Bericht

über das

Gymnasium Petrinum zu Brilon

während

seines fünfundzwanzigsten Schuljahres 1882—83

erstattet

von dem

Direktor Dr. Hüser.

Voran geht eine Abhandlung des Oberlehrers Dr. Killing: Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen.

1883 Progr.-Nr. 318.

Brilon 1883.
Buchdruckerei von M. Friedländer.

Die Mechanik
in den
Nicht-Euklidischen Raumformen.

Um die Nicht-Euklidischen Raumformen aufzubauen, kann man von den Voraussetzungen ausgehen, welche Euklid implicite durch die ersten Definitionen macht; man gelangt dann, wie ich in Borchardt's Journal B. 89 S. 265—287 gezeigt habe, außer zu der Euklidischen Raumform, noch zu drei anderen und findet, daß in ihnen alle weiteren Voraussetzungen Euklids mit Ausnahme der Unendlichkeit der Geraden und des Parallelaxioms gültig bleiben. Auf diesem Wege kann zwar die Frage nach den Grundlagen der Geometrie nicht principiell gelöst werden, dagegen führt derselbe ganz einfach zu den verschiedenen Möglichkeiten, welche mit unserer Erfahrung vereinbar sind.

Die auf diesem Wege erlangten Raumformen stimmen in einem unendlich kleinen Gebiet mit der Euklidischen überein. Um daher die in ihnen bestehenden Gesetze der Mechanik zu erforschen, kann man davon ausgehen, daß die Prinzipien und Sätze der gebräuchlichen Mechanik, solange man nur ein unendlich kleines Gebiet betrachtet, auch für die drei weiteren Raumformen gelten müssen. Diesen Weg habe ich auf den folgenden Seiten eingeschlagen und außer den allgemeinen Formeln der Mechanik diejenigen Bewegungen betrachtet, bei denen eine Formveränderung des Körpers nicht eintritt. Auch für die Mechanik kann es sich alsdann nur darum handeln, die verschiedenen Möglichkeiten zu übersehen; dagegen wird man nicht hoffen dürfen, auf diese Weise die Frage nach den Prinzipien zu erledigen.

Die rein geometrischen Eigenschaften der verschiedenen Raumformen, welche unserer Erfahrung genügen, ergeben sich besonders einfach unter Benutzung eines Koordinatensystems, welches Herr Weierstraß in Vorlesungen des Berliner mathematischen Seminars aufgestellt hat. Für dasselbe hangen die Verschiedenheiten nur ab von einer Konstanten k^2, dem reziproken Werte derjenigen Größe, welche Riemann als das Krümmungsmaß bezeichnet. Die erhaltenen Formeln gehen für ein unendlich großes k in die der Euklidischen Geometrie bei rechtwinkligen Koordinaten über, und für $k = 1$ tritt eine enge Beziehung zu der Sphärik hervor, wenn für letztere ein drei-rechtwinkliges Koordinaten-System zu Grunde gelegt wird. Auch die Formeln der Mechanik werden unter Benutzung der Weierstraß'schen Koordinaten besonders einfach und bewahren eine überaus große Aehnlichkeit mit den gebräuchlichen Formeln der Mechanik.

Was nun den einzuschlagenden Weg im einzelnen betrifft, bei dem ich mich vielfach an die Mechanik des Herrn Kirchhoff anlehne, so ergiebt sich die Mechanik eines einzelnen Punktes sofort, da man sich bei der Herleitung der Gleichungen auf ein unendlich kleines Gebiet beschränken kann. Auch die allgemeinen Bewegungsgleichungen für Punktsysteme bedürfen keiner besonderen Entwickelung, da die Beweise derselben für die Euklidische Raumform noch nicht in voller Strenge angegeben sind und die Betrachtungen, durch welche die Gesetze mehr erläutert als bewiesen werden, sich leicht übertragen lassen und deshalb nicht wiederholt zu werden brauchen. Die Stellung meiner Untersuchung zu verwandten früheren Arbeiten glaube ich nicht näher darlegen zu müssen; einzelne Berührungspunkte in den Resultaten werde ich an den geeigneten Stellen erwähnen.

§ 1.

Bewegung eines freien Punktes.

Manche Begriffe und Sätze der Mechanik sind von der Unendlichkeit der Geraden einerseits und für unendliche Gerade vom Parallelaxiom unabhängig und erleiden deshalb in den Nicht-Euklidischen Raumformen keine Aenderung. Es sind dies zunächst die Begriffe von Masse, Dichtigkeit, Geschwindigkeit und Kraft. Ebenso bleibt das Beharrungsvermögen bestehen, und ein Punkt, welcher anfänglich in Ruhe ist und durch eine einzige Kraft in Bewegung gesetzt wird, muß sich nach den bekannten Gesetzen bewegen. Demnach kann auch die Einheit der Kraft allgemein in der bekannten Weise definiert und die Messung beliebiger Kräfte nach der gebräuchlichen Methode ausgeführt werden. Da endlich nur solche Raumformen betrachtet werden sollen, welche in einem unendlich kleinen Gebiet volle Uebereinstimmung mit der Euklidischen zeigen, so muß auch das Parallelogramm der Bewegungen für ein unendlich kleines Gebiet gültig bleiben. Wenn also ein Punkt mit der Masse m, welcher zur Zeit t eine beliebige Eigenbewegung hat und von einer einzigen Kraft R erregt wird, unter Zugrundelegung eines beliebigen Koordinatensystems während der Zeit dt aus der Lage x_ι in die Lage $x_\iota + x_\iota' \, dt + {}^1/_2 x_\iota'' \, dt^2$ gelangt, so giebt die von x_ι nach $x_\iota + {}^1/_2 x_\iota'' \, dt^2$ gezogene Linie die Richtung von R und mit m multipliziert, die Größe von ${}^1/_2 R \, dt^2$ an.

Wir legen unsern Untersuchungen wieder die Weierstraß'schen Koordinaten zu Grunde, welche ich in den beiden Abhandlungen in Borchardt's Journal B. 86 und 89 benutzt und mit t, u, v, w bezeichnet habe, nennen sie aber hier p, x, y, z. Die ersten Ableitungen nach der Zeit bezeichnen wir mit p', x', y', z', die zweiten mit p", x", y", z". Dann bestehen folgende Relationen:

$$
(1) \quad \begin{aligned}
& k^2 p^2 + x^2 + y^2 + z^2 = k^2 \\
& k^2 pp' + xx' + yy' + zz' = 0 \\
& k^2 p'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 + k^2 pp'' + xx'' + yy'' + zz'' = 0,
\end{aligned}
$$

wo k^2 den reziproken Wert des Krümmungsmaßes bezeichnet.

Um in diesen Koordinaten die Bewegungsgleichungen eines einzelnen Punktes zu erhalten, hat man die zweiten Ableitungen der Koordinaten in Beziehung zu setzen zu der Größe und Richtung der Kraft. Zu dem Ende kann man einmal ausgehen von den sechs Ausdrücken:

$$
{}^1/_2 dt^2 \, (px'' - p''x), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad {}^1/_2 dt^2 \, (yz'' - y''z), \quad . \; . \; . \; . \; .
$$

durch welche die von den Punkten p . . . und $p + {}^1/_2 p'' \, dt^2$ . . . . begrenzte Linie bestimmt wird. Dieselben geben das Produkt aus der Länge der Linie in den Cosinus des Winkels, welchen die Richtung desselben mit der Richtung der Achsen bildet.*) Um in allen Raumformen mit reellen Größen zu operiren, bilde man das Produkt der Kraft R in den Cosinus des Winkels, welchen die Richtung der Kraft mit der Achse $y = 0$, $z = 0$ bildet und nenne das Produkt R_{01}; ebenso bestimme man R_{02} und R_{03}. Alsdann suche man den kürzesten Abstand a zwischen der Richtung der Kraft und der Achse $y = 0$, $z = 0$ und setze $R \, k \sin a/k = R_{23}$, und bestimme auf dieselbe Weise R_{31} und R_{12}. Durch diese sechs Größen, zwischen denen eine bekannte Gleichung besteht, ist die Kraft ihrer Größe und Richtung nach bestimmt. Der Angriffspunkt kann noch beliebig auf einer geraden Linie gewählt werden; zwischen seinen Koordinaten und den zur Bestimmung der Kraft dienenden Größen bestehen einfache lineare Relationen. Die Bewegungsgleichungen können jetzt in der Form aufgestellt werden:

$$
(2) \quad \begin{aligned}
& m \, (px'' - p''x) = R_{01} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
& m \, (yz'' - y''z) = R_{23} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .
\end{aligned}
$$

