# Bericht

über das

# Gymnasium Petrinum zu Brilon

während

seines zwanzigsten Schuljahres 1877—1878,

erstattet

von dem

Director **C. Roeren.**

Voraus geht eine Abhandlung des Herrn Oberlehrers Dr. Schwering:
„Die Parallelcurve der Ellipse, als Curve vom Range Eins, unter Anwendung eines neuen Liniencoordinaten-Systems“.

1878. Progr. Nr. 289.

Brilon, 1878.
Buchdruckerei von M. Friedländer.

# Die Parallelcurve der Ellipse,

### als Curve vom Range Eins, unter Anwendung eines neuen Liniencoordinatensystems.

§. 1.

Wenn ich mir erlaube, über den vorbezeichneten bekannten Gegenstand die nachstehenden Untersuchungen zu veröffentlichen, so geht meine Absicht zunächst dahin, die von Clebsch (Crelle's Journal Bd. 63. S. 250.) über die Curven 4. Ordnung mit 2 Doppelpuncten dargelegten Forschungen durch ein specielles Beispiel einer Curve 4. Classe mit 2 Doppeltangenten zu erläutern, indem jetzt manche Operationen, die bei Clebsch nur angedeutet sind, sich vollständig durchführen lassen. Dahin gehören insbesondere die Untersuchungen über die Rückkehrpunkte, die durch ein sehr einfaches Verfahren sämmtlich ermittelt werden. Ferner ist der Ausgangspunct meiner Untersuchungen natürlich ein durchaus anderer als bei Clebsch, da ich nicht von der Eigenschaft, dass die Curve 2 Doppeltangenten besitzt, sondern von ihrer gewöhnlichen Definition ausging. Deshalb erscheinen die Ausdrücke der Coordinaten nicht in der bei Clebsch (Seite 255, Gleichung 70) vorausgesetzten Gestalt, sondern in einer in mancher Beziehung einfacheren Form, die durch die besonderen Eigenschaften der Curve ermöglicht wird. (S. diese Abh., Formel 11, 12.) Endlich bot mir der Gegenstand eine erwünschte Gelegenheit, die Brauchbarkeit eines gewissen Liniencoordinatensystems, auf welches ich (Schloemilchs Zeitschrift, Bd. XXI, S. 278) hingewiesen habe, an einem ausführlicheren Beispiele zu zeigen.

§. 2.

Schreiben wir die Gleichung der Ellipse in der Form:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.)$$

und nennen die gleiche Strecke, welche auf allen Normalen abgetragen wird $k$, so haben wir für $\xi$, $\eta$ als Coordinaten des dem Ellipsenpuncte $x$, $y$ entsprechenden Punctes der Parallelcurve die Beziehungen:

$$\frac{\xi-x}{k}=\frac{b^2x}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}},\ \frac{\eta-y}{k}=\frac{a^2y}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.)$$

Ist $k$ positiv, wie angenommen werden soll, so haben wir der Quadratwurzel ihren positiven oder negativen Werth zu ertheilen, je nachdem die Strecke $k$ auf den Normalen der Ellipse nach aussen oder nach innen abgetragen wird. Setzen wir:

$$x=r\,.\cos\varphi,\ y=r\,.\sin\varphi$$

so wird:

$$\left.\begin{array}{c} x=r\,.\cos\varphi=a\dfrac{\sqrt{r^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}},\ y=r\,.\sin\varphi=b\,.\dfrac{\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ \sqrt{b^4x^2+a^4y^2}=\mathrm{ab}\sqrt{a^2+b^2-r^2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3.)$$

Demnach hat man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{r^2-b^2}}\,.\,\xi &= a + b\,\frac{k}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}\\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-r^2}}\,.\,\eta &= b + a\,\frac{k}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots \quad (4.)$$

Ertheilen wir der Quadratwurzel $\sqrt{a^2-b^2}$ das positive Vorzeichen, so sind die Vorzeichen von $\sqrt{a^2-r^2}$ und $\sqrt{r^2-b^2}$ aus den ersten der Gl. 3 leicht zu beurtheilen. Eliminirt man $r^2$, so findet man die Gleichung der Parallelcurve in orthogonalen Cartesischen Coordinaten. Dieselbe ist von der 8ten Ordnung und findet sich in voller Entwicklung z. B. bei Salmon, Kegelschnitte Art. 348. Für unsere Zwecke ist die Aufstellung derselben ohne Bedeutung, nur mag bemerkt werden, dass sie eine Function von $k^2$ ist, daher die beiden getrennten Theile, in welche die Curve nach ihrer Construction zerfällt, als Zweige derselben Linie erscheinen. Indess wird dies Verhalten bald in ein noch helleres Licht treten.

Suchen wir jetzt die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten auf. Wählen wir als Axen unseres Systems die Tangenten in den Endpuncten der kleinen Axe der Ellipse (1.), nennen ferner die von den Endpuncten der kleinen Axe auf diesen Tangenten in derselben Richtung gemessenen Abschnitte, welche von einer beliebigen Geraden bestimmt werden, die Coordinaten u, v dieser Linie, so wird die Gleichung der Ellipse in diesen Liniencoordinaten

$$u^1 . v^1 = a^2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.)$$

Die Parallelcurve hat nun die Eigenschaft, dass die in der Entfernung $k$ zu der Ellipsentangente $u^1$, $v^1$ parallel gehende Gerade $u$, $v$ eine Tangente derselben ist. Daher hat man:

$$\left.\begin{aligned}u &= u^1 + \frac{k}{2b}\sqrt{4b^2+(u^1-v^1)^2}\\ v &= v^1 + \frac{k}{2b}\sqrt{4b^2+(u^1-v^1)^2}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots \quad (6.)$$

Die Grössen $u^1$, $v^1$ haben, wie Gl. 5 beweist, das gleiche Vorzeichen. Nimmt man $k$ als positiv an, so ist der Quadratwurzel in (6.) das mit dem Vorzeichen von $u^1$, $v^1$ übereinstimmende oder das entgegengesetzte Vorzeichen zu ertheilen, je nachdem die Tangente $u$, $v$ den nach aussen oder innen gerichteten Theil der Ellipsennormale durchschneidet. Dies kommt genau mit der für Gl. 2 getroffenen Bestimmung überein.

Aus (6.) folgt unmittelbar

$$u - v = u^1 - v^1$$

Daher ist auch

$$\begin{aligned}u^1 &= u - \frac{k}{2b}\sqrt{4b^2+(u-v^2)}\\ v^1 &= v - \frac{k}{2b}\sqrt{4b^2+(u-v^2)}\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so ergibt sich durch Beachtung von (5.)

$$\left(4b^2(uv-a^2)+k^2\left(4b^2+(u-v)^2\right)\right)^2 = 4b^2k^2(u+v)^2\left(4b^2+(u-v)^2\right) \quad\ldots \quad (7.)$$

Dies ist die Gleichung der Curve in unsern Liniencoordinaten. Dieselbe ist vom 4ten Grade; daher ist unsere Curve von der 4ten Classe. Da sie nun nicht wie die allgemeine Curve 4ter Classe von der 12ten, sondern 8ten Ordnung ist, so hat eine Reduction um 4 Einheiten Statt gefunden und es muss daher, wie die Plücker'schen Formeln lehren, die Curve zwei Doppeltangenten oder eine äquivalente Singularität besitzen. Um die Anzahl der Doppelpuncte und Rückkehrpuncte zu bestimmen, beachten wir, dass sich die Coordinaten $u$, $v$ ebenso wie die Punctcoordinaten $\xi$, $\eta$ rational durch die drei Irrationalitäten $\sqrt{a^2-r^2}$, $\sqrt{r^2-b^2}$, $\sqrt{a^2+b^2-r^2}$ ausdrücken lassen. Man findet nämlich mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= a^2 \cdot \frac{b-y}{bx} = a\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{r^2-b^2}} \\ v^1 &= a^2 \cdot \frac{b+y}{bx} = a\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{r^2-b^2}} \\ \sqrt{4b^2+(u^1-v^1)^2} &= \sqrt{a^2-b^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{\sqrt{r^2-b^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8.)$$

Die Formeln (6.) liefern also sofort $u$, $v$ rational durch die genannten drei Irrationalitäten ausgedrückt. Diese sind nun, wie wir sogleich sehen werden, elliptische Functionen eines Parameters und daher stellen sich $\xi$, $\eta$ sowohl wie $u$, $v$ rational in elliptischen Functionen eines Parameters dar. Demnach ist für unsere Curve der Defect, die Riemann'sche Zahl $p=1$; sie ist vom Range (Geschlechte) Eins. Nennen wir die Anzahl der Doppelpuncte $d$, die der Rückkehrpuncte $\varrho$, so liefern bekannte Formeln die Beziehungen:

$$7\,.\,8-2d-3\varrho=4,\ \frac{7\,.\,6}{1\,.\,2}-d-\varrho=\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}-2=1$$
$$2d+3\varrho=52$$
$$d+\varrho=20$$

Daraus folgt, dass unsere Curve 8 Doppelpuncte und 12 Rückkehrpuncte besitzen muss.

## §. 3.

Stellen wir jetzt die Coordinaten durch die elliptischen Functionen dar. Zunächst führen wir für $r^2$ eine andere Variable $s$ ein durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} r^2-a^2-b^2 &= s-{}^1/_3\,(a^2+b^2) &&= s-e_1 \\ r^2-a^2 &= s-{}^1/_3\,a^2+{}^2/_3\,b^2 &&= s-e_2 \\ r^2-b^2 &= s+{}^2/_3\,a^2-{}^1/_3\,b^2 &&= s-e_3 \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} e_1 &= {}^1/_3\,(a^2+b^2) \quad , \quad e_1-e^2=b^2 \\ e_2 &= {}^1/_3\,a^2-{}^2/_3\,b^2 \quad , \quad e_1-e_3=a^2 \\ e_3 &= -{}^2/_3\,a^2+{}^1/_3\,b^2 \quad , \quad e_2-e_3=a^2-b^2 \end{aligned}$$
$$e_1+e_2+e_3=o$$

Nun sei zur Abkürzung gesetzt

$$\mathrm{R}(s)=4\,(s-e_1)\,(s-e_2)\,(s-e_3)$$

und der Parameter $\lambda$ eingeführt durch die Gleichung:

$$\lambda=\int_{e_2}^{s}-\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{R}(s)}}$$

wo der Quadratwurzel ihr positiver Werth zu ertheilen ist. Dann wird in Weierstrass'schen Bezeichnungen, indem wir allen Quadratwurzeln ihren positiven Werth beilegen

$$s = \wp(\lambda + \omega_2)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2-r^2} &= \sqrt{e_1 - s} = \sqrt{e_1 - e_2} \cdot \frac{\sigma_3 \lambda}{\sigma_2 \lambda} \\ \sqrt{a^2 - r^2} &= \sqrt{e_2 - s} = \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_2 - e_3} \cdot \frac{\sigma \lambda}{\sigma_2 \lambda} \\ \sqrt{r^2 - b^2} &= \sqrt{s - e_3} = \sqrt{e_2 - e_3} \cdot \frac{\sigma_1 \lambda}{\sigma_2 \lambda}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9.)$$

Die halben Perioden $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ der Function $\wp(\lambda)$ stehen zu einander in der Beziehung

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = o$$

und werden gegeben durch die bestimmten Integrale:

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{R(s)}}, \quad \omega_3 = i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{-R(s)}}$$

Zur Vergleichung füge ich für einen Leser, dem die obigen Bezeichnungen nicht geläufig sein sollten, die Formeln (9.) in Jacobischen Functionen bei. Es ist:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2-r^2} &= b \cdot \frac{\vartheta_2(o)}{\vartheta_3(o)} \cdot \frac{\vartheta_3(\mu)}{\vartheta_2(\mu)} \\ \sqrt{a^2 - r^2} &= \frac{\pi}{2\omega} \cdot \vartheta_1(o) \cdot \vartheta_3(o) \cdot \frac{\vartheta_0(\mu)}{\vartheta_2(\mu)} \\ \sqrt{r^2 - b^2} &= \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \frac{\vartheta_2(o)}{\vartheta_1(o)} \cdot \frac{\vartheta_1(\mu)}{\vartheta_2(\mu)}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10.)$$

wo

$$\mu = \frac{\lambda}{2\omega_1}, \quad h = e^{\frac{\omega_3}{\omega_1}\pi i}$$

und:

$$\begin{aligned}\vartheta_0(\mu) &= 2h^{1/4} \cdot \sin \mu\pi - 2h^{9/4} \cdot \sin 3\mu\pi + 2h^{25/4} \cdot \sin 5\mu\pi - \ldots\ldots \\ \vartheta_1(\mu) &= 2h^{1/4} \cdot \cos \mu\pi + 2h^{9/4} \cdot \cos 3\mu\pi + 2h^{25/4} \cdot \cos 5\mu\pi + \ldots\ldots \\ \vartheta_2(\mu) &= 1 + 2h \cdot \cos 2\mu\pi + 2h^4 \cos 4\mu\pi + 2h^9 \cos 6\mu\pi + \ldots\ldots \\ \vartheta_3(\mu) &= 1 - 2h \cdot \cos 2\mu\pi + 2h^4 \cos 4\mu\pi - 2h^9 \cos 6\mu\pi + \ldots\ldots\end{aligned}$$

Man findet nun nach leichten Reductionen aus den Formeln (4.), (6.), (8.) für die Coordinaten die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \sqrt{e_1 - e_3} \cdot \frac{\sigma_1 \lambda}{\sigma_2 \lambda} + k \cdot \frac{\sigma_1 \lambda}{\sigma_2 \lambda} \\ \eta &= (e_1 - e_2) \cdot \frac{\sigma \lambda}{\sigma_1 \lambda} + k \cdot \sqrt{e_1 - e_3} \cdot \frac{\sigma \lambda}{\sigma_3 \lambda}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11.)$$

$$\left.\begin{aligned}u &= \frac{\sqrt{e_1 - e_3} \cdot \sigma_2 \lambda + k \cdot \sigma_3 \lambda - \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3} \cdot \sigma \lambda}{\sigma_1 \lambda} \\ v &= \frac{\sqrt{e_1 - e_3} \cdot \sigma_2 \lambda + k \cdot \sigma_3 \lambda + \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3} \cdot \sigma \lambda}{\sigma_1 \lambda}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12.)$$

Diese Ausdrücke haben nicht die von Clebsch vorausgesetzte Form; indem die rechten Seiten nicht rationale Ausdrücke einer elliptischen Function und deren Ableitung sind. Die in denselben auftretenden $\sigma$-Quotienten besitzen nämlich nicht dieselben Perioden und können direct daher in jene Form nicht gebracht werden. Es lässt sich dieser Anforderung allerdings ohne Mühe in anderer Weise entsprechen; allein ich sehe keine Veranlassung, von den obigen Formeln abzugehen, da sie jedenfalls den nicht zu unterschätzenden Vorzug möglichster Einfachheit besitzen.

