Die Abweichung fallender Körper von der Vertikalen.

Als Kopernikus die tägliche Bewegung der Sterne durch die Annahme der Drehung der Erde um sich selbst erklärt hatte, fand diese Ansicht zumal von kirchlicher Seite vielen Widerspruch. Unter den zahlreichen Einwürfen war auch der, dass fallende Körper mit einer der Drehung entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeit von Osten nach Westen fliegen müssten, wenn die Erde sich «unter ihnen weg» von Osten nach Westen drehte. So lächerlich uns dieser Einfall zu sein scheint, ebenso grosse Wirkung hatte er damals. Denn das Gesetz des Beharrungsvermögens war noch nicht ausgesprochen, es war nur in den besten Köpfen, gewissermassen latent, vorhanden. Daher war den Anhängern der kopernikanischen Weltanschauung der Angriff sehr unangenehm. Obgleich sie den Fehler bemerkten, konnten sie ihre Gegner nicht leicht gemeinfasslich widerlegen. Erst als Galilei das Gesetz der Trägheit formulirte, war dem Einwurf jeder Halt entzogen. Trotzdem blieb der Eindruck haften. Uebrigens findet man selbst jetzt noch manchmal in gelehrten Werken noch Reste derselben Anschauung.

So erregte es grosse Freude, als Newton entdeckte, dass ein fallender Körper nach Osten von der Lothlinie abweichen müsse, weil wegen der grösseren Entfernung von der Erdaxe die Drehungsgeschwindigkeit in der Höhe grösser ist, als in der Tiefe. Die im Auftrage der Royal Society in London von Hooke in der Paulskirche angestellten Versuche gaben jedoch kein Resultat, was als Böswilligkeit Hooke's ausgelegt wurde. Doch mussten die Versuche auch beim besten Willen erfolglos bleiben, da die Theorie der Beobachtungsfehler noch unbekannt, auch die Fallhöhe zu gering war, und man überhaupt von den Schwierigkeiten, die zu überwinden waren, keine Ahnung hatte. Man glaubte, dass jeder einzelne Fall die Abweichung deutlich zeigen müsste, während sie sich hinter den unvermeidlichen Fehlern derart verbirgt, dass sie nur aus dem Mittel sehr vieler Beobachtungen berechnet werden kann. Ausserdem hielt man die Abweichung für grösser, als sie ist, da Newton mit den andern Grössen, die vernachlässigt werden müssen, auch die Aenderung in der Richtung der anziehenden Kraft in Folge der Drehung der Erde unberücksichtigt gelassen hatte. Dies ist unstatthaft, da dieser Umstand die Abweichung um ein Drittel etwa verringert. Erst Gauss hat hierauf aufmerksam gemacht.

Am Ende des vorigen Jahrhunderts nahm Guglielmini in Bologna die Versuche wieder auf. Er benutzte dazu denselben im Innern hohlen Thurm, *degli Asinelli*, an dem schon Riccioli und

Grimaldi die galileïschen Fallgesetze geprüft hatten. Hierbei ergab sich ausser der östlichen auch eine ungefähr ebenso grosse südliche Abweichung der fallenden Kugeln, die ganz unerklärlich zu sein schien. Da aber Guglielmini den Luftzug nicht hinreichend hatte abschliessen können, so wurde diesem die Veranlassung zugeschrieben. Natürlich hätte aber dann der Luftzug ebensogut die östliche Abweichung herbei führen können, und es fehlte also den Versuchen jede Beweiskraft, wenn man nicht die südliche Abweichung, als in der Natur des Falles begründet, erklären konnte.

Als daher Benzenberg im Michaelisthurme in Hamburg den Widerstand der Luft auf fallende Kugeln experimentell ermitteln wollte, um zwischen den verschiedenen willkürlichen Annahmen das richtige zu finden, verband er mit diesen Versuchen auch eine Untersuchung über die Abweichung der fallenden Körper von der Lothlinie. Er erhielt ebenfalls eine südliche Abweichung, wenn auch beträchtlich geringer, als die östliche.

Dasselbe Resultat hatten Fallversuche, die Reich in Freiberg in einem Schachte anstellte. Diese verdienen das meiste Vertrauen, da er den Luftzug durch eine eigens erbaute Zimmerung soweit nur irgend möglich abgeschnitten hatte. Trotzdem erhielt er ebenfalls beide Abweichungen.

Das Resultat war bei einer Fallhöhe von 158 Metern eine östliche Abweichung von 28,396 Millim.
eine südliche » von 4,374 »
während der mittlere Fehler 2,7 Millimeter betrug.

Als Beweis für die Drehung der Erde hat der Gegenstand das Interesse nicht mehr, wie früher, da es andere Beweise in hinlänglicher Zahl giebt, und z. B. das Foukaultsche Pendel viel weniger Mühe verursacht. Dafür ist die pädagogische Wichtigkeit noch sehr gross.

Fast jeder eifrige und nachdenkende Anfänger wiederholt in sich theilweise und abgekürzt den Entwickelungsgang, den die Wissenschaft genommen hat, auf fast jeden macht der aus dem Fall der Körper entnommene Einwurf gegen die Drehung der Erde noch denselben Eindruck, wie vor 300 Jahren, trotz des bekannten Trägheitsgesetzes. Die mangelnde Erklärung der südlichen Abweichung hindert, dass dieser Eindruck durch die Bekanntschaft mit der östlichen Abweichung verwischt wird. Daher lohnt es sich, die Abweichung fallender Körper von der Vertikalen noch einmal zu untersuchen.

