Programm

des

Gymnasiums zu Bückeburg.

Ostern 1865.

Inhalt: 1) Die Lehre von der Ellipse im Anschluß an die Kreislehre, vom Oberlehrer Berkenbusch.
2) Schulnachrichten.

Bückeburg.
Druck der Grimme'schen Hofbuchdruckerei.

Die Lehre von der Ellipse im Anschluß an die Kreislehre.

An den meisten Gymnasien, wenigstens an den humanistischen, ist, so viel mir bekannt, die Lehre von den Kegelschnitten von dem Unterrichtspensum der Prima ausgeschloßen. Für den Unterricht in der Physik und mathematischen Geographie ist es jedoch nicht bloß wünschenswerth, sondern nothwendig, daß der Schüler mit den wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte, insbesondere der Ellipse und der Parabel, bekannt sei. Das Studium derselben muß daher an den meisten Gymnasien dem Privatfleiße der Schüler überlassen werden, wenn der Lehrer sich nicht darauf beschränken will, die für seine Zwecke wichtigsten Sätze als bloße Facta mitzutheilen. Eine analytische Behandlung der Kegelschnitte eignet sich aber meines Erachtens nicht für das Privatstudium eines so eben nach der Prima versetzten Schülers, weil sie bei dem Mangel einer genügenden Anleitung den meisten Schülern fast unüberwindliche Schwierigkeiten bereiten wird. Und wenn auch an einigen Anstalten das Pensum der Prima die Lehre von den Kegelschnitten umfaßt, so ist doch meistens die Zeit, welche darauf verwandt werden kann, zu knapp bemeßen, als daß der Schüler bei der Neuheit des Stoffs und der Methode eine genügende Sicherheit in der analytischen Behandlung erlangen könnte. Außerdem möchte es schwer sein, die Vertheilung des Unterrichtsstoffs so einzurichten, daß jedes Mal, wenn in der mathematischen Geographie und in der Physik die zum Verständnis des Vortrags nothwendige Bekanntschaft mit den Kegelschnitten vorauszusetzen wäre, alle Schüler der Classe den Cursus der analytischen Geometrie bereits gehabt haben. Mir schien es deshalb wünschenswerth, dem Schüler bei seinem Eintritt in die Prima die Lehre von den Kegelschnitten in einer Form zu geben, welche sie geeigneter zum Privatstudium macht und in der sie ihm zugleich einen zweckmäßigen Stoff zur Verwerthung der in der Planimetrie bereits erworbenen Kenntnisse bietet. Im Folgenden habe ich zu diesem Zwecke den Versuch gemacht, die wichtigsten Eigenschaften der Ellipse im engen Anschluß an die Kreislehre zu entwickeln. Möge der Zweck der Arbeit bei der Beurtheilung derselben maßgebend sein.

---

§. 1. Soll ein Punkt gefunden werden, der von zwei gegebenen Punkten a und b gleiche Abstände hat, so entspricht bekanntlich nicht bloß der Halbirungspunkt m der Geraden ab, sondern jeder Punkt des in m auf ab errichteten Perpendikels, aber auch kein andrer Punkt der Ebene, der gestellten Forderung. Man nennt das Perpendikel den geometrischen Ort des gesuchten Punktes. Allgemein versteht man in der Planimetrie unter dem geometrischen Ort eines Punktes diejenige Linie, deren Punkte sämmtlich einer oder auch mehreren gestellten Bedingungen Genüge leisten, während alle anderen, dieser Linie nicht angehörigen Punkte der Ebene der Forderung nicht entsprechen. In dem angeführten Beispiele ist der geometrische Ort des gesuchten Punktes eine Gerade; dies braucht jedoch nicht immer der Fall zu sein; er kann vielmehr, je nach der Forderung, auch eine krumme Linie von irgend welcher Beschaffenheit sein. So ist aus der Lehre vom Kreise bekannt, daß der geometrische Ort der Spitzen aller Dreiecke, welche über einer gegebenen Grundlinie ab auf einer Seite derselben mit einem Winkel an der Spitze von gegebener Größe construirt werden können, der von den Endpunkten der gemeinsamen Grundline ab begrenzte Bogen eines Kreises ist, der außerdem durch die Spitze eines der gesuchten Dreiecke geht.

Fig. I. §. 2. **Aufgabe:** Es soll der geometrische Ort des Punktes gesucht werden, für welchen die Summe der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten, F und F_1, eine bestimmte Größe 2a hat.

Auflösung: 1) Ist $2a < FF_1$ d. h. ist 2a kleiner als die Entfernung der festen Punkte F und F_1 von einander, so giebt es keinen Punkt von der verlangten Beschaffenheit.

2) Ist $2a = FF_1$, so entspricht jeder Punkt der Strecke FF_1 der gestellten Forderung, für jeden anderen Punkt der Ebene aber ist die Summe der Entfernungen von F und F_1 größer als 2a; mithin ist die Strecke (begrenzte Gerade) FF_1 der gesuchte geometrische Ort des Punktes.

3) Ist endlich $2a > FF_1$, so genügt kein Punkt der Strecke FF_1 der Bedingung, es läßt sich aber jederseits in der Verlängerung von FF_1 ein Punkt von der verlangten Eigenschaft finden. Halbirt man nämlich die Strecke FF_1 $(= 2c)$ in C und macht $CA = CA_1 = a$, so wird auch $AF = A_1F_1$ $(= a - c)$; mithin $AF + AF_1 = A_1F_1 + AF_1 = AA_1 = 2a$ 2c. Es ist leicht ersichtlich, daß für jeden zwischen A und F (resp. A_1 und F_1) liegenden Punkt die Summe der Entfernungen von F und F_1 kleiner, für jeden Punkt der Geraden aber, welcher von C um mehr als a absteht, größer als

$2a$ ist, daß also in der durch F und F_1 gelegten Geraden nur die beiden Punkte A und A_1 der Forderung genügen. Nimmt man aber auf der Strecke FF_1 den Punkt N beliebig an und schlägt um F mit dem Radius AN und um F_1 mit dem Radius A_1N Kreise, so sind die Durchschnittspunkte derselben M und M_1 gleichfalls Punkte von der verlangten Beschaffenheit, da die Summe ihrer Entfernungen von F und F_1 gleich der Summe der beiden Radien, gleich $AN + A_1N = 2a$ ist. Verbindet man M mit M_1, so steht MM_1 auf der Geraden AA_1 senkrecht und wird von ihr halbirt; die Punkte M und M_1 liegen also symmetrisch in Beziehung auf die AA_1. Dasselbe gilt natürlich von allen anderen Paaren von Punkten des geometrischen Orts, die nach diesem Verfahren in unbegrenzter Anzahl gefunden werden können. Fällt N mit C zusammen, so werden die Radien der beiden Kreise einander gleich, nämlich $= a$, und die Verbindungslinie ihrer Durchschnittspunkte BB_1 geht durch C. Jedem Punkt N zwischen F und C entspricht ein Punkt n zwischen F_1 und C, sodaß die Punkte N und n gleich weit von C abstehn. Die dem Punkte n zugehörigen Punkte m und m_1 des geometrischen Orts haben, wie leicht nachzuweisen ist, eine symmetrische Lage mit den Punkten N und N_1 in Beziehung auf die Gerade BB_1. Ohne also den geometrischen Ort vollständig construirt zu haben, sehn wir doch schon, daß sowohl die Gerade AA_1, als die in ihrer Mitte auf ihr senkrecht stehende BB_1 ihn in symmetrisch gleiche Theile zerlegen.

Anmerkung. Der Punkt N muß immer auf der Strecke FF_1 liegen; denn für jeden zwischen F und A (resp. F_1 und A_1) liegenden Punkt würde wohl die Summe der Radien $= 2a$, ihre Differenz aber kleiner als FF_1, d. h. kleiner als der Abstand der Kreismittelpunkte werden; die Kreise würden sich also nicht schneiden. Nimmt man F (oder F_1) als den betreffenden Punkt an, so erhält man kein Paar von Punkten, sondern jedes Mal nur einen einzigen, nämlich A (oder A_1) da sich in diesem Falle die beiden Kreise nicht schneiden, sondern in dem Punkte A (resp. A_1) berühren.

§. 3. Eine zweite Methode, beliebig viele Punkte des geometrischen Orts durch Construction zu finden, ist folgende: Fig. II.

Man lege durch F_1 unter einem beliebigen Winkel mit F_1F eine Gerade und schneide auf ihr $F_1S = 2a$ ab, verbinde S mit F, halbire diese Verbindungslinie in Q und errichte in diesem Punkte ein Perpendikel auf FS, so ist der Durchschnittspunkt P desselben mit F_1S ein Punkt, welcher der Forderung genügt. Denn $FP = PS$, folglich $F_1P + FP = F_1P + PS = 2a$.

Verbindet man C mit Q, so wird, weil sowohl $FC = CF_1$ als auch $FQ = QS$ ist, $CQ \parallel F_1S$ und $= \frac{1}{2} F_1S = a$. Der geometrische Ort des Punktes Q ist also ein um C mit dem Radius a beschriebener Kreis. Zieht man demnach von F und C nach einem beliebigen andern Punkte Q_1 dieses Kreises die Geraden FQ_1 und CQ_1 und errichtet in Q_1 ein Perpendikel auf FQ_1, so ist der Durchschnittspunkt P_1 desselben mit einer aus F_1 zu CQ_1 parallel gezogenen Geraden ein zweiter Punkt des geometrischen Orts. Denn verlängert man FQ_1 und F_1P_1 bis zu ihrem Durchschnitt in S_1, so ist wegen des Parallelismus von CQ_1 und F_1S_1 und weil $FC = CF_1$ 1) $FQ_1 = Q_1S_1$ und 2) $F_1S_1 = 2CQ_1 = 2a$. Aus 1) folgt $FP_1 = S_1P_1$; mithin $FP_1 + F_1P_1 = S_1P_1 + F_1P_1 = 2a$.

Fig. II. §. 4. Fällt man von P ein Perpendikel auf die A_1A, so liegen, weil sowohl PQF als PNF Rechte sind, die Punkte Q und N auf der Peripherie eines über PF als Durchmesser construirten Kreises. Sein Mittelpunkt M liegt auf der Geraden CQ, weil diese parallel F_1P ist und daher FP in demselben Verhältniß wie F_1F theilt, also halbirt. Es besteht nun die Relation: $CL.CQ = CF.CN$ oder $CL = \frac{CF.CN}{CQ}$; daher ist

$$FP = LQ = CQ - CL = CQ - \frac{CF.CN}{CQ}.$$

Bezeichnet man das Perpendikel PN mit y, den Abstand seines Fußpunktes von C mit x, FP mit r, F_1P mit r_1, CQ und CF wie früher mit a und c, so ist

1) $r = a - \frac{c.x}{a}$ und

2) $r_1 = 2a - r = a + \frac{c.x}{a}$.

Diese beiden Formeln behalten ihre volle Gültigkeit, so lange der Punkt N zwischen A und C liegt. Rückt aber der Fußpunkt des Perpendikels über C hinaus, so daß er, wie in unserer Figur der Punkt N_1, zwischen C und A_1 zu liegen kommt, so liegt C innerhalb des durch die Punkte $FQ_1P_1N_1$ gelegten Kreises, und man erhält

$$FP_1 = L_1Q_1 = CQ_1 + CL_1 = CQ_1 + \frac{CF.CN_1}{CQ_1}$$

$$\text{also } r = a + \frac{cx}{a} \text{ und } r_1 = a - \frac{cx}{a}.$$

Setzt man jedoch den Abstand des Punktes N_1 von C, analog dem in der Trigonometrie üblichen Verfahren, negativ, wenn man den Abstand eines Punktes N, der auf der entgegengesetzten Seite von C nach A hin liegt, positiv nimmt, so bleiben obige beiden Formeln auch für den Fall gültig, daß der Fußpunkt des Perpendikels über C hinaus nach A_1 zu rückt.

Um für die Zukunft derartigen Erörterungen vorzubeugen, diene der Inhalt des folgenden Paragraphen.

Fig. III. §. 5. Man pflegt, um die Lage eines Punktes P in einer Ebene festzusetzen, denselben dergestalt auf zwei feste, sich schneidende Gerade zu beziehen, daß man von ihm aus Parallele zu diesen Geraden bis zum Durchschnitt mit ihnen zieht und die Größe dieser Strecken angiebt. Die beiden festen Geraden (XX_1 und YY_1 in Fig. III.) heißen Axen, die durch den Punkt parallel zu ihnen gezogenen Geraden PN und PM die Coordinaten des Punktes P, in Beziehung auf die Axen XX_1 und YY_1. Zur Unterscheidung nennt man die eine der beiden Coordinaten die Ordinate, die andre die Abscisse des Punkts P. Die Ordinate PN eines Punktes pflegt man mit y, die Abscisse PM, oder gewöhnlicher die ihr parallele und gleiche Strecke CN mit x zu bezeichnen. Die den

Ordinaten parallele Axe YY_1 heißt Ordinatenaxe oder auch Axe der y, die den Abscissen parallele Axe XX_1 Abscissenaxe oder Axe der x. Der Durchschnittspunkt C der Axen heißt Anfang oder Ursprung der Coordinaten, der Winkel, unter dem sie sich schneiden, Coordinatenwinkel; je nachdem dieser ein rechter oder schiefer ist, nennt man das Coordinatensystem rechtwinklig oder schiefwinklig.

Die absolute Länge der Coordinaten bestimmt die Lage eines Punktes nicht vollständig; denn in jedem der durch die Axen gebildeten 4 Winkel läßt sich immer ein Punkt finden, der zweien Coordinaten von gegebener Länge entspricht. Versieht man aber die Coordinaten, welche in Bezug auf den Anfangspunkt C entgegengesetzte Lagen haben, auch mit entgegengesetzten Vorzeichen, wozu die Berechtigung bereits in der Trigonometrie nachgewiesen ist, so findet in Beziehung auf die Lage eines durch seine Coordinaten bestimmten Punktes keine Vieldeutigkeit mehr statt. Geht die Abscissenaxe von rechts nach links, so pflegt man die Abscissen rechts von C positiv, nach links negativ, die Ordinaten oberhalb der Abscissenaxe positiv, auf der untern Seite negativ zu nehmen.

Bezeichnen α und β die absolute Länge von x und y, so hat man nach dem Vorigen als Coordinaten

$$\begin{array}{lll} \text{für } P & x = \alpha, & y = \beta \\ \text{„ } P_1 & x = -\alpha, & y = \beta \\ \text{„ } P_2 & x = \alpha, & y = -\beta \\ \text{„ } P_3 & x = -\alpha, & y = -\beta \end{array}$$

Wir bedienen uns im Folgenden, wenn es nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Ursprung der Halbirungspunkt C der Strecke FF_1, dessen Abscissenaxe die durch F und F_1 gelegte Gerade, dessen Ordinatenaxe mithin ein im Punkt C auf AA_1 errichtetes Perpendikel ist.

Den über AA_1 als Durchmeßer construirten Kreis wollen wir Hauptkreis nennen.

§. 6. Aus dem bei N rechtwinkligen Dreieck FNP ergiebt sich Fig. II.

$$PN^2 = PF^2 - FN^2, \text{ oder } y^2 = r^2 - (x - c)^2.$$

Nach §. 4. Gleichung 1) ist aber $r = a - \frac{cx}{a}$, mithin $y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 - (x-c)^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

Setzt man die constante Größe $a^2 - c^2$, welche von der Lage des Punktes P völlig unabhängig ist, $= b^2$ (in Fig. I. ist nach §. 2. $BC^2 = a^2 - c^2$, also $BC = b$), so ist

$$1)\ y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Bezeichnet man den Durchschnittspunkt der über P hinaus verlängerten Ordinate y mit dem Hauptkreise durch $\mathfrak{P}$ und die Ordinate des Punktes $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{y}$, so ist

$$2)\ \mathfrak{y}^2 = A_1N . AN = (a + x)(a - x) = a^2 - x^2.$$

Aus 1) und 2) ergiebt sich die wichtige Relation

3) $\frac{y}{\mathfrak{y}} = \frac{b}{a}$.

Nennt man je zwei Punkte P und $\mathfrak{P}$ des geometrischen Orts und des Hauptkreises, welche auf derselben Seite der A_1A liegen und dieselbe Abscisse haben, *zugehörig*, so lautet die Relation 3) in Worten: „Die Ordinaten zweier zugehöriger Punkte stehn in dem constanten Verhältnis $\frac{b}{a}$“.

Zusatz. Da $b < a$, so muß auch $y < \mathfrak{y}$ sein; es liegen demnach alle Punkte des gesuchten geometrischen Orts innerhalb des Hauptkreises; eine Ausnahme machen nur die Punkte A und A_1, für welche $y = \mathfrak{y} = o$.

Fig. IV. §. 7. Auf die im vorigen §. entwickelte Relation $\frac{y}{\mathfrak{y}} = \frac{b}{a}$ stützt sich eine dritte, einfachere Methode, den gesuchten geometrischen Ort durch Punkte zu construiren. Man beschreibe über A_1A den Hauptkreis und um seinen Mittelpunkt C einen zweiten Kreis vom Radius $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Fällt man nun von beliebigen Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ 2c. des Hauptkreises Ordinaten auf A_1A und zieht von den Punkten q, q_1, q_2 2c., in denen die nach den Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ 2c. des Hauptkreises gezogenen Radien den kleineren Kreis schneiden, qP, q_1P_1 2c. parallel A_1A, so werden die Kreisordinaten in den Durchschnittspunkten im Verhältnis der beiden Radien, d. h. in dem Verhältnis b : a getheilt; P, P_1, P_2 2c. sind mithin Punkte des geometrischen Orts.

§. 8. Die bisher angegebenen Constructionsmethoden ergaben immer nur einzelne Punkte des geometrischen Orts, wenn auch in beliebiger Anzahl. Um aber den gesuchten geometrischen Ort durch die stetige Bewegung eines Punktes in einem Zuge zu erzeugen, kann man die Enden eines Fadens von der Länge 2a in den Punkten F und F_1 befestigen, ihn durch einen angelegten Zeichenstift spannen und diesen dann so in der Ebene des Papiers herumführen, daß auch der Faden stets auf dem Papier und straff gespannt bleibt. Es ist selbstverständlich, daß bei dieser Construction der Faden als vollkommen biegsam und nicht dehnbar vorauszusetzen ist.

Fig. IV. §. 9. Die krumme, in sich selbst zurücklaufende Linie, welche nach dem Vorhergehenden der geometrische Ort des Punktes ist, für den die Summe der Entfernungen von 2 festen Punkten eine constante Größe hat, führt den Namen Ellipse. Die Geraden AA_1 und BB_1, von denen jede nach §. 2. die Ellipse symmetrisch theilt, und welche deshalb zusammen die Ellipse in 4 congruente Ellipsenquadranten zerlegen, heißen die Axen der Ellipse; und zwar wird $AA_1 = 2a$ die große Axe (Hauptaxe), $BB_1 = 2b = 2\sqrt{a^2 - c^2}$ die kleine Axe (Nebenaxe) genannt. Die Endpunkte A und A_1 der großen Axe heißen die Scheitel der Ellipse; die beiden festen Punkte F und F_1, aus einem später anzuführenden Grunde, Brennpunkte (foci), jede von einem derselben nach irgend einem Punkte der Ellipse gezogene Gerade r Brennstrahl (radius vector). Die halbe Entfernung der beiden Brennpunkte F und F_1 ($CF = CF_1 = c$) wird die Excentricität der Ellipse genannt; in der Astronomie pflegt man jedoch unter Excentricität der Ellipse den echten Bruch $\frac{c}{a}$ zu verstehn; zur Unterscheidung nennt man deshalb wohl c die lineare, $\frac{c}{a}$ die numerische Excentricität.

Anmerkung 1. Sind von den drei Größen: Hauptaxe, Nebenaxe, Excentricität zwei bekannt, so wird die dritte durch die Gleichung $b^2 = a^2 - c^2$ (§. 6.) bestimmt.

Anmerkung 2. Da $b^2 = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c)$, so ist die halbe kleine Axe die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abständen eines Brennpunktes von den Endpunkten der großen Axe und gleich derjenigen Ordinate des Hauptkreises, welche in einem der Brennpunkte errichtet werden kann.