Verfolgen wir zunächst den Lauf der Curve an der Hand der Formeln (11.) und (12.) etwas genauer.

Für $\lambda = o$ wird $\sigma(o) = o$, $\sigma_1(o) = \sigma_2(o) = \sigma_3(o) = 1$, daher $u = a + k$, $v = a + k$. Bezeichnen wir kurz die Theile der Curve, jenachdem die Strecke $k$ auf der Ellipsennormale nach aussen oder innen abgetragen ist, als äusseren oder inneren Zweig der Curve, so ist klar, dass die dem Werthe $\lambda = o$ zugehörige Tangente der Curve zu den Coordinatenaxen senkrecht steht und zwar in der Entfernung $a + k$ nach der positiven Seite hin von der ihr parallel gehenden kleinen Axe der Ellipse. Die zugehörigen Punktcoordinaten, die Coordinaten des Berührungspunctes der Tangente sind $\eta = o$, $\xi = a + k$. Wir befinden uns also für $\lambda = o$ an dem aus dem Endpunkte der grossen Ellipsenaxe hervorgehenden Punkte des äusseren Curvenzweiges; bez. der entsprechenden Tangente. Verfolgen wir jetzt die Irrationalitäten $\sqrt{a^2 - r^2}$, $\sqrt{r^2 - b^2}$, wenn $\lambda$ von Null aus durch reelle Werthe zunimmt. Für $\lambda = o$ ist $r = a$. Für wachsende $\lambda$ sind beide Irrationalitäten positiv, wir befinden uns im ersten Quadranten der Ellipse. Für $\lambda = \omega_1$ wird $r = b$, es werden $u$ und $v$ beide unendlich, aber ihr Verhältniss ist $k : k + 2b$, ein Beweis, dass die betreffende Tangente der grossen Axe im Abstande $k + b$ parallel geht. Ueberschreitet $\lambda$ den Werth $\omega_1$, so haben wir

$$\frac{\sigma(2\omega_1 - \lambda)}{\sigma_2(2\omega_1 - \lambda)} = -\frac{\sigma(-\lambda)}{\sigma_2(-\lambda)} = \frac{\sigma(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)}, \quad \frac{\sigma_1(2\omega_1 - \lambda)}{\sigma_2(2\omega_1 - \lambda)} = -\frac{\sigma_1(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)}$$

Demnach wird $\sqrt{r^2 - b^2}$ negativ, während $\sqrt{a^2 - r^2}$ positiv bleibt; wir befinden uns also im zweiten Quadranten der Ellipse. Diese Schlüsse können leicht für die beiden folgenden Quadranten vervollständigt werden.

Da ferner

$$\frac{\sigma_3(2\omega_1 \pm \lambda)}{\sigma_2(2\omega_1 \pm \lambda)} = \frac{\sigma_3(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)}$$

so behält die dritte Irrationalität $\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}$ immer ihr positives Vorzeichen und so haben wir das Endergebniss:

Wenn $\lambda$ die Werthe $o$, $\omega_1$, $2\omega_1$, $3\omega_1$, $4\omega_1$ stetig wachsend erreicht, so umwandert die Tangente $u$, $v$ (der Punct $\xi$, $\eta$) die vier Quadranten des äusseren Zweiges unserer Curve. Wächst $\lambda$ über $4\omega_1$ hinaus, so tritt eine einfache periodische Wiederkehr ein.

Vermehren wir aber das Argument um die rein imaginäre Periode $2\omega_3$, so haben wir die Gleichungen:

$$\frac{\sigma(2\omega_3 + \lambda)}{\sigma_2(2\omega_3 + \lambda)} = -\frac{\sigma(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)}, \quad \frac{\sigma_1(2\omega_3 + \lambda)}{\sigma_2(2\omega_3 + \lambda)} = \frac{\sigma_1(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)}$$

$$\frac{\sigma_3(2\omega_3 + \lambda)}{\sigma_2(2\omega_3 + \lambda)} = -\frac{\sigma_3(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)}$$

hat der Parameter also den Werth $2\omega_3$, so ist $r = a$; für wachsende $\lambda$ wird $\sqrt{a^2 - r^2}$ negativ, während $\sqrt{r^2 - b^2}$ potitiv ist. Da gleichzeitig $\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}$ negativ ist, so haben wir einen Punct des inneren Zweiges vor uns und zwar denjenigen, der aus dem diametral gegenüberliegenden Endpunkte der grossen Axe entspringt, gegenüberliegend nämlich dem Puncte, für welchen $\lambda = o$ war. Lassen wir nun $\lambda$ von $2\omega_3$ durch $2\omega_3 + \omega_1$, $2\omega_2 + 2\omega_1$, $2\omega_3 + 3\omega_1$, $2\omega_3 + 4\omega_1$ reell wachsend hindurchgehen, so umwandert $u$, $v$ den innern Zweig der Parallelcurve und zwar so, dass die jedesmalige parallele Ellipsentangente sich in entgegengesetztem Sinne wie früher von dem entgegengesetzten Puncte der Ellipse aus um dieselbe herumbewegt.

Da unsere Curve 4ter Classe ist, so gehen einer gegebenen Richtung 4 Tangenten parallel. Sei der Parameter einer derselben, die dem äusseren Zweige angehört $\lambda$, so ist für die parallele Tangente desselben Zweiges der Parameter $2\omega_1 + \lambda$. Für die beiden andern, die dem inneren Zweige angehören, sind die Parameter $2\omega_3 + 2\omega_1 - \lambda$ und $2\omega_3 + 4\omega_1 - \lambda$. Die Summe dieser 4 Parameter ist $8\omega_1 + 4\omega_3$, also ein ganzzahliges Aggregat der allen $\sigma$-Quotienten gemeinsamen Perioden $4\omega_1$ und $4\omega_3$. Wir werden in diesem Verhalten sogleich den Specialfall eines allgemeinen Satzes, den polaren Nebensatz zu dem bei Clebsch, Seite 221, stehenden erkennen.

## §. 4.

Gehen wir jetzt dazu über, die Singularitäten unserer Curve zu ermitteln.

Die Doppeltangenten zunächt ergeben sich durch die folgende geometrische Ueberlegung. Wenn die Entfernung einer Ellipsentangente vom Centrum die Grösse $k$ besitzt, so wird die derselben parallel laufende Tangente des inneren Zweiges unserer Curve durch das Centrum der Ellipse gehen. Diese Curventangente wird aber zweimal erhalten, nämlich auch aus dem diametral entgegengesetzten Puncte der Ellipse, dessen zugehörige Tangente gleichfalls vom Centrum den Abstand $k$ hat. Daher ist diese Tangente der Curve eine Doppeltangente. Durchsetzt dieselbe den ersten und dritten Quadranten der Ellipse, so liegen die erzeugenden Puncte der Ellipse im zweiten und vierten Quadranten. Es ist klar, dass analog im ersten und dritten Quadranten der Ellipse sich zwei Puncte diametral gegenüberliegen, die zu einer andern Doppeltangente führen, welche den zweiten und vierten Quadranten der Ellipse durchsetzt. Nun wird die Länge einer Senkrechten gefällt vom Centrum der Ellipse auf die Tangente, deren Berührungspunct den Vector $r$ hat, bestimmt durch die Formel

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit $k$, so erhalten wir für $r$ die Gleichung

$$r^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{k^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13.)$$

Dieselbe bestimmt den Vector der 4 Ellipsenpuncte, welche paarweise die beiden Doppeltangenten erzeugen. Aus dieser Ableitung ist klar, dass die Doppeltangenten, falls sie reell sind, immer dem inneren Curvenzweige angehören.

Dasselbe ergibt sich übrigens leicht analytisch aus der Curvengleichuug (7). Denn es ist ersichtlich, dass für Werthepaare $u$, $v$, welche den Gleichungen

$$u + v = o, \; 4b^2(uv - a^2) + k^2(4b^2 + (u - v)^2) = o$$

genügen, nicht blos (7.) sondern auch die partiellen Ableitungen nach $u$ und $v$ verschwinden. Die Doppeltangenten erscheinen daher als Tangenten, welche von dem Puncte $u + v = o$ an einen Kegelschnitt gelegt werden können. Der Punct $u + v = o$ ist das Centrum unserer Ellipse, der Kegelschnitt

$$k^2 u^2 + 2(2b^2 - k^2) uv + k^2 v^2 + 4b^2 (k^2 - a^2) = o$$

besitzt dasselbe Centrum $u + v = o$ und seine eine Hauptaxe geht den Coordinatenaxen der $u$, $v$ parallel. Die Doppeltangenten sind seine Asymptoten und sind reell, wenn $a < k < b$ ist. Dann ist der Kegelschnitt eine Hyperbel mit den Halbaxen $\sqrt{a^2 - k^2}$ und $\sqrt{k^2 - b^2}$.

Für die Coordinaten der Doppeltangenten finden wir die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} u = -v &= b\sqrt{\frac{a^2-k^2}{k^2-b^2}} \\ u = -v &= -b\sqrt{\frac{a^2-k^2}{k^2-b^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14.)$$

Die erstere durchsetzt den ersten und dritten, die letztere den zweiten und vierten Quadranten der Ellipse. Um nun die Werthe des Parameters $\lambda$ zu finden, welche den Doppeltangenten zukommen, so ist zunächst klar, dass jede derselben zwei Parameter besitzt, und zwar muss nach den Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen die erstere die Parameter $2\omega_3+\lambda_0$, und $2\omega_3+2\omega_1+\lambda_0$ haben, wo $\lambda_0$ eine zwischen 0 und $\omega_1$ liegende reelle Grösse bedeutet. Nun ist

$$\sqrt{e_1-e_2}\,.\,\frac{\sigma_3(2\omega_3+\lambda_0)}{\sigma_2(2\omega_3+\lambda_0)} = -\sqrt{a^2+b^2-r^2} = -\frac{ab}{k}, \text{ daher:}$$

$$\frac{\sigma_3(\lambda_0)}{\sigma_2(\lambda_0)} = \frac{a}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15.)$$

Die andere Doppeltangente besitzt aus analogen Gründen die Parameter $2\omega_3+2\omega_1-\lambda_0$ und $2\omega_3+4\omega_1-\lambda_0$. Führt man für $k$ den Ausdruck $\sqrt{e_1-e_3}\,.\,\dfrac{\sigma_2(\lambda_0)}{\sigma_3(\lambda_0)}$ in die Ausdrücke der Coordinaten ein, so erkennt man sofort, dass für $\lambda=2\omega_3+\lambda_0$ und $\lambda=2\omega_3+2\omega_1+\lambda_0$ der Summand $\sqrt{e_1-e_3}\,.\,\sigma_2(\lambda)+k\,.\,\sigma_3(\lambda)$ verschwindet, während der übrig bleibende $-\sqrt{e_1-e_2}$ $\sqrt{e_1-e_3}\,.\,\dfrac{\sigma(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}$ den Werth $\sqrt{e_1-e_2}\,\sqrt{e_1-e_3}\,.\,\dfrac{\sigma(\lambda_0)}{\sigma_1(\lambda_0)}$ annimmt und zwar sowohl für den Parameter $2\omega_3+\lambda_0$ wie für $2\omega_3+2\omega_1+\lambda_0$. Demnach sind die Ausdrücke der Coordinaten für beide Parameter dieselben. Analoges gilt natürlich für die andere Doppeltangente. Diese Eigenschaft wird nun dazu dienen, die andern Singularitäten, die Doppelpuncte und Spitzen zu finden.

Der folgende Paragraph wird den Weg ebnen durch Umformungen, welche ausserdem ein selbständiges analytisches Interesse beanspruchen.

## §. 5.

Ersetzt man das Argument $\lambda$ in den Ausdrücken der Coordinaten durch $2\alpha$, so werden dieselben doppeltperiodische Functionen mit den beiden Fundamentalperioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$. Man kann daher nach einem Hauptlehrsatze aus der Theorie der elliptischen Functionen die identische Gleichung bilden:

$$Au+Bv+C = \frac{\sigma(\alpha-a_1)\,.\,\sigma(\alpha-a_2)\,.\,\sigma(\alpha-a_3)\,.\,\sigma(\alpha-a_4)}{\sigma(2\alpha)} \quad \ldots \quad (16.)$$

wo $a_1, a_2, a_3, a_4$ Constante sind, deren Werthe von den Constanten $A$, $B$, $C$ abhangen, die aber durch die Relation verknüpft sind:

$$a_1+a_2+a_3+a_4=o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17.)$$

Da nun $Au+Bv+C=o$ die Gleichung eines Punctes bedeutet, so leitet man hieraus den allgemeinen Satz ab, dessen Specialfall wir zu Ende des §. 3 hervorgehoben.

