einander. Ferner sind die Seitenflächen AEG, FHI, eben so AEF, FHC, und AFG,

FCI

FCI, gegen die Grundflächen EFG, CHI, unter gleichen Winkeln geneigt: (301 §.) also sind beyde Pyramiden AEFG, und FHCI gleich groß. (311 §.)

Man ziehe noch GK und HK, so sind GK und FH mit EB parallel: (176 §.) also ist EFGBHK ein Prisma. (303 §.) Ueberdem sind FG und HK mit DI parallel, (176 §.) und die Ebene FHI ist mit GKD parallel; also auch FHIGKD ein Prisma, (303 §.) dessen Grundflächen die Dreyecke FHI, GKD sind. Man verzeichne die Parallelepipeda OF, KM, wie im: 317 §. so liegt FGLM in der Ebene EFG, und die Parallelepipeda OF, KM, sind gleich hoch. Ferner ist HKDI = 2BHK (105 §.) = OBHK: also sind auch ihre Grundflächen, und dieserwegen beyde Parallelepipeda OF, KM, folglich ihre Hälften, die Prismen EFGBHK, FHIGKD gleich groß.

Nun zieht man EH und EK: so erhellet leicht, daß die Pyramide EBHK = AEFG mithin auch EBHK = FHCI sey. (311 §.) Weil ferner EFGBHK > EBHK; so ist auch FHIGKD > FHCI. Demnach betragen beyde Prismen zusammen mehr, als beyde Pyramiden zusammen, oder beyde Prismen zusammen sind grösser, als die Hälfte der ganzen Pyramide ABCD.

328 §.

Man kann jede der Pyramiden AEFG, und FHCI eben so wieder eintheilen, wie vorhin die ganze Pyramide ABCD eingetheilt ward, und es auf solche Art dahin bringen, daß die Summe aller Prismen, die man in der Pyramide *ABCD* hervorbringt, grösser wird, als jeder Körper, der kleiner ist, als die Pyramide *ABCD*.

Es

Es sey nemlich Z ein solcher Körper, und seine Differenz von der Pyramide ABCD sey D: so ist $Z + D = ABCD$. Wenn nun S die Summe der Prismen ist, und δ ihr Unterschied von der Pyramide ABCD: so ist auch $S + \delta = ABCD$, und $S + \delta = Z + D$. Aber bey jeder neuen Eintheilung geht von δ mehr, als die Hälfte ab, demnach muß einmahl $\delta < D$ werden, und in diesem Fall ist $S > Z$.

329 §.

Es sey *abcd* eine andre dreyseitige Pyramide 161
über der Grundfläche *bcd*, die eben so hoch ist, als Fig.
die Pyramide ABCD. (160 Fig.) Wenn man diese eben so wie ABCD in zwey Prismen *efgbhk*, *fhigkd*, und zwo Pyramiden *aefg*, *fhci*, theilt; so sind die Ebenen *efg*, *bcd*, und EFG, BCD gleich weit von einander entfernt, und die Prismen EFGBHK, *efgbhk* gleich hoch, denn ein Paar lothrechte Linien aus A und *a* auf BCD und *bcd* werden von den Ebenen EFG, *efg*, in dem Verhältniß $AE : EB = ae : eb$ getheilt, wie sogleich aus dem 300 §. erhellet, wenn man sich noch durch A und *a* ein Paar mit den Grundflächen parallele Ebenen vorstellt. Demnach sind auch AEFG, *aefg*, und FHCI *fhci*, gleich hohe Pyramiden. Ferner ist $BCD = 4BHK$ und $bcd = 4bhk$, (209 §.) also $BHK : bhk = BCD : bcd$. Aber $EFGBHK : efgbhk = BHK : bhk$ (319 §.) also $EFGBHK : efgbhk = BCD : bcd$.

Man setze Kürze halber das erste dieser Prismen $= P$ das zweyte $= p$, so ist auch $2P : 2p = BCD : bcd$, oder die Summe der ersten beyden Prismen in ABCD verhält sich zur Summe der ersten durch eben die Theilung entstandenen Prismen in *abcd*, wie $BCD : bcd$.

Theilt man die gleich hohen Pyramiden AEFG und *aefg* eben so ein: so erhellet, daß auch beyde Prismen in AEFG zu beyden Prismen in *aefg* sich verhalten, wie EFG : *efg* = BCD : *bcd*, und dies gilt auch von den Prismen, die man durch eben die Eintheilung in den gleich hohen Pyramiden FHCI und *fhci* hervorbringt. Also verhalten sich noch alle sechs Prismen in ABCD zu den ähnlichen sechs Prismen in *abcd*, wie BCD zu *bcd*. Man sieht leicht, daß dies Verhältniß zwischen den beyden Summen der Prismen in beyden Figuren allemahl bleibe, wie oft auch die Eintheilung ist wiederholt worden.

330 §.

160 Zwo dreyseitige Pyramiden *ABCD*, *abcd*,
161 die gleich hoch sind, verhalten sich wie ihre
F. Grundflächen *BCD*, *bcd*.

Beweis. Man setze $\frac{BCD}{bcd} \cdot abcd = Z$, so kann Z weder kleiner noch grösser als ABCD seyn.

1.) Es sey Z < ABCD, so kann man ABCD nach dem 328 §. in soviele Prismen und Pyramiden theilen, daß die Summe der Prismen S > Z wird. Dies sey geschehen, die Pyramide *abcd* sey eben so getheilt, und die Summe der Prismen in dieser Pyramide = *s*: so ist $S > \frac{BCD}{bcd} \cdot abcd$, und $\frac{BCD}{bcd} \cdot abcd > \frac{BCD}{bcd} \cdot s$, also wäre $S > \frac{BCD}{bcd} \cdot s$, oder $\frac{S}{s} > \frac{BCD}{bcd}$ gegen den 329 §.

2.) Es

2.) Es sey $Z > ABCD$, so ist $\frac{BCD}{bcd} \cdot abcd >$ $ABCD$, folglich $\frac{bcd}{BCD} \cdot ABCD < abcd$. Nun theile man die Pyramide *abcd* dem 328 §. gemäß in soviele Prismen und Pyramiden, daß die Summe der Prismen $s > \frac{bcd}{BCD} \cdot ABCD$ wird; zugleich theile man ABCD eben so ein, und die Summe der Prismen in ABCD sey $= S$. Ist dies geschehen, so ist $\frac{bcd}{BCD} \cdot ABCD > \frac{bcd}{BCD} \cdot S$, also $s > \frac{bcd}{BCD} \cdot S$, mithin wäre $\frac{s}{S} > \frac{bcd}{BCD}$, wiederum dem 329 §. entgegen.

Demnach ist $Z = ABCD$, oder $\frac{BCD}{bcd} \cdot abcd =$ $ABCD$, folglich $BCD : bcd = ABCD : abcd$.

Also sind dreyseitige Pyramiden gleich groß, wenn ihre Grundflächen und Höhen gleich sind.

§. 331

Eine vielseitige Pyramide *ABCDEF*, ver- 162
hält sich zur dreyseitigen *GHIK* von gleicher F.
Höhe, wie der ersten Grundfläche *BCDEF* zur Grundfläche der zweyten *HIK*.

Beweis. Man theile die Grundfläche BCDEF durch Diagonallinien BD, BE u. s. f. in Dreyecke: so sind ABCD, ABDE, ABEF ebenfalls dreyseitige Pyramiden von eben der Höhe. Diese bezeichne man der Kürze wegen mit P, Q, R und ihre Grundflächen mit *a*, *b*, *c*; überdem sey $GHIK = \pi$, die

Grundfläche HIK $= \beta$: so ist $P : \pi = a : \beta$, $Q : \pi = b : \beta$, $R : \pi = c : \beta$ u. s. f. (330 §.) Folglich $P + Q + R : \pi = a + b + c : \beta$, (170 §.) oder ABCDEF : GHIK = BCDEF : HIK. Es erhellet leicht, daß der Beweis einerley bleibe, die Pyramide ABCDEF mag so viel Seitenflächen haben, als sie wolle.

Jede vielseitige Pyramide ist also einer dreyseitigen gleich, die mit ihr eine gleiche Grundfläche und Höhe hat; und hieraus folgt, daß alle Pyramiden gleich groß sind, die gleiche Grundflächen und Höhen haben. Auch ist das Verhältniß gleich hoher Pyramiden dem Verhältniß ihrer Grundflächen gleich.

332 §.

Jedes Prisma ist dreymahl so groß als eine Pyramide, die mit demselben eine gleiche Grundfläche und Höhe hat.

163 F. Beweis. Es sey ABCDEF ein grades dreyseitiges Prisma, dessen Grundflächen ABC und DEF sind. In der Seitenfläche ABED ziehe man die Diagonallinie BD, und in der Seitenfläche ACFD die Diagonallinie CD: so schneidet die Ebene BCD vom Prisma eine Pyramide ABCD ab, die mit dem Prisma eben die Grundfläche ABC, und Höhe AD hat. Man zieht auch in der Seitenfläche BCFE die Diagonallinie CE: so schneidet die Ebene CDE noch eine Pyramide CDEF ab, die mit dem Prisma einerley Grundfläche DEF = ABC, und Höhe CF = AD hat. Also ist ABCD = CDEF. (330 §.) Das noch übrige Stück BEDC ist gleichfalls eine dreyseitige Pyramide, deren Grundfläche BED = ABD ist. Weil nun ABD

auch eine Grundfläche der Pyramide ABCD ist (310 §.) und der beyden letztgenannten Pyramiden ABDC, und BEDC Spitzen in C zusammen, ihre Grundflächen aber in einer Ebene fallen; so haben sie gleiche Höhen. Demnach ist ABCD = BEDC, folglich auch CDEF = BEDC, und das Prisma ABCDEF = 3 Pyr. ABCD.

Ist nun eines jeden andern Prisma P Grundfläche B, und Höhe A, und hat eine Pyramide π eine eben so grosse Grundfläche und Höhe; so kann man ein Dreyeck ABC = B verzeichnen, und ein dreyseitiges grades Prisma ABCDEF in der Höhe AD = A darauf setzen. Zieht man hiernächst BD und CD, so ist ABCD = π, (330 §.) und 3ABCD = 3π. Da nun ABCDEF = 3ABCD ist, so ist ABCDEF = 3π: aber auch P = ABCDEF (319 §.) also P = 3π.

333 §.

Diesemnach verhalten sich zwo Pyramiden wie die Prismen, so mit ihnen gleiche Grundflächen und Höhen haben, und ihr Verhältniß ist aus dem Verhältniß der Grundflächen und Höhen zusammengesetzt. Wenn demnach die Grundflächen zwoer Pyramiden gleich sind; so verhalten sie sich wie die Höhen.

Steht eine Peramide auf der Grundfläche B in der Höhe A; so ist eine andre Pyramide auf eben der Grundfläche in der Höhe 3A dreymahl so groß, und eben so groß ist ein Prisma auf der Grundfläche B in der Höhe A: also ist ein Prisma einer Pyramide gleich, die eine eben so grosse Grundfläche, und eine dreymahl so grosse Höhe hat.

Haben zwo Pyramiden P und π die Grundflächen B, β, und Höhen A, α; so ist auch $P : \pi = A \times B : \alpha \times \beta$. (322 §.) Sind also die Pyramiden gleich, so sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional; umgekehrt: wenn $B : \beta = \alpha : A$ ist; so folgt daraus $P = \pi$.

334 §.

Den Inhalt einer Pyramide π auszurechnen, wenn der Quadrat-Inhalt ihrer Grundfläche *B* nebst der Höhe *A* gegeben ist.

Aufl. Ein Prisma P auf eben der Grundfläche in gleicher Höhe wäre $= B \times A$, (323 §.) und es ist $\pi = \frac{1}{3} P$, (332 §.) also wird $\pi = \frac{1}{3} . B \times A$, oder der dritte Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe, giebt den körperlichen Inhalt der Pyramide. Wenn

B	=	7983,5246 Quadratfuß
A	=	512,3 Fuß
		2395,05738
		15967,0492
		79835,246
		3991762,30
so ist P	=	4089959,65258 Cub. Fuß.
und π	=	1363319,884193 Cub. F.

Der

Der XVIII. Abschnitt.
Vom Cylinder und Kegel.

335 §.

