Programm

des

Gymnasiums zu Bückeburg.

Ostern 1874.

Inhalt: 1) **Die Lehre von der Hyperbel**, vom Oberlehrer Berkenbusch.
2) **Schulnachrichten.**

Bückeburg.

Druck der Grimme'schen Hofbuchdruckerei.

Die Lehre von der Hyperbel.

Das Ostern 1865 erschienene Programm des hiesigen Gymnasiums enthält eine, auf das Privatstudium von Primanern berechnete, elementare Darstellung der wichtigsten Eigenschaften der Ellipse; in ähnlicher Weise habe ich im Folgenden die Lehre von der Hyperbel behandelt.

§. 1. **Aufgabe:** Es soll der geometrische Ort der Punkte gesucht werden, für welche die Differenz der Entfernungen von 2 festen Punkten F und F_1 eine constante Größe 2a hat. Fig. I.

Auflösung: 1) Ist $2a > FF_1$ d. h. größer als der Abstand der gegebenen festen Punkte, so genügt kein Punkt der gestellten Forderung. Denn für jeden Punkt der Strecke FF_1 ist die Differenz der Abstände von F und F_1 kleiner als FF_1, für jeden nicht auf dieser Strecke liegenden Punkt der durch F und F_1 gelegten Geraden ist diese Differenz gleich FF_1, für jeden Punkt außerhalb der Geraden ist sie kleiner als FF_1, da die Differenz zweier Dreiecksseiten stets kleiner ist als die dritte Seite.

2) Ist $2a = FF_1$, so hat nach dem Gesagten jeder Punkt der durch F und F_1 gelegten Geraden die verlangte Eigenschaft mit Ausnahme der Punkte, welche auf der durch die festen Punkte begrenzten Strecke liegen.

3) Ist $2a < FF_1$, so giebt es zunächst auf der durch F und F_1 bestimmten Geraden 2 Punkte, welche der Forderung Genüge leisten. Halbirt man nämlich FF_1 in C und schneidet nach beiden Seiten hin $CA = CA_1 = a$ ab, so wird $F_1A_1 = FA$, mithin $F_1A - FA = F_1A - F_1A_1 = A_1A = 2a$ und ebenso $FA_1 - F_1A_1 = FA_1 - FA = AA_1 = 2a$; folglich haben die Punkte A und A_1 die verlangte Eigenschaft. Auf der durch

F und F_1 gelegten Geraden genügen aber auch nur die beiden Punkte A und A_1 der Forderung; denn die Differenz der Abstände von den festen Punkten F und F_1 ist für jeden Punkt der Geraden, welcher nicht der Strecke FF_1 angehört, $= FF_1$, also $> 2a$; für jeden Punkt der Strecken FA und $F_1A_1 < FF_1$, aber $> AA_1$, und endlich für jeden Punkt der Strecke $AA_1 < 2a$.

Um außerhalb der durch F und F_1 gelegten Geraden Punkte des geometrischen Orts zu bestimmen, nehme man auf der Strecke FX einen beliebigen Punkt N an und schlage mit A_1N und AN Kreise um F_1 und F. Ihre Durchschnittspunkte P und p werden Punkte des geometrischen Orts, da $A_1N - AN = A^1A = 2a$. Ein zweites Paar solcher Punkte P_1 und p_1 erhält man, wenn man die Mittelpunkte F_1 und F vertauscht und mit denselben Radien Kreise construirt.

Anmerkung 1. Fällt der Punkt N mit F (F_1) zusammen, so ist die Summe der Radien der beiden zu beschreibenden Kreise gleich der Centrale FF_1; die Kreise schneiden sich also nicht, sondern berühren sich im Punkt A (A_1). Auf der Strecke F_1F darf der Punkt N nicht angenommen werden, weil sonst die Summe der Radien der beiden zu beschreibenden Kreise kleiner als die Centrale F_1F sein, ein Schneiden dieser Kreise also nicht stattfinden würde.

Anmerkung 2. Die Verbindungslinie der Punkte P und p (P_1 und p_1) steht als gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise auf der durch ihre Mittelpunkte F und F_1 gelegten Geraden XX_1 senkrecht und wird von ihr halbirt; die Punkte P und p (P_1 und p_1) liegen also symmetrisch in Beziehung auf die XX_1. Dasselbe gilt natürlich von allen andern Paaren von Punkten des geometrischen Orts, die nach dem angegebenen Verfahren in unbegrenzter Anzahl gefunden werden können. Ebenso leicht läßt sich nachweisen, daß die Punkte P und P_1 (p und p_1) eine symmetrische Lage zur Geraden YY_1 haben, welche im Punkte C senkrecht zur XX_1 errichtet ist. Ohne also den geometrischen Ort vollständig construirt zu haben, sehen wir doch schon, daß er sowohl durch die Gerade XX_1 als durch die Gerade YY_1 symmetrisch getheilt wird.

Fig. II. §. 2. Um wenigstens einen Theil des geometrischen Orts durch stetige Bewegung eines Punktes zu erzeugen, kann man folgendes Verfahren einschlagen. In dem Endpunkte E der Kante eines Lineals befestige man das Ende eines Fadens, der um die Länge 2a kürzer ist, als der Abstand eines andern Punktes D der Kante des Lineals von ihrem Endpunkt E. Das andere Ende des Fadens befestige man im Punkte F. Wird nun das Lineal in der Ebene des Papiers so gedreht, daß der Kantenpunkt D stets mit F_1 zusammenfällt und drückt man dabei durch einen Stift den Faden so an die Kante des Lineals, daß er bei der Drehung stets gespannt bleibt, so beschreibt der Stift einen Theil des geometrischen Orts. Bei der Lage, welche das Lineal in Fig. II. hat, wird das Stück Ap der Curve beschrieben. Um das entsprechende Stück AP zu erhalten, braucht man nur das Lineal umzuwenden und den Stift oberhalb der Geraden XX_1 an der Kante hinzuführen. Befestigt man alsdann das eine Ende des Fadens statt in F in F_1 und dreht das Lineal mit dem Punkte D um F statt um F_1, so erhält man das entsprechende Stück der Curve $P_1A_1p_1$. Es ist ersichtlich, daß bei diesem Verfahren stets $F_1p - Fp = Dp + pE - (F^1p + pE) = 2a$ ist.

Statt den Faden um 2a kürzer zu machen als die Strecke DE, konnte man ihn auch um eben so viel länger machen. Alsdann hätte man aber bei der Drehung des Lineals um den Punkt F_1 den Theil $P_1A_1p_1$ der Curve erhalten. Es ist nämlich $Fn_1 - F_1n_1 = Fn_1 + n_1E - (Dn_1 + n_1E) = 2a$.

Die erste Methode ist deshalb praktischer, weil sie bei einer Drehung des Lineals um denselben Winkel einen größern Theil der Curve ergiebt, als die zweite Methode.

Die Grenze, bis zu welcher auf diese Weise die Curve dargestellt werden kann, hängt natürlich von der Länge des Lineals ab.

§. 3. 1) Die in den Punkten A und A_1 auf der Geraden XX_1 errichteten Perpendikel haben nur die Punkte A und A_1 mit der Curve gemein; sie berühren also dieselbe in den genannten Punkten. Fig. II.

Beweis: Verbindet man einen beliebigen Punkt M des in A_1 errichteten Perpendikels mit F und F_1, so ist $MF^2 - MF_1^2 = MF^2 - MA_1^2 - (MF_1^2 - MA_1^2) = FA_1^2 - F_1A_1^2$, also auch $(MF + MF_1)(MF - MF_1) = (FA_1 + F_1A_1)(FA_1 - F_1A_1) = FF_1 . AA_1$; da nun $MF + MF_1 > FF_1$, so ist $MF - MF_1 < AA_1$, mithin M kein Punkt der Curve.

2) Zwischen den in A und A_1 errichteten Senkrechten kann kein Punkt der Curve liegen.

Beweis: Ein Punkt der Geraden YY_1 kann kein Punkt des geometrischen Ortes sein, da für ihn die Differenz der Abstände von F und $F_1 = 0$ ist. Liegt ein Punkt N zwischen der YY_1 und dem in A_1 errichteten Perpendikel, so ist $NF > NF_1$. Zieht man nun die Gerade NF_1, welche das im Punkte A_1 errichtete Perpendikel in einem Punkte M schneiden möge, so ist $NF - MN < MF$, mithin auch $NF - MN - MF_1$ d. i. $NF - NF_1 < MF - MF_1$. Nach dem ersten Theile dieses Paragraphen ist aber $MF - MF_1 < 2a$, um so mehr also $NF - NF_1 < 2a$; demnach kann N kein Punkt der Curve sein. Der Beweis wird gerade so geführt, wenn der Punkt N zwischen der YY_1 und dem in A errichteten Perpendikel angenommen wird.

§. 4. Der geometrische Ort des Punktes, für welchen die Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten F und F_1 eine constante Größe 2a hat, führt den Namen Hyperbel. Sie besteht nach dem vorigen Paragraphen aus zwei völlig von einander getrennten Theilen, welche nach §. 1. eine symmetrische Lage zu der in der Mitte von FF_1 auf dieser Geraden errichteten Senkrechten YY_1 haben. Man nennt auch wohl jeden der beiden Zweige allein eine Hyperbel und bezeichnet dann die beiden sich entsprechenden Aeste als entgegengesetzte Hyperbeln. Die festen Punkte F und F_1 heißen die Brennpunkte der Hyperbel, obgleich sie nicht, wie die entsprechenden Punkte der Ellipse, Brennpunkte im eigentlichen Sinne sind; ihre Verbindungslinien mit irgend Fig. II.

einem Punkte der Curve führen den Namen Radienvectoren oder Leitstrahlen. Die Punkte A und A_1, in denen die Curve die durch F und F_1 gelegte Gerade schneidet, nennt man die Scheitel, die von ihnen begrenzte Strecke $AA_1 = 2a$ die Hauptaxe oder Queraxe, die Strecke $CF = CF_1 = c$ die Excentricität der Hyperbel. Das im Punkte C auf der Hauptaxe errichtete Perpendikel hat keinen Punkt mit der Curve gemein, ist also eigentlich keine Axe; man pflegt aber auf ihm von C aus $CB = CB_1 = \sqrt{c^2 - a^2} = b$ abzutragen und die Strecke BB_1 die Nebenaxe der Hyperbel zu nennen. Die von manchen Mathematikern gebrauchte Bezeichnung große und kleine Axe für Haupt= und Nebenaxe scheint mir bei der Hyperbel nicht angemeßen zu sein, da bei ihr $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ größer, gleich und kleiner als a sein kann, während bei der Ellipse $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ stets kleiner als a ist. Die Hyperbel heißt gleichseitig, wenn ihre beiden Axen einander gleich sind.

Fig. II. §. 5. Für jeden Punkt, welcher außerhalb der Hyperbel liegt, ist die Differenz seiner Abstände von den Brennpunkten kleiner, für jeden Punkt, welcher innerhalb der Hyperbel d. h in einem der von der Hyperbel begrenzten Flächenräume liegt, in dem sich ein Brennpunkt befindet, ist diese Differenz größer als 2a.

Ein Punkt liegt demnach auf, innerhalb oder außerhalb der Hyperbel, je nachdem die (positive) Differenz seiner Abstände von den Brennpunkten $=$, $>$ oder $<$ 2a ist.

Beweis: 1) Es ist $F_1P - FP = 2a$, folglich auch $F_1P + PQ - (FP + PQ) = 2a$; nun ist aber $F_1Q < F_1P + PQ$, folglich auch $F_1Q - FQ < 2a$.

2) Es ist $F_1P - FP = 2a$, folglich auch $F_1P - PR - (FP - PR) = 2a$; nun ist aber $F_1R > F_1P - PR$, mithin auch $F_1R - FR > 2a$.

Fig. II. §. 6. Zieht man von irgend einem Punkte P der Hyperbel eine Gerade nach C und verlängert dieselbe über diesen Punkt hinaus um sich selbst, so ist der Endpunkt p_1 der Verlängerung ein Punkt des andern Hyperbelastes.

Beweis: Das Viereck FPF_1p_1 ist ein Parallelogramm, weil seine Diagonalen FF_1 und Pp_1 sich im Punkt C gegenseitig halbiren; mithin ist $Fp_1 - F_1P_1 = F_1P - FP = 2a$.

Fig. II. §. 7. Verbindet man umgekehrt einen beliebigen Punkt P der Hyperbel mit demjenigen Punkt p_1 des andern Hyperbelastes, welcher zwar dieselben Abstände von den Geraden XX_1 und YY_1 hat, wie der Punkt P, aber nicht mit P auf derselben Seite dieser Geraden liegt (ein solcher Punkt p_1 läßt sich nach §. 1 stets finden), so geht die Verbindungslinie Pp_1 durch den Punkt C und wird in ihm halbirt.

Beweis: Sind G und G_1 die Fußpunkte der von P und p_1 auf die XX_1 gefällten Perpendikel, so sind die Dreiecke PCG und p_1CG_1 congruent; mithin ist PCp_1 eine gerade Linie, welche in C halbirt wird.

Fig. II. §. 8. Jede beliebige Gerade, welche zwei Hyperbelpunkte verbindet und durch den Punkt C geht, wird in ihm halbirt.

Beweis: Sind P und p_1 zwei beliebige Hyperbelpunkte, deren Verbindungslinie durch den Punkt C geht, so ist $F_1P - FP = Fp_1 - F_1p_1$, folglich auch $F_1P + F_1p_1 =$

$Fp_1 + FP$. Ferner sind, da $F_1C = FC$ und $\sphericalangle F_1Cp_1 = FCP$, auch die von F_1 und F auf die Pp_1 gefällten Perpendikel einander gleich. Die Dreiecke p_1F_1P und PFp_1 stimmen mithin in einer Seite, der zugehörigen Höhe und der Summe der beiden anderen Seiten überein und sind, da durch die genannten Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt wird, congruent. Daher sind auch die Dreiecke F_1PF und F_1p_1F congruent und ihre homologen Transversalen PC und p_1C einander gleich.

Anmerkung. Um ein Dreieck aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und der Summe der beiden anderen Seiten zu construiren, zeichne man eine Ellipse, deren große Axe gleich der Summe der beiden Dreiecksseiten ist, deren Brennpunkte einen Abstand gleich der dritten Seite haben, und ziehe in einer Entfernung, welche gleich der gegebenen Höhe ist, eine Parallele zur Hauptaxe.

Mittelst der Trigonometrie kann man die Aufgabe auf die leichtere, ein Dreieck aus einer Seite, ihrem Gegenwinkel und der Summe der anderen Seiten zu construiren, zurückführen. Ist c die gegebene Seite, s die Summe der beiden anderen Seiten a und b und h die zu c gehörige Höhe, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks $F = \frac{ch}{2} = \frac{ab \sin\gamma}{2}$.

Hieraus folgt

$$1)\ ch = ab \sin\gamma = 2ab \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Es ist ferner
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab(\cos\gamma + 1) \\ &= s^2 - 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}, \text{ also} \end{aligned}$$

$$2)\ 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2} = s^2 - c^2.$$

Durch Division der Gleichungen 1) und 2) erhält man:

$$\frac{ch}{s^2 - c^2} = \frac{2ab \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}}, \text{ also } \frac{2ch}{s^2 - c^2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Der Winkel γ wird mithin durch die gegebenen Größen c, h und s eindeutig bestimmt.

Jede Gerade, welche zwei Punkte einer Hyperbel verbindet und durch den Durchschnittspunkt C ihrer Axen geht, heißt ein Durchmeßer der Hyperbel; der Punkt C, in welchem nach dem Vorhergehenden jede derartige Linie halbirt wird, der Mittelpunkt der Curve.

Eine Gerade, welche zwei Punkte einer Hyperbel verbindet, ohne durch ihren Mittelpunkt zu gehen, heißt eine Sehne derselben.

§. 9. Beschreibt man mit 2a als Radius um F_1 als Mittelpunkt einen Kreis und zieht von F aus eine beliebige Gerade, welche diesen Kreis in den Punkten S und S_1 Fig. III.

schneidet, so ist der Durchschnittspunkt P (p_1) eines im Mittelpunkt Q (Q_1) von FS (FS_1) auf dieser Geraden errichteten Perpendikels mit der verlängerten F_1S (S_1F_1) ein Punkt der Hyperbel.

Beweis: Zieht man noch FP (Fp_1), so wird $\triangle$ SQP ($S_1Q_1p_1$) $\cong$ FQP (FQ_1p_1), mithin $F_1P - FP$ ($Fp_1 - F_1p_1$) $= F_1P - SP$ ($S_1p_1 - F_1p_1$) $= F_1S$ (F_1S_1) $= 2a$.

Anmerkung. Die Hyperbel kann demnach auch als der geometrische Ort eines Punktes betrachtet werden, welcher von einer Kreislinie und einem festen Punkte außerhalb derselben gleiche Abstände hat.

Verbindet man C mit Q, so wird, weil sowohl FQ = QS als auch $FC = CF_1$ ist, $CQ \parallel F_1S$ und $= \frac{1}{2} F_1S = a$. Der geometrische Ort des Punktes Q ist mithin ein um C mit dem Radius a beschriebener Kreis. Diesen Kreis, welcher die Hauptaxe zum Durchmeßer hat, wollen wir, analog der Bezeichnung bei der Ellipse, den *Hauptkreis* nennen.

Fig. III. §. 10. Die von F aus an den um F_1 mit dem Radius 2a beschriebenen Kreis gezogenen Tangenten berühren, wie sich leicht nachweisen läßt, auch den Hauptkreis und werden in den Berührungspunkten V und v halbirt. Die in diesen Punkten auf den Tangenten FT und Ft errichteten Perpendikel gehen durch den Mittelpunkt C des Hauptkreises; auf ihnen kann, da sie den Geraden F_1T und Ft parallel werden, kein Punkt der Hyperbel liegen. Sie führen den Namen *Asymptoten* der Hyperbel.

Errichtet man im Scheitelpunkte A der Hyperbel ein Perpendikel zur Hauptaxe und verlängert es bis zum Durchschnitt mit der Asymptote, so wird $\triangle$ CAU $\cong$ CVF, mithin $AU = FV = \sqrt{CF^2 - CV^2} = \sqrt{c^2 - a^2} = b$. Die Asymptoten fallen daher ihrer Lage nach mit den Diagonalen des Rechtecks zusammen, dessen Mittellinien die Axen der Hyperbel sind.

Bei der gleichseitigen Hyperbel wird dies Rechteck ein Quadrat; mithin stehn bei ihr die Asymptoten senkrecht auf einander.

Fig. III. §. 11. Liegt der Punkt S auf dem Bogen DST, so ist $\sphericalangle F_1SF > F_1TF$ mithin stumpf; das in Q zu errichtende Perpendikel schneidet also die durch F_1 und S gelegte Gerade in ihrer Verlängerung über S hinaus; der Durchschnittspunkt gehört dem Bogen der Hyperbel an, welcher sich von A über P hinaus erstreckt.

Liegt der Punkt S_1 auf dem Bogen TS_1D_1, so wird, da $FS_1 > FT$, auch $FS_1^2 + F_1S_1^2 > FT^2 + F_1T^2$ d. h. $> FF_1^2$, mithin $\sphericalangle FS_1F_1$ spitz; das in Q_1 zu errichtende Perpendikel schneidet also die durch S_1 und F_1 gelegte Gerade in ihrer Verlängerung über F_1 hinaus; (auf der Strecke S_1F_1 kann der Durchschnittspunkt p nicht liegen, weil $S_1Q_1 = \frac{1}{2} S_1F$ größer ist als die Hälfte der Sehne S_1S). Der Durchschnittspunkt p_1 gehört dem Bogen der Hyperbel an, welcher sich von A_1 über p_1 hinaus erstreckt.