Setzen wir $2\alpha_0=\lambda_0$, so sind die Argumente, welche der ersten Doppeltangente zukommen

$$\alpha_1=\omega_3+\alpha_0 \text{ und } \alpha_2=\omega_3+\omega_1+\alpha_0$$

Führen wir dieselben der Reihe nach in (16.) ein, so ändert sich dadurch die linke Seite nicht; dividiren wir also die so entstehenden Gleichungen, so ergibt sich, indem $\alpha_2=\alpha_1+\omega_1$ nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{\sigma_1(\alpha_1-a_1)\,.\,\sigma_1(\alpha_1-a_2)\,.\,\sigma_1(\alpha_1-a_3)\,.\,\sigma_1(\alpha_1-a_4)}{\sigma(\alpha_1-a_1)\,.\,\sigma(\alpha_1-a_2)\,.\,\sigma(\alpha_1-a_3)\,.\,\sigma(\alpha_1-a_4)} = -(e_1-e_3)(e_1-e_2) \quad . \quad . \quad (18.)$$

Diese Relation muss nun mit Hülfe der allgemeinen Theoreme umgestaltet werden, deren Grundformel lautet:

$$\sigma(a+b) \,.\, \sigma(a-b) \,.\, \sigma(c+d) \,.\, \sigma(c-d) + \sigma(a+c) \,.\, \sigma(a-c) \,.\, \sigma(d+b) \,.\, \sigma(d-b)$$
$$+ \sigma(a+d) \,.\, \sigma(a-d) \,.\, \sigma(b+c) \,.\, \sigma(b-c) = o$$

Dieser Formeln existiren 20 wesentlich verschiedene. Sie haben alle das Eigenthümliche, dass die Argumente dieselben sind wie in der Grundformel, die $\sigma$-Functionen aber andere Indices und gewisse constante Multiplicatoren erhalten. Man kann die Formeln daher ohne Rücksicht auf die Argumente schreiben, und wenn wir die $\sigma$-Function, welche keinen Index besitzt, durch $o$ bezeichnen, so würde die obige Formel lauten:

$$\overset{1.}{(oooo)} + \overset{2.}{(oooo)} + \overset{3.}{(oooo)} = o$$

Die übergeschriebenen Zahlen 1. 2. 3. bedeuten, dass für 1. die Argumente $a+b$, $a-b$, u. s. w. für 2. $a+c$, $a-c$ u. s. w eintreten. Diese letztere Vorsichtsmassregel ist wohl für die Aufstellung der 20 Formeln, nicht aber für die jetzt folgenden Auseinandersetzungen entbehrlich. Man hat:

$$-(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma) \,.\, \overset{1.}{(oooo)} - \overset{2.}{(\alpha\alpha\alpha\alpha)} + \overset{3.}{(\alpha\alpha\alpha\alpha)} = o \quad . \; . \; . \quad (19.)$$

Die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bedeuten verschiedene Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3.

Ferner:

$$\overset{1.}{(\alpha\alpha\alpha\alpha)} - \overset{2.}{(\alpha\alpha\alpha\alpha)} + (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\overset{3.}{(oooo)} = o$$
$$\overset{1.}{(\beta\beta\beta\beta)} - \overset{2.}{(\beta\beta\beta\beta)} + (e_\beta - e_\gamma)(e_\beta - e_\alpha)\overset{3.}{(oooo)} = o$$

Daraus folgt:

$$(e_\beta - e_\gamma)\overset{1.}{(\alpha\alpha\alpha\alpha)} + (e_\alpha - e_\gamma)\overset{1.}{(\beta\beta\beta\beta)} = (e_\beta - e_\gamma)\overset{2.}{(\alpha\alpha\alpha\alpha)} + (e_\alpha - e_\gamma)\overset{2.}{(\beta\beta\beta\beta)} \quad . \quad (20.)$$

Ferner hat man:

$$(e_\gamma - e_\alpha)\overset{1.}{(\beta\beta\beta\beta)} + (e_\alpha - e_\beta)\overset{2.}{(\gamma\gamma\gamma\gamma)} + (e_\beta - e_\gamma)\overset{3.}{(\alpha\alpha\alpha\alpha)} = o$$

Mit Hülfe dieser Formel wird aus (19.)

$$(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)(e_\beta - e_\gamma)\overset{1.}{(oooo)} + (e_\gamma - e_\alpha)\overset{1.}{(\beta\beta\beta\beta)} + (e_\beta - e_\gamma)\overset{2.}{(\alpha\alpha\alpha\alpha)}$$
$$+ (e_\alpha - e_\beta)\overset{2.}{(\gamma\gamma\gamma\gamma)} = o$$

Daher, wenn man $(e_\beta - e_\gamma)\overset{2.}{(\alpha\alpha\alpha\alpha)} + (e_\gamma - e_\alpha)\overset{1.}{(\beta\beta\beta\beta)}$ aus (20.) entnimmt:

$$(e_\beta - e_\gamma)\left\{\overset{1.}{(\alpha\alpha\alpha\alpha)} + (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\overset{1.}{(oooo)}\right\} = (e_\alpha - e_\gamma)\overset{2.}{(\beta\beta\beta\beta)} - (e_\alpha - e_\beta)\overset{2.}{(\gamma\gamma\gamma\gamma)} \quad (21.)$$

Jetzt treffen wir über die Argumente $a$, $b$, $c$, $d$ die folgende Verfügung, was wegen (17.) geschehen kann:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1 - a_1 = a + b\,, & 2\alpha_1 \;\; = a + c\,, & -\alpha_1 + a_4 = a + d \\
\alpha_1 - a_2 = a - b\,, & -(a_1 + a_2) = a - c\,, & \alpha_1 + a_3 = a - d \\
\alpha_1 - a_3 = c + d\,, & -(a_1 + a_3) = d + b\,, & \alpha_1 + a_2 = b + c \\
\alpha_1 - a_4 = c - d\,, & \alpha_1 + a_4 \;= d - b\,, & -(\alpha_1 + a_1) = b - c
\end{array}$$

Ferner setzen wir $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$. Dann wird aus Formel (21.), indem die linke Seite mit Rücksicht auf (18.) verschwindet, die folgende erhalten:

$$\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \cdot \frac{\sigma_2(2\alpha_1)}{\sigma_3(2\alpha_1)} = \frac{\sigma_3(a_1 + a_2) \,.\, \sigma_3(a_1 + a_3) \,.\, \sigma_3(a_1 + a_4)}{\sigma_2(a_1 + a_2) \,.\, \sigma_2(a_1 + a_3) \,.\, \sigma_2(a_1 + a_4)}$$

Ersetzen wir noch $\alpha_1$ durch $\alpha_0 + \omega_3$, so wird mit Rücksicht auf (15.) endlich gefunden:

$$\frac{\sigma_3(a_1+a_2)\,.\,\sigma_3(a_1+a_3)\,.\,\sigma_3(a_1+a_4)}{\sigma_2(a_1+a_2)\,.\,\sigma_2(a_1+a_3)\,.\,\sigma_2(a_1+a_4)} = -\frac{ak}{b^2} \quad \ldots\ldots \quad (22.)$$

Genau dieselbe Relation würde man erhalten haben, wenn man von der andern Doppeltangente ausgegangen wäre. Die vor (22.) vorhergehende Formel beweist dies augenblicklich.

## §. 6.

Gehen wir jetzt zur Ermittelung der Doppelpuncte und Spitzen über.

Von einem gewöhnlichen Puncte der Ebene gehen 4 Tangenten an die Curve, die von einander verschieden sind, d. h. die 4 Argumente $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ sind für einen gewöhnlichen Punct $Au + Bv + C = o$ (Formel 16.) von einander verschieden. Für einen Punct, welcher der Curve angehört, fallen zwei Tangenten zusammen, d. h. es können zwei der Argumente $a$ nur um ganze Vielfache der Perioden differiren. Ist dieser Punct ein Doppelpunct, so fallen die 4 Tangenten paarweise zusammen, oder es mnss sein

$$a_3 = a_1 + 2n\,\omega_1 + 2n'\omega_3$$
$$a_4 = a_2 + 2m\,\omega_1 + 2m'\omega_3$$

Aus der Gleichung (17.) ergibt sich daher

$$a_1 + a_2 = -(n+m)\,\omega_1 - (n'+m')\,\omega_3$$

Hieraus ergeben sich die folgenden 4 wesentlich verschiedeneu Annahmen:

$$a_1 + a_2 = o\ ,\ = \omega_1\ ,\ = \omega_3\ ,\ = \omega_1 + \omega_3$$

**Dieselben führen zu 4 Paaren von Doppelpuncten; höchstens eins derselben ist reell.**

$$1)\quad a_1 + a_2 = o$$

Daher wird $m = m' = n = n' = o$, also $a_1 = a_3$, $a_4 = a_2 = -a_1$, daher nimmt die Formel (22.) jetzt die Gestalt an:

$$\frac{\sigma_3(2a_1)}{\sigma_2(2a_1)} = -\frac{ak}{b^2}$$

Oder, wenn wir $2a_1 = \lambda_1$ setzen

$$\frac{\sigma_3(\lambda_1)}{\sigma_2(\lambda_1)} = -\frac{ak}{b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23.)$$

Nun hat die Function $\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$ die Perioden $2\omega_1$ und $4\omega_3$. Den übrigen $\sigma$-Quotienten ist die Periode $4\omega_3$ gemeinsam, nicht jedoch $2\omega_1$. Demnach sind von den Argumenten, welche (23.) liefert, 4 in Betracht zu ziehen. Es ist klar, dass $\lambda_1$ die Form haben kann $\lambda_1 = 2\omega_3 + \beta$, wo $\beta$ unter Umständen eine reelle, zwischen $o$ und $2\omega_1$ liegende Grösse ist. Dann sind die 4 ins Auge zu fassenden Argumente die folgenden:

$$2\omega_3 + \beta,\ 2\omega_3 - \beta,\ 2\omega_1 + 2\omega_3 + \beta,\ 2\omega_1 + 2\omega_3 - \beta$$

Für jedes derselben besteht die Gleichung (23). Führen wir dieselbsen in die Ausdrücke der Punctcoordinaten (11.) ein, so verschwindet für jedes die Coordinate $\eta$. Geben wir der Coordinate $\xi$ den Ausdruck:

$$\xi = \frac{\sigma_1\lambda}{\sigma_2\lambda}\left(\sqrt{e_1 - e_3} + k\,.\,\frac{\sigma_2\lambda}{\sigma_3\lambda}\right)$$

so erhält der in der Klammer stehende Ausdruck für alle 4 Argumente den Werth $\frac{a^2-b^2}{a}$. Der Werth von $\frac{\sigma_1\lambda}{\sigma_2\lambda}$ ist derselbe für die beiden ersten Argumente; für die beiden letzten ist er auch gleich, aber dem vorigen entgegengesetzt. **Demnach erhalten wir auf der $\xi$-Axe zwei Doppelpuncte;**

jeder besitzt zwei Parameter, deren Summe einer ganzen Periode gleich kommt. Die Coordinaten dieser Doppelpuncte sind, wie eine leichte Ausrechnung zeigt:

$$\eta = o\,,\ \xi = \pm\frac{1}{b}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-k^2}$$

Sie sind, wenn die Doppeltangenten reell sind, imaginär, daher auch $\beta$ alsdann eine complexe Grösse.

$$2)\quad a_1 + a_2 = \omega_1$$

Für diesen Fall können wir annehmen $m' = n' = m = o,\ n = -1,\ a_3 = a_1 - 2\omega_1,\ a_4 = a_2$

Dann erhält man, indem $\left(\dfrac{\sigma_3\,\omega_1}{\sigma_2\,\omega_1}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$

$$\frac{\sigma_3\,(2\,a_1)}{\sigma_2\,(2\,a_1)} = -\frac{k}{a}$$

Hierdurch ist abermals ein Paar von Doppelpuncten gegeben und zwar liegen dieselben auf der Axe der $\eta$. Die Werthe ihrer Coordinaten sind:

$$\xi = o,\ \eta = \pm\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{k^2-a^2}$$

Der Coordinate $\eta$ kann man den Ausdruck geben

$$\eta = \frac{\sigma\,\lambda}{\sigma_2\,\lambda}\left(e_1 - e_2 + k\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma_2\,\lambda}{\sigma_3\,\lambda}\right)$$

Besitzt der eine Doppelpunct den Parameter $\lambda_1$, so ist sein anderer Parameter $2\omega_1 - \lambda_1$; der andere hat dann die Parameter $-\lambda$ und $2\omega_1 + \lambda_1$. Auch dieses Paar Doppelpuncte ist imaginär, wenn die Doppeltangenten reell sind.

$$3)\quad a_1 + a_2 = \omega_3$$

Wir nehmen an $n = m = m' = o,\ n' = -1$, also $a_3 = a_1 - 2\omega_3,\ a_4 = a_2$

Also:

$$a_1 + a_2 = \omega_3\,,\ a_1 + a_3 = 2\,a_1 - 2\,\omega_3\,,\ a_1 + a_4 = \omega_3$$

Multipliciren wir in (22.) mit dem Nenner herauf, so verschwindet die linke Seite; demnach muss auch die rechte verschwinden und das wird durch die Annahme $2\,a_1 = \omega_2$ bewirkt. Für diesen Werth erhält man $\xi$ und $\eta$ als unendlich gross. Ferner ist

$$\left(\frac{\sigma_1\,\omega_2}{\sigma\,\omega_2}\right)^2 = e_2 - e_1$$

Daher liefert die Liniencoordinatengleichung

$$u - v = \pm\,2\,ai$$

Dies ist die Gleichung der unendlich fernen Ellipsenpuncte. Der eine hat die Parameter $\omega_2$ und $2\omega_1 + \omega_2$, der andere $-\omega_2$ und $2\omega_1 - \omega_2$.

$$4)\quad a_1 + a_2 = \omega_1 + \omega_3$$

Dieser Fall ist dem vorigen genau analog und führt zu der Bestimmung $2\,a_1 = \omega_3$. Daraus folgt die Gleichung der Doppelpuncte in Liniencoordinaten

$$u - v = \pm\,2\,bi$$

Damit sind wir zu den unendlich fernen Kreispuncten geführt. Der eine besitzt die Parameter $\omega_3$ und $\omega_1 + \omega_3$, der andere $-\omega_3$ und $2\,\omega_1 - \omega_3$.