Eine zweite Form der Bewegungsgleichungen, welche im folgenden stets angewandt werden soll, stützt

---

*) Um den Winkel zweier windschiefen Geraden zu bestimmen, konstruire man diejenige gerade Linie, welche auf beiden senkrecht steht und lege durch diese und je eine der gegebenen Geraden eine Ebene; der Neigungswinkel dieser beiden Ebenen ist der gesuchte Winkel.

sich darauf, daß zwischen den Koordinaten $p_1, x_1 \ldots ; p_2, x_2 \ldots ; p_3, x_3 \ldots$ dreier in gerader Linie liegenden Punkte die Relationen bestehen:

$$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 0, \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0,$$
$$\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0, \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0;$$

hier ist $\alpha = k \sin \frac{(23)}{k}$ u. s. w., wenn mit (23) der Abstand der Punkte $p_2 \ldots$ und $p_3 \ldots$ bezeichnet wird. Wenn demnach die Kraft R durch einen Punkt p_0, x_0, y_0, z_0 hindurchgeht, welcher von dem bewegten Punkte die Entfernung e hat, so bestehen folgende Gleichungen

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
m\, p'' &= \frac{R\, p_0}{k \sin e/k} - L\, p \\
m\, x'' &= \frac{R\, x_0}{k \sin e/k} - L\, x \\
m\, y'' &= \frac{R\, y_0}{k \sin e/k} - L\, y \\
m\, z'' &= \frac{R\, z_0}{k \sin e/k} - L\, z.
\end{aligned}
$$

Die Funktion L kann aus der Größe und Richtung der Kraft nicht bestimmt werden, wie auch daraus hervorgeht, daß zwischen den Koordinaten eines Punktes, ihren ersten und zweiten Ableitungen die letzte Gleichung (1) besteht.

Obwohl diese Form der Bewegungsgleichungen in dem Falle recht bequem ist, wo die Kraft von einem anziehenden oder abstoßenden Centrum ausgeht, so ist doch der Punkt $p_0, x_0 \ldots$ in der Richtung der Kraft beliebig. Wir können ihn daher so wählen, daß $e = \frac{1}{2} k\, \pi$ wird; indem man alsdann setzen:

$$R\, p_0 = k\, P,\ R\, x_0 = k\, X,\ R\, y_0 = k\, Y,\ R\, z_0 = k\, Z,$$

erscheinen die Bewegungsgleichungen in der Form:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
m\, p'' &= P - S\, p \\
m\, x'' &= X - S\, x \\
m\, y'' &= Y - S\, y \\
m\, z'' &= Z - S\, z,
\end{aligned}
$$

wo zwischen $P, X \ldots$ und $p, x \ldots$ die Gleichung besteht:

$$(5)\quad k^2\, P\, p + X\, x + Y\, y + Z\, z = 0.$$

Die Größe der Kraft R ergiebt sich aus der Gleichung:

$$(6)\quad R^2 = k^2\, P^2 + X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Die Größen P, X, Y, Z sollen als die Koordinaten der Kraft bezeichnet werden; sie lassen sich aus den in den Gleichungen (2) und (3) vorkommenden Größen leicht berechnen. Ihre geometrische Bedeutung ist nicht so einfach, als die der entsprechenden Größen der Euklidischen Geometrie: denken wir uns, der Punkt durchlaufe die Länge und Richtung der Kraft in der Zeiteinheit mit gleichmäßiger Geschwindigkeit, so gelangt er in der Zeit dt nach einem Punkte, dessen Koordinaten sind: $p + P\, dt$, $x + X\, dt$, $y + Y\, dt$, $z + Z\, dt$

Um den Wert von L in (3), resp. den von S in (4) zu berechnen, berücksichtigen wir die Geschwindigkeit v. Nun ist

$$(7)\quad v^2 = k^2\, p'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Setzen wir

$$(8)\quad {}^1/_2 m\, v^2 = T,$$

so ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (1) aus (3):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{R}{k \sin e/k} (k^2\, p_0\, p' + x_0\, x' + y_0\, y' + z_0\, z')$$

$$(9) \qquad 2\,T + \frac{R\,k\cos e/k}{\sin e/k} - L\,k^2 = 0$$

und aus (4):

$$(10) \qquad \begin{aligned} \frac{d\,T}{dt} &= k^2\,P\,p' + X\,x' + Y\,y' + Z\,z' \\ 2\,T - k^2\,S &= 0 \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungspaare sollen als die Gleichungen der lebendigen Kraft bezeichnet werden.

1 Beispiel Planetenbewegung.

Um das Newton'sche Gesetz der Gravitation auf die Nicht-Euklidischen Raumformen zu übertragens darf man nicht von der algebraischen Form ausgehen, sondern man muß nach den geometrischen Anschauungen fragen, welche demselben zu Grunde liegen. Denkt man sich um den anziehenden Punkt als Centrum mehrere Kugelflächen beschrieben und jedesmal gleiche Flächen mit gleichviel Masse belegt, so verhalten sich die auf gleiche Massen ausgeübten Kräfte umgekehrt wie die Oberflächen der Kugeln. Nun ist die Oberfläche einer Kugel, deren Radius gleich r ist, gleich $4\,\pi\,k^2 \sin^2 r/k$. Indem wir daher die Sonne als unbeweglich annehmen, sie sowohl wie die Planeten als Punkte betrachten und von der gegenseitigen Anziehung der Planeten absehen, können wir dem Problem der Planetenbewegung folgenden Ausdruck geben:

Ein Punkt bewege sich unter dem Einflusse einer Kraft, welche nach einem festen Centrum gerichtet und umgekehrt proportional ist dem Quadrate des Sinus des durch k dividierten Abstandes von dem festen Punkte

Wir wählen den festen Punkt zum Anfangspunkte des Koordinatensystems, und da die Bewegung offenbar in einer Ebene stattfindet, diese zur Ebene $z = 0$. Indem wir dann noch zur Abkürzung $x^2 + y^2 = q^2$ jetzen, nehmen die Bewegungsgleichungen (3) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} p'' &= \frac{\mu}{q\,3} - p\,L \\ x'' &= -\,x\,L \\ y'' &= -\,y\,L \end{aligned}$$

Das erste Integral: $x\,y' - x'\,y = c$, beweist, daß das zweite Kepler'sche Gesetz auch in den Nicht-Euklidischen Raumformen seine Gültigkeit behält. Die erste Gleichung (9) liefert den Wert von v^2 bis auf eine Konstante h: $v^2 = 2h + \frac{\mu\,p}{q}$. Indem wir jetzt aus der zweiten Gleichung (9) den Wert von L und dann aus der Gleichung $k^2\,p^2 + q^2 = k^2$ und ihren beiden ersten Ableitungen den Wert von q'' berechnen, gelangen wir zu den Gleichungen:

$$q\,x'' - q''\,x = -\frac{c^2\,x}{q\,3} = \frac{c}{\mu}\,(p\,x'' - p''\,x)$$

$$q\,y'' - q''\,y = -\frac{c^2\,y}{q\,3} = \frac{c^2}{\mu}\,(p\,y'' - p''\,y).$$

Indem wir diese beiden Gleichungen integrieren, die erste mit y, die zweite mit x multiplizieren und subtrahieren, ergiebt sich unter Berücksichtigung des Flächensatzes:

$$\mu\,c\,q = c^3\,p - \alpha\,y + \beta\,x$$

Dies ist aber die Gleichung eines Kegelschnitts für einen Brennpunkt als Mittelpunkt des Koordinatensystems. Damit ist das erste Kepler'sche Gesetz bewiesen.

2. Beispiel. Wurfbewegung.

Ein Punkt bewege sich unter dem Einflusse einer konstanten Kraft, welche auf einer festen Ebene senkrecht steht oder durch einen festen Punkt geht.

Da eine solche Kraft in der Natur kaum vorkommen dürfte, so genüge es, darauf aufmerksam zu machen, daß die aus der Euklidischen Geometrie bekannte Gleichung: $v^2 = a^2 - 2\,g\,h$, wo h den Abstand von der festen **Ebene** bezeichnet, auch für unsere Raumformen gilt. Die Lösung führt auf ein Integral, in welchem das Produkt einer linearen Funktion von h mit einer solchen Funktion von $\sin \frac{{}^2h}{k}$ unter dem Wurzelzeichen steht.

§. 2

Bewegung auf einer Fläche.