Wenn eine grade Linie CD durch des Kreises AB Mittelpunct C gehet, und nicht in dieses Kreises Ebene liegt; wenn ferner durch des Kreises Umfang eine krumme Oberfläche gehet, die so beschaffen ist, daß jede durch einen Punct E im Umfang des Kreises mit CD parallel gezogene grade Linie EF ganz in diese Oberfläche fällt; so heißt diese krumme Fläche eine Cylinderfläche. Wird diese mit noch einer Ebene GI der Fläche des Kreises AB parallel geschnitten; so wird dadurch ein Körper ABGI begränzt, den man einen Cylinder, eine Walze, oder eine Rundsäule nennt. Die beyden ebenen Figuren AB, GI, heissen seine Grundflächen, CD seine Axe, und die Entfernung der Grundflächen von einander heißt des Cylinders Höhe. 164 F.

336 §.

Beyde Grundflächen des Cylinders sind gleich grosse Kreise, und die Axe geht durch beyder Mittelpunct. 164 F.

Beweis. Vermöge der gegebenen Erklärung ist die eine Grundfläche AB ein Kreis, durch dessen Mittelpunct C die Axe geht, welche die Ebene der andern Grundfläche in D trift. Wenn nun durch A die Linie AG mit CD parallel gezogen ist; so schneidet AG auch die Ebene GI in G, und dieser Durchschnittspunct liegt in dem Umfang der Durchschnittsfigur. Ferner ist DG mit AC parallel, (295 §.) also

also DG = AC. Wenn überdem durch jeden andern Punct E im Umfang des Kreises AB die grade Linie EH mit CD parallel gezogen ist, welche den Umfang der Durchschnittsfigur in H trift; so ist auch DH = CE, vermöge des erwiesenen: folglich DG = DH, weil AC = CE ist. Also sind alle Puncte des Umfangs GHI von D gleichweit entfernt. Die Figur GHI ist ein Kreis, dessen Mittelpunct D, und dessen Halbmesser = AC ist, und beyde Grundflächen sind gleiche Kreise.

Jeder Schnitt einer mit den Grundflächen parallelen Ebene giebt also ebenfalls einen Kreis, dessen Mittelpunct in den Durchschnittspunct mit der Axe fällt.

337 §.

Wenn eine Ebene durch die Axe des Cylinders gehet, so ist die Durchschnittsfigur ein Parallelogramm AGIB: denn AB und GI sind parallel, und die graden Linien, welche durch A und B in CD parallel laufen, fallen zugleich in die Ebene ADB und in des Cylinders Oberfläche, also sind es die Durchschnittslinien mit der Cylinderfläche.

338 §.

Ein **senkrechter** oder **grader Cylinder** ist, dessen Axe CD auf den Grundflächen senkrecht steht, ein **schiefer Cylinder** aber, dessen Axe gegen die Grundflächen unter einem schiefen Winkel geneigt ist.

Der Schnitt durch die Axe des senkrechten Cylinders ist ein Rechteck AGIB, dessen Grundlinie AB dem Durchmesser der Grundfläche, und dessen Höhe AG der Höhe des Cylinders gleich ist. Es ist oft bequem, blos diesen Schnitt durch die Axe anstatt des Cylinders zu zeichnen, weil man sich den zugehörigen Cylinder leicht mit vorstellen kann. Gemeinig-

lich

lich stellt man sich die Sache so vor: der Cylinder entstehe, wenn man das Rechteck AGIB um die Mittellinie CD so weit herum drehet, bis AG in BI, und BI wieder in AG kommt. Man siehet leicht, daß AG bey diesem Herumdrehen durch die eine Hälfte, und BI durch die andre Hälfte der Cylindrischen Oberfläche fortgehen, die Ebene ACDG aber in der einen, und DCBI in der andern Hälfte des Cylindrischen Raums herumgehen würde. Es ist blos ein Hülfsmittel für die Einbildungskraft, wenn man sich da einen Cylinder vorstellen soll, wo nur ein Rechteck als ein Schnitt durch die Axe gezeichnet ist.

339 §.

Wenn wiederum eine grade Linie AC zwar die 165 F.
Ebene eines Kreises BD im Mittelpunct C trift, aber nicht in des Kreises Ebene liegt; wenn ferner durch einen Punct A der Linie AC und alle Puncte im Umfang des Kreises BD eine krumme Oberfläche von der Beschaffenheit durchgehet, daß jede durch A und einen Punct E im Umfang dieses Kreises gezogene grade Linie AE ganz in diese Oberfläche fällt: so heißt diese krumme Fläche eine **Kegelfläche**. Derjenige geometrische Körper, welchen diese krumme Fläche mit der Ebene des Kreises zusammen begränzt, wird ein **Kegel** (conus) genannt: die Linie AC heißt seine Axe, BD seine **Grundfläche**, A seine **Spitze**, und die Entfernung der Spitze von der Grundfläche seine **Höhe**. Die Seite des Kegels heißt jede grade Linie, wie AE, auf der Oberfläche desselben zwischen seiner Spitze und einem Punct E im Umfang der Grundfläche.

Schneidet man also den Kegel durch seine Axe; so ist die Durchschnittsfigur ABD ein Dreyeck, dessen Grundlinie BD der Durchmesser der Grundfläche, und dessen zwo übrige Seiten ein Paar entgegengesetzte Seitenlinien des Kegels sind.

340 §.

Ein grader Kegel ist, dessen Axe auf des Kegels Grundfläche senkrecht stehet, ein schiefer Kegel aber, dessen Axe gegen die Grundfläche unter einem schiefen Winkel geneigt ist.

165 F. Alle Seitenlinien eines graden Kegels sind gleich groß, und der Schnitt durch seine Axe giebt ein gleichschenklichtes Dreyeck ABD, welches ebenfalls zuweilen allein gezeichnet wird, wenn die Zeichnung eigentlich einen Kegel vorstellen soll. Man macht sich hier die Vorstellung, der grade Kegel entstehe, indem das gleichschenklichte Dreyeck ABD sich um die Mittellinie AC so weit drehet, bis AB in AD, und AD wieder in AB fällt. Es fällt leicht in die Augen, daß auf solche Art AB durch die eine, und AD durch die andre Hälfte der Conischen Oberfläche, das Dreyeck ACB aber durch die eine, und ACD durch die andre Hälfte des inwendigen Conischen Raums geführet werde.

341 §.

165 F. **Wenn man den Kegel *ABD* mit einer Ebene *FI* der Grundfläche *BD* parallel schneidet; so wird die Durchschnittsfigur *FI* ein Kreis, dessen Mittelpunct *G* in den Durchschnitt mit der Axe fällt.**

Beweis. Man schneide den Kegel auch durch die Axe: so sind die Durchschnitte BC, FG einander parallel, (295 §.) und es ist $AC : AG = BC : FG$. Wenn also der Grundfläche Halbmesser $BC = r$ gesetzt wird; so ist $GF = \frac{r \times AG}{AC}$ allemahl von einer

Grösse

Grösse, wo auch F im Umfang der Durchschnitts-figur genommen wird. Demnach ist FI ein Kreis, und G ist sein Mittelpunct.

Aus dem 215 §. weiß man, es sey der Kreis FI : Kreis BD = FGq : BCq, also ist auch der Kreis FI : Kreise BD = AGq : ACq. Wenn aber AL auf der Grundfläche senkrecht ist, und die Ebene der Durchschnittsfigur in K trift: so ist AG : AC = AK : AL, also auch der Kr. FI : Kr. BD = AKq : ALq, oder die Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze des Kegels.

342 §.

In der Grundfläche BD des Cylinders Bd sey 166
ein reguläres Polygon ABCDE beschrieben, und F.
durch jeden Winkelpunct desselben sey eine grade Linie wie Aa, Bb, u. s. f. mit des Cylinders Axe parallel gezogen: so liegen diese Parallellinien insgesammt in des Cylinders Oberfläche, und wenn durch jedes Paar zunächst nach einander folgender Parallellinien eine Ebene gelegt wird, welche die entgegengesetzte Grundfläche in *ab*, *bc*, u. s. f. schneidet: so erhält man ein im Cylinder beschriebenes Prisma, dessen Grundflächen reguläre Polygone sind. Dies Prisma ist kleiner als der Cylinder, auch ist die Oberfläche des Prisma, die Grundflächen ungerechnet, kleiner als die krumme Cylinderfläche.

343 §.

Um die Grundfläche des Cylinders PpsS (167 F.) sey ein reguläres Polygon ABCDE beschrieben, und durch jeden Berührungspunct der Seitenlinien mit dem Umfang der Grundfläche sey eine grade Linie, wie Pp, Qq, Rr, Ss, Tt, mit des Cylinders Axe parallel gezogen: so liegen auch diese Parallellinien insge-

insgesammt in des Cylinders Oberfläche. Man lege durch AB und Pp eine Ebene, so erhellet leicht, daß diese die Cylinderfläche in der graden Linie Pp berühre, sonst aber ganz ausserhalb des Cylinders liege. Man lege ferner durch Qq und BC eine Ebene, welche die vorige in Bb schneidet, so berührt auch diese die Cylinderfläche in Qq, und es ist nicht allein Qq mit der Ebene $AabB$, sondern auch mit der Durchschnittslinie Bb parallel. (281 §.) Auch die Durchschnitslinien ab, bc, mit der andern Grundfläche sind mit AB, BC, parallel. (295 §.) Legt man so durch jede folgende Parallele Rr, Ss, Tt, in des Cylinders Oberfläche und die dazu gehörige Seitenlinie CD, DE, EA, des um die Grundfläche beschriebenen regulären Polygons eine Ebene, so erhält man ein um den Cylinder beschriebenes Prisma, dessen Grundfläche reguläre Polygone sind. Dies Prisma ist grösser als der Cylinder, auch ist die Oberfläche dieses Prismen, die Grundfläche ungerechnet, grösser als die Oberfläche des Cylinders.

344 §.

Ein Prisma P und ein Cylinder C, die gleiche Höhen haben, verhalten sich gegen einander, wie ihre Grundflächen.

Beweis. Es sey B des Prismen P und K des Cylinders C Grundfläche, so ist K ein Kreis. Ferner sey $\frac{C}{P} \cdot B = Z$, so ist Z **grösser als jedes im Kreise K und kleiner als jedes um den Kreis K beschriebene reguläre Polygon.**

Im Kreise K (166 Fig.) sey ein reguläres Polygon β von so viel Seiten als man will, und über

dem=

demselben ein Prisma π im Cylinder C beschrieben: (342 §.) so ist $\frac{\pi}{P} . B = \beta$, (319 §.) und $\pi < C$, (342 §.) also $\frac{C}{P} . B > \frac{\pi}{P} . B$, oder $Z > \beta$. Ferner sey um den Kreis K (167 Fig.) ein reguläres Polygon b von so viel Seiten als man will, und über demselben ein Prisma p um den Cylinder C beschrieben: (343 §.) so ist $\frac{p}{P} . B = b$, (319 §.) und $p > C$ (343 §.) also $\frac{C}{P} . B < \frac{p}{P} . B$, oder $Z < b$.

Demnach ist $Z = K$, und $P : C = B : K$.

545 §.

Ein Prisma und Cylinder, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind also gleich grosse Körper: demnach sind alle Cylinder gleich groß, die gleiche Grundflächen und Höhen haben.

Das Verhältniß eines Cylinders zum andern, und eines Prisma zum Cylinder, ist aus den beyden Verhältnissen der Grundflächen und Höhen zusammengesetzt, also einerley mit dem Verhältniß der Producte der Grundflächen in die Höhen.

Wenn ein Prisma und Cylinder, oder ein Paar Cylinder gleich groß sind; so verhalten sich die Grundflächen umgekehrt, wie die Höhen, und aus dem letztern folgt umgekehrt das erstere.

Ein Cylinder ist dreymahl so groß, als eine Pyramide, die mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

346 §.

Den Inhalt eines Cylinders auszurechnen, wenn der Durchmesser δ seiner Grundfläche, und seine Höhe α gegeben sind.

Aufl.

Aufl. Aus dem gegebenen Durchmesser δ suche man den Quadrat-Inhalt der Grundfläche, und multiplicire ihn mit der Höhe α des Chylinders: so giebt das Product seinen Inhalt. Denn dies ist der Inhalt eines dem Cylinder gleichen Prisma. (345 §.) Es sey $\delta = 73$ F. $\alpha = 48$ F: so ist des Cylinders Inhalt $= \frac{1}{4}\pi\delta^2 . \alpha = 12.5329 . \pi = 63948 . \pi$ Cub. F. und man kann den Inhalt so scharf finden, als die jedesmahlige Absicht der Rechnung erfordert, wenn man π scharf genug ausdrückt.

347 §.