Für einen Rückkehrpunct der Curve fallen drei Tangenten in eine, die Rückkehrtangente zusammen. Demnach können die Argumente $a_2$, $a_3$ von $a_1$, nur um ganze Perioden differiren, und wegen (17.) kann daher $a_4$ von $-3\,a_1$ auch nur durch Vielfache ganzer Perioden verschieden sein.

Die Gleichung (22.) verwandelt sich alsdann in

$$\left(\frac{\sigma_3\, 2a_1}{\sigma_2\, 2a_1}\right)^3 = -\frac{a\,k}{b^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24.)$$

Setzen wir wieder $2a_1 = \lambda_1$ so ergeben sich aus der kubischen Gleichung (24.) drei Werthe für $\frac{\sigma_3(\lambda_1)}{\sigma_2(\lambda_1)}$. Jedem derselben entsprechen 4 Werthe des Argumentes $\lambda_1$, die genauer ins Auge zu fassen sind, weil sie zu je einem Rückkehrpuncte führen. Im Ganzen erhalten wir also 12 Rückkehrpuncte, von denen jedoch höchstens 4 reell sind. Die 4 Argumente, welche für $\lambda_1$ aus (24.) zusammengehörend hervorgehen, sind

$$\lambda_1\,,\ -\lambda_1\,,\ 2\omega_1 + \lambda_1\,,\ 2\omega_1 - \lambda_1$$

Den Coordinaten $\xi$, $\eta$ kann man mit Hülfe von (24.) für die reelle Gruppe der Rückkehrpuncte die Form ertheilen:

$$\xi = \frac{1}{a^{1/3}} \cdot \frac{\sigma_1(\lambda_1)}{\sigma_2(\lambda_1)}\,(a^{4/3} - b^{2/3}\,k^{2/3})$$

$$\eta = b^{2/3} \cdot \frac{\sigma(\lambda_1)}{\sigma_2(\lambda_1)}\,(b^{4/3} - a^{2/3}\,b^{2/3})$$

Daraus ergibt sich, dass dieselben in 4 verschiedenen Quadranten liegen. Eine kleine Rechnung liefert jetzt

$$\sqrt{a^2 - b^2}\,.\ \xi = (a^{4/3} - b^{2/3}\,k^{2/3})^{3/2}$$

$$\sqrt{a^2 - b^2}\,.\ \eta = (a^{2/3}\,k^{2/3} - b^{4/3})^{3/2}$$

Die Realität der 4 Spitzen ist also an die Bedingungen geknüpft:

$$\frac{a^2}{b} > k > \frac{b^2}{a}$$

Daraus folgt, dass wenn die Doppeltangenten reell sind, das Gleiche von den Spitzen gilt. Dieser Schluss ist aber nicht umkehrbar.

Die Spitzen liegen an den Stellen, wo der Krümmungsradius der Ellipse gleich $k$ ist. Dies ist geometrisch evident, da an einer solchen Stelle drei consecutive Tangenten unserer Curve durch einen Punct laufen. Eliminirt man aus den letzten beiden Gleichungen $k$, so wird die Gleichung der Evolvente der Ellipse gefunden

$$a^{2/3}\,.\ \xi^{2/3} + b^{2/3}\,.\ \eta^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

Dies beweist, dass die Rückkehrpuncte unserer Curve Schnittpuncte derselben mit der Ellipsenevolvente sind.

## §. 7.

Wenn wir uns die Aufgabe stellen, noch auf einige andere Eigenschaften unserer Curve einzugehen, so werden die Tangenten, welche die Parallelcurve mit ihrer erzeugenden Ellipse gemein hat, unser Interesse zunächst beanspruchen dürfen. Dieselben werden durch Combination der Gleichungen der beiden Curven in Liniencoordinaten gefunden. Hier ergibt sich zunächst die Lösung

$$4b^2 + (u - v)^2 = o$$

und dies zeigt an, dass die von den unendlich fernen Kreispuncten ausgehenden Paare von Tangenten (sie sind bekanntlich Doppelpuncte) unserer Curve auch die Ellipse berühren. Daraus ergibt sich weiter, dass die 4 Brennpuncte der Ellipse zugleich Brennpuncte unserer Parallelcurve sind. Demnach sind die für verschiedene $k$ sich ergebenden Individuen derselben in ihrer Gesammtheit als ein Analogon zu einer Schar confocaler Kegelschnitte anzusehen.

Hiermit sind 4 gemeinsame Tangenten ermittelt. Die übrigen 4 ergeben sich durch einfache Rechnung als

$$u - v = 2b \sqrt{\frac{4a^2 - k^2}{k^2 - 4b^2}}, \quad u + v = 2k \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{k^2 - 4b^2}}$$

Damit dieselben reell seien, muss man haben

$$2a > k > 2b$$

Für diese Bestimmung von $k$ greift nämlich der innere Zweig unserer Curve über die Ellipse an den beiden Endpuncten der kleinen Axe hinaus, so dass 4 reelle gemeinsame Tangenten der beiden Curven möglich werden. Man erhält die Coordinateu derselben aus den beiden letzten Gleichungen, indem man den Wurzeln die verschiedenen Werthcombinationen beilegt.

Die Gleichung der Curve in den sogenannten elliptischen Coordinaten kann man auch ohne Mühe aufstellen. Man hat zu diesem Zwecke zu setzen

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a^2 + b^2 - \xi^2 - \eta^2$$
$$\lambda_1 \lambda_2 = a^2 b^2 - b^2 \xi^2 - a^2 \eta^2$$

Die zwischen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ resultirende Gleichung ist dann die gesuchte; sie steigt auf den vierten Grad.

Brilon, im März 1878.

**Dr. Karl Schwering.**

# Schulnachrichten.

## I. Unterrichts-Uebersicht.

### Ober-Prima.

**Ordinarius: Der Director.**

1. Religionslehre. a. kath.: Geschichte der Kirche seit Constantin. Ausgewählte Kapitel der Glaubenslehre. Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.

   b. evang.: Prima und Secunda combinirt. Das Evangelium Matthäi, erste Hälfte, gelesen und erklärt nach dem Urtexte. — Christliche Kirchengeschichte, zweite Periode, nach Hollenberg. — Die Lehre von der Schöpfung nach Kurtz. Wöchentlich 2 Stunden.

   Evangelischer Religionslehrer Pfarrer Bruns.

2. Deutsch. Erklärung ausgewählter prosaischer und poetischer Musterstücke. Goethe's Iphigenie auf Tauris. — Uebersichtliche Geschichte der deutschen Litteratur seit Opitz mit Proben. — Elemente der empirischen Psychologie. — Uebungen im Vortrage. — Leitung des deutschen Aufsatzes (s. u.) Wöchentlich 3 Stunden. Der Ordinarius.

2. Latein. Cic. Disputt. Tusc. L. I. Tac. Germania. Privatim mit eingehender Besprechung in der Klasse: Cic. Somnium Scip., pro Ligario, in Q. Caec. Metellum. — Hor. Carm. Auswahl aus L. II, III, IV. Sat. 1, 7. — Memoriren einer größeren Zahl von Oden. — Aus der Grammatik die Capitel von der Wortstellung und Satzverbindung nach Schultz' größerer Grammatik; Wiederholungen. — Wöchentlich ein Extemporale; Leitung des Aufsatzes (s. u.). — Uebungen im Lateinsprechen. Wöchentlich 8 Stunden. Oberlehrer Ferrari.

4. Griechisch. Thuc. L. I. c. 24—57. Platon. Gorgias. Dem. Olynth. I. Ausgewählte Capitel aus Xen. Cyrop. extemporirt. — Hom. Il. L. 8, 11, 12, 13, 18, 21. Soph. Electra. Memoriren ausgewählter Stellen. — Vervollständigung der Syntax und Wiederholung ausgewählter Capitel nach Schnorbusch und Scherer. — Alle 14 Tage schriftliche Extemporalien. Wöchentlich 6 Stunden.

   Der Ordinarius.

5. Hebräisch. Wiederholung und Vervollständigung der Formenlehre; die wichtigsten Partieen der Syntax. Nach Vosen. — Gelesen wurden Abschnitte aus den historischen Büchern des A. T. und einige leichtere Psalmen. — Schriftliche Arbeiten. — Wöchentlich 2 Stunden.

   Gymnasiallehrer Dreisbusch.

6. Französisch. Lectüre: Montesquieu, Considér. etc. und Athalie par Racine. — Wiederholungen aus der Grammatik von Ploetz. — Wöchentlich 1 Extemporale. — Wöchentlich 2 Stunden.

   Oberlehrer Franke.

7. Geschichte und Geographie. Deutsche Geschichte seit Rudolph von Habsburg mit Berücksichtigung der allgemeinen Geschichte. Nach Pütz. — Preußische Geschichte der neueren Zeit. — Wiederholungen aus allen Theilen der Geschichte. Geographie von Europa. Wöchentlich 3 Stunden.
Ferrari.

8. Mathematik. Combinatorik, binomischer Lehrsatz, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Quadrat- und Kubikwurzel aus complexen Größen. Wiederholung und Erweiterung des auf den vorhergehenden Classen bearbeiteten Unterrichtsstoffes. Vorträge der Schüler über Aufgaben und Satzsysteme. Zahlreiche schriftliche Uebungen. Nach Féaux. Wöchentlich 4 Stunden.
Oberlehrer Dr. Schwering.

9. Physik. Akustik und Optik. Mündliche Uebungen wie in der Mathematik. Nach Münch. Wöchentlich 2 Stunden.
Dr. Schwering.

10. Gesang. Vierstimmiger Männerchor; Uebung des Kirchengesangs. Wöchentlich 1 Stunde.
Gesanglehrer Peters.

11. Turnen (s. u.).

## Unter-Prima.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Mette.

1. Religionslehre. Die allgemeine und besondere Sittenlehre, nach dem Leitfaden von Dubelmann. — Die Kirchengeschichte bis auf Bonifacius. — Wöchentlich 2 Stunden.
Der Ordinarius.

2. Deutsch. Aeltere Literaturgeschichte mit Proben, besonders Nibelungenlied. — Genauere Einführung in Schiller's Leben und Werke. — Wallenstein's Tod. — Lectüre prosaischer und poetischer Musterstücke, besonders von Schiller. — Elemente der philosophischen Propädeutik. — Leitung und Censur des Aufsatzes (s. u.). — Wöchentlich 3 Stunden.
Gymnasiallehrer Dr. Stiene.

3. Latein. a. Grammatik: Wiederholungen aus der Syntax des Nomens und Verbums. Vom Gebrauche der Participien, des Gerundiums und Supinums und die Lehre vom Satzbau, nach der größeren Grammatik von Schultz (Kap. 64—69). Vielfache stilistische Uebungen. — b. Lectüre: Cic. de amicitia, orat. pro Arch. poeta, pro lege Manil. — Ausgewählte Abschnitte aus Livius wurden extemporirt. — c. Correctur der monatlichen Aufsätze (s. u.) und der wöchentlichen Extemporalien oder Pensa. — Wöchentlich 6 Stunden.
Der Ordinarius.

d. Poetische Lectüre: Hor. Carm. L. I und zum Theile III. Epod. 1, 2, 7, 13. Eine größere Zahl von Oden wurde memorirt. — Wöchentlich 2 Stunden.
Der Director.

4. Griechisch. a. Grammatik: Wiederholungen aus der anomalen Formenlehre. Die Syntax des Verbums. Die Negationen, nach Schnorbusch und Scherer. — b. Lectüre: Plat. Laches. — Abschnitte aus Thucyd. lib. I. u. II. — Ausgewählte Capitel aus Xen. Cyrop. wurden extemporirt. — c. Wöchentlich ein Extemporale im Anschluß an die Lectüre. — Wöchentlich 4 Stunden.
Der Ordinarius.

d. Poetische Lectüre: Hom. Il. L. 1—7. Memoriren ausgewählter Abschnitte. Wöchentlich 2 Stunden
Der Director.

5. Hebräisch. Combinirt mit Oberprima.

6. Französisch. a. Grammatik nach Plötz (bis zu Ende). — b. Lectüre: Montesquieu: Considérations etc. — c. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Correctur derselben. — Wöchentlich 2 Stunden.
Franke.

7. Geschichte und Geographie. Geschichte des Mittelalters, besonders der Deutschen, nach Pütz. — Geographie von Europa, besonders von Deutschland. — Wöchentlich 3 Stunden.
Dr. Stiene.

8. Mathematik. Stereometrie, Trigonometrie, Anwendung der Trigonometrie auf die Stereometrie. — Extemporalien. — Wöchentlich 4 Stunden. Dr. Schwering.

9. Physik. Mechanik. — 2 Stunden wöchentlich. Dr. Schwering.

10. Gesang. Combinirt mit Ober-Prima.

## Ober-Secunda.

### Ordinarius: Oberlehrer Franke.

1. Religionslehre. Die Lehre von den Gnadenmitteln nach dem Leitfaden von Dubelmann. — Erklärung und Memoriren einiger Kirchenhymnen. — Wöchentlich 2 Stunden.
Dreisbusch.

2. Deutsch. Lectüre poetischer und prosaischer Musterstücke; Memoriren und Vortrag einer Auswahl aus denselben. — Genauere Einführung in Klopstock's Leben und Werke; Lectüre aus der Messiade und den Oden. Grundzüge der Poetik. — Leitung des Aufsatzes. — Wöchentlich 2 Stunden.
Der Director.

3. Latein. a. Prosaische Lectüre: Livius lib. IV und XXI.; Cic. orat. in Cat. I, II und IV. Privatim: Sallust. bell. Jug. Grammatik: Syntax des Verbums bis zu Ende, in Verbindung mit mündlichem Uebersetzen, nach der Sprachlehre von Schultz. Wöchentliche Extemporalien und häusliche Exercitien. — Lateinische Aufsätze. — Wöchentlich 8 Stunden. Der Ordinarius.
Poetische Lectüre: Virg. Aen. lib. III. Ausgewählte Eclogen und Abschnitte aus Georg. lib. I. Die Eclogen wurden zugleich memorirt. — Wöchentlich 2 Stunden.
Dr. Mette.