Wenn ein Punkt gezwungen ist, sich auf einer Fläche ohne Reibung zu bewegen, so soll diese Bedingung bekanntlich ersetzt werden können durch eine Kraft, welche in der Richtung der Normale wirkt und deren Größe dadurch bestimmt ist, daß der Punkt auf der Fläche verbleibt.

Ist $\varphi\,(p, x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche, so hat die Gleichung der Tangentialebene, welche im Punkte (p, x, y, z) angelegt wird, die Koeffizienten:

$$\frac{1}{k^2}\frac{d\,\varphi}{d\,p} - p\left(p\,\frac{d\,\varphi}{d\,p} + x\,\frac{d\,\varphi}{d\,x} + y\,\frac{d\,\varphi}{d\,y} + z\,\frac{d\,\varphi}{p\,z}\right)$$

$$\frac{d\,\varphi}{d\,x} - x\left(p\,\frac{d\,\varphi}{d\,p} + x\,\frac{d\,\varphi}{d\,x} + y\,\frac{d\,\varphi}{d\,y} + z\,\frac{d\,\varphi}{d\,z}\right)$$

$$\frac{d\,\varphi}{d\,y} - y\left(p\,\frac{d\,\varphi}{d\,p} + x\,\frac{d\,\varphi}{d\,x} + y\,\frac{d\,\varphi}{d\,z} + z\,\frac{d\,\varphi}{d\,z}\right)$$

$$\frac{d\,\varphi}{d\,z} - z\left(p\,\frac{d\,\varphi}{d\,h} + x\,\frac{d\,\varphi}{d\,x} + y\,\frac{d\,\varphi}{d\,z} + z\,\frac{d\,\varphi}{d\,z}\right)$$

Somit liegt auf der Normale des Punktes (p, x, y, z) ein reeller oder imaginärer Punkt, dessen Koordinaten diesen vier Größen proportional sind. Indem wir die Resultate aller übrigen Kräfte, welche noch auf den Punkt wirken, mit (P, X, Y, Z) bezeichnen, erhalten wir die Bewegungsgleichungen:

(11)
$$m\,p'' = P - S\,p + \frac{1}{k^2}\,M\,\frac{d\,\varphi}{d\,p}$$

$$m\,x'' = X - S\,x + M\,\frac{d\,\varphi}{d\,x}$$

$$m\,y'' = Y - S\,y + M\,\frac{d\,\varphi}{d\,y}$$

$$m\,z'' = Z - S\,z + M\,\frac{d\,\varphi}{d\,z}$$

Die erste Gleichung (10) der lebendigen Kraft bleibt auch in diesem Falle gültig; die zweite ändert sich ebenfalls nicht, wenn $\varphi = 0$ in homogener Form gegeben ist, so daß mit

$$\varphi \text{ auch } p\,\frac{d\,\varphi}{d\,p} + x\,\frac{d\,\varphi}{d\,x} + y\,\frac{d\,\varphi}{d\,y} + z\,\frac{d\,\varphi}{d\,z} \text{ verschwindet.}$$

1. Beispiel. Kürzeste Linien auf einer Fläche.

Wenn ein Punkt ohne Einwirkung äußerer Kräfte sich auf einer Fläche ohne Reibung bewegt, so sind in den Gleichungen (11) P, Y, X, Z gleich Null zu setzen. Diese Gleichungen beweisen, daß die Normale der Fläche in der Schmiegungsebene der kürzesten Linie liegt. Aus der ersten Gleichung der lebendigen

Kraft folgt, daß der Punkt sich mit konstanter Geschwindigkeit c bewegt. Wenn φ in den Koordinaten homogen ist, so liefert die zweite Gleichung (10) für S den konstanten Wert $\frac{c^2}{k^2}$ Wählen wir speziell das dreiachsige Ellipsoid und schreiben die Gleichung desselben in der Form:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} - p^2 = 0,$$

so läßt sich die Differentialgleichung der kürzesten Linie sofort in elliptischen Koordinaten hinschreiben. Man kann die von Herrn Weierstraß gegebene Herleitung (Berliner Monatsberichte 1861 S. 989 ff.) vollständig übertragen, wenn man setzt:

$$f(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)\,\frac{\lambda + k^2}{k^2}$$

$$\frac{\varphi(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{p^2 k^2}{\lambda + k^2} + \frac{x^2}{\lambda - \alpha} + \frac{y^2}{\lambda - \beta} + \frac{z^2}{\lambda - \gamma}$$

$$\frac{\varphi_1(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{k^2 p'^2}{\lambda + k^2} + \frac{x'^2}{\lambda - \alpha} + \frac{y'^2}{\lambda - \beta} + \frac{z'^2}{\lambda - \gamma}$$

Alsdann ergiebt sich auf dem dort angegebenen Wege:

$$\left(\frac{1}{2}\,\frac{d\,\varphi(\lambda)}{d\cdot t}\right)^2 - \varphi(\lambda)\,\varphi_1(\lambda) =$$

$$-\frac{c^2}{k^2}(\lambda + k^2)(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda \quad \gamma)\,\lambda\,(\lambda - \delta);$$

indem man die linke Seite gleich $c^2\,R(\lambda)$ setzt und mit λ_1 und λ_2 diejenigen Werte bezeichnet, welche außer Null der Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ genügen, ergeben sich als Gleichungen der kürzesten Linie:

$$0 = \frac{\lambda_1\,d\,\lambda_1}{\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2\,d\,\lambda_2}{\sqrt{R(\lambda_2)}}$$

$$c\,dt = \frac{\lambda_1^2\,d\,\lambda_1}{\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2^2\,d\,\lambda_2}{\sqrt{R(\lambda_2)}}$$

2. Beispiel. Das Pendel.

Ein Punkt, welcher gezwungen ist, auf einer Kugelfläche zu bleiben, steht unter dem Einflusse einer konstanten Kraft, welche nach einem (reellen oder imaginären) festen Punkte gerichtet ist.

Die Gleichungen werden recht einfach, wenn wir den Mittelpunkt der Kugel zum Punkte (1,0,0,0) wählen und die Gerade ($y = 0$, $z = 0$) durch den anziehenden Punkt legen, dessen andere Koordinaten p_0 und x_0 sein mögen. Die konstante Kraft sei g, der Radius der Kugel l, der Abstand des anziehenden Punktes vom Mittelpunkte sei a, der veränderliche Abstand des anziehenden Punktes vom bewegten Punkte sei e. Dann gilt die Gleichung:

$$v^2 = 2\,g\,(h - e),$$

wo h eine Konstante bezeichnet. Hieraus lassen sich die Quadraturen, welche das Problem in voller Allgemeinheit lösen, leicht angeben. Indessen haben nur die unendlich kleinen Bewegungen besondere Bedeutung, und für diese können wir bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung x und e als konstant annehmen.

Dann ergiebt sich, wie in der Euklidischen Geometrie, für $\frac{y''}{y}$ und $\frac{z''}{z}$ derselbe konstante Wert, und die Schwingungszeit wird

$$= 2\pi \sqrt{\frac{k \sin \frac{l}{k}}{g} \frac{\sin \frac{a - l}{k}}{\sin \frac{a}{k}}}$$

Dasselbe Resultat läßt sich für ebene Schwingungen aus der Gleichung für v^2 herleiten, indem man e und h durch den Ausschlagswinkel ausdrückt und ihre Ausdrücke nach dem Taylorschen Lehrsatz entwickelt. Somit gilt der Isochronismus kleiner Schwingungen ganz allgemein.

§. 3.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen.

Wenn beliebig viele Punkte p, x, y, z, unter dem Einfluß von Kräften stehen und zwischen ihren Koordinaten Bedingungsgleichungen statthaben:

$$(12) \quad \varphi = 0, \; \psi = 0, \ldots .$$

so lassen sich die Betrachtungen, welche zur Begründung der Lagrange'schen Gleichungen in der Euklidischen Geometrie angestellt worden, ohne Mühe auf die andern Raumformen übertragen. Demgemäß sind die allgemeinen Bewegungsgleichungen:

$$(13) \quad m_\iota \, p_\iota'' = P_\iota + S_\iota \, p_\iota + \frac{1}{k_2} M \frac{\partial \varphi}{\partial p_\iota} + \frac{1}{k_2} N \frac{\partial \psi}{\partial p_\iota} + \ldots$$

$$m' \, x_\iota'' = X_\iota + S_\iota \, x_\iota + M \frac{\partial \varphi}{\partial x_\iota} + N \frac{\partial \psi}{\partial z_\iota} + \ldots$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

wo die Gleichungen für y_ι'' und z_ι'' vollständig der für x_ι'' aufgestellten entsprechen. Die Funktionen S_ι M, N . . . sind aus den Bedingungsgleichungen (12) und aus der Größe der Geschwindigkeit zu bestimmen.