§. 10. Für jeden Punkt, welcher innerhalb der Ellipse liegt, ist die Summe der nach den Brennpunkten F und F_1 gezogenen Geraden kleiner, für jeden außerhalb der Ellipse gelegenen Punkt größer als die große Axe. Fig V.

Ein Punkt liegt demnach auf, innerhalb oder außerhalb der Ellipse, je nachdem die Summe seiner Entfernungen von den beiden Brennpunkten $=$ $<$ oder $>$ $2a$ ist.

Beweis. $MF < MP + PF$, daher
$MF_1 + MF < MF_1 + MP + PF$, d. h.
$MF_1 + MF < PF_1 + PF$, d. h. $< 2a$.

Dagegen ist $NP + NF > PF$; mithin
$F_1P + NP + NF > F_1P + PF$, also
$F_1N + NF > 2a$.

§. 11. Jede durch den Durchschnittspunkt C der Axen gelegte und von der Ellipse begrenzte Gerade PP_1 wird in C halbirt und theilt ihrerseits die Ellipse in zwei congruente Theile. Man nennt aus diesem Grunde C den Mittelpunkt der Ellipse und jede durch ihn gelegte Gerade einen Durchmeßer der Curve. Fig. V.

Beweis. Ist P der eine Durchschnittspunkt der durch C gelegten Geraden mit der Ellipse, so verlängere man seine Ordinate rückwärts bis zum Durchschnitt mit dem Hauptkreise in $\mathfrak{P}$, ziehe den Kreisdurchmeßer $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ und die zu $\mathfrak{P}_1$ gehörige Kreisordinate $\mathfrak{P}_1p_1$, welche in irgend einem Punkte P_1 von der verlängerten PC geschnitten werde. Aus der Congruenz der Dreiecke $C\mathfrak{P}p$ und $C\mathfrak{P}_1p_1$ folgt $Cp_1 = Cp$. Es sind daher auch die Dreiecke CPp und CP_1p_1 congruent, mithin $CP_1 = CP$, d. h. C ist die Mitte von PP_1. Aus der Congruenz der beiden Paare von Dreiecken folgt ferner $\mathfrak{P}_1p_1 = \mathfrak{P}p$ und $P_1p_1 = Pp$, mithin ist auch $\mathfrak{P}_1p_1 : P_1p_1 = \mathfrak{P}p : Pp = a : b$, also ist auch P_1 ein Punkt der Ellipse.

Aus dem ersten Theile der Behauptung ergiebt sich aber sofort auch die Richtigkeit des zweiten Theils, indem die beiden durch PP_1 gebildeten Ellipsentheile zur Deckung gelangen, wenn man einen derselben um 180° um den Punkt C dreht.

Zusatz. Eine Gerade, welche zwei Punkte der Ellipse verbindet, ohne durch ihren Mittelpunkt zu gehn, wird eine Sehne der Ellipse genannt.

Fig. V. §. 12. Zieht man von irgend einem Punkte P der Ellipse eine Gerade nach dem Mittelpunkte C und macht ihre Verlängerung $CP_1 = CP$, so ist auch P_1 ein Punkt der Ellipse.

Beweis. Man verbinde die beiden Punkte P und P_1 mit den Brennpunkten, so ist wegen der Congruenz der Dreiecke PCF und P_1CF_1 $P_1F_1 = PF$ und wegen der Congruenz der Dreiecke PCF_1 und P_1CF $P_1F = PF_1$ mithin $P_1F_1 + P_1F = PF + PF_1 = 2a$.

§. 13. Die Durchmeßer der Ellipse nehmen zu, wenn die Abscissen ihrer Endpunkte wachsen; von allen Durchmeßern ist daher die kleine Axe der kleinste, die große Axe der größte.

Beweis. Bezeichnet man die Entfernung eines beliebigen Punktes P der Ellipse von ihrem Mittelpunkte, d. h. die Hälfte des durch den Punkt P gelegten Durchmeßers mit d und die Coordinaten des Punktes P mit x und y, so ist $d^2 = x^2 + y^2$.

Nun ist nach §. 6, 1): $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, mithin

$$d^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{c^2x^2}{a^2} + b^2.$$

Das zweite Glied dieser Summe ist constant, das erstere verschwindet für $x = 0$, nimmt mit wachsendem x zu und erreicht sein Maximum, wenn für x sein größter Werth, nämlich a, gesetzt wird.

Fig. VI. §. 14. Verbindet man irgend zwei Punkte der Ellipse und ebenso die zugehörigen Punkte des Hauptkreises durch gerade Linien, so schneiden diese die Hauptaxe oder deren Verlängerung in einem und demselben Punkte.

Beweis. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die beiden Ellipsenpunkte auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Hauptaxe liegen. Liegen P und P_1, beziehungsweise $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$, auf derselben Seite der Hauptaxe und schneiden die durch diese beiden Paare von Punkten gelegten Geraden die verlängerte Hauptaxe in M und $\mathfrak{M}$, so ist

1) $pM : p_1M = y : y_1$

2) $p\mathfrak{M} : p_1\mathfrak{M} = \mathfrak{y} : \mathfrak{y}_1$

folglich, da $y : \mathfrak{y} = y_1 : \mathfrak{y}_1 = b : a$, mithin $y : y_1 = \mathfrak{y} : \mathfrak{y}_1$

3) $pM : p_1M = p\mathfrak{M} : p_1\mathfrak{M}$ und daher

4) $\frac{p_1M - pM}{p_1M} = \frac{p_1\mathfrak{M} - p\mathfrak{M}}{p_1\mathfrak{M}}$ d. h. $\frac{p_1p}{p_1M} = \frac{p_1p}{p_1\mathfrak{M}}$

Da diese gleichen Verhältnisse in den Vordergliedern übereinstimmen, müßen auch ihre Hinterglieder p_1M und $p_1\mathfrak{M}$ einander gleich sein, die Durchschnittspunkte M und $\mathfrak{M}$ also zusammenfallen.

Aehnlich wird der Beweis geführt, wenn die beiden Ellipsenpunkte, wie in unsrer Figur P_1 und P_2, auf verschiedenen Seiten der Hauptaxe liegen.

§. 15. Legt man durch zwei Punkte der Ellipse P und P_1 eine Gerade, welche die Hauptaxe oder deren Verlängerung in M trifft, so schneidet eine durch M und den einen zugehörigen Punkt des Hauptkreises gelegte Gerade den letztern auch in dem andern zugehörigen Punkte. Fig. VI.

Beweis. Die durch M und $\mathfrak{P}_1$ gelegte Gerade schneidet die rückwärts verlängerte Ellipsenordinate des Punktes P in einem Punkte, dessen Ordinate mit z bezeichnet werden möge. Nun ist sowohl $y : y_1 = p\,M : p_1\,M$,

als auch $z : \mathfrak{y}_1 = p\,M : p_1\,M$,

mithin $y : y_1 = z : \mathfrak{y}_1$ oder $y : z = y_1 : \mathfrak{y}_1$.

Da aber $y_1 : \mathfrak{y}_1 = b : a$, so muß auch $y : z = b : a$ sein; mithin ist der Durchschnittspunkt, dessen Ordinate mit z bezeichnet wurde, der dem Ellipsenpunkt P zugehörige Punkt $\mathfrak{P}$ des Hauptkreises.

Der Beweis für den Fall, daß der Punkt M auf der Hauptaxe selbst liegt, bedarf wohl keiner besonderen Ausführung.

Zusatz. Legt man durch einen Punkt M der Hauptaxe oder deren Verlängerung eine Gerade, welche den Hauptkreis in 2 Punkten schneidet, so schneidet eine durch M und den einen der zugehörigen Ellipsenpunkte gelegte Gerade die Ellipse auch in dem andern zugehörigen Punkte. Beweis analog dem vorigen.

§. 16. Zieht man von irgend einem Punkte T der verlängerten Hauptaxe eine Tangente an den Hauptkreis und legt durch den dem Berührungspunkte $\mathfrak{P}$ zugehörigen Ellipsenpunkt P die Gerade PT, so hat diese mit der Ellipse nur den Punkt P gemein, ist also auch eine Tangente an der Ellipse im Punkte P. (Construction der Tangente in einem gegebenen Punkte der Ellipse mit Hülfe dieses Satzes.) Fig. VII.

Beweis. Schnitte die TP die Ellipse in noch einem Punkte, so müßte nach §. 15. auch die T$\mathfrak{P}$ den Hauptkreis in einem dem zweiten Ellipsenpunkte zugehörigen Punkte treffen, könnte also nicht Tangente sein.

Zusatz. Ist umgekehrt TP eine Tangente an der Ellipse im Punkte P, so ist eine durch den zugehörigen Punkt $\mathfrak{P}$ des Hauptkreises und T gelegte Gerade Tangente am Hauptkreise. Beweis analog dem vorigen.

§. 17. In jedem Punkte der Ellipse ist nur e i n e Tangente an derselben möglich. Fig. VII.

Beweis. Ist PT eine Ellipsentangente, so trifft jede andere durch P gelegte Gerade die Hauptaxe in einem andern Punkte als T, etwa in T_1. Zieht man nun die $\mathfrak{P}T_1$, so schneidet diese den Hauptkreis in zwei Punkten, mithin schneidet auch die PT_1 nach §. 15, Zusatz, die Ellipse in zwei Punkten.

§. 18. Die vom Mittelpunkte der Ellipse parallel zu den beiden einem Punkt P angehörigen Radienvectoren gezogenen Geraden schneiden die im Punkte P an die Ellipse gelegte Tangente in der Peripherie des Hauptkreises. Fig. VII.

Beweis. Da $CQ \parallel F_1P$, so ist
$$CQ : F_1P = CT : F_1T.$$
Nun ist F_1P als Radiusvector $= \frac{a^2 + cx}{a}$ (§. 4.).
$$CT = \frac{C\mathfrak{P}^2}{Cp} = \frac{a^2}{x}, \text{ folglich } F_1T = CT + c = \frac{a^2 + cx}{x}.$$
Substituirt man diese Werthe in obige Proportion, so erhält man
$$CQ : \frac{a^2 + cx}{a} = \frac{a^2}{x} : \frac{a^2 + cx}{x}, \text{ woraus } CQ = a \text{ folgt.}$$
Da ferner $CQ_1 \parallel FP$, so ist
$$CQ_1 : FP = CT : FT \text{ oder}$$
$$CQ_1 : \frac{a^2 - cx}{a} = \frac{a^2}{x} : \frac{a^2 - cx}{x}, \text{ woraus gleichfalls } CQ_1 = a \text{ folgt.}$$

Fig. VII. §. 19. Die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Perpendikel liegen in der Peripherie des Hauptkreises; es sind (cf. §. 18.) die Endpunkte der Radien des Hauptkreises, welche parallel zu den nach dem Berührungspunkte der Tangente gezogenen Radienvectoren sind.

Beweis. Verbindet man F mit Q und verlängert die Gerade bis zum Durchschnitt mit der gleichfalls verlängerten F_1P in S, so ist, weil $CQ \parallel F_1S$ und $CF = CF_1$ ist, $FQ = QS$ und $FS = 2CQ = 2a$, mithin auch $PS = PF$. Die Dreiecke SPQ und FPQ stimmen also in allen Seiten überein und sind daher congruent, mithin ist $\measuredangle FQP = R$. Ebenso wird bewiesen, daß $\measuredangle F_1Q_1P = R$.

Zusatz. Weil $CQ \parallel F_1P$ und $F_1C = CF$, so ist auch $PM = FM$. Da ferner $\measuredangle PQF = R$, so ist auch $MQ = \frac{1}{2} PF = MF$. M ist also Mittelpunkt eines durch P, Q und F gehenden Kreises. Derselbe berührt den Hauptkreis von innen im Punkte Q, da die Centrale $CM = CQ - MQ$, gleich der Differenz der beiden Radien ist.

Construction der Tangente im Punkte P durch Bestimmung des Punktes Q, in welchem sie den Hauptkreis schneidet. Man halbirt den Radiusvector PF in M und zieht den Radius CMQ.

Fig. VII. §. 20. Die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf eine Sehne der Ellipse gefällten Perpendikel liegen innerhalb des Hauptkreises.

Beweis. Man lege durch den Punkt P eine beliebige Sehne; die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf sie gefällten Perpendikel seien R und R_1. Der Punkt R liegt auf der Peripherie des über FP als Durchmeßer construirten Kreises, der nach §. 19. Zusatz, den Hauptkreis im Punkte Q von innen berührt, mithin liegt der Punkt R innerhalb des Hauptkreises. Ebenso wird der Beweis für den Punkt R_1 geführt.

§. 21. Die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf eine beliebige Gerade, welche ganz außerhalb der Ellipse liegt, den Hauptkreis indes immerhin schneiden oder berühren kann, gefällten Perpendikel liegen außerhalb des Hauptkreises.

Beweis. Man denke sich die Gerade parallel mit sich fortgerückt, bis sie die Ellipse berührt, die Richtung der von den Brennpunkten auf sie gefällten Perpendikel bleibt dabei in jeder Lage dieselbe; ihre Fußpunkte aber rücken den Brennpunkten näher und fallen auf die Peripherie des Hauptkreises, wenn die Gerade zur Tangente wird, liegen also außerhalb desselben bei jeder früheren Lage der Geraden.

§. 22. Aus den §§. 20 — 21. ergiebt sich folgender Lehrsatz:

Eine Gerade ist Tangente an der Ellipse, schneidet sie, oder liegt ganz außerhalb derselben, je nachdem die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf sie gefällten Perpendikel auf der Peripherie des Hauptkreises, innerhalb oder außerhalb desselben liegen.

Zusatz. Die Geraden QP, Q_1P_1 in Fig. II., welche bei der im §. 4. angegebenen Constructionsmethode zur Bestimmung von Ellipsenpunkten benutzt wurden, sind mithin zugleich Tangenten der Ellipse in den durch sie bestimmten Punkten.

§. 23. Verbindet man irgend einen Punkt L außerhalb der Ellipse mit einem der Brennpunkte, z. B. mit F, und construirt über LF als Durchmeßer einen Kreis, so schneidet derselbe den Hauptkreis in zwei Punkten O und O_1; die durch L und O, resp. durch L und O_1 gelegten Geraden berühren die Ellipse. Fig. VIII.

Beweis. Die Gerade LF schneide die Ellipse im Punkte P, und M sei die Mitte vom Radiusvector FP. Nun ist nach §. 19, Zusatz, M der Mittelpunkt eines durch P und F gehenden, den Hauptkreis von innen berührenden Kreises; mithin $CM + MF = CM + MQ = a$. Ferner ist $CG + GF > CM + MF$; also $CG > a - GF$, d. h. die Centrale ist größer, als die Differenz der beiden Radien. Da ferner $CG < CF + FG$, so ist CG um so mehr kleiner, als $a + GF$, d. h. die Centrale ist kleiner, als die Summe der beiden Radien; mithin schneiden sich die Kreise. Der zweite Theil der Behauptung ergiebt sich aus §. 22., da die Winkel LOF und LO_1F Rechte sind.

§. 24. Die Tangente halbirt den Nebenwinkel des Winkels, welchen die nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Radienvectoren mit einander bilden; sie bildet also mit den Radienvectoren selbst gleiche Winkel. Fig. VII.

Die Richtigkeit der Behauptung ergiebt sich aus der Congruenz der Dreiecke FPQ und SPQ.

Anmerkung. Nach dem Reflexionsgesetz werden demnach sämmtliche von einem der Brennpunkte ausgehenden Wärmestrahlen (ebenso Licht- und Schallstrahlen) von der Ellipse so reflectirt, daß die reflectirten Strahlen sich im andern Brennpunkte schneiden.

§. 25. Umgekehrt ist jede durch einen Punkt P_1 der Ellipse gelegte Gerade Tt, welche mit den beiden nach diesem Punkte gezogenen Radienvectoren gleiche Winkel bildet oder den Nebenwinkel des von den Radienvectoren gebildeten Winkels halbirt, eine Tangente der Ellipse im Punkte P_1. Fig. VII.

Beweis. Fällt man von F das Perpendikel FQ_2 auf die Gerade Tt und verlängert dasselbe bis zum Durchschnitt mit der gleichfalls verlängerten F_1P_1, so wird $\triangle S_1P_1Q_2 \cong FP_1Q_2$, mithin $S_1P_1 = FP_1$ und $F_1S_1 = 2a$. Auch folgt aus der Congruenz der beiden Dreiecke, daß die Gerade Tt ein Perpendikel auf der FS_1 in ihrer Mitte Q_2 ist, daß mithin jeder Punkt N der Geraden Tt gleiche Abstände von den Punkten F und S_1 hat. Nun ist aber $F_1N + FN > F_1S_1$, d. h. $> 2a$; mithin liegt nach §. 10. der Punkt N außerhalb der Ellipse.

Zusatz. Auf den Lehrsatz dieses Paragraphen stützt sich die einfachste Construction der Tangente, und zwar nicht bloß für den Fall, daß ihr Berührungspunkt, sondern auch, wenn ein außerhalb der Ellipse gelegener Punkt der Tangente gegeben ist. Im letztern Falle handelt es sich um die Bestimmung des Punktes S_1, der mit F_1 verbunden den Berührungspunkt der Tangente giebt. Man erhält den Punkt S_1, wenn man um den gegebenen Punkt N einen Kreis mit seinem Abstande FN von einem Brennpunkte als Radius beschreibt und diesen durch einen zweiten um den andern Brennpunkt F_1 mit dem Radius 2a schneidet.

Fig. VII. §. 26. Das Rechteck aus den von den beiden Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Perpendikeln ist constant, nämlich gleich dem Quadrat der halben kleinen Axe.

Beweis. Nach §. 19. liegen die Fußpunkte der beiden Perpendikel auf der Peripherie des Hauptkreises. Verlängert man das eine Perpendikel F_1Q_1 rückwärts bis zum abermaligen Durchschnitt mit dem Hauptkreise in Q_3, so wird die Verbindungslinie QQ_3, weil $\sphericalangle\, QQ_1Q_3 = R$, ein Durchmeßer des Hauptkreises. Die Dreiecke F_1CQ_3 und FCQ sind congruent, mithin $F_1Q_3 = FQ$. Da nun $F_1Q_3 . F_1Q_1 = A_1F_1 . F_1A = (a-c).(a+c) = a^2 - c^2 = b^2$ ist, so ist auch $FQ . F_1Q_1 = b^2$.

Fig. IX. §. 27. Das Rechteck aus den beiden Abschnitten, welche eine beliebige Tangente auf den Scheiteltangenten abschneidet, von den Scheiteln der Ellipse aus gerechnet, ist constant, nämlich gleich dem Quadrat der halben kleinen Axe.

Beweis. P und $\mathfrak{P}$ seien zwei zugehörige Punkte der Ellipse und des Hauptkreises, TPN und $T\mathfrak{P}\mathfrak{N}$ die beiden Tangenten, welche die Curven in diesen Punkten berühren. Die Scheiteltangenten der Ellipse fallen mit den in den Punkten A und A_1 des Hauptkreises errichteten Tangenten zusammen; sie stehn daher auf der Hauptaxe senkrecht und sind unter einander parallel.

$\sphericalangle\, C\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \frac{1}{2}\, A_1\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ und $\sphericalangle\, C\mathfrak{M}\mathfrak{P} = \frac{1}{2}\, A\mathfrak{M}\mathfrak{P}$; mithin $C\mathfrak{N}\mathfrak{P} + C\mathfrak{M}\mathfrak{P} = \frac{1}{2}(A_1\mathfrak{N}\mathfrak{P} + A\mathfrak{M}\mathfrak{P}) = R$. Das Dreieck $\mathfrak{N}C\mathfrak{M}$ ist daher rechtwinklig und folglich $\mathfrak{M}\mathfrak{P} . \mathfrak{N}\mathfrak{P} = C\mathfrak{P}^2 = a^2$; also auch $A\mathfrak{M} . A_1\mathfrak{N} = a^2$. Da ferner $AM : A\mathfrak{M} = A_1N : A_1\mathfrak{N} = Pp : \mathfrak{P}p = b : a$, so ist $AM = \frac{b}{a} A\mathfrak{M}$ und $A_1N = \frac{b}{a} . A_1\mathfrak{N}$; mithin

$$AM . A_1N = \frac{b}{a} A\mathfrak{M} . \frac{b}{a} A_1\mathfrak{N} = \frac{b^2}{a^2} . a^2 = b^2.$$

Fig. X. §. 28. Zwei sich schneidende Ellipsentangenten bilden mit den beiden Geraden, welche ihren Durchschnittspunkt mit den Brennpunkten verbinden, gleiche Winkel.