In gleicher Weise erhält man Punkte der Hyperbelbogen Ap und A_1P_1, wenn man S auf dem Bogen Dt, resp. D_1t annimmt. Fällt der Punkt S mit dem Punkt D in der

Geraden FF_1 zusammen, so fällt Q in den Scheitel A der Hyperbel; denn $DF = 2c - 2a$, mithin $\frac{1}{2} DF = c - a = AF$; ebenso fällt Q_1 in A_1, wenn S_1 mit D_1 zusammenfällt.

§. 12. Das Perpendikel QP, welches mit der Halbirungslinie des Winkels, den die nach P gezogenen Radienvectoren F_1P und FP einschließen, zusammenfällt, hat außer P keinen Punkt mit der Hyperbel gemein, ist also eine Tangente der Curve im Punkte P. Fig. III.

Beweis: Verbindet man einen beliebigen Punkt R des Perpendikels mit F, F_1 und S, so wird $F_1R - FR = F_1R - SR$ kleiner als F_1S d. h. $< 2a$, mithin liegt R außerhalb der Hyperbel.

Um also in einem beliebigen Punkte der Hyperbel eine Tangente an dieselbe zu legen, braucht man nur den Winkel zu halbiren, den die nach diesem Punkte gezogenen Radienvectoren mit einander bilden.

§. 13. Um von einem außerhalb der Hyperbel gelegenen Punkte N eine Tangente an diese zu ziehen, beschreibe man um ihn mit seinem Abstande von demjenigen Brennpunkte F, der mit ihm auf derselben Seite der YY_1 liegt, einen Kreis, welcher den um F_1 mit dem Radius 2a beschriebenen Kreis im Punkte S schneiden möge. Die Sehne FS wird vom Hauptkreise im Punkt Q halbirt. Legt man nun durch N und Q eine Gerade, so berührt diese die Hyperbel in dem Punkte P, in welchem sie die verlängerte F_1S trifft. Fig. IV.

Beweis: Da die Gerade, welche den Mittelpunkt eines Kreises mit der Mitte einer Sehne desselben verbindet, auf dieser senkrecht steht, so ist NQ ein Perpendikel auf FS, folglich P nach §. 11. ein Punkt der Hyperbel und NPQ nach §. 12. eine Tangente an der Curve.

Anmerkung 1. Da nach §. 5. $F_1N - FN < 2a$, so ist $F_1N < 2a + FN$ d. h. die Centrale der um F_1 und N beschriebenen Kreise ist kleiner als die Summe ihrer Radien; ferner ist $F_1N + FN > 2c$ oder mindestens $= 2c$, jedenfalls also $> 2a$, mithin auch $F_1N > 2a - FN$; ist $FN > 2a$, so ist $F_1N > FN$, mithin um so mehr $> FN - 2a$; die Centrale ist also in beiden Fällen größer als die Differenz der Radien; mithin schneiden sich die Kreise in 2 Punkten S und S_1. Die Verbindungslinie des Punktes N mit der Mitte der Sehne FS_1 ergiebt demnach auch eine zweite Tangente.

Anmerkung 2. Liegt der Punkt N auf einer Asymptote, so fällt einer der Durchschnittspunkte der beiden Kreise mit dem Berührungspunkt T der Tangente zusammen, welche von F aus an den um F_1 beschriebenen Kreis gelegt ist. An Stelle von einer der beiden Tangenten erhält man in diesem Falle die Asymptote, welche als eine Tangente betrachtet werden kann, welche die Hyperbel in einem unendlich fernen Punkte berührt.

Liegt der Punkt N innerhalb des von den Asymptoten gebildeten Winkels UCu, so fallen beide Durchschnittspunkte S und S_1, wie leicht nachzuweisen ist, auf den Bogen TDt, mithin gehören die Berührungspunkte beider Tangenten nach §. 11. demselben Hyperbelast PAp an.

Liegt der Punkt N in einem der beiden von den Asymptoten gebildeten Winkelräume, welche keinen der beiden Hyperbeläste umschließen, so liegt der eine Durchschnittspunkt S auf dem Bogen TDt, der andre S_1 auf dem Bogen TD_1t, mithin der Berührungspunkt der einen Tangente auf dem Hyperbelast PAp, der Berührungspunkt der andern Tangente auf dem entgegengesetzten Hyperbelaste.

Fällt endlich der Punkt N mit A zusammen, so ist die Centrale der beiden Kreise gleich der Summe der Radien; die Kreise berühren sich von außen und man erhält nur eine Tangente, die Scheiteltangente.

Fig. IV. §. 14. Die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Perpendikel liegen auf der Peripherie des Hauptkreises; die nach diesen Fußpunkten gezogenen Radien des Hauptkreises sind den nach dem Berührungspunkte der Tangente gezogenen Radienvectoren parallel.

Der Beweis ergiebt sich leicht aus den §§. 9. und 12.

Zusatz: Die Verlängerung von CQ halbirt auch den Radiusvector FP in M; ebenso die Verlängerung von qC den Radiusvector F_1P in M_1. M ist demnach der Mittelpunkt eines durch P, Q und F gehenden Kreises, welcher, da die Centrale CM gleich der Summe der Radien ist, den Hauptkreis im Punkte Q von außen berührt. M_1 ist der Mittelpunkt eines durch P, q und F_1 gehenden Kreises, welchen, da die Centrale CM_1 gleich der Differenz der Radien ist, der Hauptkreis im Punkte q von innen berührt.

Fig. IV. §. 15. Die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf eine Sehne der Hyperbel gefällten Perpendikel liegen außerhalb des Hauptkreises.

Beweis: Zieht man durch P eine beliebige Sehne, so fällt der Fußpunkt des von F auf sie gefällten Perpendikels auf die Peripherie des um M mit dem Radius MF beschriebenen Kreises, liegt also nach dem Zusatz zum vorigen Paragraphen außerhalb des Hauptkreises. Der Fußpunkt des von F_1 auf die Sehne gefällten Perpendikels fällt auf die Peripherie des um M_1 mit dem Radius M_1F_1 beschriebenen Kreises, liegt also gleichfalls außerhalb des Hauptkreises.

Fig. V. §. 16. Hat eine Gerade keinen Punkt mit der Hyperbel gemein, so liegen die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf sie gefällten Perpendikel innerhalb des Hauptkreises.

Beweis: Denkt man sich eine solche Gerade, welche nothwendig die Strecke AA_1 schneiden muß, aus ihrer ursprünglichen Lage LL_1 parallel mit sich fortgerückt, bis sie den Hyperbelast PAp berührt, so fällt der Fußpunkt Q des von F auf sie gefällten Perpendikels, dessen Richtung in allen diesen Lagen dieselbe bleibt, auf die Peripherie des Hauptkreises. Bewegt man die Gerade dann parallel mit sich, bis sie den andern Hyperbelast berührt, so fällt der Fußpunkt q des von F auf sie gefällten Perpendikels ebenfalls auf die Peripherie des Hauptkreises, für alle Zwischenlagen liegt er mithin auf der Sehne Qq, also innerhalb des Hauptkreises. Dieselbe Betrachtung zeigt, daß auch der Fußpunkt des von F_1 auf die Gerade gefällten Perpendikels auf der Sehne Q_1q_1, also innerhalb des Hauptkreises liegen muß.

§. 17. Aus den §§. 14.—16. ergiebt sich folgender Lehrsatz:

Eine Gerade ist Tangente an der Hyperbel, schneidet sie oder liegt ganz außerhalb derselben, je nachdem die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf sie gefällten Perpendikel auf der Peripherie des Hauptkreises, außerhalb oder innerhalb derselben liegen.

§. 18. Verbindet man einen Punkt L, welcher außerhalb der Hyperbel liegt, mit demjenigen Brennpunkte F, der mit ihm auf derselben Seite der YY_1 liegt, und construirt über LF als Durchmeßer einen Kreis, so schneidet dieser den Hauptkreis in zwei Punkten O und O_1; die Geraden LO und LO_1 sind Tangenten an der Hyperbel. Fig. VI.

Beweis: Da L außerhalb der Hyperbel liegt, so ist $F_1L - FL < 2a$, mithin $F_1L < 2a + FL$, und $\frac{1}{2} F_1L < a + \frac{1}{2} FL$, die Centrale CG also kleiner als die Summe der Radien a und **FG**. Die Centrale CG ist aber anderseits größer als die Differenz der Radien CA und GF, wie sich aus Folgendem ergiebt. Es kann $GF =>$ oder $< 2a$ sein. Ist $GF = a$, so ist die Differenz der Radien $= 0$, mithin kleiner als die Centrale CG. Ist $GF < a$, so ist $CG > CF - FG$, um so mehr größer als $CA - FG$. Ist endlich $GF > a$, so ist CG als Transversale in dem Dreieck LCF, dessen Winkel LCF ein spitzer ist, $> GF$, um so mehr $> GF - a$. Der um G mit dem Radius GF beschriebene Kreis schneidet also den Hauptkreis in 2 Punkten O und O_1.

Der zweite Theil der Behauptung ergiebt sich aus §. 17, da sowohl $\sphericalangle$ FOL als $\sphericalangle$ FO_1L ein Rechter ist. Der Satz liefert ein weiteres Mittel zur Construction der Tangenten, welche von Punkten außerhalb der Hyperbel an diese gezogen werden sollen.

§. 19. Das Rechteck aus den von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Perpendikeln hat eine constante Größe, nämlich gleich dem Quadrat der halben Nebenaxe. Fig. VII.

Beweis: Nach §. 14. liegen die Fußpunkte der Perpendikel auf der Peripherie des Hauptkreises. Zieht man vom Fußpunkte Q des einen Perpendikels eine Gerade durch den Mittelpunkt C bis zum Durchschnitt q_1 mit dem andern Perpendikel, so wird diese Gerade $Qq_1 \parallel F_1P$ (nach §. 14.). Da ferner $F_1q_1 \parallel SQ$, so ist SQq_1F_1 ein Parallelogramm, also $F_1q_1 = SQ = FQ$ und $QCq_1 = F_1S = 2a$; die Gerade Qq_1 ist mithin ein Durchmeßer des Hauptkreises, q_1 ein Punkt seiner Peripherie. Daher ist

$$FQ.\ F_1Q_1 = F_1q_1.\ F_1Q_1 = F_1A_1.\ F_1A = (c-a)\ (c+a) = c^2 - a^2 = b^2.$$

§. 20. Das Rechteck aus den Abschnitten, welche eine Tangente auf den Scheiteltangenten abschneidet, ist constant, nämlich gleich dem Quadrat der halben Nebenaxe. Fig. VII.

Beweis: $\triangle$ NAM $\sim$ NQF, folglich

1) $AM : FQ = AN : NQ$; ebenso ist

$\triangle\ NA_1M_1 \sim NQ_1F_1$, folglich

2) $A_1M_1 : F_1Q_1 = A_1N : NQ_1$.

Durch Multiplication der Gleichungen 1) und 2) erhält man

$$AM.\ A_1M_1 : FQ.\ F_1Q_1 = AN.\ A_1N : NQ.\ NQ_1.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nach einem bekannten Satz aus der Kreislehre $= 1$, mithin sind auch die Produkte $AM. A_1M_1$ und $FQ. F_1Q_1$ einander gleich. Da nach dem vorigen §. $FQ. F_1Q_1 = b^2$, so ist auch $AM. A_1M_1 = b^2$.

Fig. VIII. §. 21. Schneiden sich zwei Tangenten desselben Hyperbelastes, so halbirt erstens die Verbindungslinie ihres Durchschnittspunkts mit einem der Brennpunkte den Winkel, den die von diesem Brennpunkte nach den Berührungspunkten der Tangenten gezogenen Radienvectoren einschließen; und zweitens ist der Winkel, welchen eine der Verbindungslinien mit einer Tangente bildet, das Supplement zu dem Winkel, welchen die zweite Verbindungslinie mit der andern Tangente einschließt.

Beweis: Ad 1) Macht man $PS = PF$ und $ps = pF$, so wird $F_1S = F_1s = 2a$. Da eine Tangente den Winkel, welchen die nach dem Berührungspunkte gezogenen Radienvectoren einschließen, halbirt, so ist $\triangle OSP \cong OFP$ und $\triangle Osp \cong OFp$; mithin $SO = OF$ und $sO = OF$, also auch $SO = sO$. Die Dreiecke F_1SO und F_1sO stimmen demnach in allen Seiten überein, sind also congruent; folglich ist auch $\sphericalangle SF_1O = sF_1O$. Ferner ist wegen dieser Congruenz $\sphericalangle F_1SO = F_1sO$, folglich $\sphericalangle PSO = psO$, mithin auch $\sphericalangle PFO = pFO$.

Ad 2) Die sechs Winkel, welche den Punkt O zum gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben, bilden 3 Paare gleicher Winkel; es ist nämlich $SOF_1 = sOF_1$, $POS = POF$ und $FOp = pOs$; daher ist $FOP + (pOs + sOF_1) = (POS + SOF_1) + FOp = 2R$.

Liegen die Berührungspunkte P und p der Tangenten nicht, wie in Fig. VIII. auf verschiedenen Seiten, sondern auf derselben Seite der Hauptaxe, so wird der Beweis genau in derselben Weise geführt.

Zusatz: Aus dem Beweis ad 2) ergiebt sich, daß der $\sphericalangle POp$, unter dem sich die Tangenten schneiden, das Supplement sowohl von SOF_1 als von sOF_1 ist.

Fig. IX. §. 22. Schneiden sich zwei Gerade, welche die entgegengesetzten Aeste einer Hyperbel berühren, so halbirt erstens die Verbindungslinie ihres Durchschnittspunkts mit einem der Brennpunkte den Nebenwinkel des Winkels, welchen die von diesem Brennpunkte nach den Berührungspunkten gezogenen Radienvectoren einschließen, und zweitens bilden die von dem Durchschnittspunkt der Tangenten nach den Brennpunkten gezogenen Geraden gleiche Winkel mit den Tangenten.

Beweis: Ad 1) Macht man $PS = PF_1$ und $P_1S_1 = P_1F$, so wird $FS = F_1S_1 = 2a$. Aus der Congruenz der Dreiecke SOP und F_1OP folgt $SO = F_1O$ und $\sphericalangle PSO = PF_1O$; aus der Congruenz der Dreiecke FOP_1 und S_1OP_1 folgt ferner $FO = S_1O$ und $\sphericalangle P_1FO = P_1S_1O$. Die Dreiecke FSO und F_1S_1O stimmen mithin in den 3 Seiten, also auch in den homologen Winkeln überein; es ist $\sphericalangle SFO = F_1S_1O$ und $\sphericalangle FSO = OF_1S_1$. Da nun $\sphericalangle F_1S_1O = P_1FO$ und $\sphericalangle FSO = PF_1O$, so ist auch $\sphericalangle SFO = P_1FO$ und $\sphericalangle PF_1O = OF_1S_1$.

Ad 2) Aus der Congruenz der Dreiecke FOS und F_1OS_1 folgt $\sphericalangle SOF = S_1OF_1$;

mithin ist auch $\sphericalangle SOF + FOF_1 = S_1OF_1 + F_1OF$ und $\sphericalangle SOP \left(= \frac{1}{2}(SOF + FOF_1)\right) = S_1OP_1 \left(= \frac{1}{2}(S_1OF_1 + F_1OF)\right)$; folglich ist

$$\sphericalangle SOP - SOF = S_1OP_1 - S_1OF_1 \text{ d. h. } \sphericalangle FOP = F_1OP_1.$$

Zusatz: Da $\sphericalangle F_1OP = SOP$ und $\sphericalangle F_1OP_1 = FOP$, so ist $\sphericalangle P_1OP$, der Winkel, unter dem sich die Tangenten schneiden, gleich $SOF = S_1OF_1$.

§. 23. Nimmt man zwischen den Berührungspunkten P und p zweier Tangenten desselben Hyperbelastes einen beliebigen Punkt P_2 auf der Curve an und construirt in ihm gleichfalls eine Tangente, so hat der Winkel, welchen die von den Endpunkten dieser dritten (von den beiden andern begrenzten) Tangente nach einem der Brennpunkte gezogenen Geraden einschließen, einen constanten Werth, gleich der Hälfte des Winkels, welchen die von den Berührungspunkten der beiden ersten Tangenten nach demselben Brennpunkt gezogenen Geraden bilden. Fig. VIII.

Beweis: Nach §. 21. ist $\sphericalangle P_2FO_1 = O_1FP$ und $\sphericalangle P_2FO_2 = O_2Fp$, mithin $P_2FO_1 + P_2FO_2 = O_1FP + O_2Fp$, also $\sphericalangle O_1FO_2 = \frac{1}{2}(PFO + OFp)$. Ebenso beweist man, daß $\sphericalangle O_1F_1O_2 = \frac{1}{2} PF_1p$ ist.

Zusatz 1: Liegen die Berührungspunkte P und p so, daß ihre Verbindungslinie durch den Brennpunkt F geht, so erscheint jede von den beiden ersten begrenzte dritte Tangente $O_1P_2O_2$ vom Brennpunte F aus gesehen unter einem rechten Winkel.

Zusatz 2: Wird eine Tangente durch die Asymptoten begrenzt, so schließen die von ihren Endpunkten nach dem einen Brennpunkt gezogenen Geraden einen Winkel ein, welcher halb so groß ist als der Asymptotenwinkel; die nach dem andern Brennpunkt gezogenen Geraden bilden das Supplement zu ersterem.

§. 24. Fällt man von einem Punkte P der Hyperbel das Perpendikel PH auf die Hauptaxe, so liegt sein Fußpunkt H auf der Peripherie eines über PF als Durchmeßer beschriebenen Kreises, welcher nach dem Zusatz in §. 14. den Hauptkreis von außen im Punkte Q berührt. Es ist also $CL.\ CQ = CF.\ CH$, folglich $PF = QL = CL - CQ = \frac{CF.\ CH}{CQ} - CQ$. Fig. X.

Bezeichnet man den Radiusvector PF mit r, den Radiusvector PF_1 mit r_1, das Perpendikel PH (die Ordinate des Punktes P) mit y, den Abstand seines Fußpunktes von C (die Abscisse des Punktes P) mit x, die constanten Strecken CF und CA, wie früher, mit c und a, so ist

$$1)\quad r = \frac{c.x}{a} - a, \text{ also}$$

$$2)\quad r_1 = r + 2a = \frac{c.x}{a} + a \text{ und}$$

$$3)\quad y^2 = r^2 - (c - x)^2 = \left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 - (c - x)^2 =$$

$$\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right) x^2 - (c^2 - a^2) = \frac{(c^2 - a^2)(x^2 - a^2)}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Anmerkung. Zieht man von dem Fußpunkte der Ordinate eine Tangente t an den Hauptkreis, so wird $t^2 = x^2 - a^2$, mithin $\frac{y^2}{t^2} = \frac{b^2}{a^2}$ und $\frac{y}{t} = \frac{b}{a}$; eine Ordinate der Hyperbel steht also zu der von ihrem Fußpunkt an den Hauptkreis gelegten Tangente in dem constanten Verhältnis $b:a$. Bei der gleichseitigen Hyperbel hat dies Verhältnis den Werth 1, mithin ist bei ihr auch jede Ordinate gleich der von ihrem Fußpunkt an den Hauptkreis gelegten Tangente.

§. 25. Eine durch einen Brennpunkt senkrecht zur Hauptaxe gezogene Sehne heißt der Parameter der Hyperbel und pflegt mit p bezeichnet zu werden. Die Nebenaxe ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hauptaxe und dem Parameter.

Beweis: Der halbe Parameter ist diejenige Ordinate der Hyperbel, deren Fußpunkt mit dem Brennpunkt zusammenfällt; die zugehörige Abscisse x ist daher gleich c; nach dem vorhergehenden Paragraphen ist daher $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}(c^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} \cdot b^2$, mithin $\frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}$ und $p = \frac{(2b)^2}{2a}$.

Anmerkung: In der gleichseitigen Hyperbel ist der Parameter gleich der Nebenaxe.

Fig. X. §. 26. Ein im Berührungspunkt P einer Tangente auf sie errichtetes Perpendikel heißt die Normale im Punkte P.