Führt man jetzt virtuelle Verrückungen ein: δ p, δ x, δ y, δ z, für welche außer den n Gleichungen:

$$k^2 \, p_\iota \, \delta \, p_\iota + x_\iota \, \delta \, x_\iota + y_\iota \, \delta \, y_\iota + z_\iota \, \delta \, z_\iota = 0$$

noch die weitern Gleichungen bestehen:

$$(14) \quad \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z \right) = 0$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

so erhält man sofort das d'Alembert'sche Princip in der Form:

$$(15) \quad \Sigma \, (k^2 \, (m \, p'' - P) \, \delta \, p + (m \, x'' - X) \, \delta \, x + (m \, y'' - Y) \, \delta \, y$$
$$+ (m \, z'' - Z) \, \delta \, z) = 0,$$

Endlich definiert man die Arbeit der Kraft für irgend eine Verrückung, gerade wie in der Euklidischen Geometrie, als das Produkt aus der Kraft und der Verrückung in den Cosinus des eingeschlossenen Winkels, und bezeichnet die Summe der für alle Punkte gebildeten Produkte als die Arbeit des Systems. Der analytische Ausdruck für die von einer Kraft geleistete Arbeit ist dann:

$$(16)\quad k^2 P \delta p + X \delta x + Y \delta y + Z \delta z,$$

und die Gesamtarbeit U′ wird durch eine über alle Punkte ausgedehnte Summation erhalten. Ebenso bezeichne man den Ausdruck

$$(17)\quad \frac{1}{2} \Sigma m v^2 = T$$

als die lebendige Kraft des Systems. Dann gilt das Hamilton'sche Princip:

$$(18)\quad \int (\delta T + U') dt = 0$$

genau in derselben Ausdehnung und in demselben Sinne, wie in der Euklidischen Raumform.

Wenn ein Potential U existiert, d. h. wenn die Arbeit $U' = \delta U$ ist, so ist

$$(19)\quad P = \frac{1}{k^2} \frac{\partial U}{\partial p} - E p,\ X = \frac{\partial U}{\partial x} - E x,$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial g} - E y,\ Z = \frac{\partial U}{\partial z} - E z,$$

wo E vermittelst der Gleichung (5) bestimmt werden muß. Ist speciell U eine homogene Gleichung ν^{ten} Grades, so erhalten wir

$$(20)\quad k^2 E = \nu U$$

Auf Gauß' Princip des kleinsten Zwanges brauchen wir hier nicht näher einzugehen; es genügt, auf eine Abhandlung des Herrn Lipschitz im 82. Bande von Borchardts Journal zu verweisen.

Die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht erhält man, wenn man in den obigen Gleichungen alle p'', x'' . . . gleich Null setzt.

Von den Sätzen, welche sich aus diesen Gleichungen ergeben, erwähnen wir außer dem Satze von der lebendigen Kraft die Flächensätze, deren Anzahl sechs beträgt. Die Sätze von der Bewegung des Schwerpunktes lassen sich nicht übertragen und scheinen auch kein Analogon von gleicher Wichtigkeit zu besitzen.

§ 4.

Bewegung eines festen Körpers.

Die unendliche kleine Bewegung eines Systems von starr mit einander verbundenen Punkten ist schon mehrfach, am genauesten von Herrn Lindemann (Math. Annalen VII, 56—143) behandelt worden. Derselbe hat auch die Bedingungen des Gleichgewichts für ein solches System sehr genau untersucht. Es ist also nicht nothwendig, auf diese Probleme näher einzugehen.

Wegen der nahen Beziehung zur lebendigen Kraft und wegen der sonstigen Wichtigkeit ist es gut, die Theorie der Trägheitsmomente eines festen Körpers für einen Punkt, eine Gerade und eine Ebene kurz zu behandeln. Abgesehen von denjenigen Sätzen, welche den Schwerpunkt betreffen, läßt sich die bekannte Theorie vollständig übertragen; auch sind die Beweise äußerst einfach und den bekannten Beweisen sehr ähnlich. Das Moment eines Massenpunktes ist zu definieren als das mit k^2 multiplizierte Produkt aus der

Masse in das Quadrat vom Sinus des durch k dividierten Abstandes; das Moment eines Systems ist gleich der Summe der einzelnen Momente. Alsdann ist das Moment für irgend eine Gerade gleich der Summe der Momente für irgend zwei auf einander senkrechte Ebenen welche sich in der Geraden schneiden. Ebenso ist die Summe der Momente für drei zu einander senkrechte Ebenen gleich dem in Bezug auf ihren Schnittpunkt geltenden Momente. Endlich ist in den endlichen Raumformen die Summe der Momente für vier aufeinander senkrecht stehende Ebenen gleich der mit k^2 multiplizierten Masse. Alle Ebenen, für welche die Trägheitsmomente gleich sind, berühren dasselbe Ellipsoid; alle so bestimmten Ellipsoide sind konfokal. Sie haben in den endlichen Raumformen vier Mittelpunkte, die Trägheitsmittelpunkte; die durch je drei von ihnen gelegten Ebenen, die Hauptträgheitsebenen, sind dadurch ausgezeichnet, daß die Momente für sie ihre stationären Werte erhalten. In den vier Mittelpunkten kann man die Gesamtmasse des Körpers so verteilen, daß das Trägheitsmoment dieser vier Punkte für jede Ebene gleich wird dem des gegebenen Körpers; dieser Satz läßt eine bedeutende Erweiterung zu.

Unter den Ebenen, welche durch denselben Punkt hindurchgehen, giebt es drei, für welche das Moment stationär wird. Ihre Schnittlinien sind die Achsen des Tangentialkegels, welcher von dem Punkte an eine der konfokalen Flächen gelegt wird. Falls diese Flächen ungleiche Achsen besitzen, können zwei dieser stationären Momente nur dann gleich werden, wenn der Punkt auf einem Fokalkegelschnitte des Systems liegt. Die Größe der Momente für die durch denselben Punkt gehenden Geraden lassen sich mit einem Ellipsoid in nahe Beziehung setzen.

Alle Punkte, für welche der Körper gleiche Trägheitsmomente besitzt, liegen ebenfalls auf einem Ellipsoid; dasselbe hat mit den oben genannten denselben Mittelpunkt und dieselbe Achsenrichtung, und ihre Gesamtheit bildet ein System ähnlicher Flächen.

Die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt wird durch dieselben Gleichungen bestimmt, wie in der Euklidischen Geometrie. Aber während in derselben die Bewegung eines freien Körpers, welcher keinen äußeren Kräften oder nur der Schwerkraft unterworfen ist, sich auf die Drehung um einen Punkt zurückführen läßt, verlangen diese Probleme in den andern Raumformen eine eigene Untersuchung. Auch das Problem der Drehung eines schweren Körpers bietet besondere Schwierigkeiten.

Führt man sechs Größen ein, durch welche die Lage der augenblicklichen Bewegungsachse zu einem im Körper festen Koordinatensystem, sowie die Größe der Drehung und Verschiebung bestimmt wird, so werden die Gleichungen der Bewegung den allgemeinen Formeln sehr ähnlich, welche Herr Kirchhoff in seiner Mechanik (S. 61 Formel 13 u 14) aufstellt. Sie lassen sich für den Fall, daß keine Kräfte auf den Körper wirken, vollständig integrieren. Der Raum gestattet es jedoch nicht, hierauf näher einzugehen; es möge genügen, einige Resultate mitzuteilen. Die Voraussetzung, daß keine äußeren Kräfte wirken, liegt diesen Sätzen zu Grunde und braucht daher nicht wiederholt zu werden.

In den beiden endlichen Raumformen kann die Masse so verteilt werden, daß die vier Hauptträgheitsmomente gleich sind. Wenn dann dem Körper eine beliebige Bewegung erteilt ist, so bleibt die Bewegungsachse sowohl wie die Größe der Drehung und der Verschiebung ungeändert.

In denselben Raumformen können auch die Hauptmomente paarweise einander gleich sein. Alsdann liegen die Drehungsachsen auf einem im Körper festen Umdrehungshyperboloid, und die Größe der Bewegung ist unveränderlich.

Wenn drei Hauptmomente gleich sind, so zerlege man die augenblickliche Bewegung auf solche Weise in eine Drehung und Verschiebung, daß die Achse der einen und der andern durch den Trägheitsmittelpunkt geht. Die so erhaltene Drehungsachse hat im Körper eine feste Lage und bildet mit der erhaltenen Verschiebungsachse immer denselben Winkel. Die Drehung und die Verschiebung behalten ihre Größe bei.