Wenn man in der Grundfläche eines Kegels ABD (168 Fig.) ein reguläres Polygon BCDEF beschreibt, und von allen Winkelpuncten nach der Spitze des Kegels grade Linien zieht; so erhält man eine im Kegel beschriebene Pyramide. Der Inhalt dieser Pyramide ist kleiner als des Kegels Inhalt: auch ist die Oberfläche der Pyramide, die Grundfläche ungerechnet, kleiner als die krumme Kegelfläche.

Wird statt dessen um die Grundfläche eines Kegels (169 Fig.) ein reguläres Polygon BCDEF beschrieben, und von allen Berührungspuncten P, Q, R, S, T, der Seitenlinien mit dem Umfang der Grundfläche des Kegels nach der Spitze des Kegels A eine grade Linie gezogen; so kann man durch jede dieser Linien und die damit zusammen gehörige Seitenlinie des Polygons eine Ebene legen. Alle diese Ebenen berühren die Kegelfläche in den graden Linien AP, AQ, u. s. f. wovon man sich sehr leicht überzeugt, und man erhält eine um den Kegel beschriebene Pyramide. Der Inhalt dieser Pyramide ist grösser als des Cylinders Inhalt, auch

ist

ist ihre Oberfläche, die Grundfläche ungerechnet, grösser als die krumme Kegelfläche.

348 §.

Wenn eine Pyramide *P* und ein Kegel *C* gleich hoch sind: so verhalten sich beyde Körper wie ihre Grundflächen.

Beweis. Es sey B der Pyramide und der Kreis K des Kegels Grundfläche, und man setze, es sey $\frac{C}{P}.B = Z$, so ist Z grösser, als jedes im Kreise K beschriebene, und kleiner als jedes um den Kreis K beschriebene reguläre Polygon. Der Beweis hievon ist dem Beweise im 344 §. ganz ähnlich. Wenn nemlich im Kreise K das reguläre Polygon β und über demselben die Pyramide π im Kegel (347 §.) beschrieben ist, so hat man $\frac{\pi}{P}.B = \beta$ (331 §.) und $\pi < C$ (347 §.) also $Z > \beta$. Wird dagegen um den Kreis K das reguläre Polygon b und über demselben eine Pyramide p um den Kegel beschrieben; (347 §.) so hat man $\frac{p}{P}.B = b$, (331 §.) und $p > C$, (347 §.) also $Z < b$.

Demnach ist $Z = K$, also $P : C = B : K$.

349 §.

Eine Pyramide und ein Kegel sind also gleich groß, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben: und hieraus folgt, daß alle Kegel gleich groß sind, wenn ihre Grundflächen und Höhen es sind.

Ein Cylinder ist dreymahl so groß, als ein Kegel, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat: auch gelten alle übrige Sätze vom Cylinder und Kegel, die im 333 §. vom Prisma und der Pyramide erwiesen sind.

350 §.

Den Inhalt eines Kegels auszurechnen, wenn der Durchmesser seiner Grundfläche und seine Höhe bekannt ist.

Aufl. Man berechne den Quadrat-Inhalt der Grundfläche, und multiplicire ihn mit dem dritten Theil der Höhe des Kegels: so giebt das Product den Inhalt einer dem Kegel gleichen Pyramide, (334 §.) also den Inhalt des Kegels selbst. Wenn der Grundfläche Durchmesser $\delta = 73$ Fuß, die Höhe $\alpha = 48$ Fuß ist; so ist des Kegels Inhalt $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \pi \delta^2 . \alpha = 4 . 73^2 . \pi = 21316 \pi$ Cub. F. und man kann den Inhalt so scharf als jedesmahl nöthig ist finden, wenn man π scharf genug ausdrückt.

351 §.

170 Fig. **Concentrische Cylinder** ABCD, EFGH, heissen solche, die einerley Axe haben, da dann ihre Grundflächen concentrische Kreise sind. Das Stück, um welches der grössere Cylinder ABCD den kleinern EFGH übertrift, und welches zwischen den beyden Cylindrischen Oberflächen und zweenen Ringen um HG und EF eingeschlossen ist, heist eine **Cylindrische Röhre** (tubus cilindricus.) Die Axe beyder Cylinder heist auch die **Axe der Röhre**, und ihre Höhe ist mit der Cylinder Höhe einerley.

Wenn beyde Cylinder senkrechte sind; so ist die Röhre eine **grade Röhre**, im Gegentheil aber eine **schiefe Röhre**.

Wenn das Rechteck durch die Axe ABCD sich um die Axe KI so drehet, wie im 338 §. ist angenomnommen worden; so beschreibt das Stück ABEH desselben die eine Hälfte, und das Stück GFCD die andere Hälfte der Röhre. Sind die Rechtecke ABCD, EFGH durch die Axe der concentrischen Cylinder in der Zeichnung nur ausgedruckt; so kann man sich die Röhre zwischen ihren Oberflächen leicht vorstellen.

352 §.

Das Stück BE, welches vom Halbmesser KB der 170
grössern Grundfläche in den Ring zwischen den Kreis- F.
linien BC und EF fällt, und die **Breite** dieses Rings abgiebt, ist zugleich die **Dicke** der Cylindrischen Röhre, deren Grundfläche der Ring ist. Der Durchmesser EF der kleinern Grundfläche kann die **inwendige Weite** der Röhre, und BC, der grössern Grundfläche Durchmesser, die **auswendige Weite** der Röhre heissen. Ein Rechteck, dessen eine Seite die Dicke der Röhre BE, und die andre Seite der Ueberschuß EC der auswendigen Weite über die Dicke ist, heißt der Kürze wegen das **Rechteck der Röhre**.

353 §.

Das Rechteck der Röhre $BE \times EC$ **ist so** 170
groß, als der Unterschied der Quadrate der F.
halben auswendigen und inwendigen Weite der Röhre.

Beweis. Es sey EL auf BC senkrecht: so ist $BE \times EC = ELq$. (186 §.) Aber $ELq = KLq - KEq$ (108 §.), also auch $BE \times EC = KLq - KEq = KBq - KEq$.

354 §.

Eine Cylindrische Röhre *AEFD* **verhält** 170
sich zu einem gleich hohen Cylinder *QMNR*, Fig.
wie das Rechteck der Röhre zum Quadrat des Halbmessers der Grundfläche des Cylinders.

Beweis. Es ist Cyl. ABCD : Cyl. EFGH = Kreis BC : Kreis EF (345 §.) = $KBq : KE_q$; (215 §.) also ABCD – EFGH : EFGH = $KBq - KEq : KEq$ (165 §.) Ferner ist $KBq - LEq = BE \times EC$, (353 §.) und ABCD – EFGH = der Röhre AEFD: also wird AEFD : EFGH = $BE \times EC : KEq$. Weiter ist EFGH : QMNR = $KEq : OMq$ (345 §.); also AEFD : QMNR = $BE \times EC : OMq$.

Wenn also das Rechteck einer Cylindrischen Röhre dem Quadrat vom Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders gleich ist: so ist auch der Inhalt der Röhre dem Inhalt des Cylinders gleich.

Der XIX. Abschnitt.

Vom Inhalt der Kugel.

355 §.

171 Fig. Die Kugel ist ein Körper, den eine krumme Oberfläche ADEB so umgiebt, daß alle ihre Puncte von einem Punct C innerhalb des Körpers, welcher der Kugel Mittelpunct heißt, gleich weit entfernt sind. Jede grade Linie CA vom Mittelpunct der Kugel bis an einen Punct ihrer Oberfläche gezogen heißt ein **Halbmesser** der Kugel (radius, s. semidiameter sphaerae): **also sind alle Halbmesser der Kugel gleich groß.**

356 §.

Jede grade Linie DE, die durch einen Punct G innerhalb der Kugel geht, trift ihre Oberfläche wenigstens in zweenen Puncten D und E, aber auch nicht

nicht in mehrern. Denn wäre F ein dritter Durchschnittspunct; so würde die Ebene durch C, D, E, auch durch F gehen, (10 §.) und es würde CD = CE = CF seyn müssen, welches dem 72 §. entgegen ist.

Eine grade Linie AB durch der Kugel Mittelpunct C zu beyden Seiten bis an die Oberfläche der Kugel gezogen, heißt ein **Durchmesser der Kugel**. Dieser ist demnach doppelt so groß, als der Kugel Halbmesser, und deswegen sind alle Durchmesser in einerley Kugel gleich groß.

357 §.

Jeder Punct, dessen Entfernung von der Kugel Mittelpunct kleiner oder grösser, als der Halbmesser ist, liegt im ersten Fall innerhalb, im zweyten Fall ausserhalb der Kugel, so wie er in der Oberfläche der Kugel liegen muß, wenn seine Entfernung vom Mittelpunct dem Halbmesser gleich ist.

358 §.

Wenn eine Ebene *AB* die Kugel durch ihren Mittelpunct *C* schneidet; so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, dessen Halbmesser und Mittelpunct mit der Kugel Halbmesser und Mittelpunct einerley ist: daß also alle diese Kreise in einerley Kugel gleich groß sind, die Ebene mag übrigens liegen wie sie wolle. 172 Fig.

Auch theilet jede solche Ebene die Kugel in zwo gleiche Halbkugeln.

Beweis. Alle Puncte A, D, B, E, u. s. f. des Umfangs der Durchschnittsfigur liegen in der Kugel Oberfläche; deswegen sind CA, CB, CD, CE, u. s. f. Halbmesser der Kugel, und insgesammt gleich groß.

Demnach ist ADBE ein Kreis, der mit der Kugel einerley Mittelpunct und Halbmesser hat.

Wenn nun ein Durchmesser der Kugel, FG auf der Ebene ADBE senkrecht stehet, und wenn man durch E, C, und F, oder durch D, C, und G eine Ebene legt; so werden beyde Durchschnittsfiguren gleich grosse Kreise der Kugel, wovon die Stücke FF, DG Quadranten sind, weil ECF = R = DCG ist. (375 §.) Ist nun der Winkel ACE = ACD, und man kehrt das unterste Stück AEBDG der Kugel um AB herum, bis die Ebene ABD in AEB fällt: so fällt CG in CF, (375 §.) G in F, DC in CE, (18 §.) und der Bogen DG in EF. (119 §.) Dies geschieht allemahl, wie groß man ACE nehmen will: also passen beyde Stücke der Kugel in einander, und sind gleich grosse Halbkugeln.

359 §.

173 Fig. **Wenn eine Ebene *AB* die Kugel nicht durch den Mittelpunct schneidet, und von der Kugel Mittelpunct *C* auf diese Ebene eine lothrechte Linie *CD* gezogen wird: so geht diese durch einen Punct *D* dieser Ebene innerhalb der Kugel.**

Beweis. Denn CD ist die kürzeste Linie die von C nach AB gezogen werden kann, (276 §.) also muß sie unter denjenigen befindlich seyn, welche die Ebene AB innerhalb der Kugel treffen, (357 §.)

360 §.

Jeder Kugelschnitt ist ein Kreis, und sein Mittelpunct ist mit demjenigen Punct einerley, worin eine grade Linie vom Mittelpunct der Kugel auf die Ebene des Schnitts lothrecht gezogen diese Ebene trift.

In

In gleichen Entfernungen vom Mittelpunct sind diese Kreise gleich groß: bey ungleichen Entfernungen aber ist derjenige grösser, der dem Mittelpunct näher liegt, als der entferntere.

Beweis. Es sey CD auf die Ebene AB lothrecht: 173
so liegt D innerhalb der Durchschnittsfigur. (359 §.) F.
Von D sey nach einem Punct A im Umfang derselben DA, und überdem CA gezogen: so ist $DA = \sqrt{(ACq - CDq)}$. (225 §.) Weil nun AC und CD immer einerley Grösse behalten, wo auch A im Umfang der Durchschnittsfigur genommen wird: so ist DA immer von einerley Grösse, also die Figur ein Kreis, und D sein Mittelpunct.

Es sey CE die Entfernung der Ebene eines andern Schnitts vom Mittelpunct, in dessen Umfang F liegt: so ist auch dieser Schnitt ein Kreis, und sein Halbmesser $EF = \sqrt{(CFq - CEq)}$. Es ist aber $AC = CF$: (355 §.) wenn also überdem $CD = CE$ ist, so ist $DA = EF$. Ist aber $CD > CE$; so ist $DA < EF$, woraus der zweyte Satz folget.

361 §.

Unter allen Kreisen auf der Oberfläche der Kugel 172
sind diejenigen die größten, deren Ebenen durch der F.
Kugel Mittelpunct gehen, wie AEBD, und sie heissen deswegen größte Kreise, die übrigen aber kleinere Kreise der Kugel.