Die östliche Abweichung.

Die östliche Abweichung fallender Körper von der Vertikalen rührt von dem Unterschiede zwischen der östlichen Geschwindigkeit des Abfallpunktes, und also auch des fallenden Körpers, und der etwas geringern des Lothpunktes her; zu einem kleinen Theil auch von der kreisförmigen Bewegung des letztern. Vermindert wird sie durch die Aenderung in der Richtung der anziehenden Kraft in Folge der Bewegung nach Osten. Daher darf man die Bahn des fallenden Körpers nicht als eine parabolische ansehen. Sei ϱ (Figur 1) die Entfernung des Abfallpunktes A von der Erdaxe, f die Fallhöhe ($A\ B$), φ die Breite ($\angle\ B\ A\ E$), φ' ($\angle\ C\ A\ E$) der Winkel zwischen der anziehenden Kraft und dem Aequator, $A\ C$ also die Richtung der anziehenden Kraft, $A\ B$ die der

Resultante aus der anziehenden und der Centrifugalkraft, die wir als Schwere bezeichnen. Sei ferner t die Fallzeit, T der Sterntag (beides in Sekunden mittlerer Zeit). Dann ist der von dem Punkte A in Folge der Umdrehung der Erde durchlaufene Weg $2\,\varrho\,\pi$, die Umlaufszeit T, die Geschwindigkeit also $\frac{2\,\varrho\,\pi}{T}$. Dieselbe, nach Osten gerichtete Geschwindigkeit hat also der fallende Körper und würde in Folge dessen in t Sekunden die Strecke von $\frac{2\,\pi\,\varrho\,t}{T}$ Millimetern zurücklegen.

Die Entfernung des Lothpunktes B von A ist f, der Winkel zwischen f und ϱ φ, die Entfernung von B von der Erdaxe also $\varrho - f\cos\varphi$. Die Bahn von B ist ein Kreis mit dieser Grösse als Radius. Der von B durchlaufene Bogen ist also für T Sekunden $2(\varrho - f\cos\varphi)\,\pi$; in t Sekunden folglich $\frac{2\,(\varrho - f\cos\varphi)\,\pi\,t}{T}$. Sei B' die Lage von B nach Ablauf der t Sekunden, so ergiebt sich die Entfernung dieses Punktes von der Ebene $A\,B\,C$ in ihrer ursprünglichen Lage als $(\varrho - f\cos\varphi)$ $\sin\frac{2\,\pi\,t}{T}$, wo der Mittelpunktswinkel in Theilen von π berechnet ist. Diese Entfernung ist ebenfalls nach Osten gerichtet. Könnte man also die Bahn des fallenden Körpers als parabolisch ansehen, so erhielte man seine östliche Abweichung von dem Auffallspunkte B' als die Differenz zwischen der Entfernung des fallenden Körpers von der Meridianebene $A\,B\,C$, und derjenigen des Lothpunktes B' von dieser Ebene sehr einfach als $\frac{2\,\varrho\,\pi\,t}{T} - (\varrho - f\cos\varphi)\sin\frac{2\,\pi\,t}{T}$. In Folge der Grösse der östlichen Geschwindigkeit $\frac{2\,\varrho\,\pi}{T}$ ist die Annahme einer parabolischen Bewegung jedoch unzulässig, und muss also die Wirkung der Anziehung in horizontaler Richtung abgezogen werden. Denn da die Richtungen der Anziehung in denselben Punkt der Erdaxe convergiren, ist der nach Osten fortschreitende Körper einer westlichen Komponente der Anziehung unterworfen.

Die Richtung der Anziehung zur Zeit τ bildet mit der ursprünglichen Lage von $A\,C$ den Winkel $C\,M\,F$ (Siehe Figur).

Nun ist $tg\,C\,M\,F = F\,C : C\,M$ und ferner $F\,C = \varrho.\,\frac{2\,\pi\,\tau}{T}$; $C\,M = \varrho : \cos\varphi'$. Dieser Werth ist nur angenähert, da ja der fallende Körper die Linie $C\,F$ erst gegen Ende des Falles erreicht und noch einige Grössen vernachlässigt sind. Die Unterschiede gegen die wirklichen Werthe können aber nicht in Rechnung gezogen werden, da sie allzu klein sind und das Resultat gar nicht beeinflussen. Die Ebene $A\,C\,F$ ist aber Bahnebene des Körpers, und nicht etwa die in $A\,B$ senkrecht zu $A\,B\,C$ stehende, weil nur der festgehaltene Körper, wie das Loth, der Centrifugalkraft unterworfen ist, nicht aber der freifallende.

Da in allen vorkommenden Fällen $\tau < 7''$ ist, so können die Winkel ihren Sinus und Tangenten gleich gesetzt werden, so lange sie nicht mit sehr grossen Faktoren multiplicirt werden. Dies giebt für den Winkel zwischen der alten und spätern Richtung der Anziehung $\frac{2\,\pi\cos\varphi'\,\tau}{T}$. Daher ist die nach Westen treibende Kraft $\frac{2\pi \cos\varphi' \tau g'}{T}$, wobei g' die Grösse der anziehenden Kraft, g die Schwere bedeutet. Um hieraus für die des Integrirens Unkundigen den zurückgelegten Weg zu berechnen, muss ein Exhaustionsverfahren eingeschlagen werden, wofür ich auf den Anhang verweise.