Sind die Hauptträgheitsmomente sämtlich verschieden, so giebt es nur ganz spezielle Fälle, in denen die Achse der Bewegung und die Größe derselben ungeändert bleiben. In der Lobatschewskyschen Raumform tritt dies nur ein, wenn die Bewegungsachse mit einer der drei Hauptachsen des Körpers zusammenfällt. In den endlichen Raumformen kommt noch der Fall hinzu, daß die Anfangsbewegung zu sich reziprok ist. Diese Bewegung verdient also vor allen als Analogon der bloßen Verschiebung in der Euklidischen Geometrie betrachtet zu werden, da sich bei ihr alle Punkte in geraden Linien und mit gleicher Geschwindigkeit bewegen und da sie sich gleichmäßig fortsetzt, wenn keine äußern Kräfte auf den Körper wirken.

Findet bei Beginn der Bewegung eine bloße Drehung um eine Achse statt, welche durch einen Trägheitsmittelpunkt geht, so bleibt die Bewegung eine Drehung um diesen Punkt. Das Problem kann in diesem Falle und bei der reziproken Bewegung durch elliptische Funktionen in bekannter Weise gelöst werden.

Schulnachrichten.

I. Unterrichts-Plan.

1 Prima a.

1. Religionslehre. a. katholische: Geschichte der Kirche von Bonifazius bis zur Reformation, ausgewählte Teile der Glaubenslehre, Widerholungen aus der Sittenlehre, Erklärung von Psalmen und Hymnen.
   b evangelische: Galaterbrief, Glaubenslehre III. Teil (nach Hollenberg), Kirchengeschichte III Teil, Psalmen und Kirchenlieder.
2. Deutsch. Übersicht über die Litteraturgeschichte von Opitz bis auf die neuere Zeit, Wallenstein, Abschnitte aus der Hamburger Dramaturgie, Dispositionsübungen, Deklamationen, monatlich ein Aufsatz.
3. Latein. Widerholungen aus der Syntax, Stillehre im Anschluß an die Lektüre, or. in Verrem IV., Tac. Germ. Liv. XXIII (extemp.); Auswahl aus Horat. carm., ep., sat.; Anleitung zur Anfertigung lateinischer Aufsätze; alle 8—14 Tage ein Skriptum, monatlich ein Aufsatz.
4. Griechisch. Widerholungen aus verschiedenen Gebieten der Syntax; Thuc. I; Plat. apol. Socr. u. Phaed.; Übungen im extemp. Übersetzen aus dem Griechischen, Hom. Il. VI. VII. IX, X, XXII XIV. Leitung der schriftlichen Arbeiten.
5. Hebräisch. Widerholung und Vervollständigung der Formenlehre, wichtige Teile der Syntax. Übersetzen aus den historischen Büchern des alten Testaments und leichter Psalmen; Leitung der schriftlichen Arbeiten.
6. Französisch. Widerholung der Syntax, Montesq. considérat. mit Auswahl (teilw. extemp.), Einübung der Grammatik durch Extemporalien.
7. Geschichte und Geographie. Geschichte der Griechen, brandenburgisch-preußische Geschichte, deutsche Geschichte von Karl V. an. Geographie von Italien, Griechenland, Deutschland, Preußen insbesondere.
8. Mathematik. Trigonometrie, arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Kettenbrüche, diophantische Gleichungen, Widerholungen aus allen Gebieten; alle 2 Wochen eine schriftliche Arbeit.
9. Physik. Akustik und Optik.
10. Gesang. Übung des ausgewählten Männer- und gemischten Chores, Einübung von Kirchenliedern.
11. Turnen. S. u.

2. Prima b.

1. Religionslehre. Komb. mit I a.
2. Deutsch. Übersicht über die Litteraturgeschichte bis Opitz, Lektüre der bezüglichen Proben, insbesondere

des Nibelungenliedes und Walters von der Vogelweide, Laokoon, Dispositionsübungen, Deklamationen, monatlich ein Aufsatz.

3. Latein. Widerholungen aus der Syntax, Stillehre, Cic. pro Arch., de imp. Cn. Pomp., Abschnitte aus Tac. hist., extemporiertes Übersetzen aus Liv., Hor. komb. mit I a; monatlich ein Aufsatz.
4. Griechisch. Widerholung und Erweiterung der Syntax, Xen. Memorab., Plat. Criton, Hom. komb. mit I a; schriftliche Arbeiten.
5. Hebräisch. Komb. mit I a.
6. Französisch. Komb. mit I a.
7. Geschichte und Geographie. Komb. mit I a.
8. Mathematik. Trigonometrie, arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung, die Lage von Ebenen und Linien im Raume; alle 2 Wochen eine schriftliche Arbeit.
9. Physik. Komb. mit I a.
10. Gesang. Komb. mit I a.
11. Turnen. S. u.

3. Sekunda a.

1. Religionslehre. a. katholische: Geschichte der göttlichen Offenbarung, die Lehre von der Kirche, Erklärung und Memorieren von Hymnen.
   b. evangelische: Glaubenslehre III. Teil, Kirchengeschichte I. Teil, Bibelkunde des alten Testaments, Psalmen und Kirchenlieder.
2. Deutsch. Die Jungfrau von Orleans, Minna von Barnhelm, ausgewählte Oden Klopstocks, Dispositionsübungen, Deklamation; alle 3 Wochen ein Aufsatz.
3. Latein. Befestigung und Erweiterung der Syntax, das Wichtigste aus der Stillehre im Anschluß an die Lektüre; Cic. de sen., or. in Catil. I u. II, Liv. I u. II (teilw.), Virg. Aen. II, III, VI (teilw.); wöchentlich ein Extemporale, 4 Aufsätze.
4. Griechisch. Tempora und Modi, Xen. An. IV, V, VI (teilw.); Abschnitte aus der Cyrop., Hom. Od. XII, XIII, XIV, XV; alle 2 Wochen ein Extemporale.
5. Hebräisch. Formenlehre bis zu den Segolatformen, ausschließlich der Verba ajin-ajin und ajin-vav Übersetzung der der Grammatik beigegebenen Übungsstücke.
6. Französisch. Schulgrammatik von Plötz bis zu Ende. Michaud, III. croisade; alle 2 Wochen ein Extemporale.
7. Geschichte und Geographie. Geschichte der Römer, Geschichte der Deutschen bis auf die neuere Zeit, Geographie von Europa und Amerika.
8. Mathematik. Systematische Anleitung zur Lösung planimetrischer Konstruktions-Aufgaben, harmonische Teilung, Anwendung der quadratischen Gleichungen, Logarithmen, arithmetische und geometrische Reihen; alle 2 Wochen eine schriftliche Arbeit.
9. Physik. Magnetismus und Elektrizität.
10. Gesang. Komb. mit Prima.
11. Turnen. S. u.

Sekunda b.

1. Religionslehre. Komb. mit II a
2. Deutsch. Poetik, Erklärung ausgewählter Balladen, Hermann und Dorothea, Tell, Dispositionsübungen, Deklamation, alle 3 Wochen ein Aufsatz.

3. Latein. Erweiterte Syntax des Verbums, Einübung der Syntax durch extemporiertes Übersetzen ins Lateinische; Liv. V., Sall. b., Jug., Virg. Aen. V, VI; alle 2 Wochen eine häusliche Arbeit und ein Extemporale.
4. Griechisch. Widerholung des regelmäßigen und unregelmäßigen Verbums, Artikel und Kasuslehre, Xen. anab. IV, VII, Hom. Od. V, VII, IX, monatlich 2 schriftliche Arbeiten.
5. Hebräisch. Komb. mit II a.
6. Französisch. Schulgrammatik von Plötz 24—50; Rollin hommes illustres; Einübung der Grammatik durch mündliches und schriftliches Übersetzen ins Französische.
7. Geschichte und Geographie. Komb. mit II a.
8. Mathematik. Ausmessung der geradlinigen Figuren, Ähnlichkeitslehre, Kreismessung, Potenzen und Wurzeln, quadratische Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten; alle 2 Wochen eine schriftliche Arbeit.
9. Physik. Komb. mit II a.
10. Gesang. Komb. mit Prima.
11. Turnen. S. u.