Wenn ein Kugelschnitt ein größter Kreis ist: so geht seine Ebene durch der Kugel Mittelpunct, weil es sonst auf eben der Kugel noch grössere Kreise geben müßte.

Eine grade Linie CE durch des kleinern Kreises 173
FG, und der Kugel Mittelpunct steht auf der Ebene F.

des Kreises FG lothrecht. Denn wäre nicht CE; sondern C*e* auf FG senkrecht: so wäre *e* dieses Kreises Mittelpunct, (360 §.) wider die Voraussetzung.

Also geht auch jede grade Linie auf des kleinern Kreises EG Ebene im Mittelpunct E lothrecht gesetzt, durch der Kugel Mittelpunct C. Wäre E*c* auf FG senkrecht, und gienge E*c* nicht durch C: so wäre zugleich CE auf FG senkrecht, welches nicht seyn kann. (275 §.)

Sind zweene kleinere Kreise der Kugel AB, FG
173 gleich groß; so sind sie vom Mittelpunct der Kugel
F. gleichweit entfernt. Denn ihre Entfernungen sind CD, CE, und es ist $CD = \sqrt{(ACq - ADq)}$, $CE = \sqrt{(CFq - EFq)}$, also $CD = CE$, wenn $AD = EF$ ist.

Der grössere Kugelschnitt liegt dem Mittelpunct näher, als der kleinere: denn wird $EF > AD$ angenommen, so ist $CE < CD$.

362 §.

172 Ein Durchmesser der Kugel AFBG, der auf der
F. Ebene eines Kugelschnitts HLMN, oder ADBE senkrecht stehet, mithin durch des Kugelschnitts Mittelpunct geht, heißt eine zu diesem Kugelschnitt gehörige Axe der Kugel. Diese Axe ist zugleich auf allen übrigen Kreisen der Kugel senkrecht, deren Ebenen mit der Ebene des Kreises ADBE oder HLMN parallel sind, (298 §.) und sie geht durch die Mittelpuncte aller dieser Parallelkreise. (360 §.)

Die Endpuncte F, G, der Axe FG heissen die Pole eines jeden der Parallelkreise, die zur Axe FG gehören, von πολέω, (verto) weil die ganze Kugel sich um die Axe drehen kann: da dann jeder Punct

auf

auf der Oberfläche der Kugel einen zur Axe FG gehörigen Parallelkreis beschreibt, nur die Puncte F und G ausgenommen, welche völlig in Ruhe bleiben.

Man kann sich vorstellen, eine Kugel entstehe, wenn sich ein Kreis AFBG um seinen Durchmesser FG drehet: (172 Fig.) es ist wiederum nur ein Hülfsmittel für die Einbildungskraft, wenn man sich da eine Kugel vorstellen soll, wo nur ein größter Kreis der Kugel als ein Schnitt durch ihren Mittelpunct gezeichnet ist. Der auf FG senkrechte Durchmesser AB beschreibt alsdenn, indem er sich mit um C drehet, einen größten Kreis, jede damit parallele Sehne HM, die sich mit um K drehet, einen dazu gehörigen Parallelkreis, und FG wird die Axe dieser Parallelkreise.

363 §.

Eine Ebene berührt die Kugel, wenn sie zwar mit der Kugel Oberfläche zusammenstößt, aber kein Punct von ihr innerhalb der Kugel fällt.

Eine Ebene kann die Kugel nur in einem Punct berühren. Wenn nemlich A und B zwey verschiedene Puncte in der Oberfläche der Kugel sind, so liegt die grade Linie AB in der Ebene eines größten Kreises der Kugel, der zuwege gebracht wird, wenn man durch C, A und B eine Ebene legt. Von eben diesem Kreise ist AB eine Sehne, die ganz innerhalb seines Umfangs liegt, (77 §.) auch liegt AB in jeder andern durch A und B gelegten Ebene. Wenn also eine Ebene nur zwey verschiedene Puncte mit der Oberfläche der Kugel gemein hat, so liegen Puncte von ihr innerhalb der Kugel, mithin ist es keine Ebene, welche die Kugel berührt.

364 §.

173 F. Eine Ebene *MN* durch einen Punct *H* in der Kugel Oberfläche auf dem Halbmesser *CH* senkrecht gesetzt, berührt die Kugel.

Beweis. Denn CH ist die kürzeste Linie, die man von C nach MN ziehen kann, 276 §. also ist die Entfernung CI eines jeden andern Puncts der Ebene MN von der Kugel Mittelpunct grösser als ihr Halbmesser, und daraus folgt, daß alle übrige Puncte der Ebene MN ausserhalb der Kugel liegen. (357 §.)

365 §.

Wenn eine Ebene *MN* die Kugel in *H* berührt; so ist der Halbmesser *CH* im Berührungspunct auf der Ebene *MN* senkrecht.

Beweis. Weil alle andre Puncte der Ebene MN, H ausgenommen, ausser der Kugel fallen: so müssen sie alle von C weiter entfernt seyn, als H davon entfernt ist. Demnach ist CH unter allen Linien von C nach MN die kürzeste, folglich auf MN senkrecht. (276 §.)

Eine durch den Berührungspunct H auf MN senkrecht gesetzte Linie muß durch der Kugel Mittelpunct C, und jede von C auf MN senkrecht gezogene Linie durch den Berührungspunct H gehen. (275 §.)

366 §.

174 F. Es sey ABD ein Halbkreis, und der Halbmesser CB auf dem Durchmesser AD senkrecht. Der Halbkreis werde um BC gedrehet, bis A in D, und D wiederum in A gekommen ist; so beschreibt der Halbkreis eine Halbkugel, (362 §.) CA beschreibt die eine, und CD die andre Hälfte eines grösten

Krei-

Kreises, den man die Grundfläche der Halbkugel nennen kann, und auf seiner Ebene steht CB senkrecht. Man kann CB die Höhe der Halbkugel nennen, weil eine Ebene, welche die Halbkugel in B berührt, mit der Ebene der Grundfläche parallel ist.

Wenn E ein Punct im senkrechten Halbmesser BC ist, wodurch man eine Sehne FG des Halbkreises mit AD parallel gezogen hat, und wenn FH, GI auf AD und eben so AK und DL, welche mit FG in K und L zusammen stossen, auf AB senkrecht gesetzt sind: so beschreibt das Rechteck HFGI einen graden Cylinder, dessen Oberfläche in der Kugel liegt, das Rechteck AKLD aber einen graden Cylinder, dessen Oberfläche ausser der Kugel fällt. Man kann jenen einen inwendigen, und diesen den zugehörigen auswendigen Cylinder nennen.

Beyder Unterschied ist die Cylindrische Röhre AFGD. (351 §.)

367 §.

In einer Halbkugel *ABD* kann man so viele inwendige, und um die Kugel soviele dazugehörige auswendige gleich hohe grade Cylinder beschreiben, daß der Unterschied aller inwendigen von den auswendigen weniger, als jeder gegebene Körper beträgt.

Beweis. Man theile den senkrechten Halbmesser BC bey E, M, N, u. s. f. in so viel gleiche Theile, 174 F.
als man will, und ziehe durch alle Theilungspuncte mit AD die parallelen Sehnen FG, OP, u. s. f. auch zuletzt durch B mit AD die Parallele $\varkappa\lambda$, welche den Kreis berührt. Man zeichne für FG, OP, $\alpha\beta$, u. s. f. die zusammen gehörigen innern und äussern Cylinder HGFI und AKLD, SOPV und QFGR u. s. f. wie

im 366 §: so erhält man zuletzt einen auswendigen Cylinder $\alpha\kappa\lambda\beta$, dem kein inwendiger mehr zugehört. Nun fällt ohne Weitläuftigkeit leicht in die Augen, es sey

der Cyl. $\alpha\kappa\lambda\beta$ = Cyl. $\zeta\epsilon\eta\vartheta$
die Röhre $O\alpha\beta P$ = Röhre $T\epsilon\eta W$
die Röhre FOPG = Röhre HSVI
die Röhre AFGD = Röhre AFGD

Man addire alles auf beyden Seiten so erhält man gleiche Summen. Nun macht die erste Summe die gesamte Differenz aller inwendigen und auswendigen Cylinder, die zweyte Summe aber den ganzen Cylinder AKLD aus. Also ist dieser letzte Cylinder allemahl so groß, als die Differenz aller inwendigen und auswendigen in und um die Halbkugel beschriebenen Cylinder.

Halbirt man ferner jede der Abtheilungen CE, EM, u. s. f. und verfährt, wie vorhin: so wird der Cylinder AKLD halb so groß, als vorher. (345 §.) Denn seine Höhe wird halb so groß, als die vorige war, und dies erfolgt jedesmahl, wenn man aufs neue halbirt, und die übrige Arbeit wiederholt. Ist nun gleich D ein Körper, so klein man will: so wird endlich AKLD $<$ D (128 §. Rech.)

368 §.

Der Unterschied der Halbkugel von der inwendigen Cylinder-Summe ist allemahl kleiner als AKLD, also muß auch dieser Unterschied kleiner werden können, als jeder gegebene Körper. Es sey ein gegebener Körper Z kleiner als die Halbkugel, und sein Unterschied von der Halbkugel sey D: so ist $Z+D=H$, wenn H die Halbkugel bedeutet. Die Summe aller inwendigen Cylinder sey S, und ihre Differenz von der Halbkugel sey δ: so ist auch $S + \delta = H$, und $S + \delta = Z + D$. Man nehme der inwendigen Cylinder so viele, daß $\delta < D$ wird: so ist $S > Z$. Demnach kann die Summe aller inwendigen Cylinder grösser werden, als jeder Körper, der kleiner als die Halbkugel ist.

369 §.

Auch ist der Unterschied der Halbkugel von der auswendigen Cylinder-Summe kleiner als AKLD, also kann auch dieser Unterschied kleiner werden, als jeder gegebene Körper.

Er sey Δ, und der auswendigen Cylinder Summe Σ: so ist $\Sigma = H + \Delta$. Ferner sey ein Körper Y grösser, als die Halbkugel, und sein Unterschied von der Halbkugel sey E: so ist $H + E = Y$. Man nehme der auswendigen Cylinder so viele, daß $\Delta < E$ wird: so ist $H + \Delta < H + E$, folglich $\Sigma < Y$. Demnach kann die Summe der auswendigen Cylinder kleiner werden, als jeder Körper der grösser als die Halbkugel ist.

370 §.

Die Summe aller in der Halbkugel beschriebenen gleich hohen graden Cylinder ist allemahl kleiner, als ein Kegel, dessen Grundfläche dem grösten Kreise der Kugel, und dessen Höhe ihrem Durchmesser gleich ist.

Beweis. Wenn AB, DE ein Paar senkrechte 175
Durchmesser des Kreises ADBE sind, und durch F.
A, D, B, E Tangenten des Kreises gezogen werden; so erhält man ein Quadrat F*ab*G um den Kreis. Man ziehe CF, CG, und mache sich die Vorstellung, die Figur werde um DE gedrehet: so beschreibt der Kreis eine Kugel, F*ab*G sowohl als auch FABG

einen

einen Cylinder, FCG einen Kegel, und der beyden letztern Grundfläche FG ist der Grundfläche AB der Halbkugel ADB oder dem grösten Kreise der Kugel gleich, so wie auch die Höhen CE und DC des Kegels und der Halbkugel gleich sind. Nun ist der Cylinder FABG = 3 Kegel FCG. (349 §.) Wenn man also den Kegel FCG aus dem Cylinder FABG herausnimt; so bleibt das übrige Stück AFCBG = 3FCG – FCG = 2FCG. Noch ziehe man FD, GD, so ist FDG ein Schnitt durch die Axe eines graden Kegels, der doppelt so groß, als der Kegel FCG ist: demnach ist der Körper AFCGB = dem Kegel FDG.