Durch Integriren ergiebt sich aus der Kraft $p = a\tau$ die Geschwindigkeit $v = \frac{1}{2} a \tau^2$, der zurückgelegte Weg $\varsigma = \frac{1}{6} a \tau^3$; daher in diesem Falle

$$\varsigma = \frac{1}{3} \frac{\pi \cos\varphi' g' t^3}{T}$$; da für den Anfang $\tau = o$, den Schluss $\tau = t$ ist.

Da diese Bewegung westlich ist, muss sie von der östlichen Abweichung abgezogen werden, was, wie schon bemerkt, Gauss zuerst gethan hat. Dann ergiebt sich die östliche Abweichung (a)

$$a = \varrho\left(\frac{2\pi t}{T} - \sin\frac{2\pi t}{T}\right) + f\cos\varphi \frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{3}\frac{\pi\cos\varphi' g' t^3}{T.}$$

Diesmal dürfen $\frac{2\pi t}{T}$ und $\sin\frac{2\pi t}{T}$ nicht gleich gesetzt werden, da ihre Differenz mit dem sehr grossen Faktor ϱ multiplicirt ist.

Es sind nun noch g', ϱ und φ' aus g und φ zu berechnen.

Zur Berechnung von ϱ betrachten wir den Meridian als eine Ellipse (Fig. II) mit der Gleichung:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, worin a den Halbmesser des Aequators; b die halbe Erdaxe bedeutet. Auf der Erde wird ein Punkt dieser Ellipse durch seine Breite bestimmt, d. h. durch den Winkel zwischen der Normalen, in unserm Falle der Lothlinie, und der grossen Halbaxe, dem Aequator. Dieser Winkel φ ergiebt sich aus der Gleichung

$$tg\,\varphi = \frac{a^2 y}{b^2 x},$$ aus der folgt:

$$b^2 x\, tg\,\varphi = a^2 y \text{ und, da } \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$b^2 x^2\, tg\,\varphi^2 = \frac{a^4 y^2}{b^2} = a^4\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2\, tg\,\varphi^2}} = \varrho$$

$$\varrho = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\, tg\,\varphi^2}}$$; setzen wir $\frac{b}{a}\, tg\,\varphi = tg\,\psi$,

so ergiebt sich, da $\frac{1}{\sqrt{1 + tg\,\psi^2}} = \cos\psi$

$$\varrho = a\cos\psi.$$

Verzichtet man auf die Betrachtung der Ellipse, und betrachtet den Meridian als Kreis mit dem

Radius a, so wird $\varrho = a \cdot \cos\varphi$, welches Resultat zu klein ist, aber die Abweichung nicht übermässig falsch ergiebt.

φ' wird aus φ und g, sowie der Centrifugalkraft durch das Parallelogramm der Kräfte gefunden. Siehe Figur 3. Sei $A\,C$ der Anziehung, $A\,D$ der Centrifugalkraft proportional, $\sphericalangle\, E\,A\,C = \varphi'$, so ist $A\,B$ der Schwere proportional und $\sphericalangle\, EAB = \varphi$. Bezeichnen wir die Centrifugalkraft mit c, so ist $c = 4\,\pi^2 \frac{\varrho}{T^2}$ und im Dreieck $A\,B\,C$ bekannt

$$B\,C = c,\; A\,B = G,\; \sphericalangle\, A\,B\,C = \pi - \varphi\,.$$

Aus der trigonometrischen Formel $\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta)}{tg\,\frac{1}{2}\,(\alpha-\beta)}$ ergiebt sich: $\frac{g+c}{g-c} = \frac{tg\,\frac{1}{2}\,\varphi}{tg\,\frac{1}{2}\,(2\,\varphi'-\varphi)}$, woraus φ' berechnet wird. Dann ist g' bekannt aus der Formel:

$$g : \sin\varphi' = g' : \sin\varphi\,.$$

Bei Berechnung der Centrifugalkraft müsste der Umstand, dass ein Theil des Druckes durch die Luft getragen wird, berücksichtigt werden, wenn dessen Einfluss auf das Resultat nicht zu unbedeutend wäre.

Hiernach sind also alle in dem Ausdrucke für die östliche Abweichung

$$\varrho\left(\frac{2\,\pi\,t}{T} - \sin\frac{2\,\pi\,t}{T}\right) + f\cos\varphi\,\frac{2\,\pi\,t}{T} - \frac{1}{3}\,\frac{\pi\cos\varphi'\,g'\,t^3}{T}$$

vorkommenden Grössen berechenbar.

Zu bemerken ist noch, dass die östliche Abweichung in der Richtung senkrecht gegen die ursprüngliche Meridianebene $A\,B\,C$ berechnet ist, aber in der senkrechten Richtung gegen die Meridianebene durch B' gemessen wird. Man müsste also noch mit $\cos\frac{2\,\pi\,t}{T}$ multipliciren, dieser Faktor aber ist bei der geringen Grösse von t von 1 nicht zu unterscheiden.