Da die Tangente den Winkel halbirt, welchen die nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Radienvectoren bilden, so halbirt die auf ihr senkrechte Normale den Nebenwinkel dieses Winkels. Daher ist sowohl $F_1T : TF = r_1 : r$, als auch $F_1N : FN = r_1 : r$; mithin wird die Strecke F_1F durch die Tangente und Normale desselben Hyperbelpunktes harmonisch getheilt.

Da $r_1 > r$, so ist auch $F_1T > FT$, mithin liegt der Punkt T, in welchem eine Tangente die Hauptaxe schneidet, mit dem Berührungspunkte auf derselben Seite der Nebenaxe. Um seinen Abstand CT vom Mittelpunkte der Hyperbel zu bestimmen, schreibe man die Proportion $FT : TF = r_1 : r$ in der Form $c + CT : c - CT = r_1 : r$. Subtrahirt man auf beiden Seiten 1, so erhält man

$$\frac{2CT}{c - CT} = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{2a}{r} = \frac{2a}{\frac{cx}{a} - a} = \frac{2a^2}{cx - a^2}.$$

Hieraus ergiebt sich $CT = \frac{a^2}{x}$. Setzt man für x den kleinsten Werth, den es nach §. 3, 2) annehmen kann, nämlich a, so wird $CT = \frac{a^2}{a} = a$ (Scheiteltangente); je größer x wird, um so kleiner wird CT; für $x = \infty$ wird $CT = o$ (Asymptoten).

Um den Abstand des Punktes N, in welchem die Normale die Hauptaxe schneidet, vom Mittelpunkte C der Hyperbel zu bestimmen, schreibe man die Proportion $F_1N : FN =$

$r_1 : r$ in der Form $c + CN : CN - c = r_1 : r$. Subtrahirt man wieder auf beiden Seiten 1, so erhält man $2c : CN - c = r_1 - r : r = 2a^2 : cx - a^2$, woraus sich $CN = \frac{c^2x}{a^2}$ ergiebt.

§. 27. Die Strecke PT der Tangente von dem Berührungspunkte bis zu ihrem Durchschnitt mit der Hauptaxe heißt die begrenzte Tangente oder Tangente im engern Sinn; die Strecke PN der Normale vom Berührungspunkt der zugehörigen Tangente bis zum Durchschnitt der Normale mit der Hauptaxe die begrenzte Normale oder Normale schlechthin; die Strecke HT d. h. der Abstand des Durchschnittspunkts der Tangente mit der Hauptaxe von dem Fußpunkte der Ordinate ihres Berührungspunktes die Subtangente; die Strecke HN d. h. der Abstand des Durchschnittspunktes der Normale mit der Hauptaxe von jenem Fußpunkte die Subnormale des Punktes P. Fig. X.

Um algebraische Ausdrücke für die Werthe dieser begrenzten Strecken zu erhalten, kann man die im vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate benutzen.

Es ist nämlich die Subtangente $HT = x - CT = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{(x + a)(x - a)}{x} = \frac{A_1H \cdot AH}{CH}$; die Subtangente ist mithin die vierte Proportionale zu den Abständen der beiden Scheitel und des Mittelpunkts der Hyperbel von dem Fußpunkte der Ordinate des Berührungspunktes der Tangente.

Anmerkung: Construirt man beliebig viele Hyperbeln, welche die Strecke A_1A zur gemeinschaftlichen Hauptaxe haben, und verlängert die einem beliebigen Punkte der einen Hyperbel zugehörige Ordinate bis zum Durchschnitt mit den andern Hyperbeln, so schneiden sämmtliche in diesen Durchschnittspunkten an die Curven gelegten Tangenten die gemeinschaftliche Hauptaxe in einem und demselben Punkte; denn da die Berührungspunkte die nämliche Abscisse haben und der Werth der Subtangente nur von ihr und der Hauptaxe abhängig ist, so ergiebt sich auch für alle Subtangenten die nämliche Größe, für den Punkt T also derselbe Ort.

Die Subnormale HN ist gleich

$$CN - x = \frac{c^2}{a^2}x - x = \frac{c^2 - a^2}{a^2}x = \frac{b^2}{a^2}x.$$

Es ist ferner das Quadrat der Tangente $PT^2 = PH^2 + TH^2 = y^2 + \frac{(x^2 - a^2)^2}{x^2}$.

Nun ist aber nach §. 24. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, folglich

$$PT^2 = \frac{x^2b^2(x^2 - a^2) + a^2(x^2 - a^2)^2}{a^2x^2}$$

$$= \frac{(x^2b^2 + x^2a^2 - a^4)(x^2 - a^2)}{a^2x^2}$$

$$= \frac{(c^2x^2 - a^4)(x^2 - a^2)}{a^2x^2} = \frac{(c^2x^2 - a^4)\,y^2}{b^2x^2}$$

$\left(\text{da } \frac{x^2 - a^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}\right)$, mithin

$$PT = \frac{y}{bx}\sqrt{c^2x^2 - a^4}.$$

Als Quadrat der Normale hat man

$$PN^2 = PH^2 + HN^2 = y^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) + \frac{b^4}{a^4}x^2 = \frac{b^2}{a^4}(a^2x^2 - a^4 + b^2x^2)$$

$= \frac{b^2}{a^4}(c^2x^2 - a^4)$, mithin ist

$$PN = \frac{b}{a^2}\sqrt{c^2x^2 - a^4}.$$

Zusatz: Da $CN = \frac{c^2}{a^2}x$ und $HN = \frac{b^2}{a^2}x$, so ist das Verhältnis dieser Strecken constant; es ist $CN : HN = c^2 : b^2$.

Fig. X. §. 28. Verlängert man die im Punkte P an die Hyperbel gelegte Tangente und ebenso die zugehörige Normale bis zum Durchschnitt mit der Nebenaxe in den Punkten t und n und fällt von P aus das Perpendikel Ph auf diese Axe, so heißt Pt die Tangente, Pn die Normale, ht die Subtangente und hn die Subnormale des Punktes P in Beziehung auf die Nebenaxe.

Was zunächst den Abstand des Punktes t von dem Mittelpunkte der Hyperbel betrifft, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke tCT und PHT

$$Ct = \frac{CT \,.\, PH}{TH} = \frac{\frac{a^2}{x}\,.\,y}{\frac{x^2 - a^2}{x}} = \frac{a^2y}{x^2 - a^2} = \frac{b^2}{y}\left(\text{da } \frac{a^2}{x^2 - a^2} = \frac{b^2}{y^2}\right).$$

Für den Abstand des Punktes n vom Mittelpunkte der Hyperbel erhält man leicht einen Ausdruck, wenn man die Aehnlichkeit der Dreiecke nCN und PHN in Betracht zieht. Es ist

$$Cn = \frac{PH \,.\, CN}{HN} = \frac{y\,.\,\frac{c^2}{a^2}x}{\frac{b^2}{a^2}x} = \frac{c^2}{b^2}\,y.$$

Es ist ferner die Subtangente $ht = y + Ct = \frac{y^2 + b^2}{y}$; die Subnormale $hn = Cn - y = \frac{c^2}{b^2}\, y - y = \frac{a^2}{b^2}\, y$.

Ferner ist

$$Pt^2 = Ph^2 + ht^2 = x^2 + \frac{(y^2 + b^2)^2}{y^2}.$$

Da aber $x^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2 + a^2 = \frac{a^2\,(y^2 + b^2)}{b^2}$, so ist

$$\begin{aligned} Pt^2 &= \frac{a^2y^2\,(y^2 + b^2) + b^2\,(y^2 + b^2)^2}{b^2y^2} \\ &= \frac{(a^2y^2 + b^2y^2 + b^4)\,(y^2 + b^2)}{b^2y^2} \\ &= \frac{(c^2y^2 + b^4)\,(y^2 + b^2)}{b^2y^2} = \frac{(c^2y^2 + b^4)\,x^2}{a^2y^2} \end{aligned}$$

$\left(\text{da } \frac{y^2 + b^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}\right)$, mithin ist

$$Pt = \frac{x}{ay}\sqrt{c^2y^2 + b^4}.$$

Endlich hat man zur Bestimmung der Normale

$$\begin{aligned} Pn^2 &= Ph^2 + hn^2 = x^2 + \frac{a^4}{b^4}\,y^2 \\ &= \frac{a^2\,(y^2 + b^2)}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}\,y^2 \\ &= \frac{a^2}{b_4}\,(b^2y^2 + b^4 + a^2y^2) = \frac{a^2}{b^4}\,(c^2y^2 + b^4), \text{ mithin ist} \end{aligned}$$

$$Pn = \frac{a}{b^2}\sqrt{c^2y^2 + b^4}.$$

§. 29. Stellen wir die in den drei letzten Paragraphen entwickelten Formeln übersichtlich zusammen, so haben wir:

1) $CT = \frac{a^2}{x}$	$Ct = \frac{b^2}{y}$
2) $CN = \frac{c^2}{a^2}\,x$	$Cn = \frac{c^2}{b^2}\,y$
3) Sbtg. $HT = \frac{x^2 - a^2}{x}$	Sbtg. $ht = \frac{y^2 + b^2}{y}$
4) Sbnr. $HN = \frac{b^2}{a^2}\,x$	Sbnr. $hn = \frac{a^2}{b^2}\,y$

5) Tg. PT $= \frac{y}{bx} \sqrt{c^2x^2 - a^4}$ Tg. Pt $= \frac{x}{ay} \sqrt{c^2y^2 + b^4}$

6) Nr. PN $= \frac{b}{a^2} \sqrt{c^2x^2 - a^4}$ Nr. Pn $= \frac{a}{b^2} \sqrt{c^2y^2 + b^4}$.

Anmerkung. Zur Unterscheidung sind die abgekürzten Bezeichnungen für Subtangente, Subnormale ꝛc., wenn diese Strecken auf die Hauptaxe bezogen sind, mit lateinischen Buchstaben (Sbtg., Sbnr. ꝛc.), wenn sie auf die Nebenaxe bezogen sind, mit deutschen Buchstaben (Sbtg., Sbnr. ꝛc,) geschrieben.

§. 30. 1) Das Quadrat der Ordinate eines Hyperbelpunktes verhält sich zu dem Rechteck, welches die Abstände ihres Fußpunkts von den Scheiteln zu Seiten hat, wie das Quadrat der halben Nebenaxe zum Quadrat der halben Hauptaxe.

2) Die Quadrate der Ordinaten beliebiger Punkte der Hyperbel verhalten sich wie die Rechtecke, welche die Abstände der Ordinatenfußpunkte von den Scheiteln zu Seiten haben.

Beweis: ad 1) Nach §. 24. ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; hieraus ergiebt sich sofort

$$\frac{y^2}{(x + a)(x - a)} = \frac{b^2}{a^2}.$$

ad 2) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$,

$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2)$; folglich

$$y^2 : y_1^2 = (x^2 - a^2) : (x_1^2 - a^2) = (x + a)(x - a) : (x_1 + a)(x_1 - a).$$

§. 31. Verlängert man die Ordinate eines Punktes P über P hinaus bis zum Fig. XI. Durchschnitt mit der Asymptote im Punkte $\mathfrak{P}$ und bezeichnet die Ordinate des Asymptotenpunkts mit $\mathfrak{y}$, so ist $\frac{\mathfrak{y}}{x} = \frac{b}{a}$ oder $\mathfrak{y} = \frac{b}{a}x$; da aber y, die Ordinate des entsprechenden Hyperbelpunktes, $= \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ und selbstverständlich $x > \sqrt{x^2 - a^2}$ ist, so ist auch $\mathfrak{y} > y$. Die Differenz der beiden Ordinaten wird um so kleiner, je größer x wird; sie wird unendlich klein, wenn x unendlich groß wird. Denn es ist die Ordinatendifferenz $\mathfrak{y} - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$; der erste Factor dieses Produkts ist constant; der Werth des zweiten ändert sich mit der Größe von x und zwar in der Art, daß er abnimmt, wenn x wächst; denn da $\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) = a^2$, so ist $x - \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$; die rechte Seite dieser Geichung ist ein Quotient, dessen Dividend a^2

constant ist, dessen Divisor aber um so größer wird, je mehr x zunimmt; der Werth des Quotienten wird also kleiner, wenn x wächst. Für $x = \infty$ hat man $\mathfrak{y} - y = x - \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a^2}{\infty} = 0$. Einfacher ergiebt sich die Richtigkeit des Gesagten aus der im folgenden Paragraphen entwickelten Relation $\mathfrak{y}^2 - y^2 = b^2$.

Anmerkung: Die Größe einer von dem Fußpunkte der Ordinate an den Hauptkreis gelegten Tangente t wird durch den Ausdruck $\sqrt{x^2 - a^2}$ dargestellt; man kann deshalb $x - \sqrt{x^2 - a^2}$ als die Differenz zwischen der Hypotenuse x und der Kathete t eines rechtwinkligen Dreiecks betrachten, dessen andere Kathete a constant ist. Nun ist $a^2 = x^2 - t^2 = (x - t)(x + t)$; wenn die Hypotenuse x zunimmt, wird auch die Kathete t, um so mehr die Summe $x + t$ größer; folglich muß die Differenz $x - t$ gleichzeitig kleiner werden.

§. 32. Verlängert man die Ordinate eines Hyperbelpunktes bis zum Durchschnitt mit beiden Asymptoten, so wird die von letzteren begrenzte Strecke durch den Hyperbelpunkt so getheilt, daß das Rechteck aus den beiden Abschnitten gleich dem Quadrat der halben Nebenaxe ist; zieht man dagegen von einem Hyperbelpunkt aus eine Gerade parallel zur Hauptaxe, bis sie den entgegengesetzten Hyperbelast trifft, so wird die von den beiden Hyperbelästen begrenzte Strecke durch jede der Asymptoten so getheilt, daß das Rechteck aus den beiden Abschnitten gleich dem Quadrat der halben großen Axe ist. Fig. XI.

Beweis: ad 1) $\mathfrak{y}^2 - y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) = b^2$; $\mathfrak{y} - y = \mathfrak{P}P$ und $\mathfrak{y} + y = \mathfrak{P}\mathfrak{p} = P\mathfrak{p}$; folglich $\mathfrak{P}P . P\mathfrak{p} = b^2$.

ad 2). Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $Ch\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}P\mathfrak{R}$ folgt

$$\frac{P\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}h} = \frac{\mathfrak{P}P}{Ch}; \text{ mithin ist } \frac{P\mathfrak{R} + \mathfrak{R}h}{\mathfrak{R}h} = \frac{\mathfrak{P}P + Ch}{Ch} \text{ oder } \frac{Ph}{\mathfrak{R}h} = \frac{\mathfrak{y}}{y}; \text{ folglich auch}$$

$$\frac{Ph^2}{\mathfrak{R}h^2} = \frac{\mathfrak{y}^2}{y^2} \text{ und } \frac{Ph^2 - \mathfrak{R}h^2}{\mathfrak{R}h^2} = \frac{\mathfrak{y}^2 - y^2}{y^2} \text{ oder } \frac{Ph^2 - \mathfrak{R}h^2}{\mathfrak{y}^2 - y^2} = \frac{\mathfrak{R}h^2}{y^2} = \frac{BU^2}{BC^2} = \frac{a^2}{b^2};$$

da aber nach 1) $\mathfrak{y}^2 - y^2 = b^2$; so ist $Ph^2 - \mathfrak{R}h^2 = (Ph + \mathfrak{R}h)(Ph - \mathfrak{R}h) = P\mathfrak{R}_1 . P\mathfrak{R} = P_1\mathfrak{R} . \mathfrak{R}P = a^2$.

§. 33. Zieht man durch einen Punkt P der Hyperbel die Geraden $P\mathfrak{B}$ und $P\mathfrak{W}$ parallel den Asymptoten bis zum Durchschnitt mit ihnen, so hat das Rechteck aus den Strecken $P\mathfrak{B}$ und $P\mathfrak{W}$ (den Coordinaten des Punktes P in Beziehung auf die Asymptoten) einen constanten Werth, nämlich $\frac{1}{4} c^2$. Fig. XI.

Beweis: Die Dreiecke $P\mathfrak{W}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{B}P$ sind dem Dreieck UCu ähnlich; daher ist sowohl $\frac{P\mathfrak{W}}{P\mathfrak{p}} = \frac{CU}{Uu} = \frac{c}{2b}$, als auch $\frac{P\mathfrak{B}}{P\mathfrak{P}} = \frac{Cu}{Uu} = \frac{c}{2b}$; mithin $\frac{P\mathfrak{W} . P\mathfrak{B}}{P\mathfrak{p} . P\mathfrak{P}} = \frac{c^2}{4b^2}$; da aber nach dem vorigen Paragraphen $P\mathfrak{p} . P\mathfrak{P} = b^2$, so ist $P\mathfrak{W} . P\mathfrak{B} = \frac{c^2}{4}$.

Anmerkung 1. Verbindet man die Scheitelpunkte der Hyperbel mit den Endpunkten der Nebenaxe, so erhält man einen Rhombus, dessen Flächeninhalt $= c^2 \sin\varphi$ ist, wenn φ den von den Asymptoten gebildeten Winkel bezeichnet. Der Flächeninhalt des Parallelogrammes $B C \mathfrak{W} P$ ist gleich $P\mathfrak{W} \, . \, P\mathfrak{V} \, . \, \sin\varphi$. Da nun $P\mathfrak{W} \, . \, P\mathfrak{V} = \frac{c^2}{4}$, so ist auch $P\mathfrak{W} \, . \, P\mathfrak{V} \, . \, \sin\varphi = \frac{c^2 \sin\varphi}{4}$, d. h. der Flächeninhalt des Parallelogrammes $B C \mathfrak{W} P$ ist gleich einem Viertel des Rhombus $A_1 B A B_1 = \frac{ab}{2}$.

Anmerkung 2. Man nennt den Werth $\frac{c^2}{4}$ die Potenz der Hyperbel; auch wird wohl $\frac{c^2 \sin\varphi}{4}$ d. h. der vierte Theil vom Flächeninhalt des Rhombus $A_1 B A B_1$, oder auch der Flächeninhalt des ganzen Rhombus, also $c^2 \sin\varphi$ mit diesem Namen belegt.

Fig. XI. §. 34. Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Hyperbel eine Secante, welche entweder denselben Hyperbelast in zwei Punkten oder beide Hyperbeläste in je einem Punkte schneidet, so sind die zwischen der Hyperbel und den Asymptoten liegenden Abschnitte derselben einander gleich.

Beweis: Man ziehe durch die Punkte, in denen die Secante die Hyperbel schneidet, Parallele zu den Asymptoten. Dann ist $\triangle\, \mathfrak{N} P \mathfrak{V} \sim \mathfrak{N} s v$, also $\mathfrak{N} P : P \mathfrak{V} = \mathfrak{N} s : s v$; ferner ist $\triangle\, n s w \sim n P \mathfrak{W}$, also $n P : \mathfrak{W} P = n s : w s$; folglich $\mathfrak{N} P \, . \, n P : P \mathfrak{V} \, . \, \mathfrak{W} P = \mathfrak{N} s \, . \, n s : s v \, . \, w s$. Da nach dem vorigen Paragraphen $P \mathfrak{V} \, . \, \mathfrak{W} P = s v \, . \, w s = \frac{c^2}{4}$, so ist auch $\mathfrak{N} P \, . \, n P = \mathfrak{N} s \, . \, n s$, d. h. $\mathfrak{N} P \, . \, (n s + s P) = (\mathfrak{N} P + P s) \, n s$, daher $\mathfrak{N} P \, . \, s P = P s \, . \, n s$, also $\mathfrak{N} P = n s$.

Der Beweis wird ähnlich geführt, wenn die Secante die entgegengesetzten Hyperbeläste schneidet.

Anmerkung: Sind die Asymptoten und irgend ein Punkt der Hyperbel gegeben, so lassen sich mit Hülfe des vorstehenden Satzes beliebig viele andere Punkte der Hyperbel bestimmen.