175 F. Man beschreibe in der Halbkugel ADB so viel inwendige Cylinder LM, NO, PQ, als man will. In so viele gleiche Theile nun CD bey H, I, K, u. s. f. ist getheilt worden, in eben so viel gleiche Theile sey auch CE bey R, S, T, u. s. f. getheilt. Durch R, S, T ziehe man ferner UV, WX, YZ u. s. f. mit AB parallel, welche CF in α, β, γ, u. s. f. CG in δ, ε, ζ, u. s. f. schneiden, und aus α, β, γ, δ, ε, ζ, richte man über diesen Parallellinien die senkrechten Linien $\alpha\eta$, $\beta\vartheta$, $\gamma\kappa$, $\delta\lambda$, $\varepsilon\mu$, $\zeta\nu$, auf bis an die nächste Parallellinie. Wird hiernächst die ganze Figur um die Axe DE gedrehet, so entstehen, so viele in dem Körper AFCGB beschriebene Cylindrische Röhren $A\alpha\delta B$, $U\beta\varepsilon V$, $W\gamma\zeta X$, als man inwendige Cylinder LM, NO, PQ, in der Halbkugel hat. Es ist aber jede Röhre dem damit zusammen gehörigen Cylinder gleich, wenn man die Röhren von AB nach unten, die Cylinder aber von AB aufwärts paarweise vergleicht. Denn es ist $HM^2 = DH \times HE$

= A

$= A\eta \times \eta B$; $IOq = DI \times IE = U\vartheta \times \vartheta V$; $KQq = DK \times KE = W\varkappa \times \varkappa X$: also vermöge des 354 §.

Cyl. LM = Röhre $A\alpha\delta B$.
Cyl. NO = Röhre $U\beta\varepsilon V$.
Cyl. PQ = Röhre $W\gamma\zeta X$.

Die Summe aller Cylinder sey S, so ist S = Summe aller Röhren, und die letzte Summe ist kleiner als der Körper $AFCGB$ also $S < AFCGB$. Vorhin aber war der Körper $AFCGB$ = dem Kegel FDG, also ist $S <$ der Kegel FDG.

371 §.

Die Summe aller um die Halbkugel beschriebenen gleich hohen graden Cylinder ist allemahl grösser, als ein Kegel, dessen Grundfläche dem grösten Kreise der Kugel, und dessen Höhe ihrem Durchmesser gleich ist.

Beweis. Die Figur sey sonst wie vorhin gezeichnet: statt der innern Cylinder aber beschreibe man um die Halbkugel ADB soviele auswendige Cylinder LB, MN, OP, QR, als man will. In soviele gleiche Theile alsdenn CD bey H, I, K, u. s. f. ist getheilt worden, in eben soviele gleiche Theile sey auch CE bey S, T, U, u. s. f. eingetheilt. Durch S, T, U, ziehe man VW, XY, Zz mit AB parallel, welche CF in α, β, γ, und CG in δ, ε, ζ schneiden; durch diese Durchschnittspuncte aber ziehe man ferner $\alpha\eta$, $\beta\vartheta$, $\gamma\varkappa$, $\delta\lambda$, $\varepsilon\mu$, $\zeta\nu$ auf jede zunächst nach unten folgende Parallellinie senkrecht: so ergeben sich um den Körper $AFCGB$ so viele Cylindrische Röhren, wovon die erste $VABW$ selbst ein Cylinder wird, als um die Halbkugel ADB auswendige Cylinder beschrieben sind. Es ist aber jede Röhre dem zugehörigen Cylinder gleich. Man hat nemlich HNq Fig. 176

= D

$= DH \times HE = V\alpha \times \alpha W$, $PIq = DI \times IE = X\beta \times \beta Y$, $RKq = DK \times KE = Z\gamma \times \gamma z$. Also vermöge des 345 und 354 §.

Cyl. LB = Cyl. AW.
Cyl. MN = Röhre $V\eta\lambda W$.
Cyl. OP = Röhre $X\vartheta\mu Y$.
Cyl. QR = Röhre $Z\kappa\nu z$.

Folglich die Summe aller Cylinder S = Summe aller Röhren, also auch $S > AFCGB$. Es war aber AFCG = dem Kegel FDG, (370 §.) also ist $S >$ der Kegel FDG.

372 §.

Die Halbkugel ist einem Kegel gleich, der mit ihr einerley Grundfläche und eine doppelt so grosse Höhe hat.

Beweis. Ein Körper der grösser ist, als jede Summe in der Halbkugel beschriebener gleich hoher Cylinder, und kleiner, als jede Summe um die Halbkugel beschriebener gleich hoher Cylinder, muß der Halbkugel gleich seyn. Denn wäre dieser Körper noch kleiner als die Halbkugel, so wäre er noch nicht grösser, als jede innere Cylindersumme: (368 §.) und wäre er grösser als die Halbkugel, so wäre er nicht kleiner als jede äussere Cylindersumme. (369 §.) Aber der Kegel FDG (175. 176 Fig.) ist grösser als jede Summe der in der Halbkugel ADB beschriebenen Cylinder, (370 §.) und kleiner als jede Summe der um die Halbkugel ADB beschriebenen Cylinder: (371 §.) also ist der Kegel FDG, der mit der Halbkugel einerley Grundfläche, und eine doppelt so grosse Höhe hat, der Halbkugel gleich.

373 §.

Der Körperliche Inhalt der ganzen Kugel beträgt zwey Drittheile eines Cylinders, dessen Grundfläche ihrem grösten Kreise, und dessen Höhe ihrem Durchmesser gleich ist.

Beweis. Die ganze Kugel ist dem doppelten Kegel FDG (176 Fig.) gleich, weil die Halbkugel diesem einfachen Kegel gleich ist. (372 §.) Ferner ist der Kegel FDG $= \frac{1}{3}$ Cyl FabG, mithin ist die ganze Kugel ADBE $= \frac{2}{3}$ Cyl. FabG.

Ein Paar Kugeln verhalten sich demnach wie ein Paar Cylinder auf ihren grösten Kreisen in der Höhe der Durchmesser: also ist ihr Verhältniß aus dem Verhältniß der grösten Kreise und der Durchmesser zusammen gesetzt. Aber das Verhältniß der grösten Kreise ist das verdoppelte der Durchmesser: (215 §.) also ist das Verhältniß der Kugeln aus dem Verhältniß der Durchmesser, oder Halbmesser, dreymahl genommen zusammen gesetzt, oder dies Verhältniß ist die ratio triplicata der halben oder ganzen Durchmesser

Demnach verhalten sich ein Paar Kugeln auch wie die Würfel ihrer Durchmesser, oder Halbmesser.

374 §.

Wenn der Durchmesser einer Kugel bekannt ist, ihren Inhalt im Cubicmaaß finden.

Aufl. Aus dem bekannten Durchmesser der Kugel berechne man den Flächen-Inhalt ihres grösten Kreises. (254 §.) Hierauf nehme man $\frac{2}{3}$ des Products dieser Fläche mit dem Durchmesser multiplicirt: so ist der Inhalt der Kugel im Cubicmaaß gefunden, welches mit dem Längenmaaß, das bey

Mes-

Messung des Durchmessers gebraucht ist, also auch mit dem Quadratmaaß, wodurch die Fläche des größten Kreises ausgedrückt ist, einerley Nahmen hat.

Wenn der Durchmesser der Kugel $= \delta$, ihr Halbmesser $= r$ gesetzt wird, so ist die Fläche ihres größten Kreises $= \frac{1}{4}\pi\delta^2$; also der Inhalt der Kugel $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi\delta^3 = \frac{1}{6}\pi\delta^3$, oder auch eben der Inhalt $= \frac{4}{3}\pi r^3$.

Es sey $\delta = 73$ Fuß, so ist $\delta^3 = 389017$, also der Inhalt der Kugel $= \frac{1}{6} \cdot 389017 \cdot \pi$ Cub. Fuß, den man so scharf, als nöthig ist, jedesmahl finden kann, wenn man die Zahl π genau genug ausdrückt.

375 §.

Aus dem bekannten körperlichen Inhalt der Kugel ihren Durchmesser zu finden.

Aufl. Es sey der Inhalt der Kugel $= S$, also $S = \frac{1}{6}\pi\delta^3$, so ist umgekehrt $\delta^3 = \frac{S}{\frac{1}{6}\pi}$, und $\delta = \sqrt[3]{\frac{S}{\frac{1}{6}\pi}}$, oder $\delta = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} \cdot S}$.

Aus der im 253 §. n. 4. angegebenen Zahl $\frac{1}{\pi}$ findet man $\frac{1}{\frac{1}{6}\pi} = \frac{6}{\pi} =$

1,909859 317102 744029 226607 556 . . . .

Je mehr Decimaltheile von dieser Zahl in Rechnung gebracht werden, desto schärfer wird der gesuchte Durchmesser der Kugel gefunden.

376 §.

Die Redensart: einen geometrischen Körper cubiren, wird in einem ähnlichen Verstande gebraucht, in welchem die Redensart: eine Fläche quadriren, in der ebenen Geometrie ist gebraucht

worden;

worden; sie drückt kurz das Verfahren aus, vermöge dessen man einen Würfel, oder auch nur die Seite eines Würfels findet, der mit dem gegebenen Körper eine gleiche Grösse hat. Sucht man die Seite des Würfels durch eine geometrische Verzeichnung, so ist die Cubatur geometrisch; wenn sie aber durch Rechnung gesucht wird, so ist die Cubatur arithmetisch.

Kann man den Inhalt des gegebenen Körpers in Cubicfussen und kleinern Theilen des Cubicmaasses finden; so hat man die Seite des eben so grossen Würfels im Längenmaaß, das mit dem Cubicmaaß, worin der Inhalt des Körpers ausgedrückt ist, einerley Nahmen hat, wenn man aus der Zahl, die den Inhalt des Körpers angiebt, die Cubicwurzel auszieht. Weil diese Wurzel, wenn man sie nöthig hat, allemahl aus dem körperlichen Inhalt gefunden werden kann; so heißt das auch schon einen Körper cubiren, wenn man seinen Inhalt im Cubicmaaß sucht.

Der Inhalt der Kugel ist $= \frac{1}{6}\pi\delta^3$, also die Seite des eben so grossen Würfels $= \delta\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}$, und man findet $\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi} = 0{,}523598\ 775008\ 234820 \ldots$

377 §.

Man findet eben so leicht die Abmessungen eines Prisma, eines Cylinders, eines Kegels, oder einer Pyramide, wenn die Grösse eines solchen Körpers im Cubicmaaß gegeben ist. Wird die Zahl, welche die Grösse des Prisma oder Cylinders angiebt, in zwey Factoren zerfället; so giebt der eine Factor die Grösse der Grundfläche im Quadratmaaß, der andre die

Höhe im Längenmaaß an, und zwar unter eben dem Nahmen mit der gegebenen Cubiczahl. Wenn demnach die Grösse der Grundfläche im Quadratmaaß gegeben ist, so dividirt man damit die gegebene Cubiczahl, nachdem beyde vorher auf einerley Nahmen gebracht sind, wofern sie nicht schon einerley Nahmen haben: der Quotient giebt die Höhe im Längenmaaß unter eben dem Nahmen. Wäre die Höhe gegeben, so müste man die gegebene damit gleichnahmige Cubiczahl damit dividiren, um die Grösse der Grundfläche im Quadratmaaß eben des Nahmens zu finden. Für den Kegel und die Pyramide findet man so den dritten Theil der Höhe, wie man für das Prisma und den Cylinder die Höhe selbst findet: auch dividirt man mit dem dritten Theil der Höhe in die gegebene Cubiczahl, um die Grundfläche zu finden.

Die alten Geometer suchten die Auflösung solcher Aufgaben allemahl durch Zeichnung, und es war unter ihnen vormahls das so genannte **Delphische Problem** berühmt. Das Orakel zu Delphos soll den Atheniensern, welche bey Gelegenheit einer zu Athen grassirenden Pest den Apoll befragen liessen, durch welche Mittel sie die Götter versöhnen könnten? geantwortet haben: sie müßten dem Apoll einen doppelt so grossen cubischen Altar bauen, als derjenige gleichfalls cubische Altar war, den er damahls hatte. Dies soll die damahligen Geometer bewogen haben, die Auflösung der folgenden Aufgabe zu suchen:

378 §.

Es ist die Seite eines Würfels gegeben, man soll die Seite eines andern Würfels finden, der doppelt so groß, als der gegebene ist.

Wenn

Wenn l die Seite des gegebenen, und L die Seite des gesuchten Würfels ist, so verlangt die Aufgabe, daß $L^3 = 2l^3$ seyn soll: oder es soll sich verhalten $l^3 : L^3 = 1 : 2 = l : 2l$. Demnach soll das Verhältniß $l : 2l$ dreymahl grösser seyn, als das Verhältniß $l : L$, (321 §.) und es ist L die erste von zwoen mittlern stetigen Proportionallinien zwischen l und $2l$. Daher kam die Auflösung des Delphischen Problems darauf an, daß man zwischen zwoen gegebenen graden Linien zwo mittlere stetige Proportionallinien suchen mußte. Eine solche geometrische Auflösung dieser Aufgabe, die allein von den Foderungssätzen der Elementar-Geometrie abhienge, läßt sich nicht geben: das Problem gehört schon zur höhern Geometrie. Uebrigens siehet man wohl, daß auf eben die Art die Seite eines Würfels gefunden werden könnte, der zum gegebenen jedes andre Verhältniß hätte.