Die südliche Abweichung.

Da auf den frei fallenden Körper die Centrifugalkraft nicht einwirkt, wol aber auf das Loth, so fällt er nicht in der durch seine Anfangsgeschwindigkeit und das Loth (die Schwere) bestimmten Ebene, sondern in der Ebene, welche durch seine Anfangsgeschwindigkeit und die Richtung der Anziehung bestimmt wird. Ihre Spur in der anfänglichen Lage der Aufschlagebene steht senkrecht zum Meridian und liegt um $f\,tg\,(\varphi - \varphi')$ nördlich vom Lothpunkte B. Bei der Drehung beschreibt B einen Kreis mit dem Radius $\varrho - f\cos\varphi$, welcher die Bahnebene schneidet. Ob also B' südlich oder nördlich von dieser Ebene liegt, hängt nur von der Zeit t ab. Siehe Figur IV.

Sei A wieder der Abfallpunkt, B der Lothpunkt, in der Anfangslage der untern Horizontalebene $Z\,B\,G$, $A\,E$ die Richtung der Anziehung in der Ebene $Z\,B\,A$ und $E\,G$ in der zur Erdaxe senkrechten Ebene $E\,H\,G$. Seien ferner B' und E' die Lagen von B und E zur Zeit des Aufschlages, $G\,F$ die Durchschnittslinie der Meridianebene $Z\,E'\,H$ und der Bahnebene, und F in der Linie $Z\,E'\,B'$ gelegen. Ohne die östliche Abweichung würde der Körper also in F auffallen. Bei der geringen

Grösse der östlichen Abweichung ist ihr Einfluss hier so gering, dass er nicht mit in Rechnung gezogen werden kann. Die südliche Abweichung ist dann

$F B' = F E' - B E$; $B E = A B \, tg \, B A E = f \, tg \, (\varphi - \varphi')$, da $\sphericalangle B A C = \varphi$ und $\sphericalangle E A C = \varphi'$.

$F E'$ ergiebt sich aus dem Dreieck $G E' F$, aus welchem $G E' = G H - E' H$. Nun ist aber $E' H = E H = \varrho - f \cos \varphi - B E \sin \varphi$. Der Winkel $E H G$ ist $\frac{2 \pi t}{T}$, also $G H = E H \frac{1}{\cos \frac{2 \pi t}{T}}$.

Danach ergiebt sich:

$$G E' = G H - E H = E H \left(\frac{1}{\cos \frac{2 \pi t}{T}} - 1 \right) = \frac{E H \, 2 \left(\sin \frac{\pi t}{T} \right)^2}{\cos \frac{2 \pi t}{T}}$$

$$G E' = \frac{(\varrho - f \cos \varphi - B E \sin \varphi) \, 2 . \left(\sin \frac{\pi t}{T} \right)^2}{\cos \frac{2 \pi t}{T}}$$

$G E' = \frac{\varrho}{2} \left(\frac{2 \pi t}{T} \right)^2$, wenn die numerisch nicht bemerkbaren Theile vernachlässigt werden. Ferner ist aus dem Dreieck $G E' F$ bekannt:

$$\sphericalangle G E' F = Z E' H = Z E H = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$\sphericalangle F G E'$ berechnet sich aus dem $\triangle G H M$, in welchem

$M H = E H \, tg \, \varphi'$ und

$tg \, E' G F = \frac{M H}{H G} = tg \, \varphi' \cos \frac{2 \pi t}{T}$ ist. Da der Faktor von $tg \, \varphi'$ 1 gesetzt werden muss, ist $\sphericalangle E' G F = \varphi'$ zu setzen. Dann ist also $\sphericalangle G F E' = \pi - \varphi' - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{\pi}{2} + (\varphi - \varphi')$.

Also ist $F E' : \sin \varphi' = G E' : \cos (\varphi - \varphi')$

$$F E' = \frac{G E' \sin \varphi'}{\cos (\varphi - \varphi')} = \frac{\left(\varrho \frac{2 \pi t}{T} \right)^2 \sin \varphi'}{2 \cos (\varphi - \varphi')} .$$

Also wird die südliche Abweichung:

$$F B' = F E' - B E' = \frac{\varrho \left(\frac{2 \pi t}{T} \right)^2 \sin \varphi'}{2 \cos (\varphi - \varphi')} - f \, tg \, (\varphi - \varphi').$$

Alle hierbei vernachlässigten Grössen beeinflussen das Resultat in keiner Weise, da sie zu klein sind. Vor der numerischen Rechnung ist hier noch folgendes zu bemerken. Das Loth richtet sich wesentlich nach der Breite in B, diese könnte von der in A differiren. Dies ist auch in der That der Fall, aber so wenig, dass es nicht berücksichtigt werden kann.

Hiernach wächst die südliche Abweichung bedeutend mit der Grösse von t und ist also vom Luftwiderstande wesentlich abhängig, da dieser t vergrössert. Es ist dies der einzige Weg, wie dieser Widerstand in Rechnung gezogen werden kann, da seine Theorie unbekannt ist. t muss also experimentell genau bestimmt werden, wovon später weiter die Rede sein wird.

Anwendung auf die Versuche von Reich.