Fig. XII. §. 35. Jede von den Asymptoten begrenzte Tangente der Hyperbel wird in ihrem Berührungspunkte halbirt.

Beweis: Nach §. 12. ist $\sphericalangle\, F_1 P O_1 = F P O_1$, mithin auch $\sphericalangle\, F_1 P O = F P O$. Da die Asymptote CO als eine Tangente betrachtet werden kann, welche die Hyperbel in unendlicher Entfernung berührt, so ist nach §. 22, 2. $\sphericalangle\, F_1 O C = F O P$. Zieht man ferner $F_1 N \parallel C O$, so halbirt $F_1 O$ nach §. 21. den Winkel $N F_1 P$, mithin ist $\sphericalangle\, O F_1 P = O F_1 N = F_1 O C = F O P$. Die Dreiecke $F_1 P O$ und $F P O$ stimmen also in zwei Winkeln überein, sind daher ähnlich, und es ist $F_1 P : O P = O P : F P$ oder $O P^2 = F_1 P \, . \, F P$. Ebenso sind die Dreiecke $F_1 P O_1$ und $F P O_1$ ähnlich; denn $\sphericalangle\, F_1 P O_1 = F P O_1$ und $\sphericalangle\, P F_1 O_1 = \frac{1}{2} P F_1 N_1 = F_1 O_1 C = F O_1 P$; folglich ist $F_1 P : O_1 P = O_1 P : F P$ oder $O_1 P^2 = F_1 P \, . \, F P$, mithin $O P^2 = O_1 P^2$; also $O P = O_1 P$.

§. 36. Das Rechteck, welches die Strecken zu Seiten hat, die eine Tangente auf den Asymptoten abschneidet, hat einen constanten Flächeninhalt, gleich c^2. Fig. XII.

Beweis: Nach §. 23, Zusatz 2. sind die Winkel OF_1O_1 und OFO_1 Supplemente, mithin läßt sich durch die Punkte O, F, O_1 und F_1 ein Kreis legen, welcher die Verlängerung von OC im Punkte E schneiden möge. Es läßt sich leicht nachweisen, daß die Dreiecke F_1EC und FO_1C congruent sind, daß mithin $EC = O_1C$ ist. Nun ist aber $EC \cdot CO = F_1C \cdot CF = c^2$, also auch $O_1C \cdot OC = c^2$.

Zusatz: Die von einer Tangente und den Asymptoten begrenzten Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt, denn es ist, wenn φ der von den Asymptoten gebildeten Winkel bezeichnet, $\triangle OCO_1 = \frac{1}{2} OC \cdot CO_1 \sin\varphi = \frac{1}{2} c^2 \sin\varphi$.

§. 37. Zieht man durch einen Hyperbelpunkt P eine Gerade parallel zu einer Asymptote und verlängert das von ihr auf der andern Asymptote abgeschnittene Stück CM über den Schnittpunkt hinaus um sich selbst, so berührt eine durch den Endpunkt O der Verlängerung und den Punkt P gelegte Gerade die Hyperbel im Punkte P. Fig. XIII.

Beweis: Hätte die Gerade OPO_1 außer P noch einen zweiten Punkt N mit der Hyperbel gemein, so müßte nach §. 34. $OP = O_1N$ sein; nun folgt aber aus unsrer Construction, daß $OP = O_1P$ ist; mithin ist $O_1N = O_1P$ d. h. der Punkt N fällt mit P zusammen.

§. 38. Die in den Endpunkten eines Durchmeßers construirten Tangenten sind parallel, die von den Asymptoten begrenzten Strecken derselben einander gleich. Fig. XIII.

Beweis: Zieht man von den Endpunkten des Durchmeßers die Geraden PM und pm parallel der Asymptote o_1CO_1 und macht $MO = CM$, $mo = Cm$, so wird nach dem vorigen Paragraphen sowohl OPO_1 als opo_1 eine Tangente der Hyperbel. Da $CP = Cp$ und $PM \parallel pm$, so ist $\triangle CPM \cong Cpm$, mithin $CM = Cm$ und $MP = mp$, also auch $CO = Co$ und $CO_1 = Co_1$. Es sind daher die Dreiecke OCO_1 und oCo_1 gleichfalls congruent, mithin ist $\sphericalangle COO_1 = Coo_1$, also $OO_1 \# oo_1$.

§. 39. Ein Durchmeßer halbirt, genügend verlängert, jede Sehne der Hyperbel, welche den in den Endpunkten des Durchmeßers construirten Tangenten parallel ist. Fig. XIII.

Beweis: Da $\mathfrak{S}s \parallel OO_1$, so wird $\mathfrak{S}s$ von der Geraden CPN in demselben Verhältnis getheilt wie OO_1, also halbirt. Nach §. 34. ist aber $\mathfrak{S}S = ss$, mithin ist auch $N\mathfrak{S} - \mathfrak{S}S = Ns - ss$ d. h. $NS = Ns$.

§. 40. Eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt C der Hyperbel parallel den in den Endpunkten eines Durchmeßers construirten Tangenten gezogen wird, halbirt jede diesem Durchmeßer parallele Sehne der Hyperbel. Fig. XIII.

Beweis: Nach §. 38. ist OO_1oo_1 ein Parallelogramm; eine durch den Mittelpunkt C parallel zu OO_1 gezogene Gerade halbirt demnach die Seite Oo_1 und jede zu Oo_1 parallele, von den Asymptoten begrenzte Gerade $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_1$. Nach §. 34. ist aber $S\mathfrak{N} = S_1\mathfrak{N}_1$, mithin ist auch $W\mathfrak{N} + \mathfrak{N}S = W\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_1S_1$ d. h. $WS = WS_1$.

Zusatz 1: Es läßt sich leicht nachweisen, daß umgekehrt eine Gerade, welche die

Mitten zweier paralleler Sehnen oder die Berührungspunkte zweier paralleler Tangenten verbindet, durch den Mittelpunkt C der Hyperbel geht. Hierauf beruht eine einfache Methode um den Mittelpunkt der Hyperbel zu bestimmen.

Zusatz 2: Durch jeden Punkt innerhalb oder außerhalb der Hyperbel läßt sich eine Sehne ziehen, welche in diesem Punkte halbirt wird. Um sie zu finden, verbinde man den Punkt mit dem Mittelpunkt der Hyperbel und construire, je nachdem der Punkt innerhalb oder außerhalb der Curve liegt, eine Tangente in dem Punkte, in welchem die Verbindungslinie die Hyperbel schneidet, oder parallel zu der Verbindungslinie. Im ersten Fall wird die gesuchte Sehne der Tangente, im andern Fall dem durch den Berührungspunkt gelegten Durchmeßer parallel.

§. 41. Man nennt einen beliebigen Durchmeßer der Hyperbel und diejenige Gerade, welche parallel zu den in seinen Endpunkten construirten Tangenten durch den Mittelpunkt C gezogen werden kann, einander conjugirt oder ein Paar conjugirter Durchmeßer.

Von zwei conjugirten Durchmeßern ist eigentlich nur der eine ein Durchmeßer, da der andre keinen Punkt mit der Hyperbel gemein hat. Man pflegt aber auch diesen zu begrenzen, indem man die Durchschnittspunkte der in den Endpunkten des ersten Durchmeßers construirten Tangenten mit den Asymptoten unter sich verbindet und dadurch $CU = CU_1 = \frac{1}{2} OO_1$ auf ihm abschneidet. Man bezeichnet die auf solche Weise begrenzte Strecke UU_1 insbesondere als zweiten Durchmeßer, während man den von der Hyperbel selbst begrenzten Durchmeßer den ersten nennt. Jedes Paar conjugirter Durchmeßer bildet die Mittellinien eines Parallelogrammes, welches die von den Asymptoten begrenzten in den Endpunkten des ersten Durchmeßers construirten Tangenten zu Seiten hat.

Der Winkel, unter dem sich zwei conjugirte Durchmeßer schneiden, heißt ihr Conjugationswinkel. Da mit Ausnahme der Scheiteltangenten keine Tangente auf dem durch ihren Berührungspunkt gelegten Durchmeßer senkrecht steht, so giebt es auch nur ein Paar sich rechtwinklig schneidender conjugirter Durchmeßer, nämlich die Haupt- und Nebenaxe.

Fig. XIV. §. 42. Das von dem Endpunkte eines zweiten Durchmeßers auf die Hauptaxe gefällte Perpendikel (die Ordinate dieses Endpunktes) ist gleich derjenigen Asymptotenordinate, welche durch den Endpunkt des ersten Durchmessers (den Berührungspunkt der Tangente) geht; das Stück jenes Perpendikels aber, welches zwischen der Asymptote und seinem Fußpunkt liegt, ist gleich der Ordinate des Endpunkts des ersten Durchmeßers; es ist $UL = \mathfrak{P}H$ und $KL = PH$.

Beweis: Fällt man von dem Endpunkte O_1 der Tangente das Perpendikel O_1E auf die Hauptaxe und verlängert es bis zum Durchschnitt mit der Asymptote im Punkte G, so ist $O_1G : P\mathfrak{P} = O_1O : PO = 2 : 1$ (§. 35.), mithin ist $O_1E \# P\mathfrak{P}$, folglich $O_1E\mathfrak{P}P$ ein Parallelogramm und $E\mathfrak{P} = O_1P = \frac{1}{2} O_1O = CU$. Die rechtwinkligen Dreiecke CUL und

EPH sind daher congruent, mithin $UL = \mathfrak{P}H$. Da ferner die Dreiecke CUK und E𝔓P parallele Seiten haben und außerdem in einer homologen Seite übereinstimmen, so sind auch sie congruent, mithin ist $UK = \mathfrak{P}P$, also auch $UL - UK = \mathfrak{P}H - \mathfrak{P}P$ d. h. $KL = PH$.

§. 43. Aus dem vorigen Paragraphen ergeben sich leicht folgende Beziehungen zwischen den Ordinaten und Abscissen der Endpunkte zweier conjugirter Durchmeßer: Fig. XIV.

1) die Ordinate des Endpunktes eines Durchmeßers steht zu der Abscisse des Endpunktes seines conjugirten Durchmeßers in dem constanten Verhältnis der halben Nebenaxe zur halben Hauptaxe.

Beweis: $UL : CH = \mathfrak{P}H : CH = b : a$ und $PH : CL = KL : CL = b : a$, da 𝔓 und K auf einer Asymptote liegen.

2) Das Rechteck aus den Coordinaten des Endpunkts eines Durchmeßers ist gleich dem Rechteck aus den Coordinaten des Endpunkts seines conjugirten Durchmeßers.

Beweis: Nach 1) ist $UL : CH = PH : CL = b : a$, folglich $UL \,.\, CL = PH \,.\, CH$.

3) Die Differenz der Quadrate der Ordinaten der Endpunkte zweier conjugirter Durchmeßer ist constant, nämlich gleich dem Quadrat der halben Nebenaxe.

Beweis: Nach §. 32. ist $\mathfrak{y}^2 - y^2 = b^2$; da nun $UL = \mathfrak{P}H = \mathfrak{y}$ ist, so ist auch $UL^2 - PH^2 = b^2$.

4) Die Differenz der Quadrate der Abscissen der Endpunkte zweier conjugirter Durchmeßer ist constant, nämlich gleich dem Quadrat der halben Hauptaxe.

Beweis: Nach §. 24. ist $PH^2 = \frac{b^2}{a^2} (CH^2 - a^2)$; nun ist nach 1) $PH = \frac{b}{a} CL$, folglich ist $PH^2 = \frac{b^2}{a^2} CL^2 = \frac{b^2}{a^2} (CH^2 - a^2)$, woraus sich sofort $CL^2 = CH^2 - a^2$ oder $CH^2 - CL^2 = a^2$ ergiebt.

Bezeichnet man die Coordinaten des Endpunkts vom ersten Durchmeßer mit y_1 und x_1, die Coordinaten des Endpunkts des conjugirten Durchmeßers mit y_2 und x_2, so ist

1) $y_2 : x_1 = y_1 : x_2 = b : a$,
2) $y_2 \,.\, x_2 = y_1 \,.\, x_1$,
3) $y_2^2 - y_1^2 = b^2$ und
4) $x_1^2 - x_2^2 = a^2$.

§. 44. Die Differenz der Quadrate zweier conjugirter Halbdurchmeßer ist constant, nämlich gleich der Differenz der Quadrate der halben Axen. Fig. XIV.

Beweis: Es ist $CP^2 = x_1^2 + y_1^2$ und $CU^2 = x_2^2 + y_2^2$, folglich $CP^2 - CU^2 = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = x_1^2 - x_2^2 - (y_2^2 - y_1^2) = a^2 - b^2$ (nach dem vorhergehenden Paragraphen). Bei der gleichseitigen Hyperbel ist $a = b$, mithin auch $CP = CU$, conjugirte Durchmeßer sind also einander gleich.

Zusatz: Da $CP^2 = x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2) = \frac{c^2}{a^2}x_1^2 - b^2$, so ist $CU^2 = CP^2 + b^2 - a^2 = \frac{c^2}{a^2}x_1^2 - a^2$.

Fig. XIV. §. 45. Der Flächeninhalt des Parallelogrammes, welches zwei conjugirte Durchmeßer zu Mittellinien hat, ist constant, nämlich gleich dem Rechteck aus den beiden Axen der Hyperbel.

Beweis: Nach §. 36, Zusatz haben die von einer Tangente und den von ihr auf den Asymptoten abgeschnittenen Strecken begrenzten Dreiecke denselben Flächeninhalt $= \frac{c^2}{2}\sin\varphi$, wenn φ den von den Asymptoten gebildeten Winkel bezeichnet. Nun ist aber $c\sin\frac{\varphi}{2} = b$, $c\cos\frac{\varphi}{2} = a$, folglich $c^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{c^2}{2}.2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{c^2}{2}\sin\varphi = ab$; der Flächeninhalt des Parallelogrammes OO_1oo_1, ist demnach $= 4OCO_1 = 4ab$.

Zusatz: Bezeichnet man den ersten von zwei conjugirten Halbdurchmeßern mit α, den andern mit β, den von ihnen eingeschloßenen Conjugationswinkel mit γ, so ist der Flächeninhalt des Parallelogrammes $UCPO = \alpha\beta\sin\gamma$; mithin ist $\alpha\beta\sin\gamma = ab$ und $\sin\gamma = \frac{ab}{\alpha\beta}$.

Fig. XIV. §. 46. Das vom Mittelpunkt der Hyperbel auf eine Tangente gefällte Perpendikel verhält sich zur halben Hauptaxe, wie die halbe Nebenaxe zu demjenigen Halbdurchmeßer der Hyperbel, welcher dem durch den Berührungspunkt der Tangente gelegten Halbdurchmeßer conjugirt ist.

Beweis: Das Perpendikel CM ist gleich $CP\sin CPM = \alpha\sin\gamma = \alpha\frac{ab}{\alpha\beta} = \frac{ab}{\beta}$ (§. 45, Zusatz).

§. 47. Sind α und β zwei conjugirte Halbdurchmeßer, y und x die Coordination des Endpunkts P von α, Tg und $\mathfrak{Tg}$ die begrenzten Tangenten des Punktes P in Beziehung auf die Haupt- und Nebenaxe, Nr und $\mathfrak{Nr}$ die zugehörigen Normalen, so ist

1) $Tg = \frac{ay}{bx}\beta$; 2) $\mathfrak{Tg} = \frac{bx}{ay}\beta$;

3) $Nr = \frac{b}{a}\beta$; 4) $\mathfrak{Nr} = \frac{a}{b}\beta$.

Beweis: Ad 1) Nach §. 29. ist $Tg = \frac{y}{bx}\sqrt{c^2x^2 - a^4} = \frac{ay}{bx}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - a^2}$; mithin ist mit Rücksicht auf §. 44, Zusatz, $Tg = \frac{ay}{bx}\beta$.

Ad 2) $\mathfrak{Tg} = \frac{x}{ay} \sqrt{c^2y^2 + b^4} = \frac{x}{ay} \sqrt{c^2 \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) + b^4}$

$= \frac{bx}{ay} \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x^2 - c^2 + b^2} = \frac{bx}{ay} \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x^2 - a^2} = \frac{bx}{ay} \beta.$

Ad 3) $\mathrm{Nr} = \frac{b}{a^2} \sqrt{c^2x^2 - a^4} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \beta.$

Ad 4) $\mathfrak{Nr} = \frac{a}{b^2} \sqrt{c^2y^2 + b^4} = \frac{a}{b^2} \sqrt{c^2 \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) + b^4} = \frac{a}{b} \beta.$

Zusatz: Bei der gleichseitigen Hyperbel ist demnach

1) $\mathrm{Tg} = \frac{y}{x} \beta = \frac{y}{x} \alpha$; 2) $\mathfrak{Tg} = \frac{x}{y} \beta = \frac{x}{y} \alpha$;

3) $\mathrm{Nr} = \beta = \alpha$; 4) $\mathfrak{Nr} = \beta = \alpha.$

§. 48. Das Rechteck aus den Abschnitten einer beliebigen Tangente, vom Berührungspunkt bis zum Durchschnitt mit der Haupt- und Nebenaxe gerechnet, d. h. also das Rechteck aus den beiden begrenzten Tangenten ist gleich dem Quadrat desjenigen Halbdurchmeßers, welcher dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Halbdurchmeßer conjugirt ist.

Beweis: Nach dem vorigen Paragraphen ist $\mathrm{Tg} \,.\, \mathfrak{Tg} = \frac{ay}{bx} \beta \,.\, \frac{bx}{ay} \beta = \beta^2.$

§. 49. Das Rechteck aus den beiden begrenzten Normalen eines Punktes ist gleich dem Quadrat desjenigen Halbdurchmeßers, welcher dem nach jenem Punkte gezogenen Halbdurchmeßer conjugirt ist.

Beweis: Nach §. 47. ist $\mathrm{Nr} \,.\, \mathfrak{Nr} = \frac{b}{a} \beta \,.\, \frac{a}{b} \beta = \beta^2.$

Zusatz. Das aus den begrenzten Tangenten eines Punktes gebildete Rechteck ist demnach gleich dem Rechtecke, welches die zugehörigen Normalen zu Seiten hat.

§. 50. Das Rechteck, welches die von einer Axe begrenzte Normale und das vom Mittelpunkt der Hyperbel auf die zugehörige Tangente gefällte Perpendikel zu Seiten hat, ist constant, nämlich gleich dem Quadrat der halben Nebenaxe, wenn die Normale durch die Hauptaxe begrenzt wird, und gleich dem Quadrat der halben Hauptaxe, wenn die Normale durch die Nebenaxe begrenzt wird.

Beweis: Das Perpendikel CM ist nach §. 46. gleich $\frac{ab}{\beta}$, folglich $\mathrm{Nr} \,.\, \mathrm{CM} = \frac{b}{a} \beta \,.\, \frac{ab}{\beta} = b^2$ und $\mathfrak{Nr}.\ \mathrm{CM} = \frac{a}{b} \beta \,.\, \frac{ab}{\beta} = a^2.$

§. 51. Die von den beiden Axen der Hyperbel begrenzten Normalen eines Punktes stehen zu einander in dem constanten Verhältnis $\frac{b^2}{a^2}$, sind also bei der gleichseitigen Hyperbel unter sich gleich.

Beweis: Nach §. 47. ist $\mathrm{Nr} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\beta$ und $\mathfrak{N}\mathrm{r} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\beta$, folglich $\frac{\mathrm{Nr}}{\mathfrak{N}\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}^2}$.

§. 52. Eine Gerade, welche von irgend einem Punkte P der Hyperbel bis zum Durchschnitt mit einem ersten Durchmeßer parallel dem conjugirten Durchmeßer gezogen wird, heißt die Ordinate, der Abstand ihres Fußpunkts vom Mittelpunkt C der Hyperbel die Abscisse des Punktes P in Beziehung auf dies Paar conjugirter Durchmeßer. Zum Unterschied von den auf die Haupt- und Nebenaxe bezogenen Coordinaten wollen wir die auf ein Paar conjugirter Durchmeßer bezogenen Coordinaten mit griechischen Buchstaben v und ξ bezeichnen.