4. Griechisch. a. Grammatik: Repetitionen aus der Formen- und Kasuslehre; sodann die Syntax des Verbums, nach der Sprachlehre von Schnorbusch und Scherer. — b. Lectüre: Xenoph. Cyrop. lib. I. (cap. 3. sqq.) und lib. II. Ausgewählte Abschnitte aus Herod. lib. I. und lib. III. — Hom. Odyss. lib. IX, XIII—XVI. Eine zusammenhängende Partie von 150 Versen aus lib. XIII wurde memorirt. — c. Correctur der wöchentlichen Extemporalien. — Wöchentlich 6 Stunden.
Dr. Mette.

5. Hebräisch. Die Formenlehre bis zu den Segolatfomren mit Ausschluß der Verba Ajin—Ajin und Ajin—Vav., nach der Grammatik von Vosen. — Uebersetzt und analysirt wurden einige von den der Grammatik beigefügten Uebungsstücken. — Schriftliche Arbeiten. — Wöchentlich 1 Stunde.
Dreisbusch.

6. Französisch. Grammatik nach der Schulgrammatik von Plötz. b. Lectüre: Mort de Louis XVI. par Lamartine. — Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. — Wöchentlich 2 Stunden.
Der Ordinarius.

7. Geschichte und Geographie. Geschichte der Römer bis zum Untergange des weströmischen Reiches nach dem Grundriß von Pütz. Geographie von Africa und Australien. — Wöchentlich 3 Stunden.
Der Ordinarius.

8. Mathematik. Geometrie: Aehnlichkeitslehre, Construction algebraischer Ausdrücke, Tactionsproblem. Algebra: Zinseszinsrechnung, geometrische Reihen, Potenzen, Logarithmen. Nach Féaux. — 4 Stunden wöchentlich. Dr. Schwering.

9. Physik. Statik und Dynamik der Flüssigkeiten und Gase. Luftpumpe, Barometer. Elektricität. Nach Münch. — Wöchentlich 1 Stunde. Dr. Schwering.

10. Gesang. Combinirt mit Prima.

## Unter-Secunda.

### Ordinarius: Oberlehrer Ferrari.

1. Religionslehre. Die Glaubenslehre bis zu den hl. Sakramenten. Kirchliche Hymnen. Wöchentlich 2 Stunden. Gymnasiallehrer Parensen.

2. Deutsch. Lectüre und Erklärung von Musterstücken, besonders Schiller's Balladen. Memoriren und Vortrag einer Auswahl derselben. — Leitung des Aufsatzes (s. u.); Dispositions-Uebungen, insbesondere im Anschlusse an die Lectüre. Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.

3. Latein. Lehre von der Uebereinstimmung der Satztheile und von den Casus nach der größeren Grammatik von F. Schultz. — Wiederholungen aus der Formenlehre, mit Anschluß mündlicher und schriftlicher Uebungen. — Liv. L. I., Cic. in Cat. I. Privatim Corn. Nep. ausgewählte Vitae mit eingehender Besprechung in der Klasse. — Wöchentlich 1 Exercitium und 1 Extemporale. Wöchentlich 8 Stunden. Der Ordinarius.

Poetische Lectüre: Verg. Aen. L. I, II. III. — Wöchentlich 2 Stunden.
Wissenschaftlicher Hülfslehrer Lübbesmeyer.

4. Griechisch. a. Grammatik. Uebereinstimmung der Satztheile, Gebrauch der Casus, Eigenthümlichkeiten im Gebrauche der Adjectiva und Pronomina nach Schnorbusch und Scherer. b. Xen. An. lib. II, III. Cyrop. L. I. 1, 2. c. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. — Wöchentlich 4 Stunden. Dr. Stiene.

Poetische Lectüre: Hom. Od. L. I, IV, IX. Lübbesmeyer.

5. Hebräisch. Formenlehre bis zu den unregelmäßigen Verbis; Grundregeln der Declination. Nach Vosen. Gelesen wurden einige von den der Grammatik beigefügten Uebungsstücken. Schriftliche Arbeiten. — Wöchentlich 1 Stunde. Dreisbusch.

6. Französisch. Lectüre: Michaud première croisade. Grammatik nach der Schulgrammatik von Plötz. Mündliche Uebersetzungen aus Plötz. Exercitien, zuweilen Extemporalien. Wöchentlich 2 Stunden. Franke.

7. Geschichte und Geographie. Geschichte der altorientalischen Völker. Geschichte der Griechen bis zu Alexander dem Großen. Nach Pütz. — Geographie von Asien und Amerika. Wöchentlich 3 Stunden. Franke.

8. Mathematik. Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel aus Zahlen und algebraischen Ausdrücken. — Quadratische Gleichungen. — Geometrie bis zu den Aehnlichkeitssätzen. Viele Aufgaben und Uebungsbeispiele in der Klasse. — Nach Féaux. — Wöchentlich 4 Stunden. Dr. Schwering.

9. Physik. Lehre von der Wärme. Einiges aus der Mechanik. Nach Münch. — Grundbegriffe der mathematischen Geographie. — Wöchentlich 1 Stunde. Dr. Schwering.

10. Gesang. Combinirt mit Prima.

## Ober-Tertia.

### Ordinarius: Gymnasiallehrer Dreisbusch.

1. Religionslehre. a. katholisch: Das erste und zweite Hauptstück des Diöcesan-Katechismus (Lehre

von den Geboten und den Gnadenmitteln). — Erklärung deutscher Kirchenlieder. — Wöchentlich 2 Stunden.
Der Ordinarius.

b. evangelisch: Tertia bis Sexta combinirt. Wiederholung der ersten drei Hauptstücke nach dem Katechismus. Biblische Geschichte des N. T. nach Zahn. Einige Psalmen und Kirchenlieder gelernt und erklärt. Wöchentlich 2 Stunden.
Pfarrer Bruns.

2. Deutsch. Satzlehre, Orthographie, Interpunction. — Lectüre und Erklärung ausgewählter prosaischer und poetischer Stücke aus dem deutschen Lesebuche von Dr. B. Schulz. Declamation. — Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. — Wöchentlich 2 Stunden.
Lübbesmeyer.

3. Latein. a. Grammatik: Nach Wiederholung der Casuslehre die Syntax des Verbums; Repetitionen aus der Formenlehre. Nach der kleinen lateinischen Grammatik von F. Schultz. b. Mündliche Uebersetzungen und wöchentlich 2 Pensa aus der Aufgabensammlung von F. Schultz. Extemporalien. c. Prosaische Lectüre: Caes. de bell. Gall. lib. II. III. IV. — Wöchentlich 8 Stunden.
Der Ordinarius.

d. Poetische Lectüre: Ausgewählte Stücke aus Ovid's Metamorph. lib. II, III, V, VI. Wöchentlich 2 Stunden.
Bis Herbst: Candidat Küper; seit Herbst: Candidat Herte.

4. Griechisch. a. Grammatik: Nach Wiederholung der regelmäßigen Conjugationen die Verba in μι und die unregelmäßigen Verba, die Adverbien und die Präpositionen. Repetitionen. Nach der Grammatik von Schnorbusch und Scherer. — b. Mündliche Uebersetzungen und wöchentlich 1 schriftliche Arbeit aus dem Uebungsbuche von Schnorbusch und Scherer. — c. Lectüre: Xenoph. anab. lib. I. — Wöchentlich 6 Stunden.
Der Ordinarius.

5. Französisch. Anwendung von avoir und être. Reflexive und unpersönliche Verba. Formenlehre des Substantivs, Adjectivs und Adverbs. Nach der Schulgrammatik von Ploetz. — Lectüre aus Rollin homm. ill. Schriftliche Arbeiten. — Wöchentlich 2 Stunden.
Dr. Stiene.

6. Geschichte und Geographie. Geschichte der Deutschen bis zur neuesten Zeit. Brandenburgisch-Preußische Geschichte bis auf unsere Tage. Nach Welter, Bd. II und III. — Geographie der außereuropäischen Erdtheile. — Wöchentlich 3 Stunden.
Bis Herbst: Küper; seit Herbst Herte.

7. Mathematik. Repetition des vorigjährigen Pensums; Kreislehre und Gleichheit der Figuren. Nach Feaux. — Gleichungen vom ersten Grade. Nach Heis. — Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. — Wöchentlich 3 Stunden.
Wissenschaftlicher Hülfslehrer Westrick.

8. Naturbeschreibung. Im Sommer Botanik; im Winter Mineralogie und Ornithologie.
Parensen.

9. Gesang. Einübung der Kirchenlieder; Uebungen im ein- und mehrstimmigen Knabengesange.

10. Turnen. S. u.
Peters.

## Unter-Tertia.

### Ordinarius: Gymnasiallehrer Dreisbusch.

1. Religionslehre. Combinirt mit Ober-Tertia.
2. Deutsch. Combinirt mit Obertertia.
3. Latein. Combinirt mit Obertertia.
4. Griechisch. Nach Wiederholung des vorigjährigen Pensums Fortsetzung der Formenlehre bis zu den Verbis auf μι nach der Sprachlehre von Schnorbusch und Scherer. Mündliche Uebersetzung

und wöchentlich eine schriftliche Arbeit aus deren Uebungsbuche. — Extemporalien. — Wöchentlich 6 Stunden. Bis Herbst: Küper; seit Herbst: Herte.

5. Französisch. Combinirt mit Obertertia.

6. Geschichte und Geographie. Geschichte der Römer bis zum Tode Vespasians. Nach Welter. Wöchentlich 2 Stunden. — Geographie von Europa. Allgemeine topische Uebersicht; die Länder und Staaten Europa's außer Deutschland, nach Nieberding. Wöchentlich 1 Stunde. Westrick.

7. Mathematik. Die vier ersten Rechnungsarten der allgemeinen Arithmetik; Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. Planimetrie bis zur Gleichheit der Figuren. Nach Feaux. — Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Wöchentlich 3 Stunden. Westrick.

8. Naturbeschreibung. Combinirt mit Obertertia.

9. Gesang. Combinirt mit Obertertia.

## Quarta.

### Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Stiene.

1. Religionslehre. Erstes Hauptstück des Diöcesan-Katechismus (Glaubenslehre). — Die Apostelgeschichte, nach Schumacher. — Wöchentlich 2 Stunden. Dr. Mette.

2. Deutsch. Die Lehre vom einfachen, zusammengezogenen und zusammengesetzten Satze im Anschlusse an B. Schulz' Lesebuch. Lesen und Erklären ausgewählter Stücke. — Deklamation. — Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. — Wöchentlich 2 Stunden. Bis Herbst: Küper; seit Herbst: Herte.

3. Latein. a. Wiederholung der verba anomala; die Lehre von der Uebereinstimmung der Satztheile und dem Gebrauche der casus; die Hauptregeln vom Gebrauche der modi. Nach der kleinen lateinischen Sprachlehre von F. Schultz. b. Cornelius Nepos 8 vitae; ausgewählte Fabeln aus Phaedrus, welche zugleich memorirt wurden. c. Mündliches Uebersetzen aus der Aufgabensammlung von F. Schultz. Wöchentlich 3 schriftliche Arbeiten. — Wöchentlich 10 Stunden. Der Ordinarius.

4. Griechisch. Formenlehre bis zum verbum purum contractum nach der Grammatik von Schnorbusch und Scherer. Mündliches Uebersetzen und wöchentlich eine schriftliche Arbeit aus dem Uebungsbuche derselben Verfasser. Wöchentlich 4 Stunden. Lübbesmeyer.

5. Französisch. Plötz Elementarbuch Lect. 40—90. — Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Wöchentlich 2 Stunden. Westrick.

6. Geschichte und Geographie. Combinirt mit Untertertia.

7. Mathematik. Repetition des vorigjährigen Pensums. — Die Dezimalbrüche, Gesellschafts-Rechnung, Kettenregel, Mischungs-Rechnung, Prozent-Rechnung, Geometrische Anschauungslehre. Nach Feaux. — Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Wöchentlich 3 Stunden. Westrick.

8. Naturwissenschaft. Im Sommer-Semester Botanik und Einiges über die Käfer; im Winter-Semester Säugethiere und Einiges über die Vögel. Wöchentlich 2 Stunden. Westrick.

9. Zeichnen. Freihandzeichnen; Zeichnen nach Holzmodellen; Perspective nebst perspectivischem Zeichnen. — Wöchentlich 2 Stunden. Zeichenlehrer Trautmann.

10. Gesang. Uebung der Kirchenlieder. — Fortgesetzte Treffübungen. — Mehrstimmiger gemischter und Knaben-Chor. Wöchentlich 2 Stunden. Peters.

## Quinta.

### Ordinarius: Wissenschaftlicher Hülfslehrer Lübbesmeyer.

1. Religionslehre. Combinirt mit Quarta. Außerdem wöchentlich in einer besonderen Stunde biblische Geschichte des neuen Testaments.
Parensen.
2. Deutsch. Combinirt mit Quarta.
3. Latein. Wiederholung des Pensums der Sexta; unregelmäßige, mangelhafte und unpersönliche Zeitwörter; Adverbien, Präpositionen und Conjunctionen nach der kleinen lateinischen Sprachlehre von F. Schultz. — Ausgewählte Regeln der Syntax. — Mündliches Uebersetzen aus dem Uebungsbuche von F. Schultz. — Wöchentlich drei schriftliche Arbeiten — Wöchentlich 10 Stunden.
Der Ordinarius.
4. Französisch. Plötz' Elementarbuch, Lection 1 bis 60. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. — Wöchentlich 3 Stunden.
Der Ordinarius.
5. Geographie. Geographie von Europa nach Nieberding. — Wöchentlich 2 Stunden.
Parensen.
6. Rechnen. Die Brüche, Regel de Tri, Regel Quinque, Dezimalbrüche. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. — Wöchentlich 3 Stunden.
Westrick.
7. Naturgeschichte. Combinirt mit Quarta.
8. Schreiben. Wöchentlich 3 Stunden.
Trautmann.
9. Zeichnen. Wöchentlich 2 Stunden.
Trautmann.
10. Gesang. Combinirt mit Quarta.