Für die Reich'schen Versuche ist gegeben:

Die Breite: $\varphi = 50^\circ\ 53'\ 22'',\ 81$;
die Meereshöhe 475^m
die Fallhöhe $f = 158{,}5407^m$
die Fallzeit $t = 360{,}59$ Tertien $= 6{,}0098''$.

Die Kugeln wogen 270,45 Gramm und hatten das specifische Gewicht 7,878.

Die (leider nur berechnete) Schwere ist $\frac{1}{2}\ G = 4{,}90493^m$, nach Anbringung der Korrektion wegen des Gewichtes der Luft $4{,}90439^m$.

Zunächst muss ϱ berechnet werden.

Ist a der Radius des Aequator's (in Metern), b die halbe Erdaxe, so ist

$$\begin{aligned}
log\ \frac{b}{a} &= 0{,}99855 - 1\\
log\ tg\ \varphi &= 0{,}08992\\
\hline
log\ tg\ \psi &= 0{,}08847\\
\psi &= 50^\circ 47' 45''\\
log\ cos\ \psi &= 9{,}80078 - 10\\
log\ a &= 6{,}80464\\
\hline
log\ \varrho &= 6{,}60542
\end{aligned}$$

nach den Formeln $\frac{b}{a}\ tg\ \varphi = tg\ \psi,\ \varrho = a\ cos\ \psi$. Diese Grösse ϱ muss nun noch der Meereshöhe wegen vermehrt werden. Nun ist *Num logi* 6,60542 $= 4031100$, $475\ cos\ \varphi = 260^m$ also $\varrho = 4031400^m$. $log\ \varrho = 6{,}60545$. Der erste Theil der östlichen Abweichung war $A = \varrho \left(\frac{2\pi t}{T} - sin\ \frac{2\pi t}{T}\right) = \varrho\ \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi t}{T}\right)^3 - \ldots$ Die folgenden Glieder kommen nicht in Betracht.

$$\begin{aligned}
log\ 2 &= 0{,}30103\\
log\ \pi &= 0{,}49715\\
log\ t &= 0{,}77886\\
\hline
log\ 2\pi t &= 1{,}57704
\end{aligned}$$

Da $T = 86164''$, so ist

$$\begin{aligned}
log\ T &= 4{,}93533\\
\hline
log\ \frac{2\pi t}{T} &= 0{,}64171 - 4\\
log \left(\frac{2\pi t}{T}\right)^3 &= 0{,}92513 - 11\\
log\ \tfrac{1}{6} &= 0{,}22185 - 1\\
log\ \varrho &= 6{,}60545\\
\hline
log\ A &= 0{,}75243 - 5
\end{aligned}$$

$A = 0{,}0000\ 56550^m$

Das zweite Glied war $B = f \cos\varphi \frac{2\pi t}{T}$

$$\begin{aligned}
\log \frac{2\pi t}{T} &= 0{,}64171 - 4 \\
\log \cos\varphi &= 9{,}79990 - 10 \\
\log f &= 2{,}20014 \\
\hline
\log B &= 0{,}64175 - 2\,; \quad B = 0{,}043828^{m} \\
& \qquad A + B = 0{,}043885^{m}
\end{aligned}$$

Das dritte Glied $- C = - \frac{1}{3} \frac{\pi \cos\varphi' g' t^3}{T}$. Wir müssen also erst φ' und g' berechnen. Dies geschieht nach den Formeln: $c = \frac{4\pi^2 \varrho}{T^2}$

$$\frac{g+c}{g-c} = \frac{tg\,\frac{1}{2}\varphi}{tg\,\frac{1}{2}(2\varphi' - \varphi)}$$

$$\begin{aligned}
\log 4 &= 0{,}60206 \\
\log \pi^2 &= 0{,}99430 \\
\log \varrho &= 6{,}60545 \\
\hline
& \quad 8{,}20181 \\
\log T^2 &= 9{,}87066 \\
\hline
\log c &= 0{,}33115 - 2
\end{aligned}$$

$c = 0{,}021436$. Um nicht noch an c die Luftkorrektion anbringen zu müssen, wählen wir für g den Werth ohne diese Korrektion, was wegen Aehnlichkeit der betreffenden Parallelogramme möglich ist.

$$\begin{aligned}
g &= 9{,}80986 \\
c &= 0{,}02144 \\
\hline
g + c &= 9{,}83130 \qquad & \log(g+c) &= 0{,}99261 \\
g - c &= 9{,}78842 \qquad & \log(g-c) &= 0{,}99071 \\
& & \log \frac{g-c}{g+c} &= 9{,}99810 - 10 \\
\tfrac{1}{2}\varphi &= 25^0\,26'\,41{,}4'' & \log tg\,\tfrac{1}{2}\varphi &= 9{,}67742 - 10 \\
\hline
\log g &= 0{,}99157 & \log tg\,(\varphi' - \tfrac{1}{2}\varphi) &= 9{,}67552 - 10 \\
\log \sin\varphi &= 9{,}88982 - 10 & \varphi' - \tfrac{1}{2}\varphi &= 25^0\,20'\,52'' \\
\hline
& \quad 0{,}88139 & \tfrac{1}{2}\varphi &= 25^0\,26'\,41'' \\
\hline
\log \sin\varphi' &= 9{,}88922 - 10 & \varphi' &= 50^0\,47'\,33'' \\
\log g' &= 0{,}99217 & \varphi - \varphi' &= \quad 5'\,49''
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung von C muss der Werth von g' mit Luftkorrektion angewendet werden, wie oben geschehen.