5. Tertia.

1. Religionslehre. a. katholische. Das erste Hauptstück des Diöcesankatechismus, Erklärung des katholischen Kirchenjahres. b. evangelische. III a komb. mit II; III b: I. und II. Hauptstück aus Luthers Katechismus, bibl. Geschichte alten Testaments, Kirchenlieder.
2. Deutsch. Erweiterung der Lehre vom zusammengesetzten Satze, Berücksichtigung der Tropen und Figuren bei der Lektüre, Deklamation; alle 2 bis 3 Wochen ein Aufsatz,
3. Latein. Widerholung und Erweiterung der Kasuslehre, Syntax des Verbums, Widerholungen aus der Formenlehre, Caes de b. Gall. I, V, VI, ausgewählte Abschnitte aus Ov. met.; wöchentlich eine häusliche Arbeit und ein Extemporale.
4. Griechisch. a. III b. Widerholung des grammatischen Pensums der IV, Fortsetzung der Formenlehre bis zum Verbum in *μι* Übersetzung aus dem Übungsbuche; wöchentlich eine schriftliche Arbeit. b. III a Widerholung des regelmäßigen Verbums, das Verbum in *μι* und die unregelmäßigen Verba, Adverbium und Präpositionen; mündliches Übersetzen aus dem Übungsbuche; wöchentlich eine schriftliche Arbeit.
6. Geschichte und Geograhie. Geschichte der Deutschen von den ältesten Zeiten bis zur Reformation, Geographie von Deutschland.
7. Mathematik. III b. Planimetrie bis zur Kreislehre mit Ausschluß der schwierigeren Sätze, die 4 Grundrechnungen in Buchstaben, lineare Gleichungen; alle 2 Wochen eine schriftliche Arbeit,
8. Naturgeschichte. Sommer: Botanik, Winter: Amphibien und Fische.
9. Gesang. Einübung der Kirchenlieder, fortgesetzte Treffübungen im ein- zwei- und mehrstimmigen Knabengesang.
10. Turnen S. u.

6. Quarta.

1. Religionslehre. a. katholische: II. u. III. Hauptstück des Diöcesankatechismus, die letzten Lebenstage Jesu nach Schumacher. b. evangelische komb. mit III a.
2. Deutsch. Widerholung des grammatischen Pensums der vorhergehenden Klassen, der zusammenge-

setzte Satz, fortgesetzte Einübung der Orthographie, Erklärung von Lesestücken, Deklamation; alle 2 Wochen eine schriftliche Arbeit.

3. Latein. Repetition der unregelmäßigen Verba, Kasuslehre, das Wichtigste aus den übrigen Teilen der Syntax, Übersetzung der zugehörigen Übungsstücke, 8 Lebensbeschreibungen des Corn. Nep., ausgewählte Fabeln des Phaedr., wöchentlich 2 schriftliche Arbeiten.
4. Französisch. Elementargrammatik von Plötz bis zu Ende, die wichtigsten unregelm. Verba, wöchentlich eine schriftliche Arbeit.
5. Geschichte und Geographie. Übersicht über die orientalische Geschichte, Griechengeschichte, Römergeschichte bis zum Ende der Republik; Geographie von Asien, Afrika, Griechenland, Italien.
6. Mathematik. Abschluß der gesamten Bruchrechnung, das abgekürzte Rechnen, die bürgerlichen Rechnungsarten, Einführung in die Geometrie.
7. Naturgeschichte. Sommer: Botanik, Winter: Vögel.
8. Freihandzeichnen, Körperzeichnen, Perspektive.
10. Turnen S. u.

7. Quinta.

1. Religionslehre. a katholische komb. mit IV. b. evangelische komb. mit III b.
2. Deutsch. Der einfache und der zusammengezogene Satz, Einübung der Interpunktions- und der orthographischen Regeln, Deklamation, wöchentlich eine schriftliche Arbeit.
3. Latein. Widerholung und Erweiterung des gramm. Pensums der VI., Abschluß der Formenlehre, im Anschluß an die Übersetzung aus dem Übungsbuche die wichtigsten Regeln der Syntax, Memorieren von Vokabeln und kleineren Lesestücken, wöchentlich 2 schriftliche Arbeiten.
4. Französisch. Elementargrammatik von Plötz 1—60, Memorieren der Vokabeln, wöchentlich eine schriftliche Arbeit.
5. Geschichte und Geographie. Die nötigen Vorbegriffe der mathematischen und physischen Geographie, Übersicht über die Weltteile, Deutschland, biographische Erzählungen.
6. Rechnen. Dezimalbrüche, Regel detri, wöchentlich eine schriftliche Arbeit.
7. Naturgeschichte. Komb. mit IV.
8. Schreiben. Wöchentlich 3 Stunden.
9. Zeichnen. Wöchentlich 2 Stunden.
10. Gesang. Komb. mit IV.
11. Turnen. S. u.

8. Sexta

1. Religionslehre. a. katholische. Das Wichtigste aus der Glaubens- und Sittenlehre im Anschluß an die Grundformeln und täglichen Gebete, bibl. Geschichte nach Schumacher. b. evangelische, komb. mit III b.
2. Deutsch. Die Redeteile, Glieder des einfachen Satzes, Rektion der Präpositionen, Nacherzählen erklärter Lesestücke, orthograpische Übungen, Deklamation.
3. Latein. Formenlehre bis zu dem verb. dep., Übersetzung der zugehörigen Stücke des Übungsbuches, Memorieren von Vokabeln und kleineren Sätzen; wöchentlich 2 schriftliche Arbeit.en.
4. Geographie und Geschichte. Komb. mit V.
5. Rechnen. Die vier Grundrechnungen in benannten und unbenannten Zahlen, die gemeinen Brüche, wöchentlich eine schriftliche Arbeit.

6. Naturgeschichte. Im Sommer Botanik, im Winter Säugetiere.
7. Schreiben. Komb. mit V.
8. Zeichnen. Komb. mit V.
9. Gesang. Komb. mit V, außerdem wöchentlich eine Stunde Treffübungen, ein- und zweistimmige Lieder.
10. Turnen. S. u.

Turnen.

Turnübungen im Sommer in 2 Abteilungen an 2 Tagen von 5—6 und 6—7 Uhr abends.

Themata der Aufsätze in den oberen Klassen.

A Der deutschen:

1. I a.

1. Hat Kolumbus eine große That vollbracht?
2. „Wem Gott will rechte Gunst erweisen, den schickt er in die weite Welt."
3. Wallenstein „des Lagers Abgott und der Länder Geißel."
4. Worauf beruht die Überlegenheit Europas den anderen Erdteilen gegenüber? (Semestral-Arbeit.)
5. Wodurch ist in Schillers „Wallenstein" das Schwanken des Helden begründet?
6. Wie hat der Dichter im „Wallenstein" die Person des Helden unserm Herzen menschlich näher gebracht?
7. Octavio verdient das harte Urteil nicht, das oft über ihn gefällt worden ist. (Semestral-Arbeit.)
8. Aus welchen verschiedenen Ursachen wird Wallenstein von seinen Anhängern verlassen?
9. „Was thu' ich Schlimmeres, Als jener Cäsar that, des Name noch bis heut' das Höchste in der Welt benennt?" (Abiturienten-Aufsatz).

2. I b.

1) Euch, ihr Götter, gehört der Kaufmann. Güter zu suchen, geht er, doch an sein Schiff knüpfet das Gute sich an.
2) Wie kam es, daß der 2. punische Krieg so unglücklich für die Karthager auslief?
3) Siegfried, das Urbild eines deutschen Jünglings.
4) Was man ist, das bleib man andern schuldig. (Klassenarbeit.)
5) Charakteristik Volkers von Alzei.
6) Die Bedeutung der Ströme für die Kultur.
7) Das Nibelungenlied, ein Spiegel des deutschen Nationalcharakters. (Klassenarbeit.)
8) Weshalb beginnt um das Jahr 1500 die sogenannte „Neue Geschichte?"
9) Welcher der beiden feindlichen Brüder ist in Schillers „Braut von Messina" der Held der Tragödie?
10) Schlußarbeit.

3. II a.

1. Welche Mittel wendet Schiller an, um seinen Tell nicht als Meuchelmörder erscheinen zu lassen?
2. Was verdanken wir der Erfindung des Glases?

3. Mit welchem Rechte hat man Böotien die Schlachtentenne des Ares genannt?
4. Zeugt das Benehmen Johannas gegen ihren Vater von einem unkindlichen Herzen? (Klausuraufsatz.)
5. Schuld und Sühne der Jungfrau von Orleans.
6. Die Treue als tragisches Moment im Nibelungenliede.
7. Minna von Barnhelm, ein Werk von vollkommen deutschem Nationalgehalt.
8. Die Exposition des Dramas „Minna von Barnhelm." (Klausuraufsatz.)
9. Wodurch fand Sinon bei den Trojanern Vertrauen und Glauben.
10. Der Held der Schillerschen Ballade „Der Kampf mit dem Drachen."
11. Klausuraufsatz.