Fig. XV. §. 53. Verlängert man die Ordinate v eines Hyperbelpunktes bis zum Durchschnitt mit beiden Asymptoten, so wird die von letzteren begrenzte Strecke durch den Hyperbelpunkt so getheilt, daß das Rechteck aus den beiden Abschnitten gleich dem Quadrat des zweiten Halbdurchmeßers $= \beta^2$ ist; zieht man dagegen durch den Hyperbelpunkt eine Sehne parallel dem ersten Durchmeßer, so wird diese durch eine Asymptote so getheilt, daß das Rechteck aus den beiden Abschnitten gleich dem Quadrat des ersten Halbdurchmeßers $= \alpha^2$ ist.

Beweis: 1) Man construire im Endpunkte P des ersten Durchmeßers die Tangente OO_1 und ziehe durch S und P die Geraden $\mathfrak{N}\mathrm{r}$ und $\mathfrak{M}\mathrm{m}$ senkrecht zur Hauptaxe. Da $\mathfrak{S}\mathfrak{s} \parallel \mathrm{UU}_1 \parallel \mathrm{OO}_1$, so sind die Dreiecke $\mathfrak{S}\mathrm{S}\mathfrak{N}$ und $\mathrm{OP}\mathfrak{M}$ ähnlich; mithin ist $\mathrm{S}\mathfrak{S} : \mathrm{PO} = \mathrm{S}\mathfrak{N} : \mathrm{P}\mathfrak{M}$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathrm{S}\mathfrak{s}\mathrm{r}$ und $\mathrm{PO}_1\mathrm{m}$ folgt ferner $\mathrm{S}\mathfrak{s} : \mathrm{PO}_1 = \mathrm{Sr} : \mathrm{Pm}$; daher ist $\mathrm{S}\mathfrak{S} \,.\, \mathrm{S}\mathfrak{s} : \mathrm{PO} \,.\, \mathrm{PO}_1 = \mathrm{S}\mathfrak{N} \,.\, \mathrm{Sr} : \mathrm{P}\mathfrak{M} \,.\, \mathrm{Pm}$. Nach §. 32. ist aber sowohl $\mathrm{S}\mathfrak{N} \,.\, \mathrm{Sr}$ als $\mathrm{P}\mathfrak{M} \,.\, \mathrm{Pm}$ gleich b^2, folglich ist auch $\mathrm{S}\mathfrak{S} \,.\, \mathrm{S}\mathfrak{s} = \mathrm{PO}.\mathrm{PO}_1 = \beta^2$.

2) Zieht man SH_1 und PP_1 parallel zur Hauptaxe, so werden die Dreiecke $\mathrm{S}\mathfrak{H}\mathfrak{N}$ und $\mathrm{P}\mathfrak{P}\mathrm{C}$ ähnlich; daher ist $\mathrm{S}\mathfrak{N} : \mathrm{PC} = \mathrm{S}\mathfrak{H} : \mathrm{P}\mathfrak{P}$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathrm{S}\mathfrak{H}_1\mathfrak{N}_1$ und $\mathrm{P}\mathfrak{P}_1\mathrm{C}$ folgt ferner $\mathrm{S}\mathfrak{N}_1 : \mathrm{PC} = \mathrm{S}\mathfrak{H}_1 : \mathrm{P}\mathfrak{P}_1$; daher ist $\mathrm{S}\mathfrak{N} \,.\, \mathrm{S}\mathfrak{N}_1 : \mathrm{PC} \,.\, \mathrm{PC} = \mathrm{S}\mathfrak{H} \,.\, \mathrm{S}\mathfrak{H}_1 : \mathrm{P}\mathfrak{P} \,.\, \mathrm{P}\mathfrak{P}_1$. Nach §. 32. ist aber sowohl $\mathrm{S}\mathfrak{H} \,.\, \mathrm{S}\mathfrak{H}_1$ als $\mathrm{P}\mathfrak{P} \,.\, \mathrm{P}\mathfrak{P}_1 = \mathrm{a}^2$; folglich ist auch $\mathrm{S}\mathfrak{N} \,.\, \mathrm{S}\mathfrak{N}_1 = \mathrm{PC} \,.\, \mathrm{PC} = \alpha^2$.

§. 54. Zwischen zwei conjugirten Durchmeßern und den auf sie bezogenen Coordinaten eines Punktes der Hyperbel besteht dieselbe Relation, wie zwischen der Haupt- und Nebenaxe und den auf sie bezogenen Coordinaten; es ist nämlich $v^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\xi^2 - \alpha^2)$.

Fig. XV.

Beweis: Da $\mathfrak{S}\mathrm{G} : \mathrm{CG} = \mathrm{OP} : \mathrm{CP} = \beta : \alpha$, so ist $\mathfrak{S}\mathrm{G} = \mathfrak{s}\mathrm{G} = \frac{\beta}{\alpha}\xi$. Nach dem vorigen Paragraphen ist aber $\mathrm{S}\mathfrak{S} \,.\, \mathrm{S}\mathfrak{s} = \beta^2$; mithin ist, da nach §. 34. $\mathrm{S}\mathfrak{S} = \mathfrak{s}\mathfrak{s}$ ist,

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\xi - v\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\xi + v\right) = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\xi^2 - v^2 = \beta^2; \text{ oder } v^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\xi^2 - \beta^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\xi^2 - \alpha^2).$$

Zusatz: Da nach §. 44. $\alpha^2 - \beta^2 = a^2 - b^2$ ist, so ist bei der gleichseitigen Hyperbel auch $\alpha = \beta$, mithin $v^2 = \xi^2 - \alpha^2$ oder $\xi^2 - v^2 = \alpha^2$.

§. 55. Aus der im vorigen Paragraphen entwickelten Relation $v = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\ (\xi^2 - \alpha^2)$ ergeben sich sofort die dem Inhalt des §. 30. entsprechenden Lehrsätze:

1) Das Quadrat der Ordinate eines Hyperbelpunktes verhält sich zu dem Rechteck, welches die Abstände ihres Fußpunktes von den Endpunkten des ersten Durchmeßers (den Scheiteln der Hyperbel in Beziehung auf diesen Durchmeßer) zu Seiten hat, wie das Quadrat des zweiten Halbdurchmeßers zum Quadrat des ersten Halbdurchmeßers; es ist

$$\frac{v^2}{\xi^2 - \alpha^2} = \frac{v^2}{(\xi + \alpha)\ (\xi - \alpha)} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

2) Die Quadrate der Ordinaten beliebiger Punkte der Hyperbel verhalten sich wie die Rechtecke aus den Abständen ihrer Fußpunkte von den Endpunkten des zugehörigen ersten Durchmeßers.

§. 56. 1) Der Abstand des Punktes T, in welchem ein erster Durchmeßer von einer Tangente geschnitten wird, vom Mittelpunkte C der Hyperbel ist $\frac{\alpha^2}{\xi}$, wenn ξ die Abscisse des Berührungspunkts der Tangente in Beziehung auf α bezeichnet. Fig. XVI.

2) Der Abstand des Punktes t, in welchem eine Tangente den zweiten Durchmeßer oder dessen Verlängerung trifft, vom Mittelpunkt C der Hyperbel ist $\frac{\beta^2}{v}$, wenn v die Ordinate des Berührungspunktes der Tangente ist.

Beweis: Ad 1) Man ziehe durch den Berührungspunkt R der Tangente, durch den Punkt T, in welchem sie den Durchmeßer α schneidet, und durch den Punkt m, in welchem sie die Asymptote CO_1 trifft, Gerade parallel zu der im Endpunkte P des ersten Durchmeßers construirten Tangente. Dann ist $CT : T\mathfrak{N} = CP : PO = \alpha : \beta$, folglich $CT = \frac{\alpha}{\beta} . T\mathfrak{N}$. Zur Bestimmung von $T\mathfrak{N}$ hat man zunächst die Proportion $T\mathfrak{N} : T\mathfrak{R} = T\mathfrak{S} : R\mathfrak{S}$ (wenn $\mathfrak{S}$ der Durchschnittspunkt der Tangente mit der Asymptote $CO\mathfrak{S}$ ist), oder, da $T\mathfrak{S} = TR + R\mathfrak{S}$ und $R\mathfrak{S}$ nach §. 35. $= Rm$ ist, 1) $T\mathfrak{N} : R\mathfrak{N} = TR + mR : mR$. Es verhält sich ferner $\mathfrak{M}m : \mathfrak{N}R = m\mathfrak{S} : R\mathfrak{S} = 2 : 1$, daher ist $\mathfrak{M}m = 2\mathfrak{N}R$; da aber die Strecke $\mathfrak{M}m$ durch die CP im Punkte H in demselben Verhältnis wie OO_1 getheilt, also halbirt wird, so ist $mH \# R\mathfrak{N}$, mithin auch $mR \# H\mathfrak{N}$, folglich $TR : H\mathfrak{N} = GR : G\mathfrak{N}$ und $TR + H\mathfrak{N} : H\mathfrak{N} : GR + G\mathfrak{N} : G\mathfrak{N}$ oder 2) $TR + mR : mR = Rr : G\mathfrak{N}$. Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt $T\mathfrak{N} : R\mathfrak{N} = Rr : G\mathfrak{N}$ oder $T\mathfrak{N} = \frac{R\mathfrak{N} . Rr}{G\mathfrak{N}}$. Das Produkt $R\mathfrak{N} . Rr$ ist aber nach §. 53. $= \beta^2$; ferner ist $G\mathfrak{N} = \frac{\beta}{\alpha}\xi$, da $G\mathfrak{N} : CG = PO : CP = \beta : \alpha$, folglich $T\mathfrak{N} = \frac{\alpha\beta}{\xi}$ und $CT = \frac{\alpha}{\beta} T\mathfrak{N} = \frac{\alpha^2}{\xi}$.

Ad 2) Das Dreieck CtT ist dem Dreieck GRT ähnlich, daher verhält sich Ct : GR $=$ CT : GT, also ist $\mathrm{Ct} = \dfrac{\mathrm{GR} \,.\, \mathrm{CT}}{\mathrm{GT}} = \dfrac{v \,.\, \dfrac{\alpha^2}{\xi}}{\xi - \dfrac{\alpha^2}{\xi}} = \dfrac{v \,.\, \alpha^2}{\xi^2 - \alpha^2} = \dfrac{\beta^2}{v}$, da nach §. 54. $\dfrac{\alpha^2}{\xi^2 - \alpha^2} = \dfrac{\beta^2}{v^2}$ ist.

Fig. XVI. §. 57. Subtangenten in Beziehung auf zwei conjugirte Durchmeßer heißen diejenigen Strecken, welche auf ihnen durch eine beliebige Tangente und die durch den Berührungspunkt derselben parallel zu diesen Durchmeßern gezogenen Geraden abgeschnitten werden.

Da nach dem vorigen Paragraphen $\mathrm{CT} = \dfrac{\alpha^2}{\xi}$, so ist die Subtangente des Punktes R in Beziehung auf den ersten Durchmeßer α

$$\mathrm{TG} = \mathrm{CG} - \mathrm{CT} = \xi - \frac{\alpha^2}{\xi} = \frac{\xi^2 - \alpha^2}{\xi}.$$

Die Subtangente des Punktes R in Beziehung auf den conjugirten Durchmeßer β ist

$$\mathrm{tg} = \mathrm{gC} + \mathrm{Ct} = v + \frac{\beta^2}{v} = \frac{v^2 + \beta^2}{v}.$$

Fig. XVII. §. 58. Das Rechteck aus den Strecken, welche eine beliebige Tangente auf den in den Endpunkten eines ersten Durchmeßers construirten Tangenten abschneidet, hat einen constanten Inhalt, gleich dem Quadrat des conjugirten Halbdurchmeßers; es ist $\mathrm{PM} \,.\, \mathrm{P_1M_1} = \beta^2$. (Verallgemeinerung des im §. 20. enthaltenen Lehrsatzes).

Beweis: Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke TPM und TGR folgt PM : PT $=$ GR : GT oder $\mathrm{PM} : \alpha - \dfrac{\alpha^2}{\xi} = v : \dfrac{\xi^2 - \alpha^2}{\xi}$, folglich 1) $\mathrm{PM} : \alpha = v : \xi + \alpha$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathrm{TP_1M_1}$ und TGR folgt ferner $\mathrm{P_1M_1} : \mathrm{P_1T} =$ GR : GT oder $\mathrm{P_1M_1} : \alpha + \dfrac{\alpha^2}{\xi} = v : \dfrac{\xi^2 - \alpha}{\xi}$, folglich 2) $\mathrm{P_1M_1} : \alpha = v : \xi - \alpha$. Durch Multiplication erhält man aus den Proportionen 1) und 2) $\mathrm{PM} \,.\, \mathrm{P_1M_1} : \alpha^2 = v^2 : \xi^2 - \alpha^2$. Substituirt man hierin den Werth $\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\,(\xi^2 - \alpha^2)$ für v^2, so ergiebt sich sofort $\mathrm{PM} \,.\, \mathrm{P_1M_1} = \beta^2$.

Fig. XVIII. §. 59. Die Sehnen, welche einen Hyperbelpunkt mit den Endpunkten eines beliebigen Durchmeßers verbinden, heißen Supplementarsehnen.

Zieht man durch den Mittelpunkt der Hyperbel Gerade parallel zu zwei Supplementarsehnen, so erhält man ein Paar conjugirter Durchmeßer, deren Conjugationswinkel, wie sich leicht nachweisen läßt, gleich dem von den Supplementarsehnen eingeschloßenen Winkel ist. Hierauf beruht ein einfaches Verfahren zur Construction conjugirter Durchmeßer, die einen gegebenen Conjugationswinkel einschließen. Man beschreibe einen Kreisbogen, welcher einen beliebigen Hyperbeldurchmesser als Sehne und den gegebenen Conjugationswinkel als zugehörigen Peripheriewinkel faßt, und ziehe von den Endpunkten des Durchmeßers Gerade nach dem Durchschnittspunkt des Kreises mit der Hyperbel. Diese Geraden sind die Supplementarsehnen, denen die verlangten conjugirten Durchmeßer parallel sind.

§. 60. Zieht man durch die Endpunkte irgend eines Durchmeßers Gerade parallel zu einem beliebigen Paar conjugirter Durchmeßer, so liegt ihr Durchschnittspunkt auf der Hyperbel; die von der Hyperbel begrenzten Strecken der Geraden bilden ein Paar Supplementarsehnen. Fig. XVIII

Beweis: Es seien PP_1 und UU_1 ein Paar conjugirter Durchmeßer, MM_1 ein beliebiger dritter Durchmeßer; zieht man die Sehne $M_1R \parallel P_1P$, so wird M_1R durch den Durchmeßer UU_1 in U halbirt. Verbindet man R mit M, so wird, da $M_1U : UR = M_1C : CM$, $MR \parallel UU_1$. Da aber durch einen Punkt außerhalb einer Geraden sich nur eine Parallele zu ihr ziehen läßt, so muß die durch den Punkt $M \parallel UU_1$ gezogene Gerade mit MR, ihr Durchschnittspunkt mit der M_1R also mit dem Hyperbelpunkt R zusammenfallen.

Chr. Berkenbusch.

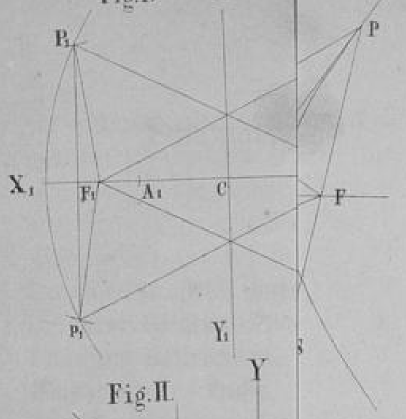


Fig. I.

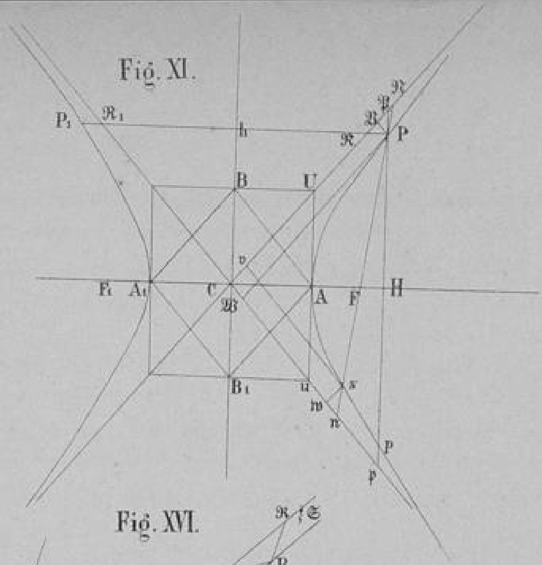


Fig. XI.

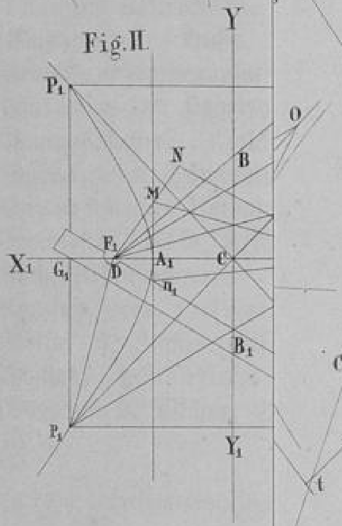


Fig. II.

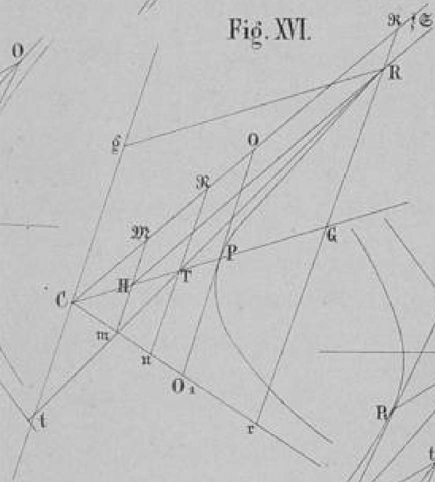


Fig. XVI.

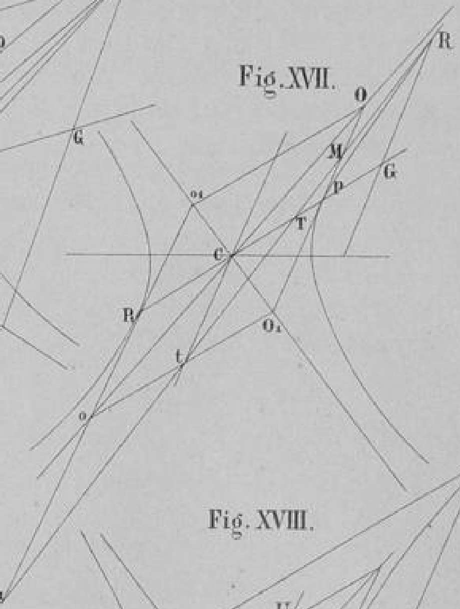


Fig. XVII.

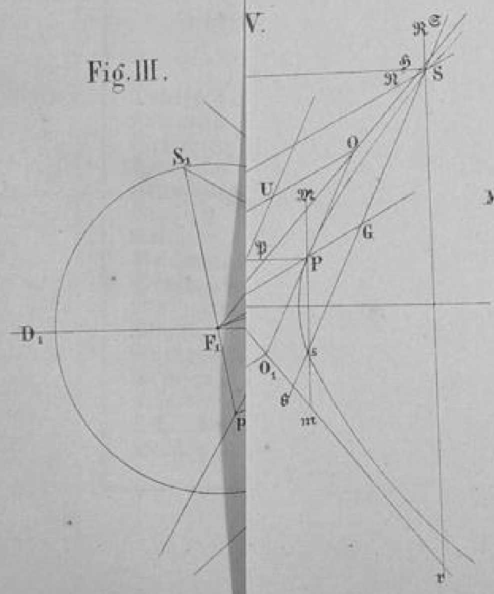


Fig. III.