Vermittelst der Rechenkunst läßt sich dies Delphische Problem in seiner ganzen Allgemeinheit leicht auflösen, weil es nur ein besondrer Fall von der allgemeinen Aufgabe des 376 §. ist. Man sucht den körperlichen Inhalt des gegebenen Würfels aus der gemessenen Seite, duplirt denselben, oder multiplicirt ihn auch in jedem andern Fall mit dem Exponenten des Verhältnisses des gesuchten Würfels zum gegebenen Würfel. Wenn man hiernächst aus der Zahl, die so gefunden wird, die Cubicwurzel sucht; so ist die Seite des verlangten Würfels gefunden.

Der XX. Abschnitt.

Vergleichung der Kugelfläche mit den Flächen des graden Cylinders und Kegels.

379 §.

Die Oberfläche eines graden Prisma, die Grundflächen ungerechnet, ist so groß als ein Rechteck, wovon die Grundlinie dem Umfang der Grundfläche des Prisma gleich ist, und die Höhe so groß, als die Höhe des Prisma. Denn alle Seitenflächen des Prisma sind gleich hohe Rechtecke, und ihre Summe ist so groß, als ein Rechteck von eben der Höhe, wovon die Grundlinie so groß ist, als die Summe aller Grundlinien jener Rechtecke.

Die Oberflächen gleich hoher grader Prismen, ohne die Grundflächen, verhalten sich demnach wie die Peripherien der Grundflächen der Prismen.

380 §.

Die Oberfläche eines graden Prisma, ohne die Grundfläche, verhält sich zur Fläche eines eben so hohen Cylinders, die Grundflächen ebenfalls nicht mitgerechnet, wie die Peripherie der Grundfläche des Prisma zur Peripherie der Grundfläche des Cylinders.

Beweis. Es sey die prismatische Fläche $= P$, der Umfang ihrer Grundfläche $= p$, die Cylinderfläche $= C$, der Umfang ihrer Grundfläche $= \Pi$. Man setze $\frac{C}{P} \cdot p = L$, so ist $L = \Pi$, weil L grösser ist, als die Peripherie eines jeden Polygons im Kreise Π und

und kleiner als die Peripherie eines um eben diesen Kreis beschriebenen Polygons. Es sey nemlich im Kreise Π ein reguläres Polygon beschrieben, und die Peripherie desselben $= q$. Ueber demselben als der Grundfläche sey im Cylinder ein grades Prisma, wie im 342 §. beschrieben, dessen Fläche, ohne die Grundflächen, $= k$ ist; so hat man $\frac{k}{P} \cdot p = q$, (379 §.) und $k < C$, (342 §.) also $\frac{C}{P} \cdot p > \frac{k}{P} \cdot p$, oder $L > q$. Wenn dagegen um den Kreis Π ein reguläres Polygon beschrieben und dessen Peripherie $= Q$ ist; wenn ferner über demselben als über der Grundfläche um den Cylinder ein grades Prisma wie im 343 §. beschrieben, und dessen Fläche ohne die Grundflächen $= K$ ist, so hat man $\frac{K}{P} \cdot p = Q$, (379 §.) und $K > C$, (343 §.) also $\frac{C}{P} \cdot p < \frac{K}{P} \cdot p$, oder $L < Q$. Diesemnach ist $\frac{C}{P} \cdot p = \Pi$, oder $P : C = p : \Pi$.

Wenn die Höhe der beyden Körper $= a$ ist, so hat man $P = a \cdot p$, (379 §.) also $C = \frac{P \cdot \Pi}{p} = a \cdot \Pi$.

Demnach ist die krumme Fläche des graden Cylinders einem Rechteck gleich, dessen Grundlinie der Peripherie der Grundfläche des Cylinders, und dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist.

81 §.

Eine Pyramide, wovon die Grundfläche ein reguläres Polygon ist, und deren Spitze in der graden Linie liegt, die auf der Grundfläche im Mittelpunct senkrecht steht, nenne ich hier eine **reguläre Pyramide.**

Die Oberfläche der regulären Pyramide, ihre Grundfläche nicht mitgerechnet, ist einem Dreyeck gleich, wovon die Grundlinie so groß ist, als die Peripherie der Grundfläche der Pyramide, und die Höhe so groß, als die Entfernung der Seitenlinien der Grundfläche von der Spitze der Pyramide. Denn alle Seitenflächen sind gleiche und ähnliche gleichschenklichte Dreyecke, deren Summe so groß ist, als ein Dreyeck, dessen Grundlinie so groß, als die Summe der Grundlinien jener Dreyecke, die Höhe aber ihrer gemeinschaftlichen Höhe gleich ist.

382 §.

Wenn um den Kegel wie im 347 §. eine reguläre Pyramide beschrieben ist, so verhält sich die Fläche der Pyramide ohne die Grundfläche zu ihrer Grundfläche, wie die Seite des Kegels zum Halbmesser der Grundfläche. Denn die Höhe des der Pyramidenfläche gleichen Dreyecks ist der Seite des Kegels gleich, und die Grundfläche ist so groß als ein Dreyeck über eben der Grundlinie in der Höhe des Halbmessers.

Es sey auch in dem graden Kegel eine reguläre Pyramide beschrieben, die Entfernung der Seitenlinien der Grundfläche von der Spitze der Pyramide $= D$, und die Entfernung eben dieser Seitenlinien vom Mittelpunct der Grundfläche $= \delta$; so verhält sich die Pyramidenfläche zu ihrer Grundfläche $= D : \delta$.

383 §.

Die Fläche des graden Kegels ohne die Grundfläche verhält sich zur Grundfläche,

wie

wie die Seite des Kegels zum Halbmesser der Grundfläche.

Beweis. Es sey der Grundfläche Halbmesser $= r$, die Seite des Kegels $= L$, die Kegelfläche, ohne die Grundfläche $= C$, die Grundfläche des Kegels $= K$, und man setze $\frac{r}{L} . C = Z$; so ist Z grösser als jedes im Kreise K und kleiner als jedes um den Kreis K beschriebene reguläre Polygon.

Es sey APS der grade Kegel, G der Mittelpunct 169 Fig.
seiner Grundfläche, die hier = K ist, und in derselben sey ein reguläres Polygon beschrieben, wovon HI eine Seitenlinie ist, die Zahl der Seitenlinien sey übrigens so groß, als man will. Man halbire HI mit dem Halbmesser GP in K senkrecht, und ziehe AP, AK, so ist $AP = L$, $GP = r$. Ueber dem regulären Polygon sey eine Pyramide im Kegel beschrieben, die Fläche dieser Pyramide sey p, ohne die Grundfläche, und letztere $= q$, so ist $\frac{GK}{AK} . p = q$. (382 §.) Man ziehe KL mit AP parallel, so ist $\frac{GK}{KL} = \frac{GP}{AP} = \frac{r}{L}$, und $AK > KL$, also $\frac{GK}{AK} < \frac{GK}{KL}$, mithin ferner $\frac{GK}{AK} < \frac{r}{L}$. Ueberdem ist $p < C$ (347 §.) also $\frac{GK}{AK} . p < \frac{r}{L} . C$, und es war $\frac{r}{L} . C = Z$, also ist $Z > q$.

Man verzeichne auch um die Grundfläche des graden Kegels ein reguläres Polygon von sovielen Seiten, als man will, und setze darüber eine Pyramide um den Kegel; die Fläche dieser Pyramide ohne die Grundfläche sey $= P$, die Grundfläche $= Q$, so ist

ist $\frac{r}{L} \cdot P = Q$, (382 §.) und $P > C$, (347 §.) also $\frac{r}{L} \cdot P > \frac{r}{L} \cdot C$, mithin auch $Z < Q$.

Diesemnach ist $Z = K$, und man erhält $\frac{r}{L} \cdot C = K$.

Der Grundfläche Umfang sey $= \Pi$, so ist $K = \frac{1}{2} r \cdot \Pi$, (254 §.) also erhält man $C = \frac{1}{2} \cdot \Pi \cdot L$. **Demnach ist die Fläche des graden Kegels, ohne die Grundfläche, einem Dreyeck gleich, wovon die Grundlinie der Peripherie der Grundfläche, und die Höhe der Seitenlinie des Kegels gleich ist.**

384 §.

185 F. Es sey AB ein Durchmesser des Kreises, dessen Mittelpunct C ist, und DE ein andrer Durchmesser, der auf dem vorigen senkrecht stehet. In dem verlängerten Halbmesser CD nehme man einen Punct F und ziehe durch denselben ein Paar Tangenten des Kreises FH, FK: wenn alsdenn G und I die Berührungspuncte sind, so nehme man ferner GH = IK, und ziehe HK; so wird HFK ein gleichseitiges Dreyeck, dessen Grundlinie von CF in O so wie die Sehne GI bey N senkrecht halbirt wird.

Wenn sich nun Kreis und Dreyeck um die Axe EF drehen, so beschreibt der Kreis eine Kugel, und das Dreyeck einen graden Kegel, AB aber wird der Durchmesser eines grösten Kreises und GI der Durchmesser eines mit demselben parallelen Kreises der Kugel, dessen Peripherie zugleich in der Kugelfläche und der Kegelfläche liegt. Uebrigens fällt jeder andre Punct der Kegelfläche, der nicht im Umfang des Parallelkreises GI liegt, ausserhalb der Kugel,

gel. Ein solcher Punct H mag in der Kegelfläche liegen, wo er wolle, so lege man durch ihn und die Axe FE eine Ebene, welche die Kegelfläche in der graden Linie HF schneidet. Diese trift den Umfang des Parallelkreises irgendwo in G, und alsdenn ist CG auf FH senkrecht, weil CG und FG mit der Ebene des Parallelkreises allemahl gleiche Winkel machen, wo auch G im Umfang desselben liegt. Demnach ist CH > CG und H liegt ausserhalb der Kugel.

Die Kegelfläche stößt also auf ihrer inwendigen hohlen Seite mit der äussern erhabenen Seite der Kugelfläche so zusammen, daß kein Punct von ihr innerhalb der Kugelfläche fällt: beyde Flächen berühren einander in einem Kreise, der eben deßwegen der Berührungskreis heissen kann. Wenn die Kugel die Kegelfläche von aussen berührte, so könnte die Berührung nur in einem Punct geschehen.

385 §.

Wenn eine Kugel die Fläche des graden Kegels von innen so berührt, daß die Ebene des Berührungskreises die Axe des Kegels halbirt; so ist die Kegelfläche einer eben so hohen Cylinderfläche gleich, die eine dem grösten Kreise der Kugel gleiche Grundfläche hat.

Beweis. Wenn in der Zeichnung des vor. §. GH = GF, also auch IK = IF genommen wird; 185 Fig.
so ist ON = NF, und die Ebene des Berührungskreises halbirt die Höhe des Kegels. Man ziehe auch durch A und B Tangenten des Kreises, welche HK in P und Q schneiden; ferner ziehe man LM

durch F mit AB parallel; so stellet PLMQ den Schnitt durch die Axe eines graden Cylinders vor, dessen Höhe OF, und dessen Grundfläche dem grösten Kreise der Kugel gleich ist. Wenn nun DCG $= \alpha$ gesetzt wird, und der Halbmesser der Kugel $= r$ ist; so hat man GN $= r \sin\alpha$, also HO $=$ 2 GN $= 2r\sin\alpha$, die Grundfläche des Kegels HFK $= 4\pi r \sin\alpha$, seine Seitenlinie HF $= 2r\tan\alpha$, mithin seine Oberfläche $= 4\pi r^2 \sin\alpha \tan\alpha$. (283 §.) Ferner ist FN $=$ GF $\sin\alpha = r\tan\alpha \sin\alpha$, also OF $=$ 2FN $= 2r\sin\alpha \tan\alpha$, und des Cylinders PLMQ Oberfläche $= 4\pi r^2 \sin\alpha \tan\alpha$. (380 §.) Beyde die Kegelfläche und Cylinderfläche sind demnach gleich groß.

386 §.

186 F. Wenn eine Ebene DE den Kegel ABC mit der Grundfläche parallel schneidet, so heißt das Stück BDEC des Kegels zwischen den beyden parallelen Ebenen ein abgekürzter Kegel.