4. II b.

1. Tod, Grab und Auferstehung des Menschen in ihrer Aufeinanderfolge versinnbildet durch Erscheinungen in der Natur.
2. Wald, Stadt und Theater in den „Kranichen des Ibykus." (Schilderung der Scenen mit Nachweis ihrer Planmäßigkeit.)
3. Jugurtha als Jüngling daheim und im Felde. (Nach Sallust.)
4. Xenophon beim Übergange des griechischen Heeres über den Kentrites.
5. Das Städtchen in Goethe's „Hermann und Dorothea."
6. Wie stellt der epische Dichter körperliche Gegenstände dar, und warum verfährt er so? Im näheren zu zeigen an Beispielen aus Hom. Od. V. und Goethe's „Hermann u Dorothea." (Klausurarbeit.)
7. Der Pfarrer in Goethe's „Hermann und Dorothea." (Sein Charakter und seine Bedeutung.)
8. Qu. Cäcilius Metellus. (Eine Charakterschilderung nach Sallust.)
9. Was die Neugier nicht thut!
10. Der Zuschauer nach dem ersten Akte von Schiller's „Wilh. Tell." (Welche Kenntnisse hat er gewonnen, und in welche Stimmung ist er versetzt?) (Klausurarbeit.)
11. Tell und der Taucher verglichen mit Rücksicht auf das Wort: „Der Mensch versuche die Götter nicht!"
12. Pius Aeneas und *πολίμητις Ὀδυσσεύς* (Rechtfertigung der Beiwörter.)
13. Schlußarbeit.

B. Der lateinischen:

1. I a.

1. Quomodo praestantes quidam antiquitatis viri injuriam civium tulerint.
2. Qui flore aetatis exstincti immortalem belli gloriam sibi comparaverint.
3. Quibus potissimum proeliis rerum commutatio sit facta.
4. Victoriam Marathoniam Miltiadis, Salaminiam Themistoclis potissimum virtute esse reportatam.
5. Jugurtham Numidiae regem, minime miseratione dignum esse.
6. De Meleagro Homerico.
7. De Dolone Homerico.
8. (Prüfungs-Aufsatz.)

2. I b.

1. Quanta fide Hannibal iusiurandum patri datum servaverit.
2. Agesilaum, Lacedaemoniorum regem, optime de patria meruisse.

3. Miltiades fortitudine, prudentia Themistocles, Aristides iustitia res Atheniensium maxime firmaverunt atque auxerunt.
4. De Atheniensium ingrato in cives optime meritos animo. (Semestral-Arbeit.)
5. Alcibiades rebus Atheniensium fatalis.
6. Thebanorum gloriam cum Epaminonda et natam esse et extinctam.
7. Quibus rebus Cn Pompeius summam belli gloriam sibi paraverit. (Semestral-Arbeit.)
8. De bello a Xerxe, Persarum rege, adversus Graecos gesto.
9. C. Marium optime eundemque pessime de republica Romana meruisse.
10. Semestral-Arbeit.

3. II a.

1. De morte Codri gloriosa.
2. De Croesi Solonisque colloquio.
3, Roma quid singulis regibus debuerit.
4. De Gallorum contra urbem Romam expeditione.
5. Marius bis Italiam obsidione et metu servitutis liberavit.
6. (Schluß-Arbeit.)

II. Verteilung der Lehrgegenstände nach den Klassen.

Lehrgegenstände:	I. a. u. b	II. a. u. b.	III a. u. b.	IV.	V.	VI.
Religion.	2	2	2	2	2	3
Deutsch	3	2	2	2	2	3
Latein	8	10	10	9	9	9
Griechisch	6	6	6			
Hebräisch	2	1				
Französisch	2	2	2	5	4	
Mathematik	4	4	3	4	4	4
Naturwissenschaften	2	1	2	2	2	2
Geschichte und Geographie	3	3	3	4	3	3
Schreiben					2	2
Zeichnen				2	2	2
Gesang	1	1	1	2	2	3
Turnen (im Sommer).	2	2	2	2	2	2

III. Verteilung des Unterrichts nach den Lehrkräften.

(Seit Herbst.)

	I. a.	I. b.	II. a.	II. b.	III. a.	III. b.	IV.	V.	VI.	Insgesamt
Dr. Hüser, Direktor, Ordinarius der Ia.	6 Latein	2 Latein 2 Griech 2 Französ.	2 Griech.	2 Franz						16.
Nieberg, 1. Oberlehrer, Ordinarius der Ib.	3 Geschichte. 3 Deutsch 4 Griech.	6 Latein	3 Geschichte. 2 Latein.							21.
Franke, 2. Oberlehrer, Ordinarius der V.			2 Franz.				4 Geschichte 5 Französ.	2 Deutsch 9 Latein		22.
Starmans, 3. Oberlehrer.	2 Physik 4 Math.		4 Math		3 Math			4 Rechnen.	4 Rechnen 2 Naturbeschr.	23.
Dr. Mette, 1. ordentl. Lehrer, Ordinarius der IIa.	2 Religion.	4 Griech	8 Latein.		6 Griech.					20.
Dreisbusch, 2. ordentl. Lehrer, Ordinarius der IV.	2 Hebräisch		1 Hebräisch.		2 Latein. 2 Religion.		9 Latein. 2 Religion		3 Religion.	21.
Herte, 3. ordentl. Lehrer, Ordinarius der III.		3 Deutsch.			8 Latein 3 Geschichte.	6 Griech		3 Geschichte u. Geographie.		23.
Wesmöller, 4. ordentl. Lehrer, Ordinarius der VI			2 Religion.	10 Lat. 6 Griech 2 Deutsch	2 Deutsch					22.
Schmitz, Wissensch. Hülfslehrer.		4 Math.	1 Physik.	4 Math.	2 Naturgesch.	3 Math	2 Naturbeschreibung. 4 Rechnen.	4 Französ.		24.
Brabänder, Pfarrer ev. Religionslehrer.	2 Religion.		2 Religion				2 Religion			6.
Strotkötter, Cand. d. höh. Lehramtes.			2 Deutsch 4 Griech.		2 Französ.		2 Deutsch.		3 Deutsch 9 Latein.	22.
Peters, Gesang- u. Turnlehrer.					1 Gesang		1 Gesang		1 Gesang	3.
Trautmann, Schreib- u. Zeichenlehrer							2 Zeichnen.	2 Zeichnen 2 Schreiben.		6.

IV. Abiturienten-Prüfung.

Bei den Abiturienten-Prüfungen des Herbst- und Ostertermins führte Herr Provinzial-Schulrat Dr. Schultz den Vorsitz; bei der ersteren erhielten 3, bei der letzteren 23 Schüler der Ober-Prima das Zeugnis der Reife.

No.	Name.	Geburtsort	Konfession.	Alter.	Berufsfach	Universität.
1	Amecke, Franz.	Büderich	katholisch	21	Theologie	Münster
2	Eck, Bernard	Olpe Kr. Wipperfürth	katholisch	22	Mathematik und Naturwissenschaft	Bonn
3	Eigenbrodt, Arnold	Hof Lauterbach	evangelisch	20	Forstwissenschaft	
4	* Bockelmann, Peter	Wipperfürth	katholisch	$19^1/_2$	Mathematik und Naturwissenschaft	Würzburg
5	Bödefeld, Heinrich	Beringhausen	"	$21^1/_4$	Theologie	Münster
6	* Botzet, Peter	Lieser	"	$21^1/_3$	Theologie	Eichstädt
7	Buck, Emil	Dortmund	evangelisch	$20^1/_2$	Verwaltung	
8	* Damm, Paul	Wichdorf	"	$22^2/_3$	?	
9	Döppenschmidt, Wilh.	Kaub	katholisch	$21^2/_3$	Rechtswissenschaft	Würzburg
10	Dohmen, Gottfried	Linnich	"	$19^3/_4$	Medizin	Freiburg
11	Gabriel, Ludwig	Warburg	"	$20^1/_3$	Kaufmannschaft	
12	* Göckeler, Heinrich	Brilon	"	19	Theologie	Münster
13	Hagen, Heinrich	Troisdorf	"	$19^1/_2$	Theologie und Philologie	Bonn
14	Heinemann, Wilh.	Altenbüren	"	$21^3/_4$	Medizin	Würzburg
15	Kramer, Franz	Winterberg	"	20	Medizin	Marburg
16	Kröger, Hugo	Hörde	evangelisch	$20^1/_2$	Medizin	Marburg
17	Mangold, Friedr.	Kassel	"	$23^1/_2$	Theologie	Marburg
18	Müller Ludwig	Kassel	"	$20^1/_2$	Forstwissenschaft	
19	* Ricken, Wilh.	Medebach	katholisch	20	Medizin	Freiburg
20	Rommelfaugen, Johann	Pellingen	"	$23^1/_2$	Theologie	Eichstädt
21	Ruperti, Ernst	Bremerhaven	evangelisch	$22^1/_2$	Militärfach	
22	* Schmidtmann, Franz	Hiltrup	katholisch	$20^1/_2$	Theologie	Münster
23	* Schneider, Wilh.	Egidienburg	"	18	Medizin	Würzburg
24	* Stein, Eduard	Wilnsdorf	"	$20^1/_2$	Theologie	München
25	Berse, Wilh.	Küntrop	"	$23^1/_2$	Theologie	Insbruck
26	Wiegelmann, Franz	Altenrüthen	"	$21^1/_1$	Theologie	Münster

Den mit * Bezeichneten wurde die mündliche Prüfung erlassen.