$$-C = -\frac{1}{3}\frac{\pi \cos\varphi' g' t^3}{T}.$$

$$\begin{aligned}
\log \pi &= 0{,}49715\\
\log g' &= 0{,}99217\\
\log \cos\varphi' &= 9{,}80081\\
\log t^3 &= 2{,}33658\\
\hline
&\ 3{,}62671\\
\log T &= 4{,}93533\\
\hline
&\ 0{,}69138 \ -2\\
\log 3 &= 0{,}47712\\
\hline
\log C &= 0{,}21426 \ -2\\
-C &= -0{,}016378\\
A + B &= 0{,}043885\\
\hline
A + B - C &= 0{,}027507
\end{aligned}$$

, also die östliche Abweichung $27\frac{1}{2}$ Millimeter.

Die südliche Abweichung war $\frac{\varrho}{2}\left(\frac{2\,\pi\,t}{T}\right)^2 \sin\varphi' - f\,tg\,(\varphi - \varphi')$, $= D - E$, wobei im ersten Gliede der Faktor $1 : \cos\,(\varphi - \varphi')$ weggelassen ist, da jetzt deutlich, dass er unwirksam ist.

$$\begin{aligned}
\log \varrho &= 6{,}60545\\
\log\left(\frac{2\,\pi\,t}{T}\right)^2 &= 0{,}28342 - \ 7\\
\log \sin\varphi' &= 9{,}88922 - 10\\
\hline
&\ 0{,}77809 - \ 1\\
\log 2 &= 0{,}30103\\
\hline
\log D &= 0{,}47706 - \ 1\\
D &= 0{,}29996\\
\log f &= 2{,}20014\\
\log tg\,(\varphi - \varphi') &= 7{,}22840 - 10\\
\hline
\log E &= 0{,}42854 - \ 1\\
E &= 0{,}26825\\
D - E &= 0{,}03171.
\end{aligned}$$

Die südliche Abweichung ist also 32 Millimeter. Hierbei sind (wegen $\varphi - \varphi'$) die beiden letzten Stellen von $D - E$ ungenau, welchem Uebelstande durch eine andere Berechnung von $\varphi - \varphi'$ abgeholfen werden könnte, doch hat dies hier keine Wichtigkeit.

Gefunden hat Reich als östliche Abweichung 28,4mm, als südliche 4,37, mit einem mittleren Fehler von 2,7mm. Der Unterschied ist also sehr gross bei der südlichen, innerhalb des mittleren Fehlers bei der östlichen Abweichung.

Um die Ursache des Fehlers zu finden, berechnen wir die Zeit t', bei welcher die südliche Abweichung mit der beobachteten stimmt, sowie die Fallzeit t'' im luftleeren Raume.

Letztere ergiebt nach der gewöhnlichen Formel $f = \frac{1}{2}\,g\,t^2$ $t'' = 5{,}686$, welches allerdings nur auf 3 Stellen sicher richtig ist. Die Verzögerung durch den Luftwiderstand wäre also 0,324 Sekunden.

Berechnen wir t' aus der südlichen Abweichung, so erhalten wir die Gleichung

$a\,t'^2 - b = c.$ Nun war $a\,t^2 = D = 0{,}29996$

$$
\begin{aligned}
\log D &= 0{,}47706 - 1\\
\log t^2 &= 1{,}55772\\
\hline
\log a &= 0{,}91934 - 3\\
b = E &= 0{,}26825\\
c &= 0{,}00437\\
\hline
b + c &= 0{,}27262\\
\log (b + c) &= 0{,}43556 - 1\\
\log a &= 0{,}91934 - 3\\
\hline
\log t'^2 &= 1{,}51622\\
\log t' &= 0{,}75811\\
t' &= 5{,}7294
\end{aligned}
$$

, also zwischen t und t''. Die östliche Abweichung für die Fallzeit t' berechnet sich einfach in folgender Weise. Wir bezeichnen sie mit $d\,t - e\,t^3$, so war

$$
\begin{aligned}
d\,t = A + B &= 0{,}043885\\
\log d\,t &= 0{,}64132 - 2\\
\log t &= 0{,}77886\\
\hline
\log d &= 0{,}86246 - 3\\
\log t' &= 0{,}75811\\
\hline
\log d t' &= 0{,}62057 - 2\,, & d\,t' &= 0{,}041742\\
\log C = \log e t^3 &= 0{,}21426 - 2\\
\log t^3 &= 2{,}33658\\
\hline
\log e &= 0{,}87768 - 3\\
\log t'^3 &= 2{,}27433\\
\hline
\log e\,t'^3 &= 0{,}15201 - 2 & e\,t'^3 &= 0{,}014191\\
& & \overline{d\,t' - e\,t'^3} &= 28{,}551
\end{aligned}
$$

Dieser Werth stimmt mit dem beobachteten so genau überein, wie nur verlangt werden kann.