In dem Fall, wenn der ganze Kegel ein grader Kegel ist, sind die Abmessungen des abgekürzten Kegels bestimmt, wenn die Höhe des Körpers FG gegeben ist, und die Halbmesser FB, GD, beyder Grundflächen, oder statt des Halbmessers GD der Neigungswinkel FBD der Seitenlinie gegen die Grundfläche.

Man setze FB $= r$, GD $= \varrho$; so findet man den Inhalt des abgekürzten Kegels BDEC $= \frac{1}{3}\pi r^2 .$ AF $- \frac{1}{3}\pi \varrho^2 .$ AG. (350 §.) Es sey DH auf der Grundfläche senkrecht, so ist BH $= r - \varrho$, wenn also nach FG $= a$ gesetzt wird, so hat man $r - \varrho : a = r :$ AF, und $r - \varrho : a = \varrho :$ AG, mithin AF

$= ar$

$= \frac{ar}{r-\varrho}$, $AG = \frac{a\varrho}{r-\varrho}$; und der Inhalt des abgekürzten Kegels ist $= \frac{\frac{1}{3}\pi a (r^3 - \varrho^3)}{r-\varrho} = \frac{1}{3}\pi a (r^2 + r\varrho + \varrho^2.)$

Wäre statt des Halbmessers ϱ der Winkel FBD $= \alpha$ gegeben, so hätte man $\varrho = FH = r - a\cot\alpha$, also $r - \varrho = a\cot\alpha$, und dies in den gefundenen allgemeinen Ausdruck statt ϱ gesetzt giebt den Inhalt des abgekürzten Kegels $= \frac{1}{3}\pi \tan g\alpha (r^3 - (r - a\cot\alpha)^3)$.

Des abgekürzten graden Kegels BDEC Fläche ist $= \pi (r \,.\, AB - \varrho \,.\, AD)$, (283 §.) und $r - \varrho : BD = r : AB$, $r - \varrho : BD = \varrho : AD$; also $AB = \frac{BD \,.\, r}{r-\varrho}$, $AD = \frac{BD \,.\, \varrho}{r-\varrho}$: mithin eben die abgekürzte Kegelfläche $= \frac{\pi \,.\, BD (r^2 - \varrho^2)}{r-\varrho} = \pi \,.\, BD \,.\, (r + \varrho)$. Aus der Höhe des abgekürzten Kegels $FG = a$ hat man alsdenn $BD = \sqrt{(a^2 + (r - \varrho)^2)}$, oder auch $BD = a \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$. Ferner ist $r + \varrho = 2r - a\cot\alpha$, mithin eben die abgekürzte Kegelfläche $= \pi a\, \mathrm{cosec}\,\alpha\, (2r - a\cot\alpha)$.

387 §.

Wenn eine Kugel die Fläche des abgekürzten graden Kegels von innen so berührt, daß die Ebene des Berührungskreises die Höhe des abgekürzten Kegels halbirt; so ist die abgekürzte Kegelfläche einer eben so hohen Cylinderfläche gleich, die eine dem grösten Kreise der Kugel gleiche Grundfläche hat.

Beweis.

187 F. **Beweis.** Wenn AB, ED, ein Paar auf einander senkrechte Durchmesser des Kreises um C sind, so ziehe man durch einen willkührlich angenommenen Punct G des Quadranten AD eine Tangente, und nehme auf derselben GH = GR, ziehe die Sehne GI mit AB parallel, durch I ebenfalls eine Tangente und nehme auf derselben IK = IS = GH. Man ziehe HK und RS, so ist HK und RS mit GI parallel, überdem ist der Winkel RGI = GIS = RHK = HKS, und das Trapezium HRSK stellet den Schnitt durch die Axe eines graden abgekürzten Kegels vor, dessen Fläche die Kugel, wovon ADBE ein gröster Kreis ist, berührt. Des Berührungskreises Durchmesser ist GI und die Ebene desselben halbirt die Höhe OF des abgekürzten Kegels bey N. Wenn nun auch durch A und B ein Paar Tangenten gezogen sind, welche HK in P und Q, RS aber in L und M schneiden; so ist PLMQ der Schnitt durch die Axe eines graden Cylinders, dessen Höhe OF und dessen Grundfläche so groß, als der gröste Kreis der berührenden Kugel ist. Ferner setze man DCG = NGR = OHR = α, den Halbmesser der Kugel CG = r, so ist GN = $r \sin\alpha$, GI = $\frac{1}{2}$(HK + RS) = OH + RF (178 §.) = $2r\sin\alpha$, und HR = OF $\operatorname{cosec}\alpha$. Es ist aber die Fläche des abgekürzten Kegels HRSK = π . HR (OH + RF), (386 §.) also eben diese Fläche = $2\pi\, r$ OF $\operatorname{cosec}\alpha$ $\sin\alpha = 2\pi r$. OF, und eben so groß ist die Fläche des Cylinders PLMQ. (380 §.)

388 §.

188 Fig. Es sey ADB ein Halbkreis über dem Durchmesser AB und der Halbmesser CD auf AB senkrecht.

recht. Man theile jeden Quadranten AD, BD, in eine grade Anzahl gleicher Theile bey E, Y, F, und G, Z, H, und ziehe durch E, F, G, H, Tangenten des Kreises, so daß man allemahl einen Theilungspunct übergeht, so schneiden die Tangenten einander in M, N, O, und die beyden äussersten schneiden AB in L und P. Solchergestalt wird LMNOP der halbe Umfang eines um den Kreis beschriebenen regulären Polygons. Ziehet man ferner CM, CN, CO, so gehen diese Linien durch die übrigen Theilungspuncte Y, D, Z, und wenn man die Sehnen AY, DY, DZ, BZ, ziehet, so hat man den halben Umfang eines innern ähnlichen regulären Polygons.

Die ganze Figur drehe sich um die Axe CD, so beschreibet der Halbkreis eine Halbkugel, die Seitenlinien der Polygone aber soviele in und um die Halbkugel beschriebene conische Flächen, als Seitenlinien der Polygone zu jedem Quadranten gehören. Die äussern conischen Flächen berühren insgesammt die Halbkugelfläche so, daß einer jeden Höhe von der Ebene des Berührungskreises halbirt wird. Wenn also AS, BT ebenfalls ein Paar Tangenten sind, und ST durch N mit AB parallel gezogen ist, so stellt ASTB den Schnitt durch die Axe eines graden Cylinders vor, dessen Fläche so groß ist, als die Summe aller um die Halbkugel beschriebenen conischen Flächen. Wenn nemlich AS, TB, von MO in *a* und *b* geschnitten werden; so ist die Fläche MNO = der Fläche *a*ST*b*, (385 §.) und die Fläche LMOP = A*ab*B, (387 §.) Wäre der Halbkreis ADB in nochmahl soviele gleiche Theile getheilt, so hätte man drey dergleichen abgekürzte conische Flächen, die einem eben so hohen Theil

Theil der Cylinderfläche gleich wären. In allen Fällen aber bleibt die Summe aller conischen Flächen der Cylinderfläche ASTB gleich.

389 §.

Die Summe aller um die Halbkugel beschriebenen conischen Flächen ist grösser, die Summe aller in der Halbkugel beschriebenen conischen Flächen aber kleiner als die Halbkugel.

390 §.

Man kann in und um die Halbkugel soviele conische Flächen in gleicher Anzahl beschreiben, daß der Exponent des Verhältnisses der Summe aller äussern zur Summe aller innern kleiner wird, als jede Zahl welche die Einheit übertrift.

Fig. 188 Beweis. Die Figur sey wie im 388 §. gezeichnet, und man setze den Halbmesser der Kugel $= r$, den halben Centriwinkel ACE $=$ FCN $= \alpha$, die Summe aller äussern conischen Flächen $=$ S, so ist CN $= r \sec\alpha$, und S $= 2\pi r^2 \sec\alpha$.

Der Halbmesser CE halbirt die Sehne AY in K senkrecht, und CK ist der Halbmesser eines Halbkreises QIR, der alle Seitenlinien des halben Umkreises vom innern Polygon berührt. Dieser Halbkreis beschreibt bey Umdrehung der Figur ebenfalls eine Halbkugel, so wie die Seiten des halben innern Polygons conische Flächen beschreiben, welche die Halbkugel QIR insgesammt in der halben Höhe berührt. Man setze also QV und RW auf AB senkrecht, und ziehe VW durch D mit AB parallel, so ist QVWR der Schnitt durch die Axe eines graden Cylin-

Cylinders, dessen Fläche so groß ist, als die Summe aller innern conischen Flächen. Diese Summe sey $= \Sigma$, so ist $\Sigma = 2\pi\, CQ\,.\, CD$. Es ist aber $CQ = CK = r\cos\alpha$, und $CD = r$, also $\Sigma = 2\pi r^2 \cos\alpha$.

Vorhin war $S = 2\pi r^2 \sec\alpha$, also findet man $\frac{S}{\Sigma} = \frac{\sec\alpha}{\cos\alpha} = \sec\alpha^2$. Nun sey n eine gegebene Zahl, die grösser als 1 ist, so kann α so klein genommen werden, daß $\sec\alpha < \sqrt{n}$ ist, (192. 252 §.) und man hat zugleich $\sec\alpha^2 < n$, also $\frac{S}{\Sigma} < n$.

391 §.

Wenn eine Fläche Z kleiner ist, als die Halbkugelfläche, so kann man in derselben soviele conische Flächen beschreiben, daß ihre Summe $\Sigma > Z$ wird.

Beweis. Es sey die Halbkugelfläche $= H$, und $\frac{H}{Z} = n$. Man verzeichne in und um die Halbkugel soviele conische Flächen, daß $\frac{S}{\Sigma} < n$ wird, (390 §.) so ist $\frac{S}{\Sigma} < \frac{H}{Z}$, also $1 : \frac{S}{\Sigma} > 1 : \frac{H}{Z}$, oder $\frac{\Sigma}{S} > \frac{Z}{H}$. Ueberdem ist $H < S$, (389 §.) also $\frac{\Sigma}{H} > \frac{\Sigma}{S}$, mithin auch $\frac{\Sigma}{H} > \frac{Z}{H}$, und $\Sigma > Z$.

392 §.

Wenn eine Fläche Y grösser ist, als die Halbkugelfläche H, so kann man um dieselbe soviele conische Flächen beschreiben, daß ihre Summe $S < Y$ wird.

Beweis. Es sey $\frac{Y}{H} = n$, und man verzeichne wie vorhin in und um die Halbkugel so viele conische Flächen, daß $\frac{S}{\Sigma} < n$ wird. (390 §.) Alsdenn hat man $\frac{S}{\Sigma} < \frac{Y}{H}$, und $H > \Sigma$, also $\frac{S}{H} < \frac{S}{\Sigma}$, mithin auch $\frac{S}{H} < \frac{Y}{H}$, und $S < Y$.

393 §.

188 Fig. Die Halbkugelfläche ADB ist einer Cylinderfläche $AcdB$ gleich, die mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. Die Cylinderfläche $AcdB$ ist $= 2\pi r^2$, die Summe aller innern conischen Flächen $\Sigma = 2\pi r^2 \cos\alpha$, die Summe aller äussern $S = 2\pi r^2 \sec\alpha$, (390 §.) und dies allemahl, wieviele conische Flächen man auch in oder um die Halbkugel beschreiben will. Demnach ist allemahl die Cylinderfläche $AcdB$ grösser als Σ und kleiner als S. Aber eine Fläche die grösser als jede Summe der innern, und kleiner als jede Summe der äussern conischen Flächen ist, muß der Halbkugelfläche gleich seyn. Wäre sie kleiner als die Halbkugelfläche, so wäre sie noch nicht grösser als jede Summe der innern conischen Flächen: (391 §.) wäre sie grösser als die Halbkugelgelfläche, so wäre sie nicht kleiner als jede Summe der äussern conischen Flächen. (392 §.) Demnach ist die Cylinderfläche AcdB der Halbkugelfläche ADB gleich.

394 §.

Den Inhalt der halben oder ganzen Kugelfläche im Quadratmaaß durch Rechnung zu finden.

Aufl. Die Halbkugelfläche ist doppelt so groß, und die ganze Kugelfläche viermahl so groß, als die Fläche ihres grösten Kreises. Denn es ist die Halbkugelfläche $= 2\pi r^2$, (393 §.) also die ganze Kugelfläche $= 4\pi r^2$, und πr^2 ist die Fläche ihres grösten Kreises. (254 §.) Wenn also der Flächen-Inhalt des grösten Kreises der Kugel im Quadratmaaß gesucht, und mit 2 oder 4 multiplicirt wird; so ist im ersten Fall die Grösse der Halbkugelfläche, und im zweyten Fall die Grösse der ganzen Kugelfläche im Quadratmaaß gefunden.