In der schriftlichen Prüfung des Ostertermins waren, abgesehen von der Übersetzung in das Lateinische und aus dem Griechischen, folgende Aufgaben zu bearbeiten:

1. Deutscher Aufsatz: Was thu' ich Schlimmeres,
Als jener Cäsar that, des Name noch
Bis heut das Höchste in der Welt benennt? (Schiller, Wallensteins Tod II, 2.

2. Lateinischer Aufsatz: Praeclari quidam viri, et Graeci et Romani, miserum vitae exitum habuerunt!

3. Mathematische Arbeiten: 1. Ein Dreieck zu construieren, von welchem man kennt eine Seite, einen anliegenden Winkel und den Radius des umbeschriebenen Kreises $\alpha \sphericalangle \beta$, r. 2 Von einem Dreiecke ist gegeben die Höhe $h_1=2?1$cm, die Differenz der Winkel an der Grundlinie $\beta-\gamma=\delta=59^0\ 18{,}54'$, und der Radius des einbeschriebenen Kreises $\varrho=86{,}07$cm. Wie groß ist der Winkel an der Spitze α? 3. Von einem graden Kegel, dessen Höhe h=24m, verhält sich die Mantelfläche zur Grundfläche wie 25:7. Man berechne das Volumen und die Oberfläche desselben. 4. In wie viel Jahren wird eine Schuld von 16219 M, welche zu 4% auf Zinseszinsen steht, amortisiert sein, wenn am Ende eines jeden Jahres 2000 M. abgetragen werden?

V. Verordnungen der vorgesetzten Behörden

von allgemeinerem Interesse.

Aus dem Ministerialerlasse vom 31. März 1882 betreffend die Einführung der neuen Lehrpläne für die höheren Schulen heben wir folgendes hervor: An den Gymnasien und Progymnasien sind zu Ostern d. J. die revidirten Lehrpläne für die Klassen Sexta, Quinta, Quarta, (bezw. wenn Quarta Wechselcöten hat, für den zu Ostern seinen Kursus beginnenden Cötus der Quarta) einzuführen. Die entscheidende Änderung liegt darin, daß aus Quarta (bezw. aus dem Ostercötus der Quarta) der griechische Unterricht beseitigt wird und die dadurch verfügbar werdenden Lehrstunden zur Einführung des naturgeschichtlichen und zur Verstärkung des französischen und des mathematischen Unterrichts verwendet werden.

VI. Chronik.

1. Am vorjährigen Geburtstage seiner Majestät des Kaisers und Königs wurde in der Gymnasialkirche ein feierliches Hochamt gehalten. Bei der seitens des Gymnasiums veranstalteten Feier hielt Herr Oberlehrer Dr. Killing die Festrede. An die Festfeier schloß sich die Entlassung der Abiturienten.
2. Das neue Schuljahr wurde am 17. April mit einem feierlichen Hochamte eröffnet.
3. Mit dem Schlusse des vorigen Schuljahres schied der Kandidat des höheren Schulamtes Herr Laufkötter aus, um zunächst in eine Privatstellung überzugehen. Der Kandidat Herr Schmitz wurde am 1. April als wissenschaftlicher Hülfslehrer angestellt.
4. Der provisorische Gymnasiallehrer Herr Wesmöller, der vom Gymnasial-Kuratorium zum vierten ordentlichen Lehrer gewählt war, wurde als solcher durch Verfügung des Königl. Provinzial-Schulkollegiums vom 27. Juni bestätigt.
5. Am 28. Juni ist der Schüler der Ober-Prima Albert Gerve nach langen Leiden bei seinen Eltern in Fredeburg sanft und gottergeben entschlafen. Als der unterzeichnete Direktor die Todesnachricht den Schülern der Anstalt mitteilte, war es ihm ein tiefempfundenes Herzensbedürfnis, zu bekunden, wie teuer der Verstorbene ihm selbst und allen Lehrern durch seinen untadelhaften Lebenswandel und sein wissenschaftliches Streben geworden war. Am 5. Juli wurde in der Gymnasialkirche eine Seelenmesse für ihn gelesen.
6. Am 2 Juli feierten mehrere Schüler das Fest der ersten heiligen Kommunion, zu der sie durch den geistlichen Gymnasiallehrer Herrn Dreisbusch in besonderem Unterrichte waren vorbereitet worden.
7. Mit dem Beginne des Winter-Semesters verließ uns Herr Oberlehrer Dr. Killing, um dem ehrenvollen Rufe zur Übernahme einer ordentlichen Professur am Lyceum zu Braunsberg zu folgen. Den pflichttreuen Lehrer und liebenswürdigen Kollegen begleiteten unsere herzlichsten Segenswünsche.
8. An Stelle des Herrn Killing wurde Herr Gymnasiallehrer Starmans, bis dahin am Gymnasium in Paderborn, zum dritten Oberlehrer erwählt und höheren Orts bestätigt.
9. Bei der Nachfeier des Sedantages am 26. Sept. hielt Herr Oberlehrer Franke die Festrede.
10. Durch Verfügung des Königl. Provinzial-Schulkollegiums vom 23. September wurde Herr Kandidat Weskamp nach Vollendung seines Probejahres von hier nach Arnsberg zur Verwaltung einer ordentlichen Lehrerstelle abberufen.
11. Nach dem Ausscheiden des Herrn Weskamp trat Herr Kandidat Strotkötter, bis dahin am Gymnasium zu Münster beschäftigt, zur Vollendung seines Probejahres hier ein und übernahm mit Bewilligung der vorgesetzten Behörde ein volles Lehrerpensum.

12. Am 14. März hielt die Anstalt das feierliche Jahresgedächtnis für ihren Wohlthäter, den Landdechanten zu Hüsten und Ehrendomherrn Schlüter, und am 16. für dessen Schwester, die Wohlthäterin der Gymnasialkirche, Katharina Elisabeth Siebert.

VII. Frequenz-Uebersicht.

Das Gymnasium zählte im Laufe des Schuljahres 243 Schüler, von denen 199 katholisch, 38 evangelisch, 6 mosaischer Konfession, 47 einheimisch, 196 von auswärts waren. Auf die Klassen verteilen sie sich wie folgt: Ia. 34, Ib. 49, IIa. 46, IIb. 37, IIIa. 27, IIIb. 14, IV 13, V 10, VI 13.

VIII. Lehrmittel.

Es wurde eine größere Anzahl von Wandkarten angeschafft, so daß die für den geographischen Unterricht vorhandenen Lehrmittel nunmehr völlig ausreichen.

Zur Nachricht.

Die Trennung bisher kombinierter Klassen wird mit dem neuen Schuljahre zum Abschlusse gelangen. Dasselbe beginnt Mittwoch, den 11. April.

Die Aufnahmeprüfungen finden am vorhergehenden Tage statt. Außer dem Abgangszeugnisse der zuletzt besuchten Schule, beziehungsweise einem beglaubigten Zeugnisse über etwaigen Privatunterricht ist ein Impfschein beziehungsweise ein Attest über die wiederholte Impfung beizubringen. Zur Vermeidung von Irrtümern bei der Ausstellung von Zeugnissen seitens der Anstalt wolle man bei Anmeldung neuer Schüler auch ein Geburtsattest vorlegen.

Wohnungen für Schüler dürfen nur mit Genehmigung des Direktors gewählt oder geändert werden.

Dr. Hüser,
Direktor.