Beweis. Man mache $F_1S = FS_1 = 2a$, dann wird auch $DS = DF$ und $DS_1 = DF_1$; mithin sind die Dreiecke SDF_1 und FDS_1 congruent und $\sphericalangle\, SDF_1 = FDS_1$, also auch $\measuredangle$ $SDF_1 - FDF_1 = FDS_1 - FDF_1$ d. h. $\measuredangle$ $SDF = S_1DF_1$; daher auch $\frac{1}{2} SDF = \frac{1}{2} S_1DF_1$ oder $FDP = F_1DP_1$.

§. 29. Der Winkel, den die beiden von den Berührungspunkten zweier sich schneidender Tangenten nach demselben Brennpunkte gezogenen Radienvectoren mit einander bilden, wird durch die von diesem Brennpunkte nach dem Durchschnittspunkte der Tangenten gezogene Gerade halbirt. Fig. X.

Beweis. Aus der Congruenz der Dreiecke SDF_1 und FDS_1 (siehe §. 27.) folgt die Gleichheit der Winkel DSF_1 und DFS_1. Da aber $DFP = DSF_1$, so ist auch $DFP = DFS_1$.

§. 30. Nimmt man zwischen den Berührungspunkten P und P_1 zweier Tangenten einen beliebigen dritten Punkt P_2 auf der Ellipse an und construirt in ihm gleichfalls eine Tangente, so hat der Winkel, den zwei von den Endpunkten dieser dritten, durch die beiden ersten begrenzten, Tangente nach einem Brennpunkte gezogenen Geraden bilden, eine constante Größe, gleich der Hälfte des Winkels, den die von den Berührungspunkten der beiden ersten Tangenten nach demselben Brennpunkte gezogenen Geraden einschließen. Fig. X.

Beweis. Nach dem vorigen Paragraph ist $\measuredangle$ $PFD_1 = D_1FP_2$ und $\measuredangle$ $P_2FD_2 = D_2FP_1$, mithin $\measuredangle$ $D_1FD_2 = PFD_1 + D_2FP$ oder $\measuredangle$ $D_1FD_2 = \frac{1}{2} PFP_1$.

Zusatz. Liegen die Berührungspunkte der beiden sich schneidenden Tangenten so, daß die Verbindungslinie derselben (wie PP_3 in Fig. X.) durch den Brennpunkt geht, so erscheint jede von diesen beiden Tangenten begrenzte dritte Tangente T_1T_2, von diesem Brennpunkte aus gesehn, unter einem rechten Winkel.

§. 31. Legt man durch die Endpunkte eines Ellipsendurchmeßers zwei Tangenten, welche eine beliebige dritte Tangente begrenzen, so ist die Summe der beiden Winkel, deren Scheitelpunkte die Brennpunkte, deren Schenkel die von den Brennpunkten nach den Endpunkten der begrenzten Tangente gezogenen Geraden sind, gleich zwei Rechten. Fig. XI.

Beweis. Nach §. 29. ist $\measuredangle$ $DF_1D_1 = \frac{1}{2} PF_1P_1$ und $\measuredangle$ $DFD_1 = \frac{1}{2} PFP_1$, wobei jedoch unter PFP_1 der erhabene Winkel zu verstehen ist. Mithin ist $DF_1D_1 + DFD_1 = \frac{1}{2} (PF_1P_1 + PFP_1)$. Da aber PP_1 ein Durchmeßer der Ellipse ist, so ist F_1PFP_1 ein Parallelogramm und $\measuredangle$ PF_1P_1 gleich dem hohlen Winkel PFP_1. Der Winkel PF_1P_1 macht daher mit dem erhabenen Winkel PFP_1 vier Rechte aus; mithin ist $DF_1D_1 + DFD_1 = 2$ R.

§. 32. Ein im Berührungspunkte P einer Tangente auf sie errichtetes Perpendikel heißt N o r m a l e im Punkte P. Die Normale halbirt den Winkel, den die nach dem Punkte P gezogenen Radienvectoren mit einander bilden, weil sie senkrecht auf der den Nebenwinkel dieses Winkels halbirenden Tangente steht. Aus der Gleichheit der Winkel FPN und F_1PN folgt die Proportion $FN : F_1N = r : r_1$. Die Strecken FN und F_1N werden deshalb nur dann einander gleich, oder die Normale geht nur dann durch den Fig. XII.

Mittelpunkt C der Ellipse, wenn die beiden Radienvectoren r und r_1 einander gleich sind, d. h. wenn der Berührungspunkt der Tangente ein Endpunkt der kleinen Axe ist, oder wenn die beiden Radienvectoren zusammenfallen, d. h. wenn der Berührungspunkt der Tangente ein Endpunkt der großen Axe ist. Für jeden andern Punkt P schneidet die Normale die Hauptaxe in einem andern Punkte als C und steht schiefwinklig auf derselben.

Um die Entfernung des Punktes N vom Mittelpunkte C der Ellipse zu finden, schreibe man obige Proportion $FN : F_1N = r : r_1$ in folgender Form $c - CN : c + CN = r : r_1$. Hieraus folgt $\frac{2c}{c + CN} = \frac{r + r_1}{r_1}$. Substituirt man in dieser Gleichung für r und r_1 die Werthe aus §. 4., so erhält man $\frac{2c}{c + CN} = \frac{2a}{a + \frac{cx}{a}} = \frac{2a^2}{a^2 + cx}$, woraus $c\,(a^2 + cx) = a^2\,(c + CN)$ oder $c^2x = a^2CN$, also $CN = \frac{c^2x}{a^2}$ folgt. Für alle positiven Werthe von x ist also auch CN positiv, liegt also N zwischen C und F; für negative Werthe von x wird auch CN negativ und N liegt zwischen C und F_1. Wird $x = 0$, so wird auch $CN = 0$, d. h. N fällt für diesen Fall, wie schon oben erwähnt wurde, mit dem Punkte C zusammen.

Fig. XII. §. 33. Die Strecke PT der Tangente von ihrem Berührungspunkte P bis zu ihrem Durchschnitt mit der Hauptaxe in T heißt die begrenzte Tangente oder Tangente im engern Sinne, die Strecke PN der Normale vom Berührungspunkte der zugehörigen Tangente bis zum Durchschnitt der Normale mit der Hauptaxe die begrenzte Normale oder Normale schlechthin; pT, d. h. der Abstand des Durchschnittspunkts der Tangente mit der Hauptaxe von dem Fußpunkte der Ordinate ihres Berührungspunktes die Subtangente, die Strecke Np die Subnormale des Punktes P.

Um die algebraischen Ausdrücke für die Werthe dieser begrenzten Strecken zu erhalten, lege man durch den P zugehörigen Punkt $\mathfrak{P}$ des Hauptkreises die Tangente $\mathfrak{P}T$ und ziehe den Radius $C\mathfrak{P}$. Aus dem bei $\mathfrak{P}$ rechtwinkligen Dreiecke $C\mathfrak{P}T$ folgt $Cp \cdot pT = \mathfrak{P}p^2$, oder $x \cdot pT = \mathfrak{y}^2$; die Subtangente pT ist also $= \frac{\mathfrak{y}^2}{x} = \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{(a + x)\,(a - x)}{x}$; die Subtangente ist demnach die vierte Proportionale zu den Abschnitten, in welche die Ordinate des Berührungspunktes der Tangente die Hauptaxe theilt, und der Abscisse dieses Berührungspunktes.

Construirt man über der Geraden AA_1 als gemeinschaftlicher Axe beliebig viele Ellipsen, und errichtet in irgend einem Punkte dieser Axe ein Perpendikel, welches jene Ellipsen in den Punkten P, P_1 ꝛc. schneidet, so müßen die in diesen Punkten an jene Ellipsen gelegten Tangenten die Verlängerung der gemeinschaftlichen Axe in demselben

Punkte schneiden. Denn da die Subtangente nur von a und x abhängig ist, jene Ellipsen aber die Axe AA_1, und die Punkte P, P_1 2c. die Abscisse Cp gemeinschaftlich haben, so haben auch die diesen Punkten zugehörigen Subtangenten denselben Werth.

Die Subnormale Np ist gleich $x - CN$, oder, da nach dem vorigen Paragraph $CN = \frac{c^2 x}{a^2}$, so ist

$$\text{Subnormale } Np = x - \frac{c^2 x}{a^2} = \frac{(a^2 - c^2)x}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}\, x.$$

$$\text{Die Tangente } PT = \sqrt{Pp^2 + pT^2} = \sqrt{y^2 + \frac{(a^2 - x^2)^2}{x^2}}.$$

Nun ist aber $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, folglich

$$PT = \sqrt{\frac{x^2 \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + (a^2 - x^2)^2}{x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(x^2 \frac{b^2}{a^2} + a^2 - x^2\right)(a^2 - x^2)}{x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^4 + (b^2 - a^2)\, x^2)(a^2 - x^2)}{a^2 x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^4 - c^2 x^2)(a^2 - x^2)}{a^2 x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^4 - c^2 x^2)\, y^2}{b^2 x^2}} \quad \left(\text{da } \frac{a^2 - x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$= \frac{y}{bx}\sqrt{a^4 - c^2 x^2}$$

$$\text{Die Normale } PN = \sqrt{Pp^2 + Np^2}$$

$$= \sqrt{y^2 + \frac{b^4}{a^4} x^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + \frac{b^4}{a^4} . x^2}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2}{a^4}(a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2)}$$

$$= \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - c^2 x^2}.$$

Stellen wir die 4 Formeln übersichtlich zusammen, so haben wir:

1) Sbtg. $pT = \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{(a + x)(a - x)}{x}$.

2) Sbnr. $pN = \frac{b^2}{a^2}\, x$.

3) Tg. $PT = \frac{y}{bx}\sqrt{a^4 - c^2x^2}.$

4) Nr. $PN = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - c^2x^2}.$

Zusatz. Da $CN = \frac{c^2}{a^2}x$ und $Np = \frac{b^2}{a^2}x$, so ist $CN : Np = c^2 : b^2$. Die Normale theilt also die Abscisse nach dem constanten Verhältnis c^2 zu b^2.

Fig. XII. §. 34. Verlängert man die Tangente und Normale im Punkte P bis zum Durchschnitt mit der kleinen Axe oder deren Verlängerung in t und n und fällt von P das Perpendikel Pm auf die kleine Axe, so heißt mt die Subtangente, mn die Subnormale, Pt die Tangente und Pn die Normale des Punktes P in Beziehung auf die kleine Axe der Ellipse.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke tmP und PpT ergiebt sich die Proportion

$$mt : mP = Pp : pT.$$

Nun ist aber $mP = Cp$ die Abscisse, Pp die Ordinate des Punktes P und pT, als Subtangente in Beziehung auf die Hauptaxe, nach dem vorigen Paragraph gleich $\frac{a^2 - x^2}{x}$, folglich $mt = \frac{yx^2}{a^2 - x^2}$. Es ist ferner $a^2 - x^2 = \frac{a^2}{b^2}y^2$ und $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$. Durch Substitution dieser Werthe erhält man

1) Sbtg. $mt = \frac{b^2 - y^2}{y} = \frac{(b+y)(b-y)}{y}.$

Aus dem bei P rechtwinkligen Dreiecke tPn folgt $mn = \frac{Pm^2}{mt}$ oder mit Rücksicht auf 1)

$$mn = \frac{x^2 \cdot y}{b^2 - y^2} = \frac{\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) \cdot y}{b^2 - y^2} = \frac{a^2}{b^2}y$$

Es ist also

2) Sbnr. $mn = \frac{a^2}{b^2}y.$

In dem rechtwinkligen Dreiecke tmP ist

$Pt = \sqrt{mt^2 + Pm^2}$ oder mit Rücksicht auf 1)

$$Pt = \sqrt{\frac{(b^2 - y^2)^2}{y^2} + x^2} = \sqrt{\frac{(b^2 - y^2)^2 + y^2\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)}{y^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{\left(b^2 - y^2 + y^2\frac{a^2}{b^2}\right)(b^2 - y2)}{y^2}} = \sqrt{\frac{(b^4 - b^2y^2 + a^2y^2)(b^2 - y^2)}{b^2y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b^4 + c^2y^2)x^2}{a^2y^2}} \quad \left(\text{da } \frac{b^2 - y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Es ist mithin

3) Tg. $Pt = \frac{x}{ay}\sqrt{b^4 + c^2y^2}$

In dem rechtwinkligen Dreiecke nmP ist

$Pn = \sqrt{mn^2 + Pm^2}$ oder mit Rücksicht auf 2)

$$Pn = \sqrt{\frac{a^4}{b^4}y^2 + x^2} = \sqrt{\frac{a^4}{b^4}y^2 + \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)}$$

$= \sqrt{\frac{a^2}{b^4}(b^4 + a^2y^2 - b^2y^2)}$. Es ist mithin

5) Nr. $Pt = \frac{a}{b^2}\sqrt{b^4 + c^2y^2}$

Zusatz. Die Entfernung des Punktes T, in welchem die im Punkte P an die Ellipse gelegte Tangente die verlängerte Hauptaxe schneidet, vom Mittelpunkte C ist gleich $Cp + pT = x + \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2}{x}$; der Abstand des Punktes t, in welchem diese Tangente die verlängerte kleine Axe schneidet, vom Mittelpunkte C der Ellipse ist $Cm + mt = y + \frac{b^2 - y^2}{y} = \frac{b^2}{y}$.

Anmerkung. Zur Unterscheidung sind in den Paragraphen 33. und 34. die abgekürzten Bezeichnungen für Subtangente, Subnormale ꝛc., wenn diese Geraden auf die Hauptaxe bezogen sind, mit lateinischen Buchstaben (Sbtg., Sbnr. ꝛc.), wenn sie auf die kleine Axe bezogen sind, mit deutschen Buchstaben (Sbtg., Sbnr. ꝛc.) bezeichnet. Diese Bezeichnung soll auch im Folgenden beibehalten werden.

§. 35. Das Quadrat einer beliebigen Ellipsenordinate steht zu dem Rechteck, gebildet aus den Abschnitten, in welche ihr Fußpunkt die Hauptaxe theilt, in einem constanten Verhältnis, nämlich in dem Verhältnis des Quadrats der halben kleinen Axe zum Quadrat der halben großen Axe.

Ergiebt sich unmittelbar aus der in §. 6, 1) gegebenen Relation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

§. 36. Die Quadrate zweier beliebiger Ellipsenordinaten verhalten sich wie die Rechtecke aus den zugehörigen Abschnitten der Hauptaxe.

Beweis. Sind y und y_1 die beiden Ordinaten und x und x_1 die zugehörigen Abscissen, so ist nach dem vorigen Paragraph $\frac{y^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{b^2}{a^2}$ und $\frac{y_1^2}{(a+x_1)(a-x_1)} = \frac{b^2}{a^2}$, mithin

$$\frac{y^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{y_1^2}{(a+x_1)(a-x_1)} \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{y_1^2} = \frac{(a+x)(a-x)}{(a+x_1)(a-x_1)}.$$

§. 37. Fällt man von irgend einem Punkte der Ellipse ein Perpendikel auf die kleine Axe, so steht das Quadrat dieses Perpendikels zu dem Rechteck, gebildet aus den Abschnitten, in welche sein Fußpunkt die kleine Axe theilt, in einem constanten Verhältnis, nämlich in dem Verhältnis des Quadrats der halben großen Axe zum Quadrat der halben kleinen Axe.

Beweis. Das Perpendikel ist gleich der Abscisse des Punktes P, aus dem es gefällt wird; die Abschnitte, in welche sein Fußpunkt die kleine Axe theilt, sind gleich der Summe und Differenz aus der halben kleinen Axe und der Ordinate des Punktes P. Nun ist $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$, mithin $\frac{x^2}{b^2 - y^2} = \frac{x^2}{(b+y)(b-y)} = \frac{a^2}{b^2}$.

§. 38. Fällt man von zwei beliebigen Punkten der Ellipse Perpendikel auf die kleine Axe, so verhalten sich die Quadrate derselben wie die Rechtecke aus den Abschnitten, in welche ihre Fußpunkte die kleine Axe theilen.

Beweis. Die Perpendikel sind gleich den Abscissen der Punkte, aus denen sie gefällt werden; die Abschnitte, in welche ihre Fußpunkte die kleine Axe theilen, sind gleich den Summen und Differenzen aus der halben kleinen Axe und den den Punkten zugehörigen Ordinaten. Nun ist nach dem vorigen Paragraph $\frac{x^2}{(b+y)(b-y)} = \frac{a^2}{b^2}$ und

$$\frac{x_1^2}{(b+y_1)(b-y_1)} = \frac{a^2}{b^2}, \text{ folglich } \frac{x^2}{(b+y)(b-y)} = \frac{x_1^2}{(b+y_1)(b-y_1)} \text{ oder}$$

$$\frac{x^2}{x_1^2} = \frac{(b+y)(b-y)}{(b+y_1)(b-y_1)}.$$

Fig. XIII. §. 39. Die in den Endpunkten eines Durchmeßers gezogenen Tangenten sind parallel.

Beweis. Aus der Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke $C\mathfrak{P}T$ und $C\mathfrak{P}_1T_1$ folgt $CT = CT_1$; da ferner $Cp = Cp_1$, so ist auch $pT = p_1T_1$. Die rechtwinkligen Dreiecke PpT und $P_1p_1T_1$ stimmen außerdem in den Seiten Pp und P_1p_1 überein; sie sind mithin congruent, und folglich sind die Winkel PTp und $P_1T_1p_1$ gleich, die Tangenten PT und P_1T_1 also parallel.

Fig. XIII. §. 40. Zieht man parallel zu den an den Endpunkten eines Ellipsendurchmeßers errichteten Tangenten einen zweiten Durchmeßer, so stehn 1) die zugehörigen Kreisdurchmeßer senkrecht auf einander, und 2) sind die durch die Endpunkte des zweiten Durchmeßers gelegten Tangenten parallel dem ersten Durchmeßer.

Beweis. ad 1) Da $RC \parallel PT$, so sind die Winkel RCr und PTp gleich, die rechtwinkligen Dreiecke RrC und PpT also ähnlich. Mithin verhält sich $Rr : Pp = rC : pT$, also auch $\frac{a}{b} . Rr : \frac{a}{b} . Pp = rC : pT$, d. h. $\mathfrak{R}r : \mathfrak{P}p = rC : pT$. Aus dieser Proportion folgt die Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $\mathfrak{R}rC$ und $\mathfrak{P}pT$ und daraus die Gleichheit der Winkel $\mathfrak{R}Cr$ und $\mathfrak{P}Tp$; mithin ist $\mathfrak{R}C \parallel \mathfrak{P}T$. Da nun $\mathfrak{P}T$ als Tangente am Hauptkreise auf dem durch den Berührungspunkt $\mathfrak{P}$ gelegten Radius $C\mathfrak{P}$

senkrecht steht, so ist auch $\mathfrak{R}C$ ein Perpendikel auf dem Radius $C\mathfrak{P}$. ad 2) Da $\mathfrak{R}C$ senkrecht auf $\mathfrak{P}C$ steht, so ist die durch den Punkt $\mathfrak{R}$ gelegte Kreistangente parallel $\mathfrak{P}C$, mithin $\measuredangle\ \mathfrak{R}Sr = \measuredangle\ \mathfrak{P}Cp$. Die rechtwinkligen Dreiecke $\mathfrak{R}rS$ und $\mathfrak{P}pC$ sind daher ähnlich, und es verhält sich $\mathfrak{R}r : \mathfrak{P}p = rS : pC$, also auch $\frac{b}{a}\,\mathfrak{R}r : \frac{b}{a}\,\mathfrak{P}p = rS : pC$, d. h. $Rr : Pp = rS : pC$. Aus dieser Proportion folgt die Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke RrS und PpC und daraus die Gleichheit der Winkel RSr und PCp und der Parallelismus von RS und PC.