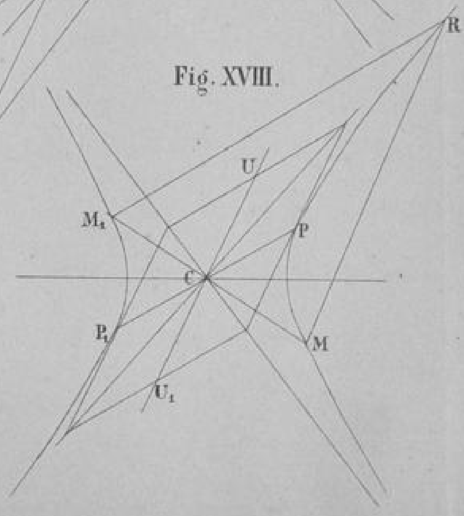


Fig. XVIII.

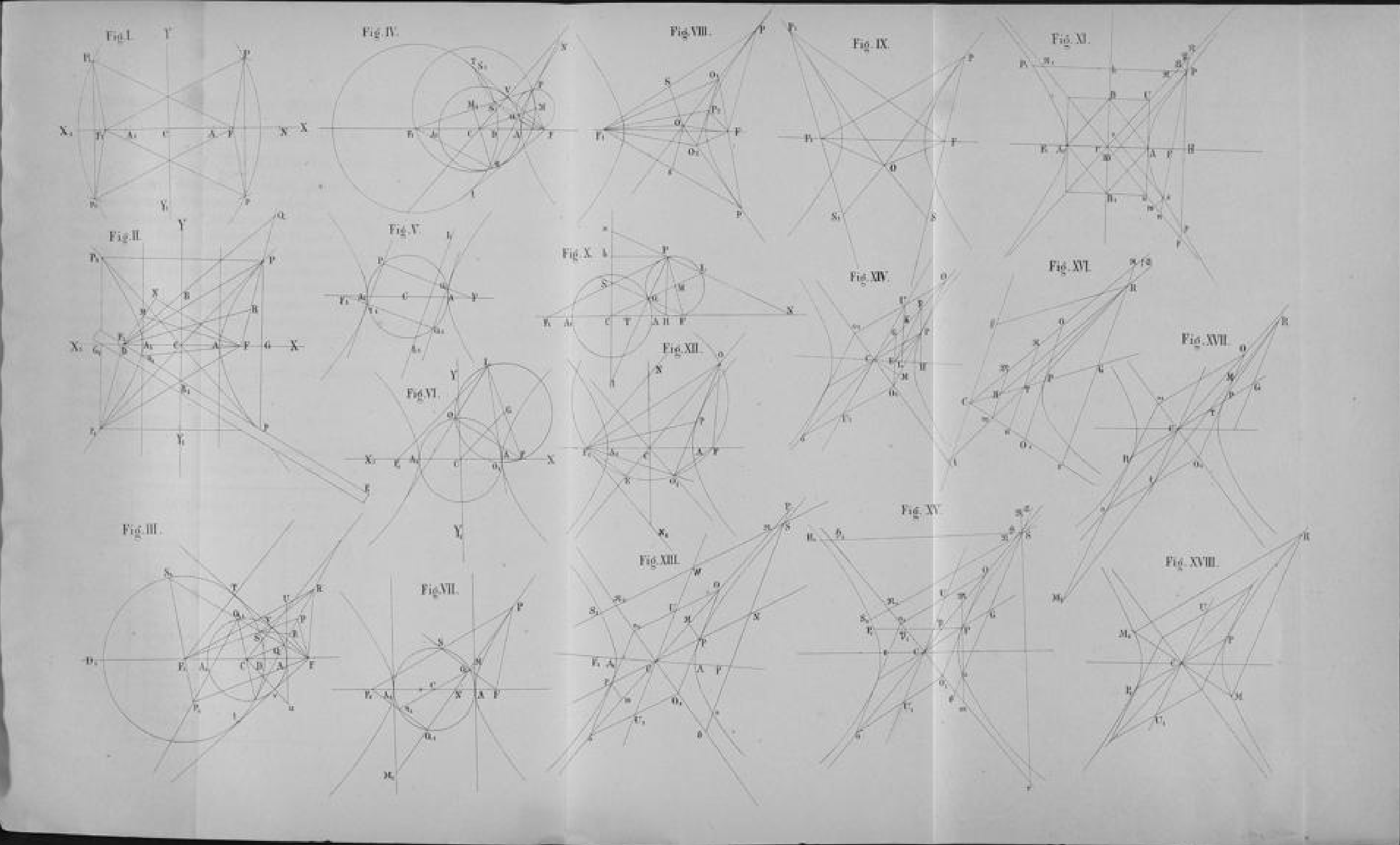


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII.

Schulnachrichten von Ostern 1873 bis Ostern 1874.

I. Lehrverfassung.

1. Die Lehrer des Gymnasiums.

Director, Professor **Burchard**, Schulrath, Ordinarius der Prima.
Prorector **Nöldeke**, Ordinarius der Secunda.
Conrector **Battermann**, Ordinarius der Ober-Tertia.
[Conrector Dr. **Fuchs**, Ordinarius der Quarta und Bibliothekar, bis Johannis.]
Oberlehrer **Berkenbusch**, erster Lehrer der mathematischen und Natur-Wissenschaften.
Oberlehrer Dr. **Habersang**, Lehrer der neueren Sprachen und Bibliothekar.
Gymnasiallehrer Dr. **Köhler**, Ordinarius der Unter-Tertia.
Subconrector **Schwerdtmann**, Ordinarius der Sexta.
Gymnasiallehrer **Notholz**, Seminaristen-Inspector, Ordinarius der Quinta.
Gymnasiallehrer **v. Keitz**, zweiter Lehrer der mathematischen und Natur-Wissenschaften.
Koch, Zeichenlehrer.
Kamlah, prov. Ordinarius der Quarta, seit Michaelis.
Cantor **H. Fischer**, Gesanglehrer.
Neuhauß, Hülfslehrer.
[Organist **L. Fischer**, Seminar-Lehrer.]

2. Allgemeiner Lehrplan.

(Die Unterrichtsfächer der vom Griechischen dispensirten Schüler s. unter 4. im speciellen Lehrplan.)

<table>
<tr><th>Lehrfächer.</th><th>I.</th><th>II.</th><th>III.
A. B.</th><th>IV.</th><th>V.</th><th>VI.</th></tr>
<tr><td>Deutsch</td><td>2.</td><td>3.</td><td>4. 4.</td><td>4.</td><td>5.</td><td>6.</td></tr>
<tr><td>Lateinisch</td><td>7.</td><td>9.</td><td>8. 8.</td><td>8.</td><td>8.</td><td>10.</td></tr>
<tr><td>Griechisch</td><td>7.</td><td>6.</td><td>6. 6.</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>Hebräisch</td><td>2.</td><td>2.</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>Französisch</td><td>2.</td><td>2.</td><td>2.</td><td>2.</td><td>4.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>Englisch</td><td>2.</td><td>2.</td><td>2.</td><td>1.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>Religion</td><td>2.</td><td>2.</td><td>2.</td><td>2.</td><td>2.</td><td>2.</td></tr>
<tr><td>Geschichte</td><td>3.</td><td>3.</td><td>2.</td><td>2.</td><td>2.</td><td rowspan="2">2.</td></tr>
<tr><td>Geographie</td><td>1.</td><td>2.</td><td>2.</td><td>2.</td><td>2.</td></tr>
<tr><td>Mathematik</td><td>4.</td><td>4.</td><td>4. 4.</td><td>2.</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>Physik</td><td>2.</td><td>1.</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>Naturgeschichte</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>2.</td><td>2.</td><td>—</td></tr>
<tr><td>Rechnen</td><td>—</td><td>—</td><td>2.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>6.</td></tr>
<tr><td>Zeichnen</td><td colspan="2">2.</td><td>—</td><td>2.</td><td>2.</td><td>2.</td></tr>
<tr><td>Schreiben</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>2.</td><td>2.</td><td>2.</td></tr>
<tr><td>Singen</td><td colspan="2">2.</td><td colspan="2">2.</td><td colspan="2">2.</td></tr>
</table>

3. Vertheilung der Fächer auf die einzelnen Lehrer.

(Michaelis 1873 bis Ostern 1874.)

Namen der Lehrer.	Prima.	Secunda.	Tertia. A.	Tertia. B.	Quarta.	Quinta.	Sexta.
Burchard.	2 St. Religion. 5 Lat. 5 Griech. 2 Deutsch.		2 St. Geschichte.				
Nöldeke.	2 St. Griechisch.	2 St. Religion. 7 Lat. 4 Griech. 3 Dtsch. 3 Gesch.					
Battermann.	2 St. Geschichte.		2 St. Religion. 8 St. Lat. 6 Griech. 4 Dtsch.				
Berkenbusch.	4 St. Mathem. 2 Phys. 1 Geogr.	4 St. Mathem. 1 Phys. 2 Geogr.	2 St. Rechnen. 2 Geographie.		2 St. Französ. 2 Rechnen.		
Habersang.	2 St. Französisch. 2 Englisch.	2 St. Französisch. 2 Englisch.	2 St. Französisch. 2 Englisch.		1 St. Englisch.		
Köhler.	2 St. Latein.	2 Latein. 2 Griechisch.		8 St. Latein. 6 Griech. 4 Dtsch.			
Schwerdtmann.						4 St. Französ.	10 St. Lat. 6 Dtsch. 2 Geschichte u. Geographie.
Notholz.					2 St. Geogr. 2 Schreiben. 2 Religion.	8 St. Lat. 5 Dtsch. 2 Religion. 2 Schreiben.	2 St. Religion.
v. Keitz.		Nicht-Griech. 2 St. Planimetrie. 2 Krystallogr.	2 St. Geometrie. 2 Arithmetik. Nicht-Griech. 2 St. Botan. u. Zoolog.	2 St. Geometrie 2 Arithmetik.	2 St. Geometrie. 2 Naturgesch.	2 St. Naturgesch. 3 Rechnen.	
Koch.		Nicht-Griech. 2 St. Zeichnen.	Nicht-Griech. 2 St. Zeichnen.		2 St. Zeichnen.	2 St. Zeichnen.	2 St. Zeichnen.
Kamlah.					8 St. Latein. 4 Dtsch. 2 Gesch.	2 St. Geschichte. 2 Geogr. 3 Rechn.	
Fischer.	(2 St. Singen. Tenor u. Baß.)		2 St. Singen. (Sopran u. Alt.)			(2 St. Singen. (Vorübungen.)	
Neuhauß.							6 St. Rechnen. 2 Schreiben.

4. Specieller Lehrplan.

Prima.

Latein 7 St. — Gelesen: Taciti Germania, Ciceronis Or. in Q. Caecil., in Verr. V. 2 St. Burchard. Horat. Carm. I, 26 — II, 12. 2 St. Fuchs, im 1. Semester. Carm. II, 13 — III fin. Horatianische Metrik. 2 St. Köhler, im 2. Semester. Stilistische Uebungen an Seyfferts Materialien, in wöchentlichen Extemporalien, Exercitien aus Seyfferts Palaestra Ciceroniana, und in monatlichen Aufsätzen. 3 St. Burchard.

Griechisch 7 St. — Gelesen: Euripidis Phoenissae, Sophoclis Antigone. 2 St. Burchard. Demosth. Oratt. Olynth. I—III; Philipp. I. II; de pace. Platon. Apologia; Crito. 2 St. Nöldeke. Homeri Iliad. lib. X–XVI. 2 St. Syntax in Verbindung mit Exercitien aus Sallust. und Extemporalien. 1 St. Burchard.

Deutsch 2 St. — Litteraturgeschichte; die Tropen und Figuren; Grundlehren der Psychologie; monatliche Aufsätze. Burchard.

Hebräisch 2 St. — Gelesen: 1. Mos. 22, 37, 39, 40. Die unregelmäßigen Nomina und die Zahlwörter, nach Nägelsbachs Gramm. §§. 1—17. 44–58. Wiederholung des Pensums der Secunda. Fuchs, im 1. Semester.

Französisch 2 St. — Gelesen: Ausgewählte Stücke aus Schütz's französischem Lesebuche; Corneille, Cinna. Repetition der Syntax nach Fränkels Stufenleiter, IV. Cursus; alle 14 Tage ein Exercitium; Extemporalien; Uebungen im freien Nacherzählen. Habersang.

Englisch (nicht obligatorisch) 2 St. — Lectüre aus Warren, Diary of a late physician; Shakespeare, Macbeth. Alle 14 Tage ein Exercitium; Extemporalien; Uebungen im freien mündlichen Uebersetzen nach Jaeps „England." Habersang.

Religion 2 St. — Lectüre der Apostelgeschichte in der Ursprache; Uebersicht der Kirchengeschichte nach Petris Lehrbuch der Religion. Burchard.

Geschichte 3 St. — Ausführlichere Repetition der alten und mittleren Geschichte. Neuere Geschichte. Uebungen in geschichtlichen Vorträgen. Battermann.

Geographie 1 St. – Mathematische Geographie und alle 3 bis 4 Wochen Repetition des Pensums der Secunda. Berkenbusch.

Mathematik 4 St. – Stereometrie, 2 St. Arithmetische und geometrische Progressionen, nebst Anwendungen auf Zinses-Zinsen- und Rentenrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. Heis' Aufgabensammlung §§. 77—85. 2 St. Berkenbusch.

Physik 2 St. — Mechanik; die Lehre vom Licht, von der Wärme und dem Schall, nach Koppes Anfangsgründen der Physik, Abschnitt I—IV und VIII—X. Berkenbusch.

Singen. — I. Singklasse, die vorgeschritteneren Schüler der Ober- und Mittel-Klassen: Gesänge für gemischten Chor von Mendelssohn, Löwe u. a., so wie aus dem 2. Hefte des Sängerhains von Erk und Greef; die Schöpfung von Haydn, I. und II. Theil; Weihnachts-Cantate von Erfurt; Lieder für Männerchor. 2 St. H. Fischer.

Secunda.

Latein 9 St. — Gelesen: Livius II, 20 — III, 39. Cic. or. p. Roscio Am., p. Murena (angefangen) 3 St. Nöldeke. Vergilii Aen. lib. XI, XII, I, II. Memorirt wurden etwa 200 Verse. 2 St. Köhler. Grammatik nach Zumpt: Syntax, 2. Hälfte und Synt. ornata; Repetition der Formenlehre. Extemporalien wöchentlich 2 mal, Exercitien aus Seyfferts Uebungsbuch für Secunda wöchentlich, mündliches Uebersetzen daraus. 2 St. Mehrere Vitae des Cornel. Nepos mündlich lateinisch referirt. 4 St. Vierteljährlich ein historischer Aufsatz. Nöldeke.

Griechisch 6 St. — Gelesen: Isocrat. Paneg. §. 29—84; Herodot. VI u. VII mit Auswahl so wie Xenoph. Hellen. I u. II. 2 St. Nöldeke. Homeri Odyss. lib. XII—XV. 2 St. Fuchs, im 1. Semester; lib. XVI—XIX mit homerischer Formenlehre und Metrik. 2 St. Köhler, im 2. Semester. Burchards Grammatik ganz durchgenommen. Exercitia nach Wohlrabs Aufgabensammlung 1. u. 2. Theil; Einprägung von Sätzen aus Schmids Vorübungen zur Syntax. 2 St. Nöldeke.

Deutsch 3 St. — Lectüre aus Magers deutschem Lesebuche, 3. Cursus: epische, lyrische und prosaische Stücke aus allen Theilen; Nibelungenlied in Schauenburg und Hoches Deutschem Lesebuch Thl. 1, 2. Hälfte; Göthes Hermann und Dorothea, theilweise auswendig gelernt. Alle 14 Tage ein Aufsatz. Auswendiglernen von Gedichten. Nöldeke.

Hebräisch 2 St. — Die Elemente der Grammatik mit Einschluß der unregelmäßigen Verba, des Verbalsuffixes und des unveränderlichen Nomens, nach Nägelsbach. Lectüre und Analyse von Stücken aus der Genesis nach Gesenius. Fuchs, im 1. Semester.

Französich 2 St. — Gelesen: Auswahl aus Reetzke, Lectures Choisies, 2. Theil. Einübung der Syntax nach Fränkels Stufenleiter, III. Cursus. Alle 14 Tage ein Exercitium; Extemporalien. Habersang.

Englisch (nicht obligatorisch) 2 St. — Gelesen: Ausgewählte Stücke aus W. Irwings Sketch-Book. Repetition der Formenlehre und Syntax nach Fellers Handbuche; daraus: wöchentliches Memoriren von Beispielen. Vierzehntägig Exercitien; Extemporalien; freies mündliches Nachübersetzen. Habersang.

Religion 2 St. — Petris Lehrbuch der Religion §§. 165—195: Von Gott und von der Welt. Alle 14 Tage wurde ein Gesang gelernt aus W. Nöldekes Schulgesangbuch. Nöldeke.

Geschichte 3 St. — Alte Geschichte, zweite Hälfte: Römische Geschichte. 2 St. Repetition der mittleren und neueren Geschichte. 1 St. Nöldeke.

Geographie 2 St. — Asien, Afrika, Amerika und Australien; Rußland und die Balkanhalbinsel, nach Daniels Lehrbuche. Berkenbusch.

Mathematik 4 St. — Planimetrie nach Kamblys Elementar-Mathematik, Abschnitt I—VII. Constructionsaufgaben. 2 St. Gleichungen vom 1 u. 2. Grade, im Anschluß an die Aufgabensammlung von Heis. 2 St. Berkenbusch.

Physik 1 St. — Die wichtigsten Grundstoffe nach ihren Eigenschaften und ihrem Vorkommen. Gesetze der chemischen Verbindungen. Berkenbusch.

Singen 2 St. (s. oben bei Prima.) H. Fischer.

Für die vom Griechischen dispensirten Schüler: Anfangsgründe der Oryktognosie, Geognosie und Geologie. 2 St. Krystallographie. Lösung planimetrischer Aufgaben. 2 St. v. Keitz. Zeichnen nach Vorlagen, 2 St. Koch. Außerdem sind diese Schüler zur Theilnahme am Englischen, 2 St., verpflichtet.

Tertia.

1. Combinirte Ober- und Unter-Tertia.

Religion 2 St. — Die Hauptstücke nach dem kl. Katechismus. Einleitung in die Bücher der H. Schrift. Gelesen: das Evangelium Marci. Die Bergpredigt, auserlesene Sprüche und Kirchenlieder gelernt. Battermann.

Geschichte 3 St. — Neuere Geschichte. Köhler, im 1. Semester. Deutsche Geschichte. Burchard, im 2. Semester.

Geographie 2 St. — Rußland und die Balkanhalbinsel; Asien, Afrika, Amerika und Australien. Berkenbusch.

Französisch 2 St. — Gelesen: Stücke aus Reetzke, Lectures Choisies, 1. Theil. Einübung der unregelmäßigen Verba, so wie der wichtigsten Regeln der Syntax nach Plötz's Schulgrammatik; alle 8–14 Tage ein darauf bezügliches Exercitium oder Extemporale. Habersang.

Englisch (nicht obligatorisch) 2 St. — Plates Lehrgang I. Memoriren von Vocabeln. Erlernen der unregelmäßigen Verba. Gelegentliche Extemporalien und Uebungen im freien Uebersetzen. Habersang.

Rechnen 2 St. — Rechnungen des gemeinen Lebens mit gewöhnlichen Brüchen und Decimalbrüchen. Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln aus ganzen Zahlen und Brüchen. Berkenbusch.

Singen 2 St. (s. oben bei Prima.) H. Fischer.