Die ganze Kugelfläche ist so groß als ein Kreis dessen Halbmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Denn der Kugel Durchmesser ist $= 2r$, und ein Kreis der diesen Halbmesser hat, ist $= 4\pi r^2$.

Für eine andre Kugelfläche, wozu der Halbmesser R gehört, hat man die Grösse ihres Inhalts $= 4\pi R^2$: demnach verhalten sich ein Paar Kugelflächen gegen einander wie die Quadrate ihrer halben oder ganzen Durchmesser.

395 §.

Den Inhalt eines Kegels wenn der Halbmesser seiner Grundfläche $= 2r$, und seine Höhe $= r$ ist findet man $= \frac{1}{3} . 4\pi r^3$, (350 §.) und eben so groß ist der körperliche Inhalt der Kugel. (375 §.) Demnach ist die Kugel nach ihrem Körperlichen Inhalt einem Kegel, oder einer Pyramide gleich, deren Grundfläche so groß ist, als die Oberfläche der Kugel, und die Höhe so groß, als der Halbmesser der Kugel.

396 §.

Die Lehren von Vergleichung des Körperlichen Inhalts der Kugel mit dem Inhalt eines eben so hohen um die Kugel beschriebenen Cylinders und des Kegels auf gleicher Grundfläche in gleicher Höhe, (373 §.) ferner auch, die Lehren von Vergleichung der Kugelfläche mit der Fläche des um die Kugel beschriebenen Cylinders, (393 §.) sind Erfindungen des Archimedes. Er hat zwey Bücher de Sphaera et Cylindro geschrieben, die dem Dositheus zugeeignet sind, und die bisher von der Kugel vorgetragenen Lehren findet man nebst mehrern andern im ersten Buch. Die guten Ausgaben von seinen sämtlichen Werken gehören zu den Büchern, die selten mehr zu haben sind. Man hat eine Londner Ausgabe vom D. Barrav, vormahls der Geometrie Professor zu Cambridge, vom Jahr 1675 in 4, die für die Beste gehalten wird: eben diese Ausgabe ist unter andern um deßwillen besonders schäzbar, weil sie ausser den Werken des Archimedes auch die Werke des Apollonius von Perga in Pamphilien, und des Theodosius von Tripolis enthält, welches nächst dem Euclides die vornehmsten alten mathematischen Schriftsteller sind. Der vollständige Titel ist: Archimedis Opera, Apollonii Conica ac Theodosii Sphaerica, methodo nova

illu-

illustrata. Herr Prof. Scheibel hat versprochen, in seiner Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniß von des Archimedes Schriften und deren Ausgaben noch künftig Nachrichten zu geben, die allen Liebhabern der Mathematik sehr angenehm seyn werden. Theodosius hat die Lehre von den Kugelschnitten vollständig untersucht, wovon hier nur die ersten Grundlehren (358 - 361 §.) vorgetragen sind, weil das übrige dem zweyten Theil dieses Lehrbuchs vorbehalten bleibt. Die Kegelschnitte, welche Apollonius untersucht hat, sind diejenigen krummen Linien, welche zuwege gebracht werden, wenn eine Ebene den Kegel in jeder gegebenen Lage gegen seine Axe und Grundfläche schneidet. Ein besondrer Fall davon ist, wenn die schneidende Ebene mit der Grundfläche parallel liegt, da dann der Schnitt ein Kreis wird. (341 §.) In den mehresten übrigen Fällen sind die Durchschnittslinien vom Kreise verschieden, und die Lehre von diesen Kegelschnitten gehört schon zur höhern Geometrie.

Verzeichniß
einiger Druckfehler,
auch sonst einiger Verbesserungen.

8 Seite, 19 Zeile, vor dem Wort: einerley, muß das Wort: nicht stehen.

31 S. 4 Z. muß über der 5ten 10 kein Punct stehen.

36 S. 4 Z. von unten, $5+5+5$ l. $5+5+5+5$.

41 S. 7 Z. nach 4×100 setze man das Zeichen $=$.

53 S. 2 Z. von unten $\frac{3}{5}$ l. $\frac{5}{3}$.

56 S. 21 Z. und 57 S. 15 Z. nach den Worten: der Divisor kleiner, setze man hinzu: oder eben so groß.

60 S. 4 Z. statt addirt l. dividirt.

61 S. 3 Z. statt von l. vor.

80 S. 2 Z. von unten, nach dem Worte: befindlich, setze man hinzu: und diese nicht etwa selbst ein Maaß aller übrigen.

Ebendas. nach der letzten Z. setze man noch hinzu: Sind aber zwey absolute Primzahlen unter mehrern andern Zahlen befindlich, so sind sie allemahl insgesammt unter sich Primzahlen.

84 S. 6 Z. von unten: Eins l. um Eins.

94 S. 7 Z. von unten, allein so, l. also.

97 S. 2 Z. von unten, angeführten l. geführten.

100 S. 1 Z. lösche man *d* weg.

107 S. 8 u. f. Z. nach den Worten: kein gemeines Maaß mehr, hätte das übrige kürzer so heissen können: weil 39 und 51 schon absolute Primzahlen sind. (66 §. n. 2.)

120 S. 4 Z. von unten, der l. den.

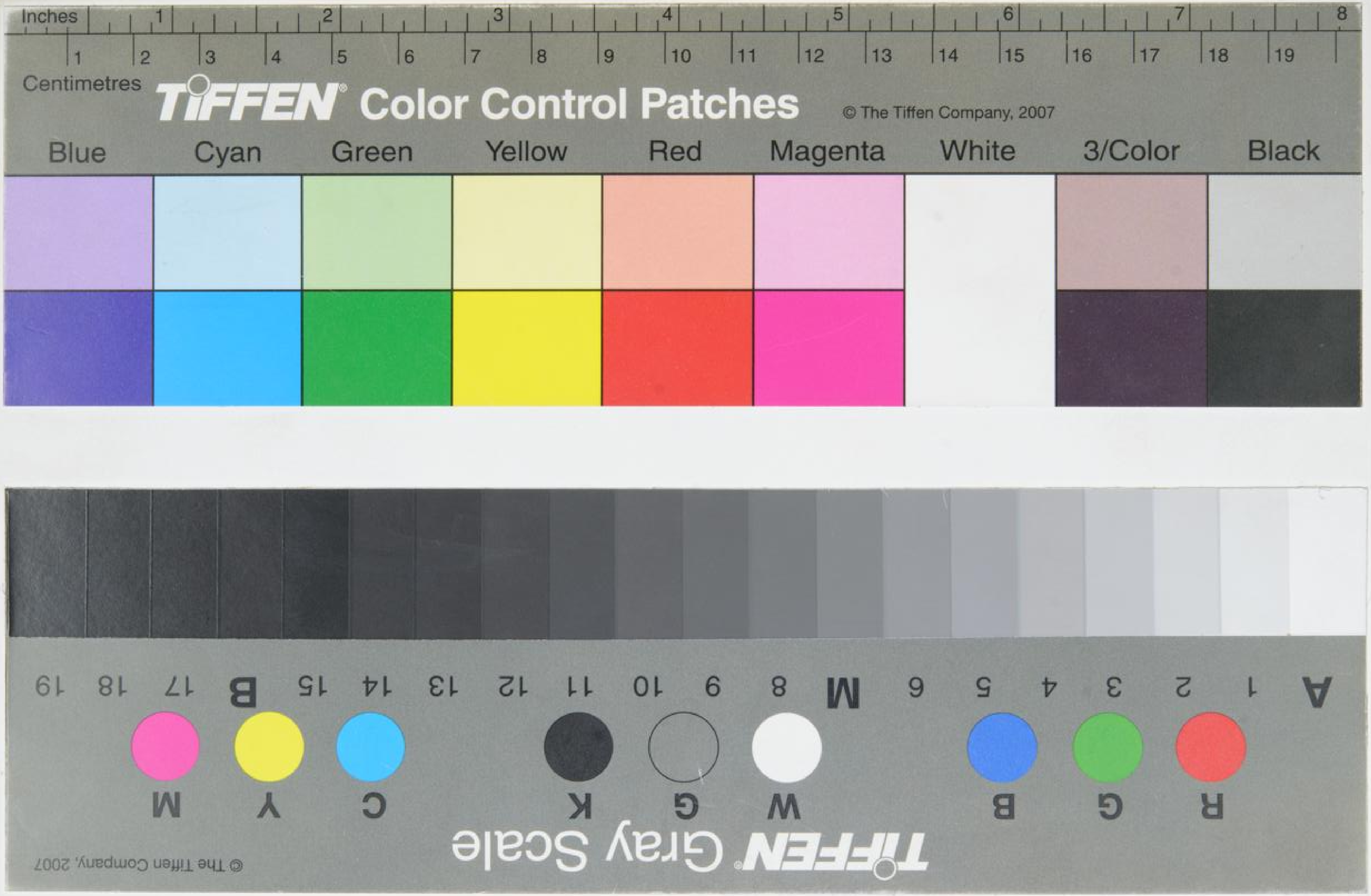
156 S. 4 Z. und kommen l. und es kommen.

163 S. 5 Z. von unten $\frac{14}{100}$ l. $\frac{14}{110}$.

176 S.

176 S. 9 Z. soll l. so soll.
179 S. 5 Z. statt B l. C.
180 S. 9 Z. von unten, 164 §. l. 149 §.
192 S. 10 Z. A:B::C:D, l. A.B::C.D.
232 S. 11 Z. $(\overset{\mathrm{I}}{R} + \beta)^2$ und l. $(\overset{\mathrm{I}}{R} + \beta)^2 =$
245 S. 20 Z. $2ab^2 \quad b^3$ l. $2ab^2 + b^3$.
263 S. 4. u. 5 Z. von unten, wenn die, l. wenn man die.
277 S. 4 Z. von unten, $l1000 - 3$, l. $l1000 = 3$.
288 S. 9 Z. nach der Zahl 1729 lösche man das Wort die, weg.
Ebendas. 17 Z. der beyden l. der den beyden.
292 S. 22 Z. die nächkleinern, l. den nächstkleinern.
Ebendas. am Ende der 4 Z. von unten setze man das Wort: den hinzu.
294 S. 17 Z. nach dem Wort: Decimalstellen setze man hinzu: mit den Decimalstellen.
295 S. 4 Z. statt 1092 l. 1093.
Ebendas. 12 Z. von unten, die 9, l. 9 die.
298 S. 13 Z. $\frac{1}{n} lV - lA$, l. $\frac{1}{n}(lV - lA)$.
304 S. 20 Z. L. J. Schmids l. N. Schmids.
310 S. muß die 7. 8. und 9te Zeile von unten ganz weggelöscht werden. Das Exempel steht unnöthig zweymahl da.
322 S. 1 Z. bey Hannover 129 l. 1290.
332 S. 13 Z. von unten 162 l. 160.
340 S. 17 Z. selbst. Bleibt l. selbst bleibt, ohne Punct dazwischen.
344 S. 7 Z. lösche man das Wort: worin weg.
Ebendas. 9 Z. im Zähler 3 l. 2.
374 S. 7. 8. Z. beschw., l. bejahte.
388 S. 3 Z. von unten, in l. mit.
396 S. 13 Z. über, l. gegenüber.
Ebendas. 7 Z. von unten D l. C.

408 S. 15 Z. 28 §. l. 82 §.
412 S. letzte Z. nach dem Wort: andern fehlt AB.
431 S. 12 Z. Cirkelſätzen l. Cirkelſpitzen.
436 S. 17 Z. ABGH, l. AB, GH.
443 S. 12 Z. FG, FQ, l. FG, GQ,
451 S. oben 1 Z. fehlt am Rande 82 F.
479 – 481 S. ſteht verſchiedene mahl Parallelinien ſtatt Parallellinien.
484 S. 3 Z. eben l. oben.
501 S. 9 Z. von unten, ſtatt *m* . P.BC, l. *l* . *m* . P, und BC
568 S. 10 Z. den Zähler Π l. ε.



Inches
Centimetres
TIFFEN Color Control Patches
© The Tiffen Company, 2007
Blue
Cyan
Green
Yellow
Red
Magenta
White
3/Color
Black
TIFFEN Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
R G B W G K C Y M

pag 322 [illegible]