Zusatz 1. Liegen zwei Punkte auf der Peripherie des Hauptkreises so, daß die durch sie gelegten Durchmeßer senkrecht auf einander stehn, so ist jeder von den durch die zugehörigen Ellipsenpunkte gelegten Ellipsendurchmeßern parallel zu den an den Endpunkten des andern Durchmeßers errichteten Tangenten.

Zusatz 2. Da man durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nur eine einzige Gerade parallel zur gegebenen Geraden ziehen kann, die Tangenten in den Endpunkten eines zweiten Ellipsendurchmeßers, der parallel zu den in den Endpunkten eines ersten Durchmeßers errichteten Tangenten gezogen wurde, aber dem ersten Durchmeßer parallel sind, so läßt sich auch umgekehrt behaupten, daß die in den Endpunkten des zweiten Durchmeßers parallel zum ersten gezogenen Geraden Tangenten der Ellipse werden.

§. 41. Die Gerade, welche die Berührungspunkte zweier paralleler Ellipsentangenten verbindet, ist ein Durchmeßer der Ellipse. (Umkehrung des Lehrsatzes in §. 39.) Fig. XIII.

Beweis. Sind PT und P_1T_1 parallel, so sind die Winkel PTp und $P_1T_1p_1$ gleich, die rechtwinkligen Dreiecke PpT $P_1p_1T_1$ also ähnlich. Es verhält sich daher $Pp : P_1p_1 = pT : p_1T_1$, also auch $\frac{a}{b}\,Pp : \frac{a}{b}\,P_1p_1 = pT : p_1T_1$, d. h. $\mathfrak{P}p : \mathfrak{P}_1p_1 = pT : p_1T_1$. Aus dieser Proportion folgt die Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $\mathfrak{P}pT$ und $\mathfrak{P}_1p_1T_1$ und daraus die Gleichheit der Winkel $\mathfrak{P}Tp$ und $\mathfrak{P}_1T_1p_1$ und der Parallelismus der Tangenten $\mathfrak{P}T$ und $\mathfrak{P}_1T_1$. Fielen nun die durch die Berührungspunkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ derselben gelegten Radien $C\mathfrak{P}$ und $C\mathfrak{P}_1$ nicht in eine Gerade, so müßten die Kreistangenten $\mathfrak{P}T$ und $\mathfrak{P}_1T_1$ als Senkrechte auf den Schenkeln eines nicht gestreckten Winkels sich schneiden. Da die Tangenten aber parallel sind, so müßen die Radien einen gestreckten Winkel bilden, $\mathfrak{P}C\mathfrak{P}_1$ ist also ein Durchmeßer des Hauptkreises. Nach §. 14. schneidet aber die Verbindungslinie zweier Ellipsenpunkte P und P_1 die Hauptaxe in demselben Punkte, in welchem die Verbindungslinie der zugehörigen Punkte des Hauptkreises die Hauptaxe schneidet; mithin geht auch die Gerade PP_1 durch den Punkt C, ist also ein Durchmeßer der Ellipse.

§. 42. Zwei Ellipsendurchmeßer, von denen jeder parallel den durch die Endpunkte des andern gelegten Tangenten ist, heißen conjugirt. Da es unendlich viele Paare senkrecht auf einander stehender Kreisdurchmeßer giebt, und zu jedem Paar derselben nach §. 40. Zusatz 1) ein Paar von Ellipsendurchmeßern gehört, welche die angegebene Eigen=

schaft conjugirter Diameter besitzen, so giebt es in jeder Ellipse auch unendlich viele Paare conjugirter Diameter.

Der Winkel, unter welchem sich zwei conjugirte Durchmeßer schneiden, und zwar, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, derjenige, zwischen dessen Schenkeln die Hauptaxe liegt, heißt der Conjugationswinkel. Der Winkel CPT, welchen ein Ellipsendurchmeßer mit einer durch seinen Endpunkt gelegten Tangente bildet, ist im Allgemeinen größer als der Winkel C𝔓T, den der zugehörige Kreisdurchmeßer mit einer durch seinen Endpunkt gelegten Kreistangente bildet, also stumpf; nur wenn der Ellipsendurchmeßer eine der beiden Hauptaxen ist, steht er senkrecht auf den durch seine Endpunkte gelegten Tangenten, weil bei der großen Axe Kreis- und Ellipsentangente zusammenfallen, bei der kleinen Axe aber parallel sind. Die große und kleine Axe sind daher das einzige Paar conjugirter Durchmeßer, welche senkrecht auf einander stehn; für alle andern Paare conjugirter Durchmeßer ist der Conjugationswinkel als Supplement des stumpfen Winkels CPT ein spitzer Winkel.

Fig. XIII. §. 43. Zwischen den Abscissen und Ordinaten der Endpunkte zweier conjugirter Halbdurchmeßer bestehn folgende Beziehungen:

1) Die Summe der Quadrate der Abscissen ist gleich dem Quadrat der halben großen Axe.

Beweis. Da die Radien C𝔓 und C𝔑 senkrecht auf einander stehn, so sind die Winkel 𝔓Cp und 𝔑Cr einander gleich, die Dreiecke 𝔓Cp und 𝔑Cr also congruent, und $Cp = \mathfrak{R}r$. Da nun $\mathfrak{R}r^2 + Cr^2 = \mathfrak{R}C^2 = a^2$, so ist auch $Cp^2 + Cr^2 = a^2$.

2) Die Summe der Quadrate der Ordinaten ist gleich dem Quadrat der halben kleinen Axe.

Beweis. $\mathfrak{P}p = Cr$, folglich $Pp = \frac{b}{a} Cr$; ferner $Rr = \frac{b}{a} \mathfrak{R}r$, folglich $Pp^2 + Rr^2$ $= \left(\frac{b}{a} Cr\right)^2 + \left(\frac{b}{a} Rr\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(Cr^2 + \mathfrak{R}r^2\right) = b^2$.

3) Die Ordinate vom Endpunkte des einen Durchmeßers steht zu der dem Endpunkte seines conjugirten Durchmeßers zugehörigen Abscisse in dem constanten Verhältnis der halben kleinen zur halben großen Axe.

Beweis. $\mathfrak{P}p = Cr$; daher $Pp : Cr = Pp : \mathfrak{P}p = b : a$.

4) Das Rechteck aus den Coordinaten des einen Endpunkts ist gleich dem Rechteck aus den Coordinaten des andern Endpunkts.

Beweis. Nach 3) ist $Pp : Cr = b : a$ und ebenso $Rr : Cp = b : a$, mithin $Pp : Cr = Rr : Cp$, aus welcher Proportion sich sofort die Gleichung $Pp \,.\, Cp = Rr \,.\, Cr$ ergiebt.

Bezeichnet man die beiden conjugirten Halbdurchmeßer mit α und β, die Coordinaten ihrer Endpunkte mit x_1 und y_1, x_2 und y_2, so ist also

1) $x_1^2 + x_2^2 = a^2$.

2) $y_1^2 + y_2^2 = b^2$.

3) $y_1 = \frac{b}{a} x_2$.

$y_2 = \frac{b}{a} x_1$

4) $x_1 y_1 = x_2 y_2$.

Zusatz 1. Mittelst der unter 3) gegebenen Relation kann man leicht zu einem beliebigen Durchmeßer den zugehörigen conjugirten durch die Coordinaten seines Endpunkts finden.

Zusatz 2. Aus 4) folgt, daß auch die Dreiecke PpC und RrC als Hälften gleicher Rechtecke gleichen Flächeninhalt haben. Daher müßen ferner auch die Dreiecke PPC und RRC von gleichem Flächeninhalt sein.

§. 44. Die Summe der Quadrate zweier conjugirter Halbdurchmeßer ist constant, nämlich gleich der Summe der Quadrate der halben großen und kleinen Axe.

Beweis. $\alpha^2 = x_1^2 + y_1^2$ und $\beta^2 = x_2^2 + y_2^2$; mithin $\alpha^2 + \beta^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$. Nun ist nach dem vorigen Paragraph $x_1^2 + x_2^2 = a^2$, $y_1^2 + y_2^2 = b^2$, mithin $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$.

Zusatz. Da nach §. 13 $\alpha^2 = b^2 + \frac{c^2}{a^2} x_1^2$ ist,

so ist $\beta^2 = a^2 + b^2 - \alpha^2 = a^2 - \frac{c^2}{a^2} x_1^2$.

§. 45. Der Flächeninhalt des um die Ellipse beschriebenen Parallelogramms, welches die durch die Endpunkte zweier conjugirter Durchmeßer gelegten Tangenten bilden, ist constant, nämlich gleich dem Rechteck aus der großen und kleinen Axe. Fig. XIII.

Beweis. Die conjugirten Durchmeßer theilen das Parallelogramm EFGH in vier congruente Parallelogramme; es kommt deshalb nur darauf an, den Flächeninhalt eines derselben RFPC zu bestimmen. Theilt man dasselbe durch die Diagonale RP in zwei congruente Dreiecke, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks RCP gleich der Differenz aus dem Paralleltrapez RPpr und der Summe der Dreiecke PpC und RrC.

Nun ist der Flächeninhalt des Trapezes $= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$

oder mit Rücksicht auf §. 43, 3) $= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\left(\frac{b}{a} x_2 + \frac{b}{a} x_1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}(x_1 + x_2)^2 =$

$\frac{1}{2} \frac{b}{a}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{b}{a} x_1 x_2$.

Ferner ist nach §. 43, Zusatz 2. Dreieck RrC + PpC = 2 PpC $= x_1 y_1 = \frac{b}{a} x_1 x_2$.

Durch Subtraction erhält man $\triangle$ RCP $= \frac{1}{2} \frac{b}{a}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{b}{a} x_1 x_2 - \frac{b}{a} x_1 x_2 =$

$\frac{1}{2} \frac{b}{a}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}$ ab. Mithin ist das Parallelogramm RFPC = ab, das Parallelogramm EFGH also gleich 4 ab, gleich dem Rechteck aus der großen und kleinen Axe.

Zusatz. Aus dem Beweise ergiebt sich, daß das Dreieck, welches zwei conjugirte Halbdurchmeßer mit der durch ihre Endpunkte gelegten Sehne bilden, einen constanten Inhalt $= \frac{1}{2}$ ab hat.

§. 46. Bezeichnet man den Conjugationswinkel mit φ, so kann man den Flächeninhalt des Parallelogramms RFPC durch $\alpha\beta \sin\varphi$ ausdrücken. Es ist mithin $\alpha\beta \sin\varphi = ab$ und $\sin\varphi = \frac{ab}{\alpha\beta}$. Das Produkt ab ist constant; $\sin\varphi$, mithin auch der Conjugationswinkel φ selbst, wird daher ein Minimum, wenn das Produkt $\alpha\beta$ ein Maximum und umgekehrt ein Maximum, wenn das Produkt $\alpha\beta$ ein Minimum wird. Der erste Fall tritt ein, wenn $\alpha = \beta$, d. h. wenn die beiden conjugirten Durchmeßer einander gleich sind. Denn da die Summe der Quadrate zweier conjugirter Halbdurchmeßer der constanten Größe $a^2 + b^2$ gleich ist, so kann man α und β als die veränderlichen Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit constanter Hypotenuse, deren Größe gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$, gleich der Verbindungslinie zweier Endpunkte der großen und kleinen Axe
Fig. XIV. ist, darstellen. Construirt man deshalb über AB als Durchmeßer einen Halbkreis (Fig. XIV), so ist für jeden Punkt in der Peripherie desselben die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von A und B $= AB^2 = a^2 + b^2$. Da jedoch die Größe eines Halbdurchmeßers der Ellipse zwischen den Grenzwerthen a und b liegen muß, so können hier nur solche Punkte der Peripherie in Betracht kommen, welche auf dem Bogen CGD liegen, welcher von einer durch C parallel zum Durchmeßer AB gezogenen Sehne CD begrenzt wird. Bezeichnet man die von A nach irgend einem Punkte dieses Bogens gezogene Sehne mit α, die von B nach demselben gezogene Sehne mit β, so sind die aus den veränderlichen Größen α und β gebildeten Rechtecke proportional den rechtwinkligen Dreiecken, welche diese Größen zu Katheten haben. Fällt die Spitze eines solchen Dreiecks in den Punkt D oder C, d. h. ist $\alpha = b$ oder $= a$, so ist der Inhalt des Dreiecks, mithin auch das Produkt $\alpha\beta$ ein Minimum. Das veränderliche Dreieck (mithin auch das Produkt $\alpha\beta$) erreicht aber ein Maximum, wenn seine Spitze in den Punkt G, welcher den Halbkreis halbirt, fällt, d. h. wenn seine Katheten α und β gleich werden. Um für diesen Fall die Größe des Halbmessers zu bestimmen, braucht man nur in der Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$ die Größen α und β gleich zu setzen, wodurch sich $\alpha^2 = \beta^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$ ergiebt.

Die Grenzwerthe des Conjugationswinkels φ werden mithin durch die beiden Gleichungen

$$\sin\varphi = \frac{ab}{ab} \text{ und } \sin\varphi = \frac{2\,ab}{a^2 + b^2} \text{ bestimmt.}$$

Im ersten Falle, in welchem die große und kleine Axe das Paar conjugirter Diameter bilden, ist $\sin\varphi = 1$, mithin $\varphi = 90^0$. Um im zweiten Falle das Minimum des Conjugationswinkels durch eine einfachere Relation zu bestimmen, beachte man, daß wegen der Gleichheit der conjugirten Durchmeßer auch die Coordinaten ihrer Endpunkte

einander gleich sein müßen, und daß aus diesem Grunde der Conjugationswinkel durch die große Axe halbirt wird. Nun ist, wenn x und y die Coordinaten eines Endpunkts von einem der conjugirten Durchmeßer bezeichnen, mit Rücksicht auf den Zusatz zu §. 44. $b^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 = a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2$, woraus sich $x^2 = \frac{a^2}{2}$ ergiebt. Halbirt man den von den Halbaxen a und b gebildeten rechten Winkel durch einen Radius des Hauptkreises, so werden die Coordinaten seines Endpunkts x_1 und $\mathfrak{y}_1$ einander gleich, mithin
$x_1^2 = \frac{b^2}{2}$ und $x = x_1$. Ferner ist $y = \frac{b}{a}\mathfrak{y}_1 = \frac{b}{a}x_1 = \frac{b}{a}x$; mithin
$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 = \frac{b^2}{2}$, also $\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2}$ und $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.

Nun ist $\frac{y}{x}$ die Tangente des halben Conjugationswinkels; mithin $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\varphi = \frac{b}{a}$. Errichtet man daher in den Endpunkten der großen Axe Perpendikel auf dieselbe und trägt auf ihnen von den Scheiteln aus nach beiden Seiten Strecken von der Größe der halben kleinen Axe ab, so bilden die verlängert durch die Endpunkte dieser Strecken gehenden Durchmeßer der Ellipse dasjenige Paar conjugirter Diameter, welches den kleinsten Conjugationswinkel einschließt.

§. 47. Das vom Mittelpunkt der Ellipse auf eine Tangente gefällte Perpendikel verhält sich zur halben großen Axe, wie die halbe kleine Axe zu demjenigen Halbdurchmeßer der Ellipse, welcher dem durch den Berührungspunkt der Tangente gelegten Halbdurchmeßer conjugirt ist. Fig. XIII.

Beweis. Das Perpendikel CL ist gleich $CP.\sin LPC = \alpha \sin\varphi = \alpha\,.\,\frac{ab}{\alpha\beta} = \frac{ab}{\beta}$.

§. 48. Sind α und β zwei conjugirte Halbdurchmeßer, y und x die Coordinaten des Endpunkts von α, Tg und $\mathfrak{T}$g die begrenzten Tangenten in Beziehung auf die große und kleine Axe, Nr und $\mathfrak{N}$r die zugehörigen Normalen, so ist

1) $\mathrm{Tg.} = \frac{ay}{bx}\beta$. 2) $\mathfrak{T}\mathrm{g.} = \frac{bx}{ay}\beta$.

3) $\mathrm{Nr.} = \frac{b}{a}\beta$. 4) $\mathfrak{N}\mathrm{r.} = \frac{a}{b}\beta$.

Beweis. ad 1). Nach §. 33. ist $\mathrm{Tg} = \frac{y}{bx}\sqrt{a^4 - c^2x^2}$, mithin $\mathrm{Tg}^2 = \frac{y^2}{b^2x^2}(a^4 - c^2x^2) = \frac{a^2y^2}{b^2x^2}\left(a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2\right)$.

Nun ist nach §. 44, Zusatz, der in Klammern stehende Ausdruck $= \beta^2$, mithin $\mathrm{Tg.}^2 = \frac{a^2y^2}{b^2x^2}\beta^2$, also $\mathrm{Tg.} = \frac{ay}{bx}\beta$. ad 2). Nach §. 34 ist $\mathfrak{T}\mathrm{g.} = \frac{x}{ay}\sqrt{b^4 + c^2y^2}$, mithin $\mathfrak{Tg}.^2 = \frac{x^2}{a^2y^2}(b^4 + c^2y^2) = \frac{x^2}{a^2y^2}\left(b^4 + c^2\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\right) = \frac{x^2}{a^2y^2}\left(b^4 + c^2b^2 - \frac{c^2b^2}{a^2}x^2\right) = \frac{b^2x^2}{a^2y^2}\left(a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2\right) = \frac{b^2x^2}{a^2y^2}\beta^2$; mithin $\mathfrak{Tg}. = \frac{bx}{ay}\beta$.

ad 3). Nach §. 33. ist $\mathrm{Nr}. = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - c^2x^2}$, mithin $\mathrm{Nr}.^2 = \frac{b^2}{a^4}(a^4 - c^2x^2) = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2\right) = \frac{b^2}{a^2}\beta^2$, also $\mathrm{Nr}. = \frac{b}{a}\beta$. ad 4). Nach §. 34. ist $\mathfrak{Nr}. = \frac{a}{b^2}\sqrt{b^4 + c^2y^2}$, mithin $\mathfrak{Nr}.^2 = \frac{a^2}{b^4}(b^4 + c^2y^2) = \frac{a^2}{b^4}\left(b^4 + c^2\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\right) = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 + \frac{c^2}{a^2}(a^2 - x^2)\right) = \frac{a^2}{b^2}\left(a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2\right) = \frac{a^2}{b^2}\beta^2$, mithin ist $\mathfrak{Nr}. = \frac{a}{b}\beta$.

Zusatz. Sind die beiden conjugirten Halbdurchmeßer α und β gleich, so ist $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, mithin $\mathrm{Tg} = \beta$ und $\mathfrak{Tg} = \beta$.

§. 49. Das Rechteck aus den Abschnitten einer beliebigen Tangente, vom Berührungspunkte bis zum Durchschnitt mit der großen und kleinen Axe, d. h. also das Rechteck aus den beiden begrenzten Tangenten ist gleich dem Quadrat desjenigen Halbdurchmeßers, welcher dem durch den Berührungspunkt gelegten Halbdurchmeßer conjugirt ist.

Beweis. Nach dem vorigen Paragraph ist $\mathrm{Tg} . \mathfrak{Tg} = \frac{ay}{bx}\beta . \frac{bx}{ay}\beta = \beta^2$.

§. 50. Das Rechteck aus den beiden begrenzten Normalen eines Punktes ist gleich dem Quadrat desjenigen Halbdurchmeßers, welcher dem durch den Punkt gelegten Halbdurchmeßer conjugirt ist.

Beweis. Nach dem §. 48. ist $\mathrm{Nr} . \mathfrak{Nr} = \frac{b}{a}\beta . \frac{a}{b}\beta = \beta^2$.

§. 51. Das Rechteck aus der zu einer Tangente gehörigen Normale zur Hauptaxe und dem von dem Mittelpunkte der Ellipse auf die Tangente gefällten Perpendikel ist constant, nämlich gleich dem Quadrat der halben kleinen Axe.