Nun existirt aber auch ein Grund, die Reich'sche Fallzeit für zu gross zu halten. Es wurde nämlich der persönliche Fehler durch den Fall von einer sehr geringen Höhe ermittelt. Da nun nach psychologischen Gesetzen ein bald erwarteter Schall schneller zum Bewusstsein kommt, als ein nach einigen Sekunden erst eintretender, so kann dieser Umstand eine zu grosse Bestimmung der Zeit veranlasst haben. Genau dasselbe gilt für die Benzenberg'schen Versuche.

Da es jetzt möglich ist, die Geschwindigkeit der Kugel im Flintenlauf zu messen, so liesse sich von erneuten Versuchen ein besseres Resultat hoffen.

Da die südliche Abweichung mit der Vergrösserung von t sehr schnell wächst, so lässt sie sich vielleicht mit einer Atwoodschen Fallmaschine nachweisen. Bei 3^m Fallhöhe und einem Verhältniss der Gewichte von 2 : 1 ergeben die hier entwickelten Formeln eine südliche Abweichung von mehreren Millimetern. Freilich müsste noch die ablenkende Einwirkung des Fadens auf das Gewicht ermittelt werden, die bei sehr langsamen Falle sehr bedeutend sein würde. Auch würde es schwierig sein, Erschütterungen zu vermeiden. Jedenfalls müsste die Maschine auf festem Grunde aufgestellt werden und Pendel nebst Abfallvorrichtung von der Säule isolirt angebracht werden. Vielleicht wäre es auch zweckmässig, die Auslösevorrichtung an dem steigenden Gewichte anzubringen. Die Existenz der südlichen Abweichung wäre auch nachgewiesen, wenn die Gewichte nach dem Anhalten des einen vorwiegend in der Meridianebene schwingen würden. Leider habe ich mangels einer Fallmaschine Versuche nicht anstellen können.

Anhang.

Um auf elementaren Wege aus der ermittelten Kraft zur Zeit τ $a . \tau$ (a constant) den zurückgelegten Weg zu finden, verfährt man am kürzesten folgender Weise. Die Kraft nimmt mit dem Wachsen von τ zu, ebenso also auch der von ihr bewirkte Zuwachs der Geschwindigkeit, der der Kraft proportional ist und nach der Zeit $\tau = \frac{t}{2}$ seine mittlere Grösse erreicht hat. Betrachten wir nun 2 Zeitpunkte, die gleichweit von der Mitte von t entfernt sind. In dem ersten, zur Zeit $\frac{1}{2} t - x$ ist der Zuwachs an Geschwindigkeit ebensoviel kleiner, als zur Zeit $\frac{t}{2}$, wie er in dem zweiten $\frac{1}{2} t + x$ grösser ist. Daraus folgt, dass, wenn man für die ganze Zeit den mittleren Zuwachs $\frac{1}{2} a\, t$ rechnet, die gemachten Fehler sich gegenseitig zerstören. Die Geschwindigkeit zur Zeit t ergiebt sich also als $t . \frac{1}{2} a\, t = \frac{1}{2} a\, t^2$. Die Richtigkeit der Methode lässt sich an der Bestimmung des Inhalts eines rechtwinkligen Dreiecks als Hälfte eines Rechteckes von gleicher Grundlinie und Höhe anschaulich machen. In derselben Weise kann die Formel für den Fall $s = \frac{1}{2} g\, t^2$ bewiesen werden.

Da also die Geschwindigkeit nach der Zeit t $\frac{1}{2} a\, t^2$ ist, ist sie nach der Zeit τ $\frac{1}{2} a\, \tau^2$. Um hieraus die zurückgelegte Strecke zu finden, zerlegen wir die Zeit t in n gleiche Theile $\frac{t}{n}$, und berechnen für jeden dieser Zeittheile die Wege die der Körper während seiner Dauer zurücklegen würde, 1) wenn er während des ganzen Zeittheiles die Anfangsgeschwindigkeit, 2) die Endgeschwindigkeit für dieses Theilchen gehabt hätte. Da während des Zeittheiles die Geschwindigkeit zunimmt, so ist der erste Werth kleiner, als der in dem Zeittheile zurückgelegte Weg, der zweite grösser. Wir erhalten so folgende Tabelle

A. Nummer des Zeittheiles.	B. Geschwindigkeit zu Anfang des Theiles.	C. Geschwindigkeit am Ende des Theiles.
1	0	$\frac{1}{2} a \left(\frac{t}{n}\right)^2$
2	$\frac{1}{2} a \left(\frac{t}{n}\right)^2$	$\frac{1}{2} a \left(\frac{2\,t}{n}\right)^2$

A. Nummer des Zeittheiles.	B. Geschwindigkeit zu Anfag des Theiles.	C. Geschwindigkeit am Ende des Theiles.
3	$\frac{1}{2}\, a \left(\frac{2\, t}{n}\right)^2$	$\frac{1}{2}\, a \left(\frac{3\, t}{n}\right)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$\frac{1}{2}\, a \left(\frac{(m-1)\, t}{n}\right)^2$	$\frac{1}{2}\, a \left(\frac{m\, t}{n}\right)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{2}\, a \left(\frac{(n-1)\, t}{n}\right)^2$	$\frac{1}{2}\, a \left(\frac{n\, t}{n}\right)^2$

Diese Zahlen ergeben sich, wie folgt: Zu Anfang des $m$ten Zeittheiles sind $m - 1$ verflossen, die verflossene Zeit ist also $\frac{(m-1)\, t}{n} = \tau$, die erlangte Geschwindigkeit also $\frac{1}{2} a \left(\frac{(m-1)\, t}{n}\right)^2$. u. s. w. Die Wege, welche mit diesen Geschwindigkeiten zurückgelegt werden würden, erhalten wir durch Multipliciren mit $\frac{t}{n}$, da jede während einer Zeit $\frac{t}{n}$ gelten sollte.