## Sexta.

### Ordinarius: Gymnasiallehrer Parensen.

1. Religionslehre. Das Wichtigste aus der Glaubens- und Sittenlehre im Anschluß an die Grundformeln und täglichen Gebete, Biblische Geschichte mit Quinta combinirt. Wöchentlich 3 Stunden.
Der Ordinarius.
2. Deutsche Sprache. Leseübungen nebst Erklärung einzelner Lesestücke aus dem Lesebuche von B. Schulz. Daran wurde geknüpft die Unterscheidung der Wortarten, der Gebrauch der Präpositionen und die Lehre vom einfachen Satze. Orthographische Uebungen. Deklamation. — Wöchentlich 2 Stunden.
Der Ordinarius.
3. Latein. Regelmäßige Formenlehre incl. der verba deponentia nach der kleinen Sprachlehre von F. Schulz. Mündliches und zum Theil schriftliches Uebersetzen der betreffenden Uebungsstücke (I—XVII) aus dem Uebungsbuche von Schultz. Auswendiglernen der darin vorkommenden Vokabeln. Wöchentlich 4 schriftliche Arbeiten. — Wöchentlich 10 Stunden.
Der Ordinarius.
4. Geographie. Allgemeine geographische Vorbegriffe, Oceanbeschreibung nach Nieberding. — Wöchentlich 2 Stunden.
Im Sommer: Küper; im Winter: Herte.
5. Rechnen. Das Einmaleins, Einübung der vier Spezies in benannten und unbenannten Zahlen; die gemeinen Brüche. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. — Wöchentlich 4 Stunden.
Westrick.
6. Naturgeschichte. Im Sommer Botanik, im Winter Säugethiere. Wöchentlich 2 Stunden.
Der Ordinarius.

7. Schreiben. Combinirt mit Quinta.

8. Zeichnen. Combinirt mit Quinta.

9. Gesang. Combinirt mit Quinta; außerdem wöchentlich 1 Stunde Vorkenntnisse, Treffübungen, einstimmige Lieder. Peters.

Die Turnübungen unter Leitung des Gesang- und Turnlehrers Herrn Peters wurden im Sommer Dinstags und Freitags in zwei Abtheilungen, für die untere, aus den 5 untern Klassen bestehende, von 5—6, für die obere von 6—7 Uhr abgehalten.

# Themata der Aufsätze in den oberen Classen:

## A. der deutschen:

### 1. Oberprima.

1. Wer hielte ohne Freund im Himmel, — Wer hielte da auf Erden aus? Novalis. — 2. Worin besteht in Wahrheit das Glück des Menschen, und welche Folgerungen ergeben sich aus der richtigen Auffassung desselben? — 3. Welche Umstände vereitelten Hannibal's kühnen Plan, Rom in Italien selbst zu besiegen? — 4. Characteristik Iphigeniens nach dem einleitenden Monologe des Göthe'schen Dramas. — 5. Willst Du, daß wir mit hinein — In das Haus Dich bauen, — Laß es Dir gefallen, Stein, — Daß wir Dich behauen. Rückert. — 6. Vollkommen ist kein Erdenglück. Klassenarbeit. — 7. Wenn einer sich groß im Kleinen däucht, — So denke, der hat ein Großes erreicht. Göthe. — 8. Wenn die Wässerlein kämen zu Hauf, — Gäb' es wohl einen Fluß: — Weil jedes nimmt seinen eigenen Lauf, — Eins ohne das andre vertrocknen muß. Rückert. Abiturienten-Arbeit.

### 2. Unterprima.

1. Nicht der ist auf der Welt verwaist — Dem Vater und Mutter gestorben, — Sondern der für Herz und Geist — Keine Liebe und Wissen erworben. — 2. Die Folgen des Sieges der Abendländer bei Tours. — 3. Ueber Schillers Spaziergang. — 4. Studia rebus adversis perfugium ac solatium praebent.. — 5. Die Bedeutung der Gebirge für Menschenleben und Geschichte. — 6. Wallenstein und Buttler. Ein Vergleich. — 7. Des Menschen Engel ist die Zeit. — 8. Gold liegt tief im Berge. — 9. Die weltgeschichtliche Stellung Friedrich Barbarossa's. — 10. Die Zeiten ändern sich, mit ihnen die Menschen. Klassenarbeit.

### 3. Obersecunda.

1. Was lehrt den studirenden Jüngling der Sinnspruch: Quidquid agis, prudenter agas, et respice finem? — 2. Folgen des Ackerbaus nach Schillers Eleusischem Feste. — 3. Warum verweilen wir so gern auf dem Gipfel eines hohen Berges? — 4. Charakteristik des Jünglings in Schiller's Kampf mit dem Drachen. — 5. Wie beweiset die Jugend dem Greisenalter ihre Ehrfurcht? — 6. Bedeutung des Wassers für Natur und Menschenleben. — 7. Schiller's Lied von der Glocke nach Inhalt und Form. — 8. Der Mensch unter dem Bilde eines Baumes betrachtet. — 9. Erzählungen nach verschiedenen Balladen von Schiller. — 10. Geld — ein böser Herr. Klassenarbeit.

### 4. Untersecunda.

1. Ein Spaziergang an einem winterlichen Frühlingstage. — 2. Ein Briloner Markttag. — 3.

Die Trojaner im Seesturme (Virg. Aen. I, 34 — 156). — 4. Die Sinnbilder auf unseren Gräbern. — 5. Die Kraniche des Ibykus. Erzählung nach Schiller's Ballade. Klassenarbeit. — 6. Der Ordens-Ritter in Schiller's „Kampf mit dem Drachen." — 7. Das Leben der Hausthiere, ein Tugendspiegel für den Menschen. — 8. Warum ist der Ausruf Damon's in Schiller's Bürgschaft: „Um des Freundes willen erbarmet euch" als an die Götter und nicht an die Räuber gerichtet aufzufassen? — 9. Die Freuden der Weihnachtsferien. Klassenarbeit. — 10. Dispositionen der erklärten Schiller'schen Balladen. — 11. Morgenstunde hat Gold im Munde. Klassenarbeit. — 12. Haben Gefahr und Bedrängniß auch ihr Gutes für den Menschen?

## B. Lateinische Aufsätze.

### 1. Ober-Prima.

1. Romanarum virtutum et Pyrrho et Poenis non semel illustre specimen esse datum. — 2. In singulis saepe viris consistere totius civitatis salutem ac florem, imprimis testes sunt Pelopidas et Epaminondas. — 3. Quod Horatius dicit: „Fortes creantur fortibus et bonis", insignibus quibusdam exemplis comprobetur (Hor. IV. 4). — 4. Augustus propter summa in rem publicam merita vere Horatio carus mirisque modis laudatus (Klassenarbeit). — 5. Ad sanguinem odio incitari, quos Cicero externos esse mores contendit, et ipsorum fuisse Romanorum, demonstretur (Cic. pro Ligar. c. 4.). — 6. a. Quibus rationibus Cicero Quint. Ligarium a Quint. Aelio Tuberone apud Caesarem accusatum defenderit. b. Num Catonis excessus e vita recte a Cicerone cum Socratis morte comparetur. — 7. Ter rem publicam Romanam a maximo periculo esse vindicatam, fortitudine Camilli, virtute imperatoria Marii, eloquentia Ciceronis. (Klassenarbeit). — 8. Non desunt exempla, quibus illud Livii (L. 8, c. 24): „Fugiendo in media ferme rui fata", confirmari videatur.

### 2. Unter-Prima.

1. Quanta religione Romani optimis reipublicae temporibus jusjurandum servaverint, exemplis ex historia allatis demonstretur. — 2. Verum esse illud Ciceronis, Romanos bis salutem debuisse Arpinatibus. — 3. Quid Cicero de amictia et de amicis eligendis praescripserit. — 4. Quomodo Romani a Germanis Arminio duce in saltu Teutoburgensi devicti sint (Klassenarbeit). — 5. Argumentum orationis, quam Cicero habuit pro Archia poeta. — 6. Cn. Pompejus ad omnia suae aetatis bella conficienda divino quodam consilio natus esse videbatur (Cic. pro lege Man. c. 14). — 7. Illud Solonis, ante mortem neminem beatum esse dicendum, exemplis comprobetur. (Klassenarbeit). — 8. Quibus argumentis probaverit Cicero (in orat. pro lege Man.), bellum Mithridaticum et necessarium et magnum fuisse. — 9. Quod Livius (II. 12) dicentem facit Mucium Scaevolam: „Et facere et pati fortia Romanum est," exemplis comprobetur. — 10. Salutem publicam in singulis saepe viris totam niti, rebus et Graecorum et Romanorum cognoscitur. (Klassenarbeit).

### 3. Ober-Secunda.

1. Polycrates documento est, ne fortunae stabilitate confidamus. — 2. Narretur Pyrrhi adversus Romanos bellum. — 3. Pompejus post vitam feliciter actam misere periit. — 4. Cimbrorum Teutonorumque expeditio et fortuna. — 5. Quibus difficultatibus periculisque conflictandum fuerit Hannibali in transitu Alpium. — 6. Quomodo Catilinae coniuratio oppressa sit. — 7. Quam mobilis sit aura popularis, ex historia demonstretur.

# II. Vertheilung des Unterrichts unter die Lehrer.

| | Ia. | Ib. | IIa. | IIb. | IIIa. | IIIb. | IV. | V. | VI. | Insgesammt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Noeren,**<br>Director,<br>Ordinarius der Ia. | 2 Religion.<br>6 Griechisch.<br>3 Deutsch. | 2 Horaz.<br>2 Homer. | 2 Deutsch. | | | | | | | 17 |
| **Ferrari,**<br>1. Oberlehrer,<br>Ordinarius der IIb. | 8 Latein.<br>3 Geschichte. | | | 8 Latein.<br>2 Deutsch. | | | | | | 21 |
| **Franke,**<br>2. Oberlehrer,<br>Ordinarius der IIa. | 2 Französ. | 2 Französ. | 8 Latein.<br>2 Französ.<br>3 Geschichte. | 2 Französ.<br>3 Geschichte. | | | | | | 22 |
| **Dr. Schwering,**<br>3. Oberlehrer, | 4. Mathem.<br>2 Physik. | 4. Mathem.<br>2 Physik. | 4 Mathem.<br>1 Physik. | 4 Mathem.<br>1 Physik. | | | | | | 22 |
| **Dr. Mette,**<br>1. ordentlicher Lehrer,<br>Ordinarius der Ib. | | 2 Religion.<br>6 Latein.<br>4 Griechisch. | 2 Virgil.<br>6 Griechisch. | | | | 2 Religion. | | | 22 |
| **Dreisbusch,**<br>2. ordentlicher Lehrer,<br>Ordinarius der III. | 2 Hebräisch. | | 2 Religion.<br>1 Hebräisch. | 1 Hebräisch. | 2 Religion.<br>8 Latein.<br>6 Griechisch. | | | | | 22* |
| **Dr. Stiene,**<br>3. ordentlicher Lehrer,<br>Ordinarius der IV. | | 3 Deutsch.<br>3 Geschichte. | | 4 Griechisch. | 2 Französisch. | | 10 Latein. | | | 22 |
| **Parensen,**<br>Gymnasial-Lehrer,<br>Ordinarius der VI. | | | | 2 Religion. | 2 Naturgeschichte. | | | 2 Geographie.<br>1 Biblische Geschichte. | 2 Religion.<br>2 Deutsch.<br>10 Latein.<br>2 Naturgesch. | 23 |
| **Bruns,**<br>Pfarrer, ev. Relig.-Lehrer. | 2 Religion. | | | | 2 Religion. | | | | | 4 |
| **Lübbesmeier,**<br>Wissenschaftl. Hülfslehrer,<br>Ordinarius der V. | | | | 2 Vergil.<br>2 Homer. | 2 Deutsch. | | 4 Griechisch. | 10 Latein.<br>3 Französ. | | 23 |
| **Westrick,**<br>Wissenschaftl. Hülfslehrer. | | | | | 3 Mathem. | 3 Mathem.<br>3 Geschichte. | 2 Naturgeschichte.<br>2 Französ.<br>3 Mathem. | 3 Rechnen. | 4 Rechnen. | 23 |
| **Küper,**<br>Cand. d. höh. Schulamts<br>(bis Herbst). | | | | | 2 Ovid.<br>3 Geschichte. | 6 Griechisch. | 2 Deutsch. | | 2 Geographie. | 15 |
| **Herte,**<br>Cand. d. höh. Schulamts<br>(seit November). | Wie vorstehend. | | | | | | | | | 15 |
| **Peters,**<br>Gesang- und Turnlehrer. | 1 Gesang. | | | | 1 Gesang. | | 2 Gesang. | | 1 Gesang. | 5** |
| **Trautmann,**<br>Schreib- u. Zeichenlehrer. | | | | | | | 2 Zeichnen. | 2 Zeichnen.<br>3 Schreiben. | | 7 |

*) Außerdem bereitete derselbe die Neucommunicanten durch mehrmonatlichen Unterricht zur ersten h. Communion vor.

**) Außerdem ertheilte derselbe den Turnunterricht und übte, soweit nöthig, in besonderen Stunden den mehrstimmigen Kirchengesang ein.

## III. Vertheilung der Lehrgegenstände nach den Klassen.

| Lehrgegenstände: | Ia. | Ib. | IIa. | IIb. | IIIa. | IIIb. | IV. | V. | VI. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Deutsch | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Latein | 8 | 8 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| Griechisch | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 4 | | |
| Hebräisch | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | | |
| Französisch | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | |
| Religionslehre | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| Mathematik | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| Naturwissenschaften | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Geschichte und Geographie | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| Schreiben | | | | | | | | 3 | 3 |
| Zeichnen | | | | | | | 2 | 2 | 2 |
| Gesang | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| Turnen im Sommer | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

## IV. Abiturienten—Prüfung.

Zur Abiturienten-Prüfung meldeten sich für den Herbsttermin 3, für den Ostertermin sämmtliche 18 Schüler der Oberprima, von denen jedoch je Einer vor Beendigung der Prüfung zurücktrat. Die mündliche Prüfung wurde unter dem Vorsitze des Herrn Geheimen Regierungs- und Provinzial-Schul-Rathes Dr. Schultz am 11. September v. J., resp. 4. und 5. März d. J. gehalten. In beiden Terminen erhielten die Geprüften sämmtlich das Zeugniß der Reife; von denen des letzteren waren die 6 Examinanden Alex Aust aus Brilon, Andreas Fidler aus Werl, Franz Fröhling aus Velmede, August Meyer aus Winterberg, Ferdinand Schmelter von der Möhneburg bei Brilon und Franz Westhoff aus Billmerich auf Grund ihres Betragens und Fleißes und ihrer Leistungen im Laufe des Jahres, wie in den schriftlichen Arbeiten von der mündlichen Prüfung entbunden.