Beweis. Nach §. 47. ist die Länge des Perpendikels $\mathrm{CL} = \frac{ab}{\beta}$, nach §. 48. die Größe der Normale $\mathrm{Nr} = \frac{b}{a}\beta$, mithin $\mathrm{CL} . \mathrm{Nr} = \frac{ab}{\beta} . \frac{b}{a}\beta = b^2$.

Fig. XV. §. 52. Nimmt man von den beiden conjugirten Durchmeßern H_1H und K_1K den erstern zur Absciſſenaxe, den zweiten zur Ordinatenaxe, so ist eine durch den Punkt P der Ellipse parallel zum Halbdurchmeßer CK gezogene und bis zum Durchschnitt mit dem jenem conjugirten Halbdurchmeßer CH verlängerte Gerade $P\pi$ die Ordinate, der Abstand ihres Fußpunktes vom Mittelpunkte der Ellipse $C\pi$ die Absciſſe des Punktes P in Bezug auf das zu Grunde gelegte schiefwinklige Coordinatensystem der beiden conjugirten Durchmeßer.

Die Ordinate eines Punktes P in Bezug auf dieses System möge mit v, seine Abscisse mit ξ bezeichnet werden.

§. 53. Fällt man von den Endpunkten der Ordinate die Perpendikel Pp und πs auf die große Axe A_1A und verlängert ersteres rückwärts bis zum Durchschnitt mit dem Hauptkreise, letzteres ebenso bis zum Durchschnitt mit dem zu CH gehörigen Radius des Hauptkreises in r, so trifft eine durch den Punkt r und denjenigen Punkt m der Hauptaxe, in welchem diese von der Ordinate v geschnitten wird, gelegte Gerade das rückwärts verlängerte Perpendikel Pp im Punkte $\mathfrak{P}$, in der Peripherie des Hauptkreises und steht auf dem Radius C$\mathfrak{H}$ senkrecht. Fig. XV.

Beweis. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Ppm und πsm folgt Pp : πs = mp : ms. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathfrak{P}$pm und rsm folgt ferner $\mathfrak{P}$p : rs = mp : ms. Aus der Vergleichung dieser beiden Proportionen ergiebt sich $\mathfrak{P}$p : Pp = rs : πs. Nun verhält sich aber rs : πs = $\mathfrak{H}$h : Hh = a : b, mithin auch $\mathfrak{P}$p : Pp = a : b, also ist der Punkt $\mathfrak{P}$, in welchem die durch r und m gelegte Gerade die rückwärts verlängerte Pp schneidet, ein Punkt des Hauptkreises. Ferner sind die Dreiecke Ppm und KkC ähnlich, weil sie außer in den rechten Winkeln wegen des Parallelismus der Geraden Pm und KC auch in den Winkeln Pmp und KCk übereinstimmen, ähnlich; daher ist Pp : Kk = pm : kC; mithin auch $\frac{a}{b}$Pp : $\frac{a}{b}$Kk = pm : kC, d. h. $\mathfrak{P}$p : $\mathfrak{K}$k = pm : pC. Daher sind auch die rechtwinkligen Dreiecke $\mathfrak{P}$pm und $\mathfrak{K}$kC ähnlich, $\sphericalangle$ $\mathfrak{P}$mp also = $\sphericalangle$ $\mathfrak{K}$Ck und deshalb $\mathfrak{P}$m || $\mathfrak{K}$C. Da nun $\mathfrak{K}$C senkrecht auf C$\mathfrak{H}$ steht, so ist auch $\mathfrak{P}$r ein Perpendikel auf diesem Radius.

§. 54. Wie bei dem rechtwinkligen Coordinatensystem der großen und kleinen Axe, so steht auch bei dem schiefwinkligen eines beliebigen Paars conjugirter Durchmeßer das Quadrat der Ordinate eines Punktes zu dem Rechteck aus den beiden Abschnitten, in welche ihr Fußpunkt den Durchmeßer theilt, welcher zur Abscissenaxe genommen wurde, in einem constanten Verhältnis, nämlich in dem Verhältnis der Quadrate der beiden conjugirten Halbdurchmeßer. Es ist $\frac{v^2}{(\alpha - \xi)(\alpha + \xi)} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ oder $v^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - \xi^2)$. Fig. XV.

Beweis. Es ist wegen der Aehnlichkeit der betreffenden Dreiecke πm : rm = Pm : $\mathfrak{P}$m = KC : $\mathfrak{K}$C, mithin $\frac{\pi m + Pm}{rm + \mathfrak{P}m} = \frac{KC}{\mathfrak{K}C}$ d. h. $\frac{v}{\mathfrak{P}r} = \frac{\beta}{a}$, mithin auch $\frac{v^2}{\mathfrak{P}r^2} = \frac{\beta^2}{a^2}$, oder 1) $v^2 = \beta^2 \frac{\mathfrak{P}r^2}{a^2}$. Ferner ist CH : C$\pi$ = C$\mathfrak{H}$: Cr, woraus die Richtigkeit der beiden Gleichungen $\frac{CH + C\pi}{C\pi} = \frac{C\mathfrak{H} + Cr}{Cr}$ und $\frac{CH - C\pi}{C\pi} = \frac{C\mathfrak{H} - Cr}{Cr}$ folgt. Durch Multiplication derselben erhält man $\frac{CH^2 - C\pi^2}{C\pi^2} = \frac{(C\mathfrak{H} + Cr)(C\mathfrak{H} - Cr)}{Cr^2}$

$= \frac{\mathfrak{H}_1 r \,.\, \mathfrak{H}r}{Cr^2} = \frac{\mathfrak{P}r^2}{Cr^2}$ (weil $\mathfrak{P}r$ nach dem vorigen Paragraph ein Perpendikel auf dem Kreisdurchmeßer $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}$ ist) und hieraus $\mathfrak{P}r^2 = (CH^2 - C\pi^2)\frac{Cr^2}{C\pi^2} = (CH^2 - C\pi^2)\frac{C\mathfrak{H}^2}{CH^2}$, da $\frac{Cr}{C\pi} = \frac{C\mathfrak{H}}{CH}$. Nun ist $CH = \alpha$, $C\pi = \xi$, $C\mathfrak{H} = a$, mithin $\mathfrak{P}r^2 = (\alpha^2 - \xi^2)\frac{a^2}{\alpha^2}$. Durch Substitution dieses Werthes in die Gleichung 1) erhält man $v^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - \xi^2)$.

Zusatz 1). Aus der Gleichung $v^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - \xi^2)$ und der aus ihr abzuleitenden $\xi^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}(\beta^2 - v^2)$ ergeben sich leicht die Analogien zu den in den §§. 36—38. enthaltenen Lehrsätzen.

Zusatz 2). Bezieht man die Coordinaten auf dasjenige Paar conjugirter Durchmeßer, welche einander gleich sind, so wird $v^2 = \alpha^2 - \xi^2$ oder $v^2 + \xi^2 = \alpha^2$, d. h. die Summe der Quadrate von Ordinate und Abscisse eines Punktes hat für diesen Fall einen constanten Werth, gleich dem Quadrat eines der gleichen conjugirten Halbdurchmeßer.

Fig. XV. §. 55. Die Abstände der Punkte, in welchen eine beliebige Tangente die Verlängerungen eines Paars conjugirter Diameter schneidet, vom Mittelpunkte der Ellipse sind beziehungsweise $\frac{\alpha^2}{\xi}$ und $\frac{\beta^2}{v}$, (cf. §. 34, Zusatz).

Beweis. Man fälle von dem Punkte T, in welchem die durch den Punkt P der Ellipse gelegte Tangente den verlängerten Durchmeßer H_1H schneidet, das Perpendikel Tt auf die verlängerte Hauptaxe und verlängere es rückwärts bis zum Durchschnitt mit dem verlängerten Durchmeßer $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}$ des Hauptkreises in $\mathfrak{T}$. Die im Punkte $\mathfrak{P}$ an den Hauptkreis gelegte Tangente trifft das durch T gelegte Perpendikel gleichfalls im Punkte $\mathfrak{T}$. Denn bezeichnet man den Abstand des Punktes, in welchem sich dieses Perpendikel und die Tangente des Hauptkreises schneiden, vom Fußpunkte t des Perpendikels mit z, so hat man, da sich Ellipsen- und Kreistangente in demselben Punkte M der Hauptaxe treffen, einerseits $z : Tt = \mathfrak{P}p : Pp = a : b$, andererseits $\mathfrak{T}t : Tt = \mathfrak{H}h : Hh = a : b$, mithin $z = \mathfrak{T}t$.

Nun ist $CT : C\mathfrak{T} = CH : C\mathfrak{H} = \alpha : a$ und
$C\pi : Cr = CH : C\mathfrak{H} = \alpha : a$, mithin
$CT \,.\, C\pi : C\mathfrak{T} \,.\, Cr = \alpha^2 : a^2$; es ist aber $C\mathfrak{T} \,.\, Cr = C\mathfrak{P}^2 = a^2$, folglich
$CT \,.\, C\pi = \alpha^2$ und $CT = \frac{\alpha^2}{C\pi} = \frac{\alpha^2}{\xi}$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke DCT und $P\pi T$ ergiebt sich die Proportion CD : CT

$= P\pi : \pi T$, d. h. $CD : \frac{\alpha^2}{\xi} = v : \frac{\alpha^2}{\xi} - \xi$, woraus $CD = \frac{v\alpha^2}{\alpha^2 - \xi^2}$ folgt. Nach §. 54. ist aber $\alpha^2 - \xi^2 = \frac{\alpha^2 v^2}{\beta^2}$, mithin $CD = \frac{\beta^2}{v}$.

Zusatz. Die Strecken πT und dD, welche letztere von einer durch den Berührungspunkt der Tangente parallel zum Halbdurchmeßer α gezogenen Geraden auf CD abgeschnitten wird, nennt man Subtangenten in Beziehung auf die beiden conjugirten Durchmeßer. Ihre Werthe sind bezüglich $\frac{\alpha^2 - \xi^2}{\xi}$ und $\frac{\beta^2 - v^2}{v}$; denn $\pi T = CT - C\pi = \frac{\alpha^2}{\xi} - \xi = \frac{\alpha^2 - \xi^2}{\xi}$ und $dD = CD - Cd = \frac{\beta^2}{v} - v = \frac{\beta^2 - v^2}{v}$.

§. 56. Errichtet man in den Endpunkten eines Durchmeßers $H_1H = 2\alpha$ Tangenten, so hat das Rechteck aus den Abschnitten, welche eine beliebige dritte Tangente auf ihnen abschneidet, einen constanten Inhalt $= \beta^2$, gleich dem Quadrat des dem Durchmeßer H_1H conjugirten Halbdurchmeßers. (Verallgemeinerung des Lehrsatzes in §. 27.). Fig. XVI.

Beweis. Es ist $MH : HT = P\pi : \pi T$ und

$M_1H_1 : H_1T = P\pi : \pi T$. Durch Multiplication erhält man

$MH . M_1H_1 : HT . H_1T = P\pi^2 : \pi T^2$ oder

1) $MH . M_1H_1 = \frac{HT . H_1T . P\pi^2}{\pi T^2}$. Nun ist $HT = CT - \alpha$, $H_1T = CT + \alpha$, mithin $HT . H_1T = CT^2 - \alpha^2$, oder mit Rücksicht auf §. 55. $HT . H_1T = \frac{\alpha^2(\alpha^2 - \xi^2)}{\xi^2}$; ferner ist $P\pi^2 = v^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - \xi^2)$ und $\pi T^2 = \left(\frac{\alpha^2 - \xi^2}{\xi}\right)^2$. Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung 1) erhält man sofort $MH . M_1H_1 = \beta^2$.

§. 57. Alle Sehnen, welche den in den Endpunkten eines beliebigen Durchmeßers H_1H errichteten Tangenten oder, was dasselbe sagt, seinem conjugirten Durchmeßer parallel sind, werden von diesem Durchmeßer halbirt. Fig. XVII.

Beweis. Da die Sehnen den Tangenten, mithin auch dem conjugirten Durchmeßer K_1K parallel sind, so sind $P\pi$ und $P_1\pi$ die Ordinaten der Punkte P und P_1 in Beziehung auf das Paar conjugirter Durchmeßer. Bezeichnet man sie mit v und v_1, so ist nach §. 54. sowohl v^2 als $v_1^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - \xi^2)$, mithin sind auch v und v_1 der Länge nach gleich.

§. 58. Umgekehrt ist der geometrische Ort der Halbirungspunkte aller parallelen Sehnen derjenigen Durchmeßer der Ellipse, welcher dem den Sehnen parallelen Durchmeßer K_1K conjugirt ist. Fig. XVII.

Beweis. Man lege durch den Halbirungspunkt π von einer der parallelen Sehnen PP_1 den Durchmeßer H_1H und errichte in seinen Endpunkten Tangenten, so werden diese der Sehne, also auch dem Durchmeßer K_1K parallel. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man doch durch zwei andre Punkte der Ellipse ein Paar von Tangenten parallel zum Durchmeßer K_1K ziehn. Der durch ihre Berührungspunkte gelegte Durchmeßer müßte dann nach dem vorigen Paragraph gleichfalls die Sehne PP_1, und zwar in einem andern Punkte als π, halbiren. Da aber eine Strecke nicht zwei verschiedene Halbirungspunkte haben kann, so müßen die in den Endpunkten des Durchmeßers H_1H errichteten Tangenten dem Durchmeßer K_1K parallel, die beiden Durchmeßer selbst also conjugirt sein. Mithin geht nach dem vorigen Paragraph H_1H durch die Mittelpunkte aller zu K_1K parallelen Sehnen.

Zusatz 1). Durch jeden Punkt innerhalb der Ellipse läßt sich eine Sehne ziehn, welche in diesem Punkte halbirt wird. Man ziehe die Sehne so, daß sie demjenigen Durchmeßer parallel wird, welcher dem durch den Punkt gezogenen Durchmeßer conjugirt ist.

Zusatz 2). Da die Gerade, welche die Mitten zweier parallelen Sehnen verbindet, ein Durchmeßer der Ellipse ist, so läßt sich ihr Mittelpunkt C mit Hülfe von zwei Paaren paralleler Sehnen finden; natürlich dürfen jedoch nicht alle 4 Sehnen parallel sein.

Fig. XVII. §. 59. Zieht man von einem beliebigen Punkte P der Ellipse Sehnen nach den Endpunkten eines Durchmeßers P_1P_2, (solche Sehnen heißen Supplementarsehnen in Beziehung auf diesen Durchmeßer), so sind zwei Durchmeßer K_1K und H_1H, welche den Sehnen P_1P und P_2P parallel gezogen werden, einander conjugirt.

Beweis. Da $CK \parallel P_1P$, so ist $P_2m : mP = P_2C : CP_1$, mithin $P_2m = mP$. Der Durchmeßer K_1K halbirt also die zu H_1H parallele Sehne P_2P, ist daher dem Durchmeßer H_1H conjugirt.

Fig. XVII. §. 60. Zieht man durch die Endpunkte irgend eines Durchmeßers P_1P_2 Gerade parallel zu einem beliebigen Paar conjugirter Diameter, so liegt der Durchschnittspunkt der Geraden auf der Ellipse; die von dieser Curve begrenzten Stücke der beiden Geraden bilden daher ein Paar Supplementarsehnen und werden von den conjugirten Durchmeßern halbirt.

Beweis. Die von der Ellipse auf einer der Geraden abgeschnittene Sehne P_1P wird, weil sie nach unsrer Annahme parallel K_1K ist, von dem diesem Durchmeßer conjugirten Durchmeßer H_1H halbirt. Es ist mithin $P_1\pi : \pi P = P_1C : CP_2$ und daher die Verbindungslinie PP_2 dem zweiten conjugirten Durchmeßer H_1H parallel. Da nun durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nur eine einzige Parallele zu dieser Geraden gelegt werden kann, so muß die durch den Punkt P_2 parallel zu H_1H gezogene Gerade mit der Sehne PP_2 zusammenfallen, die erste Gerade also im Punkte P auf der Ellipse schneiden.

§. 61. Der Winkel, welchen zwei von einem Punkte nach den Endpunkten eines Kreisdurchmeßers gezogene Gerade einschließen, ist ein spitzer, rechter oder stumpfer, je nachdem der Punkt außerhalb, auf oder innerhalb der Kreisperipherie liegt. Daher ist auch der Winkel, welcher von irgend einem Paar Supplementarsehnen gebildet wird, ein spitzer, rechter oder stumpfer, je nachdem der Punkt, von dem aus die Sehnen nach den Endpunkten eines Durchmeßers gezogen sind, außerhalb, auf oder innerhalb der Peripherie des Kreises liegt, welcher jenen Ellipsendurchmeßer gleichfalls zum Durchmeßer hat. Hieraus folgt sofort, daß alle Supplementarsehnen zur großen Axe stumpfe Winkel, alle Supplementarsehnen zur kleinen Axe spitze Winkel einschließen. Unter den Supplementarsehnen, welche zu irgend einem andern Durchmeßer der Ellipse gehören, befindet sich auf jeder Seite des Durchmeßers ein Paar, welches einen rechten Winkel einschließt, von allen andern Paaren bildet ein Theil immer stumpfe, der andere immer spitze Winkel.

Beschreibt man nämlich mit dem Halbdurchmeßer CP als Radius einen Kreis um den Mittelpunkt C der Ellipse, so wird diese außer in den Punkten P und P_1 noch in zwei andern symmetrisch zu ihnen liegenden Punkten M und M_1 geschnitten. Jeder auf dem Ellipsenbogen PBM oder $P_1B_1M_1$ liegende Punkt hat eine Entfernung vom Mittelpunkte C der Ellipse, welche kleiner ist als der Radius CP des Kreises. Jeder Punkt dieser Art liegt also innerhalb des Kreises und die von ihm nach den Endpunkten eines der gleichen Durchmeßer PP_1 und MM_1 gezogenen Supplementarsehnen schließen mithin einen stumpfen Winkel ein. Weil ferner M und M_1 auf der Peripherie des Kreises liegen, so schließen die von einem dieser Punkte nach P und P_1 gezogenen Supplementarsehnen rechte Winkel ein. Für jeden andern Punkt der Ellipse endlich ist die Entfernung von ihrem Mittelpunkte C größer als der Radius CP des Kreises; er liegt also außerhalb des Kreises und die durch ihn gelegten Supplementarsehnen zu einem der Durchmeßer PP_1 und MM_1 schließen mithin einen spitzen Winkel ein. Fig. XVIII.

§. 62. 1) Da jedes Paar von Supplementarsehnen parallel den durch sie bestimmten conjugirten Durchmeßern ist, so ist auch der Winkel, welchen die Supplementarsehnen einschließen, gleich dem Winkel, unter dem sich die zugehörigen conjugirten Durchmeßer schneiden; und zwar ist der von den Supplementarsehnen gebildete Winkel gleich dem spitzen oder stumpfen Conjugationswinkel, je nachdem der Durchmeßer, durch dessen Endpunkte sie gezogen sind, den stumpfen oder spitzen Conjugationswinkel theilt.

2) Zieht man ein Paar conjugirter Durchmeßer, so schließen die ihnen parallelen Supplementarsehnen aller derjenigen Durchmeßer, welche den spitzen Conjugationswinkel theilen, gleich große stumpfe Winkel (gleich dem stumpfen Conjugationswinkel), die den conjugirten Duchmeßern parallelen Supplementarsehnen aller derjenigen Durchmeßer aber, welche den stumpfen Conjugationswinkel theilen, gleich große spitze Winkel (gleich dem spitzen Conjugationswinkel) ein.

3) Von allen conjugirten Durchmeßern bilden diejenigen den kleinsten spitzen Conjugationswinkel, welche einander gleich sind; von allen zu demselben Durchmeßer gehörigen Supplementarsehnen bildet daher dasjenige Paar den kleinsten spitzen oder den größten stumpfen Winkel, welches dem Paar gleicher conjugirter Durchmeßer parallel ist.