Bezeichnen wir den Weg, der in der Zeit t wirklich zurückgelegt wird, mit s, so ist also die Summe der Wege, die aus B hervorgehen würden, kleiner als s, die der aus C hervorgehenden grösser. Multiplicirt man also die Werthe B mit $\frac{t}{n}$ und klammert aus der Summe aller dieser Wege $\frac{1}{2} \frac{a\, t^3}{n^3}$ aus, so erhält man als untere Grenze von s

$$\frac{1}{2}\, a\, \frac{t^3}{n^3}\left(0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (m-1)^2 + \ldots + (n-1)^2\right) = \frac{1}{2}\, a\, \frac{t^3}{n^3} \cdot \frac{1}{3}\left(n^3 - \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n\right),$$

wie aus der Theorie der Reihen bekannt ist. Ebenso ergiebt sich für die Summe der aus C hervorgehenden Wege oder die obere Grenze von s

$$\frac{1}{2}\, a\, \frac{t^3}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + m^2 + \ldots + n^2\right) = \frac{1}{2}\, a\, \frac{t^3}{n^3} \cdot \frac{1}{3}\left(n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n\right),$$

was auch aus dem vorigen durch Hinzufügen des einen neuen Gliedes $\frac{1}{2}\, a\, \frac{t^3}{n^3} \cdot n^2$ erhalten werden kann. Wir haben also die Ungleichheit:

$$\frac{1}{6}\, a\, t^3 - \frac{1}{12}\, a\, t^3 \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right) < s < \frac{1}{6}\, a\, t^3 + \frac{1}{12}\, a\, t^3 \left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

die wir schreiben $u < s < v$. Hierin kann n jede ganze positive Zahl bedeuten. Die einzige Zahl aber, die für jeden Werth von n zwischen u und v liegt, ist $\frac{1}{6}\, a\, t^3$. Denn betrachtet man $\frac{1}{6}\, a\, t^3 \pm \delta$, δ beliebig, so lässt sich n stets so gross wählen, dass $\delta > \frac{1}{12}\, a\, t^3 \left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$, so lange a und t endlich sind. Dann ist auch $\delta > \frac{1}{12} a t^3 \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$, d. h. $\frac{1}{6} a t^3 \pm \delta$ liegt ausserhalb der Grenzen, zwischen denen ς liegt. Der Weg s muss also $\frac{1}{6} a t^3$ sein, da er weder um die beliebige Zahl δ grösser, noch kleiner sein kann. Natürlich hätte man nach derselben Methode auch die Geschwindigkeit $\frac{1}{2} a t^2$ finden können.

Ich halte es für pädagogisch geboten, solche Rechnungen entweder gar nicht, oder so ausführlich, wie hier, zu behandeln, da sonst grade bei guten Schülern gefährliche Zweifel an der Richtigkeit der Methode oder dem eigenen Fassungsvermögen hervorgerufen werden können, oder besten Falles das Resultat nur als angenähert genau erscheint, während es doch genau richtig ist. Als Beispiel kann der Inhalt einer Pyramide nach dieser Methode berechnet werden.

Happach.

Fig: I.

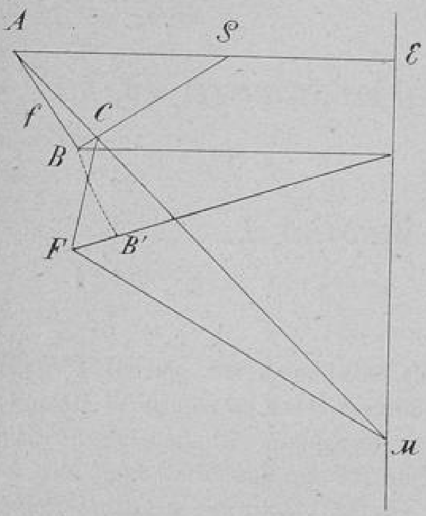


Fig: III.

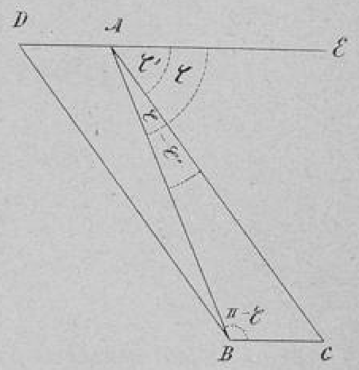
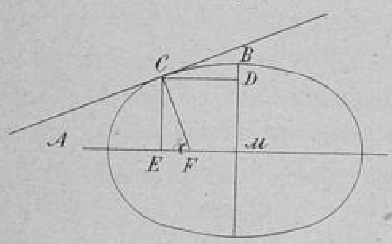


Fig: II.



$AM = a$

$BM = b$

$CD = x = \mathcal{S}$

$C\mathcal{E} = y$

$\sphericalangle AFC = \mathcal{C}$

Fig: IV.