Die in der schriftlichen Prüfung zu bearbeitenden Aufgaben waren außer dem lateinischen, griechischen und französischen Scriptum folgende:

1. Religions-Arbeit. a. im Herbste: Bedeutung der heiligen Schrift als Erkenntnißquelle des christlichen Glaubens. — Ueber das Glaubensbekenntniß. b. Ostern. Die Lehre von der wirklichen

und von der heiligmachenden Gnade nach den Gleichnissen von den Talenten und vom Weinstocke. — Ueber die Pflicht.

2. Deutscher Aufsatz. a. Herbst: Hat der Dichter Recht, wenn er sagt: „Lerne nur das Glück ergreifen; — Denn das Glück ist immer da.“ b. Ostern: „Wenn die Wässerlein kämen zu Hauf, — Gäb' es wohl einen Fluß: — Weil jedes nimmt seinen eignen Lauf, — Eins ohne das andre vertrocknen muß“. Rückert.

3. Lateinischer Aufsatz. a. Herbst: Ingens illud periculum, quod Persae Graecorum libertati intentabant, Atheniensium maxime opera est propulsatum. b. Ostern: Illud Ciceronis (Disp. Tusc. I. c. 44), multis mortes fuisse optabiles cum gloria, Graecorum et Romanorum exemplis confirmetur.

4. Hebräisch. a. Herbst: vacat. b. Ostern: Exod. c. III, 10—14.

5. Mathematische Arbeit. a. Herbst: 1. Man construire ein Dreieck, wenn der Umfang und die Winkel gegeben sind. — Man löse die Gleichung: $2x^4 - 20x^2 = -338$. — 3. Man berechne den Umfang eines Dreiecks, dessen Grundlinie $a = 100$, Höhe $h = 400$ und Radius des umschriebenen Kreises $r = 70$ bekannt sind. — 4. Der Radius der Grundfläche eines graden Kegels ist $= 25$ cm.; die Mantelfläche ist 7575 qcm.: wie groß ist der Inhalt des Kegels? b. Ostern: 1. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich sei. 2. Man berechne Seiten und Winkel eines Dreiecks, wenn gegeben $a = 28,604$, $\alpha = 52^{0}13^{1}$, $m = \frac{b}{c}\ 1,44$. — 3. Man berechne den Inhalt einer Pyramide ABCD mit den Kanten $AB = 10$, $AC = 12$, $AD = 15$, $BC = 13$, $BD = 11$, $CD = 14$. — 4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in drei Würfen zusammen mehr als 10 Augen zu werfen?

Die entlassenen Abiturienten sind:

| Nro. | Name. | Confession. | Geburtsort. | Alter. | Berufsfach. | Universität. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Eckert, Peter. | katholisch | Oberbrechen, Nassau | $21^1/_2$ | Theologie. | Bonn. |
| 2 | Hoppe, Joseph. | „ | Hagen (Arnsberg). | $18^1/_2$ | Mathematik | Münster. |
| 1 | Aust, Alex. | „ | Brilon. | 18 | Theologie | Münster |
| 2 | Boden, Constantin. | „ | Lövenich b. Köln. | 18 | Jura. | Bonn. |
| 3 | Boese, Karl. | „ | Berge. | $17^1/_2$ | Jura. | Leipzig. |
| 4 | Braukmann, Joseph. | „ | Endorf. | $20^1/_2$ | Theologie. | Münster. |
| 5 | Cramer, Gustav. | „ | Niedersfeld. | $19^1/_2$ | Medizin. | Würzburg. |
| 6 | Evers, Benno. | „ | Büren. | 17 | Baufach. | Berlin. |
| 7 | Fidler, Andreas. | „ | Werl. | 20 | Jura. | Heidelberg. |
| 8 | Fröhling, Franz. | „ | Velmede. | 20 | Theologie u. Philol. | Münster. |
| 9 | Geilen, Wilhelm. | „ | Niedersfeld. | $19^1/_2$ | Jura. | Leipzig. |
| 10 | Leisse, Eduard. | „ | Brilon. | 17 | Forstfach. | Neustadt-Ebersw. |
| 11 | Lingenauber, Johann. | „ | Siedlinghausen. | 18 | Philologie. | Münster. |
| 12 | Meyer, August. | „ | Kallenhardt. | $19^1/_2$ | Mathematik. | Münster. |
| 13 | Schmelter, Ferdinand. | „ | Möhneburg b. Brilon. | 21 | Forstfach. | Münden. |
| 14 | Verkoyen, Joseph. | „ | Andernach. | 18 | Jura u. Cameralia. | Heidelberg. |
| 15 | Vogel, Ferdinand. | „ | Brilon. | $20^1/_2$ | Postfach. | — |
| 16 | Wachendorf, Adolph. | „ | Bonn. | 21 | Jura. | Bonn. |
| 17 | Westhoff (Becker), Franz. | „ | Billmerich. | 20 | Theologie. | Löwen. |

# V. Verordnungen der vorgesetzten Behörden
## von allgemeinerem Interesse.

1. Münster, den 24. März 1877. Königliches Provinzial-Schulcollegium bringt die Anordnung in Erinnerung, daß die Aufnahme neuer Schüler noch innerhalb der Ferien stattfinden und nach deren Ablauf der Unterricht überall in geregelter Weise seinen Anfang nehmen müsse.
2. Münster, den 6. April 1877. Genehmigung des Königlichen Provinzial-Schulcollegiums zur Einführung des Lehrbuches der Physik von Münch.
3. Berlin, den 29. Mai 1877. Das hohe Ministerium der Unterrichts- u. s. w. Angelegenheiten ordnet neuerdings an, daß bei Zuerkennung der Befähigungs-Zeugnisse für den Einjährigen freiwilligen Militärdienst jede ungesetzliche Nachsicht vermieden, vielmehr durchaus nach den nämlichen Grundsätzen verfahren werde, wie bei Versetzung der Schüler in die folgende Klasse, d. h. im vorliegenden Falle, in Ober-Secunda. Das Rescript trifft dem entsprechende Anordnungen, namentlich in Betreff solcher Schüler, die nach Absolvirung der Unter-Secunda abzugehen gedenken.
4. Münster, den 25. Juni 1877. Das Königliche Provinzial-Schulcollegium theilt ein Rescript des Hohen Finanz-Ministeriums vom 22. Mai 1877 mit, betr. die Bedingungen der Annahme als Steuer-Supernumerar. Es ist daraus besonders hervorzuheben, daß die Aspiranten des Steuerfaches entweder die Prima eines Gymnasiums oder einer Realschule erster Ordnung mindestens ein Jahr lang mit gutem Erfolge besucht haben, oder aus einer zu Entlassungs-Prüfungen berechtigten Realschule zweiter Ordnung mit dem Zeugnisse der Reife entlassen sein, oder durch Prüfungs-Attest des Vorstehers einer der genannten Anstalten nachweisen müssen, daß sie die obiger Anforderung entsprechenden Kenntnisse besitzen. Die Anmeldungen sind an den Provinzial-Steuerdirector desjenigen Bezirkes zu richten, in dem die Annahme gewünscht wird.
5. Münster, den 6. November 1877. Das Königliche Provinzial-Schul-Collegium macht aufmerksam auf die kleine Schrift „Die überhandnehmende Kurzsichtigkeit der deutschen Jugend" von Dr. Colsmann, Augenarzt. Barmen bei Wiemann.
6. Münster, den 16. Februar 1878. Im Auftrage des Herrn Ministers setzt das Königliche Provinzial-Schulcollegium unter Aufhebung der früheren desfallsigen Verfügungen für alle höheren Lehranstalten der Provinz die Ferien-Ordnung in folgender Weise fest:
   1. Die Hauptferien dauern 5 Wochen und beginnen vom 15. August ab.
   2. Die Osterferien umfassen 3 Wochen, und wird Anfang und Schluß derselben je nach dem Falle des Festes seitens des Königlichen Provinzial-Schulcollegiums jedesmal besonders bestimmt werden.
   3. Die Pfingstferien beginnen mit Samstag vor dem Feste und schließen mit Mittwoch Abend nach demselben.
   4. Die Weihnachtsferien dauern 14 Tage und beginnen mit dem 22. oder 23. December.

# VI. Chronik.

**A.** Das Schuljahr begann Donnerstag, den 12. April, und wurde nach Abhaltung der Prüfungen am folgenden Tage mit feierlichem Gottesdienste eingeleitet.

Freitag, den 1. Juni, beehrte der Herr Geheime Ministerialrath Dr. Stauder von Berlin die Anstalt mit seinem Besuche. Nachdem er an diesem und dem folgenden Tage dem Unterrichte in den verschiedenen Klassen beigewohnt hatte, erörterte er in einer mit den Lehrern abgehaltenen

Conferenz unter Bekundung des im allgemeinen befriedigenden Eindrucks, den er von der Anstalt empfangen habe, die Punkte, in denen eine Hebung der Leistungen zu erstreben, und die Mittel, die dazu in Anwendung zu bringen sein. Ich verfehle nicht, dem hochverehrten Herrn auch an dieser Stelle den wärmsten Dank für das der Anstalt bewiesene Interesse und die reiche Anregung zu fruchtbarer Wirksamkeit derselben auszusprechen.

Sonntag, den 15. Juli, feierten 13 Schüler der unteren und mittleren Klassen ihre erste h. Communion, von Herrn Gymn.-Lehrer Dreisbusch mit großer Aufopferung zu diesem Tage durch mehrmonatlichen außerordentlichen Unterricht vorbereitet.

Die Erinnerung an den Tag von Sedan wurde Samstag, den 1. September, durch festlichen Schulact auf der Aula, bei welchem Herr Oberlehrer Dr. Schwering die Festrede hielt, unter lebhafter Betheiligung des Publikums begangen.

Am 25. September wurden die Turnübungen in Anwesenheit des gesammten Lehrer-Collegiums mit einem Probeturnen geschlossen, welches erfreuliche Beweise von dem Eifer und Erfolge, mit dem die Uebungen betrieben waren, lieferte.

Die vorschriftsmäßigen größeren Klassen-Prüfungen wurden kurz vor und bald nach den Herbstferien, welche vom 1. bis zum 7. October stattfanden, gehalten.

Freitag, den 22. März, wurde das Geburtsfest Sr. Majestät des Kaisers und Königs nach vorausgegangenem, feierlichem Hochamte durch festlichen Schulact begangen und mit dieser Feier auch die Entlassung der Abiturienten verbunden, in deren Namen sich der Abiturient Franz Becker, gen. Westhoff, mit einer Rede über das Thema: „Vor jedem steht ein Bild des, was er werden soll; — So lang er das nicht ist, ist nicht sein Friede voll“ verabschiedete.

Mittwoch, den 3. April, hielt die Anstalt das feierliche Jahresgedächtniß für den verstorbenen Wohlthäter des Gymnasiums Landdechanten und Ehrendomherrn Johannes Schlüter und am folgenden Tage für dessen verstorbene Schwester, die Wohlthäterin der Gymnasialkirche, Wittwe Catharina Elisabeth Siebert, geb. Schlüter.

**B.** Mit dem Schlusse des vorigen Schuljahres trat der wissenschaftliche Hülfslehrer Herr Mering nach anderthalbjähriger berufstreuer und erfolgreicher Wirksamkeit von der Anstalt aus, indem er zum ordentlichen Leherer an der höheren Schule zu Wattenscheid ernannt war.

Der Probekandidat Herr Küper verließ unsere Anstalt am Ende des Sommersemesters, um an der höheren Schule zu Eupen sein Probejahr fortzusetzen und zugleich als wissenschaftlicher Hülfslehrer zu wirken.

An Stelle des Ersteren trat der Candidat des höheren Schulamts Herr Lübbesmeier bei unserem Gymnasium ein. Vom 1. Juli bis 1. August zu einer militärischen Dienstleistung einberufen, wurde er während dieser Zeit bereitwilligst durch die übrigen Mitglieder des Lehrer-Collegiums vertreten.

Mit dem 1. November v. J. trat der Candidat des höheren Schulamts Herr Herte am hiesigen Gymnasium zur Abhaltung des Probejahres ein. Mit Genehmigung des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums wurde er über das gesetzliche Probepensum mit mehreren Stunden am Unterrichte betheiligt.

Von einem sehr schmerzlichen Verluste wurde die Anstalt kurz vor dem Schlusse des Schuljahres betroffen, indem sie noch in den letzten Tagen, wie vor 3 Jahren den Oberlehrer Joseph Harnischmacher, so jetzt dessen Freund und Stellen-Nachfolger, den 1. Oberlehrer Friedrich Wilhelm Ferrari, durch einen frühen Tod verlor. Am 15. Januar wurde er von einem Bluthusten befallen, welcher eine Schwächung der körperlichen Kräfte herbeiführte, die ihm nicht nur jede weitere Dienstleistung unmöglich machte, sondern auch sogleich die größten Besorgnisse für sein Leben erregte. Zwar gelang es der aufopferndsten, sorgsamsten Pflege, die Gefahr noch Wochen lang hinzuhalten, doch nicht, sie zu überwinden; sanft und gottergeben verschied er am Abende des 27. März. Eine große Zahl von Leidtragenden aus allen Ständen geleitete ihn Sonntag, den 31. März, zur letzten Ruhe, und am folgenden Tage wurde ihm von Seiten der Anstalt ein feierliches Seelenamt in der Gymnasialkirche gehalten.