4) Zieht man von den Scheiteln der Ellipse Supplementarsehnen nach einem Endpunkte der kleinen Axe, so sind die ihnen parallelen conjugirten Diameter einander gleich. Die Ordinaten der Endpunkte der Durchmeßer verhalten sich nämlich wie die Ordinaten der Halbirungspunkte der beiden Sehnen, wie $\frac{b}{2} : \frac{b}{2}$, sind also einander gleich, mithin sind auch die Durchmeßer selbst gleich. Auf diesen Satz stützt sich die einfachste Methode der Construction des Paars gleicher conjugirter Durchmeßer.

§. 63. Auf die im vorigen Paragraphen entwickelten Beziehungen zwischen conjugirten Durchmeßern und den ihnen parallelen Supplementarsehnen stützt sich ein Verfahren die Paare conjugirter Durchmeßer zu construiren, welche einen Winkel von vorgeschriebener Größe einschließen. Man construire einen Kreis, welcher einen beliebigen Ellipsendurchmeßer als Sehne und in einem der von dieser Sehne begrenzten Segmente den gegebenen Conjugationswinkel als Peripheriewinkel enthält, und verbinde die Punkte, in denen dieser Kreis die Ellipse schneidet, mit den Endpunkten des gewählten Durchmeßers. Die Durchmeßer, welche einem Paare dieser Supplementarsehnen parallel gezogen werden, sind conjugirt und schneiden sich unter dem gegebenen Winkel. Je nach der Lage des zur Sehne des Kreises gewählten Ellipsendurchmeßers wird entweder derjenige Bogen des Kreises, welcher den spitzen Winkel als Peripheriewinkel einschließt, oder der andere Theil des Kreises die Ellipse schneiden. Im ersten Falle würde der gewählte Durchmeßer den stumpfen Winkel eines auf diese Weise construirten Paars conjugirter Durchmeßer theilen, im andern Fall den spitzen Winkel. Würde bei einer willkührlichen Annahme des Conjugationswinkels der Hülfskreis die Ellipse in keinem andern Punkte, als in den Endpunkten des gewählten Durchmeßers schneiden, so ist die Aufgabe nicht zu lösen, indem in diesem Falle der als Conjugationswinkel angenommene Winkel nicht innerhalb der Grenzen liegt, zwischen denen nach §. 46. der Conjugationswinkel stets liegen muß.

Um die Lage der großen und kleinen Axe nach diesem Verfahren zu bestimmen, braucht man nur als Conjugationswinkel, mithin auch als Peripheriewinkel im Hülfskreise den rechten Winkel zu wählen, oder einen beliebig angenommenen Ellipsendurchmeßer zugleich zum Durchmeßer des Hülfskreises zu machen.

Fig. XIX. §. 64. Der Inhalt einer Ellipse ist gleich dem Inhalt eines Kreises, dessen Radius die mittlere geometrische Proportionale zwischen der halben großen und halben kleinen Axe ist; $J = ab\pi$.

Beweis. Theilt man die Peripherie des Hauptkreises in beliebig viele Theile, fällt von den Theilpunkten Ordinaten auf die große Axe und verbindet die Endpunkte von je zwei benachbarten Kreisordinaten, so wie die zugehörigen Ellipsenpunkte durch Sehnen, so entstehn Paralleltrapeze. Jedes Trapez des Hauptkreises steht zu dem zugehörigen Trapez der Ellipse in dem constanten Verhältnis $a : b$. Denn sind $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ zwei benachbarte Ordinaten des Hauptkreises, und ist m die Strecke, welche ihre Fußpunkte auf der Hauptaxe begrenzen, so ist der Inhalt des Kreistrapezes $= \frac{\mathfrak{y} + \mathfrak{y}_1}{2} \,.\, m$; der Inhalt des zugehörigen Ellipsentrapezes $= \frac{y + y_1}{2} \,.\, m = \frac{\frac{b}{a}\,\mathfrak{y} + \frac{b}{a}\,\mathfrak{y}_1}{2} \,.\, m = \frac{b}{a}\left(\frac{\mathfrak{y}+\mathfrak{y}_1}{2}\right) m.$ Mithin verhält sich auch die Summe aller Kreistrapeze zur Summe aller Ellipsentrapeze und die Summe eines Theils der Kreistrapeze zur Summe der zugehörigen Ellipsentrapeze, wie a : b. Dies Verhältnis bleibt bestehn, wenn man die Theilpunkte auf der Peripherie des Hauptkreises beliebig nähert; auch dann noch, wenn die sie verbindenden Sehnen unendlich klein werden, das dem Hauptkreise eingeschriebene Polygon also in den Kreis, das der Ellipse eingeschriebene Polygon aber in die Ellipse übergeht. Nun ist der Inhalt des Hauptkreises $= a^2\pi$, mithin der Inhalt der Ellipse $= \frac{b}{a}\,a^2\pi = ab\pi.$

§. 65. Um den Inhalt eines elliptischen Sectors zunächst für den Fall zu finden, daß er einerseits von der halben großen oder halben kleinen Axe begrenzt wird, fälle man von dem Endpunkte des andern ihn begrenzenden Halbdurchmeßers die Ordinate auf die Hauptaxe und verlängere sie rückwärts bis zum Durchschnitt mit dem Hauptkreise. Nun verhält sich nach dem vorigen Paragraphen $C\mathfrak{B}\mathfrak{P}p : CBPp = a : b.$ Ferner verhalten sich die Dreiecke $C\mathfrak{P}p$ und CPp, welche die gemeinsame Höhe Cp haben, wie ihre Grundlinien, wie $\mathfrak{P}p : Pp$, wie $a : b$. Mithin ist auch $\frac{C\mathfrak{B}\mathfrak{P}p - C\mathfrak{P}p}{CBPp - CPp} = \frac{a}{b}$, d. h. der Kreissector $\mathfrak{B}C\mathfrak{P}$ steht zu dem Ellipsensector BCP in dem constanten Verhältnis a : b. Fig. XX.

Auch der Kreissector $\mathfrak{P}CA$ steht zu dem Ellipsensector PCA in demselben Verhältnis, wie man sofort sieht, wenn man diese Sectoren als Differenzen zwischen den ganzen Quadranten und den zuvor betrachteten Sectoren auffaßt.

Die Bestimmung jedes beliebigen andern Sectors kann leicht auf den behandelten speciellen Fall zurückgeführt werden.

Um die Grenzen eines Schulprogramms nicht zu überschreiten, muß ich mir die weitere Entwickelung der Eigenschaften der Ellipse, sowie eine ähnliche Behandlung der übrigen Kegelschnitte für eine spätere Zeit vorbehalten.

Chr. Berkenbusch.

Fig. I.

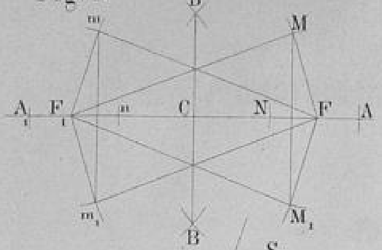


Fig. II.

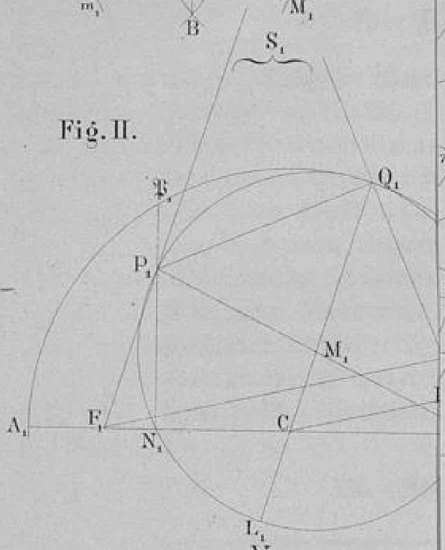


Fig. III.

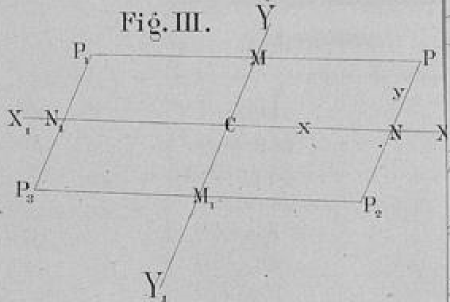


Fig. IV.

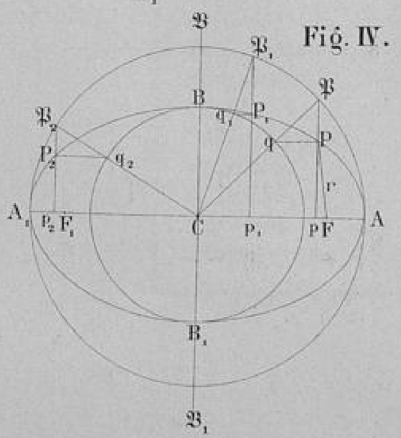


Fig.

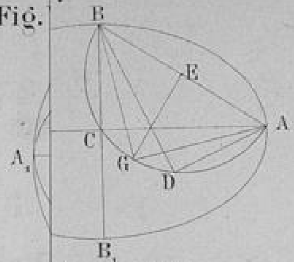


Fig. XVI.

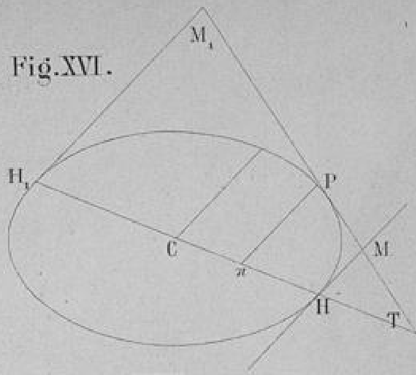
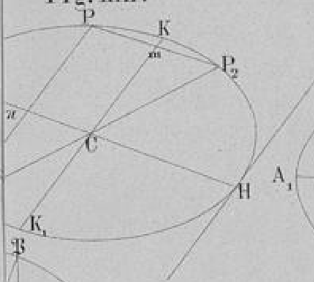


Fig. XVII.



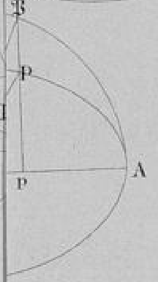


Fig. XVIII.

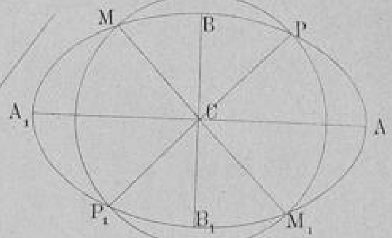
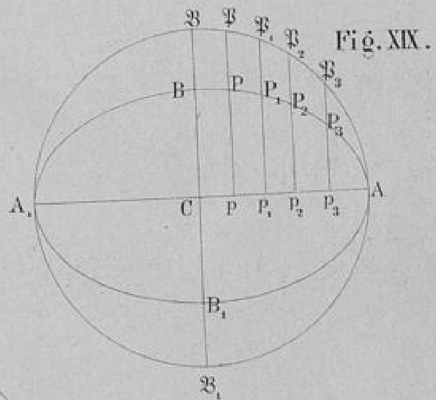
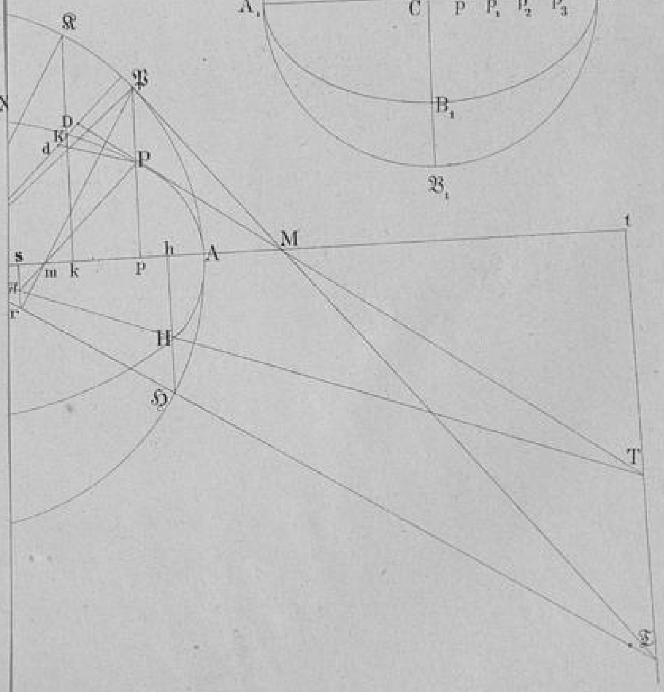


Fig. XIX.





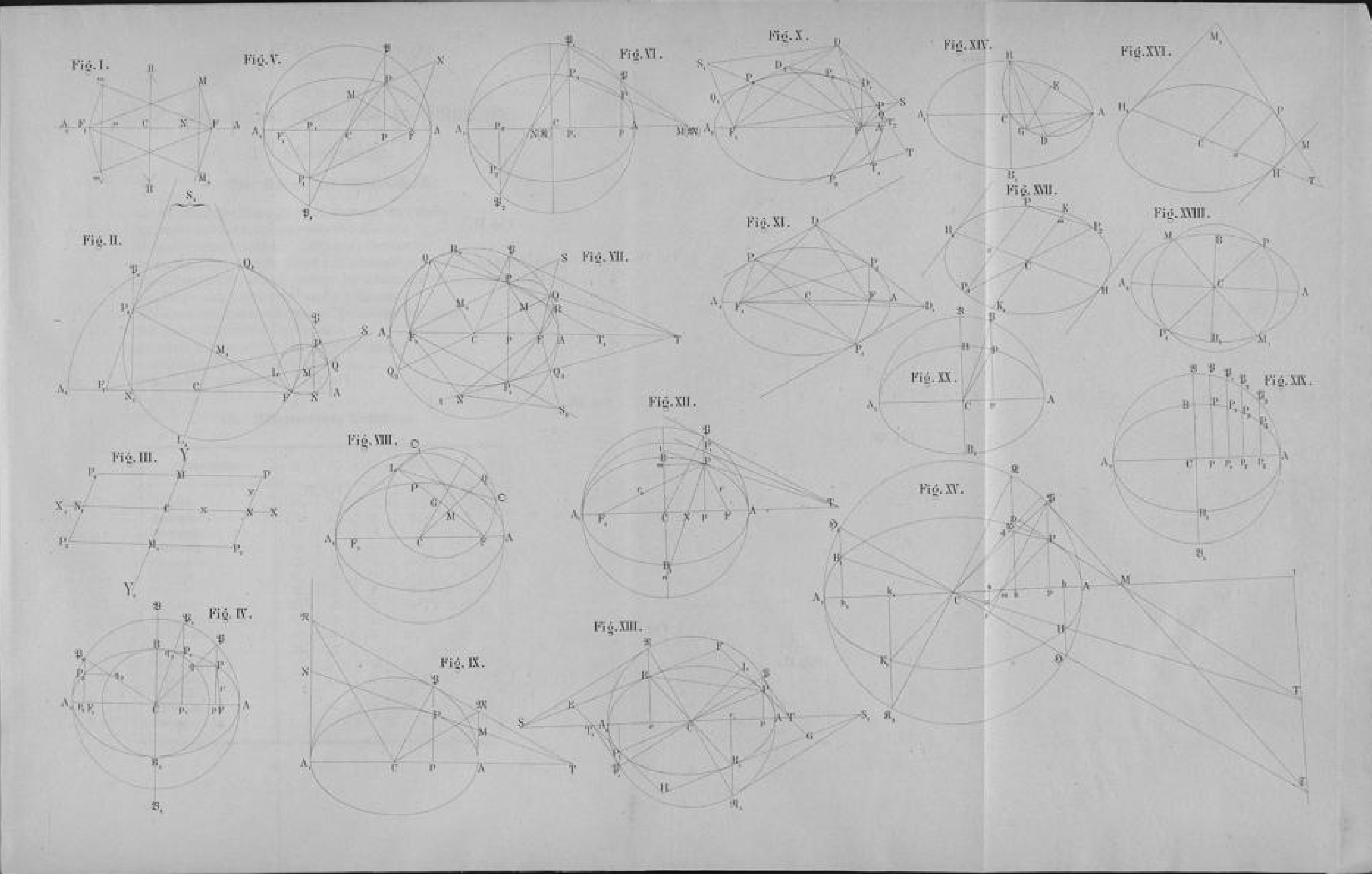


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII.
Fig. XIX.
Fig. XX.

Schulnachrichten von Ostern 1864 bis Ostern 1865.

I. Lehrverfassung.

1. Die Lehrer des Gymnasiums.

Rector, Professor Burchard, Ordinarius der Prima.
Prorector Nöldeke, Ordinarius der Secunda.
Conrector Battermann, Ordinarius der Tertia.
Conrector, Oberlehrer Dr. Fuchs, Ordinarius der Quarta und Bibliothekar.
Oberlehrer Berkenbusch, Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften.
Dr. Lageman, Lehrer der neueren Sprachen.
Subconrector Schwerdtmann, Ordinarius der Sexta.
Notholz, Ordinarius der Quinta.
Hofmaler, Professor Durand, Zeichenlehrer.
Kapellmeister Schmidt, Gesanglehrer.
Bargheer, Hülfslehrer.

2. Allgemeiner Lehrplan.

Lehrfächer.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Deutsch	3.	3.	3.	4.	4.	4.
Lateinisch	7.	7.	8.	8.	8.	6.
Griechisch	7.	6.	4.	—	—	—
Hebräisch	2.	2.	—	—	—	—
Französisch	2.	3.	3.	3.	4.	2.
Englisch	2.	2.	2.	1.	—	—
Religion	2.	2.	3.	2.	4.	4.
Geschichte	2.	2.	2.	2.	2.	2. (Geschichte und Geographie)
Geographie	1.	2.	2.	2.	2.	
Mathematik	4.	4.	4.	2.	—	—
Physik	2.	1.	—	—	—	—
Naturgeschichte	—	—	1.	2.	2.	—
Rechnen	—	2.	2.	2.	2.	3.
Zeichnen	2. (I. und II.)		2.	2.	2.	2.
Schreiben	—	—	2.	2.	2.	3.
Singen	2. (I. und II.)		2. (III. und IV.)		2. (V. und VI.)	

3. Vertheilung der Fächer auf die einzelnen Lehrer.

Namen der Lehrer.	Prima.	Secunda.	Tertia.	Quarta.	Quinta.	Sexta.
Burchard.	2 St. Religion. 5 Lat. 5 Griech. 3 Deutsch.					
Nöldeke.	2 St. Griech.	2 St. Religion. 7 Lat. 4 Griech. 3 Deutsch 2 Gesch. 2 Geographie.				
Battermann.	2 St. Geschichte.		3 St. Relig. 8 Lat. 4 Griech. 3 Dtsch. 2 Gesch. 2 Geogr.	2 St. Geographie.		
Fuchs.	2 St. Latein. 2 Hebräisch.	2 St. Griechisch. 2 Hebräisch.		2 St. Rel. 8 Lat. 4 Dtsch. 2 Gesch. 2 Mathematik.		
Berkenbusch.	4 St. Mathem. 2 Phys. 1 Geogr.	4 St. Mathem. 1 Phys. 2 Rechn.	4 St. Mathem. 1 Naturgeschichte 2 Rechnen.	2 St. Naturgesch. 2 Rechnen.	2 St. Naturgesch.	
Lageman.	2 St. Französisch. 2 Englisch.	3 St. Französisch. 2 Englisch.	3 St. Französisch. 2 Englisch.	3 St. Französisch. 1 Englisch.		
Schwerdtmann.					4 St. Franz. (im Winter.) 2 Gesch. (im Winter.)	4 St. Relig. 6 Lat. 4 Dtsch. 2 Franz. 2 Gesch. u. Geogr.
Notholz.			2 St. Schreiben.	2 St. Schreiben.	4 St. Relig. 8 Lat. 4 Dtsch. 2 Schreib. 4 Französisch (im Sommer.) 2 Gesch. (im Sommer.)	3 St. Rechnen. 3 Schreiben.
Durand.	2 St. Zeichnen.		2 St. Zeichnen.	2 St. Zeichnen.	2 St. Zeichnen.	2 St. Zeichnen.
Schmidt.	2 St. Singen. (Tenor und Baß)		2 St. Singen (Sopran und Alt)		2 St. Singen. (Vorübungen)	
Bargheer.					4 St. Lat. (2. Ord.) 2 Rechn. 2 Geogr.	