2. Ober-Tertia.

Latein 8 St. — Gelesen: Caesar. bell. Gall. lib. I—IV. Memoriren ausgewählter Capitel. 2 St. Syntax nach F. Schultz's kl. lat. Sprachlehre. Repetition der Formenlehre. 2 St. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale, so wie mündliches und schriftliches Uebersetzen aus Schultz's Aufgabensammlung für die mittlere Stufe der Gymnasien. 2 St. Ausgewählte Stücke aus Sterns Anthologie römischer Dichter. Einübung der Versfüße und des Hexameters; Memoriren von Musterversen. 2 St. Battermann.

Griechisch 6 St. — Die Formenlehre mit Einschluß ausgewählter unregelmäßiger Verba, Lectüre von Stücken aus Xenophons Cyropädie und Homers Odyssee, nebst Memoriren von Hexametern nach Burchards Elementargrammatik und Uebungsbuche. Hom. Odyss. lib. I. u. II. Exercitia und Extemporalia nach Dictaten. Battermann.

Deutsch 4 St. — Grammatische Uebungen, besonders im Satzbau und in der Interpunktion; Regeln im Anschluß an die alle 14 Tage gelieferten Aufsätze. Uebungen im mündlichen Vortrage an memorirten poetischen und prosaischen Stücken nach Hopf und Paulsieks Lesebuche. Battermann.

Mathematik 4 St. — Planimetrie nach Kamblys Elementarmathematik, Abschn. II, §. 70; III, IV bis §. 120. nebst Lösung von Aufgaben. 2. St. Algebra: Gesetze der 1. und 2. Rechenstufe unter Benutzung von Heis' Aufgabensammlung, bis §. 26. 2 St. v. Keitz.

3. Unter-Tertia.

Latein 8 St. — Gelesen: Stücke aus Wellers latein. Lesebuch; Memorirübungen. 3 St. Repetition der Formen- und Casuslehre, Anfänge der Moduslehre nach Schultz's kl. lat. Sprachlehre. 3 St. Mündliches und schriftliches Uebersetzen aus Schultz's Aufgabensammlung; wöchentlich abwechselnd Exercitien und Extemporalien. 2 St. Köhler.

Griechisch 6 St. — Die Formenlehre mit Einschluß der Verba liquida nach Burchards Elementarbuche. Aus demselben: Uebersetzung einfacher und schwierigerer Sätze und kleinerer Stücke; Exercitien. Köhler.

Deutsch 4 St. — Grammatische Uebungen im Anschluß an den Abriß in Hopf und Paulsieks Lesebuche; Lectüre aus demselben; alle 14 Tage ein Aufsatz, meist im Anschluß an das Gelesene. Köhler.

Mathematik 4 St. — Planimetrie nach Kamblys Elementarmathematik, Abschnitt I u. II in Verbindung mit Lösung von Aufgaben. 2 St. Algebra: die ersten Rechenstufen im Anschluß an Heis' Aufgabensammlung, bis §. 19. 2 St. v. Keitz.

Die vom Griechischen dispensirten Tertianer hatten Unterricht in Botanik (Phanerogamen nach Linné, mit Berücksichtigung der natürlichen Familien) im Sommer, und Zoologie (Systematik der Säugethiere) nebst Anfangsgründen der Kryptogamen, im Winter. 2 St. v. Keitz; im Zeichnen, nach Vorlagen. 2 St. Koch. Außerdem sind sie zur Theilnahme am Englischen, 2 St. (s. oben) verpflichtet.

Quarta.

Latein 8 St. — Gelesen: Stücke aus dem Lesebuche in Burchards Grammatik, 1. Cursus, mit schriftlicher Nachübersetzung, Analyse und Repetitionen. Nach Burchards

Grammatik die Casuslehre und das Meiste aus §. 52—57 mit Einübung der (memorirten) syntactischen Regeln an zahlreichen Beispielen aus dem 2. Cursus, und Schultz's Aufgabensammlung. Wiederholung und Ergänzung des Pensums der Quinta. Exercitia nach Burchards Grammatik und Schultz's Aufgabensammlung; Extemporalia. 1 St. Fuchs im 1. Semester, Kamlah im 2. Semester.

Deutsch 4 St. — Die Lehre vom einfachen und zusammengesetzten Satze (nach dem Anhange in Hopf und Paulsieks Lesebuche) und von der Interpunction, mit schriftlichen Uebungen. 1 St. Schriftliche Ausarbeitungen (Erzählungen, Beschreibungen, kleine Abhandlungen), wöchentlich ein orthographisches Dictat. 2 St. Lesen, Erklären und Memoriren prosaischer und poetischer Stücke aus Hopf und Paulsieks Lesebuche für Quarta. 1 St. Fuchs im 1. Semester, Kamlah im 2. Semester.

Französisch 2 St. — Grammatik nach Plötz's Elementarbuche, Lect. 60—104. Nach demselben wöchentliche Exercitien oder Extemporalien. Berkenbusch.

Englisch (nicht obligatorisch) 1 St. — Leseübungen, Einführung in die Elemente und Memoriren von Vocabeln, nach Heckers Elementarbuche. Habersang.

Religion 2 St. — Die Geschichten des N. T. nach Zahns biblischen Historien. Memoriren von Bibelsprüchen, Psalmen und Kirchenliedern. Fuchs im 1. Semester, Notholz im 2. Semester.

Geschichte 2 St. — Die alte Geschichte (nach einer gedruckten chronologischen Tabelle); Wiederholung des Pensums der Quinta. Köhler im 1. Semester. Römische Geschichte und Repetition der Griechischen. Kamlah im 2. Semester.

Geographie 2 St. — Die 5 Erdtheile und Mittel=Europa, nach Daniel. Notholz.

Mathematik 2 St. — Anfangsgründe der Geometrie; Lehre von Winkeln und Parallelen; die einfachsten Sätze vom Dreieck. v. Keitz.

Naturgeschichte 2 St. Im Sommer: Bestimmen wild wachsender Phanerogamen; im Winter: Käfer und Schmetterlinge. v. Keitz.

Rechnen 2 St. — Gemeine Brüche und Decimalbrüche. Berkenbusch.

Schreiben 2 St. — Henzes Schönschreibe=Hefte für Schulen. Notholz.

Zeichnen 2 St. — Nach Vorlagen. Koch.

Singen 2 St. (s. oben bei Prima.) H. Fischer.

Quinta.

Latein 8 St. — Wiederholung und Vervollständigung des Pensums von Sexta. Verba anomala, defectiva und irreg. Die Lehre vom Acc. c. Inf. und Abl. absol. nebst dem sonst Unentbehrlichsten aus der Syntax. 4 St. Uebungen im Uebersetzen, Exercitien und Extemporalien aus Spieß' Uebungsbuche für Quinta. 4 St. Notholz.

Deutsch 5 St. — Uebungen im Lesen, Nacherzählen und Deklamiren nach dem Lesebuche von Hopf und Paulsiek; das Wichtigste aus der Satzlehre; Aufsätze und orthographische Uebungen. Notholz.

Französisch 4 St. — Plötz's Elementargrammatik: Auswendiglernen der Regeln und Vocabeln, Uebersetzen der Uebungsstücke Lect. 1—60, wöchentlich zwei Exercitien oder Extemporalien; Einübung der Hülfsverben und regelmäßigen Conjugationen. Schwerdtmann.

Religion 2 St. — Biblische Geschichten des A. T. nach Zahn. Wiederholung der 5 Hauptstücke. Memoriren von Kirchenliedern. Notholz.

Geschichte 2 St. — Erzählungen aus der alten und mittleren Geschichte im Anschluß an eine gedruckte chronologische Tabelle. Schwerdtmann im 1. Semester, Kamlah im 2. Semester.

Geographie 2 St. — Allgemeine Uebersicht der fünf Erdtheile. Notholz.

Naturgeschichte 2 St. — Im Sommer Beschreiben von phanerog. Pflanzen, im Winter von Säugethieren und Vögeln der Schulsammlung. v. Keitz.

Rechnen 3 St. — Bruchrechnung. v. Keitz im 1. Semester, Kamlah im 2. Semester.

Schreiben 2 St. — Henzes Schönschreibehefte für Schulen. Notholz.

Zeichnen 2 St. — Nach Vorlagen. Koch.

Singen, combinirt mit Sexta, 2 St. (Zweite Singklasse.) — Theoretische und praktische Vorübungen, Treffübungen u. s. w. Lieder aus dem Sängerhain von Erk und Greef. H. Fischer.

Sexta.

Latein 10 St. — Formenlehre nach Burchards Schulgrammatik §. 1—28. 4 St. Uebersetzen und Exercitien aus Spieß' Uebungsbuche, Capitel 1—25. 6 St. Schwerdtmann.

Deutsch 6 St. — Die Elemente der Grammatik. Lectüre und Memorirübungen aus dem Lesebuche von Hopf und Paulsiek, I. Schriftliche und mündliche Uebungen in der Orthographie und im Nacherzählen. Schwerdtmann.

Religion 2 St. — Ausgewählte biblische Geschichten; Memoriren des ersten Hauptstücks und mehrerer Kirchenlieder. Notholz.

Geschichte und Geographie 2 St. — Uebersicht der Erdtheile und der Länder Europas nach ihren Hauptstädten, Gebirgen und größeren Flüßen. Erzählungen aus der alten und mittleren Geschichte. Schwerdtmann.

Rechnen 6 St. — Die vier Species mit benannten Zahlen, Verbindung der Multiplikation und Division (Regeldetri) und Zeitrechnung, (Böhme, 3. Heft) Neuhauß.

Schreiben 2 St. — Nach Henzes Schönschreibeheften. Neuhauß.

Zeichnen 2 St. — Nach Vorlagen. Koch.

Singen, combinirt mit Quinta, 2 St. H. Fischer.

II. Zur Chronik und Statistik des Gymnasiums.

1. Das Schuljahr begann am 21. April und wird mit der Aufnahmeprüfung neuer Schüler am 28. März d. J. geschlossen.

2. Den Geburtstag Sr. Durchlaucht des Fürsten konnte die Anstalt diesmal nicht festlich begehen, da derselbe in die durch besondere Veranlassung weiter als sonst hinausgeschobenen Sommerferien fiel.

3. Am 19. Juli mußten wir abermals einen theuren Collegen durch den Tod von uns scheiden sehen. An einer mit reißender Schnelligkeit verlaufenden acuten Nierenkrankheit entschlief nach achttägigem, angstvollem Leiden, 44 Jahre alt, der Conrector Dr. W. Fuchs, Fürstlicher Hof- und Schulbibliothekar, Ordinarius der Quarta. Geboren in Bückeburg den 22. April 1829, Sohn des hier verstorbenen Advocaten Fuchs, besuchte er das hiesige Gymnasium von Michaelis 1839 bis Michaelis 1848, bezog darauf mit dem Zeugniß der Reife Nr. I. zum Studium der Philologie die Universität Halle, zuletzt Göttingen, promovirte auf letzterer unter ordnungsmäßiger wissenschaftlicher Prüfung 1852 mit einer Dissertation de ratione, quam veteres artifices, imprimis vasorum pictores, in clipeis imaginibus exornandis adhibuerint; trat darauf zu Michaelis desselben Jahres als unbefoldeter Hülfslehrer beim Gymnasium ein, wurde zu Johannis 1853 definitiv, und als Ordinarius der Quinta angestellt und rückte zu Neujahr 1861 in das Ordinariat der Quarta ein, in welcher Stellung er zu Michaelis 1864 auch zum Conrector und 1870 zum Fürstlichen Hofbibliothekar ernannt wurde. Gleichzeitig versah er in Prima die Lectüre des lateinischen, in Secunda die des griechischen Dichters und leitete in diesen beiden Klassen auch den hebräischen Unterricht. Zu den Programmen der Anstalt hat er 1864 eine historische Skizze über das alte Sagunt, 1872 nach einer auf der Fürstlichen Bibliothek vorhandenen Handschrift des 15. Jahrhunderts Hermanns von Lerbeck Schaumburgische Chronik in niederdeutscher Bearbeitung, und 1871 eine Beschreibung der in der Schulsammlung enthaltenen römischen Kaisermünzen in lateinischer Sprache geliefert, auch „für Schulen des Fürstenthums Schaumburg-Lippe" 1867 eine kurze „Heimathskunde" und 1869 eine kleine „Schulgeographie" verfaßt. Er war ein gründlich unterrichteter, um seine wissenschaftliche Weiterbildung fortwährend eifrig bemühter, berufstreuer und um das Gedeihen der Schule wohlverdienter Lehrer; durch die besondere Theilnahme, welche er den Gemeinde-Interessen seiner Vaterstadt und speziell denen der reformirten Gemeinde widmete, zu welcher er als Mitglied des Presbyteriums in engerer Beziehung stand, auch in weiteren Kreisen bekannt und hochgeachtet: wie sich unzweideutig auch aus der allgemeinen Theilnahme kund gab, unter welcher seine Leiche zur Ruhestätte geleitet wurde, an der der Hofprediger Ballerstedt ein wohlthuendes, ungeschminktes Bild des entschlafenen wackeren Mannes in würdigen Worten entwarf. Um seinen Verlust trauert mit seinen Collegen insonderheit der Unterzeichnete, dessen liebevoller, in Freud und Leid, im Berufs-

wie im Familienleben ihm treu zur Seite stehender Schwiegersohn der Verstorbene seit 1862 war. Seine Stelle wurde zu Michaelis, bis wohin die Collegen durch Vertretung ausgeholfen hatten, einstweilen wenigstens für die Quarta provisorisch durch den wissenschaftlich geprüften Schulamts-Candidaten Kamlah aus Minden besetzt, der auch die Ordinariatsgeschäfte versieht. Der hebräische Unterricht ist leider bisher verwaist geblieben.

4. Der Erinnerungstag von Sedan wurde auch in diesem Schuljahre*) festlich von allen städtischen Lehrern und deren Schülern und Schülerinnen im Rathhaussaale begangen, wo dem Gesange des Gymnasial-Singchors und einem kurzen poetischen Vortrage des obersten Primaners Heuser die Festrede des Prorectors Nöldeke folgte, welche sich nach Schilderung der betreffenden großen Kriegsthaten zunächst über die Erfordernisse verbreitete, welche zur Erringung solcher Erfolge vorher erfüllt werden mußten, was zum Preise der großen leitenden Geister und einem Hoch! auf den Kaiser, den obersten Kriegsherrn, führte, worauf die Versammlung „Heil Dir im Siegerkranz" anstimmte. In weiterer Ausführung erging der Redner sich in Darlegung der Eigenschaften, durch welche die deutschen Heere sich unbesiegbar gemacht hatten, und schloß mit einer Anwendung auf die Jugend, die nun im Frieden sich eben so durch Disciplin und Gehorsam, durch Aneignung von leiblicher und geistiger Kraft, durch Energie und Ausdauer, durch Vertrauen auf Gott, zu üben und tüchtig zu machen habe für kommende Kriegs- wie Friedenszeiten. Einem Hoch! auf den Landesherrn und seine, dem Kriege ebenfalls nicht fern gebliebenen älteren Prinzen folgte „Heil unsrem Fürsten, Heil!" und zum Schluß mehrere von den Gesangschülern vorgetragene patriotische und Kriegs-Lieder.

5. Der Turnunterricht, der im Jahre 1872 nach längerer Unterbrechung nur erst wieder den erwachseneren Schülern hatte zu Theil werden können, ist im vorigen Sommer von allen Schülern in vier Abtheilungen, in je zwei wöchentlichen Stunden, an den freien Nachmittagen von 2—6 Uhr in dem Turnschuppen und auf dem Turnplatze des hiesigen Jäger-Bataillons unter den im vorjährigen Programme veröffentlichten Bedingungen und unter Aufsicht des Unterzeichneten und des Gymnasiallehrers Notholz benutzt worden.

6. Am 17. December gab der Singchor des Gymnasiums unter Leitung seines Lehrers, des Cantors Fischer, vor einem zahlreich im Rathhaussaale versammelten Publikum ein Concert, in welchem nach einer sehr ansprechenden Weihnachts-Cantate von C. Erfurt, mit Liedern für gemischten und für Männer-Chor, zwei Duette des Secundaners W. Hoyer und des Ober-Tertianers C. Finhold, und zwei Solis für Geige: Sonate von Fr. Kücken, von dem Secundaner H. v. Möller, und Variationen

*) Als Vorfeier am 1. September, weil der 2. September, als großer, geräuschvoller Markttag, eine Feier auf dem am Marktplatze selbst gelegenen Rathhause unmöglich machte.

über ein Thema aus der Nachtwandlerin von Bellini, von dem Secundaner R. Langerfeldt vorgetragen, abwechselten. Von dem Reinertrage von 50 Thlr. 25 Sgr. wurden 25 Thlr. für die städtischen Armen bestimmt und 25 Thlr. 25 Sgr. der im Januar 1873 gestifteten Gymnasiallehrer-Wittwenkasse überwiesen.

7. Zu Ostern verlassen 6 Primaner nach schriftlicher, und 5 von ihnen nach schriftlicher und mündlicher Abiturientenprüfung die Schule, und zwar

1) mit dem Prädikat „sehr gut bestanden" und mit der Auszeichnung der Dispensation vom mündlichen Examen, Carl Heuser aus Rodenberg, Sohn des hiesigen Rechtsanwalts Heuser, $19\frac{1}{4}$ Jahr alt, lutherischer Confession. Er besuchte das Gymnasium von Secunda an 4 Jahre und war 2 Jahre Schüler der Prima. Er wird Jura studiren.

Mit dem Prädikat „gut bestanden":

2) Heinrich Creuzinger, geboren auf der Oberförsterei zum Baum unweit Bückeburg, Sohn des hier verstorbenen Fürstlichen Oberförsters Creuzinger, $19\frac{1}{4}$ Jahr alt, reformirter Confession. Er trat Ostern 1864 als Quintaner in das Gymnasium ein und war von Ostern 1872 an Primaner. Er will Medicin studiren.

3) Christian Ballerstedt aus Rinteln, Sohn des hiesigen Fürstlichen Hofpredigers Ballerstedt, $19\frac{1}{4}$ Jahr alt, reformirter Confession. Er besuchte das Gymnasium von Ostern 1863 an, wo er in die Quinta eintrat, und war von Ostern 1872 bis Ostern 1874 Schüler der Prima. Er wird sich dem Studium der Jurisprudenz widmen.

4) August Bolte aus Hannover, Sohn des hiesigen Fürstlichen Gensdarmerie-Commandeurs und Hauptmanns Bolte, $18\frac{3}{4}$ Jahre alt, lutherischer Confession. Er war von Quinta an seit Ostern 1864 Schüler des Gymnasiums und 2 Jahre Primaner. Er hat sich ebenfalls dem Studium der Rechtswissenschaft gewidmet.

5) Arnold Möhling aus Stadthagen, Sohn des daselbst verstorbenen Dr. med. Möhling, $19\frac{1}{2}$ Jahr alt, reformirter Confession. Er besuchte das Gymnasium von Tertia an 7 Jahre und war 2 Jahre Primaner. Er wird sich dem Militärstande widmen.

Mit dem Prädikat „bestanden":

6) Carl Behling von hier, Sohn des hiesigen Fürstlichen Kammer-Probators Behling, $20\frac{1}{2}$ Jahr, lutherischer Confession. Er wurde Ostern 1863 in die Quinta des Gymnasiums aufgenommen und war 2 Jahre Schüler der Prima. Er wird Medicin studiren.

8. Im Laufe des Schuljahres sind noch abgegangen: die Secundaner E. Funck, E. Faust um Pfingsten, John Genn, Arn. Langerfeldt, Leo Götz v. Olenhusen, Herm. Rinne zu Michaelis, C. Gerbracht vor Weihnachten, H. Winkelhake zu Neujahr; die

Ober=Tertianer C. Fromme zu Johannis, E. v. Hinüber zu Michaelis; die Unter=Tertianer L. Schwerdtmann, R. Schwarze um Johannis, A. Koch um Michaelis, C. Juncker zu Weihnachten; die Quartaner Thom. Krekeler zu Johannis, R. Finhold vor Michaelis, E. Kastening, H. Schrader, G. Schrader, F. Kotzenberg zu Michaelis, Rob. Blume, C. Heisterberg zu Weihnachten; die Quintaner E. Kuhlmann zu Johannis, Rud. Krübbe vor Michaelis, H. Schulze im December; die Sextaner C. Sültemeier zu Johannis, Leo Götz v. Olenhusen zu Michaelis. Gegen drei dieser Schüler haben wir leider theils den dringenden Rath, die Schule zu verlassen, theils die Verweisung von der Schule aussprechen müssen.