Wie die Angehörigen, unter ihnen der bejahrte Vater und mit zwei unmündigen Kindern die theure Gattin, die ihn nach einer noch nicht fünfjährigen, höchst glücklichen Ehe von ihrer Seite scheiden sah, so blicken alle, denen er näher gestanden, so blickt insbesondere auch unsere Anstalt dem früh Geschiedenen mit innigem Wehgefühle nach. Seit Herbst 1865, als 1. Oberlehrer seit Herbst 1875, hatte er ihr angehört, und soweit es von seinem Wollen abhinge, ihr stets anzugehören beschlossen. Sie hat in ihm einen edlen Mann und vortrefflichen Lehrer verloren. Geboren zu Paderborn am 7. April 1840, entwickelte er die schönen Gaben des Geistes und des Herzens, welche die Vorsehung ihm beschieden hatte, durch stillen, gewissenhaften Fleiß schon früh zu vielversprechender Blüthe, deren sich zu freuen auch dem Berichterstatter vergönnt war, da er auch ihn als Lehrer am Gymnasium zu Paderborn zu seinen Schülern zählte. Nachdem er von dort im Herbste 1858 abgegangen war, widmete er sich auf der Akademie zu Münster dem Studium der Philologie, und die ehrenvolle Prüfung pro fac. doc., die er Herbst 1863 ablegte, bekundete aufs Schönste, wie treu er dem Geiste sittlichen Ernstes und wissenschaftlichen Strebens auch als Universitäts-Studirender geblieben war. Das Probejahr hielt er gleich nach abgelegter Prüfung am Gymnasium zu Paderborn, an welchem er auch nach dessen Beendigung noch einige Zeit thätig blieb, bis er an unsere Anstalt berufen wurde. Dieser hat er daher die Jahre seiner männlichen Wirksamkeit und mit ihnen die Früchte eines edel verbrachten und genutzten Jugendalters fast ausschließlich gewidmet. Es waren schöne Früchte: gediegenes Wissen, klares Urtheil, ein feiner ästhetischer Sinn waren in ihm harmonisch vereinigt und vermöge dieses nicht allzuhäufigen Ebenmaßes der geistigen Kräfte war sein Unterricht zugleich gründlich und faßlich, anziehend und allseitig bildend. Ein theilnahmvolles Gemüth und ein Zartgefühl, das auch in Ernst und Strenge der Schonung, die fremder Persönlichkeit gebührt, ihn nie vergessen ließ, machte sein Wirken auch in erziehlicher Rücksicht in gleichem Maße ansprechend, eindringlich und fruchtbar. Kraft und volles Leben aber gewannen diese schönen Eigenschaften durch den hohen Ernst einer Pflicht- und Berufstreue, wie sie mit Nothwendigkeit aus der tiefen Gläubigkeit eines zartfühlenden Gemüthes hervorging. Schön und segensvoll war sein Leben und Wirken. Aber auch in den Tagen der Krankheit offenbarte sich in erhebendster Weise die innige Religiösität, die sein ganzes Denken und Handeln durchdrang. Jede Miene des Antlitzes prägte die vollkommene Ruhe und Ergebenheit ab, mit der er seiner Auflösung entgegensah; kein Laut der Unzufriedenheit, wie sie bei seinem fast jugendlichen Alter und den glücklichen Verhältnissen, in denen er lebte, so nahe gelegen hätte, kam von seinen Lippen; vielmehr war er mit rührendem Eifer darauf bedacht, sich durch Geduld und Sanftmuth, durch Gebet und oft wiederholten, andächtigen Empfang der hh. Sacramente der Vereinigung mit unserem Gotte und Erlöser würdig zu machen.

Groß, so hoffen wir, ist der Lohn, den er bei Gott gefunden. Indem ich ihm im Namen der Anstalt, im Namen des Curatoriums und in Vereinigung mit den Collegen, denen er bis an sein Ende in ungetrübter, herzlicher Freundschaft verbunden war, in dankbarer Hochachtung und Liebe dieses Wort der Erinnerung widme, darf ich an seine Schüler mit Vertrauen die Bitte richten, daß auch sie das Bild des edlen Lehrers in treuem Andenken bewahren und aus demselben die große Lehre schöpfen, wie gut und schön es ist, gleich ihm als Knabe, als Jüngling oder Mann jeden Tag, den Gott uns schenkt, nach seinem h. Willen wohl zu benutzen, um gleich ihm zu der Stunde, die Gottes Rathschluß bestimmt hat, früh oder spät, mit Ruhe und Hoffnung von hier scheiden zu können. R. I. P.

**C.** Das Gymnasium wurde im verflossenen Schuljahre von 133 Schülern besucht; 118 waren kathol., 12 evang., 2 mosaischer Confession, 62 einheimische, 70 auswärtige. Auf die Klassen vertheilten sie sich, wie folgt: Ia. 21, Ib. 15. IIa. 17, IIb. 21, IIIa. 11, IIIb. 13, IV. 9, V. 11, VI., 15.

**D.** An Geschenken empfing die Anstalt vom Hohen Königlichen Ministerium des Unterrichts Palestrina's Motetten von Th. de Witt B. VI, Dr Schneider: Neue Beiträge zur alten Geschichte und Geographie der Rheinlande. 11. Folge; vom Königlichen Provinzial-Schulcollegium zu Breslau

Verhandlungen der 4. schlesischen Directoren-Conferenz; von der Weidmann'schen Verlagshandlung zu Berlin Zeitschrift für das Gymnasialwesen, herausgegeben von Hirschfelder, Hofmann und Kern, 31. Jahrgang. Für diese Geschenke statte ich Namens der Anstalt den gehorsamsten Dank ab.

## VII. Verzeichniß der Schüler.

### während des Schuljahres 1877—1878.

**Ia.**

1. Aust, Alex aus Brilon.
2. Boden, Constantin a. Lövenich.
3. Böse, Karl aus Berge.
4. Brauckmann, Jos. a. Endorf.
5. Buhr, Lorenz aus Niederbreitbach.
6. Cramer, Gust. a. Niedersfeld.
7. Eckert, Peter a. Oberbrechen.
8. Evers, Benno aus Büren.
9. Fidler, Andreas aus Werl.
10. Fröhling, Franz a. Velmede.
11. Geilen, Wilh. a. Niedersfeld.
12. Hoppe, Joseph aus Hagen.
13. Leisse, Eduard aus Brilon.
14. Lingenauber, Johann aus Siedlinghausen.
15. Meschede, Joseph aus Uppsprunge,
16. Meyer, Aug. a. Kallenhardt.
17. Schmelter, Ferdinand von der Möhneburg.
18. Verkoyen, Jos. v. Andernach.
19. Vogel, Ferdinand aus Brilon.
20. Wachendorf, Adolph a. Bonn.
21. Westhoff, Franz a. Billmerich.

**Ib.**

1. Budde, Franz a. Düsseldorf.
2. Gellhorn, Hugo a. Meschede.
3. Gödde, Eduard aus Büren.
4. Götte, Franz aus Brilon.
5. Gruß, Wilhelm aus Brilon.
6. Köster, Arnold aus Brilon.
7. Köther, Wilh. a. Lüchtringen.
8. Lehmkühler, Louis a. Hagen.
9. Mause, Karl aus Hallenberg.
10. Müller, Hermann aus Gebhardshain.
11. Quick, Joseph aus Brilon.
12. von Schlechtendal, Hermann ans Mühlhausen.
13. Struif, Josepy a. Meschede.
14. Vilmar, August aus Willinghausen.
15. Wedemann, Josaph a. Brilon.

**IIa.**

1. Carthaus, Emil a. Anröchte.
2. Dehnert, Friedrich a. Oberschönau.
3. Hüser, Fritz aus Brilon.
4. Junk, Heinrich aus Lieser.
5. Klemann, Karl aus Empel.
6. Kordes, Franz aus Beckum bei Balve.
7. Mostert, Theodor a. Coblenz.
8. Münstermann, Heinrich aus Oberense.
9. Neyses, Dominicus aus Zeltingen.
10. Schlösser, Wilh. aus Olpe.
11. Schlüter, Egon aus Brilon.
12. Schumacher, Heinr. a. Corbach.
13. Seidenfaden, Karl aus Kalk.
14. Terburg, Joseph aus Brilon
15. Urban, Max aus Hoherlehme.
16. Varnhagen, Franz aus Kirchhundem.;
17. Werminghausen, Fritz aus Langenstraße.

**IIb.**

1. Ahmer, Jos. a Wulfringhausen.
2. Böse, Heinrich aus Berge.
3. Decker, Paul aus Frechen.
4. Dorlöchter, August a. Rüthen.
5. Evers, Hubert aus Rees.
6. Falke, Wilhelm aus Brilon.
7. Fuchs, Friedr. a. Bernkastel.
8 Hahn, Franz aus Büren.
9. Harlinghausen, Julius aus Eslohe.
10. Henne, Johann aus Brilon.
11. Höynck, Wilh. a. Letmathe.
12. Lehmkühler; Friedr. a. Hagen.
13 Martini, August aus Brilon.
14. Meyer, Ludwig a. Winterberg.
15. Planz, Joseph aus Seck.
16. Ploog, Friedrich aus Stuttgerhof bei Frechen.
17. Quinke, Jos. aus Kirchhundem.
18. Röttgers, Wilhelm a. Stenglingsen.
19. Stich, Friedr. a. Fürstenberg.
20. Suchan, Friedr. aus Oeding.
21. Walter, Johann aus Rüthen.

**IIIa.**

1. Beckers, Karl aus Hovestadt.
2. Bürger, Joseph aus Olsberg.
3. Dieckmann, Joseph a. Brilon.
4 Göckeler, Johann aus „
5. Labe, Hugo aus Paderborn.
6. Lübbesmeyer, Wilhelm aus Mettinghausen.
7. Oppenheimer, Moritz aus Marsberg.
8. Urban, Erich a. Hoherlehme.
9. Vondereck, Ludw. a. Brilon.
10. Voß, Wilhelm aus Hagen.
11. Wigge, Joseph aus Brilon.

**IIIb.**

1. Boden, Wilhelm a. Lövenich.
2. Felten, Fritz „ „
3. Göckeler, Heinr. aus Brilon.
4. Haupt, Joseph „ „
5. Hovestadt, Franz „ „
6. Kleffner, Theodor a Suttrop.
7. Kowalsky, Leo aus Filehne.
8. Meyer, Wilhelm aus Brilon.
9. Pfeifer, Just. a. Römersberg.
10. Rüther, Heinr. aus Brilon.
11 Rüther, Wilh. a. Altenbüren.
12. Sauerwald, Heinrich aus Altenbüren.
13. Schotte, Karl aus Brilon.

**IV.**

1. Berendes, Wilh aus Alme.
2. Block, Rud. a. Beverungen.
3. Fischer, Johann aus Brilon.

4. Goldschmidt, Siegm. „
5. Haupt, Anton „ „
6. Köster, Moritz „ „
7. Kürmann, Joseph „ „
8. Möller, Fritz „ „
9. Ramroth, Magnus „ „

**V.**

1. Becker, Bernhard aus Brilon.
2. Braun, Anton „ „
3. Hakenberg, Ferd. „ „
4. Isenberg, Fritz „ „
5. Lohmann, Wilh. „ „
6. Neck, Leonhard „ „
7. Quick, Joseph „ „
8. Quinke, Otto a. Kirchhundem.
9. Ramroth, Gustav aus Brilon.
10. Thiele, Johann „ „
11. Wommelsdorf, Jos. „ „

**VI.**

1. Beckers, Egon a. Altenbüren.
2. Braun, Christian a. Brilon.
3. Conradi, Jos. a. Altenbüren.
4. Dohle, Caspar aus Brilon.
5. Hahne, Bernhard „ „
6. Heitzig, Friedrich „ „
7. Hovestadt, Bernh. „ „
8. Martini, Joseph „ „
9. Martini, Wilhelm „ „
10. Roeren, Herm. aus Kastrop.
11. Schneider, Wilh. aus Brilon.
12. Schulte, August „ „
13. Untraut, Eberhard „ „
14. Weishaupt Bernh. „ „
15. Weste, Adolph „ „

**Für die Unterstützung bedürftiger Schüler, insbesondere durch Freitische, spreche ich den geehrten Wohlthätern den wärmsten Dank aus.**

# Zur Nachricht.

Samstag, den 6. April, wird das Schuljahr mit feierlichem, um $\frac{1}{2}$6 Uhr beginnendem Gottesdienste und darauf folgender Bekanntmachung der Censuren geschlossen.

Die Censuren werden unmittelbar von der Anstalt aus den Eltern zugesandt: ich mache diese ergebenst darauf aufmerksam, daß sie dieselben zu unterzeichnen und am Schlusse der Ferien den Söhnen zur Wiederabgabe an ihren Ordinarius mitzugeben haben.

Das neue Schuljahr beginnt Montag, den 29. April

Neu aufzunehmende Schüler müssen spätestens den 25. April bei dem Unterzeichneten angemeldet werden. Die Prüfungen finden Statt am 26. und 27. desselben Monats.

Zu den bei der Anmeldung zu überreichenden Zeugnissen gehört für die über 12 Jahre alten namentlich auch das Wiederimpfungs-Attest und für diejenigen, welche nicht durch die Eltern selbst der Anstalt zugeführt werden, deren beglaubigte Bescheinigung darüber, daß sie ihren Söhnen die Genehmigung zum Besuche der Anstalt ertheilt haben.

Ich mache darauf aufmerksam, daß Wohnungen für Schüler nur mit Genehmigung des Directors gewählt und später geändert werden dürfen.

**C. Roeren,**
Director.

## Druckfehler in der Abhandlung.

Seite 3: Formel 2 fehlt ein Gleichheitszeichen.
„ 4: Zeile 6 und 7 von unten lies

$$(u-v)^2 \text{ st. } (u-v^2)$$

„ 7: Zeile 7 von unten lies

$$\sqrt{a^2+b^2-r^2} \text{ st. } \sqrt{a^3+b^2-r^2}$$