4. Specieller Lehrplan.

Prima.

Latein 7 St. — Gelesen: Tacit. Annal. lib. I. (zweite Hälfte) und lib. II; Ciceronis epistolae nach der Auswahl von Frey. 3 St. Burchard. Horat. Serm. I, 1. 4. 9. Vergil. Bucol. Eclog. 1—5. Horat. Carm. lib. I. nach einer metrischen Einleitung. Memorirt wurden Carm. I, 1. 3. 4. 22. 2 St. Fuchs. Stilistische Uebungen an wöchentlichen Exercitien aus Zumpts Materialien, oder freien Aufsätzen, wöchentlich ein Extemporale. 2 St. Burchard.

Griechisch 7 St. — Gelesen: Sophocl. Philoctetes und Aiax. 2 St. Thucyd. lib. VI. und VII. (nicht vollendet). 2 St. Burchard. Homeri Iliad. lib. XVIII—XXIV, I—VI. 2 St. Nöldeke. Syntactische Uebungen an wöchentlichen Exercitien. 1 St. Burchard.

Deutsch 3 St. — Aus der Literaturgeschichte die an Schiller und Göthe anschließenden Schriftsteller, aus ihren Werken beleuchtet. Vierwöchentlich eine schriftliche Arbeit, neben mündlichen Vorträgen der Schüler (im Sommer) und metrischen Uebungen in römischen, vorzugsweise deutschen Versformen. Burchard.

Hebräisch 2 St. — Gelesen: Jos. cap. 1—6. Psalm 13. 22. 24. 33. 100. 104. 121. 127. 130. Joel ganz. Grammatik nach Nägelsbach: Wiederholung der Formenlehre und ausgewählte Stücke der Syntax. Uebungen im Uebersetzen ins Hebräische und im Punctiren nach Brückners und Schicks Uebungsbuch. Fuchs.

Französisch 2 St. — Gelesen: Schütz's Französisches Lesebuch für die höheren Klassen, S. 101—186. Wöchentlich Extemporalia (memorirt) abwechselnd mit Exercitien aus Fränkels Stufenleiter, 4. Cursus. Lageman.

Englisch 2 St. — Gelesen: Warren, Passages from the diary of a late physician, S. 39—114. Wöchentlich ein Extemporale (memorirt) und ein Exercitium aus Schillers Parasit. Lageman.

Religion 2 St. — Lectüre des Evangeliums Matthäi (Kap. 7—28) und der Apostelgeschichte (Kap. 1—11) in der Ursprache. Burchard.

Geschichte 2 St. — Ausführliche Repetitionen der mittleren und neuen Geschichte, daneben römische Geschichte bis zur Kaiserzeit. Battermann.

Geographie 1 St. — Physikalische Geographie. Berkenbusch.

Mathematik 4 St. — Trigonometrie. 2 St. Gleichungen vom ersten und zweiten Grade, mit einer und mehreren Unbekannten, Exponentialgleichungen, im Anschluß an die Aufgabensammlung von Heis, §§. 60—76. 2 St. Berkenbusch.

Physik 2 St. — Im Sommer Magnetismus und Elektricität, im Winter die allgemeinen Eigenschaften der Körper und die mechanischen Erscheinungen fester Körper, nach Koppes Anfangsgründen der Physik, Abschnitt VI. VII. I und II. Berkenbusch.

Zeichnen, combinirt mit Secunda, 2 St. — Nach Vorlagen. Durand.

Singen, combinirt mit Secunda, (Tenor und Baß) 2 St. — Einübung des Ave verum corpus von Mozart und der Motette „Jesus meine Zuversicht" von J. G. Schicht. Schmidt.

Secunda.

Latein 7 St. — Gelesen: Ciceronis Oratio pro S. Roscio Amerino. Livii lib. XXX, c. 32—fin., lib. XXIV, c. 1—8. Vergilii Aen. lib. VI, 450—VIII. fin. 4 St. Grammatik nach Zumpt: §. 207—361; 1—44; 362—516; 672—741. Extemporalia zur Einübung der Syntax; wöchentlich ein Exercitium aus Schmalfelds Uebungsbuch. 3 St. Vierteljährlich ein Aufsatz. Die Vitae des Nepos wurden zu mündlichen Relationen benutzt. Nöldeke.

Griechisch 6 St. — Gelesen: aus Schmidts Griechischer Chrestomathie die Abschnitte I. II. V. VII. X. XVII, aus Xenophont. Cyrop. Hellenica, Agesilaus und Isocratis Panegyr. 2 St. Nöldeke. Homeri Odyss. lib. I—III, 160 und homerische Formenlehre. 2 St. Fuchs. Burchards Grammatik ganz durchgenommen, Syntax nach memorirten Dictaten; Exercitia nach Kühners Uebersetzungsbuch, I. Cursus. 2 St. Nöldeke.

Deutsch 3 St. — Lectüre aus Magers Deutschem Lesebuche, 3. Cursus: Epik und die Hauptgattungen der Prosa, mit literarhistorischen und Sach-Erklärungen. Aus Hoffmanns Rhetorik für Gymnasien die 1. Abth. Lehre vom Stil, ganz durchgenommen, Alle 14 Tage ein Aufsatz. In jeder Stunde Declamation oder mündlicher Vortrag eines Schülers, theils Relationen, theils eigne Arbeiten. Nöldeke.

Hebräisch 2 St. — Gelesen: aus Brückners Lesebuche, Seite 79—86. (der 1. Ausgabe), aus Gesenius Lesebuche, Seite 1—11. (der 9. Ausgabe) mit mündlicher und schriftlicher Analyse. Grammatik nach Nägelsbach: die Formenlehre des regelmäßigen und unregelmäßigen Verbums und des einfachen Nomens. Zeitweilig schriftliche Uebungen. Fuchs.

Französisch 3 St. — Gelesen: Plate, Recueil de beaux morceaux, p. 151—198. 1—49. Grammatik nach Sanguin, 2. Cursus. Wöchentlich ein Exercitium aus Fränkels Stufenleiter, 3. Cursus, abwechselnd mit (memorirten) Extemporalien. Lageman.

Englisch 2 St. — Gelesen: aus Washington Irving's Sketch-book: John Bull, the pride of the village, the angler, sleepy hollow. Wöchentlich ein Exercitium aus Fellers Handbuch, Lernen von Sätzen daraus, abwechselnd mit (memorirten) Extemporalien. Lageman.

Religion 2 St. — Nach Petris Lehrbuch der Religion, §. 1—22. Einleitung. §. 298—302. Lehre von den letzten Dingen. Alle 14 Tage wurde ein Gesang gelernt aus W. Nöldekes Schulgesangbuch. Nöldeke.

Geschichte 2 St. — Neuere Geschichte, erste Hälfte. Daneben alle vierzehn Tage eine Stunde Repetition der alten und mittleren Geschichte. Nöldeke.

Geographie 2 St. — Mathematische Geographie. Süd-, Ost- und Nord-Europa, nach natürlichen, politischen und statistischen Verhältnissen, nach Daniels Lehrbuch. Vierteljährlich Zeichnung einer Karte. Nöldeke.

Mathematik 4 St. — Planimetrie nach Kamblys Elementar-Mathematik, Abschn. I — VII. Constructionsaufgaben. 2 St. Repetition des Pensums der Tertia und die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, im Anschluß an die Aufgabensammlung von Heis. 2 St. Berkenbusch.

Physik 1 St. — Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektricität nach Koppes Anfangsgründen der Physik, Abschn. VI und VII. Berkenbusch.

Rechnen 2 St. für die nicht studirenden Schüler. — Die Lehre von den einfachen arithmetischen und geometrischen Reihen mit zahlreichen Anwendungen, insbesondere auf Aufgaben der Zinses-Zins- und Rentenrechnung. Berkenbusch.

Zeichnen, combinirt mit Prima, 2 St. — Durand.

Singen, combinirt mit Prima, 2 St. — Schmidt.

Tertia.

Latein 8 St. — Gelesen: Caesar. bell. Gall. lib. VIII. (theilweise) und lib. I. — Cap. 35. 2 St. Nach Sterns Anthologie röm. Dichter auserlesene Stücke aus Ovidii Metamorph. mit schriftlicher Nachübersetzung, Memorirung ausgewählter Stellen und Einprägung der prosodischen Regeln. 2 St. Grammatik: Syntax nach F. Schultz's kl. lat. Sprachlehre, wöchentlich ein Exercitium oder ein Extemporale. 4 St. Battermann.

Griechisch 4 St. — Die Formenlehre nach Burchards Elementargrammatik. Im Winter schriftliche Uebungen nach Kühners Uebungsbuche. Lectüre leichter, allmählich schwererer prosaischer Stücke, zuletzt Stücke aus Xenophons Cyropädie und Homers Odyssee, eine Anzahl Verse memorirt. Battermann.

Deutsch 3 St. — Grammatische Uebungen über die Hauptwörter, Verhältnißwörter, Satzbildung und Interpunction; Durchnahme anderer Regeln im Anschluß an die alle vierzehn Tage gelieferten schriftlichen Ausarbeitungen. Uebungen im mündlichen Vortrage an memorirten poetischen und prosaischen Stücken, die vorher durchgenommen und erklärt wurden. Battermann.

Französisch 3 St. — Gelesen: Hundeiker und Plates Lesebuch, St. 64 — 82. Memorirung von Dialogen und Anekdoten aus Sanguins Grammatik. Wöchentlich ein Exercitium aus Fränkels Stufenleiter, 2. Cursus. Lageman.

Englisch 2 St. — Gelesen: Heckers Elementarbuch, 2. Abtheilung, St. 36—66. Grammatik nach Fellers Handbuch. Wöchentlich dictirte und memorirte Dialogen. Lageman.

Religion 3 St. — Das Evangelium Matthäi und Marci. Die Hauptstücke nach d. kl. Katechismus. Wiederholung der früher gelernten ausgewählten Kirchenlieder und

Hinzulernen neuer und der wichtigsten Stellen aus den beiden durchgenommenen Evangelien. Battermann.

Geschichte 2 St. — Geschichte der neueren Zeit. Battermann.

Geographie 2 St. — Die Länder Europas mit Ausschluß Deutschlands, nach Daniels Lehrbuch. Kartenzeichnen. Battermann.

Mathematik 4 St. — Erster Theil der Planimetrie nach Kamblys Elementar-Mathematik, Abschnitt I—III. und Abschnitt IV. bis §. 120 incl. 2 St. Algebra: Operationen der ersten und zweiten Stufe im Anschluß an die Aufgabensammlung von Heis. 2 St. Berkenbusch.

Naturgeschichte 1 St. — Im Sommer Botanik: Uebungen im Bestimmen wild wachsender Pflanzen der Umgegend nach Leunis' analyt. Leitfaden; im Winter: Zoologie: Rückgratthiere nach Leunis. Berkenbusch.

Rechnen 2 St. — Nach Franckes Exempelbuch, Abschnitt VI—XIII. Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln aus ganzen Zahlen und Brüchen. Berkenbusch.

Schreiben 2 St. für die nicht studirenden Schüler. — Nach Kochs Methode. Notholz.

Zeichnen 2 St. — Nach Vorlagen. Durand.

Singen, combinirt mit Quarta. (Sopran und Alt) 2 St. — Einübung der bei Prima genannten Chöre. Schmidt.

Quarta.

Latein 8 St. — Gelesen: Cornel. Nep. XX, cap. 3 — XXIV. mit schriftlicher Nachübersetzung, bisweilen auch Vorübersetzung, theils mündlicher, theils schriftlicher Analyse, Memorirung der Vokabeln und Repetitionen. Häusliche Uebersetzung aus Burchards Grammatik, Leseb. 1. Curs. XVII, 1—33. 3 St. Burchards Grammatik, §. 46—51, das Wichtigste aus §. 52—57, mit Einübung der (memorirten) syntactischen Regeln an Uebungsbeispielen aus dem 1. Curs. 2 St. Wiederholung und Ergänzung der Formenlehre. Memorirung der Stammverba. 2 St. Wöchentlich ein Exercitium oder ein Extemporale. 1 St. Fuchs.

Deutsch 4 St. — Aus der Grammatik die Lehre vom Haupt- und Zeitwort, vom einfachen, zusammengezogenen und zusammengesetzten Satze, die Grundregeln der Interpunction. 1 St. Alle vierzehn Tage schriftliche Ausarbeitungen (Beschreibungen, Briefe, Gespräche), alle acht Tage ein orthographisches Dictat. 2 St. Memorirung poetischer und prosaischer Stücke aus dem Bremer Lesebuche und Schillerscher Balladen. 1 St. Fuchs.

Französisch 3 St. — Gelesen: Plötz's Elementarbuch, 2. Curs. bis St. 86 und Lesestück 1—13. mit Repetitionen, Memorirung einzelner Stücke und Vokabeln. Einprägung der unregelmäßigen Zeitwörter und Wiederholung des Pensums der Quinta. Alle drei Wochen ein Exercitium aus Fränkels Stufenleiter, 1. Curs. Lageman.

Englisch 1 St. — Gelesen: Heckers Elementarbuch, die erste Abtheilung ganz. Formenlehre nach Fellers Handbuch. Lageman.

Religion 2 St. — Die Geschichten des N. T. nach Zahns biblischen Historien, Lectüre einzelner Abschnitte aus den Evangelien und der Apostelgeschichte. Memorirung von Bibelsprüchen, ausgewählten Psalmen, 10 Kirchenliedern und des kleinen Katechismus. Fuchs.

Geschichte 2 St. — Die alte Geschichte (nach einer gedruckten chronologischen Tabelle); Wiederholung des Pensums der Quinta. Zeitweilig schriftliche Ausarbeitungen. Fuchs.

Geographie 2 St. — Die Länder Europas nach Schachts Leitfaden. Kartenzeichnen. Repetition der früheren Pensa. Battermann.

Mathematik 2 St. — Die Anfangsgründe der Geometrie, die Lehre vom Winkel und von den Parallelen, Einiges aus der Lehre vom Dreieck. Geometrisches Zeichnen. Fuchs.

Naturgeschichte 2 St. — Im Sommer Botanik nach Leunis' analyt. Leitfaden; im Winter Zoologie (Säugethiere) nach Leunis. Berkenbusch.

Rechnen 2 St. — Bruchrechnung nach Kranckes Exempelbuch, Abschn. IV und V. Berkenbusch.

Schreiben 2 St. — Nach Kochs Methode. Notholz.

Zeichnen 2 St. — Nach Vorlagen. Durand.

Singen, combinirt mit Tertia, 2 St. — Schmidt.

Quinta.

Latein 12 St.*) — Grammatik: die Formenlehre wiederholend und ergänzend. 4 St. — 1. Ordnung: Uebungen im Uebersetzen, Exercitien und Extemporalien aus dem ersten Abschnitt von Spieß' Uebungsbuch. 4 St. Notholz. — 2. Ordnung: Uebungen im Uebersetzen, Exercitien und Memorirung der Vocabeln nach Spieß' Uebungsbuch, erste Abtheilung für Sexta, von Cap. 3 — 20. Bargheer.

Deutsch 4 St. — Lectüre aus dem Bremer Lesebuche, verbunden mit Betrachtung des einfachen Satzes. Erlernung mehrerer Gedichte. Aufsätze, orthographische Uebungen. Notholz.

Französisch 4 St. — Nach Plötz's Elementarbuch die vier regelmäßigen Conjugationen, Zahlwörter, Theilungsartikel. Mündliche Uebersetzung von Lection 1 — 50. Die deutschen Stücke wurden auch schriftlich übersetzt. Im Sommer Notholz, im Winter Schwerdtmann.

---

*) Von diesen 12 Stunden kommen 4 auf eine zweite lateinische Ordnung, welche zu Johannis eingerichtet wurde und in Zukunft, nachdem das Gymnasium eine Sexta erhalten hat, wieder wegfallen wird. Die Schüler dieser Ordnung nahmen aber auch an 4 grammatischen Stunden der ersten Theil, so daß jede Ordnung 8 lateinische Stunden hatte.

Religion 4 St. — Die Geschichten des A. T. nach Zahns biblischen Historien. Wiederholung der fünf Hauptstücke. Memorirung von 10 Kirchenliedern und 50 Bibelsprüchen. Notholz.

Geschichte 2 St. — Nach Anleitung einer gedruckten chronologischen Tabelle, Besprechung hervorragender Ereignisse und Personen aus der alten und mittleren Geschichte. Im Sommer Notholz, im Winter Schwerdtmann.

Geographie 2 St. — Physische Geographie der ganzen Erde. Politische Geographie von Deutschland, nach Schachts Leitfaden. Kartenzeichnen. Bargheer.

Naturgeschichte 2 St. — Uebungen im Beschreiben wild wachsender Pflanzen (im Sommer) und ausgestopfter Vögel und Säugethiere (im Winter). Berkenbusch.

Rechnen 2 St. — Die vier Species mit unbenannten und benannten Zahlen; Anfang der Bruchrechnung; Aufgaben aus dem I. II. III. und IV. Abschnitte des Exempelbuches von Krancke. Bargheer.

Schreiben 2 St. — Nach Kochs Methode. Notholz.

Zeichnen 2 St. — Nach Vorlagen. Durand.

Singen, combinirt mit Sexta, 2 St. — Vorübungen und kleine ein- und zweistimmige Lieder. Schmidt.

Sexta.

Latein 6 St. — Grammatik: Formenlehre nach Burchards Schulgrammatik bis zu den regelmäßigen Conjugationen incl. Uebungen im Uebersetzen und Exercitien nach Spieß' Uebungsbuch, erste Abtheilung für Sexta, bis zu Ende des 13. Kap. Schwerdtmann.

Deutsch 4 St. — Dictate und schriftliche Ausarbeitungen nach Seffers Erstem Hülfsbuche beim Unterrichte in der deutschen Sprache, bis §. 47 incl. Schwerdtmann.

Französisch 2 St. — Einübung der Aussprache und Formenlehre nach Ploetzs' französischer Vorschule, Lection 1—40. Schwerdtmann.

Religion 4 St. — Biblische Historien nach Zahn, §. 1—50. Memoriren von 10 Kirchenliedern und von Bibelstellen. Schwerdtmann.

Geschichte und Geographie 2 St. — Erzählungen aus der alten Geschichte und Memoriren der Thatsachen nach einer gedruckten chronologischen Tabelle. Schwerdtmann.

Rechnen 3 St. — Aus Franckes Exempelbuch, Abschnitt I. Notholz.

Schreiben 3 St. — Nach Kochs Methode. Notholz.

Zeichnen 2 St. — Nach Vorlagen. Durand.

Singen, combinirt mit Quinta, 2 St. — Schmidt.

II. Zur Chronik und Statistik des Gymnasii.

1. Das Schuljahr begann am 4. April v. J. mit der Verlesung der Schulgesetze vor den versammelten Schülern und schließt nach Abhaltung der Versetzungsprüfungen und der Aufnahmeprüfung neuer Schüler, am 8. April d. J.