9. Zu Ostern d. J. werden die Schule außer den S. 39 genannten 6 Primanern verlassen: die Secundaner Curd v. Möller, O. Krieger, Ad. Weber, W. Heine, W. Hoyer; die Unter=Tertianer C. Gärtner, Herm. Kuhlmann, Ernst Coesfeld; die Quartaner Ad. Barkhausen, Harry v. Grünhagen, Jul. Rose, C. Maier, Heinr. Pape.

10. Im ersten Semester des Schuljahres zählte die Anstalt 248 Schüler, 2 weniger als im Jahre vorher, im zweiten 240. Von diesen Zahlen kamen

	auf I.	auf II.	auf IIIa.	auf IIIb.	auf IV.	auf V.	auf VI.
im Anfang des 1. Semesters	14.	35.	25.	41.	50.	53.	30.
" " , 2. "	14.	33.	24.	41.	43.	53.	32.

Unter letzteren sind 72 Schüler, deren Eltern oder nächste Angehörige ihren Wohnsitz nicht in Bückeburg haben, Freischüler 24.

III. Lehrapparat und Sammlungen.

1. Die Gymnasialbibliothek erhielt an Geschenken: Lion, Statistik des Schulturnens in Deutschland, Leipzig 1870—73, von Fürstlicher Regierung; eine Reihe von fast 200 Bänden schönwissenschaftlichen, geschichtlichen, pädagogischen und vermischten Inhalts, darunter Göthes, Wielands, Herders Werke, Rottecks allgemeine Geschichte, v. Dohms Denkwürdigkeiten zur Geschichte von 1778—1806, Fr. Schlegels Geschichte der alten und neuen Litteratur, W. Menzels deutsche Litteratur, Seumes Spaziergang nach Syrakus, F. H. Jacobis Woldemar, Hoffmanns Phantasiestücke, Knigges Umgang mit Menschen u. a. von der Frau Kammeräthin König, zugleich als ein werthvolles Andenken an deren Vater, den um die frühere Blütezeit des hiesigen Gymnasiums hochverdienten Professor und Rector Habicht; werthvolle Schulbücher aus Paderborn von der Schöninghschen, aus Berlin von der Nicolaischen und Weidmannschen, aus Leipzig von der Teubnerschen, aus Essen von der Bädekerschen, aus Hamburg von der Hoffmann und Campeschen, aus Gera von der Kanitzschen Verlagsbuchhandlung. Angekauft wurden außer den Fortsetzungen früher genannter Werke und Zeitschriften u. A.

Droysens Gustaf Adolf, v. Rankes Wallenstein, Geibels Sophonisbe, Hebbels Nibelungen, Dixons Frei-Rußland, Brehms illustrirtes Thierleben, Humboldts Ansichten der Natur, Mösers patriotische Phantasien, G. Forsters kleine Schriften, Kobersteins Geschichte der deutschen Nationalliteratur, Benekes mittelhochdeutsches Wörterbuch (von Müller u. Zarncke), Bakers, Bickmores, Brownes, Dixons, Hayes', Heuglins, Külbs, Martins' Reisewerke.

2. Die Schülerlesebibliothek wurde vermehrt u. A. durch Hartmanns Bilder aus Westfalen, Hertzbergs Rom und König Pyrrhos, dessen Feldzüge der Römer in Deutschland, Jägers punische Kriege, Osterwalds Euripideserzählungen, Langes Geschichten aus dem Herodot, außerdem durch Geschenke des Unter-Tertianers F. Steinhoff, der Quartaner A. Barkhausen, A. Becker, A. Krüger, L. Krüger, G. Meyer, E. v. Möller, A. Schmidt, H. Uhle, A. Wagener, F. Zimmermann.

3. Die Münzsammlung (Obl. Dr. Habersang) erhielt Zuwachs durch mehrfache Geschenke an älteren und neueren Stücken oder Medaillen und Denkmünzen durch den Studiosus Harmening, den Quartaner A. Knoop, die Quintaner A. Rinne, F. Schmöe, G. Meyer, O. Harmening, M. Braun, den ehemaligen Zögling der Anstalt B. Burchard, und O. Burchard.

4. Die naturwissenschaftlichen Sammlungen beschenkte Se. Durchlaucht der Prinz Hermann von Schaumburg-Lippe mit einem Thurm- und einem Lerchenfalken, Prinz Adolf mit einem grauen Papagei, Herr Meierei-Verwalter Rodemann mit mehreren Raubvögeln und einem kleinen Steißfuß, Herr Förster Wenzing mit einem grünfüßigen Wasserhuhn, die Quintaner A. Manns mit einem Falken, F. Wolff und J. Hitzemann mit Seesternen, H. Schwiering mit einem Wiesel, der Unter-Tertianer O. v. Düring mit einer Natter, die Quartaner A. Krüger, H. Uhle, F. Zimmermann mit Salamandern, der Unter-Tertianer E. Coesfeld mit einem Straußenei, der Studiosus Harmening mit einer Eiersammlung, die Quartaner W. Beißner und C. Bargheer, die Quintaner J. Hitzemann und M. Braun mit Insecten, der ehemalige Schüler W. Mosebach aus Texas mit Spinnen und Skorpionen, Marie Rinne aus der ersten Klasse der höheren Töchterschule mit einem Tintenfisch, die Quartaner A. Krüger, H. Uhle, H. Bensen, F. Zimmermann, die Quintaner C. Hartmann, A. Bargheer, C. Meyer, A. Durand, L. v. Dassel, H. Schwarze, H. Dedeke, E. Gößling, L. Friedrichs, H. Gries, J. Hitzemann, O. Spier, H. Lindinger, A. Rinne, H. Wöbking, H. Schwiering, M. Braun, H. Schütte, A. Volmer, die Sextaner E. Eschmann, C. Bömers, C. Bartels, W. Everding, A. Rinne, R. Schmidt, Ph. Köppen mit Conchylien, der Ober-Tertianer C. Schmitz, der Quartaner C. Eggerding, die Quintaner A. Durand, L. v. Dassel, H. Schütte, H. Schörnich, E. Schmidt, der Sextaner P. Schmidt, der ehemalige Tertianer G. Lellmann mit Mineralien oder Petrefacten, der Unter-Tertianer G. König mit einem riesigen Baumpilz.

Auch in die Antiquitätensammlung schenkte der Studiosus Harmening einige kleine ägyptische Götterbilder aus Thon.

Für alle diese zahlreichen und zum Theil sehr werthvollen Beiträge spricht der Unterzeichnete gebührend Dank aus.

Zum Schluß soll nicht unerwähnt bleiben, daß das hiesige Gymnasium nach einer langen Reihe von Jahren, während welcher es, räumlich in der beklagenswerthesten Weise beengt, zahlreichen Hemmnissen auch für sein inneres Gedeihen unterlag, nunmehr am Ende dieser Nothstände angelangt ist, nachdem von Seiten des Landtages zum Neubau eines Gymnasiums, mit ausreichenden Räumlichkeiten auch für eine demnächst damit zu verbindende und unter dieselbe Direction zu stellende Realschule, die erforderlichen, von Fürstlicher Regierung beantragten Geldmittel bis zur Höhe von 45,871 Thlr. bewilligt worden sind. An die dankbarste Anerkennung dieses landständischen Beschlusses darf sich daher wohl die Hoffnung knüpfen, daß, da das Werk bereits in Angriff genommen ist, das Osterprogramm des Jahres 1876 über die geschehene Einweihung des neuen und nach dem Bauplane ohne Zweifel auch äußerlich seinem Zweck würdig entsprechenden Schulhauses Bericht werde erstatten können. — Auch wird von Ostern d. J. an das Gymnasium Fürstlicher Regierung unterstellt, vorbehältlich der Beaufsichtigung des Religionsunterrichts durch den Landessuperintendenten.

Es folgen nun noch die Höchsten Orts gnädigst genehmigten und in Nr. 5 der diesjährigen Landesanzeigen unter dem 13. Februar d. J. publicirten Statuten einer am 1. Januar v. J. gegründeten

Gymnasiallehrer-Wittwen- und Waisenkasse

des Gymnasiums zu Bückeburg.

Statuten.

Von den Lehrern des hiesigen Gymnasiums haben die unterzeichneten mit dem 1. Januar 1873 eine Wittwen- und Waisenkasse gegründet und die nachstehenden Statuten vereinbart:

§. 1.

Die Kasse hat den Zweck, den hinterbliebenen Wittwen und Waisen ihrer Mitglieder eine dauernde Unterstützung zu gewähren.

§. 2.

Diese Kasse bleibt bestehen, wenn das Gymnasium in Zukunft etwa eine Erweiterung durch eine Realschule erfahren oder auch in eine Realschule selbst oder eine andere höhere Bildungsanstalt unter anderem Namen übergehen sollte.

§. 3.

Berechtigt zum Eintritt ist jeder definitiv hier angestellte ordentliche Gymnasiallehrer.

Ueber die Aufnahme anderer am Gymnasio unterrichtenden Lehrer behalten die Mitglieder der Kasse sich die Entscheidung vor.

§. 4.

Jedes Mitglied zahlt einen jährlichen Beitrag von einem halben Procente seines aus Gymnasialkasse bezogenen Gehalts. Nicht volle hundert Thaler, wenn sie unter fünfzig betragen, werden für ein halbes Hundert, von fünfzig Thalern an für ein volles Hundert gerechnet.

Die Beiträge werden in vierteljährlichen Raten praenumerando zu Anfang jedes Quartals eingezahlt.

Die Mitglieder der Kasse, welche nicht zu den definitiv angestellten oder nicht ordentlichen Gymnasiallehrern gehören, haben diesen Procentsatz von ihrer gesammten amtlichen Einnahme zu entrichten.

§. 5.

Jedes später eintretende Mitglied zahlt bei einer Altersstufe bis zum incl. 30. Jahre 5 Thaler Antrittsgeld, bei höherem Alter 10 Thlr.

Von diesem Antrittsgelde sind die gegenwärtig nicht definitiv angestellten oder nicht ordentlichen Gymnasiallehrer entbunden, wenn sie bis zum ersten April 1873 der Kasse beitreten.

Wer der Kasse beizutreten berechtigt ist, von dieser Berechtigung aber nicht binnen der drei ersten Monate Gebrauch macht, hat bei späterem Eintritte nicht nur die nach §. 4 auf ihn fallenden Beiträge von dem Eintritte der Berechtigung an nachzuzahlen, sondern auch ein um 3 Thlr. erhöhtes Antrittsgeld, also 8 Thaler, resp. 13 Thaler zu entrichten.

§. 6.

Mit dem Ausscheiden aus dem Lehrercollegio hört jede Berechtigung zur Theilnahme an der Verwaltung der Kasse (§. 7) auf, jedoch bleibt die Berechtigung einer Pension für Wittwen und Waisen bestehen, wenn

1) ein pensionirtes Mitglied von seiner Pension die betreffende Quote, und
2) ein freiwillig oder durch Suspension oder Amtsentsetzung ausscheidendes Mitglied den vor dem Ausscheiden zuletzt bezahlten Beitrag regelmäßig weiter entrichtet.

Wer beim Uebergange in ein anderes Amt Mitglied der Kasse bleiben will, hat nach wie vor ein halbes Procent der mit seinem Amte verbundenen Einnahme, in keinem Falle jedoch weniger als die bis zu seinem Ausscheiden entrichtete Quote fortzuzahlen.

Zweimal nach einander unterlassene Einzahlung des Quartalbeitrages gilt als Austrittserklärung.

Rückzahlungen finden in keinem Falle statt.

§. 7.

Am Anfange jedes ersten Quartals des Jahres findet eine Versammlung sämmtlicher zum Lehrercollegio gehörenden Mitglieder statt, denen nach absoluter Stimmenmehrheit der Erschienenen, wobei im Falle der Stimmengleichheit die Stimme des Directors den Ausschlag giebt, die Entscheidung zufällt

1) über Abänderung der Statuten,
2) über die Wahl eines Vorstandes,
3) über Feststellung der für das laufende Jahr zu vertheilenden Summe,
4) über alle im Interesse des Vermögens der Kasse einzuschlagenden Maßregeln, wie Unterbringung, Kündigung von Kapitalien u. s. w.

Auch die Abnahme der Jahresrechnung fällt dieser Versammlung zu. Vor Zusammenkunft derselben steht drei Tage lang die Rechnung jedem Mitgliede zur Einsicht offen.

§. 8.

Der (unbesoldete) Vorstand der Kasse besteht aus dem Director des Gymnasii und zwei Collegen, von welchen der eine Rechnungsführer ist. Letztere werden immer auf zwei Jahre gewählt, sind aber nach Ablauf derselben wieder wählbar.

§. 9.

Dem Vorstande liegt die Ausführung der Beschlüsse der Jahresversammlung der Mitglieder (§. 7) ob, ferner aller Schriftwechsel, die Annahme von Beitrittserklärungen und Anträgen, von Geldern und Documenten, überhaupt alle Angelegenheiten der Kasse, über welche die Entscheidung der Mitgliederversammlung nicht erforderlich ist.

Auch kann der Vorstand außerordentliche Versammlungen der Mitglieder für sich oder auf Antrag von Mitgliedern berufen.

Beim Vorstande angemeldete Anträge auf Abänderung der Statuten sind von jenem wenigstens einen Monat vor einer allgemeinen Versammlung zur Kenntniß zu bringen.

§. 10.

Während der ersten fünf Jahre, also bis zu Ende des Jahres 1877, werden alle Einnahmen zum Capitalvermögen der Kasse geschlagen.

§. 11.

Vom ersten Januar 1878 an werden von der regelmäßigen Einnahme, das heißt von den Zinsen und Jahresbeiträgen, wenn eine oder mehrere Wittwen oder Waisen vorhanden sind, ein Drittheil zur Vermehrung des Capitals, zwei Drittheile zu Pensionen verwendet und zwar letztere so, daß zugleich als Reserve für unvorhergesehene Ausgaben der Betrag einer Wittwenpensionsquote ausgesondert wird. Es sind daher jedesmal die zwei Drittheile auf die Reserve und die vorhandenen Wittwen oder Waisen zu vertheilen.

Die nicht zur Verwendung gekommenen Reservegelder fließen dem Capitalvermögen der Kasse wieder zu.

Der Pensionsbezug beginnt mit dem Anfange des auf den Tod eines Mitgliedes folgenden Quartals und hört auf mit dem Ende desjenigen Quartals, in welchem die Berechtigung zum Pensionsbezuge erlischt, bei der Wiederverheirathung einer Wittwe jedoch mit dem Eintritte dieses Zeitpunktes.

Die Zahlung geschieht postnumerando am Ende jedes Quartals.

§. 12.

Wenn von einem verstorbenen Mitgliede nur eheleibliche Kinder vorhanden sind, so erhalten diese insgesammt bis zum vollendeten achtzehnten Lebensjahre als Pension eine Summe, wie sie nach §. 11 einer Wittwe zu Theil geworden sein würde.

Die Zahlung wird an den Vormund geleistet.

§. 13.

Hinterläßt ein Mitglied eine Witkwe und unterstützungsberechtigte Kinder aus einer früheren Ehe, so erhalten die Hinterbliebenen zusammen nur eine Pensionsquote.

Besorgt die Wittwe die Erziehung ihrer Stiefkinder nicht, so wird diese Quote unter die Wittwe und ihre etwa vorhandenen leiblichen Kinder einerseits und ihre Stiefkinder andererseits nach Maßgabe des Beschlusses der Mitgliederversammlung vertheilt.

Sobald die Kinder das 18. Lebensjahr vollendet haben, tritt die Wittwe in den ganzen Genuß der Pension.

§. 14.

Eine geschiedene Ehefrau hat auf Pension keinen Anspruch, wohl aber etwa vorhandene Kinder aus der Ehe mit dem verstorbenen Mitgliede der Kasse.

§. 15.

Vorstehende Statuten sollen der dem Gymnasio vorgesetzten Behörde zur Bestätigung vorgelegt werden.

Jede später von der Mitgliederversammlung etwa beschlossene Abänderung derselben bedarf gleichfalls der Genehmigung dieser Behörde, welcher auch das Recht zusteht, jederzeit von der Verwaltung der Kasse Kenntniß zu nehmen.

Bückeburg, den 1. Januar 1873.

W. Burchard,
Professor und Director des Gymnasiums.

A. Nöldeke,
Prorector.

Dr. W. Fuchs,
Conrector.

Chr. Berkenbusch,
Oberlehrer.

Dr. O. Habersang,
Oberlehrer.

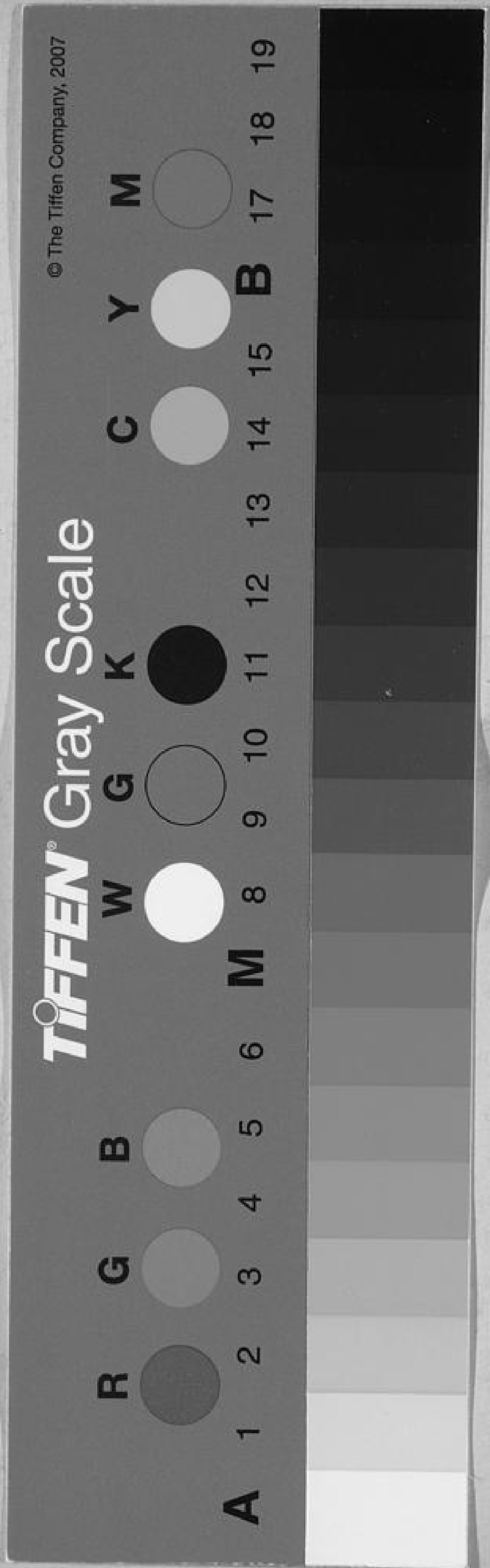
Dr. E. Köhler,
Gymnasiallehrer.

L. Schwerdtmann,
Subconrector.

O. Notholz,
Gymnasiallehrer.

Das neue Schuljahr beginnt mit Verlesung der Schulordnung und Bekanntmachung des Stundenplans am Montag den 13. April um 8 Uhr für die beiden obersten Klassen, um 10 für Ober- und Unter-Tertia, um 11 für die drei unteren Klassen.

Burchard.


TIFFEN Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
R G B W G K C Y M