2. Nachdem der Gang des Unterrichts bis Neujahr seinen regelrechten Verlauf gehabt, erfuhr er von da an eine dauernde Störung durch Erkrankung einzelner Lehrer auf längere oder kürzere Zeit, wobei nur durch theilweise Zusammenziehung des gesammten Lehrplanes Hülfe zu schaffen war. Von den dem Unterrichten auf längere Zeit entzogenen Collegen fehlt uns der Dr. Lageman bereits seit der Mitte des Januar, der Conrector Battermann seit den letzten sechs Wochen. Dazu entriß zuletzt uns noch der Tod das älteste Mitglied unsres Collegiums, den Gesanglehrer des Gymnasiums, Kapellmeister Joseph Schmidt, im 70. Lebensjahre und im 43. Jahre seines Lehramts, am 15. März d. J. nach kurzer Krankheit, die ihn kaum mehr als acht Tage vorher seinen Unterricht einzustellen genöthigt hatte. Geboren in Bückeburg am 26. September 1795 und von Jugend auf zum praktischen Musiker durch Neigung und Erziehung bestimmt, sah er sich bereits im 18. Jahre als erster Violin- und Solospieler beim Herzogl. Braunschweigischen Hoftheater angestellt, trat einige Jahre später bei der Herzogl. Koburgischen Kapelle als Hofmusikus ein, vervollkommnete sich im Anfange der zwanziger Jahre seines Lebens im Spiel wie in der Theorie der Musik in den bedeutendsten Städten des nördlichen Italiens, Turin, Genua, Mailand u. a. und kehrte darauf als gediegener Violinspieler und gründlich durchgebildeter Theoretiker hieher, an die Fürstliche Hofkapelle berufen, zurück, von wo aus er Deutschland in verschiedenen Richtungen und manches angränzende Land auf Kunstreisen besuchte; der hiesigen Fürstlichen Kapelle stand er während der letzten 13 Jahre seines Lebens als dirigirender Kapellmeister vor, nachdem ihm bereits im Jahre 1822 an der Schule der Gesangunterricht und beim Schullehrer-Seminar der Unterricht in der musikalischen Theorie anvertraut war. So wie seine erste Lebenshälfte in die Entfaltung der Blüthenperiode der deutschen Tonkunst und namentlich der Instrumentalcomposition gefallen war, so war diese auch die Richtschnur seines musikalischen Berufslebens geworden und blieb auch der sichere Mittelpunkt seiner späteren Thätigkeit, indem sie ihm zugleich, und bis in seine letzten Lebenstage, eine jugendlich frische Begeisterung für seine Kunst und ihre großen Meister erhielt, für deren Tonschöpfungen er Freunde zu gewinnen, das Publikum zu erwärmen und die ihm zu Gebote stehenden Kräfte heran- und auszubilden unablässig und unverdrossen bemüht war. Von dieser Liebe und diesem Eifer beseelt, wußte er an manchem Winterabende einen kleinen Kreis von Musikfreunden, in denen auch Ref. seine schönsten Erholungsstunden gefunden hat, durch Vorführung classischer Streichquartette zu erfreuen, Gesangvereine und Liedertafeln um sich als Dirigenten zu sammeln, namentlich aber die Schüler unsrer Anstalt alljährlich immer so weit zu fördern, daß mit

wenigen Ausnahmen regelmäßig zweimal, zum Charfreitage und zur Feier des 18. Octobers in der lutherischen Kirche ein größeres Oratorium, unter Mitwirkung gereifterer Sänger für die Solopartien, zur Aufführung gelangen konnte. Hierneben und neben der mühe- und sorgenvollen und nur durch den angestrengtesten Privatfleiß ermöglichten Erziehung einer zahlreichen Schaar von Kindern, von welchen zehn ihn überleben, aus einer glücklichen, nahe vor dem Tage der Feier der goldenen Hochzeit durch seinen Tod gelösten Ehe, fand er immer noch Muße und behielt er immer noch Elasticität des Geistes zu freierer und selbstständiger Thätigkeit, wovon eine Menge meist handschriftlich gebliebene Compositionen für Vocal- und Instrumentalmusik Zeugniß ablegen, unter welchen auch ein größeres Oratorium „die Geburt Jesu“ aus dem letzten Decennium seines Lebens, zweimal öffentlich hier aufgeführt wurde. Von der allgemeinen Achtung und Liebe, in welcher er bei Jung und Alt gestanden, gab der lange Zug der seine Leiche am 20. März zur Ruhestatt Geleitenden einen rührenden Beweis, unter denen wohl wenige waren, welchen er nicht als Lehrer oder leitender Freund mit seiner Kunst im Leben eine Zeit lang nahe gestanden hatte. Die Singschüler des Gymnasiums sangen an seiner Gruft den Choral „Jesus meine Zuversicht“ aus einer Motette von Schicht, über deren Einübung zur diesjährigen Charfreitagsaufführung ihn seine letzte Krankheit und der Tod abgerufen hatte, während die hiesigen Männergesangvereine gemeinschaftlich die Begräbnißfeierlichkeit mit dem Liede „Da unten ist Friede“ beschlossen.

3. Zu Michaelis ging durch die Gnade Sr. Durchlaucht des Fürsten der lange für die Schule von den Lehrern wie vom Publikum gehegte Wunsch in Erfüllung, eine Gymnasial-Sexta eingerichtet zu sehen, welche einstweilen ihren Ordinarius in dem neu ins Lehrercollegium berufenen Subconrector Schwerdtmann erhielt. Der Lehrplan für diese Klasse mußte sich für das erste Semester ihres Bestehens einigermaßen nach der Qualification der grade für die Aufnahme vorhandenen und meistens schon mit der Vorbereitung zum Eintritt in die Quinta auf Ostern d. J. beschäftigten Schüler richten und wird erst von letzterem Termine an definitiv festgestellt werden.

4. Von der Theilnahme der Schüler an den Turnstunden ist leider auch aus dem letzten Sommer nicht viel Erfreuliches zu berichten, obgleich lobend anerkannt werden soll, daß die beiden Primaner Ad. Langerfeldt und W. Knodt, wie einige andre erwachsenere Schüler andrer Klassen sich eben so eifrig und unverdrossen bemühten, als Vorturner der kleinen Zahl jüngerer Mitschüler nützlich zu werden, als diese selbst willig und munter sich den Uebungen hingaben. Ohne ein regeres Interesse und ohne die kräftige Mithülfe der Eltern und Angehörigen unsrer Zöglinge ist auf eine allgemeinere Betheiligung letzterer, nachdem der Reiz der Neuheit seit der Wiederbelebung dieser Uebungen im Jahre 1860 geschwunden ist, schwerlich zu hoffen. Schmerzlich zu beklagen aber bleibt es, daß der in die Augen springende Werth, den eine besonnen geübte Gymnastik für die Gesundheit des Leibes und der Seele im Gefolge hat, so vielfach unterschätzt oder gänzlich verkannt zu werden scheint.

5. Den Geburtstag Sr. Durchlaucht des Fürsten begingen am 1. August Lehrer und Schüler des Gymnasii durch gemeinschaftlichen Gesang und eine Ansprache des Ref. an die Jugend.

6. Unter dem 4. October rescribirte das Fürstliche Consistorium, daß Sr. Durchlaucht der Fürst geruht habe, dem Oberlehrer Dr. Fuchs den Titel Conrector, und dem Gymnasiallehrer Berkenbusch den Titel Oberlehrer zu verleihen. Durch Fürstliche Regierung wurde auch Ref. unter dem 9. Januar d. J. mit der Anzeige beehrt, daß Sr. Durchlaucht ihm Rang und Titel eines Schulraths beizulegen sich in Gnaden bewogen gefunden habe.

7. Den 10. Februar, als den Tag, an welchem Ref. vor 25 Jahren in sein hiesiges Amt eingeführt worden war, machten Letzterem seine Collegen im Verein mit den Schülern der Anstalt zu einem eben so fröhlichen als erhebenden Festtage. Unter der Leitung des seitdem schon dahingeschiedenen Kapellmeisters Schmidt und in Anwesenheit auch der Mitglieder des Fürstlichen Consistoriums eröffnete feierlicher Gesang die im Schulhause veranstaltete Festlichkeit, worauf der Prorector Nöldeke, die verflossenen 25 Lebens- und Schuljahre in einer Rede beleuchtend, die mit arbeitsfrohen, treuen und wohlwollenden Collegen getheilte Arbeit als durch Gottes Gnade gesegnet und durch des Hochseligen, wie des jetzt regierenden Durchlauchtigen Fürsten Huld zu Nutz und Frommen der Anstalt gediehen darstellte. Ein weiteres wohlthuendes Zeugniß der Liebe brachte auch der Primaner Ad. Langerfeldt in seinem und seiner Mitschüler Namen gleichfalls in einer Rede dem Ref. dar, der sich außerdem darauf von seinen Collegen unter humoristischer lateinischer Ansprache des Prorectors Nöldeke durch einen herrlichen silbernen Pokal und von seinen Schülern durch ein ausgezeichnetes Wasserleinsches Mikroskop beschenkt und geehrt, und zum Beschluß durch die herzlichsten und dankenswerthesten Wünsche, welche die Festversammlung in gemeinsamem Gesange ihm widmete, gefeiert sah.

8. Von den üblichen Klassen- oder Fachprüfungen fand hindernder Umstände wegen und mit Genehmigung der vorgesetzten Behörde nur eine statt, nämlich der Prima zu Weihnachten in Religion, Latein, Geschichte, Physik und Französisch.

9. In Folge schriftlicher und mündlicher Abiturientenprüfung verließen im Laufe des Schuljahres drei Schüler mit dem Zeugniß der Reife das Gymnasium, nämlich zu Michaelis:

1) mit dem Prädikat gut bestanden, Georg Langerfeldt, Sohn des hiesigen Justizraths L. Langerfeldt, 18¼ Jahr alt, lutherischer Confession, nachdem er das Gymnasium von Tertia an 5½ Jahr und die Prima 2½ Jahr besucht hatte. Er studirt die Rechte in Jena;
2) mit dem Prädikat bestanden, Friedrich Vollheim, Sohn des hiesigen Bahnhofs-Packmeisters Vollheim, 20½ Jahr alt, lutherischer Confession. Er besuchte das Gymnasium von Quinta an 9½ Jahr und war ebenfalls

2½ Jahr Schüler der Prima; er gedenkt, ohne sich Universitätsstudien zu widmen, sich für das Privatlehrfach auszubilden;

zu Ostern d. J.:

mit dem Prädikat gut bestanden, Dietrich Pickert, Sohn des Colons Pickert in Großenheidorn im Schaumburg=Lippischen, 21¾ Jahr alt, lutherischer Confession, nachdem er das Gymnasium von Quinta an 8 Jahre und die Prima 2 Jahre besucht hatte. Er wird Theologie studiren.

10. Sonst gingen noch im Laufe des Schuljahrs folgende Schüler vom Gymnasio ab: zu Ostern v. J. die Secundaner: A. Wenzing aus Steinbergen und H. Franke aus Siekholz im Lippischen, zum Forstfach, H. Bömers von hier zur Oekonomie nach Blomberg, Herm. Steinsiek von hier zur Fürstl. Kammerschreiberei, H. Prentis aus England (Milton, Graffsch. Kent) zu seinen Eltern zurück, W. Stümbke aus Sachsenhagen nach Hause (kehrte zu Michaelis auf die Schule zurück); die Tertianer: P. Reissert aus Fülme bei Rinteln auf die Realschule in Minden, A. Schötteln-dreier, M. Böversen, G. Neuhauß von hier in die Lehre; die Quartaner: R. Mittendorf, A. Kotzenberg von hier, C. Bieling von hier, A. Steinmann aus Minden, in die Lehre, C. Poppelbaum von hier ins elterliche Haus; die Quintaner: A. Berger von hier mit seinen Eltern nach Berlin, C. Krentler von hier in die Lehre, F. Koliska vom Bruchhof bei Stadthagen zur Vorbereitung zum Militärdienst, W. Kuhlmann von hier ins elterliche Haus; zu Johannis der Tertianer C. Vehling von hier in die Lehre, der Quintaner W. Becker aus Bochum in Westfalen in die Heimat; zu Michaelis die Primaner: A. Völker aus Gehlenbeck bei Lübbeke auf das Gymnasium in Herford, W. Niemeier aus Obernkirchen auf das Gymnasium in Rinteln; die Secundaner: B. v. Arentsschildt aus Mainz zur Oekonomie, C. Bradt aus Obernkirchen auf das Gymnasium in Rinteln; der Quartaner Herm. Pape von hier in die Lehre; zu Weihnachten die Secundaner: G. Sänger von hier zum Postfach, die Seminaristen E. Giesecking und H. Heisterberg von hier und C. Brandt aus Lauenhagen zum weiteren Besuch des Seminars. Auch in diesem Schuljahre mußte das Lehrer=Collegium gegen einen Schüler die Ausweisung aus der Anstalt verfügen.

Hiernach betrug die Frequenz der Schüler im Laufe des ersten Semesters 163, 9 weniger als im vorigen Jahre, im zweiten 174, 15 mehr als im vorigen Jahre, worunter 44 Schüler, deren Eltern oder Angehörige ihren Wohnsitz nicht in Bückeburg haben. Von jenen Zahlen kamen

	auf I.	auf II.	auf III.	auf IV.	auf V.	auf VI.
zu Anfang des 1. Semesters	11.	23.	40.	46.	43.	—
" " " 2. "	8.	20.	38.	47.	39.	22

Freischüler waren im letzten Quartale 16.

III. Lehrapparat und Sammlungen.

1. Für die Bibliothek wurden erworben, außer den Fortsetzungen der Neuen Jahrbücher für Philologie und Pädagogik und des Archivs für das Studium der neuern Sprachen und Literaturen, aus einem gemeinschaftlichen Journal-Lesezirkel des hiesigen und des Mindenschen Gymnasiums: Zeitschrift für das Gymnasialwesen von Hollenberg u. A., XVII. Jahrg., und Langbeins pädagogisches Archiv, V. Jahrg.; durch Ankauf: Ph. Wackernagel, das deutsche Kirchenlied, I. Band, Fr. Förster, neuere und neueste Preußische Geschichte, 5 Bände, Höltys Gedichte, Eulers Briefe über verschiedene Gegenstände aus der Naturlehre, 3 Bände, Herm. de Lerbecke, Chronicon comitum Schawenburgensium, illustr. a H. Meibom. Francof. 1620. Weisser, Lebensbilder aus dem klassischen Alterthum, Forschungen zur deutschen Geschichte, herausg. von der hist. Commission der bairischen Akademie d. W., IV. Band. Das neue Schulgesetz und die Schulreform im Herzogthum Gotha, 1864. Wagner, das Volksschulwesen in England, Schnell, die Beschränkung des Schulunterrichts auf die Vormittagszeit, dess. Zur Pädagogik der That, Lübker, Grundzüge der Erziehung und Bildung für das deutsche Haus. Geschenkt wurden: vom Fürstlichen Consistorio, Wiese, das höhere Schulwesen in Preußen (1864), Statistische Nachrichten über das Elementar-Schulwesen in Preußen für die Jahre 1859 — 1861, Engelien, Leitfaden für den deutschen Sprachunterricht, II. Theil; von dem Herrn Justizrath O. Langerfeldt: Forkel, musikalisch-kritische Bibliothek, 2 Theile, Frh. v. Donop, Karte von der Grafschaft Lippe; von dem östr. Seekadet, Herrn Fr. Mensing, ehemaligem Schüler des Gymnasii, zwei große Photographien des Tempels des Olympischen Zeus und des Theseus aus Athen; von dem Herrn Gymnasiallehrer Notholz: Sti Augustini de civitate dei libri ed. Strange, 2 Bände; von dem Herrn Conrector Dr. Fuchs: Denkwürdigkeiten des Grafen Wilhelm zu Schaumburg-Lippe, mehrere kleinere Schriften des ehem. hies. Hofraths Bernh. Faust; von dem Herrn Forstrendanten Zahn: Darlegung der Ursachen, aus welchen des Landgr. zu Hessen-Cassel Durchl. den von dem Gr. Philipp Ernst besessenen Theil der Grafsch. Schaumburg als eröffnetes Lehen betrachten (1787). Perlen der neueren englischen und amerikanischen Lyrik, von dem Verf. K. Vollheim, ehemaligem Zöglinge des Gymnasii; von der Teubnerschen Verlagsbuchhandlung: Heinichen, lateinisch-deutsches Schulwörterbuch, II. Abth.; von dem Herrn Consistorial- und Justizcanzlei-Secretair Burchard: eine Sammlung von Gelegenheitsgedichten zur Feier besonderer Ereignisse in der Schaumburg-Lippischen Geschichte; von Anderen: Schasler, die königl. Museen in Berlin, Theilkuhl, deutsches Lesebuch, Katalog der Loebellschen Bibliothek, u. A. — Auch die Schüler-Lesebibliothek hat dankenswerthe Geschenke, theils von der C. Rümplerschen Verlagsbuchhandlung in Hannover, theils von Schülern des Gymnasiums (dem Tertianer Al. Meyer, den Quartanern D. Herzberg, Ch. Altenburg, F. Möhlenpah, H. Bratsch) erhalten.

2. Für das physikalische Cabinet wurden eine Electrisirmaschine und eine Luftpumpe mit den nöthigen Apparaten angekauft. Sr. Durchlaucht der Prinz Wilhelm zu Schaumburg-Lippe auf Nachod in Böhmen verehrte der Schule ein sehr ansehnliches und höchst instructives Modell einer Dampfmaschine zur Erläuterung der Locomotive.

3. Die naturhistorischen Sammlungen beschenkten: Sr. Durchlaucht der Erbprinz Georg von Schaumburg-Lippe mit mehreren deutschen Sumpf- und Schwimmvögeln, Prinz Hermann und Prinzessin Ida Durchl. mit verschiedenen Quallen, Seesternen, Tobiasfischen und Krebsen aus Norderney, Herr Particulier Rodemann mit einem neuholländischen Papagei, Herr. Major Pätz aus Hagenburg und Herr Assessor Wippermann ebend. mit zwei Kampfhähnen, Herr Studiosus O. v. Linstow mit einer Anzahl deutscher Schmetterlinge, der ehemalige Secundaner C. v. Stach mit drei auf einer Reise nach Amerika aus Neu-Braunschweig für die Schule mitgebrachten Echinolampas-Arten, Herr E. Focke aus Bremen, früher Zögling des Gymnasii, mit chinesischen, von einer Reise nach Japan heimgebrachten Conchylien aus den Gattungen Bulimus, Cerithium, Conus, Venus u. a., der frühere Secundaner B. Burchard mit Conchylien aus Singapore (Arca, Hemicardium, Tellina), derselbe mit Früchten der Elephantusia macrocarpa (Pflanzenelfenbein), der Quartaner Ch. Altenburg mit der großen Fruchthülse einer tropischen Leguminose.

4. Die Münzsammlung wurde um 56 Stücke, darunter brasilianische, holländisch-javanische, und spanisch-ostindische (von Fräul. Marie Bensen), türkische, arabische und siamesische (von C. v. Stach), eine japanesische Silbermünze (von Herrn Ed. Focke aus Bremen), ein Zweiguldenstück von Kaiser Rudolph II. (von Herrn Hülfslehrer Bargheer), eine große Silbermünze mit dem Bildniß der Kaiserin Marie Theresia (von B. Burchard aus Bremen) bereichert.

Das neue Schuljahr beginnt am 24. April, morgens 9 Uhr, mit der Verlesung der Schulordnung, Einführung der neu aufgenommenen, Ueberweisung der versetzten Schüler in ihre Klassen und der Bekanntmachung des Stundenplans.

Burchard.

2. Für das ectrisirmaschine und eine Luft=
pumpe mit den n chlaucht der Prinz Wilhelm
zu Schaumburg=L r Schule ein sehr ansehnliches
und höchst instruc rläuterung der Locomotive.

3. Die nat n: Sr. Durchlaucht der Erb=
prinz Georg vo chen Sumpf= und Schwimm=
vögeln, Prinz He it verschiedenen Quallen, See=
sternen, Tobiasfi Particulier Rodemann mit
einem neuholländi Hagenburg und Herr Assessor
Wippermann tudiosus O. v. Linstow mit
einer Anzahl deut ndaner C. v. Stach mit drei
auf einer Reise für die Schule mitgebrachten
Echinolampas-Ar r Zögling des Gymnasii, mit
chinesischen, von onchylien aus den Gattungen
Bulimus, Cerithi ecundaner V. Burchard mit
Conchylien aus a), derselbe mit Früchten der
Elephantusia ma ner Ch. Altenburg mit der
großen Fruchthüls

4. Die Mü arunter brasilianische, hollän=
disch=javanische, u rie Bensen), türkische, ara=
bische und siamesi sche Silbermünze (von Herrn
Ed. Focke aus ser Rudolph II. (von Herrn
Hülfslehrer Barg n Bildniß der Kaiserin Marie
Theresia (von V.

Das neue S 9 Uhr, mit der Verlesung der
Schulordnung, E weisung der versetzten Schüler
in ihre Klassen un ns.

Burchard.